



**Universidade  
Estadual de Londrina**

---

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**DIMENSÃO FRACTAL DE CONJUNTOS  
COMPACTOS E DE ATRADORES GLOBAIS**

Gustavo Lopes Perosini

LONDRINA-PR  
2025

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

# **DIMENSÃO FRACTAL DE CONJUNTOS COMPACTOS E DE ATRADORES GLOBAIS**

Gustavo Lopes Perosini

Dissertação orientada pelo Professor Livre-Docente Marcio A. Jorge da Silva e apresentada à Universidade Estadual de Londrina como parte dos requisitos necessários para a conclusão do Mestrado em Matemática.

Londrina-PR  
Fevereiro – 2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

P453d Perosini, Gustavo Lopes.  
Dimensão Fractal de Conjuntos Compactos e de Atratores Globais / Gustavo Lopes Perosini. - Londrina, 2025.  
145 f. : il.

Orientador: Marcio Antonio Jorge da Silva.  
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2025.  
Inclui bibliografia.

1. Dimensão Fractal - Tese. 2. Sistemas Dinâmicos - Tese. 3. Atratores Globais - Tese. I. Jorge da Silva, Marcio Antonio . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

CDU 51

GUSTAVO LOPES PEROSINI

**DIMENSÃO FRACTAL DE CONJUNTOS COMPACTOS  
E DE ATRADORES GLOBAIS**

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado à Universidade Estadual de  
Londrina – UEL, como requisito parcial para a  
obtenção do título de Mestre em Matemática  
Aplicada e Computacional.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Orientador: Prof. Dr. Marcio A. Jorge da Silva  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Prof. Dr. Arthur Henrique Caixeta  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Londrina, 27 de fevereiro de 2025.

*“Há mais imaginação em Arquimedes do que em Homero” — Voltaire.*

*“O rio não quer chegar, mas tornar-se mais profundo” — Guimarães Rosa.*

# Agradecimentos

Quem se dedica aos estudos e à pesquisa com curiosidade genuína está sempre insatisfeito: para cada resposta encontrada, mil novas perguntas ganham vida. Ao longo da elaboração deste trabalho, muitas dúvidas surgiram que não foram respondidas a contento. Quando um conceito era finalmente dominado, várias de suas consequências ainda pareciam misteriosas, demandando uma interpretação adequada ou uma explicação complementar que nem sempre era encontrada.

Sendo essa a sina do pesquisador que se vincula em nível emocional com seus estudos, é inevitável que, se eu me deixasse levar pelas exigências que imponho a mim mesmo, esta dissertação talvez nunca teria sido levada a público: eu iria continuar perseguindo resultado após resultado *ad aeternum*, comparando interpretações com mestres e colegas de diversas áreas e refletindo sobre o significado de cada teorema em busca do inalcançável ideal de uma compreensão completa e definitiva do assunto.

Felizmente, a gratidão pelos meus amigos que me acompanharam de perto no desenvolvimento deste trabalho supera em muito essa perseguição cega que talvez nem sequer faça sentido. Em verdade, apesar de o caminho que temos pela frente fazer parecer pequeno o trajeto que percorremos até aqui, devemos ser honestos com nossos esforços e perceber o quanto crescemos nessa jornada toda: muitos aprendizados (não só de caráter intelectual), muitos diálogos estimulantes e muita amizade sincera, com respeito mútuo, vieram à tona graças à boa vontade, à inteligência e à admirável disposição didática de um grupo de pessoas sem as quais hoje eu seria apenas uma mera sombra de mim mesmo.

É por isso que fico feliz em admitir que minha maior motivação para concluir esta dissertação é a oportunidade que me é concedida de agradecer publicamente às seguintes pessoas (em ordem alfabética):

- Albo Carlos Cavaleiro;
- Alexandre Nolasco de Carvalho;
- Arthur Henrique Caixeta;
- Carlos Eduardo Miranda;
- Heraclio Ledger López Lázaro;
- Eduardo Henrique Gomes Tavares;
- Eliandro R. Cirilo;
- James C. Robinson;

- João Carlos Ferreira Costa;
- Juliana Carvalho Pavão;
- Leonardo Gustavo Ronchin Alves;
- Luiz Henrique Romero;
- Marcio Antonio Jorge da Silva;
- Michele de Oliveira Alves;
- Neuza Teramon;
- Paulo Fernando Mercadante Damazio;
- Paulo Laerte Natti;
- Rafael Gabardo da Camara;
- Ricardo Cezar Ferreira;
- Rodrigo Nunes Monteiro;
- Sandra Malta Barbosa;
- Talita Carvalho Pessoa.

Agradecimentos especiais são destinados ao meu orientador, Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva, que me acompanha com paciência e dedicação desde o primeiro ano da graduação, e à banca examinadora, Prof. Dr. Albo Carlos Cavalheiro, Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho, Prof. Dr. Arthur Henrique Caixeta e Prof. Dr. Rodrigo Nunes Monteiro, por quem tenho respeito e admiração imensos e de quem sei que o trabalho vai receber o melhor crivo possível.

Agradeço à minha família (Juliana, João, Zilda, Rafael, Mariana, Sofia e Isis) pelo respeito às minhas escolhas (as quais muitas vezes desafiam o bom-senso, mas que são importantes para mim).

Agradeço à Universidade Estadual de Londrina (UEL), que me acolhe há mais de uma década em seus bancos discentes, e em mais de um centro. Agradeço também à CAPES pelo indispensável auxílio financeiro concedido por meio da bolsa PICME. Agradeço, ainda, ao IMPA e à toda equipe que viabiliza a realização da OBMEP e dos cursos de iniciação científica a ela vinculados, que são instrumentos riquíssimos de descoberta e catalização de talentos matemáticos.

Por fim, mas com não menos importância, destaco que, muito embora a pesquisa tenha sido realizada com colaboração constante dos meus mestres e colegas de estudos, é óbvio que todos os (possivelmente muitos) erros e imperfeições deste trabalho são de responsabilidade exclusiva do autor.

# Resumo

O objetivo principal deste trabalho é expor algumas técnicas para estimar a dimensão fractal (dimensão box-counting superior) de atratores de sistemas dinâmicos dissipativos cujo espaço de fase seja de dimensão infinita. É apresentada uma introdução sucinta à teoria de sistemas dinâmicos, com ênfase em sistemas dissipativos e no conceito de atrator global. Também é apresentada uma introdução detalhada à dimensão box-counting e às suas propriedades, com exemplos e contraexemplos elucidativos. Alguns critérios para estimar a dimensão fractal de certos conjuntos, bem como para garantir dimensão finita de atratores em contextos específicos, são demonstrados em minúcias.

**Palavras-chave:** Atrator Global; Dimensão Box-Counting; Dimensão Fractal; Sistemas Dinâmicos Dissipativos.



# Abstract

The aim of this work is to present some techniques for estimating the fractal dimension (upper box-counting dimension) of global attractors for infinite-dimensional dissipative dynamical systems. A brief introduction to the theory of dynamical systems is presented, with emphasis on dissipative systems and on the concept of global attractor. It is also provided in this work an in-depth introduction to the box-counting dimension and its properties, with clarifying examples and counterexamples. Some criteria to estimate the fractal dimension of certain sets, as well as to ensure finite-dimensionality of attractors in some scenarios, are proved in detail.

**Key-words:** Box-Counting Dimension; Dissipative Dynamical Systems; Fractal Dimension; Global Attractor.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>Lista de Símbolos e Notações</b>	<b>6</b>
<b>1 Conceitos e Resultados Preliminares</b>	<b>11</b>
1.1 Distância de Hausdorff . . . . .	12
1.2 Medida de Não-Compacidade . . . . .	28
<b>2 Introdução a Sistemas Dinâmicos</b>	<b>31</b>
2.1 Operadores de Evolução e Sistemas Dinâmicos . . . . .	34
2.2 Sistemas Dinâmicos Dissipativos . . . . .	46
2.3 Atratores Globais . . . . .	59
<b>3 Dimensão Fractal de Conjuntos Compactos e de Atratores Globais</b>	<b>65</b>
3.1 Dimensão Fractal (Dimensão Box-Counting) . . . . .	68
3.2 Critérios para Dimensão Fractal Finita . . . . .	86
3.3 Critérios para Dimensão Fractal Finita de Atratores . . . . .	99
3.4 A $\varepsilon$ -Entropia de Kolmogorov . . . . .	103
3.5 Uma Interpretação Física para a Dimensão Fractal Finita do Atrator . . .	115
<b>Conclusão</b>	<b>120</b>
<b>Apêndices</b>	<b>122</b>
Apêndice A: Fractais Autossimilares . . . . .	123
Apêndice B: Dimensão de Hausdorff . . . . .	136
Apêndice C: Contraexemplo Notável . . . . .	140
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>143</b>

# Introdução

*“Os matemáticos comparam os  
mais diversos fenômenos e  
descobrem as analogias secretas  
que os unem”*

---

— Joseph Fourier, [45].

Este trabalho lida com aplicações de Geometria Fractal em Sistemas Dinâmicos. Em especial, a dissertação versa sobre dimensão box-counting superior, um conceito da Geometria Fractal que generaliza a ideia de dimensão topológica e que também é conhecido por *dimensão fractal*. Nosso foco está direcionado a técnicas para estimar a dimensão box-counting superior de certos conjuntos, e não em apresentar uma exposição abrangente da teoria de Sistemas Dinâmicos. Contudo, é impossível entender a relevância do tema sem alguns comentários a respeito da importância dos sistemas dinâmicos na conjuntura científica e matemática atual.

A teoria de Sistemas Dinâmicos é um ramo bastante amplo da matemática moderna. Tão amplo, aliás, que é difícil estabelecer com precisão quais são seus métodos e objetos de estudo. Em verdade, como se trata de uma área em acelerado desenvolvimento contemporâneo e que se vale de recursos variados da Análise, da Geometria, da Topologia e de Métodos Numéricos, talvez seja restritivo demais estipular precocemente metodologias muito enrijecidas para um campo em tão fecundo florescimento ([25]). Some-se a isso o fato de que, embora seja uma área da matemática pura em toda sua abstração, sistemas dinâmicos são estudados primordialmente com vistas a fins práticos, buscando descrever e obter informações sobre fenômenos reais de interesse das ciências aplicadas ([25], [46]). Assim sendo, contribuições inusitadas de ideias originárias de outras áreas de conhecimento são não apenas bem-vindas, mas também desejadas. Veremos, inclusive, que o conceito de dimensão fractal — central nesta dissertação — provém de estudos que, à primeira vista, não guardam relações diretas com sistemas dinâmicos.

Apesar dessa advertência inicial, o foco de atenção dessa teoria é fácil de ser indicado: Sistemas Dinâmicos, como o próprio nome sugere, ocupam-se do estudo do comportamento de sistemas que variam ao longo do tempo. Nessa conceitualização tão vasta, é praticamente impossível pensar em algum tema da mecânica clássica ou de qualquer outra ciência exata que não dê origem a algum sistema dinâmico. Órbitas planetárias, circuitos elétricos, dinâmica dos fluidos, estabilidade de vigas, crescimento populacional, decaimento radioativo e dinâmica macroeconômica são apenas alguns dos temas cuja compreensão se beneficia diretamente de resultados da teoria de Sistemas Dinâmicos ([26]). A problemática típica da disciplina é: “o sistema em análise entra em equilíbrio, fica se

repetindo em ciclos ou faz algo mais complicado?” ([46]).

Os três principais elementos de um sistema dinâmico, visto no caráter mais abstrato possível, são: i) Espaço de fases (um espaço métrico cujos elementos representam os possíveis estados do sistema); ii) Tempo (normalmente representado por  $t$ ); iii) Regra de evolução ao longo do tempo (uma lei que determina o estado do sistema em cada momento  $t$ , levando ou não em consideração todos os estados em tempos anteriores).

Neste trabalho, vamos dedicar nossa atenção quase que exclusivamente a sistemas dinâmicos contínuos e dissipativos de dimensão infinita. Sistemas dissipativos são aqueles sujeitos a forças que fazem decrescer a energia do sistema. Por “contínuo”, estamos nos referindo a sistemas que variam continuamente ao longo do tempo — isto é, sistemas que dependem de um parâmetro  $t \in \mathbb{R}$  ou  $t \in \mathbb{R}_+$  —, em oposição a sistemas discretos, cujo estado é avaliado em etapas enumeráveis. Sistemas dinâmicos contínuos em geral provêm de equações diferenciais. Quando essas equações são equações diferenciais parciais, o sistema dinâmico que lhe é respectivo fica determinado em um espaço de fase com dimensão infinita (dimensão infinita no sentido clássico de Análise Funcional, como, por exemplo, nos casos do espaço das funções contínuas, dos espaços de Lebesgue  $L^p$  ou dos espaços de Sobolev).

No estudo da dinâmica de longo prazo de um sistema dissipativo, o principal conceito de interesse é o atrator global. O atrator de um sistema é um conjunto de estados para os quais esse sistema tende a evoluir, e deles não escapar, para uma ampla gama de condições iniciais. Nesse sentido, o atrator (quando existe) pode ser considerado como o “estado típico” do sistema: mais precisamente, o conjunto de estados em que, após variações transientes que levam mais ou menos tempo em cada caso, o sistema se estabiliza de modo definitivo, quando as diversas forças atuantes em algum sentido conseguem compensar-se entre si ([9], [20]). Isso não significa, entretanto, que o atrator seja composto apenas por estados estacionários: muito pelo contrário, ele pode conter dinâmicas altamente complexas ([39]).

Por razões ainda hoje não de todo explicadas (inclusive sendo surpreendente mesmo para especialistas no assunto, conforme [38]), muitos sistemas dinâmicos dissipativos oriundos de EDPs da Física Matemática possuem atratores com dimensão fractal finita. Isso indica que, apesar da dimensão infinita do espaço de fases, o estado típico do sistema de algum modo pode ser descrito pela evolução de uma quantidade finita de parâmetros ([36]).

É neste contexto em específico que se enquadra esta dissertação. Visamos apresentar algumas técnicas úteis para estimar superiormente a dimensão fractal de certos conjuntos, buscando averiguar casos em que é possível garantir dimensão fractal finita. Apesar de muitos desses resultados serem aqui enunciados em caráter abstrato (independentes de qualquer referência a sistemas dinâmicos), é certo que esses resultados visam ser aplicados para atratores de sistemas originários de equações diferenciais parciais.

Como se vê, apesar de envolver técnicas matemáticas que podem ser consideradas um tanto dificultosas, o escopo deste trabalho é bastante modesto.

Pré-requisitos necessários são conhecimentos básicos de Análise em  $\mathbb{R}^n$ , Análise Funcional e Espaços Métricos. Nenhum conhecimento prévio de Geometria Fractal é exigido, pois a teoria necessária a esse respeito é aqui apresentada desde suas fundações.

Vejamos como o tema foi estruturado.

## Organização da Dissertação

**Lista de Símbolos e Notações:** Apresentamos uma lista com as notações empregadas ao longo do texto e as definições básicas consideradas como sendo de conhecimento prévio do leitor (bolas, limites, convergência, composição de funções, espaço completo, etc.). O propósito deste capítulo foi o de tornar mais fluída a leitura do material, eliminando a necessidade de definições incidentais no corpo do texto que desviassem a atenção de resultados essenciais para detalhes técnicos secundários. Sem prejuízo para a compreensão, definições menos usuais (como a de vizinhança aberta e a de distância de Hausdorff) foram enunciadas novamente em momentos propícios.

**Capítulo 1:** Este capítulo apresenta resultados preliminares que serão úteis no desenvolvimento da teoria de Sistemas Dinâmicos.

A Seção 1.1 trata de vizinhanças, da semidistância de Hausdorff e da distância de Hausdorff, que são ferramentas úteis para medir o quanto um conjunto  $A$  está próximo ou não de estar contido em um conjunto  $B$  (ideia fundamental para caracterizar atratores). Essa seção é elementar e sua leitura pode ser dispensada por parte de leitores já familiarizados com o tema.

A Seção 1.2 trata da medida de não-compacidade de Kuratowski, apresentando suas principais propriedades. Trata-se de uma ferramenta que mede o quanto um conjunto é ou não compacto. Essa ferramenta vai ser útil no estudo de compacidade assintótica.

**Capítulo 2:** Este capítulo traz uma introdução sucinta a Sistemas Dinâmicos, com ênfase em sistemas dinâmicos dissipativos de dimensão infinita. São abordados conceitos essenciais, como: operadores de evolução, conjuntos invariantes, trajetórias, conjuntos  $\omega$ -limite, estabilidade, conjuntos absorventes, dissipatividade, compacidade assintótica e atratores globais.

**Capítulo 3:** Neste capítulo se encontra o cerne da dissertação. Nele são apresentadas as definições e os resultados essenciais de Geometria Fractal, bem como são estabelecidos alguns critérios para estimar a dimensão fractal de conjuntos compactos e de atratores globais.

A Seção 3.1 traz os fundamentos matemáticos da Geometria Fractal, definindo a dimensão box-counting e apresentando suas propriedades.

A Seção 3.2 apresenta alguns critérios para estimar superiormente a dimensão fractal de certos conjuntos, com ênfase em conjuntos compactos em espaços de dimensão infinita. O principal resultado nesse sentido é o Teorema 3.2.9.

A Seção 3.3 se vale dos resultados da seção precedente para apresentar critérios semelhantes, mas específicos para atratores de sistemas dissipativos.

A Seção 3.4 faz uma análise mais aprofundada do Teorema 3.2.9, que é o principal teorema do qual decorrem os demais resultados abordados ao longo do capítulo. Essa seção foi motivada pelo interesse que os autores tinham em relaxar uma das hipóteses do Teorema 3.2.9 a fim de tornar possível sua aplicação em uma EDP específica. Infelizmente, as tentativas nessa direção foram inconclusivas. Contudo, as técnicas abordadas nessa seção trazem ideias renovadas para demonstrar resultados similares ao Teorema 3.2.9 em

termos da  $\varepsilon$ -entropia de Kolmogorov.

A Seção 3.5 oferece uma breve interpretação física a respeito do significado de o atrator de um sistema dinâmico possuir dimensão fractal finita, relacionando dimensão fractal com a ideia física de graus de liberdade.

**Apêndices:** Os apêndices formam parte significativa desta dissertação e são destinados aos leitores curiosos em Geometria Fractal para além de aplicações em Sistemas Dinâmicos.

O Apêndice A faz um resumo (sem preocupação com demonstrações ou technicalidades) da moderna teoria para calcular dimensão box-counting de fractais autossimilares, que são aqueles conjuntos compostos por cópias perfeitas de si mesmos em escalas reduzidas. Nesse apêndice, são abordados exemplos famosos, como o Conjunto de Cantor, o Triângulo de Sierpinski e a Curva de Koch. Além disso, são apresentados métodos clássicos para calcular com exatidão o valor da dimensão do Conjunto de Cantor e do gráfico da função  $\sin(1/x)$ , métodos estes que proporcionam *insights* valiosos para adquirir prática com a dimensão box-counting.

O Apêndice B traz a definição da dimensão de Hausdorff e as demonstrações de suas principais propriedades (em especial de sua relação com a dimensão box-counting). Em diversos contextos, que não em Sistemas Dinâmicos, a dimensão de Hausdorff é utilizada com mais frequência do que a dimensão box-counting, por possuir propriedades mais desejáveis e que mais naturalmente se associam à ideia de dimensão.

O Apêndice C exhibe um conjunto (de construção bastante engenhosa) que deixa claro o motivo de, no contexto de Sistemas Dinâmicos, a dimensão box-counting ser considerada mais vantajosa do que a dimensão de Hausdorff.

## Metodologia e Referências

A principal metodologia empregada na construção desta dissertação foi a revisão bibliográfica seguida de seminários e discussões a respeito dos resultados estudados. Boa parte dos resultados aqui apresentados — cujos erros, omissões e imprecisões são de responsabilidade única e exclusiva do autor — foram examinados em detalhes ao longo de estimulantes atividades no mestrado em Matemática da UEL, o PGMAC, com colaboração inestimável de Arthur, Leonardo, Paulo Fernando, Rafael e Rodrigo (todos indicados nos agradecimentos desta dissertação).

A referência-base de toda a dissertação foi o livro *Dynamics of Quasi-Stable Dissipative Systems*, de Igor Chueshov, [9].

No que concerne à teoria introdutória de Sistemas Dinâmicos Dissipativos de Dimensão Infinita, as principais referências foram [9] e [10]. As excelentes referências [7], [36] e [38] foram consultadas em caráter complementar, e é de se destacar que elas proporcionaram ideias de grande clareza para o entendimento do tema.

Quanto à teoria introdutória à Geometria Fractal, foi utilizada a clássica referência [15], com valiosos complementos de [14] e [16]. Eventuais pontos obscuros foram sanados com consultas a [3], [13]. Interpretações para além da matemática pura, curiosidades e desenvolvimento histórico dos fractais e das dimensões fractais foram estudados em [12] e [28].

Resultados envolvendo estimativas de dimensão fractal foram obtidos, primariamente, por meio das referências [9], [11], e [48].

O estado da arte a respeito das consequências teóricas da finitude-dimensional de atratores foi examinada por meio das referências [7], [17], [29], [36], [37], [38] e [43].

As referências [2], [26] e [46] foram consultadas para proporcionar um vislumbre abrangente da teoria de Sistemas Dinâmicos em caráter mais panorâmico, não restrita exclusivamente a sistemas dissipativos ou contínuos ou de dimensão infinita.

Ocasionais consultas a resultados de outras disciplinas foram obtidas nas referências que passamos a listar. Análise Real e Análise em  $\mathbb{R}^n$ : [18], [21] e [23]. Análise Funcional: [24], [27], [35] e [41]. Espaços Métricos: [23].

Notas históricas e informações sobre relações do tema com outras ciências foram obtidas em [12], [25] e [46].

# Lista de Símbolos e Notações

Neste trabalho, convencionamos adotar as seguintes notações e nomenclaturas:

- Bolas:

- Bola Aberta (de centro  $a$  e raio  $r$  em um espaço métrico  $X$ ):

$$B(a, r) := \{x \in X; d(a, x) < r\}.$$

- Bola Fechada (de centro  $a$  e raio  $r$  em um espaço métrico  $X$ ):

$$B[a, r] := \{x \in X; d(a, x) \leq r\}.$$

- Conjuntos, Operações entre Conjuntos e Funções sobre Conjuntos:

- Compacidade:

- Dizemos que um conjunto é compacto quando toda cobertura aberta para esse conjunto admite uma subcobertura finita.
- Dizemos que um conjunto é relativamente compacto quando seu fecho é compacto.

- Complemento entre Conjuntos:  $X \setminus Y := X - Y := \{x \in X; x \notin Y\}$ .

- Conjunto Produto:  $\lambda X := \{\lambda x; x \in X\}$ .

- Conjunto Soma:  $X + Y := \{z = x + y; x \in X, y \in Y\}$ .

- Conjunto Transladado:  $a + X := \{a + x; x \in X\}$ .

- Diâmetro de um Conjunto:  $\text{diam}(X) := \sup_{x, y \in X} d(x, y)$ .

- Família das Partes:  $2^X := \{Y; Y \subset X\}$ .

- Família dos Subconjuntos Compactos e Não-Vazios:

$$\mathcal{K}(X) := \{K \subset X; K \text{ é compacto e não-vazio}\}.$$

- Limitação (Conjuntos Limitados e Totalmente Limitados):

- $X \subset M$  é limitado quando existe uma bola de raio finito que contém  $X$ .
- $X \subset M$  é totalmente limitado quando, para qualquer  $\varepsilon > 0$ ,  $X$  pode ser coberto por uma quantidade finita de bolas de raio  $\varepsilon$ .

- Máximo de Elementos:  $\max \#\{*\}$  representa o número de elementos do maior conjunto que possui a propriedade  $*$ . Se existir uma família infinita  $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  de conjuntos satisfazendo  $*$ , podemos tomar  $\max \#\{*\} := \sup_{\lambda \in \Lambda} \#(X_\lambda)$ .



- Número de Elementos de um Conjuntos:  $\#(X)$  representa o número de elementos pertencentes a  $X$ .
- Vizinhança Aberta de um Conjunto  $Y \subset X$ :  $V_\varepsilon(Y) := \{x \in X; d(x, Y) < \varepsilon\}$ .
- Vizinhança Fechada de um Conjunto  $Y \subset X$ :  $V_\varepsilon[Y] := \{x \in X; d(x, Y) \leq \varepsilon\}$ .
- União Disjunta:  $\bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda$  representa a união de todos os conjuntos  $X_\lambda$ , com  $\lambda \in L$ , e afirma que  $X_\lambda \cap X_\gamma = \emptyset$  sempre que  $\lambda \neq \gamma$ .
- $\varepsilon$ -cobertura: Uma família enumerável de conjuntos  $\{F_i\}_i$  é uma  $\varepsilon$ -cobertura de  $F$  se  $F \subset \bigcup_i F_i$  e  $\text{diam}(F_i) \leq \varepsilon$ .
- Convergências:
  - Convergência Usual (em espaços métricos):  $x_n \rightarrow x$  significa que  $d(x_n, x) \rightarrow 0$ .
  - Convergência Forte (convergência usual em espaços normados):  $x_n \rightarrow x$  significa que  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ .
  - Convergência Fraca: dada uma sequência  $(x_n)$  em um espaço vetorial  $X$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$ , escrevemos que  $x_n \xrightarrow{w} x$  quando, para toda aplicação linear limitada  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ , vale que  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .
  - Convergência de Conjuntos sob a Distância de Hausdorff:  $X_n \xrightarrow{H} X$  significa que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_H(X_n, X) = 0$ .
  - Convergência de Conjuntos sob a Semidistância de Hausdorff:  $X_n \xrightarrow{h} X$  significa que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_h(X_n | X) = 0$ .
  - Convergência Crescente:  $x_n \nearrow x$  significa que  $(x_n)$  é crescente e que  $x_n \rightarrow x$ .
  - Convergência Decrescente:  $x_n \searrow x$  significa que  $(x_n)$  é decrescente e que  $x_n \rightarrow x$ .
- Distâncias:
  - Distância entre Pontos:  $d$  é a distância implicitamente adotada em um conjunto  $X$ , constituindo o espaço métrico  $(X, d)$ .
  - Distância de Ponto a Conjunto:  $d(y, X) := \inf_{x \in X} d(y, x)$ .
  - Distância (usual) de Conjunto a Conjunto:  $d(Y, X) := \inf_{\substack{y \in Y \\ x \in X}} d(y, x)$ .
  - Semidistância de Hausdorff de um Conjunto  $X$  a um Conjunto  $Y$ : pode ser definida de três formas equivalentes:
    - $d_h(X | Y) := \sup_{x \in X} d(x, Y)$
    - $d_h(X | Y) := \inf \{\delta \geq 0; Y \subset V_\delta(X)\}$
    - $d_h(X | Y) := \inf \{\delta \geq 0; Y \subset V_\delta[X]\}$ .
  - Distância de Hausdorff entre Dois Conjuntos: pode ser definida de quatro formas equivalentes:

- $d_H(Y, X) := \max \left\{ \sup_{y \in Y} d(y, X), \sup_{x \in X} d(x, Y) \right\}$
- $d_H(Y, X) := \max \{d_h(Y|X), d_h(X|Y)\}$
- $d_H(Y, X) := \inf \{\delta \geq 0; Y \subset V_\delta(X) \text{ e } X \subset V_\delta(Y)\}$
- $d_H(Y, X) := \inf \{\delta \geq 0; Y \subset V_\delta[X] \text{ e } X \subset V_\delta[Y]\}$ .
- Espaços Vetoriais:
  - Espaço Completo: é um espaço métrico tal que toda sequência de Cauchy nele contida converge para algum elemento pertencente a esse próprio espaço.
  - Espaço de Banach: é um espaço métrico completo munido de uma norma.
  - Espaço de Hilbert: é um espaço métrico completo munido de um produto interno.
- Funções Especiais:
  - Delta de Kronecker:  $\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$
  - Função Característica de um Conjunto  $E$ :  $\mathbb{1}_E(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E, \\ 0, & \text{se } x \notin E. \end{cases}$
  - Função Identidade:  $Id := f : X \rightarrow X$  tal que  $f(x) = x$  para todo  $x \in X$ .
  - Função Piso:  $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z}; k \leq x\}$ .
  - Função Teto:  $\lceil x \rceil := \min\{k \in \mathbb{Z}; k \geq x\}$ .
- Integrais:
  - A Integral de Riemann de uma função  $f$  contínua quase-sempre sobre um intervalo  $[a, b]$  é denotada por  $\int_a^b f(x)dx$ .
  - A Integral de Lebesgue de uma função mensurável  $f$  sobre um conjunto mensurável  $E$  é denotada por  $\int_E f(x)dx$ . Se  $E$  for um intervalo limitado  $[a, b]$ , utilizaremos a mesma notação da integral de Riemann.
- Limites de Funções:
  - Limite Inferior:  $\varliminf_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x) := \lim_{r \rightarrow 0} (\inf\{f(x); 0 < x < r\})$ .
  - Limite Superior:  $\varlimsup_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x) := \lim_{r \rightarrow 0} (\sup\{f(x); 0 < x < r\})$ .
- Limites de Sequências:
  - Limite Inferior:  $\varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \inf_{n > m} \{x_n\} \right)$ .
  - Limite Superior:  $\varlimsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sup_{n > m} \{x_n\} \right)$ .

- Notações de Landau (quando está implícito que  $x \rightarrow a \in \overline{\mathbb{R}}$ ):
  - Equivalência assintótica:  $f(x) \approx g(x)$  significa que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ .
  - O-grande:  $f \in O(g)$  significa que existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < M$ .
  - o-pequeno:  $f \in o(g)$  significa que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .
- Normas
  - Norma: uma função  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma norma quando satisfaz
    1.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,  $x, y \in X$ ,
    2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{T}, x \in X$ ,
    3.  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .
  - Seminorma: uma função  $n : X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma seminorma quando satisfaz
    1.  $n(x + y) \leq n(x) + n(y)$ ,  $x, y \in X$ ,
    2.  $n(\lambda x) = |\lambda| n(x)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{T}, x \in X$ .
  - Seminorma Compacta: uma seminorma  $n$  é dita compacta quando toda sequência limitada possui uma subsequência que é de Cauchy com respeito a  $n$ .
- Operadores:
  - Composição de Operadores:  $S_t S_s x := (S_t \circ S_s)x := S_t(S_s x)$ .
  - Composições Reiteradas:  $S^n(x) := \underbrace{S \circ \dots \circ S}_{n \text{ vezes}}(x)$ .
  - Operador Linear:  $S : X \rightarrow Y$ , com  $X, Y$  sendo espaços vetoriais sobre o corpo  $\mathbb{K}$ , é um operador linear quando  $S(\lambda x + y) = \lambda S(x) + S(y)$  para todo  $x, y \in X$  e para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$ .
  - Operador Limitado/Contínuo:  $S : X \rightarrow Y$  é limitado (e, portanto, contínuo) quando é um operador linear tal que existe uma constante  $M \in \mathbb{R}_+$  tal que  $\|Sx\| \leq M \|x\|$  para todo  $x \in X$ .
  - Norma de um Operador Limitado: Se  $S : X \rightarrow Y$  é um operador limitado, definimos  $\|S\| := \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Sx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|Sx\|$ .
  - Operador Fechado:  $S : X \rightarrow Y$  é fechado quando  $S$  é um operador linear tal que, se  $(x_n) \subset X$ ,  $x_n \rightarrow x$  e  $Sx_n \rightarrow y$ , então  $x \in X$  e  $Sx = y$ .
  - Operador Compacto:  $S : X \rightarrow Y$  é compacto quando  $S$  é um operador linear tal que, se  $D \subset X$  é limitado, então  $S(D) \subset Y$  é relativamente compacto.
  - Tempo:  $\mathbb{T}$  representa  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Z}$ . Também definimos  $T_+ := \{t \in \mathbb{T}; t \geq 0\}$  e, analogamente,  $T_- := \{t \in \mathbb{T}; t \leq 0\}$ .
  - Reta Estendida:  $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , com as relações aritméticas usuais (lembrando que estão indefinidas expressões como  $\infty - \infty$ ,  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$  e  $\frac{0}{\pm\infty}$ , entre outras).

- Sequências Monótonas:
  - Sequência Crescente:  $t_1 < t_2 \Rightarrow x_{t_1} \leq x_{t_2}$ .
  - Sequência Estritamente Crescente:  $t_1 < t_2 \Rightarrow x_{t_1} < x_{t_2}$ .
  - Sequência Decrescente:  $t_1 < t_2 \Rightarrow x_{t_1} \geq x_{t_2}$ .
  - Sequência Estritamente Decrescente:  $t_1 < t_2 \Rightarrow x_{t_1} > x_{t_2}$ .
- Subsequências: dada a subsequência  $(x_n) \subset X$ , denotamos uma subsequência de  $(x_n)$  por  $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$  ou por  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ , onde está implícito que  $\mathbb{N}'$  é um subconjunto infinito de  $\mathbb{N}$  (note que  $\mathbb{N}'$  será tacitamente definido caso a caso).

# Capítulo 1

## Conceitos e Resultados Preliminares

*“Aquilo que há de melhor na matemática não merece ser aprendido apenas como obrigação; deve ser assimilado como parte do pensamento diário e depois lembrado vezes e vezes seguidas, com interesse sempre renovado”*

---

— Bertrand Russell, [42].

Neste capítulo, vamos apresentar algumas ferramentas e resultados básicos que serão úteis no estudo de Sistemas Dinâmicos. A teoria aqui abordada é predominantemente elementar, exigindo apenas conhecimentos básicos de Espaços Métricos. Leitores familiarizados com o tema podem omitir a leitura das próximas páginas sem qualquer prejuízo na compreensão do assunto central do trabalho, a ser apresentado a partir do Capítulo 2.

Este primeiro capítulo foi escrito com o objetivo de preencher uma lacuna que os autores sentiram existir na literatura. Embora os resultados aqui apresentados sejam relativamente simples, não foram encontrados materiais que os abrangessem em sua totalidade, de forma organizada e sistematizada. Sobretudo no que diz respeito à semidistância de Hausdorff, acreditamos que uma exposição organizada de suas propriedades seja algo benéfico para facilitar o trabalho de estudantes e até mesmo de pesquisadores. Por mais que essas propriedades sejam óbvias ou pelo menos de fácil verificação por parte de matemáticos experientes, a existência de um material que as apresente em detalhes é útil para consulta e economia de tempo.

## 1.1 Distância de Hausdorff

### Vizinhanças de Conjuntos

Nesta seção, vamos apresentar conceitos básicos que vão ser utilizados na definição da Distância de Hausdorff.

**Definição 1.1.1** (Vizinhanças de Conjuntos). *Sejam  $(M, d)$  um espaço métrico,  $A \subset M$  um conjunto qualquer e  $\varepsilon > 0$  um número real.*

*A  $\varepsilon$ -vizinhança aberta de  $A$  é o conjunto*

$$V_\varepsilon(A) := \{x \in M; d(x, A) < \varepsilon\}.$$

*A  $\varepsilon$ -vizinhança fechada de  $A$  é o conjunto*

$$V_\varepsilon[A] := \{x \in M; d(x, A) \leq \varepsilon\}.$$

**Proposição 1.1.2.** *[Propriedades de Vizinhanças] Sejam  $(M, d)$  um espaço métrico e  $X, A, B \subset M$  conjuntos não-vazios. Valem os seguintes resultados:*

- (i) *Se  $A \subset V_{\varepsilon_1}(B)$  e  $B \subset V_{\varepsilon_2}(C)$ , então  $A \subset V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(C)$ .*
- (ii) *Se  $A \subset V_{\varepsilon_1}[B]$  e  $B \subset V_{\varepsilon_2}[C]$ , então  $A \subset V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}[C]$ .*
- (iii) *Definição equivalente para a  $\varepsilon$ -vizinhança aberta de um conjunto:*

$$V_\varepsilon(X) = \bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon).$$

- (iv) *Definição equivalente para a  $\varepsilon$ -vizinhança fechada de um conjunto:*

$$V_\varepsilon[X] = \bigcup_{x \in X} B[x, \varepsilon].$$

- (v) *Definição equivalente para a  $\varepsilon$ -vizinhança fechada de um conjunto:*

$$V_\varepsilon[X] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_{\varepsilon + \frac{1}{n}}(X).$$

- (vi) *Caracterização de fecho de um conjunto por meio de vizinhanças abertas:*

$$\overline{X} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_{\frac{1}{n}}(X).$$

- (vii) *Relação entre vizinhança aberta e vizinhança fechada:  $\overline{V_\varepsilon(X)} = V_\varepsilon[X]$ .*
- (viii) *Dado qualquer  $X \subset M$  não-vazio, o conjunto  $V_\varepsilon(X)$  é aberto (em  $M$ ) e o conjunto  $V_\varepsilon[X]$  é fechado (em  $M$ ).*

(ix) Se  $A \cap B \neq \emptyset$ , então  $V_\varepsilon(A \cap B) \subset [V_\varepsilon(A) \cap V_\varepsilon(B)]$ . A inclusão inversa pode não ocorrer; i. e., nem sempre vale que  $[V_\varepsilon(A) \cap V_\varepsilon(B)] \subset V_\varepsilon(A \cap B)$ .

(x) Vale que  $V_\varepsilon(A \cup B) = V_\varepsilon(A) \cup V_\varepsilon(B)$ .

*Demonstração.*

(i) Seja  $a \in A$ . Como  $A \subset V_{\varepsilon_1}(B)$ , segue que  $a \in V_{\varepsilon_1}(B)$ . Logo,  $d(a, B) < \varepsilon_1$ . Ou seja,

$$\inf_{b \in B} d(a, b) := I < \varepsilon_1.$$

Pela definição de ínfimo, existe  $(b_n) \subset B$  tal que

$$d(a, b_n) < I + 1/n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} (I + 1/n) = I < \varepsilon_1$ , sabemos que existe  $b_0 \in B$  tal que

$$d(a, b_0) < \varepsilon_1.$$

Como  $b_0 \in B \subset V_{\varepsilon_2}(C)$ , sabemos (por razão análoga ao raciocínio feito nos parágrafos anteriores) que existe  $c_0 \in C$  tal que

$$d(b_0, c_0) < \varepsilon_2.$$

Assim, vemos que

$$d(a, c_0) \leq d(a, b_0) + d(b_0, c_0) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Ora, isso significa que

$$d(a, C) = \inf_{c \in C} d(a, c) \leq d(a, c_0) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Por isso podemos concluir que  $a \in V_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}(C)$  e, portanto, que  $A \subset V_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}(C)$ .

(ii) Seja  $a \in A$ . Pela hipótese, temos que  $a \in V_{\varepsilon_1}[B]$ . Logo,  $d(a, B) \leq \varepsilon_1$ . Ou seja,

$$\inf_{b \in B} d(a, b) \leq \varepsilon_1.$$

Pela definição de ínfimo, existe  $(b_n) \subset B$  tal que

$$d(a, b_n) < \varepsilon_1 + 1/n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como  $b_n \in B \subset V_{\varepsilon_2}[C]$ , segue que existe  $(c_{n,m}) \subset C$  tal que

$$d(b_n, c_{n,m}) < \varepsilon_2 + 1/m, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Definindo  $c_n := c_{(n,n)}$  e aplicando a desigualdade triangular, vemos que

$$d(a, c_n) \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2/n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como essa desigualdade vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos que

$$d(a, C) = \inf_{c \in C} d(a, c) \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Isso comprova que  $A \subset V_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}[C]$ .

(iii) Se  $y \in V_\varepsilon(X)$ , então  $d(y, X) < \varepsilon$ , ou seja,

$$\inf_{x \in X} d(y, x) := I < \varepsilon.$$

Pela definição de ínfimo, existe  $(x_n) \subset X$  tal que

$$d(y, x_n) < I + 1/n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} (I + 1/n) = I < \varepsilon$ , sabemos que existe  $x_0 \in X$  tal que

$$d(y, x_0) < \varepsilon.$$

Logo,  $y \in B(x_0, \varepsilon)$  e, portanto,  $y \in \bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon)$ .

Isso mostra que  $V_\varepsilon(X) \subset \bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon)$ .

Agora, seja  $y \in \bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon)$ . Então  $y \in B(x_0, \varepsilon)$  para algum  $x_0 \in X$ . Assim,  $d(y, x_0) < \varepsilon$  e, portanto  $d(y, X) = \inf_{x \in X} d(y, x) < \varepsilon$ .

Logo,  $y \in V_\varepsilon(X)$ . Ou seja,  $\bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon) \subset V_\varepsilon(X)$ .

Agora, seja  $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_{\varepsilon + \frac{1}{n}}(X)$ . Isso significa que

$$y \in V_{\varepsilon + \frac{1}{n}}(X), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$ , temos que

$$d(y, X) \leq \varepsilon.$$

Isso garante que  $y \in V_\varepsilon[X]$ .

(iv) Seja  $y \in \bigcup_{x \in X} B[x, \varepsilon]$ . Então existe  $x_0 \in X$  tal que  $y \in B[x_0, \varepsilon]$ . Logo,  $d(y, x_0) \leq \varepsilon$ .

Isso garante que  $d(y, X) \leq \varepsilon$  e, então, que  $y \in V_\varepsilon[X]$ . Portanto  $\bigcup_{x \in X} B[x, \varepsilon] \subset V_\varepsilon[X]$ .

Seja  $y \in V_\varepsilon[X]$ . Então existe  $x_0 \in X$  tal que  $d(y, x_0) \leq \varepsilon$ . Ou seja, vale que  $y \in B[x_0, \varepsilon]$ . Portanto  $V_\varepsilon[X] \subset \bigcup_{x \in X} B[x, \varepsilon]$ .

(v) Seja  $y \in V_\varepsilon[X]$ . Isso significa que  $d(y, X) \leq \varepsilon$ , ou seja, que

$$\inf_{x \in X} d(y, x) \leq \varepsilon.$$

Logo, existe  $(x_n) \subset X$  tal que

$$d(y, x_n) < \varepsilon + 1/n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$



Assim, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , vale que

$$y \in B(x_n, \varepsilon + 1/n) \subset \bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon + 1/n) = V_{\varepsilon + \frac{1}{n}}(X).$$

Portanto  $V_\varepsilon[X] \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_{\varepsilon + \frac{1}{n}}(X)$ .

- (vi) Seja  $y \in \overline{X}$ . Dado  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $x_n \in X$  tal que  $d(y, x_n) < 1/n$ . Isso significa que  $y \in B(x_n, 1/n) \subset V_{\frac{1}{n}}(X)$ . Como essa inclusão vale para todo  $n \in \mathbb{N}$  e para todo  $y \in \overline{X}$ , segue que  $\overline{X} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_{\frac{1}{n}}(X)$ .

Agora, se  $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_{\frac{1}{n}}(X)$ , então, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $x_n \in X$  tal que  $B(y, x_n) < 1/n$ . Isso implica que  $x_n \rightarrow y$  e, portanto, que  $y \in \overline{X}$ . Logo,  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_{\frac{1}{n}}(X) \subset \overline{X}$ .

- (vii) Seja  $y \in V_\varepsilon[X]$ . Dado  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $x_n \in X$  tal que

$$d(y, x_n) < \varepsilon + 1/n.$$

Isso nos dá que

$$y \in V_{\varepsilon + \frac{1}{n}}(X) = V_{\frac{1}{n}}(V_\varepsilon(X)).$$

Como essa relação vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ , segue que

$$y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_{\frac{1}{n}}(V_\varepsilon(X)) = \overline{V_\varepsilon(X)}.$$

Com isso verificamos que  $V_\varepsilon[X] \subset \overline{V_\varepsilon(X)}$ .

Para verificar que  $\overline{V_\varepsilon(X)} \subset V_\varepsilon[X]$ , vamos recorrer a um argumento por absurdo.

Suponha que exista  $y \in V_\varepsilon[X]$  com  $y \notin \overline{V_\varepsilon(X)}$ .

Como  $d(y, X) \leq \varepsilon$ , então existe  $(x_n) \subset X$  tal que

$$d(y, x_n) \leq \varepsilon + 1/n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então  $y \in V_{\varepsilon + \frac{1}{n}}(X)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e, portanto,

$$y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_{\varepsilon + \frac{1}{n}}(X) = \overline{V_\varepsilon(X)}.$$

Isso contraria a hipótese que havíamos suposto de que  $y \notin \overline{V_\varepsilon(X)}$ .

Assim concluímos que  $\overline{V_\varepsilon(X)} \subset V_\varepsilon[X]$ .

- (viii) O item (iii) garante que  $V_\varepsilon(X)$  é união de conjuntos abertos. Logo, é aberto.

O item (vi) garante que  $V_\varepsilon[X]$  é o fecho de um conjunto. Logo, é fechado.

(ix) Seja  $x \in V_\varepsilon(A \cap B)$ . Então  $d(x, A \cap B) < \varepsilon$  e, portanto, existe  $y_0 \in A \cap B$  tal que

$$d(x, y_0) < \varepsilon \quad (y_0 \in A \text{ e } y_0 \in B).$$

Disso extraímos que  $d(x, A) \leq \varepsilon$  e  $d(x, B) \leq \varepsilon$ . Ou seja,  $x \in [V_\varepsilon(A) \cap V_\varepsilon(B)]$ .

Para comprovar que a inclusão inversa nem sempre é verdadeira, considere  $A = [1, 3] \cup [5, 6]$ ,  $B = [2, 4]$  e  $\varepsilon = 1$ . Para esses conjuntos, temos

$$\begin{aligned} V_1(A) &= (0, 7) - \{4\}, \\ V_1(B) &= (1, 5), \\ V_1(A) \cap V_1(B) &= (1, 5) - \{4\}, \\ A \cap B &= [2, 3], \\ V_1(A \cap B) &= (1, 4). \end{aligned}$$

O contra-exemplo se consuma percebendo que  $[(1, 5) - \{4\}] \not\subset (1, 4)$ .

(x) Seja  $y \in V_\varepsilon(A \cup B)$ . Então, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $x_n \in (A \cup B)$  tal que  $d(y, x_n) < 1/n$ . A relação  $x_n \in (A \cup B)$  garante  $x_n \in A$  ou  $x_n \in B$ . Como temos uma infinidade de pontos  $x_n$ , pelo menos uma dessas duas relações precisa ocorrer uma quantidade infinita de vezes; isto é,  $x_k \in A$  ou  $x_k \in B$  ocorre para alguma subsequência (infinita)  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}'} \subset (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Sem perda de generalidade, suponhamos que  $(x_k) \subset A$ . Isso significa que vale que  $d(y, x_k) \leq \varepsilon + 1/n$ , com  $x_k \in A$ . Disso extraímos que  $y \in V_\varepsilon(A)$  e, portanto, que  $y \in V_\varepsilon(A) \cup V_\varepsilon(B)$ . Logo, levando em consideração a simetria envolvida, confirmamos que sempre ocorre  $V_\varepsilon(A \cup B) \subset V_\varepsilon(A) \cup V_\varepsilon(B)$ .

Agora, seja  $y \in V_\varepsilon(A) \cup V_\varepsilon(B)$ . Isso garante, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , que existe  $x_n \in A$  ou  $x_n \in B$  tal que  $d(y, x_n) < \varepsilon + 1/n$ . Similarmente ao que foi feito antes, vamos extrair uma subsequência  $(x_k) \subset (x_n)$  tal que  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}'}$  esteja inteiramente contida em  $A$  ou em  $B$ . Sem perda de generalidade, vamos assumir  $(x_k) \subset A$ .

Ora, então  $d(y, x_k) \leq \varepsilon + 1/n$ , com  $x_k \in A$ . Isso significa que  $y \in V_\varepsilon(A) \subset V_\varepsilon(A \cup B)$ . Logo, levando em consideração a simetria envolvida, confirmamos que sempre ocorre  $V_\varepsilon(A) \cup V_\varepsilon(B) \subset V_\varepsilon(A \cup B)$ .

Portanto  $V_\varepsilon(A \cup B) = V_\varepsilon(A) \cup V_\varepsilon(B)$ .

□

# Distâncias entre Conjuntos

## Visão Geral

Estabelecer uma maneira útil de medir o quanto um conjunto  $A$  está distante de um conjunto  $B$  – e interpretar o que essa distância de fato significa – não é tarefa tão simples quanto medir a distância entre números na reta ou entre pontos em um plano. Contudo, essa tarefa é de grande importância, afinal sem uma métrica adequada não é possível definir com rigor o que entendemos por convergência de uma sequência de conjuntos.

A raiz do problema é esta: dada uma família de conjuntos  $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ , precisamos estabelecer uma métrica conveniente para descrever o que queremos dizer por uma igualdade do tipo  $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} X_\lambda = X_{\lambda_0}$ . Caso seja possível definir essa igualdade, desejamos que ela signifique que, à medida que  $\lambda$  se aproxime de  $\lambda_0$ , os conjuntos  $X_\lambda$  estão se tornando mais “parecidos” com o conjunto  $X_{\lambda_0}$  (“parecidos” no sentido de terem os mesmos elementos de  $X_{\lambda_0}$ ).

A distância usual entre conjuntos, dada por  $d(X, Y) := \inf_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} d(x, y)$ , não é adequada para essa finalidade, afinal essa distância (que nem sequer define uma métrica!) mede tão-somente o quanto o conjunto  $X$  está espacialmente longe do conjunto  $Y$ . Como exemplo, podemos imaginar que, se  $X$  e  $Y$  forem cidades, a distância  $d(X, Y)$  mede o comprimento do percurso mínimo que uma pessoa teria de caminhar para sair de uma das cidades e chegar à outra. Assim,  $d(X, Y)$  não mede o quanto a cidade  $X$  é semelhante à cidade  $Y$ . Mais explicitamente, se  $X = [0, 1)$  e  $Y = [1, 2]$ , temos que  $d(X, Y) = 0$ , muito embora  $X$  e  $Y$  não tenham nem sequer um único elemento em comum.

Veremos que a maneira mais eficiente de definir uma distância satisfatória para os nossos propósitos é por meio da distância de Hausdorff, denotada por  $d_H$ . Mostraremos que essa distância, quando restrita a conjuntos compactos não-vazios, é tal que, se  $d_H(X, Y) = 0$ , então  $X = Y$ . Em essência,  $d_H$  mede o quanto  $X$  e  $Y$  estão próximos entre si enquanto conjuntos (isto é,  $d_H$  mensura o quanto  $X$  e  $Y$  possuem ou não os mesmos elementos).

Nesta seção, trabalharemos no espaço métrico  $(M, d)$ . Todos os resultados e definições serão feitas na ambiência desse espaço métrico abstrato.

## Semidistância de Hausdorff

A fim de definir a distância de Hausdorff, é mais prático definir, primeiro, a semidistância de Hausdorff. Essa semidistância, além de ajudar na construção da distância de Hausdorff, também possui utilidades próprias, sendo bastante conveniente, por exemplo, no estudo de atratores e conjuntos absorventes em sistemas dinâmicos.

Em essência, a semidistância de Hausdorff de  $X$  a  $Y$  mede o quanto  $X$  está ou não contido em  $\bar{Y}$ .

**Definição 1.1.3** (Semidistância de Hausdorff). *Se  $X, Y \subset M$  forem conjuntos não-vazios, definimos a semidistância de Hausdorff de  $X$  a  $Y$  por*

$$d_h(X|Y) := \inf\{\varepsilon > 0; X \subset V_\varepsilon(Y)\}.$$

**Observação 1.1.4.** Veremos que a semidistância de Hausdorff não é simétrica, i.e., nem sempre vale que  $d_h(X|Y) = d_h(Y|X)$ . É por essa razão que usamos uma barra entre  $X$  e  $Y$ , e não a vírgula usual. Também é por essa razão que dizemos “a semidistância **de**  $X$  **a**  $Y$ ”, e não “a semidistância **entre**  $X$  e  $Y$ ”.

É importante notar que a não-simetria da semidistância de Hausdorff implica que ela não define uma métrica.

**Proposição 1.1.5** (Definição Equivalente para a Semidistância de Hausdorff). Dados  $X, Y \subset M$  conjuntos não-vazios, vale que

$$d_h(X|Y) = \sup_{x \in X} d(x, Y).$$

*Demonstração.* Queremos mostrar que  $\sup_{x \in X} d(x, Y) = \inf\{\varepsilon > 0; X \subset V_\varepsilon(Y)\}$ .

Por simplicidade, seja

$$I := \inf\{\varepsilon > 0; X \subset V_\varepsilon(Y)\}.$$

Dado  $n \in \mathbb{N}$ , temos que

$$I - 1/n < \inf\{\varepsilon > 0; X \subset V_\varepsilon(Y)\}.$$

Então  $X \not\subset V_{I-1/n}(Y)$ . Logo, existe  $x_0 \in X$  tal que  $d(x_0, Y) \geq I - 1/n$ . Por isso, é certo que

$$\sup_{x \in X} d(x, Y) \geq I - 1/n.$$

Como essa desigualdade vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ , podemos tomar o limite quando  $n \rightarrow \infty$  e concluir que  $\sup_{x \in X} d(x, Y) \geq I$ . Ou seja,

$$\sup_{x \in X} d(x, Y) \geq \inf\{\varepsilon > 0; X \subset V_\varepsilon(Y)\}. \quad (1.1.1)$$

Vejamos agora a desigualdade inversa.

Dado  $n \in \mathbb{N}$ , temos que

$$I + 1/n > \inf\{\varepsilon > 0; X \subset V_\varepsilon(Y)\}.$$

Então  $X \subset V_{I+1/n}(Y)$ . Assim, qualquer que seja  $x \in X$ , temos que  $d(x, Y) < I + 1/n$ . Por isso, é certo que

$$\sup_{x \in X} d(x, Y) \leq I + 1/n.$$

Como essa desigualdade vale para todo  $n \in \mathbb{N}$ , podemos tomar o limite quando  $n \rightarrow \infty$  e concluir que  $\sup_{x \in X} d(x, Y) \leq I$ . Isto é,

$$\sup_{x \in X} d(x, Y) \leq \inf\{\varepsilon > 0; X \subset V_\varepsilon(Y)\}. \quad (1.1.2)$$

Por (1.1.1) e (1.1.2), concluímos que  $\sup_{x \in X} d(x, Y) = \inf\{\varepsilon > 0; X \subset V_\varepsilon(Y)\}$ .  $\square$

**Observação 1.1.6.** Também vale que  $d_h(X|Y) = \inf\{\varepsilon > 0; X \subset V_\varepsilon[Y]\}$ .

**Propriedades 1.1.7** (Propriedades da Semidistância de Hausdorff). *Dados conjuntos não-vazios  $X, Y, A, B \subset M$ , são válidas as seguintes propriedades:*

- (i) *Nem sempre é válido que  $d_h(X|Y) = d_h(Y|X)$ .*
- (ii) *Se  $d_h(X|Y) = 0$ , então  $X \subset \bar{Y}$ . No entanto,  $d_h(X|Y) = 0$  não implica que  $X \subset Y$ .*
- (iii) *Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_h(X_n|Y) = 0$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Y) = 0$  quaisquer que sejam  $x_n \in X_n$ .*
- (iv) *Se  $X$  for ilimitado, pode ocorrer  $d_h(X|Y) = \infty$ . Se  $X$  for limitado, então necessariamente  $d_h(X|Y) < \infty$ .*
- (v) *Se  $A \subset B$ , então  $d_h(X|A) \geq d_h(X|B)$ .*
- (vi) *Se  $X \subset Y$ , então  $d_h(X|A) \leq d_h(Y|A)$ .*
- (vii) *Vale que*

$$d_h(X|A \cup B) \leq \max\{d_h(X|A), d_h(X|B)\}.$$

- (viii) *Se  $A \cap B \neq \emptyset$ , então*

$$d_h(X|A \cap B) \geq \max\{d_h(X|A), d_h(X|B)\}.$$

- (ix) *Vale que*

$$d_h(A \cup B|X) = \max\{d_h(A|X), d_h(B|X)\}.$$

- (x) *Se  $A \cap B \neq \emptyset$ , então<sup>1</sup>*

$$d_h(A \cap B|X) \leq \min\{d_h(A|X), d_h(B|X)\}.$$

- (xi) *A função  $d_h$  satisfaz a desigualdade triangular na segunda entrada:*

$$d_h(A|B) \leq d_h(A|X) + d_h(X|B).$$

*Demonstração.* Nas demonstrações, em cada caso vamos usar a definição equivalente que for mais cômoda para cada propósito (ver Proposição 1.1.5 e Observação 1.1.6).

- (i) Considere  $X = (0, 1)$  e  $Y = (-\infty, +\infty)$ . Temos que  $d_h(X|Y) = 0$  e que  $d_h(Y|X) = \infty$ .

Outro exemplo, envolvendo apenas conjuntos compactos, é o seguinte: se  $X = \{0\}$  e  $Y = [-1, 1]$ , então  $d_h(X|Y) = 0$  e  $d_h(Y|X) = 1$ .

- (ii) Suponha que  $d_h(X|Y) = 0$ . Isso significa que  $X \subset V_{\frac{1}{n}}(Y)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Então, dado  $x \in X$ , vale que

$$d(x, Y) < 1/n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $y_n \in Y$  tal que  $d(x, y_n) \leq 1/n$ . Isso implica que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, y_n) = 0$ . Logo  $y_n \rightarrow x$  e, portanto,  $x \in \bar{Y}$ .

Para constatar que  $d_h(X|Y) = 0$  não implica que  $X \subset Y$ , basta considerar o contra-exemplo  $X = [0, 1]$  e  $Y = (0, 1)$ .

---

<sup>1</sup>A desigualdade inversa não é válida em geral: como contra-exemplo, considere  $A = [0, 1]$ ,  $B = \{1\} \cup \{4\}$  e  $X = \{2\}$ .

- (iii) Suponha que o resultado seja falso. Se assim for, existem  $\varepsilon > 0$  e uma sequência  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}'}$ , com  $x_m \in X_m$ , tais que

$$d(x_m, Y) \geq \varepsilon, \quad \forall m \in \mathbb{N}'.$$

Isso significa que, para todo  $m \in \mathbb{N}'$ , temos que  $x_m \notin V_\varepsilon(Y)$ , e, então, que  $X_m \not\subset V_\varepsilon(Y)$ . Disso, extraímos que

$$d_h(X_m|Y) \geq \varepsilon, \quad \forall m \in \mathbb{N}'.$$

Isso impossibilita que ocorra  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_h(X_n|Y) = 0$ .

- (iv) Considerando  $X = \mathbb{R}$  (ilimitado) e  $Y = 0$ , por exemplo, temos que  $d_h(X|Y) = \infty$ . Se  $X$  é limitado, então, considerando algum  $y_0 \in Y$ , existe  $R < \infty$  tal que  $X \subset B(y_0, R)$ , ou, o que é o mesmo,  $X \subset V_R(\{y_0\})$ .

Ora, mas  $V_R(\{y_0\}) \subset V_R(Y)$ . Então  $X \subset V_R(Y)$  e, portanto,  $d_h(X|Y) \leq R < \infty$ .

- (v) Por definição, temos

$$d_h(X|A) = \sup_{x \in X} d(x, A) = \sup_{x \in X} \inf_{a \in A} d(x, a),$$

$$d_h(X|B) = \sup_{x \in X} d(x, B) = \sup_{x \in X} \inf_{b \in B} d(x, b).$$

Como  $A \subset B$ , então, dado qualquer  $x \in X$ , é válido que  $\inf_{a \in A} d(x, a) \geq \inf_{b \in B} d(x, b)$ . Isto é,  $d(x, A) \geq d(x, B)$ . Como essa desigualdade vale para todo  $x \in X$ , também vale que

$$\sup_{x \in X} d(x, A) \geq \sup_{x \in X} d(x, B).$$

Disso concluímos o resultado.

- (vi) Por definição, temos

$$d_h(X|A) = \sup_{x \in X} d(x, A),$$

$$d_h(Y|A) = \sup_{y \in Y} d(y, A).$$

Como  $X \subset Y$ , é certo que  $\sup_{x \in X} d(x, A) \leq \sup_{y \in Y} d(y, A)$ , de onde segue o resultado.

- (vii) Seja  $D = \max\{d_h(X|A), d_h(X|B)\}$ . Isso garante que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$X \subset V_{D+\frac{1}{n}}(A) \quad \text{e} \quad X \subset V_{D+\frac{1}{n}}(B).$$

Então

$$X \subset V_{D+\frac{1}{n}}(A \cup B), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,  $d_h(X|A \cup B) \leq D + 1/n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$ , obtemos

$$d_h(X|A \cup B) \leq D = \max\{d_h(X|A), d_h(X|B)\}.$$

(viii) Seja  $D = d_h(X|A \cap B)$ . Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , vale que

$$X \subset V_{D+\frac{1}{n}}(A \cap B) \subset \left[ V_{D+\frac{1}{n}}(A) \cap V_{D+\frac{1}{n}}(B) \right].$$

Como  $X \subset V_{D+\frac{1}{n}}(A)$ , segue que  $d_h(X|A) \leq D + 1/n$ .

Como  $X \subset V_{D+\frac{1}{n}}(B)$ , segue que  $d_h(X|B) \leq D + 1/n$ .

Tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$  em ambas as desigualdades, concluimos que

$$\max\{d_h(X|A), d_h(X|B)\} \leq D = d_h(X|A \cap B).$$

(ix) Seja  $D = d_h(A \cup B|X)$ .

Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , vale que  $A \cup B \subset V_{D+\frac{1}{n}}(X)$ .

Como  $A \subset V_{D+\frac{1}{n}}(X)$ , segue que  $d_h(A|X) \leq D + 1/n$ .

Como  $B \subset V_{D+\frac{1}{n}}(X)$ , segue que  $d_h(B|X) \leq D + 1/n$ .

Tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$  em ambas as desigualdades, concluimos que

$$\max\{d_h(A|X), d_h(B|X)\} \leq D = d_h(A \cup B|X).$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , vale que  $A \cup B \not\subset V_{D-\frac{1}{n}}(X)$ . Então temos que  $A \not\subset V_{D-\frac{1}{n}}(X)$  ou  $B \not\subset V_{D-\frac{1}{n}}(X)$ . Isso implica que  $d_h(A|X) \geq D - 1/n$  ou  $d_h(B|X) \geq D - 1/n$ . Em qualquer caso,  $\max\{d_h(A|X), d_h(B|X)\} \geq D - 1/n$ .

Tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$ , concluimos que

$$\max\{d_h(A|X), d_h(B|X)\} \geq D = d_h(A \cup B|X).$$

(x) Seja  $D = d_h(A \cap B|X)$ .

Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , vale que  $A \cap B \not\subset V_{D-\frac{1}{n}}(X)$ .

Como  $A \not\subset V_{D-\frac{1}{n}}(X)$ , segue que  $d_h(A|X) \geq D - 1/n$ .

Como  $B \not\subset V_{D-\frac{1}{n}}(X)$ , segue que  $d_h(B|X) \geq D - 1/n$ .

Tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$  em ambas as desigualdades, concluimos que

$$\min\{d_h(A|X), d_h(B|X)\} \geq D = d_h(A \cap B|X).$$

(xi) Sejam

$$d_1 := d_h(A|X) \quad \text{e} \quad d_2 := d_h(X|B).$$

Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , vale que

$$A \subset V_{d_1+\frac{1}{n}}(X) \quad \text{e} \quad X \subset V_{d_2+\frac{1}{n}}(B).$$

Isso implica que

$$A \subset V_{d_1+d_2+\frac{2}{n}}(B).$$

Logo,  $d_h(A|B) \leq d_1 + d_2 + 2/n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Portanto, tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$ , concluimos que

$$d_h(A|B) \leq d_1 + d_2 = d_h(A|X) + d_h(X|B).$$

□

**Definição 1.1.8.** [Continuidade de Família de Conjuntos pela Semidistância de Hausdorff] Dada uma família de conjuntos  $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset M$ , usamos as seguintes nomenclaturas:

Dizemos que  $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  é semicontínuo superiormente em  $\lambda_0 \in \Lambda$  quando

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} d_h(X_\lambda | X_{\lambda_0}) = 0.$$

Dizemos que  $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  é semicontínuo inferiormente em  $\lambda_0 \in \Lambda$  quando

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} d_h(X_{\lambda_0} | X_\lambda) = 0.$$

Dizemos que  $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  é contínuo em  $\lambda_0 \in \Lambda$  quando  $X_\lambda$  é semicontínuo tanto superiormente quanto inferiormente em  $\lambda_0$ . Veremos que isso é equivalente à ocorrência de  $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} d_H(X_\lambda, X_{\lambda_0}) = 0$ , onde  $d_H(X, Y)$  é a distância de Hausdorff entre  $X$  e  $Y$ .

## Distância de Hausdorff

A distância de Hausdorff pode ser definida de três maneiras equivalentes (a equivalência entre as definições provém diretamente da Definição 1.1.3 e da Proposição 1.1.5).

**Definição 1.1.9** (Distância de Hausdorff). Dados conjuntos não-vazios  $X, Y \subset M$ , a distância de Hausdorff entre  $X$  e  $Y$  é dada por

$$\begin{aligned} d_H(X, Y) &:= \inf \{ \varepsilon > 0; X \subset V_\varepsilon(Y) \text{ e } Y \subset V_\varepsilon(X) \} \\ &= \max \{ d_h(X | Y), d_h(Y | X) \} \\ &= \max \left\{ \sup_{x \in X} d(x, Y), \sup_{y \in Y} d(y, X) \right\}. \end{aligned}$$

**Observação 1.1.10.** A distância de Hausdorff não define uma métrica em  $2^M$ . Veja que, para  $X = [0, 1]$  e  $Y = (0, 1)$ , temos  $d_H(X, Y) = 0$ , com  $X \neq Y$ . Veremos mais adiante que  $d_H$  é uma métrica em  $\mathcal{K}(M)$ , a família dos conjuntos compactos e não-vazios de  $M$ .

**Propriedades 1.1.11** (Propriedades da Distância de Hausdorff). Dados conjuntos não-vazios  $X, Y, A, B \subset M$ , são válidas as seguintes propriedades:

(i) A distância de Hausdorff é simétrica, isto é,

$$d_H(X, Y) = d_H(Y, X).$$

(ii) Se  $d_H(X, Y) = r$ , então  $X \subset \overline{V_r(Y)}$  e  $Y \subset \overline{V_r(X)}$ . Contudo, nem sempre é verdade que, se  $d_H(X, Y) = r$ , então  $X \subset V_r(Y)$  e  $Y \subset V_r(X)$ . Como caso particular, vale que, se  $d_H(X, Y) = 0$ , então  $\overline{X} = \overline{Y}$ . Em especial, se  $X$  e  $Y$  forem fechados, então  $d_H(X, Y) = 0$  implica  $X = Y$ .

(iii) Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_H(X_n, Y) = 0$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Y) = 0$  quaisquer que sejam  $x_n \in X_n$ .

(iv) Se  $X$  ou  $Y$  for ilimitado, pode ocorrer  $d_H(X, Y) = \infty$ . Se  $X$  e  $Y$  forem ambos limitados, então necessariamente  $d_H(X, Y) < \infty$ .



(v) Vale a desigualdade triangular; isto é:

$$d_H(A, B) \leq d_H(A, X) + d_H(X, B).$$

(vi) Uma família de conjuntos  $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  é contínua em  $\lambda_0 \in \Lambda$  se, e somente se,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} d_H(X_\lambda, Y) = 0.$$

*Demonstração.* (i) Consequência imediata da simetria da definição:

$$\begin{aligned} d_H(X, Y) &= \inf \{ \varepsilon \geq 0; X \subset V_\varepsilon(Y) \text{ e } Y \subset V_\varepsilon(X) \} \\ &= \inf \{ \varepsilon \geq 0; Y \subset V_\varepsilon(X) \text{ e } X \subset V_\varepsilon(Y) \} \\ &= d_H(Y, X). \end{aligned}$$

(ii) Suponha que  $d_H(X, Y) = r$ . Isso implica que  $d_h(X|Y) \leq r$ , o que garante que  $X \subset \overline{V_r(Y)}$ . Analogamente se obtém que  $Y \subset \overline{V_r(X)}$ .

(iii) Consequência direta da Proposição 1.1.7, (iii).

(iv) Consequência direta da Proposição 1.1.7, (iv).

(v) Pela Proposição 1.1.7, (xi), temos que

$$\begin{aligned} d_h(A|B) &\leq d_h(A|X) + d_h(B|X) \leq d_H(A, X) + d_H(X, B), \\ d_h(B|A) &\leq d_h(B|X) + d_h(X|A) \leq d_H(X, B) + d_H(A, X). \end{aligned}$$

Portanto  $d_H(A, B) = \max\{d_h(A|B), d_h(B|A)\} \leq d_H(A, X) + d_H(X, B)$ .

(vi) Consequência imediata da Definição 1.1.8 e da caracterização

$$d_H(X, Y) = \max\{d_h(X|Y), d_h(Y|X)\}.$$

□

**Proposição 1.1.12.** Se  $(M, d)$  é completo, então  $(\mathcal{K}(M), d_H)$  é completo.

*Demonstração.* Seja  $(A_k)$  uma sequência de Cauchy em  $(\mathcal{K}(M), d_H)$ .

Considere o conjunto

$$A = \left\{ x \in M; \exists (x_k), \text{ com } x_k \in A_k, \text{ tal que } x_k \rightarrow x \right\}.$$

⊢ Afirmação 1:  $A_k \xrightarrow{H} A$  e  $A \neq \emptyset$ .

Primeiro vamos mostrar a convergência  $A_k \xrightarrow{H} A$ .

$A_k \xrightarrow{H} A$  significa que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $k_o \in \mathbb{N}$  tal que  $k > k_o$  implica  $d_H(A_k, A) < \varepsilon$ , isto é,  $A \subset V_\varepsilon(A_k)$  e  $A_k \in V_\varepsilon(A)$ .

Vejamos.

Como  $(A_k)$  é de Cauchy, existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m, k > k_0$  implica

$$d_H(A_m, A_k) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.1.3)$$

Tome  $\tilde{k} > k_0$  fixo, porém arbitrário.

Vamos verificar que  $A \subset V_\varepsilon(A_{\tilde{k}})$ .

Se  $x \in A$ , existe uma sequência  $(x_k)$ , com  $x_k \in A_k$ , tal que  $x_k \rightarrow x$ . Logo, existe  $k_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $k > k_1$  implica  $d(x_k, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Além disso, se  $k > k_0$ , o fato (1.1.3) nos dá que existe  $y \in A_{\tilde{k}}$  tal que  $d(x_k, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Logo, para  $k > \max\{k_0, k_1\}$ , temos

$$d(x, y) \leq d(y, x_k) + d(x_k, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Com isso mostramos que  $A \subset V_\varepsilon(A_{\tilde{k}})$ .

Agora vamos conferir a inclusão  $A_{\tilde{k}} \subset V_\varepsilon(A)$ .

Considere  $y \in A_{\tilde{k}}$ .

Como  $(A_k)$  é de Cauchy, podemos escolher uma subsequência dos naturais  $\{k_1 < k_2 < \dots\}$ , com  $k_1 = \tilde{k}$ , de modo que

$$d_H(A_{k_j}, A_m) < \frac{2^{-j}\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } m \leq n_j. \quad (1.1.4)$$

Agora, defina  $(y_k)$ , com  $y_k \in A_k$  para cada  $k$ , da seguinte maneira:

- Para  $k < \tilde{k}$ , escolha  $y_k \in A_k$  arbitrariamente;
- Imponha  $y_{\tilde{k}} = y$ ;
- Se  $y_{k_j}$  já tiver sido escolhido e  $k_j < k \leq k_{j+1}$ , escolha algum  $y_k \in A_k$  de tal modo que  $d(y_{k_j}, y_k) \leq \frac{2^{-j}\varepsilon}{2}$  (o que é possível fazer em virtude de (1.1.4)).

Assim definida a sequência, dados  $p, q > \tilde{k}$ , temos que, para alguns  $i, j, i', j'$  (possivelmente valendo 0, mas certamente finitos), vale que

$$k_i \leq p = k_i + j < k_{i+1},$$

$$k_{i'} \leq q = k_{i'} + j' < k_{i'+1}.$$

Assim, podemos comprovar que  $(y_k)$  é de Cauchy, pois:

$$\begin{aligned}
d(y_p, y_q) &\leq d(y_p, y) + d(y, y_q) \\
&= d(y_p, y_{k_1}) + d(y_{k_1}, y_q) \\
&\leq d(y_{k_1}, y_{k_2}) + d(y_{k_2}, y_{k_3}) + \dots + d(y_{k_i}, y_{k_i+j}) \\
&\quad + d(y_{k_1}, y_{k_2}) + d(y_{k_2}, y_{k_3}) + \dots + d(y_{k'_i}, y_{k'_i+j'}) \\
&\leq \left( \frac{2^{-1}\varepsilon}{2} + \frac{2^{-2}\varepsilon}{2} + \dots + \frac{2^{-i}\varepsilon}{2} \right) \\
&\quad + \left( \frac{2^{-1}\varepsilon}{2} + \frac{2^{-2}\varepsilon}{2} + \dots + \frac{2^{-i'}\varepsilon}{2} \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{-i}\varepsilon}{2} + \sum_{i'=1}^{\infty} \frac{2^{-i'}\varepsilon}{2} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ou seja,  $d(y_p, y_q) \leq \varepsilon$  para todo  $p, q > \tilde{k}$ . Logo  $(y_k)$  é de Cauchy em  $M$  e, portanto, é convergente (para  $x$ , digamos). Pela definição do conjunto  $A$ , temos que  $x \in A$  (e disso já extraímos que  $A$  é não-vazio).

Além disso,  $d(y, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(y, y_k) < \varepsilon$ . Logo  $y \in V_\varepsilon(A)$  e, então,  $A_{\tilde{k}} \subset V_\varepsilon(A)$ .

Portanto  $d_H(A_{\tilde{k}}, A) \leq \varepsilon$ , conforme queríamos mostrar.

⊢ Afirmação 2:  $A$  é totalmente limitado.

Seja  $\varepsilon$  dado. Escolha  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $d_H(A_{k_0}, A) < \varepsilon/3$ . Como  $A_{k_0}$  é compacto,  $A_{k_0}$  possui uma cobertura finita por bolas abertas de raio  $\varepsilon/3$ . Sejam  $y_1, \dots, y_m$  os centros dessas bolas. Para cada  $y_i$ , escolha  $x_i \in A$  tal que  $d(x_i, y_i) < \varepsilon/3$ .

Vamos mostrar que  $\{B(x_i, \varepsilon)\}_{i=1}^m$  cobre  $A$ . De fato, se  $x \in A$ , então existe  $y \in A_k$  tal que  $d(x, y) < \varepsilon/3$ . Para esse  $y$ , existe  $y_i$  tal que  $d(y, y_i) < \varepsilon/3$ . E, por construção,  $d(y_i, x_i) < \varepsilon/3$ . Então

$$d(x, x_i) \leq d(x, y) + d(y, y_i) + d(y_i, x_i) < \varepsilon.$$

Isso comprova a Afirmação 2.

⊢ Afirmação 3:  $A$  é fechado.

Seja  $x \in \overline{A}$ . Então existe  $(y_k) \subset A$  tal que  $d(x, y_k) < 1/k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Para cada  $k$ , existe  $z_k \in A_k$  tal que  $d(z_k, y_k) < d_H(A_k, A) + 1/k$ . Logo,

$$d(z_k, x) \leq d(z_k, y_k) + d(y_k, x) < d_H(A_k, A) + 1/k + 1/k \rightarrow 0.$$

Assim, vemos que  $z_k \rightarrow x$ , com  $z_k \in A_k$ . Isso nos dá que  $x \in A$ . Portanto  $A$  é fechado.

⊢ Afirmação 3:  $A$  é compacto.

Como  $A$  é um conjunto fechado em um espaço métrico completo, segue que  $A$  é completo. Sendo completo e totalmente limitado,  $A$  é compacto. Isso conclui a demonstração

□

**Observação 1.1.13.** *Por argumentos similares, é possível provar que, se  $(M, d)$  é compacto, então  $(\mathcal{K}(M), d_H)$  também é compacto.*

Em alguns contextos, especialmente na teoria de Sistemas Dinâmicos, quando estamos interessados apenas em garantir que  $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} d_H(X_\lambda, X_{\lambda_0}) = 0$ , é conveniente introduzir a distância de Hausdorff modificada (também chamada de “distância de Hausdorff da soma”).

**Definição 1.1.14** (Distância de Hausdorff Modificada / Distância de Hausdorff da Soma). *Dados conjuntos não-vazios  $X, Y \subset M$ , a distância de Hausdorff modificada (distância de Hausdorff da soma) entre  $X$  e  $Y$  é dada por*

$$d_H^+(X, Y) := d_h(X|Y) + d_h(Y|X).$$

**Observação 1.1.15.** *É imediato verificar que*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} d_H(X_\lambda, X_{\lambda_0}) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} d_H^+(X_\lambda, X_{\lambda_0}) = 0.$$

A proposição a seguir mostra que, se  $g$  for um operador contínuo, então as imagens  $g(X_1)$  e  $g(X_2)$  estarão próximas entre si (pela distância de Hausdorff) sempre que  $X_1$  estiver próximo o suficiente de  $X_2$  (também pela distância de Hausdorff).

**Proposição 1.1.16.** *Sejam  $(M, d_M)$  e  $(N, d_N)$  espaços métricos quaisquer. Se o operador  $g : M \rightarrow N$  é contínuo, então também é contínua, pela distância de Hausdorff, a função*

$$\begin{aligned} f : \mathcal{K}(M) &\rightarrow \mathcal{K}(N) \\ X &\mapsto f(X) := g(X) = \{g(x); x \in X\}. \end{aligned}$$

(Note que o contradomínio está adequado para que a função esteja bem-definida, pois a imagem-contínua de conjuntos compactos também é compacta.)

*Demonstração.* Por absurdo, suponha que  $f$  não seja contínua. Então existem  $\varepsilon > 0$ ,  $(X_n) \subset M$  e  $X_0 \subset M$  tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_H(X_n, X_0) = 0, \tag{1.1.5}$$

com

$$d_H(f(X_n), f(X_0)) > \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.1.6}$$

Observe que (1.1.6) implica que

$$d_H(g(X_n), g(X_0)) > \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Isso significa que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , pelo menos uma das duas situações ocorre:  $g(X_n) \not\subset V_\varepsilon(g(X_0))$  ou  $g(X_0) \not\subset V_\varepsilon(g(X_n))$ .

Ou seja, pelo menos uma dessas duas situações precisa ocorrer para uma infinidade de índices  $n$ .

Vejamos que isso é impossível.

Se  $g(X_n) \not\subset V_\varepsilon(g(X_0))$ , então existe  $x_n \in X_n$  tal que  $d(g(x_n), g(X_0)) \geq \varepsilon$ . Logo, para todo  $\tilde{x} \in X_0$ , temos que

$$d(g(x_n), g(\tilde{x})) \geq \varepsilon. \quad (1.1.7)$$

Contudo, levando em consideração (1.1.5), a Propriedade 1.1.11-(iii) garante que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \tilde{x}) = 0$ , qualquer que seja  $\tilde{x} \in X_0$ . Assim, pela continuidade de  $g$ , segue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(g(x_n), g(\tilde{x})) = 0$ , de modo que a desigualdade (1.1.7) só é possível para uma quantidade finita de índices  $n$ .

Agora, se  $g(X_0) \not\subset V_\varepsilon(g(X_n))$ , então, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $\tilde{x}_n \in X_0$  tal que  $d(g(\tilde{x}_n), g(X_n)) \geq \varepsilon$ . Logo, para todo  $x_n \in X_n$ , vale que

$$d(g(\tilde{x}_n), g(x_n)) \geq \varepsilon. \quad (1.1.8)$$

Procedendo como antes, concluímos que (1.1.8) também só é possível para uma quantidade finita de índices  $n$ .

Disso concluímos que  $g(X_n) \not\subset V_\varepsilon(g(X_0))$  e  $g(X_0) \not\subset V_\varepsilon(g(X_n))$  ocorrem, no máximo, para uma quantidade finita de índices  $n$ , o que torna flagrante o absurdo de ter suposto que  $f$  não é contínua.  $\square$

A distância de Hausdorff, como vimos, fornece uma noção bastante útil de convergência para uma sequência de conjuntos, mas ela não é a única noção possível.

A noção de convergência mais usual é a seguinte: dada uma sequência de conjuntos  $(A_n)_{n=1}^\infty$ , definimos

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n &:= \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{j \geq n} A_j, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n &:= \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{j \geq n} A_j. \end{aligned}$$

Se ocorrer  $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := A$ , dizemos que  $A_n$  converge para  $A$  (pela convergência usual de Teoria dos Conjuntos), e escrevemos  $A_n \rightarrow A$ .

Para fixar as ideias, apresentamos um exemplo bastante curioso.

**Exemplo 1.1.17.** *Considere a seguinte sequência de conjuntos:*

$$\begin{aligned} A_0 &:= \{1, 2, \dots, 10\} \\ A_1 &:= A_0 \cup \{11, 12, \dots, 20\} \setminus \{1\} \\ A_2 &:= A_1 \cup \{21, 22, \dots, 30\} \setminus \{2\} \\ &\vdots \\ A_n &:= A_{n-1} \cup \{10n + 1, 10n + 2, \dots, 10n + n\} \setminus \{n\}. \end{aligned}$$

Note que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \#A_n = \infty$  (o número de elementos de  $A_n$  tende a infinito), mas, pela convergência usual,  $A_n \rightarrow \emptyset$ .

## 1.2 Medida de Não-Compacidade

Em muitos pontos desta dissertação, será importante medir, em um sentido a ser estabelecido, o quão não-compacto é um dado conjunto.

Conjuntos compactos, em espaços métricos, sempre podem ser cobertos por uma quantidade finita de conjuntos abertos de diâmetros arbitrariamente pequenos (ou seja, são conjuntos totalmente limitados<sup>2</sup>).

Ao considerar um conjunto não-compacto, faz sentido averiguar qual é o menor diâmetro  $\varepsilon > 0$  tal que esse conjunto possa ser coberto por uma quantidade finita de conjuntos abertos de diâmetro  $\varepsilon$  ou menor.

Isso motiva a seguinte definição.

**Definição 1.2.1** (Medida de Não-Compacidade de Kuratowski). *A medida de não-compactidade de Kuratowski é a função  $\alpha : 2^X \rightarrow \mathbb{R}_+$  dada por*

$$\alpha(D) := \inf\{\varepsilon > 0; \text{ existe uma } \varepsilon\text{-cobertura aberta finita para } D\}.$$

**Proposição 1.2.2** (Propriedades da Medida de Não-Compacidade de Kuratowski). *Dados  $A, B \subset X$ , sendo  $X$  um espaço métrico completo, a função  $\alpha$  respeita as seguintes propriedades (algumas das quais, conforme o contexto, exigem que  $X$  seja um espaço normado):*

- (i) *Definição equivalente:*  $\alpha(A) = \inf\{\varepsilon > 0; \text{ existe uma } \varepsilon\text{-cobertura finita para } A\}$ .
- (ii) *Limitação superior pelo diâmetro:*  $\alpha(A) \leq \text{diam}(A)$ .
- (iii) *Monotonicidade:*  $A \subset B$  implica  $\alpha(A) \leq \alpha(B)$ .
- (iv) *Invariância pelo fecho:*  $\alpha(A) = \alpha(\overline{A})$ .
- (v) *Semiaditividade:*  $\alpha(A \cup B) = \max\{\alpha(A), \alpha(B)\}$ .
- (vi) *Limitação superior para a medida da interseção:*  $\alpha(A \cap B) \leq \min\{\alpha(A), \alpha(B)\}$ .
- (vii) *Regularidade:*  $\alpha(A) = 0$  se, e somente se,  $\overline{A}$  é compacto.
- (viii) *Não-singularidade:*  $\alpha(A) < \infty$  se, e somente se,  $A$  é limitado.
- (ix) *Homogeneidade:*  $\alpha(\lambda A) = |\lambda|\alpha(A)$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- (x) *Invariância por translações:*  $\alpha(x + A) = \alpha(A)$  qualquer que seja  $x \in X$ .
- (xi) *Subaditividade algébrica:*  $\alpha(A + B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$ .
- (xii) *Continuidade pela distância de Hausdorff:* Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $d_H(A, B) < \delta$  implica  $|\alpha(A) - \alpha(B)| \leq \varepsilon$ .

---

<sup>2</sup>Um conjunto em um espaço métrico é compacto se, e somente se, for completo e totalmente limitado. Um conjunto totalmente limitado é aquele que, dado  $\varepsilon > 0$ , pode ser coberto por uma quantidade finita de bolas abertas de raio  $\varepsilon$ .

(xiii) *Propriedade da interseção de Cantor generalizada: Se  $\{A_t\}_{t \in \mathbb{R}_+} \subset X$  é uma família ordenada decrescente de conjuntos fechados e não-vazios tais que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(A_t) = 0$ , então  $A_\infty := \bigcap_{t \in \mathbb{R}_+} A_t$  é um conjunto compacto e não-vazio.*

*Demonstração.* Nas demonstrações, não vamos explicitar os casos triviais em que algum dos conjuntos envolvidos seja vazio ou não-limitado. Em outras palavras, vamos assumir  $A, B$  limitados e não-vazios.

(i) Sejam

$$\alpha(A) := \inf\{\varepsilon > 0; \text{ existe uma } \varepsilon\text{-cobertura aberta finita para } A\},$$

$$\tilde{\alpha}(A) := \inf\{\varepsilon > 0; \text{ existe uma } \varepsilon\text{-cobertura (qualquer) finita para } A\}.$$

Definidos os conjuntos

$$C_A := \{\varepsilon > 0; \text{ existe uma } \varepsilon\text{-cobertura aberta finita para } A\},$$

$$\tilde{C}_A := \{\varepsilon > 0; \text{ existe uma } \varepsilon\text{-cobertura (qualquer) finita para } A\},$$

é imediato verificar que  $C_A \subset \tilde{C}_A$ , de modo que  $\inf \tilde{C}_A \leq \inf C_A$ . Logo,  $\tilde{\alpha}(A) \leq \alpha(A)$ .

Agora, considere  $r > \tilde{\alpha}(A)$  qualquer. Por definição, existe  $N \in \mathbb{N}$  para o qual existe  $\{U_i\}_{i=1}^N$  que é uma  $r$ -cobertura de  $A$ . Qualquer que seja  $\varepsilon > 0$ , a família das vizinhanças abertas  $\{V_\varepsilon(U_i)\}_{i=1}^N$  é uma  $(r + 2\varepsilon)$ -cobertura aberta finita para  $A$ . Então  $\alpha(A) \leq r + 2\varepsilon$ . Isso vale para qualquer  $r > \tilde{\alpha}(A)$  e para qualquer  $\varepsilon > 0$ . Logo,  $\alpha(A) \leq \tilde{\alpha}(A)$ .

(ii) Consequência imediata de (i).

(iii) Imediatamente verificável, pois toda cobertura de  $B$  também é cobertura de  $A$ .

(iv) Se  $\{U_i\}_{i=1}^N$  cobre  $A$ , então  $\{\overline{U}_i\}_{i=1}^N$  cobre  $\overline{A}$ . Como o diâmetro de um conjunto é igual ao diâmetro do seu fecho, o resultado segue de (i).

(v) Pela monotonicidade, é fato que  $\alpha(A) \leq \alpha(A \cup B)$  e que  $\alpha(B) \leq \alpha(A \cup B)$ , de modo que  $\max\{\alpha(A), \alpha(B)\} \leq \alpha(A \cup B)$ .

Agora, sem perda de generalidade, suponha  $\alpha(A) \leq \alpha(B)$ . Isso significa que, se  $B$  pode ser coberto por uma quantidade finita de conjuntos de diâmetro  $\varepsilon$  ou menor, então  $A$  também pode. Por isso, unindo essas duas coberturas finitas (de  $A$  e de  $B$ ), constatamos que também existe uma  $\varepsilon$ -cobertura finita para  $(A \cup B)$ . Portanto  $\alpha(A \cup B) \leq \alpha(B) = \max\{\alpha(A), \alpha(B)\}$ .

(vi) Pela monotonicidade, é fato que  $\alpha(A \cap B) \leq \alpha(A)$  e que  $\alpha(A \cap B) \leq \alpha(B)$ , de modo que  $\alpha(A \cap B) \leq \min\{\alpha(A), \alpha(B)\}$ .

(vii) Se  $\alpha(A) = 0$ , então  $A$  é totalmente limitado, logo seu fecho  $\overline{A}$  também é. Como  $\overline{A}$  é fechado em um espaço completo, temos que  $\overline{A}$  é completo. Sendo completo e totalmente limitado, segue que  $\overline{A}$  é compacto.

Reciprocamente, se  $\overline{A}$  é compacto, então  $\overline{A}$  é totalmente limitado, de modo que  $\alpha(\overline{A}) = 0$ . Assim, pela monotonicidade,  $\alpha(A) = 0$ .

(viii) Se  $A$  é limitado, (ii) fornece  $\alpha(A) \leq \text{diam}(A) < \infty$ . Se  $A$  não é limitado, então não é possível cobrir  $A$  com uma quantidade finita de conjuntos de diâmetro finito, afinal o diâmetro dessa união também será finito. Portanto, se  $A$  não é limitado, então  $\alpha(A) = \infty$ .

(ix) Se  $N$  conjuntos de diâmetro  $\varepsilon$  ou menor cobrem  $A$ , então  $N$  conjuntos de diâmetro  $|\lambda|\varepsilon$  ou menor cobrem  $\lambda A$ . Se nenhuma quantidade finita de conjuntos de diâmetro  $\varepsilon$  ou menor cobrem  $A$ , então nenhuma quantidade finita de conjuntos de diâmetro  $|\lambda|\varepsilon$  ou menor cobrem  $\lambda A$ .

(x) A família  $\{U_i\}_{i=1}^N$  é uma  $\varepsilon$ -cobertura finita para  $A$  se, e somente se, a família  $\{(x + U_i)\}_{i=1}^N$  é uma  $\varepsilon$ -cobertura finita para  $(x + A)$ .

(xi) Seja  $\varepsilon > 0$  dado. Seja  $\{U_i(A)\}$  uma  $(\alpha(A) + \varepsilon/2)$ -cobertura de  $A$  e seja  $\{U_j(B)\}$  uma  $(\alpha(B) + \varepsilon/2)$ -cobertura de  $B$ . Então  $\{(U_i(A) + U_j(B))\}$  é uma  $(\alpha(A) + \alpha(B) + \varepsilon)$ -cobertura de  $(A + B)$ . Assim, a arbitrariedade na escolha de  $\varepsilon$  garante a validade do resultado.

(xii) Seja  $\varepsilon > 0$  dado. Considere  $\delta = \varepsilon/2$ .

Por definição, se  $d_H(A, B) < \delta = \varepsilon/2$ , então  $A \subset V_\varepsilon(B)$  e  $B \subset V_\varepsilon(A)$ .

Suponha, sem perda de generalidade,  $\alpha(B) \leq \alpha(A)$ . Note que o fato de que  $A \subset V_\varepsilon(B)$  implica que uma  $r$ -cobertura finita de  $B$  sempre proporciona uma  $(r + \varepsilon)$ -cobertura finita de  $A$ . Assim, é verdade que  $\alpha(A) \leq \alpha(B) + \varepsilon$ . Logo,  $\alpha(A) - \alpha(B) \leq \varepsilon$ .

(xiii) Para realizar a demonstração, da família  $\{A_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  vamos extrair a subfamília auxiliar formada pelos conjuntos  $A_t$  quando  $t$  assume valores inteiros ( $t = n$ ).

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , escolha algum  $a_n \in A_n$ , formando a sequência  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , como  $\alpha(A_t) \rightarrow 0$ , temos que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\alpha(A_N) < \varepsilon$ . Assim, definindo

$$K := \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (\{a_n\}_{n=1}^{N-1} \cup A_N),$$

obtemos, pela monotonicidade e pela semiaditividade de  $\alpha$ , que  $\alpha(K) \leq \alpha(A_N) < \varepsilon$ . Como isso vale para todo  $\varepsilon > 0$ , segue que  $\alpha(K) = 0$ , de onde concluímos que  $\overline{K}$  é compacto.

A compacidade de  $\overline{K}$  garante que existe uma sequência  $(a_m)_{m \in \mathbb{N}'} \subset \overline{K}$  convergindo para algum  $a \in \overline{K}$ . Como  $a$  está no fecho de  $K$ , segue que existe uma sequência  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}''} \in K$  tal que  $a_k \rightarrow a$ . Pela definição de  $K$ , temos  $a_k \in A_k$ . Como  $\{A_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  é uma sequência decrescente de conjuntos fechados, sabemos que  $a \in A_\infty := \bigcap_{t \in \mathbb{R}_+} A_t$ . Portanto  $A_\infty \neq \emptyset$ .

Além disso, pela monotonicidade temos que  $\alpha(A_\infty) \leq \alpha(A_t) \rightarrow 0$ , de modo que  $\overline{A}_\infty$  é compacto. Ora, mas  $\overline{A}_\infty = A_\infty$ , pois  $A_\infty$  é interseção de conjuntos fechados. Portanto  $A_\infty$  é compacto.  $\square$



## Capítulo 2

# Introdução a Sistemas Dinâmicos

*“Marco Polo descreve uma ponte, pedra por pedra.*

*— Mas qual é a pedra que sustenta a ponte? — pergunta Kublai Khan.*

*— A ponte não é sustentada por esta ou aquela pedra — responde Marco —, mas pela curva do arco que estas formam.*

*Kublai Khan permanece em silêncio, refletindo. Depois acrescenta:*

*— Por que falar das pedras? Só o arco me interessa.*

*Polo responde:*

*— Sem pedras o arco não existe.”*

---

*— Italo Calvino, As Cidades Invisíveis, [6].*

Estudar sistemas que evoluem com o tempo talvez seja a atividade mais natural para qualquer pessoa, de qualquer época, que esteja interessada em investigar as leis que governam o funcionamento do mundo físico. Desde os primeiros hominídeos que arremessavam pedras e observavam sua trajetória até os matemáticos e cientistas modernos, com suas fórmulas complexas e maquinários experimentais altamente sofisticados, passando por todos os filósofos naturais no curso da evolução das ideias na humanidade, querer saber como objetos, fenômenos e processos evoluem com o tempo é uma curiosidade intrínseca ao ser humano e indissociável ao crescimento do saber científico.

Nesse sentido, é impossível determinar com qualquer grau razoável de precisão as origens daquilo que hoje chamamos de Sistemas Dinâmicos ([25]). Alguns poderiam apontar seu início com Newton (século XVII d.C) ([46]), que foi quem primeiro forneceu um aparato matemático capaz de encapsular com precisão uma série de ideias bem-fundamentadas a respeito das relações entre tempo e espaço: suas leis físicas e equações

diferenciais, indelevelmente marcadas como ponto-chave na história da ciência. Outros poderiam ser mais expansivos e considerar que Arquimedes e seus contemporâneos (século III a.C), ou mesmo Zenão de Eleia (século V a.C), já trabalhavam, tanto em nível prático quanto em nível abstrato, com ideias matemáticas que exploravam variações ao longo do tempo ([2], [5]). O mais usual é apontar Henri Poincaré (1854-1912) como o fundador da teoria moderna de Sistemas Dinâmicos como disciplina específica, com finalidades e métodos próprios ([2], [25], [46]).

O que distingue a teoria moderna de Sistemas Dinâmicos de outros tipos de estudos é seu enfoque no comportamento assintótico de um sistema ([26]). A atenção primária está não nos estados individuais em cada instante de tempo, mas sim no estado para o qual o sistema aparenta se encaminhar à medida que o tempo cresce. Esse enfoque provém de uma necessidade muito prática: no estudo de equações diferenciais, sobretudo parciais, soluções analíticas explícitas muitas vezes são impossíveis de serem obtidas. Assim, para obter informações relevantes acerca das soluções dessas equações, é necessário realizar um estudo que não seja quantitativo, mas qualitativo.

Foi analisando o famoso problema dos três-corpos que Poincaré desenvolveu ideias que estabeleceram as fundações da análise qualitativa de equações diferenciais. O problema dos três-corpos — “como determinar a trajetória de três corpos massivos (planetas) sujeitos às gravidades recíprocas?” — revelou-se insolúvel à maneira clássica, não havendo maneira de se obter fórmulas explícitas para os movimentos planetários ([25], [46]). Poincaré, então, ao invés de se preocupar com a localização exata de cada planeta em cada instante de tempo, resolveu averiguar questões de estabilização, buscando informações para perguntas do tipo “o sistema solar vai ficar estável para sempre ou a partir de algum momento os planetas vão escapar da órbita e rumar para o infinito?” ([46]).

As ideias de Poincaré germinaram em grande velocidade, e suas ramificações se alastraram de modo frutífero para muito além da mecânica celeste. Em anos subsequentes, avanços robustos foram efetivados por matemáticos como Hadamard, Birkhoff, Kolmogorov e Lorenz, que alargaram os limites da disciplina e lhe deram alicerces mais sólidos. Lorenz, por exemplo, estabeleceu conexões entre sistemas dinâmicos e fractalidade que deram origem à atual Teoria do Caos ([25], [46]).

Nos dias de hoje, a ideia de uma região do espaço de fases em que ocorre algum tipo de estabilização está imiscuído no conceito de atrator. A esse respeito, é digno de registro o comentário da proeminente matemática Olga Ladyzhenskaya (1922-2004) sobre o que atraiu seu interesse para o estudo de atratores em sistemas dinâmicos, em especial para satisfazer sua curiosidade em compreender a natureza da turbulência ao interpretar o sistema de Navier-Stokes como um sistema dinâmico de dimensão infinita:

Eu tentei entender o que um observador poderia ter diante de si após um período de tempo muito longo (infinito). Ao mesmo tempo, tomei como base a premissa disseminada entre físicos de que as soluções de sistemas dissipativos “esquecem” os dados iniciais e se “formam” sob a influência de fatores (estacionários) constantemente atuantes. É claro que, em sentido literal, isso não é verdade, pois em um sistema determinístico as soluções estão sempre determinadas pelos dados iniciais (e também pelas condições de contorno e pelas forças externas, as quais são consideradas fixas e independentes do tempo). Mas, ao desenrolar do tempo, a solução pode se afastar para longe dessas condições iniciais e, nesse sentido, esquecê-las. Então eu fiz a mim mesma a pergunta:

qual é a parte do espaço de fases para a qual as soluções são atraídas, e qual é a dinâmica nessa parte? ([20])

As ideias implementadas por Ladyzhenskaya a levaram a construir um conjunto que é exatamente o que nos dias de hoje chamamos de atrator global. Além disso, essas mesmas ideias estão intimamente ligadas ao moderno conceito de “caos determinístico”<sup>1</sup> ([20]). Conforme destaca James C. Robinson, “o atrator não consiste meramente de uma coleção de pontos estacionários, mas potencialmente contém muitas trajetórias caóticas entrelaçadas umas às outras” ([39]).

Atualmente, sistemas dissipativos em dimensão infinita constituem tema em constantemente desenvolvimento teórico. Nesta dissertação, buscamos seguir linhas de pesquisa inspiradas por Alexandre Nolasco de Carvalho e Igor Chueshov (referências [7] e [9], respectivamente).

Por fim, antes de adentrarmos no estudo matemático propriamente dito, convém observar o seguinte: afirmamos que a teoria de Sistemas Dinâmicos se ocupa do estudo de quaisquer sistemas que evoluem com o tempo, sem fazer restrições sobre como essa evolução ocorre. Isso significa que, no cenário mais amplo possível, a lei de evolução temporal do sistema pode possuir memória infinita<sup>2</sup>. Esse cenário extremamente abrangente não vai fazer parte deste trabalho. Aqui, vamos considerar apenas leis de evolução temporal para as quais, dado o estado do sistema em um único instante, ficam bem estabelecidos todos os estados futuros (e também passados, no caso de sistemas reversíveis). Também vamos considerar apenas casos em que a lei de evolução não varia com o tempo. Assim, se  $x \in X$  é o estado do sistema no tempo  $t_0$ , então o estado no tempo  $t$  é descrito unicamente por  $x$  e  $t$ , podendo ser denotado por  $S_t(x)$ . Além disso, conhecer o estado do sistema no tempo  $t + s$  é igual a conhecer o estado no tempo  $s$  e, a partir desse estado, aplicar a lei de evolução para  $t$ . Ou seja, devemos ter  $S_{t+s}(x) = S_t(S_s(x))$ . É nesse contexto que este trabalho foi construído.

---

<sup>1</sup>Caos determinístico não significa completa desordem e aleatoriedade. Grosso modo, caos determinístico é uma consequência de sistemas altamente sensíveis a dados iniciais. Embora as trajetórias nesses sistemas estejam bem determinadas, perturbações minúsculas nos dados iniciais podem ocasionar mudanças drásticas de longo prazo, resultado em comportamentos aparentemente randômicos ([46]). Como bem sintetizou Edward Lorenz, o caos determinístico ocorre “quando o presente determina o futuro, mas uma aproximação do presente não é suficiente para determinar aproximadamente o futuro” ([46]). Em situações de caos desse tipo, é frequente que o respectivo atrator possua detalhamento em escalas infinitamente pequenas, com características daquilo que hoje chamamos de fractal ([46]). Embora Teoria do Caos seja um ramo de destaque nas ciências atuais, esta dissertação não vai lidar diretamente com assuntos relacionados a caos.

<sup>2</sup>Por “memória infinita”, estamos nos referindo a sistemas cujo estado em um momento  $t$  é determinado não só pelo tempo  $t$ , mas também pelos estados anteriores do sistema em todos os tempos  $s < t$ .

## 2.1 Operadores de Evolução e Sistemas Dinâmicos

Um sistema dinâmico envolve um conjunto de estados possíveis (espaço de estados, ou espaço de fases) e uma lei de evolução do estado com base no tempo.

Neste texto, vamos trabalhar em nível abstrato, considerando um espaço métrico completo  $(X, d)$  qualquer, com o conjunto  $X$  sendo o espaço de fases em que estamos interessados.

O conjunto  $\mathbb{T}$ , representando o tempo, será  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Z}$  (tempo contínuo e tempo discreto, respectivamente). O conjunto  $\mathbb{T}_+$  é o conjunto dos elementos não-negativos de  $\mathbb{T}$ .

**Definição 2.1.1** (Operador de Evolução). *Uma família  $\{S_t\}_{t \in \mathbb{T}_+}$  de operadores contínuos definidos de  $X$  em  $X$  é um operador de evolução (ou semigrupo de evolução, ou semifluxo) se satisfizer as propriedades de semigrupo:*

- (i)  $S_0 = Id$ ;
- (ii)  $S_{t+s} = S_t S_s$  para todo  $t, s \in \mathbb{T}_+$ .

No caso  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ , também vamos assumir que  $t \mapsto S_t x$  seja contínua para todo  $x \in X$ .

**Observação 2.1.2.** *Por economia, vamos representar  $\{S_t\}_{t \in \mathbb{T}_+}$  apenas por  $S_t$ .*

**Definição 2.1.3** (Sistema Dinâmico). *O par  $(X, S_t)$  é chamado de sistema dinâmico, tendo  $X$  como espaço de fases e  $S_t$  como operador de evolução.*

Entre outras aplicações, sistemas dinâmicos são úteis no estudo qualitativo de equações diferenciais. Vejamos que, de fato, uma equação diferencial bem-posta gera um sistema dinâmico. Trataremos apenas do caso de equações ordinárias, mas indicamos que a referência [9] também aborda o caso de EDPs.

**Exemplo 2.1.4** (Sistema Dinâmico Gerado por uma EDO). *Seja  $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  uma aplicação contínua. Considere o seguinte problema de valor inicial com uma equação diferencial autônoma (possivelmente não-linear)*

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = F(u(t)), & t \geq 0, \\ u(0) = x, & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

*Sob certas hipóteses (ver Teorema 5.3 – 1 em [27]), o problema (2.1.1) possui solução única  $\varphi_x = \varphi_x(t)$  com dependência contínua no dado inicial  $x$ . Neste caso, o problema gera o semigrupo  $S_t$  em  $\mathbb{R}^d$  definido por  $S_t x = \varphi_x(t)$ .*

*Com efeito:*

- (i)  $S_0 = Id$ .

*Pela forma como foi definido o operador  $S_t$ , temos que  $S_0 x = \varphi_x(0) = x$ , pois  $\varphi_x$  satisfaz o problema (2.1.1). Assim,  $S_0 = Id$ .*

(ii)  $S_{t+s} = S_t S_s$  para todo  $t, s \in \mathbb{T}_+$ .

Temos que  $S_{t+s}x = \varphi_x(t+s)$ . Por simplicidade, vamos denotar  $\varphi_x(t+s) := \varphi(t+s)$ . Por definição,  $\varphi$  é a solução (única) de

$$\begin{cases} \frac{du(\xi)}{d\xi} = F(u(\xi)), & \xi \geq 0, \\ u(0) = x, & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Paralelamente, temos que  $S_t S_s x = S_t(\varphi_x(s)) = \varphi_{\varphi_x(s)}(t)$ . Por simplicidade, vamos denotar  $\varphi_{\varphi_x(s)}(t) := \psi(t)$ . Por definição,  $\psi$  é a solução (única) de

$$\begin{cases} \frac{du(\xi)}{d\xi} = F(u(\xi)), & \xi \geq 0, \\ u(0) = \varphi(s), & \varphi(s) \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

A igualdade  $\varphi(t+s) = \psi(t)$  para todo  $t \geq 0$  provém da unicidade do PVI e, como se trata de uma equação diferencial autônoma, pode ser verificada por uma simples translação: com efeito, note que a função  $\tilde{\varphi} : t \mapsto \varphi(t+s)$  também resolve o problema 2.1.3. Assim, dada a unicidade da solução, temos que  $\tilde{\varphi}(t) = \psi(t)$ . Ou seja,  $\varphi(t+s) = \psi(t)$  para todo  $t \geq 0$ . Portanto  $S_{t+s} = S_t S_s$ .

(iii)  $t \mapsto S_t x_0$  é contínua para cada  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  fixado.

Definimos que  $S_t(x) = \varphi_x(t)$ . Como  $\varphi_x$  é solução do problema (2.1.1), temos que  $\varphi_x$  é diferenciável e, portanto, contínua.

Assim, o par  $(\mathbb{R}^d, S_t)$  é o sistema dinâmico gerado pela equação diferencial (2.1.1).

**Definição 2.1.5** (Equivalência Topológica). Dois sistemas dinâmicos  $(X, S_t)$  e  $(\tilde{X}, \tilde{S}_t)$  são topologicamente equivalentes entre si (ou isomorfos) quando existe um homeomorfismo<sup>3</sup>  $h : X \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $h(S_t x) = \tilde{S}_t h(x)$  para todo  $x \in X$  e todo  $t \geq 0$ . Quando isso ocorre, dizemos que os semifluxos  $S_t$  e  $\tilde{S}_t$  são topologicamente conjugados.

**Definição 2.1.6** (Conjuntos Invariantes). Seja  $S_t$  um operador de evolução em  $X$ . Dizemos que um conjunto  $D \subset X$  é positivamente (resp. negativamente) invariante quando  $S_t D \subset D$  (resp.  $S_t D \supset D$ ) para todo  $t \geq 0$ .

Dizemos que  $D$  é invariante (ou estritamente invariante) quando  $D$  é positivamente e negativamente invariante, isto é, quando  $S_t D = D$  para todo  $t \geq 0$ .

**Proposição 2.1.7** (Propriedades de Conjuntos Invariantes). Conjuntos invariantes respeitam as seguintes propriedades:

- (i) A união de uma coleção arbitrária de conjuntos positivamente invariantes (resp. negativamente ou estritamente invariantes) é positivamente invariante (resp. negativamente ou estritamente invariante).
- (ii) A interseção não-vazia de uma coleção arbitrária de conjuntos positivamente invariante é positivamente invariante.

---

<sup>3</sup>Homeomorfismo: função contínua com inversa contínua.

- (iii) Seja  $S_t$  sobrejetora para todo  $t > 0$ . Se  $B$  é positivamente invariante, então  $X \setminus B$  é negativamente invariante.
- (iv) Seja  $S_t$  injetora para todo  $t > 0$ . Se  $B$  é negativamente invariante, então  $X \setminus B$  é positivamente invariante.
- (v) Seja  $S_t$  bijetora para todo  $t > 0$ . Se  $B$  é invariante, então  $X \setminus B$  é invariante.
- (vi) a) Se  $B$  é positivamente invariante, então  $\overline{B}$  é positivamente invariante.  
b) Se  $B$  é relativamente compacto e negativamente invariante, então  $\overline{B}$  é negativamente invariante.
- (vii) Sejam  $S_t$  e  $\tilde{S}_t$  semifluxos topologicamente conjugados em  $X$  e  $\tilde{X}$ . Seja  $h : X \rightarrow \tilde{X}$  o homeomorfismo correspondente. Então um conjunto  $D$  é invariante (resp. positivamente ou negativamente invariante) com respeito a  $S_t$  se, e somente se,  $\tilde{D} = h(D)$  é invariante (resp. positivamente ou negativamente invariante) com respeito a  $\tilde{S}_t$ .

*Demonstração.* (i) Seja  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  uma família arbitrária de conjuntos positivamente invariantes. Isso significa que

$$S_t A_\lambda \subset A_\lambda, \quad \forall t \geq 0, \forall \lambda \in \Lambda.$$

Como a imagem da união é a união das imagens, segue que

$$S_t \left( \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_t A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda.$$

Isso confirma que  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  é positivamente invariante.

Os casos para conjuntos negativamente e estritamente invariantes são análogos.

(ii) Seja  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  uma família arbitrária de conjuntos positivamente invariantes. Isso significa que

$$S_t A_\lambda \subset A_\lambda, \quad \forall t \geq 0, \forall \lambda \in \Lambda.$$

Como a imagem das interseções está contida<sup>4</sup> na interseção das imagens, segue que

$$S_t \left( \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_t A_\lambda \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda.$$

Isso confirma que  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  é positivamente invariante.

---

<sup>4</sup>Nem sempre  $f \left( \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$ . Por exemplo, se  $f(x) = x^2$ , temos que

$$\{0\} = f(\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_-) \neq f(\mathbb{R}_+) \cap f(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_+.$$

Resultado análogo não é válido para conjuntos negativamente invariantes. Isso ocorre porque a propriedade da imagem das interseções garante apenas a inclusão  $f(\cap A_\lambda) \subset \cap f(A_\lambda)$ , e não a igualdade.

(iii) Seja  $B$  um conjunto positivamente invariante. Isso significa que  $S_t B \subset B$  para todo  $t \geq 0$ . Assim, analisando os complementares, temos que  $X \setminus B \subset X \setminus S_t B$ . Portanto, para todo  $t \geq 0$ , temos que

$$\begin{aligned} X \setminus B &\subset X \setminus S_t B \\ &= S_t X \setminus S_t B \quad (\text{pois } S_t \text{ é sobrejetora}) \\ &\subset S_t(X \setminus B). \end{aligned}$$

Ou seja,  $X \setminus B$  é negativamente invariante.

(iv) Seja  $B$  um conjunto negativamente invariante. Isso significa que  $B \subset S_t B$  para todo  $t \geq 0$ . Assim, analisando os complementares, temos que  $X \setminus S_t B \subset X \setminus B$ . Portanto, para todo  $t \geq 0$ , temos que

$$\begin{aligned} S_t(X \setminus B) &= S_t X \setminus S_t B \quad (\text{pois } S_t \text{ é injetora}) \\ &\subset X \setminus S_t B \quad (\text{pois } X \text{ é o contradomínio de } S_t) \\ &\subset X \setminus B \quad (\text{por hipótese}). \end{aligned}$$

Ou seja,  $X \setminus B$  é positivamente invariante.

(v) Decorre imediatamente dos itens (iii) e (iv).

(vi)-a) Como cada  $S_t$  é contínua, segue que  $S_t \overline{B} \subset \overline{S_t B}$ . Além disso, a hipótese nos dá que  $S_t B \subset B$  para todo  $t \geq 0$ , o que garante que  $\overline{S_t B} \subset \overline{B}$ . Portanto, para todo  $t \geq 0$ , vale que

$$S_t \overline{B} \subset \overline{S_t B} \subset \overline{B}.$$

Ou seja,  $\overline{B}$  é positivamente invariante.

(vi)-b) Por hipótese,  $\overline{B}$  é compacto. Como  $S_t$  é contínua,  $S_t \overline{B}$  também é compacto e, portanto, fechado em  $X$ . Como  $S_t B \subset S_t \overline{B} \subset \overline{S_t B}$ , então o fato de  $S_t \overline{B}$  ser fechado garante que  $S_t \overline{B} = \overline{S_t B}$ . Com isso, a hipótese de que  $B \subset S_t B$  para todo  $t \geq 0$  nos dá que

$$\overline{B} \subset \overline{S_t B} = S_t \overline{B}.$$

Ou seja,  $\overline{B}$  é negativamente invariante.

(vii) Faremos apenas o caso de conjuntos positivamente invariantes. Os demais casos são análogos.

( $\Rightarrow$ ) Seja  $D \subset X$  um conjunto positivamente invariante ( $S_t D \subset D$ ). Temos que

$$\tilde{S}_t h(D) = h(S_t D) \subset h(D).$$

Portanto  $h(D)$  também é positivamente invariante.

( $\Leftarrow$ ) Suponha que  $h(D) \subset \tilde{X}$  seja positivamente invariante ( $\tilde{S}_t h(D) \subset h(D)$ ). Então,

$$h(S_t D) = \tilde{S}_t h(D) \subset h(D).$$

Tomando a inversa  $h^{-1}$  na relação  $h(S_t D) \subset h(D)$ , concluímos que  $S_t D \subset D$ . Portanto  $D$  é positivamente invariante.  $\square$

**Definição 2.1.8** (Trajetória; Órbita; Cauda). *Seja  $S_t$  um operador de evolução em  $X$ . Dado  $D \subset X$ , a cauda da trajetória emanando de  $D$  a partir do tempo  $t$  é o conjunto*

$$\gamma_D^t := \bigcup_{\tau \geq t} S_\tau D.$$

*Quando o conjunto  $D$  é um único ponto, isto é, quando  $D = \{v\}$ , dizemos que  $\gamma_v^0$  é a semitrajétória positiva (ou semiórbita positiva) emanando de  $v$ .*

*Uma curva  $\gamma = \{u(t) : t \in \mathbb{T}\} \subset X$  é chamada de trajetória completa (ou órbita) se, e somente se,  $S_t u(\tau) = u(\tau + t)$  para todo  $\tau \in \mathbb{T}$  e todo  $t \geq 0$ .*

**Observação 2.1.9.** *Decorre imediatamente da definição que semitrajétórias são conjuntos positivamente invariantes e que trajetórias completas são conjuntos estritamente invariantes.*

*Também é imediato verificar que  $\gamma_D^t = \gamma_{S_t D}^0$ .*

*É comum denotarmos  $\gamma_D^0$  por  $\gamma_D^+$ .*

**Definição 2.1.10** (Segmento de uma Trajetória). *O conjunto  $\gamma^{\tau_1, \tau_2} = \{u(t) : \tau_1 \leq t \leq \tau_2\}$  é chamado segmento da trajetória  $\gamma$  no intervalo  $[\tau_1, \tau_2]$ .*

**Definição 2.1.11** (Trajetória Periódica; Ponto Estacionário). *Uma trajetória completa  $\gamma = \{u(t) : t \in \mathbb{T}\}$  é chamada de trajetória periódica quando existe  $T > 0$  tal que  $u(t + T) = u(t)$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ . O menor número positivo  $T$  possuindo essa propriedade é chamado de período da trajetória.*

*Um elemento  $v_0 \in X$  é chamado de ponto estacionário (ou ponto fixo, ou ponto de equilíbrio) do operador de evolução  $S_t$  quando  $S_t v_0 = v_0$  para todo  $t \geq 0$ .*

*Por analogia, pontos estacionários podem ser enxergados como sendo trajetórias periódicas de período  $T = 0$ .*

**Definição 2.1.12** (Conjunto  $\omega$ -Limite). *Dado um sistema dinâmico  $(X, S_t)$  e um conjunto  $D \subset X$ , o conjunto  $\omega$ -limite das trajetórias emanando de  $D$  é o conjunto*

$$\omega(D) := \bigcap_{t > 0} \overline{\gamma_D^t} = \bigcap_{t > 0} \overline{\bigcup_{\tau \geq t} S_\tau D}.$$

**Proposição 2.1.13.** *Se  $\omega(D) \neq \emptyset$ , então  $\omega(D)$  é fechado e  $\omega(S_t D) = \omega(D)$  para todo  $t \geq 0$ .*

*Demonstração.* O conjunto  $\omega(D)$  é fechado porque é interseção de conjuntos fechados.



Seja  $t \geq 0$ . Temos que

$$\omega(S_t D) = \bigcap_{s>0} \overline{\gamma_{S_t D}^s} = \bigcap_{s>0} \overline{\gamma_D^{s+t}} = \bigcap_{r>0} \overline{\gamma_D^r} = \omega(D).$$

Isso prova o desejado.  $\square$

**Lema 2.1.14.** *Toda curva periódica é um conjunto fechado.*

*Demonstração.* Seja  $\gamma = \{u(t); t \in \mathbb{T}\}$  uma curva (contínua) periódica. Então existe  $T > 0$  tal que  $u(t+T) = u(t)$  para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

Dado  $x \in \overline{\gamma}$ , existe uma sequência  $(x_n) \subset \gamma$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Pela  $T$ -periodicidade da curva, existe  $(t_n) \subset [0, T]$  tal que  $x_n = u(t_n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Como  $[0, T]$  é compacto, podemos passar a uma subsequência se necessário e obter uma sequência convergente  $t_n \rightarrow t_0$ , com  $t_0 \in [0, T]$ .

Assim, a continuidade de  $u$  assegura que  $x = u(t_0)$ . Como  $u(t_0) \in \gamma$ , segue que  $x \in \gamma$ .

Portanto  $\gamma = \overline{\gamma}$ .  $\square$

**Proposição 2.1.15.** *Se  $\gamma$  é uma órbita periódica, então  $\omega(\gamma) = \gamma$ .*

*Demonstração.* Sendo  $T$  o período da curva, note que, qualquer que seja  $t > 0$ , vale que

$$\bigcup_{\tau \geq t} S_\tau \gamma = \bigcup_{t+T \leq \tau \leq t+2T} S_\tau \gamma = \gamma.$$

Pelo Lema 2.1.14, temos, para todo  $t > 0$ , que

$$\overline{\bigcup_{\tau \geq t} S_\tau \gamma} = \gamma.$$

Como isso vale para todo  $t > 0$ , concluímos que

$$\omega(\gamma) = \bigcap_{t>0} \overline{\bigcup_{\tau \geq t} S_\tau \gamma} = \gamma.$$

$\square$

O próximo resultado fornece uma caracterização via sequências para o conjunto  $\omega$ -limite.

**Proposição 2.1.16** (Definição Equivalente de  $\omega$ -Limite). *Seja  $(X, S_t)$  um sistema dinâmico e seja  $D \subset X$  um conjunto qualquer. Então  $x \in \omega(D)$  se, e somente se, existirem uma sequência de tempos  $t_n \rightarrow \infty$  e uma sequência de pontos  $(x_n) \subset D$  tais que  $S_{t_n} x_n \rightarrow x$ .*

*Em outras palavras, podemos definir o conjunto  $\omega$ -limite por*

$$\omega(D) := \{w \in X; w = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{t_n} x_n \text{ para algum } t_n \rightarrow \infty, (x_n) \subset D\}.$$

*Demonstração.* Se  $x \in \omega(D)$ , então, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , vale que  $x \in \overline{\bigcup_{\tau \geq n} S_\tau D}$ .

Como, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x$  está no fecho do conjunto  $\bigcup_{\tau \geq n} S_\tau D$ , segue que existem pontos nesse conjunto convergindo para  $x$ . Esses pontos são justamente na forma  $S_{t_n} x_n$ , com  $t_n \geq n$  e  $x_n \in D$ . Ou seja,  $S_{t_n} x_n \rightarrow x$ .

Vejamos a recíproca.

Seja  $x \in X$  tal que existam  $t_n \rightarrow \infty$  e  $(x_n) \subset D$  tais que  $S_{t_n} x_n \rightarrow x$ .

Fixado  $t > 0$  arbitrário, como  $t_n \rightarrow \infty$ , sabemos que existe  $n_t \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_t$  implica  $t_n \geq t$ . Assim, para todo  $n \geq n_t$ , vale que

$$S_{t_n} x_n \in \bigcup_{\tau \geq t} S_\tau D.$$

Por isso, para todo  $t > 0$  é verdade que

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{t_n} x_n \in \overline{\bigcup_{\tau \geq t} S_\tau D}.$$

Como essa inclusão vale para todo  $t > 0$ , concluímos que  $x \in \omega(D)$ . □

**Proposição 2.1.17.** *O conjunto  $\omega$ -limite é positivamente invariante.*

*Demonstração.* O caso  $D = \emptyset$  é trivial.

Dado  $x \in \omega(D)$ , a Proposição 2.1.16 nos permite escrever  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{t_n} x_n$ , com  $t_n \rightarrow \infty$  e  $(x_n) \subset D$ . Assim, qualquer que seja  $t \geq 0$ , temos que

$$\begin{aligned} S_t x &= S_t \left( \lim_{n \rightarrow \infty} S_{t_n} x_n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [S_t (S_{t_n} x_n)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{t+t_n} x_n. \end{aligned}$$

Ora, mas a expressão  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{t+t_n} x_n$  também está nos moldes que caracterizam  $\omega(D)$ , afinal  $t + t_n \rightarrow \infty$  e  $(x_n) \subset D$ . Portanto podemos concluir que  $S_t x \in \omega(D)$ .

Como a escolha de  $x \in \omega(D)$  foi arbitrária, segue que  $S_t[\omega(D)] \subset \omega(D)$ , o que prova que  $\omega(D)$  é positivamente invariante. □

**Proposição 2.1.18.** *Seja  $(X, S_t)$  um sistema dinâmico com  $(t, x) \mapsto S_t x$  sendo uma aplicação contínua de  $(\mathbb{T}_+ \times X)$  a  $X$ . Sejam  $v \in X$  tal que  $\omega(v) \neq \emptyset$  e  $A \subset \omega(v)$  um conjunto positivamente invariante.*

*Nessas hipóteses, quaisquer que sejam  $\varepsilon > 0$ ,  $T > 0$  e  $t_* \geq 0$ , existe  $\bar{t} \geq t_*$  tal que*

$$S_t v \in V_\varepsilon(A), \quad \forall t \in [\bar{t}, \bar{t} + T].$$

*Demonstração.* Seja  $q \in A \subset \omega(v)$ .

Por hipótese, é contínua (em  $t$  e em  $x$ ) a aplicação

$$\begin{aligned} f: (\mathbb{R}_+ \times X) &\rightarrow X \\ (t, x) &\mapsto f(t, x) = S_t x. \end{aligned}$$

Sejam  $\varepsilon > 0$  e  $T > 0$  dados.

Da continuidade em  $x$ , extraímos que, para cada  $t \in [0, T]$ , existe uma família de índices  $L_t$  tal que existe um conjunto de termos estritamente positivos  $\{\delta(t, \lambda)\}_{\lambda \in L_t}$  para os quais  $d(x, y) < \delta(t, \lambda)$  implica  $d(S_t x, S_t q) < \varepsilon$ .

Defina  $\delta_t := \sup_{\lambda \in L_t} \delta(t, \lambda)$ .

Essa definição garante que

- (i)  $\sup_{x \in B(q, \delta_t)} d(S_t x, S_t q) \leq \varepsilon$ ;
- (ii) Se  $r > \delta_t$ , então existe  $x \in B(q, r)$  tal que  $d(S_t x, S_t q) > \varepsilon$ .

⊢ Afirmação:  $\inf_{t \in [0, T]} \delta_t > 0$ .

Por absurdo, suponha que  $\inf_{t \in [0, T]} \delta_t = 0$ . Neste caso, existe  $(t_n) \subset [0, T]$  tal que  $\delta_{t_n} \rightarrow 0$ .

Pela compacidade de  $[0, T]$ , passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que  $(t_n)$  é convergente em  $[0, T]$ . Digamos  $t_n \rightarrow t_\heartsuit \in [0, T]$ .

Como  $\delta_{t_n} \rightarrow 0$ , existe outra sequência,  $(\tilde{\delta}_n) \subset \mathbb{R}_+$ , tal que  $\tilde{\delta}_n \rightarrow 0$  e  $\tilde{\delta}_n > \delta_{t_n}$  para todo  $n$  suficientemente grande.

Assim, para cada  $\tilde{\delta}_n > \delta_{t_n}$ , existe  $x_n \in B(q, \tilde{\delta}_n)$  tal que  $d(S_{t_n} x_n, S_{t_n} q) > \varepsilon$ .

Como  $x_n \in B(q, \tilde{\delta}_n)$  para  $n$  suficientemente grande e como  $\tilde{\delta}_n \rightarrow 0$ , vemos que  $x_n \rightarrow q$ .

Pela continuidade, chegamos ao absurdo de que

$$0 = d(S_{t_\heartsuit} q, S_{t_\heartsuit} q) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(S_{t_n} x_n, S_{t_n} q) \geq \varepsilon > 0.$$

O fato de que  $\inf_{t \in [0, T]} \delta_t > 0$  nos permite tomar  $0 < \delta < \inf_{t \in [0, T]} \delta_t$  e observar que  $x \in B(q, \delta)$  implica  $d(S_t x, S_t q) < \varepsilon$  para todo  $t \in [0, T]$ .

Por isso, temos que

$$\sup_{\substack{t \in [0, T] \\ x \in B(q, \delta)}} d(S_t x, S_t q) \leq \varepsilon.$$

Agora, pela Proposição 2.1.16, podemos escolher  $\bar{t}$  arbitrariamente grande satisfazendo  $d(S_{\bar{t}} v, q) < \delta$ . Assim, para todo  $t \in [0, T]$ , temos que

$$d(S_t S_{\bar{t}} v, S_t q) < \varepsilon.$$

Mas  $q \in A$  e  $A$  é positivamente invariante, então

$$d(S_{t+\bar{t}} v, A) \leq d(S_t S_{\bar{t}} v, S_t q) < \varepsilon$$

para todo  $t \in [0, T]$ .

Com isso concluímos que

$$\sup_{t \in [\bar{t}, \bar{t}+T]} d(S_t v, A) \leq \varepsilon,$$

ou seja, que

$$S_t v \in V_\varepsilon(A), \quad \forall t \in [\bar{t}, \bar{t} + T].$$

□

**Proposição 2.1.19.** *Seja  $(X, S_t)$  um sistema dinâmico com  $(t, x) \mapsto S_t x$  sendo uma aplicação contínua de  $(\mathbb{T}_+ \times X)$  a  $X$ . Sejam  $v \in X$  tal que  $\omega(v) \neq \emptyset$  e  $A \subset \omega(v)$  um conjunto positivamente invariante.*

*Dado  $w \in \omega(v)$ , a Proposição 2.1.16 garante que existe  $t_n \rightarrow \infty$  tal que  $S_{t_n} v \rightarrow w$ . Se, além disso, essa sequência  $(t_n)$  puder ser escolhida de tal forma que  $\{t_{n+1} - t_n\}$  seja uniformemente limitado, então  $w$  é um ponto fixo ou periódico.*

*Demonstração.* Como  $t_n \rightarrow \infty$ , podemos considerar  $(t_n)$  estritamente crescente. Assim, passando a uma subsequência se necessário<sup>5</sup>, a limitação uniforme de  $\{t_{n+1} - t_n\}$  implica a existência de constantes  $k, K > 0$  tais que  $k < t_{n+1} - t_n < K$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Como  $(t_{n+1} - t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  está contida no compacto  $[k, K]$ , podemos escolher uma subsequência  $(t_{n_m+1} - t_{n_m})_{m \in \mathbb{N}}$  que seja convergente (para algum  $t_* > 0$ , digamos). Com isso, a continuidade de  $(t, x) \mapsto S_t x$  nos garante que

$$w = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{t_{n_m+1}} v = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{t_{n_m+1} - t_{n_m}} v S_{t_{n_m}} v = S_{t_*} w.$$

Isso comprova que  $w$  é periódico (ou fixo, caso ocorra  $w = S_\tau w$  para todo  $\tau \geq 0$ ).  $\square$

## 2.1.1 Propriedades Assintóticas de Trajetórias

Nesta subseção, vamos apresentar alguns conceitos importantes para extrair informações a respeito do comportamento a longo prazo de trajetórias individuais (isto é, a trajetória percorrida por um único ponto  $v \in X$ , e não por todo um conjunto  $D \subset X$ ).

Por não fazer parte do escopo deste trabalho, deixamos de apresentar as propriedades de recorrência de trajetórias<sup>6</sup> (as quais podem ser consultadas em [9]).

**Definição 2.1.20** (Lagrange-Estabilidade). *Uma semiórbita positiva  $\gamma_v^+ = \{S_t v; t \in \mathbb{T}_+\}$  é dita ser Lagrange-estável quando  $\gamma_v^+$  é relativamente compacta, isto é, quando  $\overline{\gamma_v^+}$  é compacto.*

**Proposição 2.1.21.** *Uma semiórbita positiva  $\gamma_v^+$  é Lagrange-estável se, e somente se, satisfizer as seguintes condições :*

(i)  $\omega(v)$  é um conjunto compacto e não-vazio.

(ii)  $d(S_t v, \omega(v)) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

<sup>5</sup>A constante  $K$  provém do fato de o conjunto  $\{t_{n+1} - t_n\}$  ter limitação uniforme, mas a constante  $k$ , a princípio, poderia ser 0, e isso não ajudaria em nada na demonstração da proposição. Contudo, basta escolhermos um  $k \in (0, K)$  qualquer e tomarmos a subsequência  $(\tilde{t}_n)$  definida por  $\tilde{t}_1 = t_1$  e  $\tilde{t}_{n+1} = \min\{t_m; t_m \geq \tilde{t}_n + k\}$ . Isso propicia uma constante  $k \neq 0$  adequada para os nossos propósitos.

<sup>6</sup>Propriedades de recorrência são destinadas a investigar se as trajetórias individuais retornam para regiões próximas de si mesmas ou se elas vagueiam a esmo pelo espaço de fases. Essas propriedades também analisam por quanto tempo uma dada trajetória permanece no interior de algum conjunto específico. Por exemplo, o tempo de ocorrência da trajetória de um ponto  $v$  em um conjunto  $E$  durante o intervalo de tempo  $[0, T]$  é dado por  $\tau(v, E, T) := \int_0^T \mathbb{1}_E(S_t v) dt$ , onde  $\mathbb{1}_E$  é a função característica no conjunto  $E$ . Caso o sistema seja discreto ( $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ), a integral é substituída pelo somatório.

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Seja  $\gamma_v^+$  Lagrange-estável.

Por hipótese,  $\overline{\gamma_v^+}$  é compacto. Uma consequência disso é que  $\overline{\gamma_v^\tau}$  também é compacto para todo  $\tau > 0$ . Assim, como  $\overline{\gamma_v^\tau}$  forma uma sequência decrescente de conjuntos compactos, temos que  $\omega(v) := \bigcap_{\tau>0} \overline{\gamma_v^\tau}$  é compacto e não-vazio (princípio da interseção de Cantor).

Isso comprova a ocorrência de (i).

Considere, agora, uma sequência de tempos  $t_n \rightarrow \infty$ . Como  $\overline{\gamma_v^+}$  é compacto, existem  $z \in \overline{\gamma_v^+}$  e uma subsequência  $t_{n_m} \rightarrow \infty$  tais que  $S_{t_{n_m}} v \rightarrow z$ . Assim, pela caracterização via sequências do conjunto  $\omega$ -limite (Proposição 2.1.16), concluímos que  $z \in \omega(v)$ . Isso comprova a ocorrência de (ii).

( $\Leftarrow$ ) Para provar a recíproca, vamos mostrar que, se (i) e (ii) ocorrerem, então qualquer sequência na forma  $(S_{t_n} v)$  contém uma subsequência convergente.

Dada a continuidade do operador, precisamos nos preocupar apenas com o caso em que  $t_n$  não possua nenhuma subsequência limitada.

Considere, então, uma sequência de tempos  $t_n \rightarrow \infty$ .

Por (ii), existe uma sequência  $(z_n) \subset \omega(v)$  tal que  $d(S_{t_n} v, z_n) \rightarrow 0$ . Por (i), existe uma subsequência  $(z_{n_m}) \subset (z_n)$  que converge para algum  $z \in \omega(v)$ . Isso nos leva a concluir que

$$d(S_{t_{n_m}}, z) \leq d(S_{t_{n_m}}, z_{n_m}) + d(z_{n_m}, z) \rightarrow 0.$$

Portanto  $\gamma_v^+$  é Lagrange-estável. □

**Proposição 2.1.22.** *Se  $\gamma_v^+$  é Lagrange-estável, então  $\omega(v)$  é estritamente invariante.*

*Demonstração.* Já mostramos que o conjunto  $\omega$ -limite sempre é positivamente invariante, mesmo quando  $\gamma_v^+$  não é Lagrange-estável (ver Proposição 2.1.17).

Vejamos agora que, se  $\gamma_v^+$  é Lagrange-estável, então  $\omega(v)$  é negativamente invariante (isto é, vale que  $\omega(v) \subset S_t \omega(v)$  para todo  $t \geq 0$ ).

Seja  $t \geq 0$  fixo, porém arbitrário. Se  $z \in \omega(v)$ , temos que

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{t_n} v = \lim_{n \rightarrow \infty} S_t S_{t_n - t} v. \quad (2.1.4)$$

Como  $\gamma_v^+$  é Lagrange-estável, a sequência  $(S_{t_n - t} v)$  é relativamente compacta. Assim, existe uma subsequência  $(t_m) \subset (t_n - t)$  tal que  $S_{t_m} v \rightarrow u$  para algum  $u \in \overline{\gamma_v^+}$ . Pela caracterização via sequências (Proposição 2.1.16), temos que  $u \in \omega(v)$ .

Com base nisso, podemos utilizar a Equação 2.1.4 para obter

$$\begin{aligned} z &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_t S_{t_n - t} v \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} S_t S_{t_m} v \\ &= S_t \left( \lim_{m \rightarrow \infty} S_{t_m} v \right) \\ &= S_t u. \end{aligned}$$

Como  $z \in \omega(v)$  foi tomado de modo arbitrário e como  $u \in \omega(v)$ , podemos concluir que  $\omega(v) \subset S_t \omega(v)$  qualquer que seja  $t \geq 0$ . Portanto  $\omega(v)$  é negativamente invariante. □

**Definição 2.1.23** (Poisson-Estabilidade). *Seja  $(X, S_t)$  um sistema dinâmico e  $v \in X$ . Vamos utilizar as seguintes nomenclaturas para caracterizar as relações entre a trajetória de  $v$  e o conjunto  $\omega$ -limite de  $v$ :*

- Se  $\omega(v) = \emptyset$ , dizemos que  $\gamma_v^+$  está se afastando para sempre.
- Se  $\omega(v) \neq \emptyset$  mas  $\omega(v) \cap \gamma_v^+ = \emptyset$ , dizemos que  $v$  e  $\gamma_v^+$  são assintóticos.
- Se  $\omega(v) \cap \gamma_v^+ \neq \emptyset$ , dizemos que  $v$  é Poisson-estável.

*As nomenclaturas permanecem as mesmas quer estejamos nos referindo ao ponto  $v$ , quer estejamos nos referindo à sua trajetória  $\gamma_v^+$ . Por exemplo: podemos dizer que a trajetória  $\gamma_v^+$  é Poisson-estável ou que o ponto  $v$  é Poisson-estável.*

**Lema 2.1.24** (Definição Equivalente para Poisson-Estabilidade). *Um ponto  $v$  é Poisson-estável se, e somente se, existe  $t_* \geq 0$  tal que  $\gamma_v^{t_*} \subset \omega(v)$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $v$  seja Poisson-estável. Isso significa que  $\omega(v) \cap \gamma_v^+ \neq \emptyset$ . Assim, existe  $t_* \geq 0$  tal que  $S_{t_*}v \in \omega(v) \cap \gamma_v^+$ .

Para todo  $t \geq t_*$ , podemos reescrever  $S_tv = S_{t-t_*}v$ . Como  $S_{t_*}v \in \omega(v)$  e como  $\omega(v)$  é positivamente invariante, segue que  $S_tv \in \omega(v)$ . Isso vale para todo  $t \geq t_*$ , de modo que  $\gamma_v^{t_*} \subset \omega(v)$ .

Reciprocamente, suponha que exista  $t_* \geq 0$  tal que  $\gamma_v^{t_*} \subset \omega(v)$ . Sabemos que  $\gamma_v^{t_*} \subset \gamma_v^+$ , de modo que  $\omega(v) \cap \gamma_v^+ \neq \emptyset$ . Portanto  $v$  é Poisson-estável.  $\square$

Vejamos, agora, uma caracterização topológica para Poisson-estabilidade.

**Teorema 2.1.25.** *Seja  $(X, S_t)$  um sistema dinâmico contínuo. Para que  $v$  seja Poisson-estável, é necessário e suficiente que  $\gamma_v^+$  não seja homeomorfo ao semieixo  $\mathbb{R}_+$ .*

*Demonstração.* Caso 1: Suponha que  $v$  seja Poisson-estável. Se a trajetória de  $v$  possuir pontos de equilíbrio ou órbitas periódicas, é imediato perceber que essa trajetória não pode ser homeomorfa a  $\mathbb{R}_+$  (afinal, se  $S_tv = S_sv$ , com  $t \neq s$ , então é impossível estabelecer uma bijeção contínua com inversa contínua entre  $\gamma_v^+$  e  $\mathbb{R}_+$ ). Reciprocamente, se  $\gamma_v^+$  e  $\mathbb{R}_+$  forem homeomorfos entre si, então  $\gamma_v^+$  não pode possuir pontos de equilíbrio ou órbitas periódicas.

Caso 2: A partir de agora, vamos considerar apenas casos em que  $\gamma_v^+$  não possua pontos de equilíbrio ou órbitas periódicas.

Para auxiliar na demonstração do teorema, vamos primeiro definir a seguinte função:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \gamma_v^+ \\ t &\mapsto \varphi(t) := S_tv. \end{aligned}$$

Note que  $\varphi$  é contínua e bijetora.

( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $\gamma_v^+$  seja Poisson-estável.

$\vdash$  Afirmação 1: Se  $\gamma_v^+$  é Poisson-estável, então  $\varphi$  não é um homeomorfismo.

De fato, como  $\omega(v) \cap \gamma_v^+ \neq \emptyset$ , temos que existe  $t_* \geq 0$  tal que  $v_* := S_{t_*} v \in \omega(v)$ . Assim, pela Proposição 2.1.16, existe uma sequência de tempos  $t_n \rightarrow \infty$  tal que  $y_n := S_{t_n} v \rightarrow v_*$ . Contudo, veja que  $\varphi^{-1}(y_n) = t_n$ , de modo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{-1}(y_n) = \infty$ , o que mostra que  $\varphi^{-1}$  não é contínua em  $v_*$ , caso em que deveria ocorrer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{-1}(y_n) = \varphi^{-1}(v_*) = t_* \neq \infty$ .

Isso comprova a Afirmação 1.

Agora suponha que  $\gamma_v^+$  seja homeomorfo a  $\mathbb{R}_+$ . seja  $h : \gamma_v^+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  o homeomorfismo correspondente.

Neste caso, a função  $g(t) = (h \circ \varphi)(t)$  é contínua e bijetora de  $\mathbb{R}_+$  em  $\mathbb{R}_+$ , sendo, portanto, estritamente crescente. Estando nessas condições, é certo que  $g = h \circ \varphi$  é um homeomorfismo.

Contudo, note que  $h^{-1} \circ g = \varphi$  também é um homeomorfismo (pois é composição de dois homeomorfismos). Portanto, pela Afirmação 1, como  $\varphi$  é homeomorfismo, segue que  $\gamma_v^+$  não é Poisson-estável.

( $\Leftarrow$ ) Suponha que  $\gamma_v^+$  não seja Poisson-estável.

Vamos mostrar que, quando  $v$  não é Poisson-estável,  $\varphi$  é um homeomorfismo. Já sabemos que  $\varphi$  é contínua e bijetora.

Para confirmar que a inversa  $\varphi^{-1}$  também é contínua, veja o seguinte. Se alguma sequência de pontos  $x_n = S_{t_n} v \in \gamma_v^+$  convergir para algum ponto  $x \in \gamma_v^+$ , então a sequência dos tempos  $t_n = \varphi^{-1}(x_n)$  será limitada (caso contrário, ocorreria  $x \in \omega(v)$ , o que não pode acontecer porque  $v$  é Poisson-estável). Assim, podemos extrair uma subsequência convergente  $t_{n_m} \rightarrow \tilde{t}$ . Pela continuidade, temos que

$$x = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{t_{n_m}} v = S_{\tilde{t}} v.$$

Isso significa que  $\tilde{t} = \varphi^{-1}(x)$ . Ou seja, acabamos de mostrar que, se  $x_n \rightarrow x$ , então  $\varphi^{-1}(x_n) \rightarrow \varphi^{-1}(x)$ , o que comprova que  $\varphi^{-1}$  é contínua.  $\square$

## 2.2 Sistemas Dinâmicos Dissipativos

Conforme já mencionado anteriormente, a teoria de sistemas dinâmicos abordada neste trabalho é direcionada ao estudo qualitativo do comportamento de soluções para equações diferenciais parciais autônomas não-lineares. Essas equações são frequentes na modelagem de fenômenos reais diversos (físicos, químicos, biológicos, econômicos, etc.).

De particular interesse para as ciências modernas são as EDPs relacionadas a sistemas dissipativos, nos quais existe algum tipo de perda de energia<sup>7</sup> (isto é, transmissão de energia para algo que esteja fora do sistema). Em contraste aos sistemas conservativos (que são aqueles em que a energia é preservada), nos sistemas dissipativos ocorrem forças como atrito, viscosidade e resistência do ar. Essas forças dissipativas, justapostas às demais forças atuantes no sistema, podem levar ao surgimento de estados bastante complexos, havendo ou não estabilidade em algum sentido ([10]).

Quando existe dissipatividade, é de se esperar que ocorra algum tipo de encolhimento da dinâmica sob análise, de modo que os estados-limite fiquem contidos em uma região limitada do espaço de fases.

Essas ideias motivam as seguintes definições.

**Definição 2.2.1** (Conjunto Absorvente; Sistema Dissipativo; Dissipatividade Pontual; Raio de Dissipatividade). *Seja  $(X, S_t)$  um sistema dinâmico. Adotamos as seguintes definições:*

- *Um conjunto fechado  $B \subset X$  é dito ser absorvente para  $S_t$  se, para qualquer conjunto limitado  $D \subset X$ , existir um tempo  $t_0 = t_0(D)$  tal que  $S_t D \subset B$  para todo  $t \geq t_0$ .*
- *Um sistema dinâmico  $(X, S_t)$  para o qual existe um conjunto absorvente limitado é chamado de sistema dissipativo.*
- *Se  $(X, S_t)$  for um sistema dissipativo e  $X$  for um espaço de Banach, então, dada uma bola  $B$  contendo o conjunto absorvente, dizemos que o raio de  $B$  é o raio de dissipatividade do sistema.*
- *Um sistema dinâmico  $(X, S_t)$  é chamado de pontualmente dissipativo se existir um conjunto limitado  $B_0 \subset X$  tal que, para qualquer  $x \in X$ , existe  $t_0 = t_0(x)$  tal que  $S_t x \in B_0$  para todo  $t \geq t_0$ .*

**Teorema 2.2.2** (Critério de Dissipatividade). *Seja  $(X, S_t)$  um sistema dinâmico contínuo em um espaço de Banach  $X$  que satisfaça as seguintes hipóteses:*

- *Existe uma função contínua  $U : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que*

$$\varphi_1(\|x\|) \leq U(x) \leq \varphi_2(\|x\|), \quad \forall x \in X, \quad (2.2.1)$$

*onde  $\varphi_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  são funções contínuas tais que  $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_i(r) = \infty$ .*

---

<sup>7</sup>Nesta exposição informal, deixamos propositalmente em aberto o significado da palavra “energia”. Como é de praxe em assuntos relacionados à Física, é difícil determinar o significado desse conceito sem cair em definições circulares. Por esse motivo, e também levando em consideração que uma interpretação física de algo merecedor do nome “energia” depende do contexto em que ela esteja sendo avaliada, optamos por nos permitir alguma vagueza na linguagem.



- Para todo  $t > 0$  e  $x \in X$ , existe a derivada  $\frac{d}{dt}U(S_t x)$ ; também existem uma função<sup>8</sup>  $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  e uma constante  $r_0 > 0$  tais que

$$\|S_t x\| > r_0 \Rightarrow \frac{d}{dt}U(S_t x) \leq -\alpha(\|x\|). \quad (2.2.2)$$

Sob essas hipóteses, o sistema dinâmico  $(X, S_t)$  é dissipativo, com um conjunto absorvente na forma

$$B_* = \{x \in X; \|x\| \leq R_*\},$$

onde a constante  $R_*$  depende apenas das funções  $\varphi_i$  e do número  $r_0$ .

*Demonstração.* Escolha  $R_0 > r_0$  tal que  $\varphi_1(r) > 0$  para todo  $r > R_0$  (isso é possível porque  $\varphi_1(r) \rightarrow \infty$ ).

Seja  $L := \sup\{\varphi_2(r); r \leq 1 + R_0\}$ .

Escolha  $R_* \geq 1 + R_0$  tal que  $r > R_*$  implique<sup>9</sup>  $\varphi_1(r) > L$  (novamente, isso é possível porque  $\varphi_1(r) \rightarrow \infty$ ). Observe que  $R_*$  pode ser escolhido com restrições impostas apenas por  $\varphi_1, \varphi_2$  e  $r_0$ .

Estabelecidas essas escolhas, vamos mostrar que  $B_* = \{x \in X; \|x\| \leq R_*\}$  é um conjunto absorvente.

⊢ Afirmação 1:  $\|x\| \leq R_0 \Rightarrow \|S_t x\| \leq R_*, \forall t \geq 0$ .

Suponha por absurdo que exista  $x_0 \in X$ , com  $\|x_0\| \leq R_0$ , tal que  $\|S_{\bar{t}} x_0\| > R_*$  para algum  $\bar{t} \geq 0$ .

Observando que

$$\|S_{\bar{t}} x_0\| > R_* \geq 1 + R_0 > R_0 \geq \|x_0\| = \|S_0 x_0\|,$$

a continuidade de  $S_t x_0$  (em  $t$ ) garante que existe  $t' \in (0, \bar{t})$  tal que  $\|S_{t'} x_0\| = 1 + R_0$ .

Como não sabemos se  $t'$  é o único número com essa propriedade, vamos considerar

$$t_0 := \sup\{t < \bar{t}; \|S_t x_0\| = 1 + R_0\}.$$

Como  $\|S_{t_0} x_0\| = 1 + R_0 > r_0$ , a hipótese (2.2.2), associada à continuidade de  $U$  e de  $S_t$ , garante que a função  $U(S_t x_0)$  é localmente decrescente em uma vizinhança de  $t_0$ . Assim, definindo

$$t_1 := \sup\{t; \|S_\tau x_0\| \geq r_0, \forall \tau \in [t_0, t]\},$$

temos que, para todo  $t \in [t_0, t_1]$ , vale que  $U(S_t x_0) < U(S_{t_0} x_0)$ .

Associando isso à desigualdade (2.2.1) e à definição da constante  $L$ , temos que

$$\varphi_1(\|S_t x_0\|) \leq U(S_t x_0) \leq U(S_{t_0} x_0) \leq \varphi_2(\|S_{t_0} x_0\|) \leq L, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Com base nessa desigualdade, lembrando que  $R_*$  foi escolhido de forma a ocorrer  $\varphi_1(r) > L$  sempre que  $r > R_*$ , podemos concluir que  $\|S_t x_0\| \leq R_*$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$ .

<sup>8</sup>Versões mais antigas desse teorema exigiam a existência de uma constante positiva  $\alpha$ . A substituição dessa hipótese para a existência de uma função positiva aumentou a abrangência do teorema, pois garante a dissipatividade mesmo quando  $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = 0$ .

<sup>9</sup>Podemos escolher, por exemplo,  $R_* := 1 + \inf\{R \in \mathbb{R}_+; r > R \Rightarrow \varphi_1(r) > L\}$ .

Como assumimos que  $\|S_{\bar{t}}x_0\| > R_*$ , devemos ter  $\bar{t} \in [0, t_0) \cup (t_1, \infty)$ . Contudo, na definição de  $t_0$ , exigimos  $t_0 < \bar{t}$ , então só pode ocorrer que  $\bar{t} \in (t_1, \infty)$ . Ou seja, vale que  $t_0 < t_1 < \bar{t}$ .

Agora, note que

$$\|S_{t_1}x_0\| = r_0 \leq 1 + R_0 \leq R_* < \|S_{\bar{t}}x_0\|,$$

de modo que existe  $t_2 \in (t_1, \bar{t})$  – por consequência,  $t_2 \in (t_0, \bar{t})$  – tal que  $\|S_{t_2}x_0\| = 1 + R_0$ .

Ora, mas aqui nos deparamos com um absurdo, afinal  $t_0$  foi definido como  $t_0 := \sup\{t < \bar{t}; \|S_t x_0\| = 1 + R_0\}$ , de modo que, por ser o supremo, não pode ser menor do que  $t_2$ .

⊢ Afirmação 2: Se  $\|S_T x\| \leq R_0$  para algum  $T \geq 0$ , então  $\|S_t x\| \leq R_*$  para todo  $t \geq T$ .

A Afirmação 2 é corolário imediato da Afirmação 1.

⊢ Afirmação 3:  $B_* = \{x \in X; \|x\| \leq R_*\}$  é um conjunto absorvente.

Pela forma como foi definido,  $R_*$  é um conjunto fechado.

Note que a Afirmação 1 já garante que, se  $\|x\| \leq R_0$ , então  $S_t x \in B_*$  para todo  $t \geq 0$ . Ou seja,  $B_*$  absorve todos os pontos com norma  $R_0$  ou menor. Vamos, portanto, concentrar nossa atenção aos pontos cuja norma seja maior do que  $R_0$ .

Seja  $D \subset X$  um conjunto limitado e não-vazio cujos elementos possuem norma maior do que  $R_0$ . Seja  $y \in D$  fixo, porém arbitrário.

Vamos definir<sup>10</sup>  $t_y > 0$  por

$$t_y := \sup\{t \geq 0; \|S_\tau y\| \geq r_0, \forall \tau \in [0, t]\}.$$

Observe que a hipótese (2.2.2) garante que

$$\frac{d}{dt}U(S_t y) \leq -\alpha(\|y\|), \quad \forall t \in [0, t_y].$$

Integrando de 0 a  $t$ , obtemos

$$U(S_t y) \leq U(y) - t\alpha(\|y\|), \quad \forall t \in [0, t_y].$$

Assim, podemos definir

$$L_D := \sup_{x \in D} U(x) < \infty \quad \text{e} \quad \alpha_D := \inf_{x \in D} \alpha(\|x\|) > 0$$

para obter

$$U(S_t y) \leq L_D - t\alpha_D, \quad \forall t \in [0, t_y]. \quad (2.2.3)$$

Finalmente, vamos definir

$$t_D := \max \left\{ \frac{L_D - L}{\alpha_D}, 0 \right\}.$$

Note que  $t_D$  não depende do  $y \in D$  escolhido, mas apenas do conjunto  $D$ .

Vamos mostrar que  $\|S_t y\| \leq R_*$  para todo  $t \geq t_D$ .

---

<sup>10</sup> $t_y \neq 0$  devido à continuidade do operador e ao fato de que  $\|S_0 y\| = \|y\| > R_0 \geq r_0$ .

Podem ocorrer dois casos:

Caso 1:  $t_y \leq t_D$ .

Se  $t_y \leq t_D$ , então  $t_y < \infty$ . Neste caso, pela definição de  $t_y$ , temos que  $\|S_{t_y}y\| = r_0 < R_0$ . Assim, pela Afirmação 2, concluímos que  $\|S_t y\| \leq R_*$  para todo  $t \geq t_y$  e, a fortiori, para todo  $t \geq t_D$ .

Caso 2:  $t_D < t_y$ .

Se  $t \in [t_D, t_y]$ , a hipótese (2.2.1), associada à desigualdade (2.2.3), garante que

$$\begin{aligned} \varphi_1(\|S_t y\|) &\leq U(S_t y) \leq L_D - \alpha_D t \\ &\leq L_D - \alpha_D t_D \\ &= L_D - \alpha_D \left( \frac{L_D - L}{\alpha_D} \right) \\ &= L. \end{aligned}$$

Mas  $R_*$  foi escolhido de modo que  $r > R_*$  implique  $\varphi_1(r) > L$ . Assim, quando  $t \in [t_D, t_y]$ , como  $\varphi_1(\|S_t y\|) \leq L$ , é certo que  $\|S_t y\| \leq R_*$ .

Se  $t_y = \infty$ , concluímos que  $\|S_t y\| \leq R_*$  para todo  $t \geq t_D$ .

Se  $t_y < \infty$ , para verificar que  $\|S_t y\| \leq R_*$  também para todo  $t > t_y$ , basta proceder como no Caso 1.

Em suma, mostramos que, qualquer que seja  $y \in D$ , temos que  $S_t y \in B_*$  para todo  $t \geq t_D$  (isto é,  $S_t D \subset B_*$  para todo  $t \geq t_D$ ). Ou seja,  $B_*$  é um conjunto absorvente de raio  $R_*$  para o sistema dissipativo  $(X, S_t)$ .  $\square$

### 2.2.1 Compacidade Assintótica e Suavidade Assintótica

O estudo de dinâmicas de longo prazo ( $t \rightarrow \infty$ ) em espaços de dimensão infinita exige a análise de certas propriedades de compacidade do operador de evolução. As propriedades que mais usualmente são utilizadas estão inseridas nos conceitos de compacidade assintótica e de suavidade assintótica. Esses conceitos foram propostos independentemente por O. Ladyzhenskaya e J. K. Hale, e acabaram se revelando equivalentes entre si (Proposição 2.2.10).

Primeiro vamos estabelecer algumas ferramentas que vão nos auxiliar a definir os conceitos que pretendemos introduzir nesta seção.

**Definição 2.2.3** (Semidistância de Hausdorff). *A semidistância de Hausdorff de um conjunto  $A \subset X$  a um conjunto  $B \subset X$  é a função*

$$d_h(A|B) := \sup_{a \in A} d(a, B).$$

*De modo equivalente (ver Seção 1.1), a semidistância de Hausdorff de  $A$  a  $B$  pode ser definida por*

$$d_h(A|B) := \inf\{\varepsilon > 0; A \subset V_\varepsilon(B)\}.$$

*Intuitivamente, essa distância mede o quanto o conjunto  $A$  está ou não contido no conjunto  $B$ .*

**Observação 2.2.4.** A semidistância de Hausdorff é uma função não-simétrica, isto é, nem sempre vale que  $d_h(A|B) = d_h(B|A)$ . Para verificar isso, basta considerar quaisquer conjuntos tais que  $A \subset B$  mas que  $A$  não seja denso em  $B$ . Por exemplo, se  $A = [0, 1]$  e  $B = \mathbb{R}$ , então  $0 = d_h(A|B) \neq d_h(B|A) = \infty$ .

**Definição 2.2.5** (Convergência de Conjuntos sob a Semidistância de Hausdorff). Dada uma sequência de conjuntos  $(A_n) \subset X$ , dizemos que  $(A_n)$  converge para o conjunto  $A \subset X$  sob a semidistância de Hausdorff, e para isso escrevemos  $A_n \xrightarrow{h} A$ , quando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_h(A_n|A) = 0.$$

Estabelecidas essas ferramentas, estamos em condições de conhecer as seguintes definições.

**Definição 2.2.6** (Sistema Compacto; Sistema Condicionalmente Compacto; Compacidade Assintótica; Suavidade Assintótica). Seja  $S_t$  um operador de evolução em um espaço métrico completo  $X$ . Adotamos as seguintes definições:

- $(X, S_t)$  é chamado de compacto se existir um conjunto absorvente compacto para esse sistema dinâmico.
- $(X, S_t)$  é chamado de condicionalmente compacto se, para qualquer conjunto limitado  $D$  positivamente invariante (i.e.,  $S_t D \subset D$  para todo  $t \geq 0$ ), existirem um tempo  $t_D \geq 0$  e um conjunto compacto  $K_D \subset \overline{D}$  tal que  $S_t D \subset K_D$  para todo  $t \geq t_D$ .
- $(X, S_t)$  é chamado de assintoticamente compacto se, para qualquer conjunto limitado  $D \subset X$  tal que a cauda<sup>11</sup>  $\gamma^T(D)$  seja limitada para algum  $T \geq 0$ , valer que qualquer sequência na forma  $(S_{t_n} x_n)$ , com  $x_n \in D$  e  $t_n \rightarrow \infty$ , for relativamente compacta. [Essa condição é conhecida como condição de Ladyzhenskaya.]
- $(X, S_t)$  é chamado de assintoticamente suave se, para qualquer conjunto limitado  $D$  positivamente invariante, existir um conjunto compacto  $K_D \subset \overline{D}$  tal que  $S_t D \xrightarrow{h} K_D$ . [Essa condição é conhecida como condição de Hale.]

**Proposição 2.2.7.** Todo operador de evolução compacto também é condicionalmente compacto.

*Demonstração.* Seja  $S_t$  um operador de evolução compacto em um espaço métrico completo  $X$ . Por definição, existe  $K \subset X$  compacto tal que, para todo  $D \subset X$  limitado, existe  $t_0(D) \geq 0$  tal que  $S_t D \subset K$  para todo  $t > t_0$ .

Dado  $D$  limitado tal que  $S_t D \subset D$ , defina  $K_D := K \cap \overline{D}$ . Por ser interseção de um conjunto compacto com um conjunto fechado, sabemos que  $K_D \subset \overline{D}$  é compacto. Além disso, para todo  $t > t_D := t_0$ , vale que  $S_t D \subset K_D$ . Isso mostra que  $S_t$  é condicionalmente compacto.  $\square$

**Proposição 2.2.8.** Se  $S_t$  é condicionalmente compacto, então  $S_t$  também é assintoticamente compacto e assintoticamente suave.

---

<sup>11</sup> $\gamma^T(D) := \bigcup_{t \geq T} S_t D$ .

*Demonstração.* Seja  $S_t$  condicionalmente compacto. Então, para cada conjunto  $D$  que seja limitado e positivamente invariante, existem  $t_D \geq 0$  e um conjunto compacto  $K_D \subset \overline{D}$  tal que  $S_t D \subset K_D$  para todo  $t \geq t_D$ .

Seja  $D_1$  um conjunto limitado tal que  $\gamma^T(D_1)$  seja limitada para algum  $T \geq 0$ . A cauda  $\gamma^T(D_1)$  é positivamente invariante, pois  $\gamma^T(D_1) \subset S_t \gamma^T(D_1)$  para todo  $t \geq 0$ . Assim, como  $S_t$  é condicionalmente compacto, existem  $t_{D_1} \geq 0$  e um conjunto compacto  $K_{D_1} \subset \overline{D_1}$  tal que  $t \geq t_{D_1}$  implica  $S_t D_1 \subset K_{D_1}$ .

Agora, tomando qualquer sequência  $(S_{t_n} x_n)$ , com  $x_n \in D_1$  e  $t_n \rightarrow \infty$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $t_n > t_{D_1}$  para todo  $n > n_0$ . Assim, como  $x_n \in D_1$ , vale que  $S_{t_n} x_n \in K_{D_1}$  para todo  $n > n_0$ . Como  $K_{D_1}$  é compacto, segue que a sequência  $(S_{t_n} x_n)$  é relativamente compacta. Portanto  $S_t$  é assintoticamente compacto.

Por fim, para qualquer conjunto limitado  $D_2$  positivamente invariante, a compacidade condicional de  $S_t$  garante que existem  $t_{D_2} \geq 0$  e um conjunto compacto  $K_{D_2} \subset \overline{D_2}$  tal que  $S_t D_2 \subset K_{D_2}$  para todo  $t \geq t_{D_2}$ . Ora, mas

$$S_t D_2 \subset K_{D_2} \Rightarrow d_h(S_t D_2 | K_{D_2}) = 0,$$

de modo que  $\lim_{t \rightarrow \infty} d_h(S_t D_2 | K_{D_2}) = 0$ . Logo,  $S_t D_2 \xrightarrow{h} K_{D_2}$  e, portanto,  $S_t$  é assintoticamente suave.  $\square$

O lema a seguir é introduzido para auxiliar na prova de que compacidade assintótica e suavidade assintótica são conceitos equivalentes.

**Lema 2.2.9.** *Seja  $S_t$  um operador de evolução assintoticamente compacto em  $X$  e seja  $D \subset X$  um conjunto limitado tal que a cauda  $\gamma^T(D)$  seja limitada para algum  $T \geq 0$ . Então o conjunto omega-limite<sup>12</sup>  $\omega(D)$  é um conjunto invariante, compacto e não-vazio tal que  $S_t D \xrightarrow{h} \omega(D)$ .*

*Demonstração.* Assumidas as hipóteses, afirmamos o seguinte.

⊢ Afirmação 1:  $\omega(D) \neq \emptyset$ .

Da compacidade assintótica, se  $t_n \rightarrow \infty$  e  $(x_n) \subset D$ , então  $\{S_{t_n} x_n\}$  é relativamente compacto. Por isso, existe uma subsequência  $(S_{t_m} x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  que converge em  $D$  (para  $w \in X$ , digamos). Isso garante que  $w \in \omega(D)$  e, portanto, que  $\omega(D) \neq \emptyset$ .

⊢ Afirmação 2:  $\omega(D)$  é compacto.

Note que, qualquer que seja  $(w_n) \subset \omega(D)$ , existem  $t_n \rightarrow \infty$  e  $(x_n) \subset D$  tais que

$$d(S_{t_n} x_n, w_n) \leq 1/n.$$

Pela compacidade assintótica,  $(S_{t_n} x_n)$  possui uma subsequência convergente, digamos  $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{t_{n_m}} x_{n_m} = \tilde{w} \in \omega(D)$ . Como consequência,  $\lim_{m \rightarrow \infty} w_{n_m} = \tilde{w}$ , o que mostra que  $\omega(D)$  é relativamente compacto.

De modo similar, se  $w_k \rightarrow \bar{w} \in \overline{\omega(D)}$ , então existe uma subsequência de  $(S_{t_n} x_n)$  convergindo para  $\bar{w}$ , o que garante que  $\bar{w} \in \omega(D)$ . Logo,  $\omega(D)$  é fechado.

Sendo fechado e relativamente compacto, concluímos que  $\omega(D)$  é compacto.

<sup>12</sup>A Proposição 2.1.16 caracteriza  $\omega(D) = \{w \in X; w = \lim_{t \rightarrow \infty} S_{t_n} x_n \text{ para algum } t_n \rightarrow \infty, (x_n) \subset D\}$ .

⊢ Afirmação 3:  $\omega(D)$  é invariante.

Seja  $w \in \omega(D)$ , com  $w = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{t_n} x_n$ .

Quanto à invariância para frente, note que, como  $S_t w = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{t+t_n} x_n$ , está claro que  $S_t w \in \omega(D)$ . Logo,  $S_t \omega(D) \subset \omega(D)$  para todo  $t \geq 0$ , e, então,  $\omega(D)$  é positivamente invariante.

Quanto à invariância para trás, vamos tomar  $T > 0$  fixo, porém arbitrário, e considerar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0$  implique  $t_n > T$ . Assim, pela compacidade assintótica, a sequência  $(S_{t_n-T} x_n)_{n \geq n_0}$  é relativamente compacta. Então existe uma subsequência convergente, digamos

$$y_m := S_{t_{n_m}-T} x_{n_m} \rightarrow v \in \omega(D) \quad (m \rightarrow \infty).$$

Mas também é verdade que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_T y_m = \lim_{m \rightarrow \infty} S_T S_{t_{n_m}-T} x_{n_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{t_{n_m}} x_{n_m} = w.$$

Ou seja,  $w = S_T v$ , com  $v \in \omega(D)$ . Logo,  $\omega(D) \subset S_T(\omega(D))$ . Assim, a arbitrariedade na escolha de  $T$  garante que  $\omega(D)$  é negativamente invariante.

⊢ Afirmação 4:  $S_t D \xrightarrow{h} \omega(D)$ .

Suponha que a afirmação seja falsa. Então existem  $\delta > 0$ ,  $t_n \rightarrow \infty$  e  $(x_n) \subset D$  tais que

$$d_h(S_{t_n} x_n | \omega(D)) > \delta, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Isso, por sua vez, significa que

$$d(S_{t_n} x_n, \omega(D)) > \delta, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.2.4)$$

Mas a compacidade assintótica garante que  $\{S_{t_n} x_n\}$  é relativamente compacto. Então existe uma sequência nesse conjunto que converge para algum ponto de  $\omega(D)$ , e isso contradiz (2.2.4).  $\square$

**Proposição 2.2.10.** *Um operador de evolução em algum espaço métrico completo  $X$  é assintoticamente compacto se, e somente se, é assintoticamente suave.*

*Demonstração.* Sejam  $S_t$  um operador assintoticamente compacto e  $D \subset X$  um conjunto limitado e positivamente invariante. Pelo Lema 2.2.9,  $\omega(D)$  é um conjunto compacto tal que  $S_t D \xrightarrow{h} \omega(D)$ . Identificando simplesmente  $K_D := \omega(D)$ , concluímos que  $S_t$  é assintoticamente suave.

Vejamos a recíproca.

Sejam  $S_t$  um operador assintoticamente suave e  $D \subset X$  um conjunto limitado tal que a cauda  $\gamma^\tau(D) := \bigcup_{t \geq \tau} S_t D$  seja limitada para algum  $\tau \geq 0$ . Como  $D_* := \gamma^\tau(D)$  é

positivamente invariante, a suavidade assintótica garante que  $S_t D_* \xrightarrow{h} K$  para algum  $K$  compacto. Logo,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{t_n} x_n \subset K$  quaisquer que seja as sequências  $(x_n) \subset D$  e  $t_n \rightarrow \infty$ . Portanto  $\{S_{t_n} x_n\}$  é relativamente compacto e, então,  $S_t$  é assintoticamente compacto.  $\square$

**Proposição 2.2.11.** *Um operador de evolução  $S_t$  é assintoticamente suave/compacto se, e somente se, para qualquer conjunto limitado e positivamente invariante  $B$  valer que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(S_t B) = 0$ .*

*Demonstração.* Seja  $D$  um conjunto limitado e positivamente invariante. Se  $S_t$  é assintoticamente suave, então existe um conjunto compacto  $K_D$  tal que  $S_t D \xrightarrow{h} K_D$ . Pela compacidade de  $K_D$ , para cada  $\varepsilon > 0$  existe um conjunto finito  $\{x_k\}_{k=1}^{N_\varepsilon} \subset K_D$  tal que

$$K_D \subset \bigcup_{k=1}^{N_\varepsilon} B_k, \quad \text{onde } B_k := \{x \in X; d(x, x_k) < \varepsilon\}.$$

Como  $S_t D \xrightarrow{h} K_D$ , temos que existe  $t_\varepsilon > 0$  tal que  $S_t D \subset \bigcup_{k=1}^{N_\varepsilon} B_k$  para todo  $t \geq t_\varepsilon$ .

Assim, com base nas propriedades de  $\alpha$  (Proposição 1.2.2), temos que

$$\alpha(S_t D) \leq \alpha\left(\bigcup_{k=1}^{N_\varepsilon} B_k\right) \leq \max_{1 \leq k \leq N_\varepsilon} \alpha(B_k) \leq 2\varepsilon.$$

Portanto  $\alpha(S_t D) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Reciprocamente, dado um conjunto limitado e positivamente invariante  $D$ , vamos assumir que  $\alpha(S_t D) \rightarrow 0$ .

⊢ Afirmação 1:  $\omega(D) := \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{\tau \geq t} S_\tau D}$  é compacto e não-vazio.

Defina  $U_t := \overline{\bigcup_{\tau \geq t} S_\tau D}$  e observe que esses conjuntos formam uma família decrescente de conjuntos fechados. Podemos, então, usar a propriedade da interseção de Cantor generalizada da função  $\alpha$  (Proposição 1.2.2) para concluir que  $U_\infty := \bigcap_{t \geq 0} U_t$  é compacto e não-vazio.

Mas note que, pela Definição 2.1.12, o conjunto  $U_\infty$  é justamente o conjunto  $\omega(D)$ :

$$U_\infty := \bigcap_{t \geq 0} U_t = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{\tau \geq t} S_\tau D} = \omega(D).$$

Isso mostra que  $\omega(D)$ , de fato, é compacto e não-vazio.

⊢ Afirmação 2:  $S_t D \xrightarrow{h} \omega(D)$ .

Suponha que a afirmação não seja verdadeira. Então existem  $\delta > 0$ ,  $(x_n) \subset D$  e  $t_n \rightarrow \infty$  tais que

$$d(S_{t_n} x_n, \omega(D)) > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.2.5)$$

Agora, observe que, para todo  $t > 0$ , existe  $N_t \in \mathbb{N}$  tal que

$$\{S_{t_n} x_n\}_{n=1}^\infty \subset \left[ \{S_{t_n} x_n\}_{n=1}^{N_t} \cup \overline{S_t D} \right].$$

Logo, pela semiaditividade de  $\alpha$  (Proposição 1.2.2), e observando que  $\alpha(\{S_{t_n} x_n\}_{n=1}^{N_t}) = 0$  (pois se trata de um conjunto finito), obtemos que

$$\alpha(\{S_{t_n} x_n\}_{n=1}^\infty) \leq \alpha(\overline{S_t D}).$$

Essa relação vale para todo  $t \geq 0$  e sabemos que  $\alpha(S_t D) \rightarrow 0$ . Portanto é certo que  $\alpha(\{S_{t_n} x_n\}_{n=1}^\infty) = 0$ . Isso nos mostra que  $\{S_{t_n} x_n\}_{n=1}^\infty$  é relativamente compacto. Ora, então existe uma subsequência  $S_{t_{n_m} x_{n_m}} \rightarrow w \in \omega(D)$ . Mas isso contraria a relação (2.2.5).

Portanto a Afirmação 2 é verdadeira.

Com base nas Afirmações 1 e 2, concluímos que  $S_t$  é assintoticamente suave, com  $K_D = \omega(D)$ .  $\square$

**Proposição 2.2.12.** *Seja  $S_t$  um operador evolução em um espaço de Banach  $X$ . Assuma que para cada  $t > 0$  exista uma decomposição  $S_t = S_t^{(1)} + S_t^{(2)}$  satisfazendo as seguintes propriedades para todo  $D \subset X$  limitado e positivamente invariante:*

- $S_t^{(1)} D$  é relativamente compacto em  $X$  para todo  $t > 0$  suficientemente grande.
- $S_t^{(2)}$  é uma aplicação uniformemente estável. Isto é, vale que

$$r_D(t) := \sup_{x \in D} \|S_t^{(2)} x\|_X \rightarrow 0, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Então  $S_t$  é assintoticamente suave.

*Demonstração.* Para todo conjunto limitado positivamente invariante  $D$ , temos  $S_t D = S_t^{(1)} D + S_t^{(2)} D$ . Logo, pelas propriedades de  $\alpha$  (Proposição 1.2.2), extraímos que

$$\alpha(S_t D) = \alpha(S_t^{(1)} D + S_t^{(2)} D) \leq \alpha(S_t^{(1)} D) + \alpha(S_t^{(2)} D).$$

Sendo  $S_t^{(1)} D$  relativamente compacto em  $X$  para  $t$  suficientemente grande, segue que  $\alpha(S_t^{(1)} D) \rightarrow 0$ , e também que, para  $t$  suficientemente grande,

$$\begin{aligned} \alpha(S_t D) &\leq \alpha(S_t^{(2)} D) \leq \text{diam}\{S_t^{(2)} D\} = \sup_{x, y \in D} \|S_t^{(2)} x - S_t^{(2)} y\| \\ &\leq \sup_{x \in D} \|S_t^{(2)} x\| + \sup_{y \in D} \|S_t^{(2)} y\| = 2 \sup_{x \in D} \|S_t^{(2)} x\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $\alpha(S_t D) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , e então, pela Proposição 2.2.11,  $S_t$  é assintoticamente suave.  $\square$

### 2.2.2 Critérios de compacidade/suavidade assintótica via quasi-estabilidade fraca

Vamos apresentar mais alguns critérios de compacidade assintótica, para ao final relacioná-los com o conceito de quasi-estabilidade fraca (Definição 2.2.18).

**Teorema 2.2.13.** *Seja  $(X, S_t)$  um sistema dinâmico tal que, para todo conjunto limitado e positivamente invariante  $D \subset X$  e para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $T = T(\varepsilon, D) \geq 0$  tal que*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} d(S_T y_n, S_T y_m) < \varepsilon, \quad \text{para toda sequência } (y_n) \subset D. \quad (2.2.6)$$

*Sob essas hipóteses,  $S_t$  é assintoticamente suave.*



*Demonstração.* Seja  $\alpha$  a medida de não-compacidade de Kuratowski. Pela Proposição 2.2.11, se mostrarmos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(S_t D) = 0$ , então estará provado que  $S_t$  é assintoticamente suave.

Se  $t_1 \leq t_2$ , sabemos que  $S_{t_2} D \subset S_{t_1} D$ , pois  $D$  é positivamente invariante. Assim, pela monotonicidade de  $\alpha$ , temos que  $\alpha(S_{t_2} D) \leq \alpha(S_{t_1} D)$ . Ou seja, a função  $\alpha_D : T_+ \rightarrow \bar{R}_+$  dada por  $\alpha_D(t) = \alpha(S_t D)$  é decrescente.

Como  $\alpha_D$  é decrescente, precisamos apenas mostrar que, para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $T \geq 0$  tal que  $\alpha(S_T D) \leq \varepsilon$ . Suponha, por absurdo, que isso não seja verdade. Então existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que  $\alpha(S_t D) \geq 5\varepsilon_0$  para todo  $t \geq 0$ .

A hipótese (2.2.6) garante que existe  $T_0$  tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} d(S_{T_0} y_n, S_{T_0} y_m) < \varepsilon_0, \quad \forall (y_n) \subset D.$$

Contudo, isso é impossível, pois vamos mostrar que  $\alpha(S_{T_0} D) \geq 5\varepsilon_0$  implica que existe  $(y_n)_{n=1}^\infty \subset D$  tal que

$$d(S_{T_0} y_n, S_{T_0} y_m) \geq 2\varepsilon_0 > \varepsilon_0, \quad \forall n \neq m.$$

De fato, suponha por absurdo que tal sequência não exista. Isto é, suponha que a relação  $d(S_{T_0} y_n, S_{T_0} y_m) \geq 2\varepsilon_0$  seja válida somente para, no máximo, uma quantidade finita de pontos  $y_i \in D$ . Em vista disso, façamos a seguinte construção.

Escolha  $y_1 \in D$  qualquer. Em seguida, se for possível, escolha  $y_2 \in D$  tal que  $d(S_{T_0} y_1, S_{T_0} y_2) \geq 2\varepsilon_0$ . Veremos mais adiante o que vai acontecer se tal escolha não for possível.

Fixados  $y_1$  e  $y_2$ , escolha, se for possível,  $y_3 \in D$  tal que  $d(S_{T_0} y_3, S_{T_0} y_i) \geq 2\varepsilon_0$  para  $i = 1, 2$ .

Fixado  $\{y_i\}_{i=1}^N$ , escolha, sempre se possível,  $y_{N+1} \in D$  tal que  $d(S_{T_0} y_{N+1}, S_{T_0} y_i) \geq 2\varepsilon_0$  para  $i = 1, \dots, N$ .

Como esse procedimento em algum momento vai terminar (em  $N_*$ , digamos), sabemos que as  $N_*$  bolas  $B_i = B(S_{T_0} y_i, 2\varepsilon_0)$ , com  $i = 1, \dots, N_*$ , são suficientes para cobrir  $S_{T_0} D$ , afinal, se  $x \in D$ , existe algum  $i_x \in \{1, \dots, N_*\}$  tal que  $d(S_{T_0} x, S_{T_0} y_{i_x}) < 2\varepsilon_0$ .

Ora, mas como os raios das bolas  $B_i$  são, todos eles,  $2\varepsilon_0$ , sabemos que os diâmetros são, no máximo,  $4\varepsilon_0$  (ver Lema 3.1.6). Ou seja, conseguimos uma  $4\varepsilon_0$ -cobertura finita para  $S_{T_0} D$ , de modo que  $\alpha(S_{T_0} D) \leq 4\varepsilon_0$ . Isso contraria a premissa de que  $\alpha(S_t D) \geq 5\varepsilon_0$  para todo  $t \geq 0$ .

Com isso concluímos a demonstração.  $\square$

**Corolário 2.2.14.** *Seja  $(X, S_t)$  um sistema dinâmico tal que, para todo conjunto limitado e positivamente invariante  $D \subset X$  e para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $T = T(\varepsilon, D) \geq 0$  tal que*

$$d(S_T x, S_T y) < \varepsilon + \Psi(x, y), \quad \forall x, y \in D,$$

onde  $\Psi = \Psi(\varepsilon, D, T) : (D \times D) \rightarrow \mathbb{R}$  é um funcional tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(y_n, y_m) = 0, \quad \text{para toda sequência } (y_n) \subset D.$$

*Sob essas hipóteses,  $S_t$  é assintoticamente suave.*

*Demonstração.* Consequência imediata do Teorema 2.2.13.  $\square$

**Proposição 2.2.15.** *Considere  $X$  um espaço de Banach. Seja  $(X, S_t)$  um sistema dinâmico tal que, para todo conjunto limitado e positivamente invariante  $D \subset X$  e para todo  $\varepsilon > 0$ , existem  $T = T(\varepsilon, D) \geq 0$  e um operador linear compacto<sup>13</sup>  $K = K(\varepsilon, D, T) : D \rightarrow X$  tais que*

$$\|(Id - K)S_T y\| < \varepsilon, \quad \forall y \in D. \quad (2.2.7)$$

*Sob essas hipóteses,  $S_t$  é assintoticamente suave.*

*Demonstração.* Observe que, se  $x, y \in D$ , então

$$\begin{aligned} \|S_T x - S_T y\| &= \|S_T x - K S_T x - S_T y + K S_T y + K S_T x - K S_T y\| \\ &\leq \|(Id - K)S_T x\| + \|(Id - K)S_T y\| + \|K(S_T x - S_T y)\| \\ &< 2\varepsilon + \|K(S_T x - S_T y)\|. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Agora, seja  $(y_n) \subset D$ . Como  $D$  é positivamente invariante, sabemos que  $(S_T y_n) \subset D$ . Como  $D$  é limitado, o conjunto  $\{S_T y_n\}$  também é.

Sendo  $K$  um operador compacto e  $\{S_T y_n\}$  um conjunto limitado, sabemos que  $K(\{S_T y_n\})$  é relativamente compacto. Assim, existe uma subsequência  $(K(\{S_T y_{n_k}\}))_{k=1}^\infty$  tal que

$$\lim_{p, q \rightarrow \infty} \|K(S_T y_{n_p} - S_T y_{n_q})\| = 0.$$

Isso garante que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \|K(S_T y_n - S_T y_m)\| = 0.$$

Logo, pela relação (2.2.8), temos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} d(S_T y_n, S_T y_m) \leq 2\varepsilon.$$

Portanto, pela arbitrariedade na escolha de  $(y_n) \subset D$  e pelo Teorema 2.2.13, concluímos que  $S_t$  é assintoticamente suave.  $\square$

**Proposição 2.2.16.** *Seja  $(X, S_t)$  um sistema dinâmico tal que, para todo conjunto limitado positivamente invariante  $D \subset X$ , existem  $T \geq 0$ , uma função crescente e contínua  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  e uma pseudométrica<sup>14</sup>  $\rho = \rho(D, T)$  em  $D$  tais que*

$$(i) \quad g(0) = 0.$$

$$(ii) \quad g(s) < s, \quad \forall s > 0.$$

(iii)  $\rho$  é pré-compacta na topologia de  $X$ . Isto é: toda sequência  $(x_n) \subset D$  possui uma subsequência  $(x_{n_k})$  que é de Cauchy com relação a  $\rho$ .

(iv) Para todo  $x, y \in D$ , vale que  $d(S_T x, S_T y) \leq g(d(x, y)) + c\rho(x, y)$  para alguma constante  $c \geq 0$ .

<sup>13</sup>Um operador  $K$  é compacto quando, para todo conjunto limitado  $D$ , a imagem  $K(D)$  é relativamente compacta, ou seja, o fecho  $\overline{K(D)}$  é compacto.

<sup>14</sup>A única diferença entre uma métrica e uma pseudométrica é que a pseudométrica pode ser degenerada (i.e., pode ocorrer  $\rho(x, y) = 0$  com  $x \neq y$ ).

Sob essas hipóteses,  $S_t$  é assintoticamente suave.

*Demonstração.* Seja  $D \subset X$  um conjunto limitado e positivamente invariante de diâmetro  $L$ .

Seja  $\varepsilon > 0$  dado. Pelas condições (i) e (ii), existe  $N$  tal que  $g^N(L) \leq \varepsilon$ .

Seja  $(y_n) \subset D$ . Como  $\rho$  é pré-compacta, sabemos que existe uma subsequência  $(y_{n_k})_{k=1}^\infty$  tal que

$$\lim_{p,q \rightarrow \infty} \rho(S_T^i y_{n_p}, S_T^i y_{n_q}) = 0, \quad \forall i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Isso mostra que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(S_T^i y_n, S_T^i y_m) = 0.$$

Usando esse fato, a continuidade da função  $g$ , o fato de que  $g^N(L) < \varepsilon$  e aplicando (ii) e (iv) reiteradamente, verificamos que

$$\begin{aligned} d(S_T^N y_n, S_T^N y_m) &\leq g(d(S_T^{N-1} y_n, S_T^{N-1} y_m)) + c\rho(S_T^{N-1} y_n, S_T^{N-1} y_m) \\ &\leq g\left(g(d(S_T^{N-2} y_n, S_T^{N-2} y_m)) + c\rho(S_T^{N-2} y_n, S_T^{N-2} y_m)\right) \\ &\quad + c\rho(S_T^{N-1} y_n, S_T^{N-1} y_m) \\ &\leq \dots \\ \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} d(S_T^N y_n, S_T^N y_m) &\leq g^N(L) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 2.2.13, concluímos que  $S_t$  é assintoticamente suave.  $\square$

**Corolário 2.2.17.** *Considere  $X$  um espaço de Banach. Seja  $(X, S_t)$  um sistema dinâmico tal que, para todo conjunto limitado e positivamente invariante  $D \subset X$ , existem um tempo  $t_0 = t_0(D)$ , uma pseudométrica pré-compacta  $\rho$  em  $D$  e funções (dependentes do conjunto  $D$ )  $C_D(t) \geq 0$  e  $K_D(t) \geq 0$ , com  $\lim_{t \rightarrow \infty} K_D(t) = 0$ , tais que, se  $t > t_0$ , então*

$$\|S_t x - S_t y\| \leq K_D(t) \|x - y\| + C_D(t) \rho(x, y), \quad \forall x, y \in D.$$

Sob essas hipóteses,  $S_t$  é assintoticamente suave.

*Demonstração.* Basta aplicar a Proposição 2.2.16 com  $g(s) = sK_D(T)$  e  $c = C_D(T)$ , onde  $T$  é tal que  $K_D(T) < 1$ . Para esse  $T$ , temos que

$$\|S_T x - S_T y\| \leq g(\|x - y\|) + c\rho(x, y), \quad \forall x, y \in D.$$

$\square$

**Definição 2.2.18** (Quasi-estabilidade). *Em um espaço de Banach  $X$ , um sistema dinâmico  $(X, S_t)$  é dito quasi-estável em um conjunto  $B \subset X$  quando existem um tempo  $t_* \geq 0$ , um espaço de Banach  $Z$ , uma aplicação Lipschitz  $K : B \rightarrow Z$ , uma seminorma compacta  $n_Z$  em  $Z$  e uma constante  $q \in [0, 1)$  tais que*

$$\|S_{t_*} y_1 - S_{t_*} y_2\|_X \leq q \|y_1 - y_2\| + n_Z(Ky_1 - Ky_2), \quad \forall y_1, y_2 \in B.$$

*O espaço  $Z$ , o operador  $K$ , a seminorma  $n_Z$  e o tempo  $t_*$  podem depender de  $B$ .*

**Proposição 2.2.19.** *Seja  $(X, S_t)$  um sistema dinâmico que seja quasi-estável em todo conjunto limitado e positivamente invariante  $B \subset X$ . Então  $(X, S_t)$  é assintoticamente suave.*

*Demonstração.* Pela definição de quasi-estabilidade, qualquer que seja o conjunto  $B$  nas condições do teorema, existe  $t_* = t_*(B) \geq 0$  tal que

$$\|S_{t_*}y_1 - S_{t_*}y_2\|_X \leq q \|y_1 - y_2\| + n_Z(Ky_1 - Ky_2), \quad \forall y_1, y_2 \in B,$$

com  $q$ ,  $n_Z$  e  $K$  em conformidade com a Definição 2.2.18.

Agora, para aplicar a Proposição 2.2.16, que garante suavidade assintótica, basta definir  $g(s) := qs$ ,  $T := t_*$  e  $\rho(y_1, y_2) := n_Z(Ky_1 - Ky_2)$ .  $\square$

## 2.3 Atratores Globais

Na literatura, existem diversas definições diferentes (e que não são equivalentes entre si) para o conceito de atrator ([9]). No contexto de sistemas dinâmicos de dimensão infinita, o mais usual é trabalharmos com os chamados “atratores globais”.

Na definição que adotamos, não fazemos a exigência de que o atrator seja compacto.

**Definição 2.3.1** (Atrator Global). *Seja  $S_t$  um operador de evolução em um espaço métrico completo  $X$ . Um conjunto fechado e limitado  $\mathcal{A} \subset X$  é dito ser um atrator global de  $S_t$  quando satisfaz:*

1.  $\mathcal{A}$  é um conjunto invariante. Isto é,  $S_t\mathcal{A} = \mathcal{A}$  para todo  $t \geq 0$ .
2.  $\mathcal{A}$  é uniformemente atrator. Isto é, para todo conjunto limitado  $D \subset X$ , vale que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d_h(S_t D | \mathcal{A}) = 0,$$

onde  $d_h(A|D) = \sup_{x \in A} d(x, D)$  é a semidistância de Hausdorff. [Vale lembrar que, intuitivamente, a semidistância de Hausdorff mede o quanto  $D$  está sendo absorvido por  $\mathcal{A}$  à medida que  $D$  fica sujeito ao fluxo de  $S_t$ .]

**Observação 2.3.2.** *A figura do atrator, nos moldes aqui definidos, indica o estado típico do sistema apenas quando  $t \rightarrow \infty$ . Isso significa, tecnicamente, que estamos aceitando estados típicos que podem se consolidar apenas a partir de momentos muito avançados de tempo. Em outras palavras, estamos dizendo que a velocidade de convergência das órbitas para o atrator pode ser arbitrariamente pequena, o que é indesejável. Uma ideia amplamente utilizada para corrigir esse problema é o conceito de atrator exponencial. Informações claras a esse respeito podem ser consultadas em [8].*

**Propriedades 2.3.3.** *Atratores globais possuem as seguintes propriedades:*

- (i) *Se um atrator global existe, então é único.*
- (ii) *Qualquer conjunto limitado negativamente invariante está contido no atrator global. Em particular, todo ponto estacionário (fixo) pertence ao atrator.*
- (iii) *Uma trajetória completa  $\gamma = \{u(t) : t \in \mathbb{R}\}$  está contida no atrator global se, e somente se,  $\gamma$  é um conjunto limitado.*
- (iv) *Para qualquer  $x \in \mathcal{A}$ , existe uma trajetória completa  $\gamma = \{u(t) : t \in \mathbb{R}\}$  tal que  $u(0) = x$  e  $\gamma \subset \mathcal{A}$ .*

**Demonstração.** Nas demonstrações, vamos assumir sempre que  $\mathcal{A}$  é atrator global do sistema dinâmico  $(X, S_t)$ .

(i) Suponha que  $A$  e  $B$  sejam atratores globais de um sistema dinâmico  $(X, S_t)$ .

Como  $B$  é limitado (por definição), a condição 2 da definição de atrator global para  $A$  garante que  $\lim_{t \rightarrow \infty} d_h(S_t B | A) = 0$ . Mas a definição aplicada em  $B$  também garante, pela condição 1, que  $S_t B = B$  para todo  $t \geq 0$ . Portanto  $d_h(B | A) = 0$ . Isso significa (Propriedades 1.1.7) que  $B \subset \overline{A}$ . Como  $A$  é fechado, temos que  $B \subset A$ .

Pela simetria do problema, também vale que  $A \subset B$ . Portanto  $A = B$ .

(ii) Seja  $D \subset X$  um conjunto limitado e negativamente invariante.

Sabemos que  $d_h(S_t D | \mathcal{A}) \rightarrow 0$ . Como  $D$  é negativamente invariante,  $D \subset S_t D$  para todo  $t \geq 0$ . Logo (Propriedades 1.1.7),  $d_h(D | \mathcal{A}) = 0$ . Portanto  $D \subset \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ .

(iii) Se  $\gamma$  é um conjunto limitado, então  $d_h(S_t \gamma, \mathcal{A}) \rightarrow 0$ . Sendo uma trajetória completa,  $\gamma$  é invariante (Observação 2.1.9). Então  $d_h(\gamma | \mathcal{A}) = 0$  e, portanto,  $\gamma \subset \mathcal{A}$ .

Reciprocamente, se  $\gamma \subset \mathcal{A}$ , então  $\gamma$  é limitada, afinal  $\mathcal{A}$  é limitado por definição.

(iv) Seja  $x_0 \in \mathcal{A}$  fixo, porém arbitrário.

Como  $\mathcal{A}$  é estritamente invariante, existe  $x_{-1} \in \mathcal{A}$  tal que  $S_1 x_{-1} = x_0$ .

Pelo mesmo motivo, existe  $x_{-2} \in \mathcal{A}$  tal que  $S_1 x_{-2} = x_{-1}$ . Ou seja,  $x_{-2}$  é tal que  $S_2 x_{-2} = x_0$ .

Indutivamente, vemos que existe uma sequência de pontos  $(x_{-n})_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}$  tais que  $S_1 x_{-n} = x_{-(n-1)}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Ou seja, esses pontos são tais que

$$\begin{aligned} S_1 x_{-n} &= x_{-(n-1)}, \\ S_2 x_{-n} &= x_{-(n-2)}, \\ &\vdots \\ S_n x_{-n} &= x_0. \end{aligned}$$

De posse dessa sequência, só precisamos construir uma interpolação conveniente para obter uma trajetória completa.

Denotando por  $\{t\}$  a parte fracionária de  $t$ , podemos definir

$$u(t) := \begin{cases} S_t x_0, & \forall t \geq 0, \\ S_{1+\{t\}} x_{[t]} & \forall t < 0. \end{cases}$$

Por construção, temos que  $S_\tau u(t) = u(t + \tau)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e para todo  $\tau \geq 0$ . Isso mostra que  $\gamma = \{u(t); t \in \mathbb{R}\}$  é uma trajetória completa.  $\square$

**Observação 2.3.4** (Definição Equivalente para Atrator Global). *Note que as propriedades (iii) e (iv) da Proposição 2.3.3 informam que o atrator global  $\mathcal{A}$  de  $(X, S_t)$  pode ser definido como o conjunto das trajetórias completas e limitas desse sistema dinâmico. Isto é:*

$$\mathcal{A} = \{\gamma \in X; \text{ tal que } \gamma \text{ é uma trajetória completa e limitada.}\}.$$

**Teorema 2.3.5.** *Se o sistema dinâmico  $(X, S_t)$ , definido em um espaço métrico completo  $X$ , é dissipativo e assintoticamente suave/compacto, então esse sistema dinâmico possui um único atrator global  $\mathcal{A}$ .*

Além disso, dado um conjunto absorvente limitado  $B_0$ , vale que

$$\mathcal{A} = \omega(B_0),$$

e, também, que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_H(S_t B_0, \mathcal{A}) = 0,$$

onde  $d_H$  é a distância de Hausdorff. [Isso significa que, dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $t_\varepsilon \geq 0$  tal que  $S_t B_0 \subset V_\varepsilon(\mathcal{A})$  e  $\mathcal{A} \subset V_\varepsilon(S_t B_0)$ .]

*Demonstração.* Como  $S_t$  é dissipativo, existe algum conjunto absorvente limitado  $B_0$ . Isso significa que, para qualquer conjunto limitado  $D$ , existe um tempo  $t_D \geq 0$  tal que  $\gamma_D^t \subset B_0$  para todo  $t \geq t_D$ .

Como  $(X, S_t)$  é assintoticamente compacto, podemos aplicar o Lema 2.2.9 para confirmar que  $\omega(B_0)$  é um conjunto compacto, não-vazio e estritamente invariante tal que, para todo  $D \subset X$  limitado, vale que  $S_t D \xrightarrow{h} \omega(B_0)$ , isto é, que  $\lim_{t \rightarrow \infty} d_h(S_t D | \omega(B_0)) = 0$ . Portanto  $\omega(B_0) = \mathcal{A}$  é o (único) atrator global de  $(X, S_t)$ .

Para mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_H(S_t B_0, \mathcal{A}) = 0,$$

vamos lembrar que a distância de Hausdorff é definida por meio da semidistância de Hausdorff da seguinte maneira:

$$d_H(S_t B_0, \mathcal{A}) := \max\{d_h(S_t B_0 | \mathcal{A}), d_h(\mathcal{A}, S_t B_0)\}.$$

Como  $B_0$  é limitado, a definição de atrator já garante que

$$d_h(S_t B_0 | \mathcal{A}) \rightarrow 0.$$

Agora note que, como  $\mathcal{A} = \omega(B_0) \subset B_0$ , a invariância do atrator nos dá que  $\mathcal{A} = S_t \mathcal{A} \subset S_t B_0$  para todo  $t \geq 0$ . Ora, e  $\mathcal{A} \subset S_t B_0$  para todo  $t \geq 0$  garante que

$$d_h(\mathcal{A} | S_t B_0) \rightarrow 0.$$

Isso mostra que  $\lim_{t \rightarrow \infty} d_H(S_t B_0, \mathcal{A}) = 0$ . □

**Observação 2.3.6.** O Teorema 2.3.5, quando restrito a sistemas dinâmicos de dimensão finita, exige apenas a propriedade de dissipatividade (i.e., a compacidade assintótica é dispensável em casos de dimensão finita do espaço de fases).

Para fins de aplicações, é importante a realização de estudos a respeito da estrutura de cada atrator. Para esse problema ainda não existe uma teoria geral ou uma abordagem universalmente eficaz. Sabe-se, inclusive, que mesmo em casos de dimensão finita existem atratores com estruturas muito complexas ([9]). Para exemplificar que os atratores nem sempre são constituídos apenas de pontos estacionários, vamos apresentar um conceito que nos ajuda a averiguar a presença de movimentos instáveis dentro do atrator: o conceito de variedade instável.

Imaginemos um ponto estacionário, isto é, um ponto  $x_0$  do sistema que não muda com o tempo ( $S_t x_0 = x_0$  para todo  $t \geq 0$ ). A *variedade estável* desse ponto estacionário é o conjunto de estados cujos fluxos se aproximam assintoticamente de  $x_0$  à medida que o tempo cresce. Por contraste, a *variedade instável* desse ponto é o conjunto de estados que se aproximariam assintoticamente de  $x_0$  no sistema invertido.

Com base no conceito de trajetória completa — isto é, uma curva  $\gamma = \{u(t); t \in \mathbb{R}\}$  tal que  $S_\tau u(t) = u(t + \tau)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $\tau \geq 0$  —, temos a noção de um sistema invertido, pois a trajetória completa aceita valores de tempo positivos e também negativos.

Assim, se  $x_0$  é um ponto estacionário do sistema e  $\gamma = \{u(t); t \in \mathbb{R}\}$  é uma trajetória completa que se aproxima assintoticamente de  $x_0$  quando  $t \rightarrow -\infty$ , então o ponto dado por  $y := u(0)$  faz parte da variedade instável.

Vamos formalizar essa ideia.

**Definição 2.3.7** (Variedade Instável). *Seja  $\mathcal{N}$  o conjunto dos pontos estacionários do sistema dinâmico  $(X, S_t)$ , isto é,  $\mathcal{N} = \{x \in X; S_t x = x, \forall t \geq 0\}$ .*

*Definimos a variedade instável  $\mathcal{M}^u(\mathcal{N})$  emanando de  $\mathcal{N}$  como sendo o conjunto de todos os pontos  $y \in X$  para os quais existe uma trajetória completa  $\gamma = \{u(t); t \in \mathbb{R}\}$  com  $u(0) = y$  e  $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(u(t), \mathcal{N}) = 0$ .*

*Note que o limite é com  $t$  tendendo a menos infinito.*

**Lema 2.3.8.** *A variedade instável é estritamente invariante.*

*Demonstração.* Mostremos primeiramente que  $S_t \mathcal{M}^u(\mathcal{N}) \subset \mathcal{M}^u(\mathcal{N})$ . De fato, seja  $x \in S_t \mathcal{M}^u(\mathcal{N})$ , então existe  $y \in \mathcal{M}^u(\mathcal{N})$  tal que  $x = S_t y$ . Como  $y \in \mathcal{M}^u(\mathcal{N})$ , segue da definição que existe uma trajetória completa  $\gamma_0 = \{u(t) : t \in \mathbb{R}\}$  com  $u(0) = y$  e satisfazendo o limite da definição.

Assim, temos que  $S_t(u(0)) = S_t y = x$ , ou seja,  $x = u(t)$ . Defina  $\gamma_1 = \{v(\tilde{t}) = u(t + \tilde{t}), \tilde{t} \in \mathbb{R}\}$ . Vejamos que  $\gamma_1$  é uma trajetória completa que satisfaz todos os requisitos da definição para que  $x$  pertença à variedade instável. De fato, note que

$$S_{\bar{t}} v(\tau) = S_{\bar{t}} u(t + \tau) = u(t + \tau + \bar{t}) = v(\tau + \bar{t}), \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \forall \bar{t} \geq 0,$$

ou seja,  $\gamma_1$  é uma trajetória completa.

Ainda, temos  $v(0) = u(t) = x$ . E por fim,

$$\lim_{\tilde{t} \rightarrow -\infty} d(v(\tilde{t}), \mathcal{N}) = \lim_{\tilde{t} \rightarrow -\infty} d(u(t + \tilde{t}), \mathcal{N}) = 0.$$

Portanto,  $x \in \mathcal{M}^u(\mathcal{N})$  e segue a primeira inclusão.

Mostremos agora que  $\mathcal{M}^u(\mathcal{N}) \subset S_t \mathcal{M}^u(\mathcal{N})$ . De fato, seja  $x \in \mathcal{M}^u(\mathcal{N})$ , então existe  $\gamma = \{u(t) : t \in \mathbb{R}\}$  com  $u(0) = x$  e satisfazendo o limite da definição. Como  $x = u(0)$ , então  $x \in \gamma$ , e como  $\gamma$  é invariante, temos que  $x \in S_t \gamma$  para todo  $t \geq 0$ . Sendo assim, existe  $y \in \gamma$  tal que  $x = S_t y$ . E como  $y \in \gamma$ , existe  $t_0$  tal que  $y = u(t_0)$ .

Defina  $\gamma_1 = \{v(\tilde{t}) = u(\tilde{t} + t_0), \tilde{t} \in \mathbb{R}\}$ . Vejamos que  $\gamma_1$  é trajetória completa que satisfaz os requisitos para que  $y$  pertença à variedade instável. De fato, note que

$$S_{\bar{t}} v(\tau) = S_{\bar{t}} u(\tau + t_0) = u(t_0 + \bar{t} + \tau) = v(\tau + \bar{t}).$$

Assim,  $\gamma_1$  é trajetória completa. Ainda, temos que  $v(0) = u(t_0) = y$ . E por fim,

$$\lim_{\tilde{t} \rightarrow -\infty} d(v(\tilde{t}), \mathcal{N}) = \lim_{\tilde{t} \rightarrow -\infty} d(u(\tilde{t} + t_0), \mathcal{N}) = 0.$$

Portanto,  $y \in \mathcal{M}^u(\mathcal{N})$  e como  $x = S_t y$ , segue que  $x \in S_t \mathcal{M}^u(\mathcal{N})$ . □

**Proposição 2.3.9.** *Se o sistema dinâmico  $(X, S_t)$  possui atrator global  $\mathcal{A}$ , então a variedade instável está contida no atrator, i.e.,  $\mathcal{M}^u(\mathcal{N}) \subset \mathcal{A}$ .*



*Demonstração.* Seja  $y \in \mathcal{M}^u(\mathcal{N})$ . Da definição, existe uma trajetória completa  $\gamma = \{u(t) : t \in \mathbb{R}\}$  tal que  $u(0) = y$  e  $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(u(t), \mathcal{N}) = 0$ .

Da definição de limite, para todo  $0 < \varepsilon < 1$ , existe  $s \leq 0$  de modo que

$$-\infty < t \leq s \Rightarrow d(u(t), \mathcal{N}) < \varepsilon < 1.$$

Assim, temos que  $\gamma_s = \{u(t) : -\infty < t \leq s\} \subset \{z : d(z, \mathcal{N}) \leq 1\}$ .

Como  $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$  pela propriedade 2.3.3 item (ii), e como  $\mathcal{A}$  é limitado por definição, então  $\mathcal{N}$  é limitado e, consequentemente,  $\{z : d(z, \mathcal{N}) \leq 1\}$  é limitado. E temos então que  $\gamma_s$  é limitado.

Vejamos agora que  $\gamma_s \subset S_t \gamma_s$ , para todo  $t \geq 0$ , isto é, provemos que  $\gamma_s$  é negativamente invariante.

De fato, se  $x \in \gamma_s$ , então  $x = u(z)$  com  $-\infty < z \leq s$ . Considere  $t > 0$  qualquer, e assim,  $z - t \leq s$  e temos que  $u(z - t) \in \gamma_s$ . Desta forma,

$$x = u(z) = u(z - t + t) = S_t(u(z - t)) \Rightarrow x \in S_t \gamma_s, \quad \forall t \geq 0.$$

Com isso, temos que  $\gamma_s$  é limitado e negativamente invariante, segue da Propriedade 2.3.3 item (ii) que  $\gamma_s \subset \mathcal{A}$ .

Ainda,

$$y = u(0) = u(s - s) \underbrace{=}_{-s \geq 0} S_{-s} \underbrace{u(s)}_{\in \gamma_s} \in S_{-s} \gamma_s.$$

Finalmente, temos que

$$\gamma_s \subset \mathcal{A} \Rightarrow y \in S_{-s} \gamma_s \subset S_{-s} \mathcal{A} = \mathcal{A} \Rightarrow y \in \mathcal{A}.$$

□

Em condições específicas, é possível garantir que a variedade instável coincide com o atrator. A análise dessas condições e a demonstração desses resultados, embora relevantes e instrutivos, requerem ferramentas que fogem do escopo deste trabalho. Remetemos o leitor interessado à referência [9].

Vejamos agora um importante resultado referente a perturbações em um sistema dinâmico.

Vamos imaginar uma família de sistemas dinâmicos  $(X, S_t^\lambda)$ , todos com o mesmo espaço de fases  $X$ , mas cada operador de evolução  $S_t^\lambda$  dependendo de um parâmetro  $\lambda \in \Lambda$ , em que  $\Lambda$  é algum espaço métrico completo (usualmente,  $\Lambda = \mathbb{R}$ ). Também vamos imaginar que cada um desses sistemas possua um atrator  $\mathcal{A}^\lambda$ , também dependendo do parâmetro  $\lambda \in \Lambda$ .

Se  $S_t^\lambda$  em algum sentido específico aproximar-se o suficiente de  $S_t^{\lambda_0}$  à medida que  $\lambda \rightarrow \lambda_0$ , podemos entender  $(X, S_t^\lambda)$  como sendo perturbações do sistema  $(X, S_t^{\lambda_0})$ . Nesse cenário, é importante saber se os atratores  $\mathcal{A}^\lambda$  também se aproximam do atrator  $\mathcal{A}^{\lambda_0}$ .

A relevância desse tipo de informação é evidente quando lembramos que modelos matemáticos do mundo real são simplificações que sempre apresentam algum desvio da realidade dos fatos, bem como que toda medição possui alguma margem de erro. Por essas razões, garantir a continuidade de atratores em relação a perturbações do sistema

dinâmico é algo crucial para assegurar a eficiência da teoria que estamos estudando. Em outras palavras, sem o estabelecimento de teoremas acerca desse tipo de continuidade, não podemos ter qualquer expectativa de que resultados teóricos coincidam com observações empíricas.

O resultado que vamos apresentar agora trata da semicontinuidade superior (“upper semicontinuity”) de atratores de sistemas dinâmicos sob perturbações. Resultados acerca da continuidade completa (“full continuity”) — i.e., quando  $d_H(\mathcal{A}^\lambda, \mathcal{A}^{\lambda_0}) \rightarrow 0$  — podem ser consultados em [7], [9] e [38]. Tais resultados são garantidos apenas em alguns casos especiais, não sendo válidos quando estão em vigência somente as hipóteses do Teorema 2.3.10.

**Teorema 2.3.10.** *Sejam  $X$  um espaço métrico completo e  $\{S_t^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  uma família de semigrupos de evolução definidos em  $X$ , cada qual possuindo um atrator global  $\mathcal{A}^\lambda$ , com  $\Lambda$  sendo algum espaço métrico completo. Vamos assumir que*

- *Existe um conjunto limitado  $B_0$  tal que  $\mathcal{A}^\lambda \subset B_0$  para todo  $\lambda \in \Lambda$ ;*
- *Existe  $t_0 \geq 0$  tal que, para cada  $t \geq t_0$ , vale que*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \left[ \sup_{x \in B_0} d(S_t^\lambda x, S_t^{\lambda_0} x) \right] = 0.$$

*Sob essas hipóteses, a família  $\{\mathcal{A}^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  é semicontínua superiormente em  $\lambda_0$ , isto é,*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} d_h(\mathcal{A}^\lambda | \mathcal{A}^{\lambda_0}) = 0.$$

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$  dado. Como  $\mathcal{A}^{\lambda_0}$  é atrator de  $(X, S_t^{\lambda_0})$  e como  $B_0$  é limitado, sabemos que existe  $t_\varepsilon \geq t_0$  tal que

$$S_t^{\lambda_0} B_0 \subset V_\varepsilon(\mathcal{A}^{\lambda_0}), \quad \forall t \geq t_\varepsilon.$$

Agora, note que, para todo  $y \in B_0$ , temos que

$$d(S_t^\lambda y, S_t^{\lambda_0} B_0) \leq \sup_{x \in B_0} d(S_t^\lambda x, S_t^{\lambda_0} x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} 0.$$

Logo, existe  $\delta > 0$  tal que  $d_\Lambda(\lambda, \lambda_0) < \delta$  implica

$$S_t^\lambda B_0 \subset V_\varepsilon(S_t^{\lambda_0} B_0), \quad \forall t \geq t_0.$$

Então, quando  $d_\Lambda(\lambda, \lambda_0) < \delta$  e  $t \geq t_\varepsilon$ , vale que

$$S_t^\lambda B_0 \subset V_\varepsilon(S_t^\lambda B_0) \subset V_\varepsilon(V_\varepsilon(\mathcal{A}^{\lambda_0})) = V_{2\varepsilon}(\mathcal{A}^{\lambda_0}),$$

de modo que também vale que

$$\mathcal{A}^\lambda = S_t^\lambda \mathcal{A}^\lambda \subset S_t^\lambda B_0 \subset V_{2\varepsilon}(\mathcal{A}^{\lambda_0}).$$

Ou seja, quando  $d_\Lambda(\lambda, \lambda_0) < \delta$ , temos que  $\mathcal{A}^\lambda \subset V_{2\varepsilon}(\mathcal{A}^{\lambda_0})$ , que é o mesmo que dizer que  $d_h(\mathcal{A}^\lambda | \mathcal{A}^{\lambda_0}) \leq 2\varepsilon$ . Portanto,  $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} d_h(\mathcal{A}^\lambda | \mathcal{A}^{\lambda_0}) = 0$ .

□

## Capítulo 3

# Dimensão Fractal de Conjuntos Compactos e de Atratores Globais

*“Embora concisa, essa definição  
é resultado de extensa  
meditação”*

---

— Herman Melville, *Moby Dick*,  
[30].

O termo *fractal* foi introduzido por Benoit Mandelbrot em 1975 para nomear, organizar e classificar uma série objetos matemáticos que durante muito tempo foram considerados “estranhos” e “patológicos”, mas que passaram a ganhar cada vez mais notoriedade ao se revelarem não a exceção, e sim a regra, em muitos contextos das ciências aplicadas a partir de certo estágio de desenvolvimento ([15], [28]).

Com o avanço de técnicas cada vez mais refinadas para interpretar e modelar fenômenos reais, as ciências no Século XX experimentaram uma tendência quase que generalizada de necessidade de lidar com conjuntos com um tipo muito particular de complexidade ([46]). Unificar a noção desse tipo de complexidade, observada em contextos diversos, em um único conceito que lhes capte a essência: esta foi a principal motivação para a criação do neologismo “fractal” ([28]).

A rigor, a palavra “fractal” é um conceito científico, e não uma definição matemática. Na linha proposta por Mandelbrot, pode ser chamado de fractal todo aquele objeto (real ou abstrato) que possua irregularidades, quebras e fraturas em escalas muito pequenas. Em contraste às formas regulares da Geometria Euclidiana e às curvas suaves típicas do Cálculo clássico, fractais são intrincados e infinitamente detalhados ([15]).

Matematicamente, a formalização dessa ideia exige alguns pré-requisitos. A saber, é necessária a estipulação de alguma definição de dimensão que generalize a ideia de dimensão topológica a fim de permitir a atribuição de valores não-inteiros para caracterizar a dimensão de alguns conjuntos. A definição mais conhecida nesse sentido é a chamada dimensão de Hausdorff, sobre a qual fazemos uma exposição introdutória no Apêndice B. Outra definição igualmente eficaz é a dimensão box-counting, também chamada de dimensão fractal, que será apresentada neste capítulo. Uma vez conhecidas essas ferramentas, um fractal é definido matematicamente como sendo qualquer conjunto cuja

dimensão de Hausdorff seja estritamente maior do que sua dimensão topológica ([15], [28]).

É importante observar que, apesar de o termo datar de menos de meio século dos dias atuais, as teorias matemáticas que lhe deram origem remontam (pelo menos) a K. Weierstrass (1815-1897), G. Cantor (1845-1918), F. Hausdorff (1868-1942) e C. Carathéodory (1873-1950) ([12], [15]).

No contexto de sistemas dinâmicos, a definição de dimensão fractal encontrou aplicações com importantes consequências teóricas. Ao explicar sobre o significado do atrator em um sistema dissipativo de dimensão infinita gerado por uma equação diferencial parcial (EDP), G. A. Seregin, V.K. Kalantarov e S. V. Zelik afirmam o seguinte:

De um lado, o atrator captura todas as dinâmicas-limite não-triviais do sistema em questão [...], enquanto, por outro lado, é essencialmente menor do que o espaço de fases inicial. Em particular, o atrator em muitos casos possui dimensão [fractal] finita, de modo que existe uma redução tremenda nos efetivos graus de liberdade (de infinitos para finitos), e isso nos permite usar ideias e métodos da dinâmica clássica para investigar a dinâmica de EDPs. ([20]).

Mais à frente, os autores explicam que

Existe uma conjectura heurística (parcialmente inspirada pela teoria de Kolmogorov de turbulência e pela teoria de Prigogine sobre estruturas dissipativas) que, apesar da dimensão infinita do espaço de fases inicial, as dinâmicas-limite de um sistema dissipativo são de dimensão finita e podem ser efetivamente descritas pela evolução de uma quantidade finita de parâmetros [...]. Um dos objetivos finais da teoria de atratores é encontrar interpretações e justificativas rigorosas para essa conjectura. ([20]).

Historicamente, as primeiras tentativas para atacar esse problema foram levadas a cabo por C. Foias e G. Prodi em 1967 e O. Ladyzhenskaya em 1972 ([20]).

Um sumário esclarecedor a respeito das consequências teóricas da finitude dimensional do atrator pode ser encontrado em [37]. Exposições mais aprofundadas constam em [7] e [36]. Uma interpretação física extremamente pertinente pode ser encontrada em [39], da qual fazemos um resumo na Seção 3.5.

Sem nos ocuparmos das technicalidades do assunto — as quais fogem do escopo deste trabalho —, a principal consequência para a finitude dimensional do atrator é a seguinte: Foias e Olson ([17]) mostraram em 1996, com base em um teorema de Mañé ([29]) de 1981, que, se um conjunto  $F$  em um espaço de Hilbert  $H$  possui dimensão fractal finita estritamente menor do que  $d/2$ , então  $F$  pode ser imerso em um espaço de dimensão  $d$ , com essa imersão possuindo inversa Hölder-contínua<sup>1</sup>. Com base nisso, o atrator exponencial de equações de evolução dissipativas em dimensão infinita também é atrator exponencial de algum sistema (de dimensão finita) de equações diferenciais ordinárias ([17], [37]). A expectativa é que técnicas matemáticas sejam desenvolvidas a fim de viabilizar a obtenção

---

<sup>1</sup>A exigência de avaliação da dimensão fractal, e não da dimensão de Hausdorff, é necessária para a validade do teorema. No Apêndice C, apresentamos um contraexemplo que mostra que uma imersão com as mesmas características do teorema de Mañé nem sempre é possível para conjuntos cuja apenas a dimensão de Hausdorff seja finita.

desse sistema de EDOs que simplifique o problema inicial. Resultados apenas parciais foram obtidos até a presente data ([37]).

As páginas que seguem apresentam a teoria de dimensão fractal necessária para dar início a esse tipo de estudo, bem como trazem alguns critérios úteis para garantir dimensão finita de atratores. Os métodos de contração de volume, bastante difundidos nos dias de hoje, não são abordados aqui. Para conhecê-los, remetemos o leitor à referência [38]. Em essência, esses métodos avaliam o comportamento de volumes  $n$ -dimensionais no espaço de fases. Quando é encontrado um  $n$  para o qual volumes  $n$ -dimensionais decaem ao ficarem sujeitos à lei de evolução, então obtém-se que a dimensão do atrator é  $n$  ou menor.

### 3.1 Dimensão Fractal (Dimensão Box-Counting)

Seja  $C_d \subset \mathbb{R}^d$  um cubo  $d$ -dimensional de volume  $c$ . Suponha que desejamos cobrir  $C_d$  com cubos menores, de lado  $\varepsilon$ . Para isso, vamos precisar de quantos desses cubos?

É imediato verificar que a resposta<sup>2</sup> é  $N_\varepsilon(C_d) \approx c/\varepsilon^d$ .

Para extrair  $d$ , fazemos

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(C_d) &\approx c\varepsilon^{-d} \\ \Rightarrow \ln N_\varepsilon(C_d) &\approx \ln[c\varepsilon^{-d}] \\ \Rightarrow \ln N_\varepsilon(C_d) &\approx \ln c - d \ln \varepsilon \\ \Rightarrow d &\approx \frac{\ln c - \ln N_\varepsilon(C_d)}{\ln \varepsilon}. \end{aligned}$$

Assim, poderemos esperar obter o valor da dimensão  $d$  fazendo o limite quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon}.$$

Isso motiva a seguinte definição:

**Definição 3.1.1** (Dimensão Box-Counting; Dimensão Fractal). *Sejam  $X$  um espaço métrico e  $F \subset X$  um conjunto totalmente limitado<sup>3</sup> (i.e., tal que  $F$  possa ser coberto por uma quantidade finita de bolas de raio  $\varepsilon$ , qualquer que seja  $\varepsilon > 0$ ).*

*Seja  $N_\varepsilon(F)$  o menor número de bolas de raio  $\varepsilon > 0$  e centradas em  $F$  que são capazes de cobrir  $F$ . Em símbolos,*

$$N_\varepsilon(F) := \min \left\{ n \in \mathbb{N}; \exists \left\{ B_i = B_i[x_i, \varepsilon]; F \subset \bigcup_{i=1}^n B_i \text{ e } x_i \in F \ \forall i = 1, 2, \dots, n \right\} \right\}.$$

*As dimensões box-counting inferior e superior de  $F$  são definidas, respectivamente, por*

$$\underline{\dim}_B(F) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon},$$

$$\overline{\dim}_B(F) := \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon}.$$

*Para qualquer conjunto  $F \subset X$ , vale que  $\underline{\dim}_B(F) \leq \overline{\dim}_B(F)$ . Sempre que ocorrer a igualdade  $\underline{\dim}_B(F) = \overline{\dim}_B(F)$ , definimos o valor comum como sendo  $\dim_B(F)$ , chamada de dimensão box-counting de  $F$  (por brevidade: dimensão box de  $F$ ).*

*Por ser mais frequente no contexto em que pretendemos trabalhar, vamos nos referir à dimensão box-counting superior apenas por “dimensão fractal” e denotá-la por  $\dim_f$ . Assim,*

$$\dim_f(F) := \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon}.$$

---

<sup>2</sup>O valor exato é  $N_\varepsilon(C_d) = \left\lceil \left( \frac{\sqrt[d]{c}}{\varepsilon} \right) \right\rceil^d$ .

<sup>3</sup>Ver Observação 3.1.2.

A definição de dimensão box-counting admite valores não-inteiros. Em certo sentido, conjuntos com dimensão box fracionária possuem detalhamento em escalas arbitrariamente pequenas, como é o caso, por exemplo<sup>4</sup>, do Conjunto de Cantor, do Triângulo de Sierpinski e do gráfico da função  $\sin(1/x)$  em uma vizinhança do eixo  $x = 0$ .

Uma maneira particularmente instrutiva de enxergar a dimensão box-counting é percebendo que

$$d < \dim_B(F) \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N_\varepsilon(F) \varepsilon^d = \infty,$$

e que

$$d > \dim_B(F) \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N_\varepsilon(F) \varepsilon^d = 0.$$

Podemos interpretar isso (informalmente, apenas para fins de refinar a intuição) da seguinte forma: se tentarmos avaliar o volume  $d$ -dimensional de  $F$  para um  $d$  menor do que sua dimensão, então o volume será infinito. Se tentarmos avaliar o volume  $d$ -dimensional de  $F$  para um  $d$  maior do que sua dimensão, então o volume será nulo.

Essa interpretação proporciona um vínculo natural entre a dimensão box-counting e a dimensão de Hausdorff, apresentada no Apêndice B.

**Observação 3.1.2.** *Uma inconveniência da dimensão fractal é que o limite que a define exige que o conjunto  $F$  seja totalmente limitado. Se assim não fosse, teríamos a propriedade indesejável de que subconjuntos de espaços euclidianos (de dimensão finita) poderiam ter dimensão fractal infinita. Uma maneira que podemos propor para corrigir esse detalhe é a seguinte:*

*Seja  $F \subset \mathbb{R}^d$  um conjunto não-limitado. Faz sentido definir*

$$\dim_f(F) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \dim_f[F \cap B(0, n)] \right\}.$$

*Por propriedades que serão abordadas mais à frente, isso garante que  $\dim(F) \leq d$  para todo  $F \subset \mathbb{R}^d$ , mesmo se  $F$  não for limitado.*

*Para espaços  $X$  de dimensão infinita, podemos utilizar a Definição 3.1.1 qualquer que seja  $F \subset X$ .*

**Observação 3.1.3.** *Nos cálculos a serem realizados, sempre vamos assumir  $\varepsilon$  pequeno o suficiente para que  $-\ln \varepsilon$  e expressões similares sejam valores estritamente positivos.*

**Exemplo 3.1.4** (Dimensão fractal de um segmento de reta). *Seja  $L \subset \mathbb{R}$  um intervalo de comprimento  $l$ . Vale que  $\dim_f(L) = 1$ .*

*Demonstração.* É imediato verificar que  $N_\varepsilon(L) \approx l/(2\varepsilon)$ . Mais precisamente, que

$$\frac{l}{2\varepsilon} \leq N_\varepsilon(L) \leq \left\lceil \left( \frac{l}{2\varepsilon} \right) \right\rceil.$$

Como  $\lceil x \rceil \leq x + 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , segue que

$$\frac{l}{2\varepsilon} \leq N_\varepsilon(L) \leq \frac{l}{2\varepsilon} + 1 = \frac{l + 2\varepsilon}{2\varepsilon}.$$

---

<sup>4</sup>Ver Apêndice A.

Agora, acompanhe os cálculos assumindo  $\varepsilon$  pequeno o suficiente para que  $-\ln \varepsilon > 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{l}{2\varepsilon} &\leq N_\varepsilon(L) \leq \frac{l+2\varepsilon}{2\varepsilon} \\ \Rightarrow \ln\left(\frac{l}{2\varepsilon}\right) &\leq \ln N_\varepsilon(L) \leq \ln\left(\frac{l+2\varepsilon}{2\varepsilon}\right) \\ \Rightarrow \ln(l) - \ln(2\varepsilon) &\leq \ln N_\varepsilon(L) \leq \ln(l+2\varepsilon) - \ln(2\varepsilon) \\ \Rightarrow \frac{\ln(l)}{-\ln \varepsilon} + \frac{\ln(2\varepsilon)}{\ln \varepsilon} &\leq \frac{\ln N_\varepsilon(L)}{-\ln \varepsilon} \leq \frac{\ln(l+2\varepsilon)}{-\ln \varepsilon} + \frac{\ln(2\varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \end{aligned}$$

Tomando o limite superior, obtemos que  $\overline{\dim}_B(L) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(L)}{\ln \varepsilon} = 1$ .  $\square$

O Exemplo 3.1.4 é um indicativo de que, para conjuntos “bem-comportados” (que sejam suaves o suficiente), a dimensão fractal coincide com a dimensão topológica. Mais à frente, veremos que a dimensão fractal de um cubo  $d$ -dimensional, como era de se esperar, também é  $d$ .

**Observação 3.1.5.** Na definição de dimensão box-counting, podemos tomar  $N_\varepsilon(F)$  como sendo o menor número de bolas fechadas de diâmetro  $\varepsilon$  e centros em  $F$  capazes de cobrir  $F$ . Essa maneira de obter  $N_\varepsilon(F)$ , embora possa resultar em um número diferente, proporciona o mesmo valor para a dimensão  $\dim_f(F)$ . Esse é o conteúdo da Proposição 3.1.7. Para prová-la, vamos precisar do seguinte lema.

**Lema 3.1.6** (Relação entre raios e diâmetros). *Sejam  $X$  um espaço métrico e  $B = B[x_0, \varepsilon] \subset X$  uma bola fechada de centro  $x_0$  e raio  $\varepsilon > 0$ . Denotando por  $\text{diam}(B) := \sup_{x,y \in B} d(x,y)$  o diâmetro de  $B$ , temos que  $\varepsilon \leq \text{diam}(B) \leq 2\varepsilon$ .*

*Em particular:*

- (i) *Uma bola de diâmetro  $\varepsilon$  sempre pode ser inteiramente coberta por uma bola concêntrica de raio  $\varepsilon$ ;*
- (ii) *Uma bola de raio  $\varepsilon$  sempre pode ser inteiramente coberta por uma bola concêntrica de diâmetro  $2\varepsilon$ .*

*Demonstração.* A primeira desigualdade ( $\varepsilon \leq \text{diam}(B)$ ) é trivial, pois o diâmetro de um conjunto é maior do que ou igual a qualquer distância de pontos no interior desse conjunto.

Quanto à segunda desigualdade ( $\text{diam}(B) \leq 2\varepsilon$ ), basta aplicar a desigualdade triangular: se  $x, y \in B[x_0, \varepsilon]$ , então  $d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ . Como isso vale para quaisquer  $x, y \in B[x_0, \varepsilon]$ , temos que  $\sup_{x,y \in B} d(x, y) \leq 2\varepsilon$ .  $\square$

**Proposição 3.1.7** (Definições equivalentes). *Seja  $F \subset X$  um conjunto não-vazio e totalmente limitado.*

*Seja  $N_\varepsilon(F)$  o menor número de bolas fechadas de raio  $\varepsilon > 0$  e centradas em  $F$  que são capazes de cobrir  $F$ .*

*Seja  $N'_\varepsilon(F)$  o menor número de bolas fechadas de diâmetro  $\varepsilon > 0$  e centradas em  $F$  que são capazes de cobrir  $F$ .*



Vale que

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon} = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N'_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon}.$$

*Demonstração.* Pelo Lema 3.1.6, (ii), qualquer bola de raio  $\varepsilon$  pode ser coberta por uma bola concêntrica de diâmetro  $2\varepsilon$  (basta tomar a própria bola, caso seu diâmetro seja  $2\varepsilon$ ; se o diâmetro for menor, tomamos a bola unida com pontos suficientes para que o diâmetro atinja a marca de  $2\varepsilon$ ). Logo,  $N'_{2\varepsilon}(F) \leq N_\varepsilon(F)$ .

Similarmente, pelo Lema 3.1.6, (i), qualquer bola de diâmetro  $2\varepsilon$  pode ser coberta por uma bola concêntrica de raio  $2\varepsilon$ . Logo,  $N_{2\varepsilon}(F) \leq N'_{2\varepsilon}(F)$ .

Combinando as desigualdades, obtemos

$$N_{2\varepsilon}(F) \leq N'_{2\varepsilon}(F) \leq N_\varepsilon(F),$$

ou, o que é equivalente,

$$N_\varepsilon(F) \leq N'_\varepsilon(F) \leq N_{\varepsilon/2}(F).$$

Tomando logaritmos e dividindo por  $-\ln \varepsilon$  (com  $\varepsilon$  pequeno o suficiente para que o negativo de seu logaritmo seja positivo), temos que

$$\frac{\ln N_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon} \leq \frac{\ln N'_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon} \leq \frac{\ln N_{\varepsilon/2}(F)}{-\ln \varepsilon}.$$

Observe, na última parcela da cadeia de desigualdades, que

$$\frac{\ln N_{\varepsilon/2}(F)}{-\ln \varepsilon} = \frac{\ln N_{\varepsilon/2}(F)}{-\ln \left(\frac{\varepsilon}{2} \cdot 2\right)} = \frac{\ln N_{\varepsilon/2}(F)}{-\ln(\varepsilon/2) - \ln(2)}.$$

Logo,

$$\frac{\ln N_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon} \leq \frac{\ln N'_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon} \leq \frac{\ln N_{\varepsilon/2}(F)}{-\ln(\varepsilon/2) - \ln(2)}.$$

Tomando limite superior quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , concluímos a validade da proposição.  $\square$

**Observação 3.1.8.** *Em verdade, existem várias outras definições equivalentes para a dimensão box, cada qual podendo ser utilizada conforme a conveniência em cada contexto. Poderíamos, por exemplo, definir  $N_\varepsilon(F)$  como sendo o menor número de conjuntos (quaisquer) de diâmetro menor que ou igual a  $\varepsilon$  capazes de cobrir  $F$ , ou então, se estivermos trabalhando em  $\mathbb{R}^d$ , como sendo o número de cubos  $d$ -dimensionais em um  $\varepsilon$ -reticulado que possuem interseção com  $F$  (esta é, aliás, a definição que justifica o nome “box-counting”). Também podemos restringir as coberturas apenas por conjuntos fechados, ou apenas por conjuntos abertos, sem que isso influencie no limite que caracteriza a dimensão box-counting.*

*Para uma lista abrangente e com demonstrações completas, remetemos o leitor a nosso trabalho anterior ([31]) ou à clássica referência [15].*

Vamos utilizar uma definição equivalente para calcular, com simplicidade, a dimensão fractal de um cubo  $d$ -dimensional.

**Exemplo 3.1.9** (Dimensão fractal de um hipercubo). *Seja  $C_d \in \mathbb{R}^d$  um hipercubo de volume  $c$ . Então  $\dim_f(C_d) = d$ .*

*Demonstração.* Vamos considerar  $N_\varepsilon(F)$  como sendo o menor número de cubos  $d$ -dimensionais de lado  $\varepsilon$  capazes de cobrir  $F$ .

Notando que  $N_\varepsilon(C_d) = \left\lceil \left( \frac{\sqrt[d]{C}}{\varepsilon} \right) \right\rceil^d \leq \left( \frac{\sqrt[d]{C}}{\varepsilon} + 1 \right)^d = \frac{C}{\varepsilon^d} + o(1/\varepsilon^d)$ , podemos proceder como na demonstração do Exemplo 3.1.4 e concluir o resultado.  $\square$

Na proposição e no exemplo a seguir, vamos realizar o cálculo de  $\dim_f(C_d)$  utilizando  $N_\varepsilon(F)$  com base na contagem da cobertura por bolas de raio  $\varepsilon$ , e não cubos de lado  $\varepsilon$ . Embora essa maneira de calcular seja menos cômoda no espaço euclidiano (onde tendemos a imaginar os objetos imersos em uma grade quadriculada oriunda dos eixos canônicos), em espaços métricos de dimensão infinita precisamos recorrer à contagem de bolas, que são os objetos mais naturais (i.e., que podem ser definidos com mais facilidade) em tais espaços.

Por isso, é importante enfatizar que os métodos aplicados na Proposição 3.1.10 proporcionam vislumbres instrutivos de técnicas que serão aplicadas nas estimativas dimensionais em espaços de dimensão infinita.

**Proposição 3.1.10.** *Em  $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$  com a norma euclidiana usual, considere a bola  $B(\tilde{y}, r)$ .*

*Dado  $\varepsilon > 0$ , existe um conjunto finito  $F = \{x_k\}_{k=1}^{n_\varepsilon} \subset B(\tilde{y}, r)$  tal que*

$$B(\tilde{y}, r) \subset \bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} \{x \in \mathbb{R}^d; B[x_k, \varepsilon]\},$$

com

$$n_\varepsilon \leq \left( 1 + \frac{2r}{\varepsilon} \right)^d.$$

*Além disso, o número máximo de pontos  $x_k \in F$  tais que  $\|x_i - x_j\| > \varepsilon$  também é limitado por  $\left( 1 + \frac{2r}{\varepsilon} \right)^d$ , isto é,*

$$\max \#\{x_k \in F; \|x_i - x_j\| > \varepsilon, \forall i \neq j\} \leq \left( 1 + \frac{2r}{\varepsilon} \right)^d.$$

*Demonstração.* Seja  $F = \{x_k\}_{k=1}^{n_\varepsilon} \subset B(\tilde{y}, r)$  um conjunto maximal (isto é, com a maior quantidade de elementos) tais que  $\|x_i - x_j\| > \varepsilon$  para todo  $i \neq j$ .

$F$  é finito, pois estamos em uma região limitada do espaço euclidiano<sup>5</sup>.

Para checar que bolas de raio  $\varepsilon$  centradas em  $F$  cobrem  $B(\tilde{y}, r)$ , basta notar que, se  $x \in B(\tilde{y}, r)$ , então  $x \in B[x_i, \varepsilon]$  para algum  $x_i \in F$ , caso contrário  $F = \{x_k\}$  não seria um conjunto maximal com as propriedades com que foi definido.

Vejamos, agora, a estimativa para  $n_\varepsilon$ .

Considere

$$B_k := B(x_k, \varepsilon/2), \quad k = 1, \dots, n_\varepsilon.$$

É imediato verificar que  $B_i \cap B_j = \emptyset$  para todo  $i \neq j$ .

---

<sup>5</sup>Em espaços de dimensão infinita, um argumento similar exigiria que  $F$  estivesse contido em um conjunto compacto, ou que a norma fosse compacta. Isso será tratado em mais detalhes mais à frente.

Também é imediato verificar que

$$B_k \subset \tilde{B} := B(\tilde{y}, r + \varepsilon/2), \quad \forall k \in \{1, \dots, n_\varepsilon\}.$$

Portanto, tendo em mente que todas as  $n_\varepsilon$  bolas disjuntas  $B_k$  têm o mesmo volume  $d$ -dimensional, podemos comparar seus volumes com o volume da bola maior (que as contém)  $\tilde{B}$ , da seguinte maneira:

$$n_\varepsilon \cdot \text{vol}(B_1) = \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \text{vol}(B_k) \leq \text{vol}(\tilde{B}).$$

Ou seja,

$$n_\varepsilon \leq \frac{\text{vol}(\tilde{B})}{\text{vol}(B_1)}.$$

A razão entre os volumes pode ser calculada com base na fórmula para o volume da bola  $d$ -dimensional<sup>6</sup>, mas existe uma maneira mais simples: sabemos que o volume  $d$ -dimensional de uma bola é proporcional (por uma constante multiplicativa que depende apenas da dimensão  $d$ ) à  $d$ -ésima potência de seu raio. Então

$$n_\varepsilon \leq \frac{\text{vol}(\tilde{B})}{\text{vol}(B_1)} = \frac{(r + \varepsilon/2)^d}{(\varepsilon/2)^d} = \left( \frac{r + \varepsilon/2}{\varepsilon/2} \right)^d = \left( 1 + \frac{2r}{\varepsilon} \right)^d.$$

Isso mostra que

$$N(B(\tilde{y}, r), \varepsilon) \leq \left( 1 + \frac{2r}{\varepsilon} \right)^d,$$

onde  $N(E, \varepsilon)$  foi tomado como sendo o menor número de bolas de raio  $\varepsilon$  capazes de cobrir  $E$ .  $\square$

**Exemplo 3.1.11.** *A dimensão fractal de qualquer bola aberta em  $\mathbb{R}^d$  (e, portanto, de qualquer conjunto limitado em  $\mathbb{R}^d$  que a contenha) é  $d$ .*

*Com efeito, utilizando as mesmas notações da Proposição 3.1.10, é válido que*

$$\left( \frac{r}{\varepsilon} \right)^d \leq N(B(\tilde{y}, r), \varepsilon) \leq \left( 1 + \frac{2r}{\varepsilon} \right)^d.$$

*Portanto*

$$\frac{d[\ln(r) - \ln(\varepsilon)]}{-\ln \varepsilon} \leq \frac{\ln[N(B(\tilde{y}, r), \varepsilon)]}{-\ln \varepsilon} \leq \frac{d \ln \left( 1 + \frac{2r}{\varepsilon} \right)}{-\ln \varepsilon}.$$

*Como os limites quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  das expressões nas extremidades valem  $d$ , segue que  $\dim_B(B(\tilde{y}, r)) = d$ .*

*Adicionalmente, note que, dado um cubo  $d$ -dimensional  $C_d$ , sempre existem  $B_1$  e  $B_2$ , bolas abertas, tais que  $B_1 \subset C_d \subset B_2$ . Pela monotonicidade da dimensão box (Propriedades 3.1.14, (i)), concluímos  $\dim_B(C_d) = d$ . O mesmo é válido para qualquer conjunto de interior não-vazio.*

---

<sup>6</sup> $\text{vol}(B(x, r)) = r^n \cdot \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + n/2)}$ , onde  $\Gamma$  é a função gama, dada por  $\Gamma(t) := \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$ .

**Proposição 3.1.12** (Dimensão Box sob transformação Lipschitz). *Dados espaços métricos  $X$  e  $Y$ , valem os seguintes resultados:*

(a) *Sejam  $F \subset X$  um conjunto não-vazio totalmente limitado e  $f : F \rightarrow Y$  uma transformação Lipschitz, isto é, uma transformação para a qual existe  $0 < c < \infty$  tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y) \quad (\forall x, y \in F).$$

*Neste caso, vale que  $\overline{\dim}_B(f(F)) \leq \overline{\dim}_B(F)$ .*

(b) *Sejam  $F \subset X$  um conjunto não-vazio totalmente limitado e  $f : F \rightarrow Y$  uma transformação bi-Lipschitz, isto é, uma transformação para a qual existem  $0 < c_1 \leq c < \infty$  tais que*

$$c_1 d(x, y) \leq d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y) \quad (\forall x, y \in F).$$

*Neste caso, vale que  $\overline{\dim}_B(f(F)) = \overline{\dim}_B(F)$ .*

*Demonstração.* Com efeito:

(a) Se  $\{U_i\}$  é uma  $\varepsilon$ -cobertura de  $F$ , então  $\{U_i \cap F\}$  também é. Assim, tomando a imagem desses conjuntos sob  $f$  e lembrando que  $f$  é uma transformação Lipschitz<sup>7</sup> de constante  $c$ , temos que  $\{f(U_i \cap F)\}$  é uma  $c\varepsilon$ -cobertura de  $f(F)$ . Logo  $N_{c\varepsilon}(f(F)) \leq N_\varepsilon(F)$  para todo  $\varepsilon > 0$ , de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\ln N_{c\varepsilon}(f(F))}{-\ln \varepsilon} &\leq \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon} \\ \Rightarrow \frac{\ln N_{c\varepsilon}(f(F))}{-\ln c\varepsilon + \ln c} &\leq \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon} \\ \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_{c\varepsilon}(f(F))}{-\ln c\varepsilon + \ln c} &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon}. \end{aligned}$$

Disso obtemos que  $\overline{\dim}_B(f(F)) \leq \overline{\dim}_B(F)$ .

(b) Se  $f$  é bi-Lipschitz, então  $f : F \rightarrow f(F)$  é uma bijeção<sup>8</sup> e, portanto, possui inversa  $f^{-1} : f(F) \rightarrow F$ . Se mostrarmos que  $f^{-1}$  também é uma transformação Lipschitz, então, aplicando o item (a) em  $f^{-1}$ , teremos que

$$\overline{\dim}_B(F) = \overline{\dim}_B f^{-1}(f(F)) \leq \overline{\dim}_B(f(F)).$$

Como as desigualdades reversas já estão provadas no item (a), poderemos concluir que  $\overline{\dim}_B(f(F)) = \overline{\dim}_B(F)$ .

De fato, isso é verdade, pois  $f^{-1}$  é, sim, uma transformação Lipschitz, o que podemos comprovar da seguinte forma: sejam  $u, v \in f(F)$ . Então existem  $x, y \in F$  tais que  $x = f^{-1}(u)$  e  $y = f^{-1}(v)$ . Logo,

$$\begin{aligned} c_1 d(x, y) &\leq d(f(x), f(y)) \\ \Rightarrow c_1 d(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) &\leq d(f(f^{-1}(u)), f(f^{-1}(v))) \\ \Rightarrow c_1 d(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) &\leq d(u, v) \\ \Rightarrow d(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) &\leq c_1^{-1} d(u, v). \end{aligned}$$

Assim confirmamos a veracidade do resultado pretendido. □

<sup>7</sup>Pelo fato de  $f$  ser Lipschitz de constante  $c$ , temos que  $\text{diam}(f(U_i \cap F)) \leq c \text{diam}(U_i \cap F) \leq c(U_i) \leq c\varepsilon$ .

<sup>8</sup>Com efeito, se vale que  $c_1 d(x, y) \leq d(f(x), f(y))$ , então, para  $f(x) = f(y)$ , temos  $d(x, y) = 0$ , ou seja,  $x = y$ .

**Observação 3.1.13.** A Proposição 3.1.12 pode ser generalizada (com demonstração inteiramente análoga) no seguinte sentido: se  $f$  for uma transformação Hölder, isto é, se, para todo  $x, y \in F$ , valer que  $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)^\alpha$  para algum  $c > 0$  e algum  $0 < \alpha \leq 1$ , então  $\underline{\dim}_B(f(F)) \leq (1/\alpha)\underline{\dim}_B(F)$ .

**Propriedades 3.1.14** (Propriedades da Dimensão Box-Counting). *Algumas propriedades básicas que são satisfeitas pela Dimensão Box-Counting:*

- (i) *Monotonicidade:* Se  $E \subset F$ , então  $\underline{\dim}_B(E) \leq \underline{\dim}_B(F)$ .
- (ii) *Intervalo de valores:* Para todo  $F$  sendo um subconjunto não-vazio e limitado de  $\mathbb{R}^d$ , vale que  $0 \leq \underline{\dim}_B(F) \leq \overline{\dim}_B(F) \leq d$ .
- (iii) *Conjuntos abertos:* Se  $F \subset \mathbb{R}^d$  é aberto, então  $\underline{\dim}_B(F) = d$ .
- (iv) *Conjuntos finitos:* Se  $F$  é um conjunto finito, então  $\underline{\dim}_B(F) = 0$ .
- (v) *Invariância geométrica:* Dados espaços métricos  $X$  e  $Y$ , um conjunto  $F \subset X$  e  $f : F \rightarrow Y$  sendo uma transformação de congruência, uma transformação de similaridade ou uma transformação afim, vale que  $\underline{\dim}_B(f(F)) = \underline{\dim}_B(F)$ .
- (vi) *Estabilidade finita da dimensão superior:* A dimensão superior de uma união finita é a dimensão do conjunto de maior dimensão dessa união. Isto é, vale que  $\overline{\dim}_B(E \cup F) = \max \{ \overline{\dim}_B(E), \overline{\dim}_B(F) \}$ . Contudo, o mesmo não vale para a dimensão inferior, nem para uniões infinitas.
- (vii) *Invariância pelo fecho:*  $\underline{\dim}_B(F) = \underline{\dim}_B(\overline{F})$ .
- (viii) *Dimensão do produto cartesiano:*  $\underline{\dim}_f(E \times F) \leq \underline{\dim}_f(E) + \underline{\dim}_f(F)$ .

*Demonstração.* De fato:

- (i) Basta notar que  $N_\varepsilon(E) \leq N_\varepsilon(F)$  para todo  $\varepsilon > 0$ .
- (ii) As duas primeiras desigualdades são imediatas. Quanto à terceira, basta notar que, como  $F$  é limitado,  $F$  pode ser coberto por um cubo  $d$ -dimensional  $C$ , o qual tem dimensão  $d$ . A partir daí, é suficiente aplicar a propriedade da monotonicidade.
- (iii) Com efeito, se  $F$  é aberto,  $F$  contém um cubo  $d$ -dimensional  $C$ , de modo que existe uma constante  $c$  independente de  $\varepsilon > 0$  tal que  $N_\varepsilon(F) \geq N_\varepsilon(C) \geq c\varepsilon^{-d}$ .
- (iv) De fato,  $N_\varepsilon(F)$  é um valor fixo e finito para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno.
- (v) Como todas essas transformações são bi-Lipschitz, o resultado segue diretamente da Proposição 3.1.12.
- (vi) Como  $E, F \subset (E \cup F)$ , segue direto de (i) que  $\max \{ \overline{\dim}_B(E), \overline{\dim}_B(F) \} \leq \overline{\dim}_B(E \cup F)$  (em verdade, esta desigualdade é válida também para a dimensão inferior).

Vejamos agora como obter que  $\overline{\dim}_B(E \cup F) \leq \max \{ \overline{\dim}_B(E), \overline{\dim}_B(F) \}$ .

Note, primeiro, que  $N_\varepsilon(E \cup F) \leq N_\varepsilon(E) + N_\varepsilon(F)$ , de modo que

$$\frac{\ln N_\varepsilon(E \cup F)}{-\ln \varepsilon} \leq \frac{\ln [N_\varepsilon(E) + N_\varepsilon(F)]}{-\ln \varepsilon}. \quad (3.1.1)$$

Por simplicidade, definiremos

$$f(\varepsilon) := \frac{\ln [N_\varepsilon(E) + N_\varepsilon(F)]}{-\ln \varepsilon}.$$

Se mostrarmos que  $\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon) \leq \max \{ \overline{\dim}_B(E), \overline{\dim}_B(F) \}$ , então, por (3.1.1), teremos o resultado pretendido:  $\overline{\dim}_B(E \cup F) \leq \max \{ \overline{\dim}_B(E), \overline{\dim}_B(F) \}$ .

Com efeito, veja que, para cada  $\varepsilon > 0$ , temos

$$N_\varepsilon(E) \leq N_\varepsilon(F) \Rightarrow N_\varepsilon(E) + N_\varepsilon(F) \leq 2N_\varepsilon(F)$$

ou

$$N_\varepsilon(F) \leq N_\varepsilon(E) \Rightarrow N_\varepsilon(E) + N_\varepsilon(F) \leq 2N_\varepsilon(E).$$

Assim, para cada  $\varepsilon > 0$ , temos

$$f(\varepsilon) \leq \frac{\ln [2N_\varepsilon(F)]}{-\ln \varepsilon} := g_F(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\dim}_B(F)$$

ou

$$f(\varepsilon) \leq \frac{\ln [2N_\varepsilon(E)]}{-\ln \varepsilon} := g_E(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\dim}_B(E).$$

Logo,  $\sup_{\varepsilon} \{f(\varepsilon); 0 < \varepsilon \leq r\} \leq \sup_{\varepsilon} \{g_E(\varepsilon), g_F(\varepsilon); 0 < \varepsilon \leq r\}$ .

Aplicando essa desigualdade em conjunto com a definição de limite superior, obtemos

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon) &= \lim_{r \rightarrow 0} \left( \sup_{\varepsilon} \{f(\varepsilon); 0 < \varepsilon \leq r\} \right) \\ &\leq \lim_{r \rightarrow 0} \left( \sup_{\varepsilon} \{g_E(\varepsilon), g_F(\varepsilon); 0 < \varepsilon \leq r\} \right) \\ &= \max \left\{ \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} g_E(\varepsilon), \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} g_F(\varepsilon) \right\} \\ &= \max \{ \overline{\dim}_B(E), \overline{\dim}_B(F) \}. \end{aligned}$$

Portanto, por (3.1.1), segue que  $\overline{\dim}_B(E \cup F) \leq \max \{ \overline{\dim}_B(E), \overline{\dim}_B(F) \}$ .

Note, contudo, que a desigualdade correspondente não vale para a dimensão inferior e que o resultado é válido apenas para uniões finitas.

- (vii) Uma família de conjuntos fechados cobre  $F$  se, e somente se, também cobre  $\overline{F}$ . Portanto  $N_\varepsilon(F) = N_\varepsilon(\overline{F})$ , onde  $N_\varepsilon$  foi tomado como sendo o menor número de uma  $\varepsilon$ -cobertura fechada.

- (viii) Dado  $\varepsilon > 0$ , sejam  $\{E_i\}_{i=1}^{N(E,\varepsilon)}$  e  $\{F_j\}_{j=1}^{N(F,\varepsilon)}$   $\varepsilon$ -coberturas minimais de  $E$  e  $F$ , respectivamente.

É imediato verificar que  $E \times F \subset \bigcup_{i,j} E_i \times F_j$ . Assim, considerando em  $E \times F$  a métrica  $d(x, y) := \max\{d_E(x_1, x_2), d_F(y_1, y_2)\}$ , temos que o conjunto  $\{E_i \times F_j\}$  é uma  $\varepsilon$ -cobertura do cartesiano  $E \times F$ . Essa cobertura tem  $N(E, \varepsilon) \cdot N(F, \varepsilon)$  elementos. Assim, vale que  $N(E \times F, \varepsilon) \leq N(E, \varepsilon) \cdot N(F, \varepsilon)$ , de onde o resultado segue com facilidade.

Note, contudo, que a métrica adotada influencia no cálculo da dimensão.

□

**Proposição 3.1.15** (Dimensão de conjunto com interior não-vazio). *Seja  $F \subset \mathbb{R}^d$  um conjunto limitado com interior não-vazio. Então  $\dim_f(F) = d$ .*

*Demonstração.* Como o interior de  $F$  é não-vazio, segue que existe uma bola aberta  $B$  contida em  $F$ . Pela Proposição 3.1.14, (iii), temos que  $\dim_f(B) = d$ . Pela monotonicidade da dimensão fractal (Proposição 3.1.14, (i)), concluímos que  $\dim_f(F) = d$ . □

Muitas vezes, é útil que consigamos calcular a dimensão box tomando o limite (superior) por meio de uma sequência  $(\varepsilon_k)$  de valores para  $\varepsilon$ , sem precisarmos nos restringir ao limite contínuo  $\varepsilon \rightarrow 0$ . No exemplo 3.1.19 ficará claro que não é possível fazer isso sem impormos algumas restrições à sequência  $(\varepsilon_k)$ . Vejamos quais são essas restrições.

**Teorema 3.1.16.** *Seja  $(\varepsilon_k)$  uma sequência com as seguintes propriedades:*

- (i) *Tende a zero:  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ .*
- (ii) *É decrescente:  $\varepsilon_k \geq \varepsilon_{k+1}$ .*
- (iii) *Existe uma constante  $\alpha \in (0, 1)$  tal que  $\varepsilon_{k+1} \geq \alpha \varepsilon_k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .*

Então

$$\dim_f(F) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln N_{\varepsilon_k}(F)}{-\ln \varepsilon_k}.$$

*Tal igualdade é válida, em particular, se  $(\varepsilon_k)$  for uma sequência geométrica decrescente (i.e., uma sequência do tipo  $\varepsilon_k = c\alpha^k$ , com  $c > 0$  e  $0 < \alpha < 1$ ).*

*Demonstração.* Pelas propriedades básicas de supremo e ínfimo, é imediato verificar que

$$\dim_f(F) = \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon} \geq \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln N_{\varepsilon_k}(F)}{-\ln \varepsilon_k}.$$

Agora, dado  $\varepsilon \in (0, 1)$ , seja  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\varepsilon_{k+1} < \varepsilon \leq \varepsilon_k$ . Isso garante a seguinte relação, que vamos utilizar mais à frente:

$$\frac{1}{-\ln \varepsilon_{k+1}} < \frac{1}{-\ln \varepsilon} \leq \frac{1}{-\ln \varepsilon_k}.$$

Como  $\varepsilon > \varepsilon_{k+1}$ , temos que  $N_\varepsilon(F) \leq N_{\varepsilon_{k+1}}(F)$ . Então

$$\begin{aligned}
\frac{\ln N_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon} &\leq \frac{\ln N_{\varepsilon_{k+1}}(F)}{-\ln \varepsilon_k} \\
&= \frac{\ln N_{\varepsilon_{k+1}}(F)}{-\ln \left( \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \varepsilon_k \right)} \\
&= \frac{\ln N_{\varepsilon_{k+1}}(F)}{-\ln(\varepsilon_{k+1}) + \ln \left( \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \right)} \\
&< \frac{\ln N_{\varepsilon_{k+1}}(F)}{-\ln \varepsilon_{k+1} + \ln \alpha} \\
&= \frac{\left( \frac{\ln N_{\varepsilon_{k+1}}(F)}{-\ln \varepsilon_{k+1}} \right)}{\left( 1 + \frac{\ln \alpha}{-\ln \varepsilon_{k+1}} \right)}.
\end{aligned}$$

Portanto, tomando limite superior, obtemos que

$$\begin{aligned}
\dim_f(F) &\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{\left( \frac{\ln N_{\varepsilon_{k+1}}(F)}{-\ln \varepsilon_{k+1}} \right)}{\left( 1 + \frac{\ln \alpha}{-\ln \varepsilon_{k+1}} \right)} \right] \\
&\leq \frac{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln N_{\varepsilon_{k+1}}(F)}{-\ln \varepsilon_{k+1}} \right)}{\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\ln \alpha}{-\ln \varepsilon_{k+1}} \right)} \\
&= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln N_{\varepsilon_{k+1}}(F)}{-\ln \varepsilon_{k+1}}.
\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

□

A velocidade com que a sequência  $(\varepsilon_k)$  decresce pode ocorrer de outras maneiras e ainda assim preservar uma relação análoga à do Teorema 3.1.16. A condição (iii) do teorema, grosso modo, diz que  $(\varepsilon_k)$  não pode decrescer muito rapidamente. Caso desejemos tomar uma sequência  $(\varepsilon_k)$  que “decresça muito rápido”, teremos que tomar cuidado para que em nenhum momento ela “decresça pouco”, em um sentido que será tornado preciso na proposição a seguir.

A ideia da Proposição 3.1.17 é ilustrar que, quando for conveniente, podemos substituir as condições (ii) e (iii) do Teorema 3.1.16 por algo do tipo  $f(k)\varepsilon_k \geq \varepsilon_{k+1} \geq g(k)\varepsilon_k$ , com  $f$  e  $g$  dependendo uma da outra, e ainda assim conseguir calcular a dimensão de um conjunto por meio do limite discreto  $\dim_f(F) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln N_{\varepsilon_k}(F)}{-\ln \varepsilon_k}$ .

**Proposição 3.1.17.** *Seja  $(\varepsilon_k)$  uma sequência com as seguintes propriedades:*

- (i) *Tende a zero:  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ .*



(ii) Existe uma constante  $\delta > 0$  tal que

$$(1 - \delta)\varepsilon_k \geq \varepsilon_{k+1} \geq \frac{1}{k}\varepsilon_k.$$

Então

$$\dim_f(F) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln N_{\varepsilon_k}(F)}{-\ln \varepsilon_k}.$$

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, vamos assumir por simplicidade  $\varepsilon_1 = 1$ .

Note que

$$(1 - \delta)^k \geq \varepsilon_{k+1} \geq \frac{1}{k}\varepsilon_k \geq \frac{1}{k} \frac{1}{k-1} \varepsilon_{k-1} \geq \cdots \geq \frac{1}{k!}.$$

Então

$$\begin{aligned} (1 - \delta)^k &\geq \varepsilon_{k+1} \geq \frac{1}{k!} \\ \Rightarrow -\ln(1 - \delta)^k &\leq -\ln \varepsilon_{k+1} \leq -\ln \frac{1}{k!} \\ \Rightarrow \frac{1}{-\ln(1 - \delta)^k} &\geq \frac{1}{-\ln \varepsilon_{k+1}} \geq \frac{1}{-\ln \frac{1}{k!}} \\ \Rightarrow 1 + \frac{\ln(1/k)}{-\ln(1 - \delta)^k} &\leq 1 + \frac{\ln(1/k)}{-\ln \varepsilon_{k+1}} \leq 1 + \frac{\ln(1/k)}{-\ln \frac{1}{k!}}. \end{aligned}$$

Como os limites das expressões nas extremidades, quando  $k \rightarrow \infty$ , são ambos 1, segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{\ln(1/k)}{-\ln \varepsilon_{k+1}} \right] = 1.$$

Assim, podemos proceder como no Teorema 3.1.16 e, similarmente à relação (3.1.2), obter

$$\dim_f(F) \leq \frac{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln N_{\varepsilon_{k+1}}(F)}{-\ln \varepsilon_{k+1}} \right)}{\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\ln(1/k)}{-\ln \varepsilon_{k+1}} \right)} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln N_{\varepsilon_{k+1}}(F)}{-\ln \varepsilon_{k+1}}.$$

□

**Observação 3.1.18.** A condição (ii) da Proposição 3.1.17 pode ser substituída, por exemplo, pela condição

$$\frac{1}{k}\varepsilon_k \geq \varepsilon_{k+1} \geq e^{-k}\varepsilon_k.$$

O exemplo a seguir é notável por dois motivos: explicitamente, ele comprova que nem sempre a dimensão box inferior coincide com a superior; implicitamente, ele comprova a necessidade de restrições à variação na velocidade de convergência de  $(\varepsilon_k)$  ao se tentar calcular a dimensão fractal de um conjunto por meio de um limite discreto de valores  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ .

**Exemplo 3.1.19.** Vamos construir um conjunto  $F \subset \mathbb{R}$  tal que  $\underline{\dim}_B(F) \neq \overline{\dim}_B(F)$ . Esse conjunto será construído de forma similar ao conjunto de Cantor, por meio da remoção sucessiva de frações de subintervalos obtidos pela divisão de intervalos maiores. Contudo, desta vez a remoção será feita em etapas específicas, e o tamanho a ser removido será variável, seguindo uma regra exponencial.

Seja  $a_n = 10^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Definiremos  $F$  como sendo a interseção de conjuntos  $E_k$  definidos do seguinte modo:

- $E_0 = [0, 1]$ ;
- Para todo  $k$  tal que  $a_{2n} < k \leq a_{2n+1}$ , o conjunto  $E_k$  será obtido pela remoção do terço-médio dos intervalos que constituem  $E_{k-1}$ ;
- Para todo  $k$  tal que  $a_{2n-1} < k \leq a_{2n}$ , o conjunto  $E_k$  será obtido pela remoção dos  $3/5$  centrais dos intervalos que constituem  $E_{k-1}$ .

Vamos definir

$$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k.$$

Note que, para  $n$  ímpar, a medida de cada intervalo que constitui  $E_{a_n}$  é de

$$\delta_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{a_1} \left(\frac{1}{5}\right)^{a_2-a_1} \left(\frac{1}{3}\right)^{a_3-a_2} \cdots \left(\frac{1}{5}\right)^{a_{n-1}-a_{n-2}} \left(\frac{1}{3}\right)^{a_n-a_{n-1}} \quad (3.1.3)$$

Para  $n$  par, a medida de cada intervalo que constitui  $E_{a_n}$  é de

$$\delta_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{a_1} \left(\frac{1}{5}\right)^{a_2-a_1} \left(\frac{1}{3}\right)^{a_3-a_2} \cdots \left(\frac{1}{3}\right)^{a_{n-1}-a_{n-2}} \left(\frac{1}{5}\right)^{a_n-a_{n-1}} \quad (3.1.4)$$

A quantidade de intervalos constituindo  $E_k$  é sempre  $2^k$ .

Nosso desafio, agora, é encontrar uma cota superior para  $\underline{\dim}_B F$  e uma cota inferior para  $\overline{\dim}_B F$ .

Observe que o tamanho de cada intervalo de  $E_{a_n}$ , para  $n$  par, é menor do que  $(5^{-1})^{a_n-a_{n-1}}$ . Isso decorre diretamente de (3.1.4). Portanto, em  $E_{a_n}$ , para  $n$  par, existem  $2^{a_n}$  intervalos de tamanho menor do que  $\left(\frac{1}{5}\right)^{a_n-a_{n-1}}$ .

Usando os intervalos de  $E_k$  para cobrir  $F$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\dim_B F &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln(\delta)} \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_{\delta_n}(F)}{-\ln(\delta_n)} \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^{a_n})}{-\ln[(5^{-1})^{a_n - a_{n-1}}]} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n \ln(2)}{(a_n - a_{n-1}) \ln(5)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10a_{n-1} \ln(2)}{9a_{n-1} \ln(5)} \\
&= \frac{10 \ln(2)}{9 \ln(5)} \approx 0,4785.
\end{aligned}$$

Agora note que, para  $n$  ímpar, temos

$$\delta_n \geq (5^{-1})^{a_{n-1}} (3^{-1})^{a_n - a_{n-1}}.$$

Isso segue diretamente de (3.1.3), pois:

$$\begin{aligned}
\delta_n &= \left(\frac{1}{3}\right)^{a_1} \left(\frac{1}{5}\right)^{a_2 - a_1} \left(\frac{1}{3}\right)^{a_3 - a_2} \cdots \left(\frac{1}{5}\right)^{a_{n-1} - a_{n-2}} \left(\frac{1}{3}\right)^{a_n - a_{n-1}} \\
&\geq \left(\frac{1}{5}\right)^{a_1} \left(\frac{1}{5}\right)^{a_2 - a_1} \left(\frac{1}{5}\right)^{a_3 - a_2} \cdots \left(\frac{1}{5}\right)^{a_{n-1} - a_{n-2}} \left(\frac{1}{3}\right)^{a_n - a_{n-1}} \\
&= \left(\frac{1}{5}\right)^{a_1 + a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + \dots + a_{n-1} - a_{n-2}} \left(\frac{1}{3}\right)^{a_n - a_{n-1}} \\
&= \left(\frac{1}{5}\right)^{a_{n-1}} \left(\frac{1}{3}\right)^{a_n - a_{n-1}}.
\end{aligned}$$

Para cobrir  $F$  com intervalos de tamanho  $\delta_n$ , precisamos de pelo menos  $2^{a_n}/2$  intervalos, pois os intervalos de tamanho  $\delta_{a_n}$  conseguem interceptar no máximo dois intervalos de  $E_{a_n}$ . Logo,

$$\begin{aligned}
\overline{\dim}_B F &= \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln(\delta)} \\
&\geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_{\delta_n}(F)}{-\ln(\delta_n)} \\
&\geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^{a_n}/2)}{-\ln[(5^{-1})^{a_{n-1}} (3^{-1})^{a_n - a_{n-1}}]} \\
&= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n \ln(2) - \ln(2)}{a_{n-1} \ln(5) + (a_n - a_{n-1}) \ln(3)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10a_{n-1} \ln(2) - \ln(2)}{a_{n-1} \ln(5) + 9a_{n-1} \ln(3)} \\
&= \frac{10 \ln(2)}{\ln(5) + 9 \ln(3)} \approx 0,6029.
\end{aligned}$$

Disso tudo, concluímos que

$$\underline{\dim}_B(F) \leq \frac{10 \ln(2)}{9 \ln(5)} < \frac{10 \ln(2)}{\ln(5) + 9 \ln(3)} \leq \overline{\dim}_B(F).$$

Ou seja,  $\underline{\dim}_B(F) < \overline{\dim}_B(F)$ .

Vejamos, agora, outra peculiaridade da dimensão fractal.

Sabemos que  $\dim_f(E \cup F) = \max\{\dim_f(E), \dim_f(F)\}$ . Existem exemplos simples que mostram que nem sempre vale que  $\dim_f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\dim_f(F_n)\}$ . É possível verificar, por exemplo, que o conjunto  $\{1/m\}_{m=1}^{\infty}$  possui dimensão fractal  $1/2$ , muito embora cada conjunto unitário  $\{1/n\}$  (para  $n$  fixo) tenha dimensão fractal nula.

O exemplo a seguir, embora um pouco mais rebuscado, é mais expressivo ao ilustrar o mesmo fato (isto é, que não vale a estabilidade da dimensão fractal para uniões infinitas). Vamos apresentar um conjunto que é união enumerável de pontos isolados, mas cuja dimensão fractal é infinita.

**Exemplo 3.1.20.** *Seja  $(\ell^\infty, \|\cdot\|)$  o espaço das sequências reais limitadas munido da norma do supremo. Seja  $(e_n)$  a base canônica desse espaço, ou seja,*

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, \dots)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$$

$$e_3 = (0, 0, 1, 0, \dots)$$

$\vdots$

Considere o conjunto  $F = \left\{ \frac{e_m}{\ln(m)} \right\}_{m=2}^{\infty}$ . Vejamos que, apesar de  $F$  ser totalmente limitado e até mesmo compacto, vale que  $\dim_f(F) = \infty$ .

Dado  $\varepsilon > 0$  pequeno, seja  $k \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{1}{\ln(k+1)} \leq \varepsilon < \frac{1}{\ln(k)}.$$

Isso implica que  $\varepsilon \rightarrow 0 \Leftrightarrow k \rightarrow \infty$  e que

$$\frac{1}{-\ln\left(\frac{1}{\ln(k+1)}\right)} \leq \frac{1}{-\ln \varepsilon} < \frac{1}{-\ln\left(\frac{1}{\ln(k)}\right)}. \quad (3.1.5)$$

Note que, para quaisquer  $m, n \in \mathbb{N}$ , com  $m \neq n$  e  $m, n < k$ , temos que

$$\begin{aligned} d\left(\frac{e_n}{\ln(n)}, \frac{e_m}{\ln(m)}\right) &= \left\| \frac{e_n}{\ln(n)} - \frac{e_m}{\ln(m)} \right\| \\ &= \max\left\{ \frac{1}{\ln(n)}, \frac{1}{\ln(m)} \right\} \\ &> \frac{1}{\ln(k)}. \end{aligned}$$

Assim, conjuntos de diâmetro  $\varepsilon < \frac{1}{\ln(k)}$  não conseguem conter mais do que um único ponto de  $E_k := \left\{ \frac{e_i}{\ln(i)} \right\}_{i=2}^{k-1}$ . Notando que esse conjunto  $E_k$  contém  $k - 2$  pontos, concluimos que  $k - 2 < N_\varepsilon(F)$ . Assim, usando a relação (3.1.5), obtemos que

$$\frac{\ln(k-2)}{-\ln\left(\frac{1}{\ln(k+1)}\right)} < \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{-\ln(\varepsilon)}.$$

Ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(k-2)}{\ln(\ln(k+1))} \leq \dim_f(F).$$

Disso concluimos que, de fato,  $\dim_f(F) = \infty$ .

Para encerrar esta sessão, vamos apresentar um resultado que se relaciona positivamente com a estabilidade finita da dimensão fractal.

A proposição a seguir apresenta algumas restrições sob as quais  $\dim_f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda\right) < \infty$  mesmo para uma união não-enumerável de conjuntos  $F_\lambda$ .

**Proposição 3.1.21.** *Sejam  $X$  um espaço de Banach,  $K \subset X$  um conjunto compacto e  $\{W_t : K \rightarrow X\}_{t \in [a,b]}$  uma família de operadores contínuos. Suponha que existam constantes  $L, M > 0$  e  $\alpha \in (0, 1)$  tais que*

$$d(W_t x, W_t y) \leq L d(x, y)^\alpha, \quad \forall x, y \in K, t \in [a, b], \quad (3.1.6)$$

$$d(W_t x, W_s x) \leq M d(t, s)^\alpha, \quad \forall x \in K, t, s \in [a, b]. \quad (3.1.7)$$

Nessas condições, para o conjunto  $\Gamma[a, b] := \bigcup_{t \in [a, b]} W_t(K)$  vale a estimativa

$$\dim_f(\Gamma[a, b]) \leq \frac{1}{\alpha} [1 + \dim_f(K)].$$

Em particular, se  $\dim_f(K) < \infty$ , então a dimensão fractal de  $\Gamma[a, b]$  é finita.

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$  dado.

Seja  $\{V_i \subset X\}_{i=1}^n$  tal que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n K_i, \\ \text{diam } K_i \leq \varepsilon, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

com  $n = N(K, \varepsilon)$ , onde  $N(K, \varepsilon)$  é o menor número de conjuntos fechados de diâmetro não excedendo  $\varepsilon$  que são capazes de cobrir  $K$ . Em outras palavras,  $\{K_i\}_{i=1}^n$  é uma  $\varepsilon$ -cobertura minimal de  $K$ .

Sabemos que  $N(K, \varepsilon)$  é finito porque  $K$ , sendo um compacto em um espaço métrico completo, é totalmente limitado.

Para cada  $t \in [a, b]$ , a família  $\{S_t K_i\}_{i=1}^n$  é tal que

$$S_t K \subset \bigcup_{i=1}^n S_t K_i,$$

pois  $K \subset \bigcup_{i=1}^n K_i$ .

Além disso, pela hipótese de Hölder continuidade (3.1.6), sabemos que

$$\text{diam } S_t K_i \leq L\varepsilon^\alpha. \quad (3.1.8)$$

Estamos interessados em estimar  $N(\Gamma[a, b], \tilde{\varepsilon})$  para algum  $\tilde{\varepsilon}$  conveniente. Para isso, vamos precisar de alguns ajustes preliminares.

Primeiro, vamos particionar o intervalo  $[a, b]$  em pedacinhos de tamanho  $\varepsilon$ , definindo

$$t_k := a + (k-1)\varepsilon, \quad k = 1, \dots, (n_\varepsilon - 1) := \left\lfloor \frac{b-a}{\varepsilon} \right\rfloor,$$

$$t_{n_\varepsilon} := b.$$

Isto garante que  $t_1 = a$ ,  $t_{n_\varepsilon} = b$  e  $d(t_{k+1}, t_k) \leq \varepsilon$ . Há um total de  $n_\varepsilon$  pontos.

Também vamos definir os conjuntos

$$G := S_{t_k}(K_i).$$

Para estimar  $N(\Gamma[a, b], \tilde{\varepsilon})$ , vamos considerar  $y \in \Gamma[a, b]$  arbitrário. Por definição,  $y = S_{\tilde{t}x}$  para algum  $\tilde{t} \in [t_{\tilde{k}}, t_{\tilde{k}+1}]$  e algum  $x \in K_{\tilde{j}}$ , com  $\tilde{k} \in \{1, 2, \dots, n_\varepsilon\}$  e  $\tilde{j} \in \{1, 2, \dots, n\}$  específicos, dependendo de  $y$ .

Note que

$$\begin{aligned} d(y, G_{\tilde{k}\tilde{j}}) &= d(W_{\tilde{t}}x, W_{t_{\tilde{k}}}V_{\tilde{j}}) \\ &\leq d(W_{\tilde{t}}x, W_{t_{\tilde{k}}}x) \\ &\leq Md(\tilde{t}, t_{\tilde{k}})^\alpha \quad (\text{Hipótese (3.1.7)}) \\ &\leq M\varepsilon^\alpha \quad (\text{pois } \tilde{t} \in [t_{\tilde{k}}, t_{\tilde{k}+1}]). \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Agora, considere a  $M\varepsilon^\alpha$ -vizinhança fechada de  $G_{kj}$ :

$$V_{M\varepsilon^\alpha}[G_{kj}] = \{w \in X; d(w, G_{kj}) \leq M\varepsilon^\alpha\}.$$

Pela relação (3.1.9), é certo que a família

$$\{V_{M\varepsilon^\alpha}[G_{kj}]\}_{\substack{k \in \{1, \dots, n_\varepsilon\} \\ j \in \{1, \dots, n\}}}$$

é uma cobertura de  $\Gamma[a, b]$ . Essa cobertura possui  $n_\varepsilon \cdot n$  elementos.

Agora, precisamos estimar os diâmetros desses conjuntos.

Pelas desigualdades (3.1.8) e (3.1.9), vale que

$$\begin{aligned} \text{diam}(V_{M\varepsilon^\alpha}[G_{kj}]) &\leq 2M\varepsilon^\alpha + L\varepsilon^\alpha \\ &= (2M + L)\varepsilon^\alpha. \end{aligned}$$

Assim, definindo  $Q := (2M + L)$ , temos que  $Q\varepsilon^\alpha$  é nosso  $\tilde{\varepsilon}$  conveniente. Portanto, por toda essa construção, temos que

$$N(\Gamma[a, b], Q\varepsilon^\alpha) \leq n_\varepsilon \cdot n.$$

Ou seja,

$$N(\Gamma[a, b], Q\varepsilon^\alpha) \leq \left( \frac{b-a}{\varepsilon} + 1 \right) \cdot N(K, \varepsilon).$$

Aplicando logaritmos, dividindo por  $-\ln(Q\varepsilon^\alpha)$  e tomando o limite superior quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , concluímos que

$$\begin{aligned} \dim_f(\Gamma[a, b]) &\leq \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left[ \left( \frac{b-a}{\varepsilon} + 1 \right) \cdot N(K, \varepsilon) \right]}{-\ln(Q\varepsilon^\alpha)} \\ &= \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left[ \frac{b-a}{\varepsilon} + 1 \right] + \ln [N(K, \varepsilon)]}{-\ln Q - \alpha \ln \varepsilon} \\ &= \frac{1}{\alpha} [1 + \dim_f(K)]. \end{aligned}$$

Assim, se  $\dim_f(K)$  for finita, então  $\dim_f(\Gamma[a, b])$  também será.

□

## 3.2 Critérios para Dimensão Fractal Finita

Nesta seção, vamos apresentar critérios para estimar a dimensão fractal de conjuntos em nível abstrato, sem fazer referência a sistemas dinâmicos. Os resultados centrais são os Teoremas 3.2.9 e 3.2.10, dos quais decorrem corolários mais específicos que constam em [9]. Não enunciamos esses corolários aqui porque suas demonstrações são consequências diretas dos teoremas que vamos abordar, e as especificidades dos corolários escapam do escopo deste trabalho.

Para o trabalho que temos à frente, algumas definições são necessárias.

**Definição 3.2.1** (Máximo de Elementos com Determinada Propriedade). *A notação  $\max \# \{*\}$  indica o número de elementos do maior conjunto que possui a propriedade  $*$ . Se existir uma família infinita  $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  de conjuntos satisfazendo  $*$ , podemos tomar  $\max \# \{*\} := \sup_{\lambda \in \Lambda} \#(X_\lambda)$ .*

**Definição 3.2.2** (Seminorma). *Uma função  $n : X \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ser uma seminorma quando satisfaz*

1.  $n(x + y) \leq n(x) + n(y), \quad \forall x, y \in X,$
2.  $n(\lambda x) = |\lambda|n(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{T}, x \in X.$

*A diferença entre uma norma e uma seminorma é que, no caso de uma seminorma  $n$ , pode ocorrer  $n(x) = 0$  sem que  $x = 0$ .*

*É trabalho de rotina verificar que qualquer seminorma  $n$  é simétrica, isto é, que  $n(x - y) = n(y - x)$ .*

**Definição 3.2.3** (Seminorma Compacta). *Uma seminorma  $n$  é dita compacta quando toda sequência limitada possui uma subsequência que é de Cauchy com respeito a  $n$ . Isto é: se  $(x_n) \subset X$  é limitada, então existe  $(x_{n_k}) \subset (x_n)$  tal que  $\lim_{i,j \rightarrow \infty} n(x_{n_i} - x_{n_j}) = 0$ .*

**Lema 3.2.4.** *Sejam  $n_1$  e  $n_2$  seminormas compactas em um espaço de Banach  $X$ .*

*Seja  $m_0(R)$  o número máximo de pares  $(x_i, y_i) \in X \times X$  tais que*

$$\|x_i\|^2 + \|y_i\|^2 \leq R^2,$$

$$n_1(x_i - x_j) + n_2(y_i - y_j) > 1,$$

*para todo  $i \neq j$ .*

*Então, qualquer que seja  $R \in \mathbb{R}^+$ , o valor  $m_0(R)$  é finito.*

*Similarmente, se  $m_Z(R)$  é o maior número de pontos  $x_i \in X$  tais que  $\|x_i\| \leq R$  e  $n_1(x_i - x_j) > 1$  para todo  $i \neq j$ , então  $m_Z(R)$  também é finito.*

*Demonstração.* Por absurdo, suponha que  $m_0(R) = \infty$  para algum  $R$  fixo.

Então existe uma sequência infinita de pontos  $(x_n, y_n) \in X \times X$  tais que

$$\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2 \leq R^2$$

e

$$n_1(x_n - x_m) + n_2(y_n - y_m) > 1$$



para todo  $n \neq m$ .

Contudo, a compacidade de  $n_1$  garante que existe uma subsequência de pontos  $(x_{n_k}, y_{n_k})$  tais que  $n_1(x_{n_k} - x_{n_l}) \rightarrow 0$ . Para essa subsequência, a compacidade de  $n_2$  garante que existe uma subsequência de pontos  $(x_{n_{k_i}}, y_{n_{k_j}})$  tais que  $n_2(x_{n_{k_i}}, y_{n_{k_j}}) \rightarrow 0$ .

Essa última subsequência contraria a suposição de que  $n_1(x_n - x_m) + n_2(y_n - y_m) > 1$  para todo  $n \neq m$ .

Portanto  $m_0(R) < \infty$  para todo  $R \in \mathbb{R}^+$ .

O caso para  $m_Z$  é similar (mais simples) e dispensa nova demonstração.  $\square$

**Lema 3.2.5.** *Sejam  $M \subset X$  e  $W : M \rightarrow X$ . Suponha que existam um espaço de Banach  $Z$ , uma aplicação Lipschitz  $G : M \rightarrow Z$  de constante lipschitziana  $L$ , uma constante  $\eta \geq 0$  e uma seminorma  $n_Z$ , compacta em  $Z$ , tais que*

$$\|Wv_1 - Wv_2\| \leq \eta \|v_1 - v_2\| + n_Z(Gv_1 - Gv_2), \quad \forall v_1, v_2 \in M,$$

$$\|Gv_1 - Gv_2\| \leq L \|v_1 - v_2\|, \quad \forall v_1, v_2 \in M.$$

Então, se  $D \subset M$ , vale que<sup>9</sup>

$$\alpha(WD) \leq \eta \alpha(D),$$

onde  $\alpha$  é a medida de não-compacidade de Kuratowski, apresentada na Definição 1.2.1.

*Demonstração.* Se  $D \subset M$  não for limitado, sabemos que  $\alpha(D) = \infty$ , caso em que a afirmação do lema se torna trivial.

Seja  $D \subset M$  limitado. Pela definição da medida de não-compacidade, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $D_1, \dots, D_{p(\varepsilon)}$  tais que

$$D = \bigcup_{j=1}^p D_j, \quad \text{com } \text{diam } D_j < \alpha(D) + \varepsilon.$$

$\vdash$  Afirmação 1: Existe um conjunto finito  $F = \{x_i\}_{i=1}^k \subset D$  tal que, para todo  $y \in D$ , existe  $i \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $n_Z(Gy - Gx_i) < \varepsilon$ .

Suponha que a afirmação seja falsa. Então existe  $(z_n) \subset D$  tal que

$$n_Z(Gz_n - Gz_m) \geq \varepsilon \quad \forall n \neq m. \quad (3.2.1)$$

Contudo,  $(Gz_n) \subset X$  é uma sequência limitada, afinal  $(z_n) \subset D$ , com  $D$  limitado, e  $G$  é Lipschitz. Por isso, a compacidade de  $n_q$  garante que existe uma subsequência  $(Gz_{n_m}) \subset (Gg_n)$  tal que

$$\lim_{l, m \rightarrow \infty} n_Z(Gz_{n_l} - Gz_{n_m}) = 0.$$

Isso contraria a relação 3.2.1. Portanto a Afirmação 1 é verdadeira.

---

<sup>9</sup>Contudo, é possível ocorrer  $\alpha(WD) \leq \eta \alpha(D)$  para todo  $D \subset M$ , sem que ocorra  $\|Wv_1 - Wv_2\| \leq \eta \|v_1 - v_2\|$  para todo  $v_1, v_2 \in M$ . Ver Observação 3.2.6.

⊢ Afirmação 2: Dado  $x_i \in F = \{x_i\}_{i=1}^k$ , definindo  $C_i = \{y \in D; n_q(Gy - Gx_i) < \varepsilon\}$ , vale que  $D = \bigcup_{i=1}^k C_i$ .

Se  $y \in D$ , existe  $x_i \in F$  tal que  $n_Z(Gy - Gx_i) < \varepsilon$  (Afirmação 1). Então  $y \in C_i \subset \bigcup_{i=1}^k C_i$ . Reciprocamente, se  $y \in \bigcup_{i=1}^k C_i$ , então  $y \in C_i$  para algum  $C_i$ . Como, por definição,  $C_i \subset D$ , concluímos que  $y \in D$ . Isso prova a Afirmação 2.

Agora, como  $D = \bigcup_{j=1}^p D_j$  e  $D = \bigcup_{i=1}^k C_i$ , temos que  $D = \bigcup_{\substack{j \in \{1, \dots, p\} \\ i \in \{1, \dots, k\}}} (D_j \cap C_i)$ . Isso implica que

$$WD = \bigcup_{\substack{j \in \{1, \dots, p\} \\ i \in \{1, \dots, k\}}} [W(D_j \cap C_i)].$$

⊢ Afirmação 3:  $\text{diam}[W(D_j \cap C_i)] \leq \eta\alpha(D)$  quaisquer que sejam  $i, j$ .

Note que:

Se  $v_1, v_2 \in D_j$ , então  $\|v_1 - v_2\| < \alpha(D) + \varepsilon$ .

Se  $v_1, v_2 \in C_i$ , então  $n_Z(Gv_1 - Gv_2) \leq n_Z(Gv_1 - Gx_i) + n_Z(Gx_i - Gv_2) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ .

Portanto, se  $v_1, v_2 \in (D_j \cap C_i)$ , podemos usar a desigualdade fornecida pela hipótese para concluir que

$$\begin{aligned} \|Wv_1 - Wv_2\| &\leq \eta \|v_1 - v_2\| + n_Z(Gv_1 - Gv_2) \\ &= \eta(\alpha(D) + \varepsilon) + 2\varepsilon \\ &= \eta\alpha(D) + \varepsilon(\eta + 2). \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade na escolha de  $\varepsilon > 0$ ,

$$\|Wv_1 - Wv_2\| \leq \eta\alpha(D), \quad \forall v_1, v_2 \in (D_j \cap C_i).$$

Isso garante que  $\text{diam}[W(D_j \cap C_i)] \leq \eta\alpha(D)$ , e, então, a Afirmação 3 esta comprovada.

Ora, mas sabemos que  $\alpha(Y) \leq \text{diam}(Y)$  qualquer que seja o conjunto  $Y$ . Portanto  $\alpha[W(D_j \cap C_i)] \leq \eta\alpha(D)$  quaisquer que sejam  $i, j$ . Assim, pela semiaditividade de  $\alpha$  (Proposição 1.2.2, v), concluímos que  $\alpha[W(D)] \leq \eta\alpha(D)$ .

□

**Observação 3.2.6.** *As condições do Lema 3.2.5 não são suficientes para garantir que  $\dim_f(M) < \infty$ . Em particular, a existência da aplicação  $W$  que é uma  $\alpha$ -contração em  $M$  e tal que  $M \subset W(M)$  não garante dimensão finita de  $M$ . Vejamos dois contra-exemplos. O Exemplo 3.2.7 foi apresentado em [9]. Apresentamos por nossa conta o Exemplo 3.2.8 por considerá-lo mais simples.*

**Exemplo 3.2.7.** *Sejam*

$$X := \ell^2 = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots); \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \right\}.$$

$$M := \{x \in \ell^2; |x_i| \leq 1/i^2\}.$$

É relativamente simples verificar que  $\dim_f M = \infty$ : dado qualquer valor finito  $d \geq 0$ , o conjunto das  $d$ -uplas,  $(x_1, \dots, x_d)$  tais que  $|x_i| \leq 1/i^2$  para todo  $i \in \{1, \dots, d\}$  possui interior não-vazio em  $\mathbb{R}^d$ , de modo que sua dimensão é  $d$ . Como isso vale para qualquer  $d \geq 0$ , segue que o caso limite (isto é, o conjunto  $M$ ) possui dimensão infinita.

Para definir a aplicação  $W$  satisfazendo as condições do Lema 3.2.5, defina as funções reais

$$f_i(s) := \begin{cases} s, & \text{se } |s| \leq 1/i^2, \\ 1/i^2, & \text{se } s \geq 1/i^2, \\ -1/i^2, & \text{se } s \leq -1/i^2. \end{cases}$$

Defina

$$\begin{aligned} W : \ell^2 &\rightarrow \ell^2 \\ x &\mapsto W(x) := (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots). \end{aligned}$$

Veja que  $W(X) = M = W(M)$  e que, como  $W(M)$  é compacto, segue que  $W$  é uma  $\alpha$ -contração de constante  $\lambda = 0$  (afinal  $0 = W(D) \leq \lambda\alpha(D) = 0$  para todo  $D \subset M$ ).

O detalhe que merece atenção é o seguinte:  $W$  é Lipschitz, mas sua menor constante lipschitziana é 1. Isto é, vale que

$$\|W(x) - W(y)\| \leq 1 \|x - y\|, \quad \forall x, y \in M,$$

mas, para qualquer  $\eta < 1$ , não vale que

$$\|W(x) - W(y)\| \leq \eta \|x - y\|, \quad \forall x, y \in M.$$

Outro exemplo que ilustra o mesmo fato é o seguinte.

**Exemplo 3.2.8.** Nos moldes do Exemplo 3.1.20, seja  $X = \ell^\infty$  o espaço das seqüências reais limitadas. Seja  $(e_m)$  a base canônica desse espaço.

Considere o conjunto  $M = \left\{ \frac{e_m}{\ln(m)} \right\}_{m=2}^\infty$  e a aplicação  $W : M \rightarrow M$  dada por  $W \equiv Id$ .

Trivialmente,  $M \subset W(M)$ ,  $W$  é  $\alpha$ -contração (porque  $M$  é compacto) e  $W$  é Lipschitz de constante 1. Contudo, já vimos no Exemplo 3.1.20 que  $\dim_f M = \infty$ .

**Teorema 3.2.9.** Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $M \subset X$  um conjunto fechado, limitado e não-vazio. Suponha que exista  $W : M \rightarrow X$  satisfazendo

(i)  $M \subset W(M)$ .

(ii) Existem um espaço de Banach  $Z$ , uma aplicação Lipschitz  $G : M \rightarrow Z$  de constante lipschitziana  $L > 0$ , uma constante  $\eta \in [0, 1)$  e uma seminorma  $n_Z$ , compacta em  $Z$ , tais que

$$\begin{aligned} \|Wv_1 - Wv_2\| &\leq \eta \|v_1 - v_2\| + n_Z(Gv_1 - Gv_2), & \forall v_1, v_2 \in M, \\ \|Gv_1 - Gv_2\| &\leq L \|v_1 - v_2\|, & \forall v_1, v_2 \in M. \end{aligned}$$

Sob essas hipóteses, definindo

$$m_Z(r) := \max \#\{z_i; \|z_i\|_Z \leq r \text{ e } n_Z(z_i - z_j) > 1 \quad \forall i \neq j\},$$

vale que  $M$  é um conjunto compacto de dimensão fractal finita, satisfazendo a estimativa

$$\dim_f(M) \leq \ln \left[ m_Z \left( \frac{4L}{1-\eta} \right) \right] \cdot \left( \ln \left[ \frac{2}{1+\eta} \right] \right)^{-1}.$$

*Demonstração.* Pelo Lema 3.2.5, sabemos que  $\alpha(M) \leq \eta\alpha(M)$ . Como, neste caso,  $0 \leq \eta < 1$ , temos necessariamente que  $\alpha(M) = 0$ . Isso só é possível quando  $\overline{M}$  é compacto. Como, no caso em questão,  $M$  é fechado ( $M = \overline{M}$ ), segue que  $M$  é compacto.

Seja  $\varepsilon \in (0, 1)$  dado.

Considere  $\{F_i\}_{i=1}^{N(M, \varepsilon)}$  uma família minimal de subconjuntos fechados de  $M$  tais que<sup>10</sup>

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{N(M, \varepsilon)} F_i, \quad \text{com } \text{diam } F_i \leq 2\varepsilon.$$

Defina

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &:= n_Z(Gx - Gy), \\ m_\varphi(D, \varepsilon) &:= \max \#\{z_k \in D; \varphi(z_k, z_l) > \varepsilon\}, \\ \tilde{m}_\varphi(M, \delta) &:= \sup_{\varepsilon \in (0, 1)} \sup \{\ln m_\varphi(F, \delta\varepsilon); F \subset M, \text{diam } F \leq 2\varepsilon\}. \end{aligned}$$

Observe que  $m_\varphi(D, \varepsilon)$  é sempre finito para conjuntos  $D \subset M$ , pois  $M$  é limitado.

⊢ Afirmação 1:  $\tilde{m}_\varphi(M, \delta) < \infty$  para todo  $\delta > 0$ .

Seja  $D \subset M$ .

Considere  $B := G(D) = \{z = Gx \in Z; x \in D\}$ .

Como  $G$  é Lipschitz, note que

$$\text{diam } B = \sup_{x, y \in D} \|Gx - Gy\| \leq L \text{diam } D := R < \infty.$$

Então existe  $y_0 \in B$  tal que  $B \subset B[y_0, R]$ .

Portanto, aplicando propriedades usuais de translações, bem como o Lema 3.2.4, temos que

$$\begin{aligned} m_\varphi(D, \varepsilon) &= \max \#\{y_k \in D; \varphi(y_k, y_l) > \varepsilon, i \neq j\} \\ &= \max \#\{z_k \in D; n_Z(z_k - z_l) > \varepsilon, i \neq j\} \\ &\leq \max \#\{z_k \in B[y_0, R]; n_Z(z_k - z_l) > \varepsilon, i \neq j\} \\ &= \max \#\{z_k \in B[0, R]; n_Z(z_k - z_l) > \varepsilon, i \neq j\} \\ &= \max \#\{z_k \in B[0, R/\varepsilon]; n_Z(z_k - z_l) > 1, i \neq j\} \\ &= m_Z(R/\varepsilon) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

<sup>10</sup>Observe que, desde modo, definimos  $N(M, \varepsilon)$  como sendo o menor número de conjuntos fechados que cobrem  $M$  e cujos diâmetros não excedem  $2\varepsilon$ . Essa escolha envolvendo  $2\varepsilon$ , e não o  $\varepsilon$  de praxe, foi feita apenas para comodidade nos cálculos ao fim do argumento.

Usando o fato recém-demonstrado de que  $m_\varphi(D, \varepsilon) \leq m_Z(R/\varepsilon)$ , podemos observar que, se  $\text{diam } F \leq 2\varepsilon$ , então

$$\begin{aligned} m_\varphi(F, \delta\varepsilon) &\leq m_Z(R/\delta\varepsilon) \\ &= m_Z(L \text{ diam } F/\delta\varepsilon) \\ &\leq m_Z(L2\varepsilon/\delta\varepsilon) \\ &= m_Z(2L/\delta). \end{aligned}$$

Portanto,  $\ln[m_\varphi(F, \delta\varepsilon)] \leq \ln[m_Z(2L/\delta)]$ . Isso vale para todo  $F \subset M$  com  $\text{diam } F \leq 2\varepsilon$ . Logo,

$$\sup\{\ln m_\varphi(F, \delta\varepsilon); F \subset M \text{ e } \text{diam } F \leq 2\varepsilon\} \leq \ln[m_Z(2L/\delta)].$$

Como isso vale para todo  $\varepsilon \in (0, 1)$ , segue que

$$\tilde{m}_\varphi(M, \delta) \leq \ln[m_Z(2L/\delta)] < \infty. \quad (3.2.2)$$

Isso comprova a Afirmação 1.

Agora, seja  $\{x_j^i\}_{j=1}^{n_i} \subset F_i$  um subconjunto maximal de  $F_i$  tal que  $\varphi(x_j^i, x_k^i) > \delta\varepsilon$ , com  $\varepsilon \in (0, 1)$  e  $\delta \in (0, 1)$  dados.

Por definição,

$$n_i = m_\varphi(F_i, \delta\varepsilon) \leq \exp(\tilde{m}_\varphi(M, \delta)). \quad (3.2.3)$$

Defina, ainda,

$$D_j^i := \{v \in F_i; \varphi(v, x_j^i) \leq \delta\varepsilon\}.$$

Veja que  $F_i \subset \bigcup_{j=1}^{n_i} D_j^i$ , pois, se  $x \in F_i$ , então  $\varphi(x, x_j^i) \leq \delta\varepsilon$  para algum  $x_j^i$ , caso contrário o conjunto  $\{x_j^i\}_{j=1}^{n_i}$  não seria maximal.

Como  $M \subset \bigcup_{i=1}^{N(M, \varepsilon)} F_i$ , temos

$$W(M) \subset \bigcup_{i=1}^{N(M, \varepsilon)} \bigcup_{j=1}^{n_i} W(D_j^i).$$

Observe que essa cobertura para  $W(M)$  possui  $n_i \cdot N(M, \varepsilon)$  elementos. Vejamos que o diâmetro desses conjuntos não excede  $2(\eta + \delta)\varepsilon$ . De fato, se  $y_1, y_2 \in D_j^i$ , então, por hipótese,

$$\begin{aligned} \|Wy_1 - Wy_2\| &\leq \eta \|y_1 - y_2\| + n_Z(Gy_1 - Gy_2) \\ &= \eta \|y_1 - y_2\| + \varphi(y_1, y_2) \\ &\leq \eta \|y_1 - y_2\| + \varphi(y_1, x_j^i) + \varphi(y_2, x_j^i) \\ &\leq \eta 2\varepsilon + \delta\varepsilon + \delta\varepsilon \\ &= 2(\eta + \delta)\varepsilon. \end{aligned}$$

Ou seja,  $\text{diam } W(D_j^i) \leq 2(\eta + \delta)\varepsilon$ .

Portanto, como estamos contando  $N(M, \varepsilon)$  como sendo o menor número de conjuntos capazes de cobrir  $M$  e cujos diâmetros não excedem  $2\varepsilon$ , obtemos que

$$N(W(M), (\eta + \delta)\varepsilon) \leq n_i \cdot N(M, \varepsilon).$$

Assim, usando a relação (3.2.3), conseguimos a estimativa

$$N(W(M), (\eta + \delta)\varepsilon) \leq e^{\tilde{m}_\varphi(M, \delta)} \cdot N(M, \varepsilon). \quad (3.2.4)$$

Essa estimativa garante a validade do teorema, conforme os cálculos que passamos a mostrar agora.

Seja  $\delta > 0$  suficientemente pequeno, a ponto de valer  $\delta < 1 - \eta$ . Defina  $p := \eta + \delta < 1$ . Usando a hipótese de que  $M \subset W(M)$  e aplicando a estimativa (3.2.4), temos que

$$\begin{aligned} N(M, p\varepsilon) &\leq N(W(M), p\varepsilon) \\ &\leq e^{\tilde{m}_\varphi(M, \delta)} \cdot N(M, \varepsilon). \end{aligned}$$

Então, tomando logaritmos,

$$\ln N(M, p\varepsilon) \leq \tilde{m}_\varphi(M, \delta) + \ln N(M, \varepsilon). \quad (3.2.5)$$

Seja  $\varepsilon_n := p^n \varepsilon_0$  para algum  $\varepsilon_0 > 0$  qualquer, pequeno o suficiente.

Aplicando (3.2.5) repetidamente, vemos que

$$\begin{aligned} \ln N(M, \varepsilon_n) &\leq \tilde{m}_\varphi(M, \delta) + \ln N(M, \varepsilon_{n-1}) \\ &\leq 2 \cdot \tilde{m}_\varphi(M, \delta) + \ln N(M, \varepsilon_{n-2}) \\ &\leq \dots \\ &\leq n \cdot \tilde{m}_\varphi(M, \delta) + \ln N(M, \varepsilon_0). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\ln N(M, \varepsilon_n) \leq n \cdot \tilde{m}_\varphi(M, \delta) + \ln N(M, \varepsilon_0), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Note que, qualquer que seja  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , existem  $n = n_\varepsilon$  e  $\tilde{\varepsilon} \in [\varepsilon_1, \varepsilon_0)$  tais que

$$\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon < \varepsilon_n, \quad \text{com } \varepsilon = p^n \tilde{\varepsilon}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \ln N(M, \varepsilon) &\leq n \cdot \tilde{m}_\varphi(M, \delta) + \ln N(M, \tilde{\varepsilon}) \\ &\leq n \cdot \tilde{m}_\varphi(M, \delta) + \ln N(M, \varepsilon_1) \\ \Rightarrow \frac{\ln N(M, \varepsilon)}{-\ln \varepsilon} &\leq \frac{n \cdot \tilde{m}_\varphi(M, \delta) + \ln N(M, \varepsilon_1)}{-\ln \varepsilon} \\ \Rightarrow \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(M, \varepsilon)}{-\ln \varepsilon} &\leq \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{n \cdot \tilde{m}_\varphi(M, \delta) + \ln N(M, \varepsilon_1)}{-\ln \varepsilon} \right). \end{aligned}$$

Portanto

$$\dim_f(M) \leq \tilde{m}_\varphi(M, \delta) \cdot \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{n_\varepsilon}{-\ln \varepsilon}. \quad (3.2.6)$$

Para estimar  $\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{n_\varepsilon}{-\ln \varepsilon}$ , veja o seguinte:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= p^{n_\varepsilon} \tilde{\varepsilon} \\ \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon}{\tilde{\varepsilon}} &= p^{n_\varepsilon} \\ \Rightarrow \ln(\varepsilon/\tilde{\varepsilon}) &= n_\varepsilon \ln(p) \\ \Rightarrow \quad n_\varepsilon &= \frac{\ln(\varepsilon/\tilde{\varepsilon})}{\ln(p)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon} &< \varepsilon_0 \\ \Rightarrow \quad \varepsilon/\tilde{\varepsilon} &> \varepsilon/\varepsilon_0 \\ \Rightarrow \ln(\varepsilon/\tilde{\varepsilon}) &> \ln(\varepsilon/\varepsilon_0) \\ \Rightarrow \frac{\ln(\varepsilon/\tilde{\varepsilon})}{\ln(p)} &< \frac{\ln(\varepsilon/\varepsilon_0)}{\ln(p)} \quad (p < 1) \\ \Rightarrow \quad n_\varepsilon &< \frac{\ln(\varepsilon/\varepsilon_0)}{\ln(p)} \\ \Rightarrow \quad \frac{n_\varepsilon}{-\ln \varepsilon} &\leq \frac{\ln(\varepsilon) - \ln(\varepsilon_0)}{\ln(\varepsilon) \cdot \ln(p)} \\ &= \frac{1}{-\ln(p)} + \frac{\ln(\varepsilon_0)}{\ln(\varepsilon) \cdot \ln(p)} \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{-\ln(p)}. \end{aligned}$$

Portanto, usando esse limite e a relação (3.2.2) na estimativa (3.2.6), ficamos com

$$\dim_f(M) \leq \ln [m_Z(2L/\delta)] \cdot \left[ \frac{1}{-\ln(p)} \right].$$

Quando tomamos  $\delta = \frac{1-\eta}{2}$ , o que implica  $p = \frac{1+\eta}{2}$ , obtemos que

$$\dim_f(M) \leq \frac{\ln \left[ m_Z \left( \frac{4L}{1-\eta} \right) \right]}{\ln \left[ \frac{2}{1+\eta} \right]}.$$

Isso completa a demonstração do teorema. □

Vejamos um resultado similar que não exige que ocorra  $M \subset W(M)$ .

**Teorema 3.2.10.** *Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $M \subset X$  um conjunto fechado, limitado e não-vazio. Suponha que exista  $V : M \rightarrow M$  satisfazendo as seguintes condições.*

*Existem um espaço de Banach  $Z$ , uma aplicação Lipschitz  $K : M \rightarrow Z$  de constante lipschitziana  $L > 0$ , uma constante  $\eta \in [0, 1)$  e uma seminorma  $n_Z$ , compacta em  $Z$ , tais que*

$$\begin{aligned} \|Vv_1 - Vv_2\| &\leq \eta \|v_1 - v_2\| + n_Z(Kv_1 - Kv_2), & \forall v_1, v_2 \in M, \\ \|Kv_1 - Kv_2\| &\leq L \|v_1 - v_2\|, & \forall v_1, v_2 \in M. \end{aligned}$$

*Sob essas hipóteses, definindo*

$$m_Z(r) := \max \#\{z_i; \|z_i\|_Z \leq r \text{ e } n_Z(z_i - z_j) > 1 \quad \forall i \neq j\},$$

*vale que, para qualquer  $\theta \in (\eta, 1)$ , existe um conjunto compacto positivamente invariante  $A_\theta \subset M$  de dimensão fractal finita*

$$\dim_f(A_\theta) \leq \frac{\ln \left[ m_Z \left( \frac{2L}{\theta - \eta} \right) \right]}{-\ln \theta},$$

*tal que, para alguma constante  $r > 0$ ,*

$$\sup_{u \in M} d(V^k u, A_\theta) \leq r\theta^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

*Demonstração.* Pelo Lema 3.2.5, sabemos que  $V$  é uma  $\alpha$ -contração (o lema não exige que ocorra  $M \subset V(M)$ ).

Vamos considerar o sistema dinâmico discreto  $(M, V^k)$ . Esse sistema dinâmico é dissipativo, com  $M$  sendo trivialmente um conjunto absorvente.

Sabemos que  $M_0 := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V^n M$  é atrator global compacto de  $(M, V^k)$ . Para esse conjunto, sim, vale que  $M_0 \subset V(M_0)$ , o que nos permite utilizar o Teorema 3.2.9 para concluir que  $\dim_f(M_0) < \infty$ .

Vamos construir  $A_\theta$  partindo de  $M_0$ .

Como  $V$  é uma  $\alpha$ -contração, vamos assumir<sup>11</sup>, por simplicidade,  $\alpha(M) \leq 2$ .

Vamos manter a escolha empregada no Teorema 3.2.9, em que  $N(E, \varepsilon)$  é o menor número de conjuntos fechados de diâmetro não excedendo  $2\varepsilon$  que são capazes de cobrir  $E$ .

Assim, veja que, se  $\alpha(M) \leq 2$ , então  $M$  pode ser coberto por uma quantidade finita de conjuntos com diâmetro 2. Isso implica que  $N(M, 1)$  é finito.

Pelos argumentos empregados no Teorema 3.2.9, e usando as mesmas notações, sabemos que (relação (3.2.4))

$$N(VM, q\varepsilon) \leq \exp(\tilde{m}_\varphi(M, \delta)) \cdot N(M, \varepsilon),$$

onde  $q = \eta + \delta$  e  $\tilde{m}_\varphi(M, \delta) \leq \ln [m_Z(2L/\delta)]$ .

<sup>11</sup>Podemos fazer isso porque, se  $\alpha(M) \not\leq 2$ , a partir de algum  $k_0$  vai sempre valer que  $\alpha(V^{k_0}M) \leq 2$ .



Assim,

$$N(V^n M, q\varepsilon) \leq \exp(\tilde{m}_\varphi(V^{n-1} M, \delta)) \cdot N(V^{n-1} M, \varepsilon), \quad n = 1, 2, \dots$$

E, como  $V^{n-1}(M) \subset M$ ,

$$N(V^n M, q\varepsilon) \leq \exp(\tilde{m}_\varphi(M, \delta)) \cdot N(V^{n-1} M, \varepsilon), \quad n = 1, 2, \dots$$

Então, escolhendo algum  $\varepsilon \in [1/2, 1)$  e definindo  $\varepsilon_n = q^n \varepsilon_0$ , temos que

$$N(V^n M, \varepsilon_n) \leq \exp(n \cdot \tilde{m}_\varphi(M, \delta)) \cdot N(M, \varepsilon_0), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.2.7)$$

Para prosseguir com a demonstração, vamos precisar de um resultado auxiliar, com o seguinte Lema.

**Lema 3.2.11.** *Suponha  $\theta > \eta$ . Nas condições do Teorema 3.2.10, existe uma coleção (infinita) de conjuntos finitos  $E_m$  tais que*

- (i)  $E_m \subset V^m M$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$
- (ii)  $V^m M = \bigcup_{v \in E_m} V^m \cap B[v, 2\theta^m]$  (ou seja,  $V^m \subset V_{2\theta^m}[E_m]$ )

(iii) Existe uma constante  $N_0 > 0$  tal que, para todo  $m \geq 0$ , vale que

$$\#E_m \leq N(V^m M, \theta^m) \leq N_0 \exp(m \cdot \tilde{m}_\varphi(M, \theta - \eta)). \quad (3.2.8)$$

*Demonstração.* Seja  $E_m = \{a_i^m \in V^m M\}_{i=1}^{N_m}$  um subconjunto maximal de  $V^m M$  tal que

$$\|a_i^m - a_j^m\| > 2\theta^m, \quad \forall i \neq j.$$

Esse conjunto é limitado, pois  $V^m M$  é limitado.

(i) é verdade por construção.

(ii) é verdade pela maximalidade de  $E_m$ .

Para provar (iii), note o seguinte. Se  $x, y \in E_m$ , então  $d(x, y) > 2\theta^m$ . Isso significa que  $x$  e  $y$  não podem pertencer a um mesmo conjunto de diâmetro  $2\theta^m$  ou menor. Assim,  $N(V^m M, \theta^m) \geq N_m = \#E_m$ . Então, pela relação (3.2.7),

$$\#E_m \leq N(V^m M, \theta^m) \leq N_0 \exp(n \cdot \tilde{m}_\varphi(M, \delta)),$$

onde  $N_0 := N(M, \varepsilon_0)$ . □

Continuando a demonstração do Teorema 3.2.10, vamos definir

$$A_\theta := M_0 \cup \{V^k E_m\}_{k,m}.$$

⊢ Afirmação 1:  $A_\theta$  é positivamente invariante.

De fato, se  $x \in A_\theta$ , então  $x \in M_0$  ou  $x = V^{\tilde{k}} y_{\tilde{m}}$  para algum  $\tilde{k} \in \mathbb{N}$  e algum  $y_{\tilde{m}} \in E_{\tilde{m}}$ . No primeiro caso,  $V^k x \in M_0 \subset A_\theta$  porque  $M_0$  é invariante (afinal é o atrator

do sistema dinâmico discreto). No segundo caso, qualquer que seja  $k \in \mathbb{N}$ , temos que  $V^k x = V^{k+\tilde{k}} y_{\tilde{m}} \in \{V^k E_m\}_{k,m} \subset A_\theta$ .

⊢ Afirmação 2:  $A_\theta$  é compacto.

Já sabemos que  $M_0$  é compacto. Vamos mostrar que, dada  $(x_n) \subset \{V^k E_m\}_{k,m}$ , a sequência  $(x_n)$  possui uma subsequência que converge em  $A_\theta$ .

Ora, se  $(x_n) \subset \{V^k E_m\}_{k,m}$ , então  $x_n = V^{k_n} y_{m_n}$  para algum  $y_{m_n} \in E_{m_n}$ .

Como  $M_0$  é atrator, sabemos que  $d_h(V^k D, M_0) \rightarrow 0$  qualquer que seja o conjunto limitado  $D \subset M$ . Em particular,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_h(V^k E_m, M_0) = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Observe que, como  $E_m$  são conjuntos finitos, a sequência de pontos  $x_n = V^{k_n} y_{m_n}$  eventualmente vai forçar que  $k_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Desse modo, os pontos  $x_n$  vão ser atraídos para  $M_0$ . Assim, vai existir uma subsequência convergindo para o compacto  $M_0$ , que está contido em  $A_\theta$ . Isso comprova que  $A_\theta$  é compacto.

⊢ Afirmação 3:  $\sup_{u \in M} d(V^k u, A_\theta) \leq r\theta^k$  para alguma constante  $r > 0$ .

De fato, se  $y \in M$ , então

$$d(V^m y, A_\theta) \leq \underbrace{d(V^m y, E_m)}_{E_m \subset A_\theta} \leq \underbrace{2\theta^m}_{\text{por (ii)}}, \quad m = 1, 2, \dots$$

⊢ Afirmação 4:  $A_\theta$  tem dimensão fractal finita, satisfazendo a estimativa

$$\dim_f(A_\theta) \leq \frac{\ln \left[ m_Z \left( \frac{2L}{\theta - \eta} \right) \right]}{-\ln \theta}.$$

Note que<sup>12</sup>, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , vale que

$$A_\theta \subset V^n M \cup \{V^k E_m; k, m \geq 0 \text{ e } k + m \leq n - 1\}.$$

Assim, para todo  $\varepsilon > 0$ , vale que<sup>13</sup>

$$N(A_\theta, \varepsilon) \leq N(V^n M, \varepsilon) + \sum_{m=0}^{n-1} (n - m) (\#E_m). \quad (3.2.9)$$

Em particular,

$$N(A_\theta, \theta^n) \leq N(V^n M, \theta^n) + \sum_{m=0}^{n-1} (n - m) (\#E_m).$$

---

<sup>12</sup>Lembre-se de que  $M_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V^n M$  e de que  $E_m \subset V^m M$ .

<sup>13</sup>O somatório em (3.2.9) foi obtido da seguinte forma: vamos avaliar quais conjuntos pertencem a  $\{V^k E_m; k, m \geq 0 \text{ e } k + m \leq n - 1\}$  para cada  $m$ , com  $n$  fixo: para  $E_0$ , temos  $V^0 E_0, V^1 E_0, \dots, V^{n-1} E_0$ . Para  $E_1$ , temos  $V^0 E_1, V^1 E_1, \dots, V^{n-2} E_1$ . Para  $E_m$ , temos  $V^0 E_m, V^1 E_m, \dots, V^{n-m-1} E_m$ , isto é, um total de  $(n - m)$  conjuntos.

Então, aplicando as estimativas (3.2.7) e (3.2.8), bem como lembrando que  $\sum_{j=0}^{\infty} j e^{-ja} = \frac{e^a}{(1-e^a)^2}$  para todo  $a > 0$ , temos que

$$\begin{aligned}
N(A_\theta, \theta^n) &\leq N(V^n M, \theta^n) + \sum_{m=0}^{n-1} (n-m) (\#E_m) \\
&\leq N_0 \exp(n \cdot \tilde{m}_\varphi(M, \theta - \eta)) + \sum_{m=0}^{n-1} (n-m) N_0 \exp(m \cdot \tilde{m}_\varphi(M, \theta - \eta)) \\
&= N_0 \exp(n \cdot \tilde{m}_\varphi(M, \theta - \eta)) \cdot \left[ 1 + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\exp(m \cdot \tilde{m}_\varphi(M, \theta - \eta))}{\exp(n \cdot \tilde{m}_\varphi(M, \theta - \eta))} \right] \\
&= N_0 \exp(n \cdot \tilde{m}_\varphi(M, \theta - \eta)) \cdot \left[ 1 + \sum_{m=0}^{n-1} (n-m) \exp((m-n) \cdot \tilde{m}_\varphi(M, \theta - \eta)) \right] \\
&\leq N_0 \exp(n \cdot \tilde{m}_\varphi(M, \theta - \eta)) \cdot \left[ 1 + \sum_{j=0}^{\infty} j \exp(-j \cdot \tilde{m}_\varphi(M, \theta - \eta)) \right] \\
&= N_0 \exp(n \cdot \tilde{m}_\varphi(M, \theta - \eta)) \cdot \left[ 1 + \frac{\exp(\tilde{m}_\varphi(M, \theta - \eta))}{\left(1 - \exp(-\tilde{m}_\varphi(M, \theta - \eta))\right)^2} \right].
\end{aligned}$$

Isso significa que

$$\ln N(A_\theta, \theta^n) \leq n \cdot \tilde{m}_\varphi(M, \theta - \eta) + C, \quad (3.2.10)$$

onde  $C$  é uma constante que não precisamos explicitar.

Para concluir os cálculos, note que, dado  $\varepsilon \in (0, 1)$ , existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que

$$\theta^{n_\varepsilon} \leq \varepsilon < \theta^{n_\varepsilon - 1}.$$

Usaremos mais à frente que

$$\begin{aligned}
&\varepsilon < \theta^{n_\varepsilon - 1} \\
&\Rightarrow \ln \varepsilon < (n_\varepsilon - 1) \ln \theta \\
&\Rightarrow \frac{\ln \varepsilon}{\ln \theta} > n_\varepsilon - 1 \quad (\theta < 1) \\
&\Rightarrow n_\varepsilon \leq 1 + \frac{-\ln(\varepsilon)}{-\ln(\theta)}. \quad (3.2.11)
\end{aligned}$$

Agora, como  $\theta^{n_\varepsilon} \leq \varepsilon$ , vale que

$$\ln N(A_\theta, \varepsilon) \leq \ln N(A_\theta, \theta^{n_\varepsilon}).$$

Então, usando a estimativa (3.2.10), a relação (3.2.11) e lembrando que  $\tilde{m}_\varphi(M, \theta - \eta) \leq$

$\ln \left[ m_Z \left( \frac{2L}{\theta - \eta} \right) \right]$  (estimativa (3.2.2) no Teorema 3.2.9)), ficamos com

$$\begin{aligned}
\ln N(A_{\theta, \varepsilon}) &\leq \ln N(A_\theta, \theta^{n_\varepsilon}) \\
&\leq n_\varepsilon \cdot \tilde{m}_\varphi(M, \theta - \eta) + C \\
&\leq \left[ 1 + \frac{-\ln \varepsilon}{-\ln \theta} \right] \cdot \ln \left[ m_Z \left( \frac{2L}{\theta - \eta} \right) \right] + C \\
\Rightarrow \frac{\ln N(A_{\theta, \varepsilon})}{-\ln \varepsilon} &\leq \left[ \frac{1}{-\ln \varepsilon} + \frac{1}{-\ln \theta} \right] \cdot \ln \left[ m_Z \left( \frac{2L}{\theta - \eta} \right) \right] + \frac{C}{-\ln \varepsilon} \\
\Rightarrow \dim_f(A_\theta) &\leq \frac{\ln \left[ m_Z \left( \frac{2L}{\theta - \eta} \right) \right]}{-\ln \theta}.
\end{aligned}$$

Isso completa a demonstração do teorema. □

### 3.3 Critérios para Dimensão Fractal Finita de Atratores

Os resultados das seções precedentes culminam no seguinte teorema, aplicável a uma ampla gama de sistemas dinâmicos dissipativos.

**Teorema 3.3.1.** *Seja  $(X, S_t)$  um sistema dinâmico que possua um atrator global  $\mathcal{A}$  e que seja quasi-estável<sup>14</sup> em  $\mathcal{A}$  em algum tempo  $t_* \geq 0$ . Então  $\dim_f \mathcal{A} < \infty$  e vale a estimativa*

$$\dim_f \mathcal{A} \leq \left[ \ln \frac{2}{1+q} \right]^{-1} \ln m_z \left( \frac{4L_K}{1-q} \right),$$

onde  $L_K > 0$  é a constante de Lipschitz de  $K$ ,  $q \in [0, 1)$  é o número cuja existência é garantida pela quasi-estabilidade (Definição 2.2.18) e  $m_z$  é a quantidade máxima de elementos  $z_i \in \{z \in Z; \|z_i\|_Z \leq R\}$  tais que  $n_Z(z_i - z_j) > 1$  quando  $i \neq j$ .

*Demonstração.* Tomando  $V := S_{t_*}$ , podemos aplicar o Teorema 3.2.9 para concluir o desejado.  $\square$

O resultado a seguir foi apresentado em [48] e aborda casos não contemplados pelo Teorema 3.3.1.

**Teorema 3.3.2.** *Seja  $\mathcal{A}$  o atrator global do sistema dinâmico  $(X, S_t)$ , onde  $(X, \|\cdot\|)$  é um espaço de Banach. Suponha que*

- (i)  $0 \in \mathcal{A}$ .
- (ii)  $\dim_f [\mathcal{A} \setminus B(0, \varepsilon)] < \infty$  para todo  $\varepsilon > 0$ .
- (iii) *Existam uma sequência decrescente de erros  $(\varepsilon_m)_{m=0}^\infty$  e uma sequência crescente de tempos  $(t_m)_{m=0}^\infty$ , com  $t_0 = 0$ , satisfazendo*
  - a)  $\varepsilon_m \rightarrow 0$ .
  - b)  $\varepsilon_m > \varepsilon_{m+1} \geq \alpha \varepsilon_m$  para alguma constante  $\alpha \in (0, 1)$ .
  - c)  $\sup_{x \in A \cap B(0, \varepsilon_0)} \|S_t x\| \leq \varepsilon_m$  para todo  $t \geq t_m$ .
  - d)  $d_0 := \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln t_m}{-\ln \varepsilon_m} < \infty$ .
- (iv) *Existem constantes  $\theta \in (0, 1]$  e  $L > 0$  tais que*

$$\|S_{t_1} x - S_{t_2} y\| \leq L (|t_1 - t_2| + \|x - y\|)^\theta, \quad \forall t_1, t_2 > 0, \quad \forall x, y \in A \cap B(0, \varepsilon_0).$$

Nessas condições,  $\dim_f(\mathcal{A}) < \infty$ .

---

<sup>14</sup>Ver Definição 2.2.18.

*Demonstração.* Por economia, vamos convencionar

$$\begin{aligned} A_{\varepsilon_0} &:= \mathcal{A} \cap B(0, \varepsilon_0), \\ A_{\varepsilon_m}^0 &:= \mathcal{A} \cap [B(0, \varepsilon_0) \setminus B[0, \varepsilon_m]]. \end{aligned}$$

⊢ Afirmação 1:  $A_{\varepsilon_m}^0 \subset \bigcup_{s \in [0, t_m]} S_s A_{\varepsilon_1}^0$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ .

Para  $m = 1$ , a inclusão é óbvia, afinal  $A_{\varepsilon_1}^0 = S_0 A_{\varepsilon_1}^0 \subset \bigcup_{s \in [0, t_1]} S_s A_{\varepsilon_1}^0$ .

Considere  $m \geq 2$ .

Seja  $x \in A_{\varepsilon_m}^0$ . Isso significa que  $x \in A$  e que  $\varepsilon_0 > \|x\| > \varepsilon_m$ . Sem perda de generalidade, podemos assumir  $\varepsilon_1 \geq \|x\| > \varepsilon_m$ , pois a situação  $\varepsilon_0 > \|x\| > \varepsilon_1$  já foi tratada no caso  $m = 1$ .

Como  $x \in \mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}$  é invariante (isto é,  $S_\tau \mathcal{A} = \mathcal{A}$  para todo  $\tau \geq 0$ ), existe algum  $y \in \mathcal{A}$  tal que  $x = S_{t_m} y$ . Logo,  $\varepsilon_1 > \|S_{t_m} y\| > \varepsilon_m$ .

Como  $\|S_{t_m} y\| > \varepsilon_m$  e  $y \in A$ , a hipótese (iii) c) exige que  $y \notin B(0, \varepsilon_0)$ . Ou seja,  $\|y\| \geq \varepsilon_0$ .

Temos, portanto, que

$$\|y\| \geq \varepsilon_0 > \varepsilon_1 \geq \|S_{t_m} y\|.$$

Assim, a continuidade (em  $t$ ) do operador  $S$  garante que existe algum  $\tilde{s} \in [0, t_m]$  tal que

$$\varepsilon_0 > \|S_{\tilde{s}} y\| > \varepsilon_1.$$

Ora, então  $\tilde{y} := S_{\tilde{s}} y \in A_{\varepsilon_1}^0$  e, além disso, tomando  $s := t_m - \tilde{s} \in [0, t_m]$ , vemos que

$$S_s \tilde{y} = S_{t_m - \tilde{s}} \tilde{y} = S_{t_m - \tilde{s}} S_{\tilde{s}} y = S_{t_m} y = x.$$

Isso mostra que  $x \in \bigcup_{s \in [0, t_m]} S_s A_{\varepsilon_1}^0$ , comprovando a veracidade da Afirmação 1.

Para estimar  $\dim_f(A)$ , vamos adotar  $N(F, \varepsilon)$  como sendo o menor número de conjuntos de diâmetro  $\varepsilon$  ou menor capazes de cobrir  $F$ .

Primeiro, vamos fazer estimativas de coberturas para o cartesiano  $A_{\varepsilon_1}^0 \times [0, t_m]$  com base em coberturas para o conjunto  $A_{\varepsilon_1}^0$ .

Note que, se quisermos cobrir o intervalo  $[0, t_m]$  com intervalos  $I_i$  de tamanho  $\varepsilon_m$ , vamos precisar de  $\left\lceil \frac{t_m}{\varepsilon_m} \right\rceil$  intervalos  $I_i$ .

Seja  $\{I_i\}_{i=1}^{\lceil t_m/\varepsilon_m \rceil}$  uma cobertura de  $[0, t_m]$  com  $\text{diam } I_i \leq \varepsilon_m$ .

Seja  $\{U_j\}_{j=1}^{N(A_{\varepsilon_1}^0, \varepsilon_m)}$  uma cobertura minimal de  $A_{\varepsilon_1}^0$  por conjuntos tais que  $\text{diam } U_j \leq \varepsilon_m$  e tais que  $U_j \subset A$ .

Por construção,  $\bigcup_{j,i} U_j \times I_i$  é uma cobertura de  $A_{\varepsilon_1}^0 \times [0, t_m]$ . Adotando, no cartesiano, a norma da soma, temos que  $\text{diam}(U_j \times I_i) \leq 2\varepsilon_m$ .

Essa cobertura tem  $\tilde{N} := N(A_{\varepsilon_1}^0, \varepsilon_m) \cdot \left\lceil \frac{t_m}{\varepsilon_m} \right\rceil$  elementos.

Agora, note que as imagens dos conjuntos  $U_j \times I_i$  por  $S$  cobrem  $\bigcup_{s \in [0, t_m]} S_s A_{\varepsilon_1}^0$ . Isto é,

$$\bigcup_{s \in [0, t_m]} S_s A_{\varepsilon_1}^0 \subset \bigcup_{j, i} S(U_j \times I_i),$$

onde está subentendido que  $S(x, t) = S_t x$ .

Esse procedimento proporciona uma cobertura com  $\tilde{N}$  conjuntos para  $\bigcup_{s \in [0, t_m]} S_s A_{\varepsilon_1}^0$  e,

portanto, para  $A_{\varepsilon_m}^0$  (vide Afirmação 1).

Vamos, então, estimar  $\text{diam } S(U_j \times I_i)$ .

Se  $(x, t_1), (y, t_2) \in U_j \times I_i$ , então, usando a hipótese (iv), temos que

$$\begin{aligned} \|S_{t_1} x - S_{t_2} y\| &\leq L(|t_1 - t_2| + \|x - y\|)^\theta \\ &\leq L(\varepsilon_m + \varepsilon_m)^\theta \\ &= L(2\varepsilon_m)^\theta. \end{aligned}$$

Ou seja,  $\text{diam } S(U_j \times I_i) \leq L(2\varepsilon_m)^\theta$ .

Isso mostra que

$$N(A_{\varepsilon_m}^0, L(2\varepsilon_m)^\theta) \leq \tilde{N} = N(A_{\varepsilon_1}^0, \varepsilon_m) \cdot \left\lceil \frac{t_m}{\varepsilon_m} \right\rceil.$$

Agora, note que  $A_{\varepsilon_0} \subset A_{\varepsilon_m}^0 \cup B[0, \varepsilon_m]$ .

Já temos uma estimativa de cobertura para  $A_{\varepsilon_m}^0$ . Quando  $m$  é grande o bastante (grande a ponto de valer  $L(2\varepsilon_m)^\theta \geq 2\varepsilon_m \geq \text{diam } B[0, \varepsilon_m]$ ), um único conjunto de diâmetro  $L(2\varepsilon_m)^\theta$  consegue cobrir  $B[0, \varepsilon_m]$ .

Assim, para  $m$  grande o bastante, temos que

$$\begin{aligned} N(A_{\varepsilon_0}, L(2\varepsilon_m)^\theta) &\leq N(A_{\varepsilon_m}^0, L(2\varepsilon_m)^\theta) + 1 \\ &\leq N(A_{\varepsilon_1}^0, \varepsilon_m) \cdot \left\lceil \frac{t_m}{\varepsilon_m} \right\rceil + 1 \\ &\leq 3N(A_{\varepsilon_1}^0, \varepsilon_m) \cdot \frac{t_m}{\varepsilon_m}. \end{aligned}$$

A escolha da constante 3 na última passagem foi arbitrária, apenas por conveniência dos cálculos a seguir<sup>15</sup>.

---

<sup>15</sup>Fizemos isso para evitar dificuldades desnecessárias envolvendo a soma e a função teto.

Essa desigualdade nos possibilita calcular<sup>16</sup>

$$\begin{aligned}
\dim_f(A_{\varepsilon_0}) &= \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln(N(A_{\varepsilon_0}, L(2\varepsilon_m)^\theta))}{-\ln[L(2\varepsilon_m)^\theta]} \\
&\leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln \left[ 3N(A_{\varepsilon_1}^0, \varepsilon_m) \cdot \frac{t_m}{\varepsilon_m} \right]}{-\ln[L(2\varepsilon_m)^\theta]} \\
&= \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln 3 + \ln N(A_{\varepsilon_1}^0, \varepsilon_m) + \ln t_m - \ln \varepsilon_m}{-\theta \ln \varepsilon_m - \ln(L2^\theta)} \\
&= \theta^{-1} \dim_f A_{\varepsilon_1}^0 + \theta^{-1} d_0 + \theta^{-1} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Como  $A = (A \setminus A_{\varepsilon_0}) \cup A_{\varepsilon_0}$ , segue que

$$\dim_f(A) = \max\{\dim_f(A \setminus A_{\varepsilon_0}), \dim_f(A_{\varepsilon_0})\} < \infty.$$

□

**Observação 3.3.3.** Na parte final da demonstração do Teorema 3.3.2, calculamos a dimensão fractal de um conjunto por meio do limite de uma sequência de pontos, conforme permite o Teorema 3.1.16. Contudo, há uma sutileza: a sequência  $(\varepsilon_m)$  do Teorema 3.3.2 está nas condições descritas pelo Teorema 3.1.16, mas os valores de  $\varepsilon$  utilizados nos cálculos não foram  $\varepsilon_m$ , e sim  $\tilde{\varepsilon}_m := L(2\varepsilon_m)^\theta$ . Precisamos, portanto, verificar que  $(\tilde{\varepsilon}_m)$  também é tal que

$$\tilde{\varepsilon}_m > \tilde{\varepsilon}_{m+1} \geq \tilde{\alpha} \tilde{\varepsilon}_m, \quad \text{para alguma constante } \tilde{\alpha} \in (0, 1).$$

Vejamos:

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}_m &= L(2\varepsilon_m)^\theta \\
\Rightarrow \varepsilon_m &= \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_m}{L} \right)^{1/\theta} \\
\Rightarrow \varepsilon_{m+1} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{m+1}}{L} \right)^{1/\theta}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{m+1}}{L} \right)^{1/\theta} \geq \alpha \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_m}{L} \right)^{1/\theta}.$$

Portanto  $\tilde{\varepsilon}_{m+1} \geq \tilde{\alpha} \tilde{\varepsilon}_m$ , onde  $\tilde{\alpha} := \alpha^\theta \in (0, 1)$ .

---

<sup>16</sup>Utilizando o Teorema 3.1.16 para a sequência  $\tilde{\varepsilon}_m := L(2\varepsilon_m)^\theta$ . Ver Observação 3.3.3.



### 3.4 A $\varepsilon$ -Entropia de Kolmogorov

Tentativas de alargar as hipóteses do Teorema 3.2.9, a fim de aplicá-lo em um sistema específico, levaram o autor a consultar a referência [11], da qual esta seção é derivada.

Sabemos que a dimensão fractal de um conjunto totalmente limitado  $F \subset X$  é definida por  $\dim_f(F) := \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(F, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}$ , onde  $N(F, \varepsilon)$  é o número mínimo de subconjuntos de  $F$  com diâmetro não excedendo  $2\varepsilon$  necessários para cobrir  $F$ .

O valor  $\ln N(F, \varepsilon)$  por vezes é chamado de  $\varepsilon$ -entropia de Kolmogorov<sup>17</sup> e é denotado por  $H_\varepsilon(F)$ :

$$H_\varepsilon(F) := \ln N(F, \varepsilon).$$

Assim, a dimensão fractal de  $F$  pode ser reescrita como

$$\dim_f(F) = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{H_\varepsilon(F)}{\ln(1/\varepsilon)}.$$

Vejamos a relação entre dimensão finita e a  $\varepsilon$ -entropia.

**Proposição 3.4.1.** *A dimensão fractal de  $F$  é finita se, e somente se, existirem constantes  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  tais que, para todo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, valer que*

$$H_\varepsilon(F) \leq C_1 \ln \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) + C_2. \quad (3.4.1)$$

*Além disso, a menor constante  $C_1$  para a qual podemos ter essa desigualdade para todo  $\varepsilon$  em algum intervalo  $(0, \tilde{\delta})$  é justamente  $C_1 = \dim_f(F)$ .*

*Demonstração.* Se  $\dim_f(F) = D < \infty$ , então

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{H_\varepsilon(F)}{\ln(1/\varepsilon)} = D.$$

Assim, dado  $R > 0$ , existe  $\delta_R > 0$  tal que

$$\varepsilon \in (0, \delta_R) \Rightarrow \left| \frac{H_\varepsilon(F)}{\ln(1/\varepsilon)} - D \right| < R.$$

Isso significa que, para todo  $\varepsilon \in (0, \delta_R)$ , ocorre

$$H_\varepsilon(F) < (D + R) \ln \left( \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

Tomando  $R = 1$  e então definindo  $C_1 = D + 1$  e  $C_2 = 0$ , concluimos que, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno – mais precisamente, para  $\varepsilon \in (0, \delta_1)$  – vale que

$$H_\varepsilon(F) \leq C_1 \ln \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) + C_2.$$

---

<sup>17</sup>Em verdade, a definição original de Kolmogorov não usava logaritmo natural, e sim logaritmo na base 2. Isso ocorre devido às raízes do conceito no seio da Teoria da Informação, onde a preocupação está voltada para a emissão de sinais binários (base 2).

Reciprocamente, suponha que existam  $\delta > 0$  e constantes  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  tais que, para todo  $\varepsilon \in (0, \delta)$ , seja válido que  $H_\varepsilon \leq C_1 \ln(1/\varepsilon) + C_2$ .

Isso significa que

$$\begin{aligned} \dim_f(F) &= \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{H_\varepsilon(F)}{\ln(1/\varepsilon)} \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ C_1 + \frac{C_2}{\ln(1/\varepsilon)} \right] \\ &= C_1 \\ &< \infty. \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

A igualdade ocorre justamente quando  $C_1 = \dim_f(F)$ . Além disso, não é possível escolher  $C_1 < \dim_f(F)$  de modo que a desigualdade (3.4.1) ocorra para todo  $\varepsilon$  em algum intervalo  $(0, \tilde{\delta})$ , afinal isso iria contrariar a desigualdade (3.4.2).  $\square$

Vamos usar o conceito de  $\varepsilon$ -entropia de Kolmogorov para apresentar uma série de resultados relacionados com o Teorema 3.2.9.

**Teorema 3.4.2.** *Seja  $X$  um espaço de Banach e  $M \subset X$  fechado, limitado e não-vazio. Suponha que exista  $W : M \rightarrow X$  tal que*

(i)  $M \subset W(M)$ .

(ii) Existe  $L \geq 0$  tal que

$$\|Wx - Wy\| \leq L \|x - y\|, \quad \forall x, y \in M.$$

(iii) Existem pseudométricas  $\rho_1$  e  $\rho_2$  em  $X$  tais que

$$\|Wx - Wy\| \leq g(\|x - y\|) + h \left[ \sqrt{\rho_1(x, y)^2 + \rho_2(Wx, Wy)^2} \right], \quad \forall x, y \in M,$$

onde  $g, h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  são funções contínuas e crescentes tais que

- $g(0) = 0$ .
- $g(s) < s$  para todo  $s > 0$ .
- $s - g(s)$  é crescente.
- $h(0) = 0$ .
- $h(s)$  é estritamente crescente em algum intervalo  $[0, s_0]$ .

(Isso ocorre, em particular, quando  $g(s) = \gamma s$  para alguma constante  $\gamma < 1$  e  $h \equiv \text{Id.}$ )

(iv) Para todo  $q > 0$  e para qualquer conjunto fechado e limitado  $B \subset M$ , o valor  $m(B, q)$  é finito, onde

$$m(B, q) := \max \# \{x_i \in B; \rho_1(x_i, x_j)^2 + \rho_2(x_i, x_j)^2 > q^2 \forall i \neq j\}.$$

(Isso ocorre, em particular, quando  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são seminormas compactas)

Nessas condições,  $M$  é compacto e existe  $\varepsilon_0 \in (0, 1)$  tal que, para todo  $\varepsilon < \varepsilon_0$  e para todo  $\delta \in (0, 1)$ , vale que

$$H_\varepsilon(M) \leq \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \frac{\ln m(g_\delta^{-1}(s), q(s))}{s - g_\delta(s)} ds + H_{g_\delta(\varepsilon_0)}(M),$$

onde

- $g_\delta(s) := \frac{1 - \delta}{2}g(2s) + \delta s$ .
- $q(s) := \frac{1}{2}h^{-1}[\delta[2s - g(2s)]]$ ,  $s \in (0, \varepsilon_0)$ .
- $m(r, q) := \sup\{m(B, q); B \subset M \text{ e } \text{diam}(B) \leq 2r\}$ .

*Demonstração.* Para uso futuro, note que

$$m(B, q) := \max \#\{x_i \in B; \rho_1(x_i, x_j)^2 + \rho_2(Wx_i, Wx_j)^2 > q^2 \forall i \neq j\}$$

é tal que  $m(B, q)$  é decrescente em  $q$  e crescente em relação ao diâmetro de  $B$ .

Por isso,

$$m(r, q) := \sup\{m(B, q); B \subset M \text{ e } \text{diam}(B) \leq 2r\}$$

é decrescente em  $q$  e crescente em  $r$ .

Isso significa que

$$r < R \text{ e } q < Q \Rightarrow m(r, Q) \leq m(R, q). \quad (3.4.3)$$

Também para uso futuro, note que

$$\sqrt{\rho_1(x, y)^2 + \rho_2(Wx, Wy)^2}$$

define uma pseudométrica e, em particular, satisfaz a desigualdade triangular.

Passemos à demonstração do teorema.

A compacidade de  $M$  é garantida pelo Lema 3.2.5.

Seja  $\{F_i\}_{i=1}^{N(M, \varepsilon)}$  uma cobertura minimal de  $M$  por conjuntos fechados tais que  $F_i \subset M$  e  $\text{diam } F_i < 2\varepsilon$ .

Seja  $\{x_j^i\}_{j=1}^{n_i} \subset F_i$  um conjunto maximal tal que

$$\rho_1(x_i, x_j)^2 + \rho_2(Wx_i, Wx_j)^2 > q^2, \quad \forall i \neq j.$$

Pela hipótese (iv), esses conjuntos são finitos. Por definição,  $n_i \leq m(\varepsilon, q)$ .

Além disso, vale que

$$F_i \subset \bigcup_{j=1}^{n_i} B_j^i, \quad B_j^i := \{v \in F_i; \rho_1(v, x_j^i)^2 + \rho_2(Wv, Wx_j^i)^2 \leq q^2\}.$$

Logo,

$$W(M) \subset \bigcup_{i=1}^{N(M, \varepsilon)} \bigcup_{j=1}^{n_i} W(B_j^i).$$

Note que essa união possui  $n_i \cdot N(M, \varepsilon)$  elementos. Esse número é menor do que ou igual a  $n(\varepsilon, q) \cdot N(M, \varepsilon)$ .

Vamos estimar o diâmetro de  $W(B_j^i)$ . Se  $x, y \in B_j^i \subset F_i$ , temos que

$$\begin{aligned} \|Wx - Wy\| &\leq g(\|x - y\|) + h \left[ \sqrt{\rho_1(x, y)^2 + \rho_2(Wx, Wy)^2} \right] \\ &\leq g(2\varepsilon) + h \left[ \sqrt{\rho_1(x, x_j^i)^2 + \rho_1(y, x_j^i)^2 + \rho_2(Wx, Wx_j^i)^2 + \rho_2(Wy, Wx_j^i)^2} \right] \\ &\leq g(2\varepsilon) + h(\sqrt{2}q). \end{aligned}$$

Isso mostra que  $\text{diam}[W(B_j^i)] \leq g(2\varepsilon) + h(\sqrt{2}q)$ . Portanto

$$N\left(W(M), \frac{1}{2}[g(2\varepsilon) + h(\sqrt{2}q)]\right) \leq m(\varepsilon, q) \cdot N(M, \varepsilon).$$

Vamos escolher  $q$  de forma conveniente, dependendo de  $\varepsilon$ , estipulando

$$q(\varepsilon) := \frac{1}{\sqrt{2}}h^{-1} \left[ \delta[2\varepsilon - g(2\varepsilon)] \right].$$

Isso nos dá

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[g(2\varepsilon) + h(\sqrt{2}q)] &= \frac{1}{2}[g(2\varepsilon) + \delta[2\varepsilon - g(2\varepsilon)]] \\ &= \frac{1 - \delta}{2}g(2\varepsilon) + \delta\varepsilon \\ &= g_\delta(\varepsilon) \end{aligned}$$

Ou seja,

$$N(W(M), g_\delta(\varepsilon)) \leq m(\varepsilon, q(\varepsilon)) \cdot N(M, \varepsilon).$$

Tomando logaritmos e usando a hipótese de que  $M \subset W(M)$ , temos

$$\ln N(M, g_\delta(\varepsilon)) \leq \ln m(\varepsilon, q(\varepsilon)) + \ln N(M, \varepsilon). \quad (3.4.4)$$

Agora, vamos definir a sequência  $\varepsilon_{n+1} := g_\delta(\varepsilon_n)$ .

Como  $g(s) < s$ , segue que

$$\begin{aligned} &g(2\varepsilon_n) < 2\varepsilon_n \\ \Rightarrow &(1 - \delta)g(2\varepsilon_n) < 2(1 - \delta)\varepsilon_n \\ \Rightarrow &\frac{(1 - \delta)}{2}g(2\varepsilon_n) < \varepsilon_n - \delta\varepsilon_n \\ \Rightarrow &\delta\varepsilon_n + \frac{(1 - \delta)}{2}g(2\varepsilon_n) < \varepsilon_n \\ \Rightarrow &\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Além disso, como  $g_\delta$  é contínua e  $g_\delta(0) = 0$ , segue que  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ .

Então, aplicando reiteradamente a relação (3.4.4), obtemos

$$\ln N(M, \varepsilon_n) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \ln m(\varepsilon_k, q(\varepsilon_k)) + \ln N(M, \varepsilon_0). \quad (3.4.5)$$

Queremos estimar os termos no somatório.

Para isso, note que, dado  $\varepsilon > 0$  com  $\varepsilon_{k+1} = g_\delta(\varepsilon_k) \leq \varepsilon < \varepsilon_k$ , temos  $\varepsilon_k \leq g_\delta^{-1}(\varepsilon)$  e  $q(\varepsilon) < q(\varepsilon_k)$ . Então, pela relação (3.4.3), temos que

$$\ln m[\varepsilon_k, q(\varepsilon_k)] \leq \ln m[g_\delta^{-1}(\varepsilon), q(\varepsilon)], \quad \forall \varepsilon \in [\varepsilon_{k+1}, \varepsilon_k].$$

Essa relação vale para todo  $\varepsilon \in [\varepsilon_{k+1}, \varepsilon_k]$ , de modo que podemos integrar a função nesse intervalo e dividir pelo comprimento desse intervalo sem afetar a desigualdade:

$$\ln m[\varepsilon_k, q(\varepsilon_k)] \leq \int_{\varepsilon_{k+1}}^{\varepsilon_k} \frac{\ln m[g_\delta^{-1}(\varepsilon), q(\varepsilon)]}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}} d\varepsilon.$$

Observe que  $\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k - g_\delta(\varepsilon_k)$  e que  $x - g_\delta(x)$  é uma função crescente. Como  $\varepsilon < \varepsilon_k$ , segue que  $\varepsilon - \varepsilon_{k+1} \leq \varepsilon - g_\delta(\varepsilon)$ . Assim, também podemos estimar

$$\ln m[\varepsilon_k, q(\varepsilon_k)] \leq \int_{\varepsilon_{k+1}}^{\varepsilon_k} \frac{\ln m[g_\delta^{-1}(\varepsilon), q(\varepsilon)]}{\varepsilon - g_\delta(\varepsilon)} d\varepsilon.$$

Aplicando esse resultado e a relação (3.4.5), ficamos com

$$\begin{aligned} \ln N[M, g_\delta^n(\varepsilon_0)] &= \ln N(M, \varepsilon_n) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \ln m[\varepsilon_k, q(\varepsilon_k)] + \ln N(M, \varepsilon_0) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\varepsilon_{k+1}}^{\varepsilon_k} \frac{\ln m[g_\delta^{-1}(\varepsilon), q(\varepsilon)]}{\varepsilon - g_\delta(\varepsilon)} d\varepsilon + \ln N(M, \varepsilon_0) \\ &= \int_{\varepsilon_n = g_\delta^n(\varepsilon_0)}^{\varepsilon_0} \frac{\ln m[g_\delta^{-1}(\varepsilon), q(\varepsilon)]}{\varepsilon - g_\delta(\varepsilon)} d\varepsilon + \ln N(M, \varepsilon_0). \end{aligned}$$

Veja que<sup>18</sup>, dado  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , existem  $\tilde{\varepsilon}_0 \in (\varepsilon_1, \varepsilon_0]$  e  $n \in \mathbb{N}$  tais que  $\varepsilon = g_\delta^n(\tilde{\varepsilon}_0)$ . Desse modo, podemos concluir que

$$\ln N(M, \varepsilon) \leq \int_{\varepsilon}^{\tilde{\varepsilon}_0} \frac{\ln m[g_\delta^{-1}(s), q(s)]}{s - g_\delta(s)} ds + \ln N(M, \tilde{\varepsilon}_0).$$

A função sob o sinal da integral é não-negativa e  $\tilde{\varepsilon}_0 \leq \varepsilon_0$ , então podemos aumentar o intervalo de integração sem afetar a desigualdade. Além disso, como  $g_\delta(\varepsilon_0) = \varepsilon_1 < \tilde{\varepsilon}_0$ ,

---

<sup>18</sup>De fato, se  $E = (\varepsilon_1, \varepsilon_0]$ , então

$$\begin{aligned} g_\delta^0(E) &= (\varepsilon_1, \varepsilon_0], \\ g_\delta^1(E) &= (\varepsilon_2, \varepsilon_1], \\ g_\delta^2(E) &= (\varepsilon_3, \varepsilon_2], \\ &\vdots \\ g_\delta^n(E) &= (\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n], \\ \Rightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} g_\delta^n(E) &= (0, \varepsilon_0]. \end{aligned}$$

segue que  $\ln N(M, \tilde{\varepsilon}_0) \leq \ln N(M, g_\delta(\varepsilon_0))$ . Portanto,

$$\ln N(M, \varepsilon) \leq \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \frac{\ln m[g_\delta^{-1}(s), q(s)]}{s - g_\delta(s)} ds + \ln N(M, g_\delta(\varepsilon_0)).$$

Ou seja,

$$H_\varepsilon(M) \leq \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \frac{\ln m(g_\delta^{-1}(s), q(s))}{s - g_\delta(s)} ds + H_{g_\delta(\varepsilon_0)}(M).$$

Isso era o que queríamos demonstrar. □

**Proposição 3.4.3.** *Em adição às hipóteses do Teorema 3.4.2, suponha que*

- (i)  $m(r, q) \leq m_0(r/q)$ , onde  $m_0$  é uma função contínua e crescente.
- (ii) Existe  $\gamma < 1$  tal que  $g(s) \leq \gamma s$  para todo  $s$  em algum intervalo  $(0, s_1)$ .

Nessas condições, para  $\varepsilon_0$  suficientemente pequeno, vale a estimativa

$$H_\varepsilon(M) \leq c_0 \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \frac{1}{s} \ln m_0 \left( \frac{c_1 s}{h^{-1}[2\delta(1-\gamma)s]} \right) ds + H_{g_\delta(\varepsilon_0)}(M), \quad (3.4.6)$$

para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  e para todo  $\delta \in (0, 1)$ , onde  $c_0$  e  $c_1$  são constantes positivas que não dependem de  $\varepsilon$ .

*Demonstração.* Este resultado é uma aplicação direta do Teorema 3.4.2 quando percebermos a validade das seguintes relações:

- (a)  $s - g_\delta(s) \geq (1 - \delta)(1 - \gamma)s$  para todo  $s$  suficientemente pequeno.
- (b)  $g_\delta^{-1}(s) \leq \frac{s}{\delta + (1 - \delta)\gamma}$  para todo  $s$  suficientemente pequeno.
- (c)  $q(s) \geq \frac{1}{2}h^{-1}[2\delta(1 - \gamma)s]$  para todo  $s$  suficientemente pequeno.

Essas relações serão provadas logo a seguir. Antes, note que, se elas forem válidas, então, pelo Teorema 3.4.2 e pela hipótese (i), temos que

$$\begin{aligned} H_\varepsilon(M) &\leq \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \frac{\ln m(g_\delta^{-1}(s), q(s))}{s - g_\delta(s)} ds + H_{g_\delta(\varepsilon_0)}(M) \\ &\leq \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \frac{\ln m_0 \left( \frac{g_\delta^{-1}(s)}{q(s)} \right)}{s - g_\delta(s)} ds + H_{g_\delta(\varepsilon_0)}(M) \\ &\leq \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \frac{\ln m_0 \left[ \frac{s}{\delta + (1 - \delta)\gamma} \cdot \frac{2}{h^{-1}[2\delta(1 - \gamma)s]} \right]}{(1 - \delta)(1 - \gamma)s} ds + H_{g_\delta(\varepsilon_0)}(M) \\ &= c_0 \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \frac{1}{s} \ln m_0 \left( \frac{c_1 s}{h^{-1}[2\delta(1 - \gamma)s]} \right) ds + H_{g_\delta(\varepsilon_0)}(M), \end{aligned}$$

onde  $c_0 := \frac{1}{(1-\delta)(1-\gamma)}$  e  $c_1 := \frac{2}{\delta + (1-\delta)\gamma}$ .

Vamos, então, mostrar a validade das relações (a)-(c).

(a) Para todo  $s \in \left(0, \frac{s_1}{2}\right)$ , vale que

$$\begin{aligned}
& \frac{g(2s)}{2s} \leq \gamma \\
\Rightarrow & 1 - \frac{g(2s)}{(2s)} \geq 1 - \gamma \\
\Rightarrow & (1-\delta) - \frac{(1-\delta)g(2s)}{2s} \geq (1-\delta)(1-\gamma) \\
\Rightarrow & s - \delta s - \frac{(1-\delta)g(2s)}{2} \geq (1-\delta)(1-\gamma)s \\
\Rightarrow & s - \left[ \frac{(1-\delta)}{2}g(2s) + \delta s \right] \geq (1-\delta)(1-\gamma)s \\
\Rightarrow & s - g_\delta(s) \geq (1-\delta)(1-\gamma)s.
\end{aligned}$$

(b) Pelo item (a), temos, para todo  $s \in \left(0, \frac{s_1}{2}\right)$ , que

$$\begin{aligned}
g_\delta(s) & \geq s - (1-\delta)(1-\gamma)s \\
& = [1 - (1-\delta)(1-\gamma)]s \\
& = [1 - 1 + \gamma + \delta - \delta\gamma]s \\
& = [\delta + (1-\delta)\gamma]s.
\end{aligned}$$

A inversa da função  $f(s) := [\delta + (1-\delta)\gamma]s$  é justamente  $f^{-1}(s) = \frac{s}{\delta + (1-\delta)\gamma}$ .

Como  $g_\delta(s) \geq f(s)$ , segue que  $g_\delta^{-1}(s) \leq f^{-1}(s)$ . Isso mostra que  $g_\delta^{-1}(s) \leq \frac{s}{\delta + (1-\delta)\gamma}$  para todo  $s$  suficientemente pequeno.

(c) Novamente, para todo  $s \in \left(0, \frac{s_1}{2}\right)$ , temos que

$$\begin{aligned}
& \frac{g(2s)}{2s} \leq \gamma \\
\Rightarrow & 1 - \frac{g(2s)}{(2s)} \geq 1 - \gamma \\
\Rightarrow & 2s - g(2s) \geq 2(1-\gamma)s \\
\Rightarrow & \delta[2s - g(2s)] \geq 2\delta(1-\gamma)s \\
\Rightarrow & \frac{1}{2}h^{-1}[\delta[2s - g(2s)]] \geq \frac{1}{2}h^{-1}[2\delta(1-\gamma)s] \\
\Rightarrow & q(s) \geq \frac{1}{2}h^{-1}[2\delta(1-\gamma)s].
\end{aligned}$$

Isso conclui a demonstração. □

**Teorema 3.4.4.** *Suponha que estejamos nas condições do Teorema 3.4.2 e da Proposição 3.4.3.*

*Se  $h$  for uma função linear  $h(s) = h_0 s$ , então a dimensão fractal de  $M$  é finita.*

*Demonstração.* Note que, se  $h(s) = h_0 s$ , então  $h^{-1}(s) = h_0^{-1} s$ . Portanto,

$$h^{-1}[2\delta(1 - \gamma)s] = \frac{1}{h_0} 2\delta(1 - \gamma)s.$$

Assim, com vistas a substituir na estimativa (3.4.6), podemos conferir que vale que

$$\begin{aligned} \ln m_0 \left( \frac{c_1 s}{h^{-1}[2\delta(1 - \gamma)s]} \right) &= \ln m_0 \left( \frac{c_1 s}{\frac{1}{h_0} 2\delta(1 - \gamma)s} \right) \\ &= \ln m_0 \left( \frac{c_1 h_0}{2\delta(1 - \gamma)} \right), \end{aligned}$$

sendo que este valor é uma constante (não depende de  $s$ ).

Com base nisso, a estimativa (3.4.6) fornece

$$\begin{aligned} H_\varepsilon(M) &\leq c_0 \ln m_0 \left( \frac{c_1 h_0}{2\delta(1 - \gamma)} \right) \cdot \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \frac{1}{s} ds + H_{g_\delta(\varepsilon_0)}(M) \\ &\leq C_1 \ln \frac{1}{\varepsilon} + C_2, \end{aligned}$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes.

Pela Proposição 3.4.1, isso implica que  $\dim_f M < \infty$ . □

Dada a importância da função  $m(r, q)$  para estimativas envolvendo a  $\varepsilon$ -entropia, vamos apresentar alguns resultados que ajudam na obtenção de cotas superiores para essa função.

**Observação 3.4.5.** *Tanto o valor  $N(M, \varepsilon)$  quanto o valor  $H_\varepsilon(M)$  dependem, naturalmente, do espaço em que  $M$  está inserido. Quando quisermos destacar em que espaço  $Y$  esses valores estão sendo calculados, vamos indicá-los por  $N^Y(M, \varepsilon)$  e por  $H_\varepsilon^Y(M)$ .*

**Proposição 3.4.6.** *Em adição às hipóteses do Teorema 3.4.2, suponha que as pseudométricas  $\rho_1$  e  $\rho_2$  sejam na forma*

$$\rho_1(x, y) = \|R_1(x - y)\|, \quad \rho_2(x, y) = \|R_2(x - y)\|,$$

*com  $R_1$  e  $R_2$  sendo operadores lineares compactos<sup>19</sup> em  $X$ .*

*Então, para todo conjunto fechado  $F \subset M$ , vale que*

$$\ln m(F, q) \leq H_{\frac{q}{2}}^{X \times X}(\tilde{F}),$$

*onde  $\tilde{F} := \{(R_1 x, R_2 W x); x \in F\} \subset F \times F$ .*

*Também vale que*

$$\ln m(r, q) \leq m_0(r/q) := H_{\frac{q}{4\sqrt{2}r}}^{X_q}(R_1 B) + H_{\frac{q}{4\sqrt{2}Lr}}^X(R_2 B),$$

*onde  $B \subset X$  é uma bola de raio 1.*

---

<sup>19</sup>A compacidade dos operadores garante que  $M(B, r)$  é finito para todo conjunto limitado  $B \subset M$ .



*Demonstração.* Note que, se  $x, y \in M$ , então

$$\begin{aligned}\sqrt{\rho_1(x, y)^2 + \rho_2(Wx, Wy)^2} &= \sqrt{\|R_1(x - y)\|^2 + \|R_2(Wx - Wy)\|^2} \\ &= \|(R_1x, R_2y) - (R_1Wx, R_2Wy)\|_{X \times X}.\end{aligned}$$

Assim, dado um conjunto fechado  $F \subset M$ , vale que

$$\begin{aligned}m(F, q) &= \max \#\{x_i \in F; \rho_1(x_i, x_j)^2 + \rho_2(Wx_i, Wx_j)^2 > q^2, i \neq j\} \\ &= \max \#\{w_i \in \tilde{F}; \|w_i - w_j\|_{X \times X} > q, i \neq j\}.\end{aligned}$$

⊢ Afirmação 1:  $\ln m(F, q) \leq H_{\frac{q}{2}}^{X \times X}(\tilde{F})$ .

Com efeito, se existem  $m(F, q)$  pontos em  $F$  tais que

$$\sqrt{\rho_1(x, y)^2 + \rho_2(Wx, Wy)^2} > q,$$

então, se tentarmos cobrir  $\tilde{F}$  com conjuntos  $U_i$  tais que

$$\|(R_1x, R_2Wy) - (R_1Wx, R_2Wy)\|_{X \times X} \leq q, \quad \forall x, y \in U_i,$$

vamos perceber que cada um desses conjuntos  $U_i$  conseguem cobrir no máximo um único daqueles  $m(F, q)$  pontos. Assim, vamos precisar de pelo menos  $m(F, q)$  conjuntos  $U_i$  para cobrir  $\tilde{F}$ .

Por isso, é fato que

$$m(F, q) \leq N^{X \times X}(\tilde{F}, q/2),$$

onde  $N^{X \times X}(\tilde{F}, q/2)$  é o número mínimo de conjuntos fechados contidos em  $\tilde{F}$ , com diâmetro não excedendo  $q$ , necessários para cobrir  $\tilde{F}$ .

Tomando logaritmos, obtemos a validade da Afirmação 1.

⊢ Afirmação 2:  $\ln m(r, q) \leq H_{\frac{q}{4\sqrt{2}r}}^X(R_1B) + H_{\frac{q}{4\sqrt{2}Lr}}^X(R_2B)$ .

Seja  $B_{\text{diam } F}^1$  uma bola centrada em  $F$  com raio valendo  $\text{diam } F$  (ou seja, essa bola cobre inteiramente  $F$ ). Seja  $B_{L \text{ diam } F}^2$  uma bola centrada em  $F$  com diâmetro valendo  $L \text{ diam } F$  (ou seja, essa bola cobre inteiramente  $WF$ , pois  $W$  tem constante Lipschitz  $L$ ). Seja  $B_\theta^0 \subset X$  a bola de centro 0 e raio  $\theta$ .

Como  $\tilde{F} = R_1F \times R_2WF$ , segue que

$$\tilde{F} \subset R_1B_{\text{diam } F}^1 \times R_2B_{L \text{ diam } F}^2.$$

Então, por translações, pela linearidade dos operadores e pelo raciocínio feito na Afirmação 1, temos que

$$\begin{aligned}m(F, q) &\leq \max \#\{w_i \in R_1B_{\text{diam } F}^2 \times R_2B_{L \text{ diam } F}^2; \|w_i - w_j\| > q, i \neq j\} \\ &= \max \#\left\{w_i \in R_1B_1^0 \times R_2B_L^0; \|w_i - w_j\| > \frac{q}{\text{diam } F}, i \neq j\right\} \\ \Rightarrow m(r, q) &\leq \max \#\left\{w_i \in R_1B_1^0 \times R_2B_L^0; \|w_i - w_j\| > \frac{q}{2r}, i \neq j\right\} \\ \Rightarrow m(r, q) &\leq N^{X \times X}\left(R_1B_1^0 \times R_2B_L^0, \frac{q}{4r}\right).\end{aligned}$$

Ora, mas<sup>20</sup>

$$N^{X \times X} \left( R_1 B_1^0 \times R_2 B_L^0, \frac{q}{4r} \right) \leq N^X \left( R_1 B_1^0, \frac{q}{4r\sqrt{2}} \right) \cdot N^X \left( R_2 B_1^0, \frac{q}{4rL\sqrt{2}} \right).$$

Portanto

$$\begin{aligned} m(r, q) &\leq N^X \left( R_1 B_1^0, \frac{q}{4r\sqrt{2}} \right) \cdot N^X \left( R_2 B_1^0, \frac{q}{4rL\sqrt{2}} \right) \\ \Rightarrow \ln m(r, q) &\leq \ln N^X \left( R_1 B_1^0, \frac{q}{4r\sqrt{2}} \right) + \ln N^X \left( R_2 B_1^0, \frac{q}{4rL\sqrt{2}} \right) \\ &= H_{\frac{q}{4\sqrt{2}r}}^X(R_1 B) + H_{\frac{q}{4\sqrt{2}Lr}}^X(R_2 B). \end{aligned}$$

□

**Corolário 3.4.7.** *Nas hipóteses da Proposição 3.4.6, se  $R_1$  e  $R_2$  forem operadores de dimensão finita, então, para todo  $r \geq q > 0$ , vale que*

$$\ln m(r, q) \leq (\dim R_1 + \dim R_2) \ln(r/q) + C,$$

onde  $C$  é uma constante independente de  $r$  e de  $q$ .

*Demonstração.* Como os operadores  $R_1$  e  $R_2$  são de dimensão finita, segue que a imagem de qualquer conjunto por  $R_i$  vai estar contido em um espaço de dimensão  $\dim R_i$  e, portanto, terá dimensão fractal limitada superiormente por  $\dim R_i$ .

Pela Proposição 3.4.1, existem constantes  $C_1, C_2, K_1, K_2$  tais que

$$H_{\frac{q}{4\sqrt{2}r}}^X(R_1 B) \leq C_1 \ln \left( \frac{4\sqrt{2}r}{q} \right) + K_1, \quad \forall r \geq q > 0,$$

$$H_{\frac{q}{4\sqrt{2}Lr}}^X(R_2 B) \leq C_2 \ln \left( \frac{4\sqrt{2}Lr}{q} \right) + K_2, \quad \forall r \geq q > 0.$$

---

<sup>20</sup>Suponha que:

$$R_1 B_1^0 \subset \bigcup_{i=1}^{N_1} U_i^1, \text{ com } \text{diam } U_i^1 \leq \frac{q}{2r\sqrt{2}}.$$

$$R_2 B_1^0 \subset \bigcup_{j=2}^{N_2} U_j^2, \text{ com } \text{diam } U_j^2 \leq \frac{q}{2rL\sqrt{2}}.$$

Pela linearidade do operador, temos que  $R[B(0, L)] = R[L \cdot B_1^0] = L \cdot R[B_1^0]$ . Por isso, a segunda hipótese garante que existem  $\tilde{U}_j^2 = L \cdot U_j^2$  tais que  $R_2 B_L^0 \subset \bigcup_{j=1}^{N_2} \tilde{U}_j^2$ , com  $\text{diam } \tilde{U}_j^2 \leq \frac{q}{2r\sqrt{2}}$ .

Assim, os conjuntos  $U_i^1 \times \tilde{U}_j^2$  conseguem cobrir  $R_1 B_1^0 \times R_2 B_L^0$ . Existem  $N_1 \cdot N_2$  desses conjuntos. Os diâmetros deles não excedem

$$\sqrt{\left( \frac{q}{2r\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{q}{2r\sqrt{2}} \right)^2} = \frac{q}{2r}.$$

Isso justifica que  $N^{X \times X} \left( R_1 B_1^0 \times R_2 B_L^0, \frac{q}{4r} \right) \leq N^X \left( R_1 B_1^0, \frac{q}{4r\sqrt{2}} \right) \cdot N^X \left( R_2 B_1^0, \frac{q}{4rL\sqrt{2}} \right)$ .

A Proposição 3.4.1 também garante que podemos considerar  $C_1 = \dim_f(R_1B)$  e  $C_2 = \dim_f(R_2B)$ . Rearranjando as constantes, temos que existem  $\tilde{K}_1$  e  $\tilde{K}_2$  tais que

$$H_{\frac{q}{4\sqrt{2}r}}^X(R_1B) \leq \dim_f(R_1B) \ln\left(\frac{r}{q}\right) + \tilde{K}_1, \quad \forall r \geq q > 0,$$

$$H_{\frac{q}{4\sqrt{2}Lr}}^X(R_2B) \leq \dim_f(R_2B) \ln\left(\frac{r}{q}\right) + \tilde{K}_2, \quad \forall r \geq q > 0.$$

Somando as desigualdades e definindo  $C := \tilde{K}_1 + \tilde{K}_2$ , obtemos

$$H_{\frac{q}{4\sqrt{2}r}}^X(R_1B) + H_{\frac{q}{4\sqrt{2}Lr}}^X(R_2B) \leq [\dim_f(R_1B) + \dim_f(R_2B)] \ln(r/q) + C.$$

Usando que  $\dim_f(R_iB) \leq \dim R_i$  e aplicando a Proposição 3.4.6, concluímos que

$$\begin{aligned} \ln m(r, q) &\leq H_{\frac{q}{4\sqrt{2}r}}^X(R_1B) + H_{\frac{q}{4\sqrt{2}Lr}}^X(R_2B) \\ &\leq (\dim R_1 + \dim R_2) \ln(r/q) + C, \quad \forall r \geq q > 0. \end{aligned}$$

□

**Observação 3.4.8.** Note que o Corolário 3.4.7 garante que, sob suas hipóteses, a função  $m_0(r/q)$  da Proposição 3.4.3 pode ser tomada na forma  $\ln m_0(r, q) = A \ln(r/q) + B$ , com  $A$  e  $B$  sendo números positivos constantes.

**Teorema 3.4.9.** Suponha que estejamos nas condições do Teorema 3.4.2 e da Proposição 3.4.3, com

$$\rho_1(x, y) = \|R_1(x - y)\|, \quad \rho_2(x, y) = \|R_2(x - y)\|,$$

onde  $R_1$  e  $R_2$  são operadores lineares compactos de dimensão finita.

Suponha que

$$h(s) = h_0 s^\beta, \quad \text{com } \beta \in (0, 1].$$

Então existem constantes  $C_0$ ,  $C_1$  e  $C_2$ , possivelmente dependentes de  $\beta$ , tais que, para todo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, vale a estimativa

$$H_\varepsilon(M) \leq C_0 \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) \left[\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]^2 + C_1 \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + C_2, \quad 0 < \beta \leq 1.$$

Note que isso garante dimensão fractal finita para  $M$  apenas no caso  $\beta = 1$ .

*Demonstração.* Conforme Observação 3.4.8, existem  $A, B \in \mathbb{R}_+$  constantes tais que existe uma função  $m_0$  nos moldes da Proposição 3.4.3 satisfazendo

$$\ln m_0(r/q) = A \ln(r/q) + B.$$

Observe que, se  $h(s) = h_0 s^\beta$ , então

$$h^{-1}(s) = \left(\frac{s}{h_0}\right)^{1/\beta}.$$

No que segue,  $C$ ,  $C_0$ ,  $C_1$  e  $C_2$  serão constantes implicitamente definidas no contexto das contas.

Pela Proposição 3.4.3, temos

$$\begin{aligned}
H_\varepsilon(M) &\leq c_0 \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \frac{1}{s} \ln m_0 \left( \frac{c_1 s}{h^{-1}[2\delta(1-\gamma)s]} \right) ds + H_{g_\delta(\varepsilon_0)}(M) \\
&= c_0 \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \frac{1}{s} \left[ A \ln \left( \frac{c_1 s}{h^{-1}[2\delta(1-\gamma)s]} \right) + B \right] ds + H_{g_\delta(\varepsilon_0)}(M) \\
&= c_0 \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \frac{1}{s} \left[ A \ln \left( \frac{h_0^{1/\beta} c_1 s}{[2\delta(1-\gamma)s]^{1/\beta}} \right) + B \right] ds + H_{g_\delta(\varepsilon_0)}(M) \\
&= c_0 \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \frac{1}{s} \left[ A \ln \left( C s^{(1-\frac{1}{\beta})} \right) + B \right] ds + H_{g_\delta(\varepsilon_0)}(M) \\
&= c_0 \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \frac{1}{s} \left[ A \ln \left( C s^{-(\frac{1}{\beta}-1)} \right) + B \right] ds + H_{g_\delta(\varepsilon_0)}(M) \\
&= c_0 \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \frac{1}{s} \left[ A \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right) \ln \left( \frac{1}{s} \right) + A \ln(C) + B \right] ds + H_{g_\delta(\varepsilon_0)}(M) \\
&= c_0 \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \left[ A \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right) \frac{\ln(1/s)}{s} + \frac{A \ln(C) + B}{s} \right] ds + H_{g_\delta(\varepsilon_0)}(M) \\
&= c_0 \left[ A \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right) \frac{-[\ln(1/s)]^2}{2} + [A \ln(C) + B] \ln(s) \right]_\varepsilon^{\varepsilon_0} + H_{g_\delta(\varepsilon_0)}(M) \\
&= C_0 \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right) \left[ \ln \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \right]^2 + C_1 \ln \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) + C_2.
\end{aligned}$$

□

### 3.5 Uma Interpretação Física para a Dimensão Fractal Finita do Atrator

*“A continuidade é uma técnica matemática para aproximar coisas de grão muito fino. O mundo é sutilmente discreto, não contínuo.”*

---

— Carlo Rovelli, *A Ordem do Tempo*, [40].

Este apêndice procura responder alguns anseios de curiosidade do autor a respeito do mundo físico e da relação entre as ciências físicas, as ciências experimentais e a matemática. Por essa razão, trata-se de uma tentativa de *interpretação*, e não a defesa de uma *teoria* ou, menos ainda, a demonstração de um *teorema*. A escolha de apresentar essa série de reflexões se deve à expectativa do autor de que alguns leitores possam vir a ter as mesmas dúvidas que o motivaram a se aprofundar nos estudos a respeito de dimensionalidade.

As dúvidas centrais são estas: considerando o caráter abstrato do espaço de fases, qual é o significado da finitude dimensional do atrator? Dado um sistema dissipativo com significado físico bem estabelecido, por que esperar que a dimensão do atrator tenha dimensão finita?

Para tentar responder a essas questões, convém darmos um passo para trás e investigar por que, em primeiro lugar, é inevitável a necessidade de trabalharmos em espaços de dimensão infinita. Para entender isso, recorreremos à explicação simples, porém lúcida e certa, de I. M. Gel’Fand ([19]):

Uma importante motivação no desenvolvimento da Álgebra Linear e da Geometria em  $n$ -dimensões se deu por problemas relativos a pequenas oscilações em sistemas elásticos.

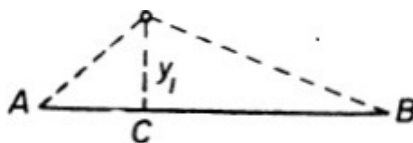


Figura 3.1: Corda AB com peso atracado no ponto C. (Fonte: [19])

Vamos considerar um exemplo clássico desse tipo de problema (Figura 3.1). Seja AB um fio flexível com extremidades fixadas nos pontos A e B. Vamos assumir que um objeto esteja atracado em um certo ponto C da corda. Se o objeto é movido da posição de equilíbrio, ele começa a oscilar com uma certa frequência  $\omega$ , a qual pode ser calculada quando conhecemos a tensão do fio, a massa do objeto e sua posição. O estado do sistema em cada instante é dado por um único número,  $y_1$ , que é o deslocamento do objeto em relação à posição de equilíbrio.

Agora, vamos considerar  $n$  objetos no fio  $AB$ , cada um preso em um ponto  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . O fio vai ser imaginado como sendo desprovido de massa. Isso significa que a massa do fio é tão pequena, quando comparada com a massa dos objetos, que sua magnitude pode ser negligenciada. O estado de tal sistema em cada instante é dado por  $n$  números,  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , que representam os deslocamentos de cada objeto em relação aos pontos de equilíbrio. A coleção dos números  $y_1, y_2, \dots, y_n$  pode ser considerada (e isso se revela útil em muitos aspectos) como um vetor  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  em um espaço  $n$ -dimensional.

A investigação das pequenas oscilações que ocorrem sob essas circunstâncias revela-se intimamente ligada aos fatos fundamentais da geometria de espaços  $n$ -dimensionais. Podemos mostrar, por exemplo, que a correta determinação da frequência das oscilações de tal sistema pode ser reduzida à tarefa de encontrar os eixos de um certo elipsoide em um espaço  $n$ -dimensional.

Vamos considerar, agora, o problema de pequenas oscilações em uma corda com massa estendida entre os pontos  $A$  e  $B$ . Vamos ter em mente uma corda idealizada e homogênea, isto é, uma corda elástica com massa finita distribuída continuamente ao longo de sua extensão. Por “corda homogênea” entendemos aquela cuja densidade é constante. Como a massa é distribuída de modo contínuo ao longo da corda, sua posição não pode mais ser dada por um conjunto finito de números  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , e então o deslocamento  $y(x)$  de cada ponto  $x$  da corda precisa ser estipulado. Assim, o estado da corda em cada instante é dado por uma certa função  $y(x)$ .

O estado de um fio com  $n$  objetos atracados nos pontos com as abscissas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é representado graficamente por uma linha quebrada com  $n$  segmentos (Figura 3.2), de modo que, quando a quantidade de objetos cresce, o número de segmentos da linha tracejada aumenta na mesma medida. Quando o número de objetos cresce ilimitadamente e a distância entre objetos adjacentes tende a zero, obtemos, no limite, uma distribuição contínua de massa ao longo do fio, ou seja, uma corda idealizada. A linha tracejada que descreve a posição do fio com pesos se torna, então, uma curva que descreve a posição da corda (Figura 3.3.)

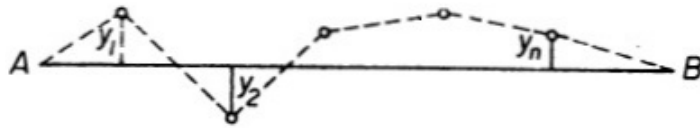


Figura 3.2: Corda AB com  $n$  pesos atracados. (Fonte: [19])



Figura 3.3: Corda idealizada e homogênea. (Fonte: [19])

Vemos, assim, que existe uma íntima relação entre as oscilações de um fio com objetos e as oscilações de uma corda. No primeiro problema, a posição

do sistema era dada por um ponto em um espaço  $n$ -dimensional. Portanto, é natural considerar a função  $y(x)$  que descreve a posição da corda oscilatória como um ponto ou vetor em um espaço de dimensão infinita. Uma série de problemas semelhantes leva a essa mesma ideia de estipular um espaço cujos pontos (vetores) sejam funções  $f(x)$  dadas em algum intervalo.

Note que a ideia de distribuição contínua de massa ao longo da corda, no exemplo de Gel'Fand, é uma *idealização* matemática: uma técnica conveniente para simplificar — sem perda significativa de informações — a complexidade imensurável da física em escalas microscópicas. Essa idealização útil, que contorna o problema (insolúvel) de precisarmos estipular uma escala mínima para o tecido da realidade, é o que acarreta a relevância física dos espaços abstratos de dimensão infinita.

Mesmo se deixarmos de lado a dificultosa discussão sobre se o mundo físico é contínuo ou discreto, é fato que todos os modelos físicos são aproximações simplificadas da realidade. Como tais, eles fazem um recorte adequado do fenômeno de interesse, levando em consideração apenas aquelas variáveis que são interpretadas pelo pesquisador como significativamente impactantes para aquilo que ele deseja estudar.

Assim sendo, modelos idealizados como contínuos provêm de observações de caráter discreto, e curvas suaves são passagens ao limite de observações aproximadas de objetos com serrilhamento em escalas que escapam do nosso poder de apreensão. Nesse sentido, talvez não seja de se espantar que um modelo assim elaborado gere um atrator que não seja tão complexo (no sentido de exigir infinitos parâmetros para sua descrição) quanto a idealização contínua poderia sugerir<sup>21</sup>. A necessidade de infinitas dimensões talvez ocorra apenas nos estados transientes da evolução temporal do sistema, não no conjunto típico de seu comportamento a longo prazo.

Além disso, é razoável esperar que a dimensão do atrator dependa também da natureza da dissipação a que o sistema esteja sujeito. Por essa razão, dada uma EDP contendo uma parcela  $f$  que represente alguma força dissipativa, conhecimentos mais detalhados acerca das propriedades estruturais de  $f$  podem ser úteis para a obtenção de melhores estimativas para a dimensão do atrator ([39]). No cenário atual, o mais comum é que se faça assunções apenas sobre características muito gerais dessas funções, abrindo margem para que o modelo esteja sujeito a funções arbitrariamente complexas — e talvez destituídas de sentido físico — que atrapalhem na obtenção de estimativas mais precisas para aqueles casos que de fato possam ocorrer na prática. Essa obtenção de informações sobre  $f$  (é dizer: quais restrições podem ser impostas na função sem atrapalhar a acurácia do modelo) é assunto extremamente complexo e delicado, que exige tratamento por parte de físicos e matemáticos experientes e do exame caso-a-caso de cada fenômeno a ser estudado.

Para dar mais consistência a essas ideias, recorremos à referência [39], na qual o autor constrói uma impressionante correspondência entre conceitos heurísticos da física experimental e resultados rigorosos da matemática pura, fornecendo interpretações que, de um lado, proporcionam segurança às teorias físicas e, de outro, justificam e enriquecem a matemática abstrata de que tratamos nesta dissertação.

O artigo, de James C. Robinson, aborda a relação entre métodos experimentais no

---

<sup>21</sup>Vale observar que o atrator de um sistema dinâmico é um atrator para o modelo abstrato, e não necessariamente para o fenômeno físico que ele descreve. A correta correspondência entre o modelo e a realidade dos fatos depende inteiramente da qualidade do modelo, e não da técnica matemática ([25]).

estudo de turbulência e resultados da teoria matemática de sistemas dinâmicos.

De acordo com o autor, os físicos L. D. Landau e E. M. Lifshitz introduziram, em 1959, a noção de *graus de liberdade*<sup>22</sup> para a análise prática de turbulência. Essa noção vem sendo utilizada com frequência por físicos teóricos e experimentais. A ideia é relativamente simples e está ilustrada na Figura 3.4: imagine que o fluido sob análise esteja contido em uma região  $\Omega$ . Para fins práticos, postula-se um comprimento  $l$  que é considerado o “comprimento mínimo da escala do fluxo”. Em outras palavras, o número  $l$  é escolhido como o valor para o qual qualquer medição em escala menor do que  $l$  é impossível ou irrelevante, no sentido de que regiões do fluido com comprimento menor do que  $l$  não acarretam qualquer influência significativa no sistema. Fixado esse valor  $l$ , a região  $\Omega$  é dividida em uma malha composta por cubos de lado  $l$  e, então, a quantidade de graus de liberdade do sistema é definida justamente como sendo a quantidade dos cubos dessa malha que possuem interseção com  $\Omega$ .

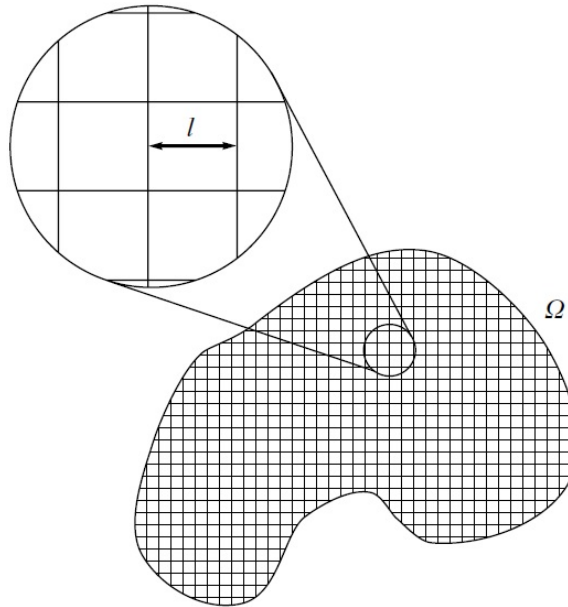


Figura 3.4: A definição de graus de liberdade envolve dividir o domínio  $\Omega$  em caixas de lado  $l$ , a escala mínima do fluido, e contar quantas dessas caixas estão em  $\Omega$ . (Fonte: [39])

Como se vê, a ideia subjacente é extremamente similar à da definição de dimensão box-counting (dimensão fractal). Nesse sentido, não é exagero interpretar a dimensão finita de um atrator — isto é, a dimensão finita do estado típico do sistema — como sendo uma espécie de “ponte” técnica entre o mundo contínuo, necessário para a matemática, e o mundo discreto, imposto pelas limitações experimentais ou mesmo pela tessitura da realidade.

No caso específico da turbulência, James C. Robinson, com algumas ressalvas, identifica o atrator do sistema dinâmico com o conjunto de estados daquilo que ele chama de “turbulência plenamente desenvolvida”. Utilizando um teorema apresentado pelo autor,

<sup>22</sup>Em Física, “graus de liberdade” é um termo usado para indicar a quantidade mínima de números reais necessários para descrever por completo o estado físico de um dado sistema em cada instante de tempo. Por exemplo, em um sistema com  $N$  partículas pontuais, cada partícula é caracterizada por três coordenadas espaciais, de modo que o sistema possui  $3N$  graus de liberdade ([33]).



é possível garantir que “diferentes elementos do atrator, isto é, diferentes estados plenamente desenvolvidos da turbulência, podem ser distinguidos uns dos outros por meio de um número finito<sup>23</sup> de medições” ([39]). Assim, observações experimentais e resultados matemáticos rigorosos entram em concordância, garantindo a utilidade de ambos. Essa harmonia entre teoria e prática e essa associação entre graus de liberdade e dimensão fractal justificam as interpretações que apresentamos aqui, sobre as quais convidamos o leitor a refletir e a dialogar.

Por fim, convém deixar claro que, ao fazer esta tentativa de interpretação física do assunto, o autor não quer sugerir de maneira nenhuma que uma teoria matemática possui importância apenas quando ela pode ser aplicada em alguma ciência física. Muito pelo contrário, defendemos veementemente a relevância da matemática como investigação intelectual abstrata de todos os aspectos da realidade, e acreditamos — com fundamentos sólidos e embasamento na experiência — que mesmo a matemática mais alheia ao mundo físico pode ser útil no exercício de habilidades mentais valiosas, na estimulação de ideias aplicáveis em contextos diversos e no florescimento de muitas das melhores características que o espírito humano tem a oferecer.

---

<sup>23</sup>Embora finito, esse número pode ser excessivamente grande. Roger Temam alerta, inclusive, que o número de efetivos graus de liberdade em questões meteorológicas e em experimentos aeronáuticos costuma ser da ordem de  $10^9$  a  $10^{20}$ , gerando cálculos que excedem poderes computacionais atuais. O autor afirma que “estimativas computacionais em sistemas turbulentos de larga escala continuam sendo problemas de considerável dificuldade e cuja resolução ainda está em estágio de infância” [47].

# Conclusão

*“A ciência é feita de fatos,  
assim como uma casa é feita de  
tijolos. Mas um amontoado de  
fatos não é ciência, e um  
amontoado de tijolos não é uma  
casa”*

---

— Henri Poincaré, [32].

Neste trabalho, procuramos apresentar os primeiros rudimentos necessários na busca por estimativas de cotas superiores para a dimensão fractal de atratores de sistemas dinâmicos dissipativos em dimensão infinita. A teoria atual, embora vasta, ainda não está desenvolvida por completo, de modo que muito esforço ainda é necessário na procura por critérios mais eficientes, na investigação de consequências práticas e teóricas de interesse, e mesmo para o esclarecimento do significado físico da finitude dimensional em cada caso específico.

Nestas páginas, procuramos dar alguma coesão estrutural aos resultados apresentados, colhidos em diversas fontes. Seja reunindo a teoria já existente em uma organização mais didática e detalhada, seja apresentando exemplos que reputamos esclarecedores, acreditamos que esta dissertação pode ser útil para estudantes e pesquisadores que busquem um complemento em seus labores intelectuais direcionados a sistemas dissipativos.

Embora a ênfase principal tenha sido na demonstração rigorosa de cada um dos resultados apresentados, tentamos não deixar de lado considerações epistemológicas a respeito da relevância e do alcance dos assuntos aqui abordados quanto vistos no contexto mais amplo de outras áreas do conhecimento. Apesar do sucesso apenas moderado dessa tentativa (dado o caráter excessivamente técnico dos tópicos), acreditamos que esse tipo de diálogo seja indispensável para a fortificação do conhecimento científico<sup>24</sup>.

---

<sup>24</sup>Essa importância é ainda mais evidente na conjuntura atual, agora que a ciência se ramificou em diversas subáreas hiper-especializadas que pouco dialogam entre si. A esse respeito, recorreremos aos famosos dizeres de Erwin Schrödinger ([44]):

Herdamos de nossos antepassados um profundo desejo por um conhecimento unificado e abrangente. O próprio nome dado às mais altas instituições de ensino [universidades] nos faz lembrar que, desde a Antiguidade e através de muitos séculos, o caráter universal tem sido o único a que se dá total crédito. Mas o alargamento nos singulares últimos cem anos das múltiplas ramificações do conhecimento, tanto em extensão quanto em profundidade, confrontou-nos com um difícil dilema. Sentimos claramente que só agora começamos a adquirir material confiável para reunir tudo o que se sabe em uma só totalidade. Mas, por outro lado, tornou-se quase impossível para uma só mente dominar por completo mais que

No que concerne à teoria matemática propriamente dita, a maior preocupação que tivemos foi na exposição detalhada da dimensão fractal em espaços de dimensão infinita (ampliando o cenário, até então restrito a espaços euclidianos, em que essa dimensão é estudada em [15]). Esperamos que os contraexemplos selecionados — como o conjunto com dimensão box inferior diferente de sua dimensão box superior — tenham sido elucidativos para o leitor curioso com os meandros da teoria. Também esperamos que nossa pequena contribuição para casos de cálculo da dimensão box-counting por meio de uma sequência discreta de valores  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  (Proposição 3.1.17) seja esclarecedora a respeito das nuances envolvidas na natureza dessa dimensão.

É importante registrar que nem todos os objetivos a que nos propusemos foram atingidos a contento. Por transparência científica e também a fim de motivar futuras pesquisas na área, reputamos conveniente mencionar pontos em que nossos estudos restaram inconclusivos. Seja por escassez de tempo, seja por limitações do autor, não foram obtidas estimativas dimensionais mais eficientes do que as já conhecidas na literatura. Também não encontramos exemplos de sistemas dissipativos com significado físico bem definido cujo atrator tenha dimensão infinita (nem conseguimos verificar se tais sistemas sequer existem). Além disso, não abordamos algumas técnicas conhecidas de estimativa dimensional, como, por exemplo, a técnica de análise de contração de volumes  $n$ -dimensionais no espaço de fases (a esse respeito, consultar [38]).

Por outro lado, resultados significativos foram analisados em detalhes. Em particular, o Teorema 3.2.9 possui abrangência poderosa, sendo aplicável a uma enorme gama de sistemas dinâmicos oriundos de equações diferenciais parciais. Também é digno de destaque o Teorema 3.3.2, que, além de cobrir alguns casos não previstos pelo Teorema 3.2.9, aborda em sua demonstração técnicas refinadas que reputamos promissoras para futuras pesquisas na área.

No demais, cremos que a compilação aqui efetivada tenha sido satisfatória e tão didática quanto possível, mas não dispensamos nenhuma crítica que possa ser feita a fim de corrigir ou incrementar o trabalho, ou mesmo para lhe dar maior clareza e precisão.

---

uma pequena porção especializada desse conhecimento.

Não vejo outra saída para esse dilema (sob risco de nosso verdadeiro objetivo ser perdido para sempre) além de alguns de nós nos aventurarmos a embarcar numa síntese de fatos e de teorias, ainda que munidos de conhecimento incompleto e de segunda mão sobre alguns deles, e sob o risco de parecermos tolos.

# Apêndices

*“Too see a World in a grain of  
sand  
And a Heaven in a Wild Flower,  
Hold Infinity in the palm of  
your hand  
And Eternity in an hour”*

---

— William Blake, *Auguries of  
Innocence*, [4].

Esta dissertação aborda o conceito de dimensão fractal em um cenário no qual pouca ênfase se dá ao adjetivo “fractal”. Em sistemas dinâmicos de dimensão infinita, costuma-se estar mais preocupado com a finitude da dimensão fractal do atrator do que com seu valor eventualmente fracionário. Nestes apêndices, buscamos resgatar um pouco da bela e útil teoria sobre fractais (Apêndices A e B), bem como apresentar alguns exemplos que esclarecem detalhes mencionados ao longo da dissertação (Apêndice C).

Fractais, vistos em uma área de estudos própria, são conjuntos com detalhamento em escalas arbitrariamente pequenas. Essa conceituação é muito abrangente e, em última análise, matematicamente imprecisa. Sua formalização exata depende da definição de dimensão de Hausdorff (apresentada no Apêndice B).

Formalmente, dá-se o nome de fractal para todo conjunto cuja dimensão de Hausdorff seja estritamente menor do que sua dimensão topológica (nesta definição, a escolha da dimensão de Hausdorff e não da dimensão box superior é um tanto arbitrária, mas a adotamos por ser a mais usual entre os autores contemporâneos). Em geral, fractais possuem dimensão de Hausdorff não-inteira.

Informalmente, é digno de ser chamado de fractal toda aquela forma que possua quebras, fraturas, descontinuidades ou complexidades em escalas tão pequenas que qualquer aproximação linear que dela se tente fazer seja pouco satisfatória.

Muitos fractais famosos — estudados por importância matemática, por simplicidade didática ou mesmo por valor estético — possuem características de autossimilaridade. Um resumo da teoria de fractais autossimilares é apresentado no Apêndice A, ao lado de cálculos detalhados da dimensão box de alguns conjuntos em  $\mathbb{R}^2$ , onde o apelo visual é mais evidente.

## Apêndice A: Fractais Autossimilares

Calcular com exatidão o valor da dimensão box-counting de conjuntos fractais nem sempre é uma tarefa fácil; em verdade, essa tarefa pode se revelar impraticável mesmo quando o conjunto sob análise é apenas um pouco mais complexo do que os exemplos clássicos do Conjunto de Cantor e do Triângulo de Sierpinski.

Felizmente, é raro que estejamos interessados no valor exato da dimensão box de um conjunto específico. Problemas práticos, em geral, podem ser satisfatoriamente resolvidos com estimativas e aproximações numéricas ([15]). Em casos de aplicações tecnológicas e em serventia das ciências aplicadas, como no célebre exemplo de estimar o comprimento da linha costeira de um país ([28]), é natural que a dimensão box de um conjunto seja avaliada por meio da contagem de cubos de lado  $\varepsilon$  que interceptam o conjunto para uma ampla gama de valores  $\varepsilon$  cada vez menores.

Para cálculos exatos, devemos recorrer a abordagens que, em geral, utilizam técnicas analíticas e geométricas, por vezes necessitando da construção de medidas e distribuições de massa bastante difíceis.

Neste apêndice, vamos enunciar (sem demonstrar) uma série de resultados que conduzem a um resultado já clássico que proporciona uma fórmula fechada e bastante simples para o cálculo da dimensão fractal (e também da dimensão de Hausdorff, definida no Apêndice B) de conjuntos conhecidos como *autossimilares*. A exposição será feita nas linhas de [13], [15] e [18]. Na sequência, vamos calcular por meios elementares, diretamente da definição, a dimensão fractal do Conjunto de Cantor e do gráfico da função  $\sin(1/x)$ .

### A.1 Fractais Autossimilares

Fractais autossimilares são aqueles que podem ser enxergados como união de cópias exatas de si mesmos em escalas reduzidas. Tornaremos precisa essa definição logo a seguir, mas a ideia subjacente é bastante clara quando pensamos na Curva de Koch.

**Exemplo A.1** (Curva de Koch). *Seja  $E_0$  um segmento de reta de medida 1. Conforme Figura 3.5, remova o terço médio de  $E_0$  e o substitua pelos dois lados do triângulo equilátero cuja base era esse terço médio. Faça o mesmo procedimento em cada parte retilínea de cada figura  $E_k$ . Para  $k$  suficientemente grande,  $E_k$  e  $E_{k+1}$  diferem entre si apenas em detalhes minúsculos, sendo distinguíveis apenas em escalas muito finas. Conforme  $k$  cresce ( $k \rightarrow \infty$ ), a sequência dessas curvas poligonais  $E_k$  tende a uma curva limite,  $K$ , que é chamada de Curva de Koch, representada na Figura 3.6.*

*Note que  $K$ , embora seja uma curva contínua, não é diferenciável em ponto algum<sup>25</sup>.*

*Uma característica muito interessante da Curva de Koch é que ela é um conjunto autossimilar, composta por 4 cópias idênticas de si mesma em uma escala de  $1/3$ , conforme podemos intuir da imagem 3.6.*

---

<sup>25</sup>Historicamente, Niels von Koch propôs essa curva que hoje leva seu nome tencionando proporcionar um exemplo tão intuitivo quanto possível para a existência de funções contínuas mas sem nenhum ponto de diferenciabilidade. À época de Koch, a famosa função de Weierstrass já era conhecida, porém, em decorrência de sua construção deveras difícil para alunos iniciantes, era desejável que houvesse algum exemplo mais elementar, sem as intrincadas manipulações algébricas com épsilons e deltas. (Para conhecer os artigos originais que deram origem a importantes raízes da Geometria Fractal, remetemos o leitor à obra [12], com textos seminais de Weierstrass, Cantor, Moran, Mandelbrot, entre outros).

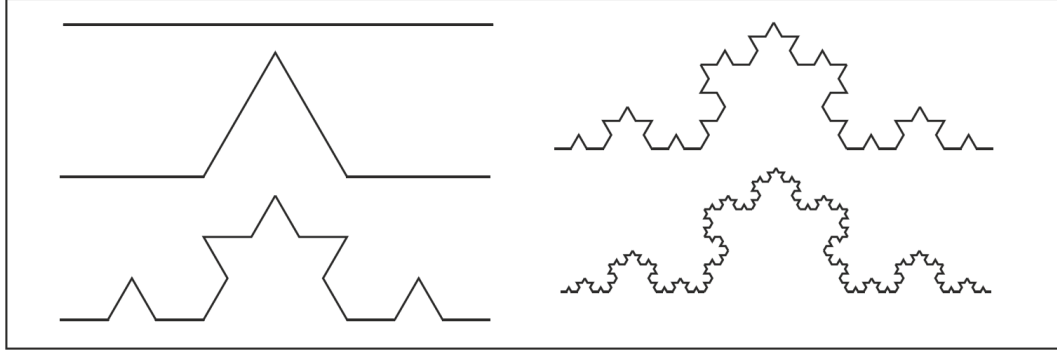


Figura 3.5: Etapas da construção iterativa da Curva de Koch ( $K$ ). Em cada iteração, os segmentos de reta são substituídos por quatro partes menores, cada qual com um terço do tamanho do antecessor. É possível provar que a Curva de Koch, embora contida em uma região limitada do plano, possui comprimento infinito (medida unidimensional infinita). Por outro lado, sua área é nula (medida bidimensional zero). Não por acaso, a dimensão box-counting da Curva de Koch é  $\frac{\ln 4}{\ln 3}$ , um valor não-inteiro estritamente entre 1 e 2. (Fonte: Autor)

Vejamos mais dois conjuntos autossimilares. Eles serão úteis para ilustrar alguns conceitos e resultados que apresentaremos mais à frente.

**Exemplo A.2** (Conjunto de Cantor). *Considere  $E_0 := [0, 1]$ .*

*Defina  $E_{n+1} := \frac{1}{3}[E_n \cup (2 + E_n)]$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

*O Conjunto de Cantor  $C$  é o limite  $C := \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ , conforme ilustrado na*

*Figura 3.7.*

**Exemplo A.3** (Triângulo de Sierpinski). *O Triângulo de Sierpinski é definido como sendo o limite da sequência visualmente indicada na Figura 3.9, iniciada com um triângulo equilátero de lado unitário.*

Agora, vamos apresentar alguns conceitos para podermos definir com rigor o que é um conjunto autossimilar.

**Definição A.4** (Contrações de Similaridade; Fator de Escala; IFS; Conjunto Invariante; Atrator). *Sejam  $D \in \mathbb{R}^n$  e  $r \in (0, 1)$ . Uma contração de similaridade com fator de escala  $r$  é uma aplicação  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq r \|x - y\|, \quad \forall x, y \in D.$$

*Em particular, são contrações de similaridade com fator de escala  $r$  as transformações  $h$  do tipo  $h(x) = rO(x) + b$ , onde  $O$  é uma transformação ortogonal (uma rotação, uma reflexão ou uma combinação de ambas) e  $b \in \mathbb{R}^n$  é um ponto fixado qualquer, o qual gera uma translação.*

*Suponha que  $\{f_1, \dots, f_m\}$  seja uma família de contrações de similaridade de mesmo domínio limitado  $D \subset \mathbb{R}^n$ , cada  $f_i$  com um respectivo fator de escala  $r_i \in (0, 1)$ . Famílias desse tipo são conhecidas como Iterated Function Systems (IFS).*

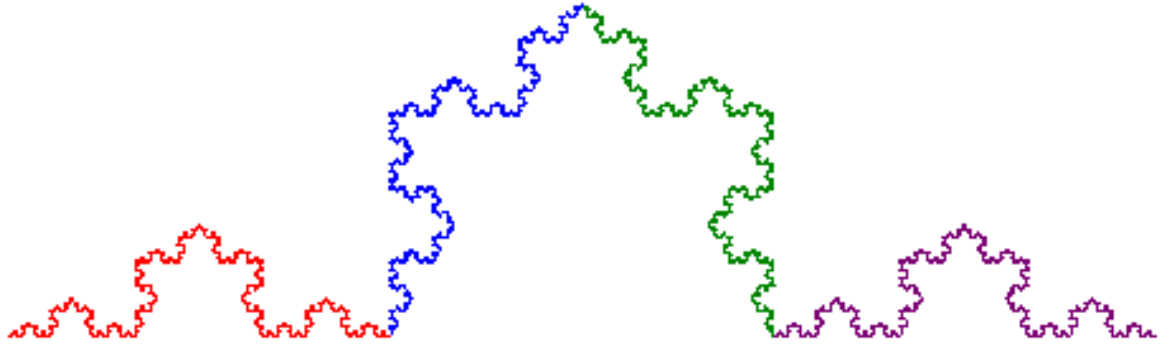


Figura 3.6: Visualizando a autossimilaridade da Curva de Koch. Note que, devido ao detalhamento infinitesimal, cada trecho destacado na imagem é uma cópia perfeita, em escala de  $1/3$ , da curva inteira. (Fonte: [34])

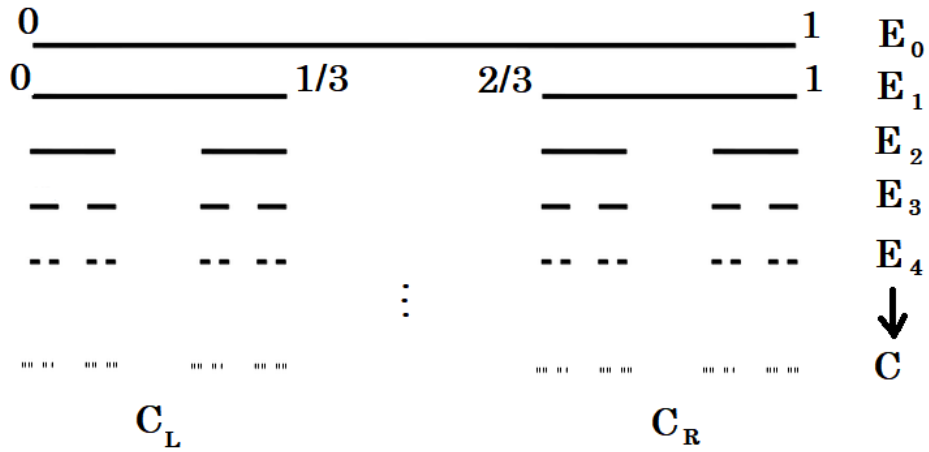


Figura 3.7: Primeiras etapas para a construção do Conjunto de Cantor  $C$ . Note que  $C_L$  e  $C_R$ , as partes da esquerda e da direita de  $C$ , são cópias exatas de  $C$  em uma escala de fator  $1/3$ . (Fonte: Autor)

Por conveniência, para cada  $E \subset D$ , denotamos

$$S^0(E) := E, \quad S(E) := \bigcup_{i=1}^m f_i(E), \quad S^{k+1}(E) := S(S^k(E)), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dado uma IFS, é possível provar que existe um único conjunto compacto e não-vazio  $F$  tal que

$$F = S(F),$$

isto é, tal que

$$F = \bigcup_{i=1}^m f_i(F).$$

Por essa propriedade, dizemos que  $F$  é invariante sob efeito da família  $\{f_i\}_{i=1}^m$ . Também dizemos que  $F$  é o atrator dessa família de contrações.

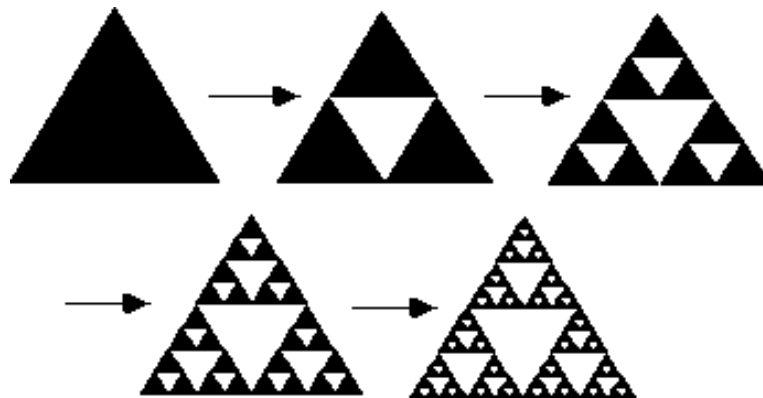


Figura 3.8: Primeiras etapas para a construção do Triângulo de Sierpinski. Note que esse conjunto é composto por três cópias de si mesmo, cada qual na escala  $1/2$ . (Fonte: Autor)

*O nome “atrator” se deve ao fato de que também é possível provar que, dado qualquer conjunto compacto e não-vazio  $E \subset D$  tal que  $S(E) \subset E$ , vale que*

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E).$$

*Isso significa que a aplicação reiterada das contrações  $f_i$  em qualquer compacto que contenha suas imagens por  $f_i$  vai levar inevitavelmente ao conjunto  $F$ . Isso justifica o nome “atrator” para  $F$ .*

A característica de um conjunto  $F$  satisfazer a equação autorreferencial

$$F = f_1(F) \cup \dots \cup f_m(F)$$

para algum IFS  $\{f_1, \dots, f_m\}$  significa que  $F$  é união de  $m$  cópias de si mesmo, cada qual em um fator de escala  $r_i$ . Se, além disso, essas cópias forem disjuntas ou tiverem sobreposições desprezíveis em um sentido que ainda vamos determinar, dizemos que o conjunto  $F$  é autossimilar.

Tornar precisa a noção de “sobreposições desprezíveis” exige uma definição bastante técnica. O leitor não restará seriamente prejudicado se interpretar essa condição como significando que as sobreposições ocorrem apenas em uma quantidade finita ou enumerável de pontos.

Vejamos essa condição em sua forma rigorosa.

**Definição A.5** (Open Set Condition – OSC; Separating Set). *Dizemos que um IFS  $\{f_1, \dots, f_m\}$  satisfaz a Condição do Conjunto Aberto (OSC) se existir algum conjunto aberto, limitado e não-vazio  $A$  tal que*

$$\bigcup_{i=1}^m f_i(A) \subset A,$$

*onde o ponto dentro do símbolo de união significa exigir que essa união seja disjunta.*



O conjunto  $A$  que garante que um IFS satisfaz a OSC é chamado de *separating set*. Note que um *separating set* é um conjunto aberto, limitado e não-vazio tal que

$$S(A) = A \quad \text{e} \quad S_i(A) \cap S_j(A) = \emptyset, \quad \forall i \neq j.$$

Os fractais clássicos, oriundos de alguma construção iterativa explícita levada ao limite, são atratores de IFS que satisfazem a OSC.

O Conjunto de Cantor  $C$ , por exemplo, pode ser definido como sendo o atrator do sistema de contrações de fatores de escala  $r_1 = r_2 = 1/3$  dadas por

$$f_1(x) = \frac{x}{3}, \quad f_2(x) = \frac{x+2}{3}.$$

Com efeito, é fato que<sup>26</sup>

$$C = f_1(C) \cup f_2(C).$$

Encontrar o conjunto aberto  $A$  que garante a validade do OSC para cada IFS pode ser um pouco inconveniente, mas no caso do Conjunto de Cantor é natural checar que  $A = (0, 1)$  cumpre os propósitos.

Conforme aponta Gerald Folland em [18], a existência de um *separating set* é algo mais delicado do que parece à primeira vista: se  $A$  for muito pequeno, não vai ocorrer  $S(A) \subset (A)$ ; se  $A$  for muito grande, não vai ocorrer  $S_i(A) \cap S_j(A) = \emptyset$ .

Para o Conjunto de Cantor, vimos que  $A = (0, 1)$  é um *separating set*. Para o Triângulo de Sierpinski, podemos tomar como *separating set* o interior da região triangular inicial. Para a Curva de Koch, o interior do triângulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(1/2, \sqrt{3}/6)$ , isto é, o interior do envoltório convexo da imagem da primeira iteração do IFS.

Com essas definições e resultados, enunciamos agora o clássico teorema que proporciona uma fórmula fechada para a dimensão box-counting de um fractal autossimilar.

**Teorema A.6.** *Seja  $F$  um fractal autossimilar, sendo  $F$  o atrator de um IFS  $\{f_1, \dots, f_m\}$  de contrações de similaridade de razões  $\{r_1, \dots, r_m\}$ , com  $r_i \in (0, 1)$  para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ , e com esse IFS satisfazendo a OSC.*

*Neste caso, vale que*

$$\dim_H(F) = \dim_B(F) = d,$$

onde  $d$  é tal que

$$\sum_{i=1}^m r_i^d = 1.$$

Para o caso de autossimilaridade estrita, em que  $r_1 = \dots = r_m := r$ , essa fórmula se reduz a

$$mr^d = 1,$$

---

<sup>26</sup>Existem outros conjuntos  $X$  que satisfazem a equação autorreferencial  $X = f_1(X) \cup f_2(X)$ , como, por exemplo,  $X = \emptyset$  e  $X = \mathbb{R}$ , mas nenhum deles é compacto e não-vazio. Como afirmamos anteriormente, existe um teorema que garante a unicidade do atrator (compacto e não-vazio) de um IFS.

Verificar que  $x \in C \Leftrightarrow x \in [f_1(C) \cup f_2(C)]$  é consequência da própria definição iterativa do Conjunto de Cantor. Essa verificação pode ser feita por indução.

Por curiosidade, note que, tomando  $E := [0, 1]$ , temos que  $E \subset f_1(E)$  e  $E \subset f_2(E)$ . Assim, pelo teorema aludido na Definição A.4, vemos que aplicar  $f_1$  e  $f_2$  reiteradamente em  $E$  vai gerar um conjunto-limite, que só pode ser o Conjunto de Cantor. Convidamos o leitor a observar que esse procedimento é essencialmente igual à definição do Conjunto de Cantor por meio da remoção sucessiva de terços-médios.

*que pode ser resolvida em  $d$  de modo particularmente satisfatório:*

$$d = \frac{\ln m}{\ln(1/r)}.$$

Aplicando esse teorema, é imediato calcular que a dimensão box do Conjunto de Cantor é  $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ , a do Triângulo de Sierpinski é  $\frac{\ln 3}{\ln 2}$  e a da Curva de Koch é  $\frac{\ln 4}{\ln 3}$ .

## A.2 Cálculo Exato da Dimensão Box do Conjunto de Cantor e do Gráfico da Função $\sin(1/x)$ por Meios Elementares

Nesta seção, vamos calcular explicitamente o valor da dimensão box do Conjunto de Cantor sem utilizar o Teorema A.6. Faremos isso com o intuito único de apresentar as técnicas geométricas e analíticas típicas para o cômputo da dimensão box em espaços euclidianos.

Também vamos calcular a dimensão box do gráfico da função  $\sin(1/x)$ , conforme [1]. Faremos isso por dois motivos: *i)* trata-se de um conjunto que não é autossimilar no sentido apresentado na seção anterior, de modo que para ele não é possível aplicar o Teorema A.6; *ii)* os exemplos típicos de gráficos de funções que possuem dimensão box não-inteira são de funções que não apresentam nenhum ponto de diferenciabilidade. Assim, a função  $\sin(1/x)$  é um bom exemplo de que mesmo funções suaves podem ter gráficos com dimensão box estritamente maior do que 1.

**Exemplo A.7.** *Seja  $C$  o Conjunto de Cantor clássico, conforme definido no Exemplo A.2, como limite da sequência*

$$\begin{aligned} E_0 &= [0, 1], \\ E_1 &= [0/3, 1/3] \cup [2/3, 3/3], \\ E_2 &= [0/9, 1/9] \cup [2/9, 3/9] \cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 9/9], \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\text{Vamos mostrar que } \dim_B(C) = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

*Para essa demonstração, vamos tomar  $N_\varepsilon(C)$  como sendo o menor número de intervalos de comprimento menor que ou igual a  $\varepsilon$  suficientes para cobrir  $C$ .*

*Vejamos algumas observações iniciais que vão nos auxiliar a estimar o valor  $N_\varepsilon(C)$ .*

*Primeiro, note que a  $k$ -ésima etapa  $E_k$  na construção de  $C$  é composta por  $2^k$  intervalos, cada qual com comprimento  $1/3^k$ . Como a sequência de conjuntos  $E_k \rightarrow C$  é decrescente, qualquer uma dessas etapas cobre por completo o conjunto-limite  $C$ .*

*Note também que a menor lacuna entre os intervalos que compõem  $E_k$  possui comprimento  $1/3^k$ . Isso significa que conjuntos com comprimento menor do que  $1/3^k$  conseguem interceptar no máximo um único desses intervalos. Ademais, cada um desses intervalos contém pontos que pertencem a  $C$ , afinal os pontos das extremidades nunca são removidos.*

*Agora, veja que, para cada  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, existe um único  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $1/3^k \leq \varepsilon < 1/3^{k-1}$ . Além disso,  $\varepsilon \rightarrow 0$  se, e somente se,  $k \rightarrow \infty$ . Também temos que*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3^k} \leq \varepsilon < \frac{1}{3^{k-1}} \\ \Rightarrow &3^{-k} \leq \varepsilon < 3^{-k+1} \\ \Rightarrow &\ln 3^{-k} \leq \ln \varepsilon < \ln 3^{-k+1} \\ \Rightarrow &-\ln 3^{-k} \geq -\ln \varepsilon > -\ln 3^{-k+1} \\ \Rightarrow &k \ln 3 \geq -\ln \varepsilon > (k-1) \ln 3 \\ \Rightarrow &\frac{1}{k \ln 3} \leq \frac{1}{-\ln \varepsilon} < \frac{1}{(k-1) \ln 3}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Feitas essas considerações iniciais, passemos às estimativas.

Como  $1/3^k \leq \varepsilon$ , sabemos que os intervalos de  $E_k$  possuem comprimento que não excedem  $\varepsilon$ . Já vimos que esses intervalos cobrem  $C$  e que existem  $2^k$  desses intervalos. Assim,

$$N_\varepsilon(C) \leq 2^k.$$

Portanto, usando a parte da direita da desigualdade (A.1), obtemos

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(C) &\leq 2^k \\ \Rightarrow \ln N_\varepsilon(C) &\leq k \ln 2 \\ \Rightarrow \frac{\ln N_\varepsilon(C)}{-\ln \varepsilon} &\leq \frac{k \ln 2}{(k-1) \ln 3} \\ \Rightarrow \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(C)}{-\ln \varepsilon} &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \ln 2}{(k-1) \ln 3} \\ \Rightarrow \overline{\dim}_B(C) &\leq \frac{\ln 2}{\ln 3}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Para encontrar uma cota inferior para  $N_\varepsilon(C)$ , perceba que, como  $\varepsilon < 1/3^{k-1}$ , temos que intervalos com comprimento menor que ou igual a  $\varepsilon$  conseguem interceptar um único dos intervalos de  $E_{k-1}$ . Existem  $2^{k-1}$  desses intervalos, cada qual contendo pontos de  $C$  que precisam ser cobertos. Assim,

$$2^{k-1} \leq N_\varepsilon(C).$$

Portanto, usando a parte da esquerda da desigualdade (A.1), obtemos

$$\begin{aligned} 2^{k-1} &\leq N_\varepsilon(C) \\ \Rightarrow (k-1) \ln 2 &\leq \ln N_\varepsilon(C) \\ \Rightarrow \frac{(k-1) \ln 2}{k \ln 3} &\leq \frac{\ln N_\varepsilon(C)}{\ln \varepsilon} \\ \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k-1) \ln 2}{k \ln 3} &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(C)}{\ln \varepsilon} \\ \Rightarrow \frac{\ln 2}{\ln 3} &\leq \underline{\dim}_B(C). \end{aligned} \tag{A.3}$$

Associando as desigualdades (A.2) e (A.3), concluímos que  $\dim_B(C) = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ .

Para calcular a dimensão box do gráfico de  $\sin(1/x)$ , na linha de [1], vamos precisar de alguns resultados abstratos.

**Definição A.8** (Variação Máxima de uma Função Real). *Dada uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , a variação máxima de  $f$  em um intervalo  $[t_1, t_2]$  é dada por*

$$R_f[t_1, t_2] := \sup_{t, s \in [t_1, t_2]} |f(t) - f(s)|.$$

**Proposição A.9.** *Seja  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Seja  $\varepsilon \in (0, 1)$  dado. Seja  $m = \lceil (1/\varepsilon) \rceil$ . Se  $N_\varepsilon$  é o número de quadrados do  $\varepsilon$ -reticulado que interceptam o gráfico de  $f$ , então vale a estimativa*

$$\frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^m R_f[(i-1)\varepsilon, i\varepsilon] \leq N_\varepsilon \leq 2m + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^m R_f[(i-1)\varepsilon, i\varepsilon].$$

*A cota superior permanece verdadeira mesmo se  $f$  não for contínua.*

*Demonstração.* O resultado depende apenas de perceber o seguinte: o número de quadrados de lado  $\varepsilon$  do reticulado que estão na coluna correspondente ao intervalo  $[(i-1)\varepsilon, i\varepsilon]$  e que interceptam o gráfico de  $f$  são, no máximo,  $2 + R_f[(i-1)\varepsilon, i\varepsilon]/\varepsilon$ , e, se  $f$  for contínua, são no mínimo  $R_f[(i-1)\varepsilon, i\varepsilon]/\varepsilon$ . Somando sobre todos os intervalos, obtemos o resultado pretendido.  $\square$

**Proposição A.10.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona. Se  $N_\varepsilon$  é o número de quadrados do  $\varepsilon$ -reticulado que interceptam o gráfico de  $f$ , então vale que*

$$N_\varepsilon \leq 2 \frac{(b-a)}{\varepsilon} + \frac{|f(b) - f(a)|}{\varepsilon} + 4.$$

*Demonstração.* A demonstração é similar à da Proposição A.9. Basicamente, vamos aplicar o mesmo raciocínio, mas teremos que tomar o cuidado de observar que, como o intervalo  $[a, b]$  pode ser tal que  $a$  não coincida com o vértice de um dos quadrados do reticulado, então vamos ter que adicionar uma parcela de correção na estimativa.

Desta vez, vamos definir  $m := \left\lceil \left( \frac{b-a}{\varepsilon} \right) \right\rceil$ .

Sabemos que  $a \in [(j-1)\varepsilon, j\varepsilon]$  para algum  $j \in \mathbb{N}$ .

O intervalo  $[a, b]$  está contido na união  $\bigcup_{i=0}^m [(j-1+i)\varepsilon, (j+i)\varepsilon]$ .

Assim como foi feito na demonstração da Proposição A.9, o número de quadrados de lado  $\varepsilon$  do reticulado que estão na coluna correspondente ao intervalo  $[(j-1+i)\varepsilon, (j+i)\varepsilon]$  e que interceptam o gráfico de  $f$  são, no máximo,  $2 + R_f[(j-1+i)\varepsilon, (j+i)\varepsilon]/\varepsilon$ .

Somando sobre todos os intervalos, obtemos

$$N_\varepsilon \leq 2(m+1) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=0}^m R_f[(j-1+i)\varepsilon, (j+i)\varepsilon].$$

Como a função é monótona e está restrita ao intervalo  $[a, b]$ , a soma das variações nos intervalos que cobrem  $[a, b]$  é a variação total no intervalo  $[a, b]$ , que nada mais é do que  $|f(b) - f(a)|$ .

Assim, a estimativa se torna

$$N_\varepsilon \leq 2(m+1) + \frac{1}{\varepsilon} |f(b) - f(a)|.$$

Ora, mas

$$m = \left\lceil \left( \frac{b-a}{\varepsilon} \right) \right\rceil \leq \frac{b-a}{\varepsilon} + 1.$$

Portanto

$$\begin{aligned} N_\varepsilon &\leq 2 \left( \frac{b-a}{\varepsilon} + 2 \right) + \frac{1}{\varepsilon} |f(b) - f(a)| \\ &= 2 \frac{(b-a)}{\varepsilon} + \frac{|f(b) - f(a)|}{\varepsilon} + 4. \end{aligned}$$

Isso conclui a demonstração.  $\square$

**Exemplo A.11.** Considere a função  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sin(1/x)$ . Seja  $G$  o gráfico dessa função:

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in (0, 1], y = \sin(1/x)\}.$$

Afirmamos que  $\dim_B(G) = 1 + \frac{1}{2}$ .

Considerando a invariância da dimensão box pelo fecho (ver Proposição 3.1.14, vii), sabemos que  $\dim_B(G) = \dim_B(\overline{G})$ .

Vamos calcular a dimensão box do fecho  $\overline{G} = G \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ . Para isso, vamos considerar  $N(F, \varepsilon)$  como sendo o número de quadrados em um  $\varepsilon$ -reticulado de  $\mathbb{R}^2$  que possuem interseção com  $F$ . Um  $\varepsilon$ -reticulado é um quadriculamento do plano por quadrados de lado  $\varepsilon$ , com um desses quadrados tendo vértice na origem e lados paralelos aos eixos.

Vamos proceder escolhendo uma sequência  $\varepsilon_k$  nos moldes do Teorema 3.1.16.

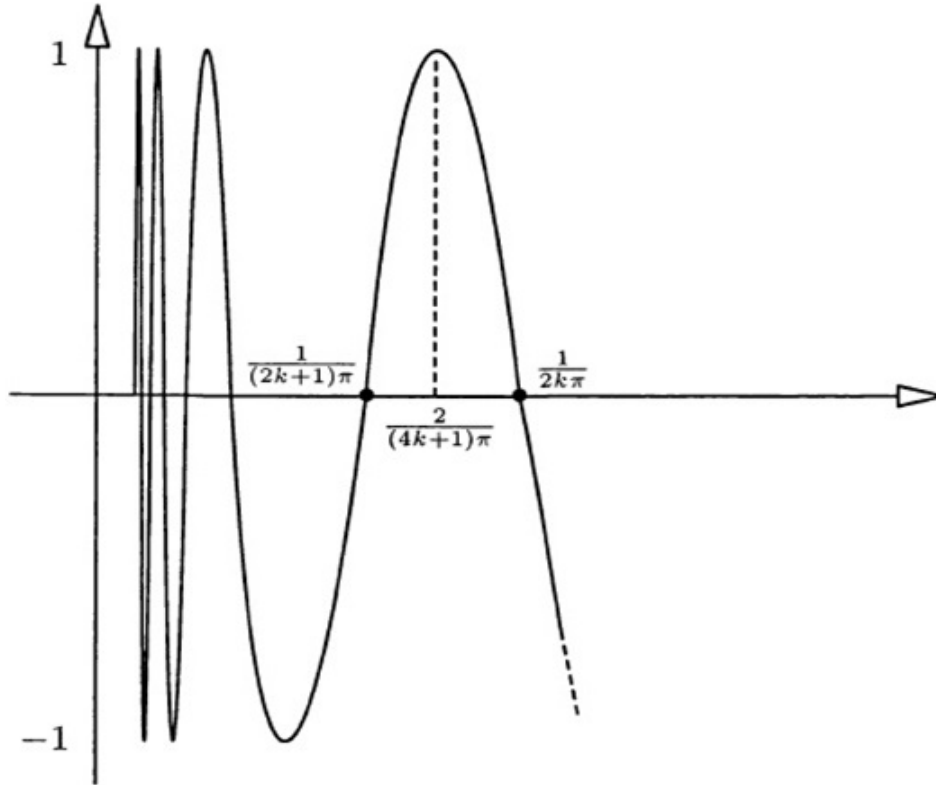


Figura 3.9: Representação do gráfico de  $\sin(1/x)$ , com destaque à altura das ondas e às distâncias entre as raízes da função, motivando a escolha dos valores  $\varepsilon_k$ . (Fonte: [1])

Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , considere um  $\varepsilon_k$ -reticulado, com

$$\varepsilon_k = \frac{1}{2k\pi} - \frac{1}{(2k+1)\pi} = \frac{1}{2k(2k+1)\pi} = [2k(2k+1)\pi]^{-1}.$$

Na figura que ilustra o gráfico, considere o segmento vertical na crista da onda. Como essa crista tem altura 1, ela vai ter interseção com  $\lceil (1/\varepsilon_k) \rceil$  quadrados. O mesmo vai acontecer para todas as  $k$  cristas e vales no intervalo  $\left[\frac{1}{2k\pi}, 1\right]$ . Assim, uma cota inferior para  $N(\overline{G}, \varepsilon_k)$  é

$$\frac{k}{\varepsilon_k} \leq N(\overline{G}, \varepsilon_k).$$

Para conveniência nos cálculos, note que

$$\begin{aligned} \frac{k}{\varepsilon_k} &= \frac{k}{[2k(2k+1)\pi]^{-1}} \\ &= 2k^2(2k+1)\pi \\ &= (4k^3 + 2k^2)\pi \\ &\geq k^3, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Assim,

$$k^3 \leq N(\overline{G}, \varepsilon_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.4})$$

Para encontrar uma cota superior, vamos definir

$$\begin{aligned} \overline{G}_1 &= \left\{ (x, y) \in \overline{G}; x \leq \frac{1}{(2k+1)\pi} \right\}, \\ \overline{G}_2 &= \left\{ (x, y) \in \overline{G}; x \geq \frac{1}{(2k+1)\pi} \right\}. \end{aligned}$$

Naturalmente,

$$N(\overline{G}, \varepsilon_k) \leq N(\overline{G}_1, \varepsilon_k) + N(\overline{G}_2, \varepsilon_k). \quad (\text{A.5})$$

Para encontrar uma cota superior para  $\overline{G}_1$ , podemos cobrir por completo todo o retângulo  $R := \left[0, \frac{1}{(2k+1)\pi}\right] \times [-1, 1]$  com os quadrados de lado  $\varepsilon_k$  do reticulado. Para cobrir a altura do retângulo, são suficientes  $2\lceil (1/\varepsilon_k) \rceil$  quadrados. Para cobrir o comprimento, são

suficientes  $\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{1}{(2k+1)\pi} \right\rceil}{\varepsilon_k} \right\rceil$  quadrados. Assim,

$$\begin{aligned}
N(\overline{G}_1, \varepsilon_k) &\leq N(R, \varepsilon_k) \\
&\leq 2\lceil(1/\varepsilon_k)\rceil \cdot \left\lceil \frac{\left\lfloor \frac{1}{(2k+1)\pi} \right\rfloor}{\varepsilon_k} \right\rceil \\
&\leq 2\left(\frac{1}{\varepsilon_k} + 1\right) \cdot \left\lceil \frac{[(2k+1)\pi]^{-1}}{[2k(2k+1)\pi]^{-1}} \right\rceil \\
&= \left(\frac{2}{\varepsilon_k} + 2\right) \cdot [2k] \\
&\leq \left(\frac{2}{\varepsilon_k} + 2\right) \cdot (2k+1) \\
&= \left(\frac{2}{[2k(2k+1)\pi]^{-1}} + 2\right) \cdot (2k+1) \\
&= [4k(2k+1)\pi + 2](2k+1) \\
&= (8\pi k^2 + 4\pi k + 2)(2k+1) \\
&< (32k^2 + 16k + 2)(2k+1) \quad (\pi < 4) \\
&= 64k^3 + 64k^2 + 20k + 2 \\
&< 2^7 k^3, \quad \text{para } k \text{ suficientemente grande.} \tag{A.6}
\end{aligned}$$

Para encontrar uma cota superior para  $N(\overline{G}_2, \varepsilon_k)$ , vamos aplicar a Proposição A.10 aos subintervalos de  $\left[\frac{1}{(2k+1)\pi}, 1\right]$  nos quais a função  $\sin(1/x)$  é monótona.

A Proposição A.10 diz que o número  $N_\delta$  de quadrados do  $\delta$ -reticulado de  $\mathbb{R}^2$  que interseptom o gráfico de uma função monótona  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  pode ser estimada por

$$N_\delta \leq 2\frac{(b-a)}{\delta} + \frac{|g(b) - g(a)|}{\varepsilon} + 4.$$

Note que os subintervalos de  $\left[\frac{1}{(2k+1)\pi}, 1\right]$  nos quais a função  $f(x) = \sin(1/x)$  é monótona podem ser agrupados como sendo os seguintes:

$$\left[\frac{1}{(2k+1)\pi}, \frac{2}{(4k+1)\pi}\right], \left[\frac{2}{(4k+1)\pi}, \frac{1}{2k\pi}\right], \dots, \left[\frac{2}{3\pi}, \frac{1}{\pi}\right], \left[\frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right] \text{ e } \left[\frac{2}{\pi}, 1\right].$$

A quantidade total de intervalos é  $(4k+2)$ . Em cada um desses intervalos, a variação  $|f(b) - f(a)|$  é de 1.

Somando as estimativas em todos os intervalos, obtemos

$$N(\overline{G}_2, \varepsilon_k) \leq \frac{2}{\varepsilon_k} + \frac{4k+2}{\varepsilon_k} + 4(4k+2).$$



Para conveniência nos cálculos, note que

$$\begin{aligned}
N(\overline{G}_2, \varepsilon_k) &\leq \frac{2}{\varepsilon_k} + \frac{4k+2}{\varepsilon_k} + 4(4k+2) \\
&= \frac{4k+4}{\varepsilon_k} + 16k+4 \\
&= \frac{4k+4}{[2k(2k+1)\pi]^{-1}} + 16k+4 \\
&= (4k+4)[2k(2k+1)\pi] + 16k+4 \\
&= (4k+4)(4k^2+2k)\pi + 16k+4 \\
&= (16k^3+24k^2+8k)\pi + 16k+4 \\
&< 64k^3+96k^2+48k+4 \quad (\pi < 4) \\
&< 2^7k^3, \quad \text{para } k \text{ suficientemente grande.}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Aplicando as estimativas (A.6) e (A.7) na relação (A.5), temos, para  $k$  suficientemente grande, que

$$N(\overline{G}, \varepsilon_k) \leq 2^8k^3. \tag{A.8}$$

Então, para  $k$  grande o bastante, podemos usar as relações (A.4) e (A.8) para efetuar os seguintes cálculos

$$\begin{aligned}
k^3 &\leq N(\overline{G}, \varepsilon_k) \leq 2^8k^3 \\
\Rightarrow \frac{\ln(k^3)}{-\ln \varepsilon_k} &\leq \frac{\ln N(\overline{G}, \varepsilon_k)}{-\ln \varepsilon_k} \leq \frac{\ln(2^8k^3)}{-\ln \varepsilon_k} \\
\Rightarrow \frac{\ln(k^3)}{\ln [2k(2k+1)\pi]} &\leq \frac{\ln N(\overline{G}, \varepsilon_k)}{-\ln \varepsilon_k} \leq \frac{\ln(2^8k^3)}{\ln [2k(2k+1)\pi]} \\
\Rightarrow \frac{\ln(k^3)}{\ln 2^5k^2} &\leq \frac{\ln N(\overline{G}, \varepsilon_k)}{-\ln \varepsilon_k} \leq \frac{\ln(2^8k^3)}{\ln k^2} \quad (k \text{ grande}) \\
\Rightarrow \frac{3 \ln k}{5 \ln 2 + 2 \ln k} &\leq \frac{\ln N(\overline{G}, \varepsilon_k)}{-\ln \varepsilon_k} \leq \frac{8 \ln 2 + 3 \ln k}{2 \ln k}.
\end{aligned}$$

Isso mostra que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln N(\overline{G}, \varepsilon_k)}{-\ln \varepsilon_k} = \frac{3}{2}$ .

Portanto, pelo Teorema 3.1.16, concluímos que  $\dim_B(\overline{G}) = \frac{3}{2}$ .

## Apêndice B: Dimensão de Hausdorff

Embora no contexto de Sistemas Dinâmicos a dimensão fractal seja mais conveniente, é importante enfatizar que, em outras áreas, a dimensão de Hausdorff pode ser mais interessante, por possuir propriedades que mais naturalmente associamos à ideia de dimensão.

Em certo sentido, enquanto a dimensão box-counting analisa um objeto como um todo (globalmente) para determinar sua dimensão, a dimensão de Hausdorff faz uma análise mais local, investigando o comportamento dimensional desse objeto em cada partícula infinitesimal.

Para definir a dimensão de Hausdorff, vamos precisar definir a medida de Hausdorff e conhecer algumas de suas propriedades.

**Definição B.1** (Medida de Hausdorff  $s$ -dimensional). *Seja  $X$  um espaço métrico. Dados  $F \subset X$ ,  $d \geq 0$  e  $\delta > 0$ , definimos*

$$H_\delta^d(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} [\text{diam}(U_i)]^d; \{U_i\} \text{ é enumerável, } F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \text{ e } \text{diam } U_i \leq \delta \right\}.$$

*A medida (exterior) de Hausdorff  $d$ -dimensional do conjunto  $F$  é o limite*

$$H^d(F) := \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^d(F).$$

*Esse limite está bem definido (podendo ser 0 ou  $\infty$ ) pelo seguinte motivo: se  $\delta$  diminui, a classe das  $\delta$ -coberturas de  $F$  é reduzida. Assim, quando  $\delta$  diminui, o ínfimo que define  $H_\delta^d(F)$  aumenta ou permanece o mesmo, mas não diminui. Por causa dessa monotonicidade, o limite com certeza existe em  $\overline{\mathbb{R}}$ .*

**Proposição B.2** (Medida de Hausdorff sob efeito de transformações Hölder). *Dados espaços métricos  $X$  e  $Y$ , um conjunto  $F \subset X$  e uma aplicação  $f : F \rightarrow Y$  tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq c[d(x, y)]^\alpha, \quad \forall x, y \in F,$$

*para constantes  $\alpha > 0$  e  $c > 0$ . Então, para cada  $d \geq 0$ , vale que*

$$\mathcal{H}^{d/\alpha}(f(F)) \leq c^{d/\alpha} \mathcal{H}^d(F).$$

*Demonstração.* Seja  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  uma  $\delta$ -cobertura enumerável arbitrária de  $F$ . Para todo  $i \in \mathbb{N}$ , como  $f$  é Hölder, vale que

$$\text{diam}[f(F \cap U_i)] \leq c[\text{diam}(F \cap U_i)]^\alpha \leq c[\text{diam}(U_i)]^\alpha \leq c\delta^\alpha.$$

Isso mostra que  $\{f(F \cap U_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  é uma  $c\delta^\alpha$ -cobertura de  $f(F)$ .

Como a cobertura  $\{U_i\}$  foi escolhida arbitrariamente, vale que

$$\begin{aligned} & \text{diam}[f(F \cap U_i)] \leq c[\text{diam } U_i]^\alpha, \quad \forall i \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow & [\text{diam}[f(F \cap U_i)]]^{d/\alpha} \leq c^{d/\alpha} [\text{diam } U_i]^d, \quad \forall i \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow & \sum_{i=1}^{\infty} [\text{diam}[f(F \cap U_i)]]^{d/\alpha} \leq c^{d/\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} [\text{diam } U_i]^d \\ \Rightarrow & H_{c\delta^\alpha}^{d/\alpha} \leq c^{d/\alpha} H_\delta^d(F) \\ \xRightarrow{\delta \rightarrow 0} & H^{d/\alpha}(f(F)) \leq c^{d/\alpha} H^d(F). \end{aligned}$$

Isso prova o desejado.  $\square$

**Proposição B.3** (Valor crítico da Medida de Hausdorff). *Seja  $F \subset X$ . Se  $\mathcal{H}^d(F) < \infty$ , então  $\mathcal{H}^D(F) = 0$  para todo  $D > d$ .*

*Demonstração.* Para uso futuro, note que, se  $D > d$  e  $\text{diam } V < \delta$ , então

$$[\text{diam } V]^D = [\text{diam } V]^{D-d} [\text{diam } V]^d \leq \delta^{D-d} [\text{diam } V]^d. \quad (\text{B.9})$$

Agora, observe o seguinte: se  $H^d(F) < \infty$ , então, para cada  $\delta > 0$ , existe uma  $\delta$ -cobertura enumerável  $\{U_i\}$  de  $F$  tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} [\text{diam } U_i]^d \leq H^d(F) + 1. \quad (\text{B.10})$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} [\text{diam } U_i]^D &\stackrel{(\text{B.9})}{\leq} \delta^{D-d} \sum_{i=1}^{\infty} [\text{diam } U_i]^d \\ &\stackrel{(\text{B.10})}{\leq} \delta^{D-d} \underbrace{[H^d(F) + 1]}_{:=k < \infty}. \end{aligned}$$

Portanto  $H_\delta^D(F) \leq \delta^{D-d}k$  para algum  $k < \infty$ . Fazendo  $\delta \rightarrow 0$ , concluímos que  $H^D(F) = 0$ .  $\square$

**Corolário B.4** (Valor Crítico da Medida de Hausdorff). *Se  $\mathcal{H}^D(F) > 0$ , então  $\mathcal{H}^d = \infty$  para todo  $d < D$ .*

*Demonstração.* Trata-se da contrapositiva da Proposição B.3.  $\square$

Com base na Proposição B.3 e no Corolário B.4, vemos que o valor da Medida de Hausdorff  $d$ -dimensional é sempre  $\infty$  ou 0, exceto possivelmente para um único valor de  $d$ . Esse  $d$  específico em que ocorre o “salto” de  $\infty$  pra 0 é o que vamos definir como sendo a Dimensão de Hausdorff.

**Definição B.5** (Dimensão de Hausdorff). *A Dimensão de Hausdorff de um conjunto  $F \subset X$  é definida por:*

$$\begin{aligned} \dim_H(F) &:= \inf\{d \geq 0; \mathcal{H}^d(F) = 0\} \\ &= \sup\{d \geq 0; \mathcal{H}^d(F) = \infty\}. \end{aligned}$$

*Se  $\dim_H(F) = d$ , então  $\mathcal{H}^d(F)$  pode ser 0, pode ser  $\infty$  ou pode satisfazer  $0 < \mathcal{H}^d(F) < \infty$ . Conjuntos cuja medida de Hausdorff  $s$ -dimensional é finita e não-nula são conhecidos como “conjuntos- $s$ ”.*

Agora, vamos conhecer o importante resultado que garante que a dimensão de Hausdorff nunca excede a dimensão fractal (nem mesmo a dimensão box inferior).

**Teorema B.6** (Relação entre a Dimensão Box-Counting e a Dimensão de Hausdorff).  
*Para todo conjunto  $F \subset X$  vale que*

$$\dim_H(F) \leq \underline{\dim}_B(F) \leq \overline{\dim}_B(F).$$

*Demonstração.* A desigualdade  $\underline{\dim}_B(F) \leq \overline{\dim}_B(F)$  provém da definição de dimensão box-counting.

Vamos mostrar que a dimensão de Hausdorff nunca excede a dimensão box inferior.

Se  $\dim_H(F) = 0$ , o resultado é imediato.

Se  $\dim_H(F) > 0$ , então existe algum  $d \geq 0$  tal que  $H^d(F) > 1$ .

Vamos considerar  $N_\delta(F)$  como sendo o menor número de conjuntos de uma  $\delta$ -cobertura necessários para cobrir  $F$ .

Afirmamos que, para  $\delta$  pequeno o bastante, vale que

$$1 < H_\delta^d(F) \leq N_\delta(F) \cdot \delta^d.$$

Com efeito, a primeira desigualdade é válida porque, quando  $\delta \rightarrow 0$ , ocorre  $H_\delta^d(F) \rightarrow H^d(F) > 1$ . A segunda desigualdade é válida porque sabemos que  $N_\delta(F)$  conjuntos de diâmetro não excedendo  $\delta$  cobrem  $F$ , de modo que esses conjuntos pertencem à coleção da qual extraímos o ínfimo de  $\sum_{i=1}^{\infty} [\text{diam } U_i]^d$  para definir  $H_\delta^d(F)$ .

Tomando logaritmos em  $1 < N_\delta(F) \cdot \delta^d$ , e considerando  $\delta$  pequeno o bastante (a ponto de valer  $-\ln \delta > 0$ ) obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &< \ln[N_\delta(F)] + d \ln \delta \\ \Rightarrow -d \ln \delta &< \ln[N_\delta(F)] \\ \Rightarrow d &< \frac{\ln[N_\delta(F)]}{-\ln \delta} \\ \Rightarrow d &\leq \underline{\dim}_B(F). \end{aligned}$$

Isso vale para todo  $d \geq 0$  tal que  $H^d(F) > 1$ . Portanto também vale<sup>27</sup> para o caso-limite  $\sup\{d \geq 0; H^d(F) > 1\} = \sup\{d \geq 0; H^d(F) = \infty\} = \dim_H(F)$ .

Ou seja, de fato vale que  $\dim_H(F) \leq \underline{\dim}_B(F)$ . □

**Proposição B.7** (Propriedade da Estabilidade para Uniões Enumeráveis). *Seja  $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$  uma coleção enumerável de conjuntos. Vale que*

$$\dim_H \left[ \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right] = \sup_{i \in \mathbb{N}} [\dim_H F_i].$$

*Demonstração.* A dimensão de Hausdorff satisfaz a propriedade de monotonicidade: se  $E \subset G$ , então  $\dim_H E \leq \dim_H G$ . Isso é imediatamente verificável da propriedade de medida de que  $H^s(F) \leq H^s(G)$  para todo  $s \in \mathbb{R}$  quando  $E \subset G$ .

Pela monotonicidade, temos que  $\dim_H \left[ \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right] \geq \sup_{i \in \mathbb{N}} [\dim_H F_i]$ .

---

<sup>27</sup>Em razão do Corolário B.4.

Vejamos a desigualdade inversa.

Se  $\sup_{i \in \mathbb{N}} [\dim_H F_i] = \infty$ , nada há a ser provado.

Se  $\sup_{i \in \mathbb{N}} [\dim_H F_i] < \infty$ , tome  $s \in \mathbb{R}$  tal que  $s > \dim_H F_i$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Por definição, isso implica que  $H^s(F_i) = 0$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Como  $H^s$  é uma medida exterior, temos que

$$0 \leq H^s \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} H^s(F_i) = 0.$$

Por definição, isso mostra que  $\dim_H \left[ \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right] \leq s$ .

Como essa relação vale para todo  $s > \sup_{i \in \mathbb{N}} [\dim_H F_i]$ , segue que  $\dim_H \left[ \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right] \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} [\dim_H F_i]$ .

Portanto  $\dim_H \left[ \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right] = \sup_{i \in \mathbb{N}} [\dim_H F_i]$ . □

## Apêndice C: Contraexemplo Notável

Ao longo deste trabalho, demos ênfase à dimensão fractal, e não à dimensão de Hausdorff, por afirmar que, no contexto de sistemas dinâmicos, a dimensão fractal possui consequências teóricas mais interessantes.

Nas referências [17] e [43], mostrou-se o seguinte:

Seja  $H$  um espaço de Hilbert (possivelmente de dimensão infinita) e  $F \subset H$  um conjunto tal que  $\dim_F(F) < d/2$ . Então, para qualquer imersão  $P$  de  $F$  a  $\mathbb{R}^d$  e para qualquer  $\delta > 0$ , existe uma imersão  $\tilde{P}$  tal que  $\|\tilde{P} - P\| < \delta$  e que  $\tilde{P}|_X$  tem inversa Hölder-contínua. Esse fato implica que o atrator exponencial de um sistema dinâmico dissipativo de dimensão infinita também é o atrator exponencial de algum sistema de dimensão finita de equações diferenciais ordinárias.

Nosso propósito, agora, é indicar que um teorema de imersão similar a este não é possível quando apenas a dimensão de Hausdorff é finita, e não a dimensão fractal.

Vamos construir um conjunto  $C \subset \mathbb{R}^d$  do tipo Cantor cuja dimensão de Hausdorff é nula mas que possui a propriedade de que, para toda projeção de posto menor do que  $d$ , essa projeção não é injetora quando restrita a  $C$ .

O exemplo é devido a Ittai Kan e consta na referência [43]. A construção desse conjunto pressupõe familiaridade com representação binária de números não-inteiros<sup>28</sup>.

Nosso conjunto  $C$  será a união de dois conjuntos disjuntos,  $A = \bigcup_{n=1}^d A_n$  e  $B = \bigcup_{n=1}^d B_n$ .

Cada um dos conjuntos  $A_n$  e  $B_n$  vai ser definido de forma similar àquela apresentada no Exemplo 3.1.19. Depois disso, vamos mostrar que qualquer projeção  $P$  de posto menor do que  $d$  vai acarretar  $P(A) \cap P(B) \neq \emptyset$ , de modo que  $P|_C$  não pode ser injetiva.

Preliminarmente, vamos precisar definir algumas ferramentas auxiliares:

- Seja  $(M_j)_{j=1}^\infty \subset \mathbb{N}$  uma sequência de números naturais tais que  $0 = M_0 < M_1 < M_2 < \dots$  e tais que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{M_{j+1}}{M_j} = \infty.$$

- Seja  $K_d$  o cubo  $d$ -dimensional unitário  $K_d := \prod_{i=1}^d I_i$ , onde  $I_i := [0, 1]$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ . Ou, simplesmente,

$$K_d = [0, 1]^d.$$

- Dado um número  $x \in [0, 1]$ , vamos denotar por  $0.x^1x^2x^3\dots$  sua representação binária (ou seja, os dígitos  $x^l$  são ou 0 ou 1). Para evitar ambiguidades do tipo

---

<sup>28</sup>Esse tipo de construção não é incomum em geometria fractal. Pensemos no exemplo do Conjunto de Cantor clássico. Em geral, esse conjunto é definido recursivamente por meio da remoção sucessiva do terço-médio de intervalos específicos. Essa construção é clássica em Análise e baseia-se na interseção infinita de conjuntos. Contudo, uma definição equivalente pode ser feita por meios aritméticos: o Conjunto de Cantor é o conjunto dos números reais entre 0 e 1 cujas representações em base ternária (base 3) não possuem o dígito 1.

$0.1 = 0.10000\dots = 0.011111\dots$ , vamos considerar sempre a representação binária com infinitos dígitos não-nulos, a qual é única para cada número real.

Passemos à definição dos conjuntos  $A_n$ , cada qual contido em uma face<sup>29</sup> de  $K_d$ .

Um ponto  $a = (a_1, a_2, \dots, a_d) \in K_d$  vai pertencer a  $A_n$  apenas quando a representação binária de suas coordenadas  $a_i$  satisfizerem todas as seguintes condições:

1.  $a_i = 0.a_i^1 a_i^2 a_i^3 \dots$  (isto significa, apenas, que  $a_i \in [0, 1]$ ).
2. Se  $i = n$ , então  $a_i^i = 0$ . Ou seja,  $a_n^n = 0$ .
3. Se  $i \neq n$ , então, para todo  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ , vai ocorrer uma ou outra das seguintes condições:
  - (a)  $a_i^l = 0$  para todo  $l \in (M_{2k}, M_{2k+1}]$ ;
  - (b)  $a_i^l = 1$  para todo  $l \in (M_{2k}, M_{2k+1}]$ .

Vamos estimar por cima a dimensão box-counting inferior de  $A_n$ .

Embora não seja uma constatação trivial, note que a projeção de  $A_n$  no  $i$ -ésimo eixo coordenado é um conjunto do tipo Cantor que pode ser coberto por  $2^{r_k}$  intervalos de comprimento  $2^{-M_{2k+1}}$ , onde  $r_k := k + \sum_{j=1}^k (M_{2j} - M_{2j-1})$ . Por essa razão, fazendo o produto cartesiano de  $(d-1)$  fatores<sup>30</sup> entre todos esses intervalos, teremos uma cobertura de  $2^{(d-1)r_k}$  cubos  $d$ -dimensionais com lado medindo  $2^{-M_{2k+1}}$ .

Tomando  $N(A_n, \varepsilon)$  como sendo o menor número de cubos  $d$ -dimensionais de lado  $\varepsilon$  capazes de cobrir  $A_n$ , temos que

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_f(A_n) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(A_n, \varepsilon)}{-\ln \varepsilon} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^{(d-1)r_k}}{-\ln 2^{-M_{2k+1}}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(d-1)r_k}{-M_{2k+1}} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(d-1)M_{2k}}{M_{2k+1}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isso mostra que a dimensão box inferior de  $A_n$  é 0. Como a dimensão de Hausdorff de um conjunto limitado nunca excede sua dimensão box inferior, segue que  $\dim_H(A_n) = 0$ .

Definindo  $A := \bigcup_{n=1}^d A_n$ , temos que  $A$  também tem dimensão de Hausdorff nula, pois é união enumerável de conjuntos de dimensão de Hausdorff nula.

<sup>29</sup>Face  $(d-1)$ -dimensional.

<sup>30</sup>Precisamos de apenas  $(d-1)$  fatores, e não  $d$ , porque a projeção de  $A_n$  em uma das coordenadas é apenas um ponto, de modo que pode ser coberta por um único intervalo de comprimento  $2^{-M_{2k+1}}$ .

Vamos definir conjuntos  $B_n$  de maneira similar. Cada um desses conjuntos também vai estar contido em uma face de  $K_d$ .

Um ponto  $b = (b_1, b_2, \dots, b_d) \in K_d$  vai pertencer a  $B_n$  apenas quando a representação binária de suas coordenadas  $b_i$  satisfizerem todas as seguintes condições:

1.  $b_i = 0.b_i^1 b_i^2 b_i^3 \dots$  (isto significa, apenas, que  $b_i \in [0, 1]$ ).
2. Se  $i = n$ , então  $b_i^i = 1$ . Ou seja,  $b_n^n = 1$ .
3. Se  $i \neq n$ , então, para todo  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ , vai ocorrer uma ou outra das seguintes condições:
  - (a)  $b_i^l = 0$  para todo  $l \in (M_{2k+1}, M_{2k}]$ ;
  - (b)  $b_i^l = 1$  para todo  $l \in (M_{2k+1}, M_{2k}]$ .

Definindo  $B := \bigcup_{n=1}^d B_n$ , temos que  $B$  também tem dimensão de Hausdorff nula.

Agora, vamos definir  $C := A \cup B$ . Naturalmente,  $\dim_h(C) = 0$ .

Vejamos que nenhuma projeção de posto menor do que  $d$  pode ser injetora quando restrita a  $C$ .

Seja  $P$  uma projeção de posto menor do que  $d$ . Seja  $v = (v_1, \dots, v_d) \in \ker(P)$  tal que  $|v_i| \leq 1$  para todo  $i$ , com  $v_n = 1$  para algum  $n$  específico.

Vamos mostrar que  $P|_C$  não é injetiva apresentando  $b \in B$  e  $a \in A$  tais que

$$0 \neq v = b - a.$$

Para isso, escolhemos esses pontos  $a$  e  $b$  da seguinte forma.

1. Se  $i = n$ , então  $a_i^i = 0$  e  $b_i^i = 1$ . Ou seja,  $a_n^n = 0$  e  $b_n^n = 1$ .
2. Se  $i \neq n$  e  $k \geq 0$ , então devem ocorrer simultaneamente
  - (a)  $a_i^l = 0$  e  $b_i^l = v_i^l$  para todo  $l \in (M_{2k}, M_{2k+1}]$ ;
  - (b)  $a_i^l \equiv (v_i^l + 1) \pmod{2}$  e  $b_i^l = 1$  para todo  $l \in (M_{2k+1}, M_{2k+2}]$ ;

Por definição,  $a \in A$  e  $b \in B$ . Por construção,  $v = b - a$ .

Como  $P(b - a) = 0$ , segue que  $P(b) = P(a)$ , com  $b \neq a$ . Ou seja,  $P$  não é injetora e, portanto, não tem inversa.



# Referências Bibliográficas

- [1] Azcan, H. et al, *The box-counting dimension of the sine-curve*, Mathematica Slovaca, 49.3, p 367-370., 1999.
- [2] Backes, L.; Baraviera, A. T.; Branco, F. M., *Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos Via Exemplos*, IMPA, Rio de Janeiro, 2023.
- [3] Barnsley, M. F., *Fractals Everywhere*, 2 ed., Morgan Kaufmann, New York, 1993.
- [4] Blake, W., *The Complete Poetry and Prose of William Blake*, Anchor Books, New York, 1997.
- [5] Boyer, C. B.; Merzbach, U. C. *História da Matemática*, 3a ed., Blucher, São Paulo, 2012.
- [6] Calvino, I., *As Cidades Invisíveis*, Companhia das Letras, São Paulo, 1990.
- [7] Carvalho, A. N.; Langa, J. A.; Robinson, J. C., *Attractors for Infinite-Dimensional Non-Autonomous Dynamical Systems*, Springer, New York, 2013.
- [8] Carvalho, A. N.; Sonner, S., *Pullback exponential attractors for evolution processes in Banach spaces: theoretical results*, Communications on Pure and Applied Analysis, 2013, 12(6): 3047-3071. doi: 10.3934/cpaa.2013.12.3047.
- [9] Chueshov, I., *Dynamics of Quasi-Stable Dissipative Systems*, Springer, New York, 2015.
- [10] Chueshov, I., *Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems*, Acta, Kharkov, 2002.
- [11] Chueshov, I.; Lasiecka, I., *Kolmogorov's  $\varepsilon$ -entropy for a class of invariant sets and dimension of global attractors for second-order evolution equations with nonlinear damping*. In.: Control Theory of Partial Differential Equations, p. 51-70. Retrieved from <https://digitalcommons.memphis.edu/facpubs/5012>, 2005.
- [12] Edgar, G. (ed.), *Classics on Fractals*, Westview Press, Colorado, 2004.
- [13] Edgar, G., *Integral, Probability, and Fractal Measures*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [14] Edgar, G., *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Springer, New York, 2nd ed., 2008.

- [15] Falconer, K. J., *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, Wiley, Chichester, 3rd ed., 2014.
- [16] Falconer, K. J., *Techniques in Fractal Geometry*, John Wiley and Sons Ltd., Chichester, 1997.
- [17] Foias, C.; Olson, E., *Finite Fractal Dimension and Hölder-Lipschitz Parametrization*, Indiana University Mathematics Journal, vol. 45, no. 3, p. 603-616, 1996.
- [18] Folland, G. B., *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley and Sons Ltd., New York, 2. ed., 1999.
- [19] Gel'fand, I. M., *Functional Analysis*. In: Aleksandrov, A. D.; Kolmogorov, A. N.; Lavrent'ev, M. A. (eds.), *Mathematics: Its Content, Methods, and Meaning*, Dove Publications, New York, 1999.
- [20] Ladyzhenskaya, O., *Attractors for Semigroups and Evolution Equations (foreword by G. A. Seregin, V. K. Kalantarov and S. V. Zelik)*, Cambridge University Press, Cambridge, 2022.
- [21] Lima, E. L., *Curso de Análise – vol. 1*, IMPA, Rio de Janeiro, 15. ed., 2019.
- [22] Lima, E. L., *Curso de Análise – vol. 2*, IMPA, Rio de Janeiro, 12. ed., 2020.
- [23] Lima, E. L., *Espaços Métricos*, IMPA, Rio de Janeiro, 6. ed., 2020.
- [24] Fabian, M. et al., *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, Springer, New York, 2001.
- [25] Holmes, P., *A Short History of Dynamical Systems Theory*. In: Hansen, V. L.; Gray, J. (ed.), *History of Mathematics*, vol. 1, UNESCO-EOLSS, London, 2010.
- [26] Katok, A.; Hasselblatt, B., *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 8a reimpressão, 2006.
- [27] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1978.
- [28] Mandelbrot, B., *The Fractal Geometry of Nature*, Echo Point Books & Media, LLC, 2021.
- [29] Mañe, R., *Lecture Notes in Mathematics*, p. 230-242, vol. 898, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [30] Melville, H., *Moby Dick*, Nova Fronteira, São Paulo, 21. ed., 2019.
- [31] Perosini, G. L., *Introdução à Geometria Fractal: dimensões não-inteiras, auto-similaridade e sistemas de funções iteradas*, Trabalho de Conclusão de Curso (bacharelado em Matemática), Universidade Estadual de Londrina, 2022.
- [32] Poincaré, H., *Ensaaios Fundamentais*, Contraponto, PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2008.

- [33] Reif, F., *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*, Waveland Press, Illinois, 2009.
- [34] Riddle, L., *Larry Riddle Webpage*, Classic Iterated Function Systems, disponível em <<https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/kcurve/kcurve.htm>>. Acesso em 12 de fev. de 2025.
- [35] Robinson, J. C., *An Introduction to Functional Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2020.
- [36] Robinson, J. C., *Dimensions, Embeddings, and Attractors*, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [37] Robinson, J. C., *Global attractors: topology, and finite-dimensional dynamics*, Journal of Dynamics and Differential Equations, 11, p. 557-581, 1999.
- [38] Robinson, J. C., *Infinite-Dimensional Dynamical Systems: An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [39] Robinson, J. C., *Parametrization of Global Attractors, Experimental Observations, and Turbulence*. J. Fluid Mech. 578, 495–507. 2007.
- [40] Rovelli, C., *A Ordem do Tempo*, Objetiva, São Paulo, 2018.
- [41] Rudin, W., *Princípios de Análise Matemática*, Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1971.
- [42] Russell, B., *Complete Philosophical Writings of Bertrand Russell*, Grapevine India, Bombai, 2024.
- [43] Sauer, T. et. al., *Embedology*, Journal of Statistical Physics, vol. 65, p. 579-616, 1991.
- [44] Schrödinger, E., *O que é Vida? O aspecto físico da célula viva*, Editora UNESP, São Paulo, 1997.
- [45] Stewart, J., *Cálculo, volume I*, 2 ed., Cengage Learning, São Paulo, 2010.
- [46] Strogatz, S. H., *Nonlinear Dynamics and Chaos with applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, CRC Press, Boca Raton, 2018.
- [47] Temam, R., *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, 2 ed., Springer-Verlag, New York, 1997.
- [48] Zhijun, T.; Senlin, Y.; Yao, X.; Chengkui, Z., *Finite-dimensionality of attractors for wave equations with degenerate nonlocal damping*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2025, 45(1): 219-247. doi: 10.3934/dcds.2024091
- [49] Tikhomirov, V.M.,  *$\varepsilon$ -Entropy and  $\varepsilon$ -Capacity of Sets In Functional Spaces*. In: Shirayayev, A.N. (ed.), Selected Works of A. N. Kolmogorov, Volume III: Information Theory and Theory of Algorithms, Springer, Dordrecht, 1993.