UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

LEONARDO GUSTAVO RONCHIN ALVES

DISSIPAÇÃO FRACIONÁRIA EM SISTEMAS ABSTRATOS DO TIPO TIMOSHENKO

Londrina
2025

LEONARDO GUSTAVO RONCHIN ALVES

DISSIPAÇÃO FRACIONÁRIA EM SISTEMAS ABSTRATOS DO TIPO TIMOSHENKO

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Nunes Monteiro

Londrina
2025

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação -na-Publicação (CIP)

S232c Alves, Leonardo Gustavo Ronchin.
Dissipação Fracionária em Sistemas Abstratos do Tipo Timoshenko
Leonardo Gustavo Ronchin Alves. – Londrina, 2025.
141 f. : il.

Orientador: Rodrigo Nunes Monteiro.
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2025.

Inclui Bibliografia.

1. Semigrupos Lineares - Teses. 2. Problema de Timoshenko Abstrato. 3. Estabilidade - Teses. 4. Regularidade - Teses. 5. Potências Fracionárias de Operadores - Teses. I. Monteiro, Rodrigo Nunes. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

CDU 51

LEONARDO GUSTAVO RONCHIN ALVES

DISSIPAÇÃO FRACIONÁRIA EM SISTEMAS ABSTRATOS DO TIPO TIMOSHENKO

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rodrigo Nunes Monteiro
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Hugo D. Fernández Sare
Universidade Federal de Juiz de Fora

Profa. Dra. Michele de Oliveira Alves
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 17 de Fevereiro de 2025

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus pela saúde, proteção e bênçãos ao longo de toda a minha vida.

Agradeço aos meus pais, Regiane e José, por todo o apoio durante todos estes anos. Sem vocês, nada disso teria sido possível. Gostaria de agradecer também à minha namorada, Maria Vitória, por todo o apoio e companheirismo durante o tempo em que estamos juntos.

Agradeço aos meus amigos Ayumi, Catharina, Éric, Gustavo, Leonardo, Luana e Miguel por estarem presentes quando eu mais precisava e por terem me escutado durante todos estes anos.

Agradeço aos Profs. Drs. Arthur, Márcio, Michele e Rodrigo por toda a contribuição e apoio durante a graduação e o mestrado. Só foi possível chegar aqui graças a vocês. Em especial, agradeço aos Profs. Drs. Arthur, Hugo e Michele pelas sugestões referentes à dissertação.

Gostaria de agradecer novamente ao professor Rodrigo por ter acreditado em mim e me apoiado durante o mestrado. Sem sua orientação, este trabalho não seria possível. Se hoje consigo enxergar o mundo acadêmico como uma possibilidade real, é graças às nossas conversas e discussões durante estes anos.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

ALVES, Leonardo Gustavo Ronchin. **Dissipação Fracionária em Sistemas Abstratos do Tipo Timoshenko**. 2025. 141. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2025.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo estudar e aplicar condições de estabilidade e regularidade para um semigrupo. Primeiramente, estudaremos as condições necessárias e suficientes para que um operador linear seja o gerador de um C_0-semigrupo exponencialmente estável ou analítico, e enunciaremos e demonstraremos os principais resultados da teoria de semigrupos lineares que caracterizam essas propriedades a partir do resolvente do operador que gera esse semigrupo. Além disso, aplicaremos essa teoria ao estudo de um problema abstrato do tipo Timoshenko com dissipação friccional dada por meio de potências fracionárias de um operador linear, mostrando que a estabilidade e a regularidade obtidas para a solução deste problema dependem diretamente da região em que se encontram os expoentes fracionários. Para a estabilidade da solução, estudaremos quando o semigrupo é polinomialmente ou exponencialmente estável, enquanto, para a regularidade, determinaremos em quais condições ocorre analiticidade e, nas demais regiões, estudaremos a classe de Gevrey deste semigrupo.

Palavras-chave: Semigrupos Lineares. Estabilidade Exponencial. Analiticidade. Sistema de Timoshenko Abstrato.

ALVES, Leonardo Gustavo Ronchin. **Fractional Damping for an Abstract Timoshenko Type System**. 2025. 141. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2025.

ABSTRACT

This work aims to study and apply stability and regularity conditions for a semigroup. First, we will examine the necessary and sufficient conditions for a linear operator to be the generator of an exponentially stable or analytic C_0-semigroup, and we will state and prove the main results from the theory of linear semigroups that characterize these properties based on the resolvent of the operator generating this semigroup. Furthermore, we will apply this theory to study an abstract Timoshenko problem with frictional dissipation given by fractional powers of a linear operator, showing that the stability and regularity obtained for the solution of this problem depend directly on the region in which the fractional exponents are located. For the stability of the solution, we will study when the semigroup is polynomially or exponentially stable, whereas for regularity, we will determine the regions where analyticity occurs and, in other regions, we will investigate the Gevrey class of this semigroup.

Keywords: Linear Semigroups. Exponential Stability. Analyticity. Abstract Timoshenko System.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Sistema de Timoshenko: O sistema de Timoshenko proposto em [39] é um modelo matemático amplamente utilizado nas áreas de Engenharia e Física para estudar a dinâmica do movimento de uma viga. As equações que descrevem esse movimento, incluindo os efeitos dissipativos, são dadas por

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \text{dissipação}_\varphi = 0, \tag{1.1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \text{dissipação}_\psi = 0, \tag{1.2}$$

em que φ representa o deslocamento vertical e ψ a variação do ângulo da reta normal ao eixo horizontal. Os números k, b, ρ_1 e ρ_2 são constantes positivas que representam propriedades físicas da viga.

Na nossa revisão da literatura, destacamos os principais resultados de análise de estabilidade para o sistema de Timoshenko sob a influência de dissipação friccional. Essa dissipação pode estar presente em uma única equação (ou seja, $\text{dissipação}_\varphi = 0$ ou $\text{dissipação}_\psi = 0$) ou ambas simultaneamente. Em [34], o sistema foi estudado adotando $\text{dissipação}_\varphi = 0$ e $\text{dissipação}_\psi = \psi_t$, onde o autor demonstrou o decaimento exponencial assumindo a igualdade na velocidade das ondas dadas por

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b}. \tag{1.3}$$

Assumindo (1.3), o mesmo resultado foi obtido em [1, 2, 5, 27, 41]. Em [1], os autores consideraram $\text{dissipação}_\varphi = 0$ e $\text{dissipação}_\psi = \alpha(\psi_t)$, em que α é uma função real, não linear e crescente. No caso linear, com $\text{dissipação}_\varphi = 0$ e $\text{dissipação}_\psi = a(\cdot)\psi_t$, os autores de [5] estudaram o sistema de Timoshenko considerando coeficientes variáveis e $a(\cdot)$ como uma função contínua e positiva. Em [27], foi considerada a condição $\text{dissipação}_\varphi = 0$ e com dissipação indefinida dada por $\text{dissipação}_\psi = a(\cdot)\psi_t$, em que $a \in L^\infty$. Em [41], o problema foi estudado com $\text{dissipação}_\varphi = 0$ e dissipação localizada $\text{dissipação}_\psi = a(\cdot)\psi_t$. Diferentemente dos trabalhos citados anteriormente, em [2], os autores consideraram a dissipação friccional atuando apenas no deslocamento vertical, ou seja, $\text{dissipação}_\varphi = \gamma\varphi_t$ e $\text{dissipação}_\psi = 0$.

Embora a condição (1.3) seja válida matematicamente, ela não é necessáriamente válida fisicamente. Essa limitação motivou estudos utilizando dois efeitos dissipativos, com o objetivo de obter a estabilidade exponencial independente da condição (1.3). Em [32], o problema dado por (1.1)-(1.2) foi investigado considerando $\text{dissipação}_\varphi = \varphi_t$ e $\text{dissipação}_\psi = \psi_t$, obtendo-se estabilidade exponencial. De maneira similar, em [9], os autores examinaram o caso em que as dissipações $\text{dissipação}_\varphi = \varphi_t$ e $\text{dissipação}_\psi = \psi_t$ são localizadas. Por outro lado, em [37], o autor considerou dissipações localizadas dadas por dissipação$_\varphi$ = dissipação$_\psi$ $= \varphi_t + \psi_t$. Recentemente, em [28], foi estudado um caso de dissipação pontual, no qual os autores consideraram dissipação$_\varphi$ $= \varphi_t$ e dissipação$_\psi$ $= \psi_t$. De maneira geral, os resultados obtidos nesses trabalhos mostraram que a taxa de decaimento da energia do sistema continua sendo exponencial.

Sistema abstrato do tipo Timoshenko: No presente trabalho, nosso objetivo é reformular o modelo (1.1)-(1.2) em uma forma generalizada e analisar os resultados obtidos. Mais especificamente, estudaremos as propriedades do semigrupo gerado pelas seguintes equações, conhecidas como o modelo abstrato do tipo Timoshenko

$$\rho_1\varphi_{tt} + kA^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi) + A^{\alpha}\varphi_t = 0 \tag{1.4}$$

$$\rho_2\psi_{tt} + bA\psi + k(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi) + A^{\beta}\psi_t = 0. \tag{1.5}$$

Neste caso, consideramos $A : \mathrm{D}(A) \subset H \to H$ sendo um operador estritamente positivo, auto-adjunto e com o domínio densamente imerso no espaço de Hilbert separável $(H, \|\cdot\|, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Os coeficientes ρ_1, ρ_2, k e b são constantes positivas e também consideramos $\alpha, \beta \in [-1, 1]$. Além disso, para obter a falta de estabilidade exponencial e analiticidade, assumiremos como hipótese que A^{-1} existe e é um operador compacto.

Observação 1.1. *As condições impostas no operador A garantem que suas potências fracionárias estejam bem definidas. Ressaltamos que a definição precisa de potências fracionárias de operadores utilizada neste trabalho se encontram no Apêndice A.3.*

Observação 1.2. *As propriedades exigidas em A, $\mathrm{D}(A)$ e H, são válidas caso consideremos o sistema de Timoshenko dado em* (1.1)-(1.2) *sob condições de fronteira de Dirichlet. Neste caso, basta considerarmos $H = L^2(0,\ell)$ e o operador linear $A(\cdot) = -(\cdot)_{xx}$ com domínio* $\mathrm{D}(A) = H^2(0,\ell) \cap H_0^1(0,\ell)$.

Partindo dos resultados obtidos das referências citadas, nosso foco é analisar os efeitos dos coeficientes α e β sobre a solução obtida para sistema (1.4)-(1.5). Para tanto, no Capítulo 4, mostraremos que é possível reformular este sistema em um problema de Cauchy abstrato equivalente da forma

$$\frac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}U(t),$$

em que $\mathcal{A} : \mathrm{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{H}$ dependem de A, $\mathrm{D}(A)$ e H, e serão futuramente determinados.

A partir desta reformulação, podemos utilizar a teoria de semigrupos lineares para garantir a existência e unicidade de solução para o problema (1.4)-(1.5). Para cada dado inicial $U_0 \in \mathcal{H}$, a solução é dada em função do semigrupo linear $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ gerado por $\mathcal{A}$, mais especificamente temos $U(t) = S_{\mathcal{A}}(t)U_0$, onde o tipo de solução (clássica ou generalizada) depende da regularidade do dado inicial U_0 (ver Teorema 4.6).

Deste modo, estudando algumas das propriedades do conjunto resolvente $\varrho(\mathcal{A})$ e do operador resolvente $(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ quando $\lambda \in \mathbb{R}$, obtemos condições que garantem o decaimento e a regularidade do semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ e, consequentemente, garantimos o mesmo para a solução do sistema (1.4)-(1.5) (Ver Apêndice A.1 para a definição de resolvente e operador resolvente).

Para condições de estabilidade, verificaremos quando o semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ é polinomialmente ou exponencialmente estável, isto é:

Definição 1.3. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\mathcal{A} : \mathrm{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ o gerador de um C_0-semigrupo limitado $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$. Dizemos que este semigrupo é:*

(i) *Polinomialmente estável com taxa $\tau > 0$ caso exista $C > 0$ de modo que dado $U_0 \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$, obtemos*

$$\|S_{\mathcal{A}}(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leqslant Ct^{-\frac{1}{\tau}}\|U_0\|_{\mathrm{D}(\mathcal{A})},\ t \geqslant 1;$$

(ii) *Exponencialmente estável caso existam $C, \gamma > 0$ tais que*

$$\|S_{\mathcal{A}}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leqslant Ce^{-\gamma t},\ t \geqslant 0.$$

A fim de verificar estas condições, utilizaremos os Teoremas de Borichev-Tomilov e de Pruss.

Teorema 1.4 (Borichev-Tomilov, [7])**.** *Seja $\mathcal{A} : \mathrm{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo limitado $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ definido no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Se $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$, então fixada uma constante $\tau > 0$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *O semigrupo é polinomialmente estável com taxa $\tau > 0$.*

(b) $\limsup\limits_{|\lambda|\to\infty} |\lambda|^{-\tau}\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty$*;*

Teorema 1.5 (Pruss, [31])**.** *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\mathcal{A} : \mathrm{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$. Então, este semigrupo é exponencialmente estável se, e somente se,*

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}) \quad e \quad \limsup_{|\lambda|\to\infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty.$$

Para condições de regularidade, buscaremos estudar quando $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ é diferenciável. Primeiramente, verificaremos quando este semigrupo é analítico utilizando o seguinte teorema:

Teorema 1.6. *Sejam X um espaço de Banach, $\mathcal{A} : \mathrm{D}(\mathcal{A}) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo limitado $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ e suponha que $0 \in \varrho(\mathcal{A})$. Então, este semigrupo é analítico se, e somente se,*

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}) \quad e \quad \limsup_{|\lambda|\to\infty} |\lambda|\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty.$$

Veremos no Capítulo 3 que analiticidade implica na diferenciabilidade do semigrupo. A fim de obtermos mais regiões de regularidade, estudaremos quando um semigrupo pertence a alguma classe de Gevrey:

Definição 1.7. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $t_0 \geqslant 0$ fixado. Um C_0-semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ definido em $\mathcal{H}$ é de Gevrey de classe $\delta > 1$, para $t > t_0$, se $t \mapsto S_{\mathcal{A}}(t)$ é diferenciável e para quaisquer $\mu > 0$ e $K \subset (t_0, \infty)$ compacto, existe $C > 0$ tal que*

$$\|S^{(n)}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leqslant C\mu^n (n!)^\delta, \ \forall t \in K \quad e \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Para caracterizar quando um semigrupo é de Gevrey por meio de estimativas no operador resolvente do gerador infinitesimal, utilizaremos o método proposto por Taylor (ver [36], página 153).

Teorema 1.8. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\mathcal{A} : \mathrm{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo limitado $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$. Se $i\mathbb{R} \subset \varrho(A)$ e para algum $0 < \tau < 1$ temos*

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} |\lambda|^\tau \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty,$$

então o semigrupo é de Gevrey de classe $\delta > \frac{1}{\tau}$, para $t > 0$.

Deste modo, neste trabalho, os resultados obtidos para o modelo (1.4)-(1.5) podem ser classificados em duas categorias: **resultados de estabilidade e resultados de regularidade.**

Estabilidade: Utilizando o Teorema 1.4, demonstraremos que o semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ exibe decaimento polinomial com taxa $\tau(\alpha, \beta) = 2|\min\{\alpha, \beta\}|$ para $\alpha, \beta \in [-1, 1]$ (ver Teorema 4.15).

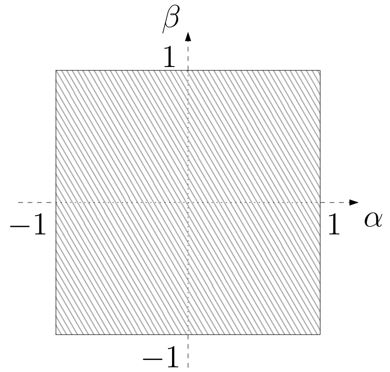

Figura 1.1: Estabilidade Polinomial

A estabilidade exponencial será analisada utilizando o Teorema 1.5. Deste modo, obtemos esse decaimento para $\alpha, \beta \in [0, 1]$ (ver Teorema 4.16). Além disso, caso

$(\alpha,\beta) \in \big([-1,0)\times\{0\}\big) \cup \big(\{0\}\times[-1,0)\big)$ e a igualdade da velocidade das ondas dada em (1.3) for satisfeita, o semigrupo também será exponencialmente estável (ver Teorema 4.18).

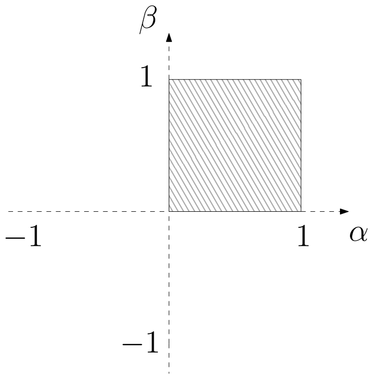

Figura 1.2: Est. Exponencial para $\frac{k}{\rho_1} \neq \frac{b}{\rho_2}$

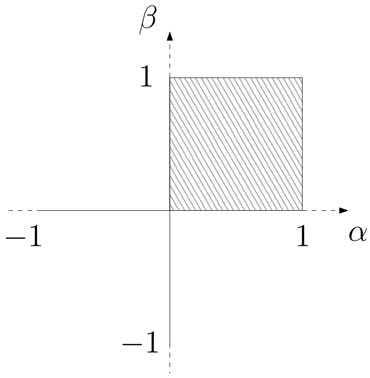

Figura 1.3: Est. Exponencial para $\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$

Além disso, demonstraremos que, nas demais regiões, o semigrupo não é exponencialmente estável (ver teoremas 4.19, 4.20 e 4.24).

Regularidade: A fim de garantir a diferenciabilidade de $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$, utilizaremos os teoremas 1.6 e 1.8. Primeiramente, demonstraremos que o semigrupo é analítico se, e somente se, $\alpha,\beta \in [\frac{1}{2},1]$, (ver teoremas 4.26 e 4.27).

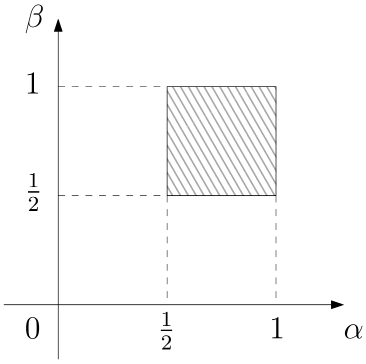

Figura 1.4: Analiticidade

Com o intuito de utilizar o Teorema 1.8 para obter as classes de Gevrey de $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$, definimos as regiões

$$R_1 = \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \min\{\alpha,\beta\} \leqslant \tfrac{1}{3} \quad \text{e} \quad \alpha+\beta \leqslant 1\right\}$$

e

$$R_2 = \big[(0,1]\times(0,1]\big] \setminus \left[R_1 \cup \left([\tfrac{1}{2},1]\times[\tfrac{1}{2},1]\right)\right].$$

Assim, obtemos a classe de Gevrey para $(\alpha,\beta) \in R_1 \cup R_2$ (ver Teorema 4.31).

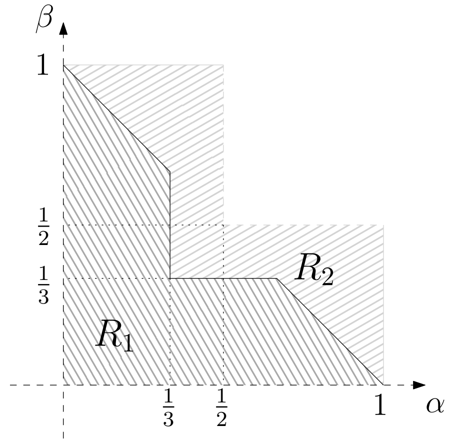

Figura 1.5: Classe de Gevrey

Ressaltamos também que o semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ também é de Gevrey na região de analiticidade, isto é, quando $\alpha, \beta \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Deste modo, os resultados obtidos no Capítulo 4 estão sumarizados na seguinte tabela:

	Expoentes	Taxa
Est. Polinomial	$\alpha, \beta \in [-1, 1]$	$2\|\min\{\alpha, \beta\}\|$
Est. Exponencial	$\alpha, \beta \in [0, 1]$ ou $\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$ e $(\alpha, \beta) \in \big(\{0\} \times [-1, 0)\big) \cup \big([-1, 0) \times \{0\}\big)$	-
Falta de Est. Exponencial	Demais Casos	-
Classe de Gevrey	$\alpha, \beta \in (0, 1)$	$2\min\{\alpha, \beta\}$ em R_1 $\min\{\alpha, \beta\}$ em R_2
Analiticidade	$\alpha, \beta \in [\frac{1}{2}, 1]$	-
Falta de Analiticidade	Demais Casos	-

Tabela 1.1: Resultados Obtidos

Comparação com a literatura e principais contribuições: Dentre os resultados obtidos para modelos abstratos, baseamo-nos nas ideias propostas por [4, 10, 11, 13, 15, 19, 24, 35]. Em particular, destacamos os resultados apresentados em [13, 24, 35], que tratam de sistemas do tipo Timoshenko e da dissipação dada por potências fracionárias de operadores. Em [13], os autores consideraram o modelo abstrato do tipo Timoshenko termoelástico.

Especificamente, analisaram o modelo dado pelo seguinte sistema

$$\begin{aligned}\rho_1\varphi_{tt} + kA^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi) = 0,\\ \rho_2\psi_{tt} + bA\psi + k(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi) - \delta A^{\beta}\theta = 0,\\ \rho_3\theta_t + cA\theta + \delta A^{\beta}\psi_t = 0.\end{aligned}$$

Os autores demonstraram decaimento exponencial se, e somente se, $\beta = \frac{1}{2}$ e a condição (1.3) é satisfeita. Além disso, foi obtido decaimento polinomial quando $\beta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Em [35], embora o modelo não tenha sido tratado de maneira abstrata, foram consideradas dissipações friccionais fracionárias, dissipação$_\varphi = A^{\alpha}\varphi_t$ e dissipação$_\psi = A^{\beta}\psi_t$, com $A = -\Delta$, para o seguinte sistema

$$\begin{aligned}\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + A^{\alpha}\varphi_t = 0,\\ \rho_2\psi_{tt} + bA\psi + k(\varphi_x + \psi) + A^{\beta}\psi_t = 0.\end{aligned}$$

Neste trabalho, a estabilidade exponencial ocorre se $\alpha, \beta \in [0, 1]$, a analiticidade ocorre se $\alpha, \beta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ e, além disso, a classe de Gevrey é dada por $\delta > \frac{1}{\tau(\alpha,\beta)}$ quando $\alpha, \beta \in (0, 1)$, em que $\tau(\alpha, \beta) = 2\min\left\{\frac{\alpha}{1+\alpha}, \frac{\beta}{1+\beta}\right\}$. De maneira semelhante, em [24], foram estudados os seguintes sistemas de Timoshenko termoelásticos com dissipação fracionária:

$$\begin{aligned}\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \mu_1 A^{\alpha}\varphi_t = 0,\\ \rho_2\psi_{tt} + bA\psi + k(\varphi_x + \psi) + \eta\theta_{tx} + \mu_2 A^{\beta}\psi_t = 0,\\ \rho_3\theta_{tt} + \delta A\theta + \eta\psi_{tx} + KA^{\gamma}\theta_t = 0,\end{aligned} \tag{1.6}$$

e

$$\begin{aligned}\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \mu\theta_{tx} + \mu_1 A^{\alpha}\varphi_t = 0,\\ \rho_2\psi_{tt} + bA\psi + k(\varphi_x + \psi) - \mu\theta_t + \mu_2 A^{\beta}\psi_t = 0,\\ \rho_3\theta_{tt} + \delta A\theta + \mu(\varphi_x + \psi)_t + \eta A^{\gamma}\theta_t = 0.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Para esses sistemas, obteve-se estabilidade exponencial para $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$, classe de Gevrey $\delta > \frac{1}{\tau(\alpha,\beta,\gamma)}$, com $\tau(\alpha, \beta, \gamma) = \min\left\{\frac{\alpha}{2+\alpha}, \frac{\beta}{2+\beta}, \frac{\gamma}{2+\gamma}\right\}$, e analiticidade quando $\alpha, \beta, \gamma \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ para o sistema (1.6), e para $\alpha, \beta, \gamma \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ e $\beta = \gamma$ no caso do sistema (1.7).

Ressaltamos que, em [24] e [35], os autores não abordam a presença de expoentes negativos nos parâmetros de dissipação, nem tratam de aspectos específicos relacionados à falta de estabilidade e à caracterização de analiticidade dos sistemas estudados. A ausência dessas análises na literatura existente destaca as principais contribuições deste trabalho.

Organização: O presente trabalho está organizado da seguinte forma.

Capítulo 2: Neste capítulo, provaremos o Teorema 1.5 e sua versão para semigrupos limitados de maneira geral, seguindo as ideias propostas por [26] e [31].

Capítulo 3: O foco principal será a demonstração do Teorema 1.6. Para isso, caracterizaremos os semigrupos analíticos com base na sequência lógica apresentada por [29] e [30]. Além disso, exploraremos condições necessárias para que operadores auto-adjuntos gerem semigrupos analíticos, conforme proposto por [14].

Capítulo 4: Apresentaremos a existência e unicidade da solução para o sistema (1.4)-(1.5) e utilizando os teoremas 1.4-1.8 analisaremos o decaimento e a regularidade da solução.

Apêndice A: Enunciaremos os resultados preliminares da Teoria de Semigrupos Lineares, incluindo a fundamentação teórica e as propriedades das potências fracionárias de operadores que serão necessárias no Capítulo 4.

Ressaltamos que parte dos resultados apresentados no Capítulo 4 são inéditos e foram desenvolvidos pelos autores com o objetivo de integrar este trabalho. Embora os resultados dos Capítulos 2 e 3 tenham sido amplamente abordados na literatura, os principais teoremas contidos nessas seções são fundamentais para a aplicação da teoria. Portanto, os apresentaremos para garantir a completude do trabalho; no entanto, leitores que já possuem familiaridade com o tema podem optar por omitir essa leitura.

2 SEMIGRUPOS EXPONENCIALMENTE ESTÁVEIS

Dado um operador linear $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$, onde X é um espaço de Banach, podemos estudar a existência, unicidade e regularidade de solução para o problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au(t), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

quando A gera um semigrupo (Ver Apêndice A.2 para as definições e resultados introdutórios da teoria de semigrupos lineares). Neste caso, a solução é dada por $u(t) = S(t)u_0$, onde $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é o C_0-semigrupo de contrações gerado por A.

Nesta seção, estudaremos quais condições devem ser impostas ao problema para que o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ seja exponencialmente estável, isto é, existem $M, \gamma > 1$ tais que existam $M, \gamma > 0$ tais que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{-\gamma t}, \ \forall t \geqslant 0.$$

Para o caso real, sabemos que o problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = au(t), \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

admite uma única solução $u(t) = u_0 e^{at}$, que é exponencialmente estável caso $a < 0$. Do mesmo modo, se $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma matriz $n \times n$, então o problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au(t), \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

admite uma única solução

$$u(t) = e^{At}u_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} u_0.$$

Sabemos que neste caso, o semigrupo $\{e^{At}\}_{t\geqslant 0}$ será exponencialmente estável quando a parte real de todos os autovalores de A é negativa e a taxa de decaimento é dada por

$$\begin{aligned} \gamma &= \max\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \text{ é autovalor de } A\} \\ &= \max\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}. \end{aligned}$$

2.1 TIPO DE UM SEMIGRUPO

Dado um C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$, existem $M \geqslant 1$ e $w \geqslant 0$ tais que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{wt},\ \forall t \geqslant 0, \tag{2.1}$$

(Ver [29], página 27, Observação 1.24). Neste sentido, a fim de encontrar o menor valor de $w \in \mathbb{R}$ que satisfaça esta desigualdade, temos a seguinte definição.

Definição 2.1. *Seja $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. O tipo do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ gerado por A é dado por*

$$w_0(A) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t}.$$

Note que por definição, caso exista o limite $w_0(A)$, então devemos ter $-\infty \leqslant w_0(A) < \infty$, uma vez que por (2.1), temos

$$\frac{\ln \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t} \leqslant \frac{\ln M}{t} + w,$$

de modo que

$$w_0(A) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t} \leqslant w < \infty.$$

Proposição 2.2. *Seja $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Então, existe $w_0(A)$ tal que $-\infty \leqslant w_0(A) < \infty$. Além disso, para cada $w > w_0(A)$, existe $M \geqslant 1$ tal que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{wt},\ \forall t \geqslant 0. \tag{2.2}$$

Demonstração. Sabemos que existem $w \geqslant 0$ e $M \geqslant 1$ tais que a estimativa em (2.2) é válida. Assim, para $t \geqslant 0$ defina $f(t) = \ln \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$. Note que f é subaditiva, pois

$$\ln \|S(t+r)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \ln(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|S(r)\|_{\mathcal{L}(X)}) = \ln \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} + \ln \|S(r)\|_{\mathcal{L}(X)}.$$

Além disso, temos

$$f(t) = \ln \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \ln(Me^{wt}) = \ln M + wt$$

e caso $t \in [0, T]$, para algum $T > 0$ fixado, segue que existe $k > 0$ tal que

$$f(t) = \ln \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant k.$$

Deste modo, defina $w_0(A) := \inf\limits_{t>0} \dfrac{f(t)}{t}$, de modo que $-\infty \leqslant w_0(A) < \infty$.

Assim, vamos avaliar os seguintes casos:

(a) $w_0(A) > -\infty$.

Neste caso, sabemos que

$$w_0(A) = \inf_{t>0} \frac{f(t)}{t} \leqslant \frac{f(t)}{t} \leqslant \frac{\ln M}{t} + w,\ \forall t > 0.$$

Então dado $\varepsilon > 0$, existe $T > 0$ tal que

$$w_0(A) \leqslant \frac{f(T)}{T} < w_0(A) + \varepsilon.$$

Tomando $t \geqslant T$, podemos escrever

$$t = nT + r,\ n \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leqslant r < T.$$

Deste modo,

$$w_0(A) \leqslant \frac{f(t)}{t} = \frac{f(nT+r)}{t} \leqslant \frac{f(nT)+f(r)}{t} \leqslant n\frac{f(T)}{t} + \frac{f(r)}{t}.$$

Com isso

$$\frac{f(t)}{t} < \frac{nT}{t}(w_0(A)+\varepsilon) + \frac{k}{t} = \frac{t-r}{t}(w_0(A)+\varepsilon) + \frac{k}{t},$$

e assim, se $t \to \infty$, como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos

$$w_0(A) \leqslant \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} \leqslant w_0(A).$$

Logo,

$$w_0(A) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t} = \inf_{t>0} \frac{\ln \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t}.$$

(b) $w_0(A) = -\infty$.

Neste caso, para qualquer $w < 0$, existe $T > 0$ tal que

$$\frac{f(T)}{T} = \frac{\ln \|S(T)\|_{\mathcal{L}(X)}}{T} \leqslant w.$$

Assim, novamente tomando $t \geqslant T$, podemos escrever $t = nT + r$, obtendo

$$\frac{f(t)}{t} \leqslant n\frac{f(T)}{t} + \frac{f(r)}{t} \leqslant \frac{nT}{t}w + \frac{k}{t} = \frac{t-r}{t}w + \frac{k}{t} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} w.$$

Então para qualquer $w < 0$, temos

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} \leqslant w = -\infty.$$

Portanto,

$$w_0(A) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t} = \inf_{t>0} \frac{\ln \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t}.$$

Por fim, falta mostrar que dado $w > w_0(A)$, existe $M \geqslant 1$ tal que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{wt},\ \forall t \geqslant 0.$$

Para tanto, considere $w > w_0(A)$ fixado. Sabemos que existe $t_0 > 0$, tal que, para $t \geqslant t_0$,

$$\frac{\ln \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t} \leqslant w,$$

então

$$\ln \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant wt. \tag{2.3}$$

Uma vez que o semigrupo é uniformemente limitado em intervalos limitados, se $t \in [0, t_0]$, existe $M_0 \geqslant 1$ tal que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M_0,\ \forall t \in [0, t_0].$$

Primeiro, se $w \geqslant 0$, tome $M = M_0$, de modo que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{-wt}e^{wt} \leqslant Me^{wt},\ t \in [0, t_0].$$

Agora, se $w < 0$, tome $M = M_0e^{-wt_0} \geqslant 1$, então

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M_0e^{-wt}e^{wt} \leqslant Me^{wt},\ t \in [0, t_0].$$

Se $t > t_0$, podemos escrever $t = nt_0 + r$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leqslant r < t_0$. Como para $w < 0$ ou $w \geqslant 0$, temos que

$$\|S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M,\ r \in [0, t_0].$$

Segue de (2.3) que

$$\begin{aligned}
\ln \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leqslant \ln \|S(nt_0)\|_{\mathcal{L}(X)} + \ln \|S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leqslant wnt_0 + \ln M \\
&= w(t-r) + \ln M \\
&= \ln(Me^{w(t-r)}).
\end{aligned}$$

Assim, dado $t > t_0$, temos $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{-wr}e^{wt}$, onde $r \in [0, t_0)$. Isso conclui a demonstração. □

Note que a Proposição 2.2 nos garante a estabilidade exponencial de um semigrupo, desde que o tipo seja negativo. Nesta capítulo, buscaremos caracterizar o tipo de um semigrupo por meio de propriedades do resolvente do operador A (Ver Apêndice A.1), o que nos dará ferramentas para verificar a estabilidade exponencial de um semigrupo.

Sabemos que se A é uma matriz $n \times n$, então a família $\{e^{At}\}_{t \geqslant 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo. Ainda, algumas propriedades de $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ são obtidas a partir das propriedades de A. Por exemplo, se $Ax = 0$, então

$$A^2x = A(Ax) = 0, \;\; A^3 = A(A^2x) = 0, ...,$$

o que nos mostra que

$$S(t)x = e^{tA}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}x = 0, \;\forall t \geqslant 0.$$

Além disso, se λ é um autovalor de A associado ao autovetor x, então

$$Ax = \lambda x, \;\; A^2x = A(Ax) = \lambda^2 x, \;\; A^3x = A(A^2x) = \lambda^3 x, ...$$

Assim,

$$S(t)x = e^{tA}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^k}{k!}x = e^{\lambda t}x.$$

Portanto, se x é autovetor de A associado ao autovalor λ, então x é autovetor de e^{tA} associado ao autovalor $e^{\lambda t}$. Logo, se $\lambda \in \sigma(A)$, então

$$e^{\lambda t} \in \sigma(S(t)).$$

Neste caso dizemos que

$$e^{\sigma(A)t} \subset \sigma(S(t)), \;\forall t \geqslant 0,$$

em que

$$e^{\sigma(A)t} = \{e^{\lambda t} \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Reciprocamente, seja $\lambda(t) \in \sigma(S(t))$, então existe $x \in \mathbb{R}^n$, com $x \neq 0$, tal que $S(t)x = \lambda(t)x$. Derivando em t, obtemos

$$AS(t)x = \lambda'(t)x,$$

ou ainda

$$\lambda(t)Ax = \lambda'(t)x.$$

Caso $\lambda(t) \neq 0$, então

$$Ax = \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}x = \alpha(t)x.$$

Logo, $\alpha(t) \in \sigma(A)$. Porém, note que

$$\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} = \alpha(t),$$

então

$$\lambda(t) = e^{t\alpha(t)} \in e^{\sigma(A)t}.$$

Logo, $\lambda(t) = e^{t\alpha(t)} \in e^{\sigma(A)t}$, de onde concluímos que

$$\sigma(S(t)) \setminus \{0\} = e^{\sigma(A)t}.$$

Embora geralmente o mesmo não seja válido quando A não esta definido em um espaço de dimensão finita, podemos obter sempre uma parte desta inclusão, como veremos a seguir. Mas antes, precisamos de um Lema técnico.

Lema 2.3. *Sejam X um espaço de Banach e $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$. Então, para $u \in \mathrm{D}(A)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ fixado, temos:*

(a) $\displaystyle \frac{d}{dt}\int_0^t e^{-\lambda\tau}S(\tau)ud\tau = e^{-\lambda t}S(t)u;$

(b) $\displaystyle \frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{\lambda\tau}S(t+h-\tau)ud\tau \overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} e^{\lambda t}u;$

(c) $\displaystyle \int_0^t e^{\lambda\tau}\frac{S(t+h-\tau)-S(t-\tau)}{h}ud\tau \overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} \int_0^t e^{\lambda t}S(t-\tau)Aud\tau;$

(d) $\displaystyle A\int_0^t e^{\lambda t}S(t-\tau)ud\tau = \int_0^t e^{\lambda t}S(t-\tau)Aud\tau.$

Demonstração. (a) Note que

$$\frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} e^{-\lambda\tau}S(\tau)ud\tau - \int_0^t e^{-\lambda\tau}S(\tau)ud\tau\right] - e^{-\lambda t}S(t)u = \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\left[e^{-\lambda\tau}S(\tau)u - e^{-\lambda t}S(t)u\right]d\tau.$$

Assim, obtemos

$$\|e^{-\lambda\tau}S(\tau)u - e^{-\lambda t}S(t)u\| \leqslant \|e^{-\lambda\tau}(S(\tau)u - S(t)u)\| + \|(e^{-\lambda\tau} - e^{\lambda t})S(t)u\|.$$

Uma vez que $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é um C_0-semigrupo e $\tau \to 0$ quando $h \to t$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $|t-h| < \delta$, então

$$\|e^{-\lambda\tau}S(\tau)u - e^{-\lambda t}S(t)u\| < \varepsilon.$$

Deste modo, se $|t-h| < \delta$, então

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \left[e^{-\lambda\tau}S(\tau)u - e^{-\lambda t}S(t)u\right] d\tau < \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \varepsilon d\tau = \varepsilon.$$

De onde segue o desejado.

(b) Observe que

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{\lambda\tau}S(t+h-\tau)u - e^{\lambda t}u = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \left[e^{\lambda\tau}S(t+h-\tau)u - e^{\lambda t}u\right] d\tau.$$

Agora, note que

$$\|e^{\lambda\tau}S(t+h-\tau)u - e^{\lambda t}u\| \leqslant \|e^{\lambda\tau}(S(t+h-\tau)u - u)\| + \|(e^{\lambda\tau} - e^{\lambda t})u\|.$$

Novamente, como $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é um C_0 semigrupo e $\tau \to t$ quando $h \to 0$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < h < \delta$, então

$$\|e^{\lambda\tau}(S(t+h-\tau)u - u)\| < \varepsilon.$$

Portanto, se $0 < h < \delta$, então

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \left[e^{\lambda\tau}S(t+h-\tau)u - e^{\lambda t}u\right] d\tau < \varepsilon.$$

Assim, segue o desejado.

(c) Seja $t > 0$ fixado. Sabemos que $e^{\lambda\tau}S(t-\tau)u \in \mathrm{D}(A)$ e assim existe o limite

$$A(e^{\lambda\tau}S(t-\tau)u) = e^{\lambda\tau}\lim_{h\to 0^+}\frac{S(h)-I}{h}S(t-\tau)u.$$

Deste modo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < h < \delta$, então

$$\left\|\frac{S(h)-I}{h}e^{\lambda\tau}S(t-\tau)u - A(e^{\lambda\tau}S(t-\tau)u)\right\| < \frac{\varepsilon}{t}.$$

Logo, se $0 < h < \delta$, então

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^t \left[\frac{S(h)-I}{h} e^{\lambda\tau} S(t-\tau)u - A(e^{\lambda\tau} S(t-\tau)u) \right] d\tau \right\| \\
&\leqslant \int_0^t \left\| \frac{S(h)-I}{h} e^{\lambda\tau} S(t-\tau)u - A(e^{\lambda\tau} S(t-\tau)u) \right\| d\tau \\
&< \int_0^t \frac{\varepsilon}{t} d\tau \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

De onde segue (c).

(d) Por fim, note que pelo item (c)

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^{\lambda t} S(t-\tau) A u d\tau &= \lim_{h \to 0^+} \int_0^t e^{\lambda\tau} \frac{S(t+h-\tau) - S(t-\tau)}{h} u d\tau \\
&= \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)-I}{h} \int_0^t e^{\lambda t} S(t-\tau) u d\tau.
\end{aligned}$$

Como este limite existe, segue o desejado. □

Proposição 2.4. *Seja $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo definido no espaço de Banach X. Então,*

$$e^{\sigma(A)t} \subset \sigma(S(t)), \ \forall t \geqslant 0.$$

Demonstração. Para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, defina

$$B_\lambda(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} S(\tau) d\tau, \ t \geqslant 0.$$

Note que este operador é linear e limitado para cada $t \geqslant 0$, pois de (2.1), segue que dado $u \in X$,

$$\begin{aligned}
\|B_\lambda(t)u\| &\leqslant \int_0^t \|e^{\lambda(t-\tau)} S(\tau)u\| d\tau \\
&\leqslant M\|u\|e^{\lambda t} \int_0^t e^{(w-\lambda)\tau} d\tau.
\end{aligned}$$

Caso $\lambda = w$, então

$$\|B_\lambda(t)u\| \leqslant M\|u\|e^{\lambda t} t. \tag{2.4}$$

Por outro lado, se $\lambda \neq w$, então

$$\|B_\lambda(t)u\| \leqslant \frac{M}{w-\lambda} \|u\| e^{\lambda t} [e^{(w-\lambda)t} - 1]. \tag{2.5}$$

Em ambos os casos, temos que $B_\lambda(\cdot)u$ está bem definido.

O Lema 2.3, item (a), nos garante que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}B_\lambda(t)u &= \frac{d}{dt}\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}S(\tau)ud\tau \\
&= \frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t}\int_0^t e^{-\lambda\tau}S(\tau)ud\tau\right] \\
&= \lambda\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}S(\tau)ud\tau + e^{\lambda t}e^{-\lambda t}S(t)u \\
&= \lambda B_\lambda(t)u + S(t)u. \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Por outro lado, podemos escrever

$$B_\lambda(t)u = \int_0^t e^{\lambda\tau}S(t-\tau)ud\tau.$$

Neste caso, se $h > 0$, então

$$\begin{aligned}
\frac{B_\lambda(t+h)u - B_\lambda(t)u}{h} &= \frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} e^{\lambda\tau}S(t+h-\tau)ud\tau - \int_0^t e^{\lambda\tau}S(t-\tau)ud\tau\right] \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{\lambda\tau}S(t+h-\tau)ud\tau + \int_0^t e^{\lambda\tau}\frac{S(t+h-\tau)-S(t-\tau)}{h}ud\tau.
\end{aligned}$$

Note que o Lema 2.3, itens (b) e (c), nos garante que se $u \in \mathrm{D}(A)$

$$\frac{d}{dt}B_\lambda(t)u = e^{\lambda t}u + \int_0^t e^{\lambda t}S(t-\tau)Aud\tau = e^{\lambda t} + B_\lambda(t)Au. \qquad (2.7)$$

Note que da igualdade

$$\int_0^t e^{\lambda\tau}\frac{S(t+h-\tau)-S(t-\tau)}{h}ud\tau = \frac{S(h)-I}{h}\int_0^t e^{\lambda\tau}S(t-\tau)ud\tau,$$

juntamente com o Lema 2.3, encontramos $B_\lambda(t)u \in \mathrm{D}(A)$ e

$$AB_\lambda(t)u = B_\lambda(t)Au.$$

Logo, de (2.7),

$$\frac{d}{dt}B_\lambda(t)u = e^{\lambda t}u + AB_\lambda(t)u.$$

Então por (2.6), obtemos

$$\lambda B_\lambda(t)u + S(t)u = e^{\lambda t}u + AB_\lambda(t)u,$$

ou seja

$$(\lambda I - A)B_\lambda(t)u = (e^{\lambda t}I - S(t))u.$$

Em particular, se $e^{\lambda t} \in \varrho(S(t))$, então

$$(e^{\lambda t}I - S(t))^{-1}(\lambda I - A)B_\lambda(t)u = u, \ u \in \mathrm{D}(A).$$

Como A comuta com $B_\lambda(t)$ e $(e^{\lambda t}I - S(t))^{-1}$ é um operador limitado, então para $u \in \mathrm{D}(A)$, obtemos

$$(e^{\lambda t}I - S(t))^{-1}(\lambda I - A)B_\lambda(t)u = (\lambda I - A)(e^{\lambda t}I - S(t))^{-1}B_\lambda(t)u = u.$$

Note que $(e^{\lambda t}I - S(t))^{-1}B_\lambda(t)$ é limitado e densamente definido, pois $e^{\lambda t} \in \varrho(S(t))$, $B_\lambda(t)$ está definido para qualquer $u \in X$ e (2.4)-(2.5) nos garantem que $B_\lambda(t)$ é limitado.

Portanto, se $e^{\lambda t} \in \varrho(S(t))$, então

$$\lambda \in \varrho(A).$$

Como $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \varrho(A)$, temos

$$e^{\sigma(A)t} \subset \sigma(S(t)),$$

pois, se $e^{\lambda t} \in e^{\sigma(A)t}$ com $e^{\lambda t} \notin \sigma(S(t))$, então $\lambda \in \varrho(A)$, um absurdo. □

Proposição 2.5. *Seja $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Então,*

$$w_\sigma(A) \leqslant w_0(A),$$

em que $w_\sigma(A)$ denota a cota superior do espectro de A.

Demonstração. Segue da Proposição 2.4 que

$$e^{\sigma(A)t} \subset \sigma(S(t)), \ \forall t \geqslant 0.$$

Assim,

$$\sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in e^{\sigma(A)t}\} \leqslant \sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(S(t))\}.$$

Como o espectro de um operador contínuo está sempre contido em uma bola centrada na origem e de raio igual a norma do operador (Ver Teorema A.2), em particular temos

$$e^{w_\sigma(A)t} \leqslant \sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(S(t))\} \leqslant \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}.$$

Logo, $w_\sigma(A)t \leqslant \ln \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ e deste modo para qualquer $t > 0$

$$w_\sigma(A) \leqslant \frac{\ln \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t}.$$

Portanto, $w_\sigma(A) \leqslant w_0(A)$. $\square$

Além disso, o seguinte resultado nos auxiliará nos próximos teoremas:

Proposição 2.6. *Seja $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Então,*

$$R_\sigma(S(t)) = e^{w_0(A)t},\ t > 0,$$

em que $R_\sigma(S(t))$ denota o raio da menor bola centrada na origem e que contem o espectro de $S(t)$.

Demonstração. Segue do Teorema A.5 que para $t_0 > 0$ fixado

$$R_\sigma(S(t_0)) = \lim_{n\to\infty} \|S(t_0)^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n}.$$

Note que se A gera um C_0-semigrupo, o mesmo ocorre com $t_0 A$. Mais ainda, se $x \in \mathrm{D}(A)$, então

$$\left\| \frac{S(t_0 h)x - x}{h} - t_0 Ax \right\| = t_0 \left\| \frac{S(t_0 h)x - x}{t_0 h} - Ax \right\| \overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Assim, da unicidade, $t_0 A$ deve gerar o C_0-semigrupo $\{S(t_0 t)\}_{t\geqslant 0}$. Logo,

$$w_0(t_0 A) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \|S(t_0 t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \|S(t_0 n)\|_{\mathcal{L}(X)}}{n} = \lim_{n\to\infty} \ln \|S(t_0)^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n}.$$

Com isso

$$e^{w_0(t_0 A)} = \lim_{n\to\infty} \|S(t_0)^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n} = R_\sigma(S(t_0)).$$

Além disso,

$$w_0(t_0 A) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \|S(t_0 t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t} = t_0 \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \|S(t_0 t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t_0 t} = t_0 \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t} = t_0 w_0(A).$$

Logo, como $t_0 > 0$ é qualquer, temos que

$$e^{t w_0(A)} = R_\sigma(S(t)),\ \forall t > 0.$$

O que conclui a demonstração $\square$

2.2 Soluções Periódicas

A fim de estudar a estabilidade exponencial para um problema, precisamos de algumas propriedades válidas para soluções periódicas. Mais especificamente, dado um espaço de Banach X e $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ o gerador de um C_0-semigrupo de contrações $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$, veremos que existe uma equivalência entre o comportamento do resolvente do operador A e a existência e unicidade de solução generalizada periódica para um problema não homogêneo do tipo

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au(t) + f(t), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Sabemos que se $f \in C^1([0,\infty), X)$ e $u_0 \in \mathrm{D}(A)$, então o problema (2.8) admite uma única solução ([43], Teorema 2.4.1, página 42) dada por

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

Além disso,

$$u \in C^1([0,\infty), X) \cap C([0,\infty), \mathrm{D}(A)).$$

Buscamos estudar o problema (2.8) no cenário em que $f \in C([0,1], X)$ e $u_0 \in X$. Neste caso, temos a seguinte definição:

Definição 2.7. *Sejam $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ o gerador de um C_0-semigrupo limitado e $f \in L^1([0,T], X)$. Dado $u_0 \in X$, uma solução generalizada do problema* (2.8) *é uma aplicação $u \in C([0,T], X)$ dada por*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau. \tag{2.9}$$

Teorema 2.8. *Sejam $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ o gerador de um C_0-semigrupo de contrações $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ e $f \in L^1([0,T], X)$. Então, para cada $u_0 \in X$, o problema* (2.8) *admite uma solução generalizada.*

Demonstração. Como $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é de contrações e f é integrável, temos que $S(t-\tau)f(\tau)$ é integrável em $[0,t]$. Logo, a solução generalizada definida em (2.9) existe. □

Nos seguintes resultados consideraremos a função f definida apenas em $[0,1]$ a fim de facilitar os cálculos, porém o mesmo pode ser feito para qualquer intervalo $[0,T]$. Vale ressaltar que o nome "periódica” aqui refere-se ao fato de que como $u \in C([0,1], X)$, podemos tomar sua extenção periódica de período 1 definida em toda a reta.

Note que dado $u_0 \in X$, sabemos que a solução generalizada existe, porém como queremos que $u(0) = u(1)$ para garantir continuidade da extensão, resolver o problema (2.8) envolve mais condições sob o operador A ou a função f.

Teorema 2.9. *Sejam X um espaço de Banach e $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Então, $1 \in \varrho(S(1))$ se, e somente se, dada $f \in C([0,1], X)$, existe um único $u_0 \in X$ tal que*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau,$$

é a única solução generalizada periódica do problema (2.8)*, isto é,* $u(0) = u(1)$.

Demonstração. Primeiro, note que a solução generalizada existe para qualquer $u_0 \in X$, então basta provar que existe um único $u_0 \in X$ tal que

$$u_0 = u(0) = u(1).$$

Com efeito, temos $u(0) = u(1)$ se, e somente se,

$$u(0) = S(1)u(0) + \int_0^1 S(1-\tau)f(\tau)d\tau,$$

o que equivale a

$$(I - S(1))u(0) = \int_0^1 S(1-\tau)f(\tau)d\tau. \tag{2.10}$$

Como $1 \in \varrho(S(1))$, de (2.10) temos que $u(0) = u(1)$ se, e somente se,

$$u(0) = (I - S(1))^{-1} \int_0^1 S(1-\tau)f(\tau)d\tau.$$

Devido a estas implicações, segue que existe um único $u(0) = u_0 \in X$ que verifica o desejado.

Reciprocamente, precisamos mostrar que $1 \in \varrho(S(1))$. De fato, tome $x \in X$ tal que $(I - S(1))x = 0$, então

$$S(1)x = x.$$

Note que $u(t) = S(t)x$ é a única solução generalizada periódica do problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au(t), \\ u(0) = u(1). \end{cases}$$

Ou seja, a solução do problema (2.8) com $f = 0$ e $u_0 = u(1)$. Porém, a solução nula também satisfaz este problema e por unicidade, devemos ter

$$u(t) = 0, \ \forall t \geqslant 0,$$

isto é, $0 = u(0) = x$. Logo, $I - S(1)$ é injetor.

Para demonstrar a sobrejetividade, defina o operador

$$\begin{aligned} T : C([0,1], X) &\longrightarrow C([0,1], X) \\ f \quad &\longmapsto T_f = u, \end{aligned}$$

em que u é a única solução generalizada periódica do problema (2.8) determinada por f. Note que T é linear, pois se v é a solução generalizada periódica determinada por g, então

$$\begin{aligned} T_f(t) + T_g(t) &= u(t) + v(t) \\ &= S(t)(u_0 + v_0) + \int_0^1 S(t-\tau)(f+g)(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

com $u(0) + v(0) = u(1) + v(1)$. Logo, por unicidade, devemos ter $T_{f+g} = T_f + T_g$. Além disso, se $\alpha \in \mathbb{K}$, temos

$$\alpha u(t) = S(t)(\alpha u_0) + \int_0^t S(t-\tau)(\alpha f)(\tau)d\tau,$$

com $\alpha u(0) = \alpha u(1)$ e novamente devido a unicidade, $T_{\alpha f} = \alpha T_f$.

Agora, seja $(f_n) \subset C([0,1], X)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} T_{f_n} = \lim_{n\to\infty} u_n = u \quad \text{em } C([0,1], X).$$

Considerando em $C([0,1], X)$ a norma do supremo, estas convergências são uniformes, e assim

$$u_n(t) = S(t)u_n(0) + \int_0^t S(t-\tau)f_n(\tau)d\tau \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u(t) = S(t)u(0) + \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

Ainda,

$$u(0) = \lim_{n\to\infty} u_n(0) = \lim_{n\to\infty} u_n(1) = u(1).$$

Logo, u é solução generalizada periódica determinada por f, ou seja, $T_f = u$. Portanto, T é fechado e assim, do Teorema do Gráfico Fechado (Ver [18], página 292, Teorema 4.13-2) segue que T é um operador limitado.

Deste modo, dado $x \in X$ temos $h(\cdot) = S(\cdot)x \in C([0,1], X)$ e assim, considere o operador

$$\begin{aligned} \Psi : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto \Psi(x) = T_h(0) = u(0). \end{aligned}$$

Analogamente ao feito para o operador T, temos que Ψ é linear e limitado, pois

$$\|\Psi(x)\| = \|T_{S(\cdot)x}(0)\| \leqslant \|T\|_{\mathcal{L}(C([0,1],X))}\|S(0)x\| = \|T\|_{\mathcal{L}(C([0,1],X))}\|x\|.$$

Deste modo, segue de (2.10) que

$$\begin{aligned}(I - S(1))(\Psi(x) - x) &= (I - S(1))u(0) + (I - S(1))x \\ &= \int_0^1 S(1-\tau)h(\tau)d\tau + (I - S(1))x \\ &= \int_0^1 S(1-\tau)S(\tau)xd\tau + x - S(1)x \\ &= \int_0^1 S(1)xd\tau + x - S(1)x \\ &= x.\end{aligned}$$

Logo, dado $x \in X$, encontramos

$$(I - S(1))(\Psi(x) - x) = x.$$

Com isso, $(I - S(1))$ é sobrejetor.

Portanto, $(I - S(1))^{-1} = (\Psi - I) : X \to X$ existe, é limitada e densamente definida, pois Ψ também o é. Deste modo, $1 \in \varrho(S(1))$. $\square$

Lema 2.10. *Sejam X um espaço de Banach, $u \in C([0,\infty), X)$ e $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Então,*

a) $\displaystyle \frac{1}{h}\int_0^h u(t)\varphi(t-h)dt \overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} u(0)\varphi(0)$;

b) $\displaystyle \frac{1}{h}\int_{1-h}^1 u(t)\varphi(t)dt \overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} u(1)\varphi(1)$;

c) $\displaystyle \int_0^1 u(t)\left(\frac{\varphi(t-h)-\varphi(t)}{h}\right)dt \overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} -\int_0^1 u(t)\varphi'(t)dt$;

Demonstração. (a) Note que

$$\|u(t)\varphi(t-h) - u(0)\varphi(0)\| \leqslant \|u(t)\||\varphi(t-h) - \varphi(0)| + |\varphi(0)|\|u(t) - u(0)\|.$$

Como u e φ são contínuas e $0 \leqslant t \leqslant h$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < h < \delta$, temos $0 \leqslant t < \delta$, $0 \leqslant |t-h| < \delta$ e então

$$\|u(t) - u(0)\| < \frac{\varepsilon}{2k} \quad \text{e} \quad |\varphi(t-h) - \varphi(0)| < \frac{\varepsilon}{2k},$$

em que $k = \max\left\{1, \sup_{t\in[0,\delta]} \|u(t)\| + |\varphi(0)|\right\}$. Logo, se $0 < h < \delta$, então

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{h}\int_0^h u(t)\varphi(t-h)dt - u(0)\varphi(0)\right\| &\leqslant \frac{1}{h}\int_0^h \|u(t)\varphi(t-h) - u(0)\varphi(0)\|dt\\ &< \frac{1}{h}\int_0^h \frac{\varepsilon}{k}\big(\|u(t)\| + |\varphi(0)|\big)dt\\ &\leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

O que conclui a demonstração.

(b) De maneira análoga ao feito no item (a), encontramos

$$\|u(t)\varphi(t) - u(1)\varphi(1)\| \leqslant \|u(t)\||\varphi(t) - \varphi(1)| + |\varphi(1)|\|u(t) - u(1)\|.$$

Como u e φ são contínuas, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < h < \delta$ e tomando $k = \max\left\{1, \sup_{t\in[0,1]} \|u(t)\| + |\varphi(1)|\right\}$, temos

$$|\varphi(t) - \varphi(1)| < \frac{\varepsilon}{2k} \quad \text{e} \quad \|u(t) - u(1)\| < \frac{\varepsilon}{2k},$$

pois $1 - h \leqslant t \leqslant 1$ e assim $0 \leqslant 1 - t \leqslant h < \delta$.

Então, segue que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{h}\int_{1-h}^1 u(t)\varphi(t)dt - u(1)\varphi(1)\right\| &\leqslant \frac{1}{h}\int_{1-h}^1 \|u(t)\varphi(t) - u(1)\varphi(1)\|dt\\ &< \frac{1}{h}\int_{1-h}^1 \frac{\varepsilon}{k}\big(\|u(t)\| + |\varphi(1)|\big)dt\\ &\leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração do item (b).

(c) Note que

$$\left\|u(t)\frac{\varphi(t-h) - \varphi(t)}{h} + u(t)\varphi'(t)\right\| = \|u(t)\| \left|\varphi'(t) - \frac{\varphi(t-h) - \varphi(t)}{-h}\right|.$$

Como u é contínua e φ é diferenciável, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |h| < \delta$, então

$$\left|\varphi'(t) - \frac{\varphi(t-h) - \varphi(t)}{-h}\right| < \frac{\varepsilon}{k},$$

em que $k > 0$ é tal que $\|u(t)\| \leqslant k$, para todo $t \in [0,1]$. Logo,

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^1 u(t)\left(\frac{\varphi(t-h)-\varphi(t)}{h}\right)dt + \int_0^1 u(t)\varphi'(t)dt\right\| &\leqslant \int_0^1 \|u(t)\|\left|\frac{\varphi(t-h)-\varphi(t)}{-h} - \varphi'(t)\right|dt\\ &< k\int_0^1 \frac{\varepsilon}{k}dt\\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

De onde segue o resultado. $\square$

Lema 2.11. *Sejam X um espaço de Banach e $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ um C_0-semigrupo. Para qualquer $f \in C([0,1],X)$, temos que*

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-\tau)f(\tau)d\tau \overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} f(t),\ t \geqslant 0.$$

Demonstração. Primeiro, note que

$$f(t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(t)d\tau.$$

Assim,

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-\tau)f(\tau)d\tau - f(t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h}(S(t+h-\tau)f(\tau)-f(t))d\tau.$$

Agora, observe que

$$\|S(t+h-\tau)f(\tau)-f(t)\| \leqslant \|(S(t+h-\tau)\|_{\mathcal{L}(X)}\|f(\tau)-f(t)\| + \|S(t+h-\tau)f(t)-f(t)\|.$$

Como $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ e f são contínuas em $[0,1]$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < h < \delta$, obtemos $0 < \tau - t < \delta$ e $0 < t+h-\tau < \delta$, obtemos

$$\|S(t+h-\tau)f(\tau)-f(t)\| < \varepsilon.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-\tau)f(\tau)d\tau - f(t)\right\| &\leqslant \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\|S(t+h-\tau)f(\tau)-f(t)\|d\tau\\ &< \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\varepsilon d\tau\\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

De onde temos o desejado. $\square$

Para o próximo resultado, iremos utilizar alguns conceitos de séries de Fourier em um espaço de Hilbert H (Ver [17], seção 2.4, página 105). Para tanto, considere o espaço de Hilbert $L^2([0,1],H)$ formado pelas funções $f:[0,1]\to H$ tais que

$$\int_0^1 \|f(s)\|^2 ds < \infty.$$

Assim, segue que dada uma função $f \in L^2([0,1],H)$, os coeficientes de Fourier de f estão bem definidos e são dados por

$$\hat{f}_n = \int_0^1 f(s)e^{-2\pi ins}ds,$$

de modo que

$$f(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} \hat{f}_n e^{2\pi int} = \lim_{N\to\infty} f_N(t)$$

em $L^2([0,1],H)$ (Ver [17], Proposições 4.2.14 e 5.2.7, páginas 291 e 393). Vale ressaltar que deste modo, temos que

$$\hat{f}'_n = 2\pi in\hat{f}_n, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Além disso, como $(e^{2\pi in(\cdot)})_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência ortonormal, temos que

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{L^2([0,1],H)} &= \left\| \lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} \hat{f}_n e^{2\pi in(\cdot)} \right\|^2_{L^2([0,1],H)} \\ &= \lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{-N}^{N} \hat{f}_n e^{2\pi in(\cdot)} \right\|^2_{L^2([0,1],H)} \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \|\hat{f}_n\|^2 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Lema 2.12. *Seja H um espaço de Hilbert e $A : \mathrm{D}(A) \subset H \to H$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Dada $f \in C([0,1],H)$, caso exista solução generalizada periódica para o problema* (2.8)*, então os coeficientes de Fourier de u e f satisfazem*

$$\hat{u}_n \in \mathrm{D}(A) \quad e \quad \hat{f}_n = (2i\pi nI - A)\hat{u}_n, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Seja $h > 0$ e $t \in [0, 1-h]$. Temos que

$$\begin{aligned}
u(t+h) &= S(t+h)u_0 + \int_0^{t+h} S(t+h-\tau)f(\tau)d\tau \\
&= S(h)\left(S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau\right) + \int_t^{t+h} S(t+h-\tau)f(\tau)d\tau \\
&= S(h)u(t) + \int_t^{t+h} S(t+h-\tau)f(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Assim

$$\frac{u(t+h)-u(t)}{h} = \frac{S(h)-I}{h}u(t) + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-\tau)f(\tau)d\tau.$$

Agora, multiplicando por $e^{-2\pi int}$ e integrando de 0 à $1-h$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{1-h} \frac{u(t+h)-u(t)}{h} e^{-2\pi int}dt = & \frac{S(h)-I}{h}\int_0^{1-h} u(t)e^{-2\pi int}dt \\
& + \frac{1}{h}\int_0^{1-h} e^{-2\pi int}\int_t^{t+h} S(t+h-\tau)f(\tau)d\tau dt \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Deste modo,:

(i) Fazendo $\varphi(t) = e^{-2\pi int}$, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\int_0^{1-h} \varphi(t)\int_t^{t+h} S(t+h-\tau)f(\tau)d\tau dt = & \frac{1}{h}\int_0^{1} \varphi(t)\int_t^{t+h} S(t+h-\tau)f(\tau)d\tau dt \\
& - \frac{1}{h}\int_{1-h}^{1} \varphi(t)\int_t^{t+h} S(t+h-\tau)f(\tau)d\tau dt.
\end{aligned}$$

O Lema 2.11 nos garante que

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-\tau)f(\tau)d\tau \overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} f(t).$$

Assim

$$\frac{1}{h}\int_0^{1} \varphi(t)\int_t^{t+h} S(t+h-\tau)f(\tau)d\tau dt \overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\varphi(t)dt.$$

Além disso, tomando $k = \sup\limits_{t\in[0,1]} \|f(t)\|$ e usando que $|\varphi(t)| = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{h}\int_{1-h}^{1}\varphi(t)\int_{t}^{t+h} S(t+h-\tau)f(\tau)d\tau dt\right\| &\leqslant \frac{1}{h}\int_{1-h}^{1}\int_{t}^{t+h} Me^{w(t+h-\tau)}kd\tau dt\\ &= \frac{Mk}{wh}\int_{1-h}^{1}\left[-e^{w(t+h-\tau)}\right]_{t}^{t+h} dt\\ &= \frac{Mk}{wh}\int_{1-h}^{1}[e^{h}-1]dt\\ &= \frac{Mk}{w}[e^{h}-1] \overset{h\to 0^{+}}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{h}\int_{0}^{1-h}\varphi(t)\int_{t}^{t+h} S(t+h-\tau)f(\tau)d\tau dt \overset{h\to 0^{+}}{\longrightarrow} \int_{0}^{1} f(t)\varphi(t)dt = \hat{f}_{n}.$$

(ii) Vamos mostrar que

$$\int_{0}^{1-h}\frac{u(t+h)-u(t)}{h}\varphi(t)dt \overset{h\to 0^{+}}{\longrightarrow} -\int_{0}^{1} u(t)\varphi'(t)dt = 2i\pi n\int_{0}^{1} u(t)\varphi(t)dt.$$

Note que

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1-h}\frac{u(t+h)-u(t)}{h}\varphi(t)dt =&\frac{1}{h}\int_{0}^{1-h} u(t+h)\varphi(t)dt - \frac{1}{h}\int_{0}^{1-h} u(t)\varphi(t)dt\\ =&\frac{1}{h}\int_{h}^{1} u(t)\varphi(t-h)dt - \frac{1}{h}\int_{0}^{1-h} u(t)\varphi(t)dt\\ =&\int_{0}^{1} u(t)\left(\frac{\varphi(t-h)-\varphi(t)}{h}\right)dt - \frac{1}{h}\int_{0}^{h} u(t)\varphi(t-h)dt\\ &+\frac{1}{h}\int_{1-h}^{1} u(t)\varphi(t)dt,\end{aligned}$$

O Lema 2.10 nos garante que

$$\int_{0}^{1-h}\frac{u(t+h)-u(t)}{h}\varphi(t)dt \overset{h\to 0^{+}}{\longrightarrow} u(1)\varphi(1)-u(0)\varphi(0)-\int_{0}^{1} u(t)\varphi'(t)dt.$$

Uma vez que $u(1)\varphi(1) = u(0)\varphi(0)$, pois u e φ possuem período 1, segue que

$$\int_{0}^{1-h}\frac{u(t+h)-(t)}{h}\varphi(t)dt \overset{h\to 0^{+}}{\longrightarrow} -\int_{0}^{1} u(t)\varphi'(t)dt = 2\pi in\int_{0}^{1} u(t)\varphi(t)dt.$$

(iii) Por fim, temos

$$\begin{aligned}\frac{S(h)-I}{h}\int_0^{1-h} u(t)\varphi(t)dt &= \frac{S(h)-I}{h}\int_0^{1} u(t)\varphi(t)dt - \frac{S(h)-I}{h}\int_{1-h}^{1} u(t)\varphi(t)dt \\ &= \frac{S(h)-I}{h}\hat{u}_n - \frac{1}{h}\int_{1-h}^{1}[S(h)u(t)\varphi(t)-u(t)\varphi(t)]dt.\end{aligned}$$

Fixado $t \geqslant 0$, como $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é um C_0-semigrupo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < h < \delta$, para $t > 0$ fixado, então

$$\|S(h)u(t)e^{-2\pi int} - u(t)e^{-2\pi int}\| < \varepsilon.$$

Deste modo, se $0 < h < \delta$, então

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{h}\int_{1-h}^{1}[S(h)u(t)e^{-2\pi int} - u(t)e^{-2\pi int}]dt\right\| &\leqslant \frac{1}{h}\int_{1-h}^{1}\|S(h)u(t)e^{-2\pi int} - u(t)e^{-2\pi int}\|dt \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Retornando em (2.12) e fazendo $h \to 0^+$, segue de (i), (ii), (iii) que

$$2\pi in\hat{u}_n = \lim_{h\to 0^+}\frac{S(h)-I}{h}\hat{u}_n + \hat{f}_n,$$

Portanto, $\hat{u}_n \in \mathrm{D}(A)$ e

$$(2\pi inI - A)\hat{u}_n = \hat{f}_n,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

De onde segue o resultado. □

Teorema 2.13. *Seja H um espaço de Hilbert e $A : \mathrm{D}(A) \subset H \to H$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Então, $1 \in \varrho(S(1))$ se, e somente se,*

$$2in\pi \in \varrho(A),\ \forall n \in \mathbb{Z} \quad e \quad \sup_{n\in\mathbb{Z}}\|(2in\pi I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty.$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, defina

$$T_n x = (I - S(1))^{-1}\int_0^1 S(\tau)e^{-2in\pi\tau I}x d\tau,$$

em que $e^{-2in\pi tI}$ é o semigrupo gerado por $-2in\pi I$ e dado por

$$e^{-2in\pi tI}x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2in\pi t)^k}{k!}x = e^{-2in\pi t}x.$$

Uma vez que em $\mathrm{D}(A)$ o operador A comuta com $S(t)$, encontramos

$$\begin{aligned} A(I-S(1))^{-1} &= (I-S(1))^{-1}(I-S(1))A(I-S(1))^{-1} \\ &= (I-S(1))^{-1}A(I-S(1))(I-S(1))^{-1} \\ &= (I-S(1))^{-1}A. \end{aligned}$$

Assim, se $x \in \mathrm{D}(A)$, então

$$\frac{S(h)-I}{h}T_n x = (I-S(1))^{-1}\int_0^1 e^{-2in\pi\tau}\frac{S(h)-I}{h}S(\tau)x d\tau.$$

Como a integral independe de h e $S(\tau)x \in \mathrm{D}(A)$, segue que $T_n x \in \mathrm{D}(A)$ e $T_n A = AT_n$. Deste modo

$$\begin{aligned} (2in\pi I - A)T_n x &= T_n(2in\pi I - A)x \\ &= -(I-S(1))^{-1}\int_0^1 (A-2in\pi I)S(\tau)e^{-2in\pi\tau}x d\tau \\ &= -(I-S(1))^{-1}\int_0^1 \frac{d}{d\tau}(S(\tau)e^{-2in\pi\tau}x)d\tau \\ &= -(I-S(1))^{-1}(S(1)e^{-2in\pi}-I)x. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$e^{-2in\pi}x = x,$$

encontramos

$$\begin{aligned} (2in\pi I - A)T_n x &= T_n(2in\pi I - A)x \\ &= -(I-S(1))^{-1}(S(1)-I)x \\ &= x. \end{aligned}$$

Então $(2in\pi I - A)^{-1} = T_n$ e como

$$\begin{aligned} \|T_n x\| &= \left\|(I-S(1))^{-1}\int_0^1 S(\tau)e^{2in\pi\tau}x d\tau\right\| \\ &\leqslant \|(I-S(1))^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)}\int_0^1 \|S(\tau)\|_{\mathcal{L}(H)}|e^{2in\pi\tau}|\|x\|d\tau \\ &\leqslant \|(I-S(1))^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)}\int_0^1 \|S(\tau)\|_{\mathcal{L}(H)}\|x\|d\tau \\ &\leqslant \|(I-S(1))^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)}\sup_{t\in[0,1]}\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)}\|x\|, \end{aligned}$$

segue que

$$2in\pi \in \varrho(A),\ \forall n \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|(2in\pi I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty.$$

Para demonstrar a recíproca, vamos utilizar o Teorema 2.9 para provar que $1 \in \varrho(S(1))$. Para isso, seja $f \in C([0,1], H)$ e considere os coeficientes de Fourier de f

$$\hat{f}_n = \int_0^1 f(s)e^{-2\pi ins}ds.$$

que estão bem definidos, pois f é contínua. Então

$$f(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{n} \hat{f}_n e^{2\pi int} = \lim_{N\to\infty} f_N(t)$$

em $L^2([0,1], H)$. A identidade de Parseval (Ver [17], Teorema 2.4.9, página 109) dada em (2.11) nos garante que

$$\|f\|^2_{L^2([0,1],H)} = \int_0^1 \|f(s)\|^2 ds = \sum_{-\infty}^{\infty} \|\hat{f}_n\|^2. \tag{2.13}$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{Z}$, defina

$$\hat{u}_n = (2in\pi I - A)^{-1}\hat{f}_n \quad \text{e} \quad u_N(t) = \sum_{-N}^{N} \hat{u}_n e^{2in\pi t},$$

de modo que $u_N \in C^1([0,1], H)$ para cada $N \in \mathbb{Z}$. Considere $\varphi(\tau) = S(t-\tau)u_N(\tau)$, em que $\tau \in [0,t]$, então

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{d\tau} &= -AS(t-\tau)\sum_{-N}^{N} \hat{u}_n e^{2in\pi\tau} + S(t-\tau)\sum_{-N}^{N} 2in\pi\hat{u}_n e^{2in\pi\tau} \\
&= \sum_{-N}^{N} (2in\pi I - A)e^{2in\pi\tau} S(t-\tau)\hat{u}_n \\
&= \sum_{-N}^{N} e^{2in\pi\tau} S(t-\tau)\hat{f}_n \\
&= S(t-\tau)f_N(\tau).
\end{aligned}$$

Integrando de 0 à t, obtemos

$$u_N(t) = S(t)u_N(0) + \int_0^t S(t-\tau)f_N(\tau)d\tau. \tag{2.14}$$

Fazendo $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|(2in\pi I - A)^{-1}\| = M$, por (2.13) temos

$$\left\| \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_n e^{2in\pi(\cdot)} \right\|_{L^2(H)} \leqslant \sum_{-\infty}^{\infty} \|\hat{u}_n\| \leqslant \sum_{-\infty}^{\infty} \|(2\pi inI - A)^{-1}\| \|\hat{f}_n\| \leqslant M \sum_{-\infty}^{\infty} \|\hat{f}_n\| = M\|f\|_{L^2(H)}.$$

Assim existe $u \in L^2([0,1], H)$ tal que $u_N \to u$ em $L^2([0,1], H)$.

Além disso, como $f_N \to f$ e $u_N \to u$ em $L^2([0,1], H)$, temos que

$$\int_0^1 S(t-\tau) f_N(\tau) d\tau \longrightarrow \int_0^1 S(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad \text{e} \quad \int_0^1 S(t-\tau) u_N(\tau) d\tau \longrightarrow \int_0^1 S(t-\tau) u(\tau) d\tau,$$

pois $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é uniformemente limitado em $[0,1]$. Mais ainda,

$$u_N(1) = \sum_{-N}^{N} \hat{u}_n e^{2in\pi} = \sum_{-N}^{N} \hat{u}_n = u_N(0), \ \forall N \in \mathbb{Z}.$$

Usando (2.14), obtemos

$$(I - S(1))u_N(0) = \int_0^1 S(1-\tau) f_N(\tau) d\tau \longrightarrow \int_0^1 S(1-\tau) f(\tau) d\tau. \tag{2.15}$$

Uma vez que

$$S(1-t)u_N(t) = S(1)u_N(0) + S(1-t) \int_0^t S(t-\tau) f_N(\tau) d\tau.$$

Integrando de 0 à 1, obtemos

$$S(1)u_N(0) = \int_0^1 S(1-t)u_N(t)dt - \int_0^1 \int_0^t S(1-\tau) f_N(\tau) d\tau dt.$$

De onde segue que

$$S(1)u_N(0) \longrightarrow \int_0^1 S(1-t)u(t)dt - \int_0^1 \int_0^t S(1-\tau) f(\tau) d\tau dt. \tag{2.16}$$

Logo, de (2.15) e (2.16), segue que existe $u_0 \in H$ tal que

$$u_N(0) = (I - S(1))u_N(0) + S(1)u_N(0) \longrightarrow u_0.$$

Então por (2.14), podemos tomar

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

Note que $u \in C([0,1], H)$ e

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0 \\ &= \lim_{N\to\infty} [(I - S(1))u_N(0) + S(1)u_N(0)] \\ &= \int_0^1 S(1-\tau)f(\tau)d\tau + \int_0^1 S(1-t)u(t)dt - \int_0^1 \int_0^t S(1-\tau)f(\tau)d\tau dt, \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} \int_0^1 S(1-t)u(t)dt &= \int_0^1 S(1-t)\left[S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau\right] dt \\ &= S(1)u_0 + \int_0^1 \int_0^t S(1-\tau)f(\tau)d\tau dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0 \\ &= \lim_{N\to\infty} [(I - S(1))u_N(0) + S(1)u_N(0)] \\ &= S(1)u_0 + \int_0^1 S(1-\tau)f(\tau)d\tau \\ &= u(1). \end{aligned}$$

Portanto, u é solução generalizada periódica.

A unicidade de u segue do Lema 2.12, pois se v é solução generalizada periódica de

$$\frac{dv}{dt} = Av(t) + f(t),$$

então devemos ter

$$\hat{v}_n = (2in\pi I - A)^{-1}\hat{f}_n = \hat{u}_n, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Como os coeficientes de Fourier de u e v são os mesmos, devemos ter $u = v$. Portanto, segue do Teorema 2.9 que $1 \in \varrho(S(1))$. $\square$

Buscamos uma maneira de generalizar o Teorema 2.13. Para tanto, precisamos do seguinte resultado técnico:

Lema 2.14. *Sejam H um espaço de Hilbert e $A : \mathrm{D}(A) \subset H \to H$ o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$. Então, fixado $k > 0$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos que $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$, em que*

$$T(t) = e^{-\lambda k t} S(kt), \ t \geqslant 0,$$

é o C_0-semigrupo gerado por $B = (A - \lambda I)k$.

Demonstração. Note que $T(0) = I$ e

$$T(t+s) = e^{-\lambda k(t+s)}S(k(t+s)) = e^{-\lambda kt}S(kt)e^{-\lambda ks}S(ks) = T(t)T(s).$$

Portanto, $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ é um semigrupo. Além disso, fixado $x \in H$,

$$\begin{aligned}
\|T(h)x - x\| &= \|e^{-\lambda kh}S(kh)x - x\| \\
&\leqslant \|e^{-\lambda kh}S(kh)x - e^{-\lambda kh}x\| + \|e^{-\lambda kh}x - x\| \\
&\leqslant |e^{-\lambda kh}|\|S(kh)x - x\| + \|e^{-\lambda kh}x - x\|.
\end{aligned}$$

Logo, $T(h)x \to x$, pois $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é um C_0-semigrupo.

Por fim, note que para $x \in \mathrm{D}(A)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{-\lambda kh}S(kh)x - x}{h} \\
&= k \lim_{h\to 0^+} \left[e^{-\lambda h}\frac{S(h)x - x}{h} + \frac{e^{-\lambda h}x - x}{h} \right] \\
&= k(Ax - \lambda Ix) \\
&= Bx.
\end{aligned}$$

Deste modo, se $\tilde{A}$ gera $T(t)$, então $x \in \mathrm{D}(\tilde{A})$. Logo, $\mathrm{D}(A) \subset \mathrm{D}(\tilde{A})$. Por outro lado, se $x \in \mathrm{D}(\tilde{A})$, então

$$\begin{aligned}
\tilde{A}x &= \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} \\
&= k \lim_{h\to 0^+} \left[\frac{e^{-\lambda h}S(h)x - S(h)x}{h} + \frac{S(h)x - x}{h} \right].
\end{aligned}$$

Note que

$$\left\| \frac{e^{-\lambda h}S(h)x - S(h)x}{h} - \lambda x \right\| \leqslant \left\| S(h)\left(\frac{e^{-\lambda h}x - x}{h} - \lambda x \right) \right\| + \|S(h)(\lambda x) - \lambda x\|.$$

Como $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é um C_0-semigrupo, segue que

$$k \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{-\lambda h}S(h)x - S(h)x}{h} = k\lambda x.$$

Deste modo,

$$\frac{1}{k}\tilde{A}x + \lambda x = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h}.$$

Logo, $\mathrm{D}(\tilde{A}) \subset \mathrm{D}(A)$. Portanto, $\tilde{A} = B$. O que conclui a demonstração. □

Teorema 2.15. *Sejam H um espaço de Hilbert e $A : \mathrm{D}(A) \subset H \to H$ o gerador infinitesimal* *do C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$. Dado $t>0$ temos $e^{\lambda t}\in\varrho(S(t))$, se, e somente se,*

$$\lambda+\frac{2n\pi}{t}\in\varrho(A),\ n\in\mathbb{Z}\quad \textit{e}\quad \sup_{n\in\mathbb{Z}}\left\|\left(\left(\lambda+2\pi i n t^{-1}\right)I-A\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(H)}<\infty.$$

Demonstração. Note que para $t_0>0$ fixado, $e^{\lambda t_0}\in\varrho(S(t_0))$ se, e somente se, $(e^{\lambda t_0}I-S(t_0))^{-1}$ existe, é limitado e densamente definido. Colocando $e^{\lambda t_0}$ em evidência, obtemos que $e^{\lambda t_0}\in\varrho(S(t_0))$ se, e somente se, $1\in\varrho(e^{-\lambda t_0}S(t_0))$, de modo que o Lema 2.14 nos garante que $B=(A-\lambda I)t_0$ gera o semigrupo $\{e^{-\lambda t_0 t}S(t_0t)\}_{t\geqslant 0}$.

Segue do Teorema 2.13 que para que $1\in\varrho(e^{-\lambda t_0}S(t_0))$ ocorra, é necessário e suficiente que

$$2in\pi\in\varrho(B)\quad\text{e}\quad\sup_{n\in\mathbb{Z}}\|(2in\pi I-B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)}<\infty,$$

ou ainda,

$$2in\pi\in\varrho((A-\lambda I)t_0)\quad\text{e}\quad\sup_{n\in\mathbb{Z}}\|(2in\pi I-(A-\lambda I)t_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)}<\infty. \tag{2.17}$$

Notando que

$$2\pi inI-(A-\lambda I)t_0=t_0((\lambda+2\pi int_0^{-1})I-A),$$

temos que (2.17) equivale a

$$\lambda+\frac{2\pi in}{t_0}\in\varrho(A),\quad n\in\mathbb{Z}\quad\text{e}\quad\frac{1}{t_0}\sup_{n\in\mathbb{Z}}\left\|\left(\left(\lambda+2in\pi t_0^{-1}\right)I-A\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(H)}<\infty.$$

Uma vez que $t_0>0$ é qualquer, temos o desejado. $\square$

Temos a seguinte equivalência:

Teorema 2.16. *Sejam H um espaço de Hilbert e $A:\mathrm{D}(A)\subset H\to H$ o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$. Então, $\mu\in\varrho(S(t))$, com $\mu\neq 0$ e $t>0$, se, e somente se,*

$$M=\{\lambda\in\mathbb{C}:e^{\lambda t}=\mu\}\subset\varrho(A)\quad \textit{e}\quad\sup_{\lambda\in M}\|(\lambda I-A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)}<\infty.$$

Demonstração. Primeiro, note que se $t>0$, então

$$\begin{aligned}
t^{-1}\log\mu &= t^{-1}\{\operatorname{Log}\mu+2in\pi : n\in\mathbb{Z}\}\\
&= \{t^{-1}\operatorname{Log}\mu+2in\pi t^{-1} : n\in\mathbb{Z}\}\\
&= \{\lambda\in\mathbb{C}:e^{\lambda t}=\mu\}\\
&= M,
\end{aligned}$$

A penúltima igualdade é válida, pois $e^{\lambda t}=\mu$ ocorre quando $\lambda t\in\log\mu$, ou de maneira equivalente, existe $n\in\mathbb{Z}$ tal que

$$\lambda t=\operatorname{Log}\mu+2\pi in.$$

Agora, suponha que $\mu = e^{\lambda t} \in \varrho(S(t))$, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\lambda = t^{-1} \operatorname{Log} \mu + 2ik\pi \in M.$$

O Teorema 2.15 nos garante que para qualquer $n \in \mathbb{Z}$

$$\lambda + 2in\pi t^{-1} = t^{-1} \operatorname{Log} \mu + 2i(n+k)\pi t^{-1} \in \varrho(A).$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} ((\lambda + 2in\pi t^{-1})I - A)^{-1} &= ((t^{-1} \operatorname{Log} \mu + 2i(n+k)\pi t^{-1})I - A)^{-1} \\ &= (\gamma I - A)^{-1}, \ \gamma \in M \end{aligned}$$

e

$$\sup_{\gamma \in M} \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|((\lambda + 2in\pi t^{-1})I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty.$$

Reciprocamente, como dado $\lambda \in M \subset \varrho(A)$, sabemos que

$$\lambda = \frac{1}{t} \operatorname{Log} \mu + \frac{2in\pi}{t}, \ n \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad \sup_{\lambda \in M} \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty.$$

Logo, para $n = 0$, o Teorema 2.15 nos garante que

$$e^{\frac{1}{t} \operatorname{Log} \mu} = e^{\lambda t} = \mu \in \varrho(S(t)).$$

De onde segue o desejado. $\square$

2.3 Teoremas de Estabilidade Exponencial

Munidos dos resultados estabelecidos até aqui, podemos finalmente estabelecer uma equivalência entre o tipo do semigrupo e a limitação do operador resolvente.

Teorema 2.17. *Sejam H um espaço de Hilbert e $A : \mathrm{D}(A) \subset H \to H$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Então,*

$$w_0(A) = \inf \left\{ \mu \in \mathbb{R} : \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant M_\mu, \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \ \textit{com} \ \ \operatorname{Re} \lambda \geqslant \mu \right\}.$$

Demonstração. Primeiro, note que

$$N_0 = \left\{ \mu \in \mathbb{R} : \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant M_\mu, \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \ \text{com} \ \ \operatorname{Re} \lambda \geqslant \mu \right\} \neq \varnothing,$$

pois o Teorema de Hille-Yosida nos garante para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re} \lambda > w$, temos que

$\lambda \in \varrho(A)$ e
$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - w},$$
em que $w > 0$ e $M \geqslant 1$ são tais que
$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant Me^{wt},\ \forall t \geqslant 0.$$
Em particular, se $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 2w$, temos
$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - w} \leqslant \frac{M}{w}.$$
Logo, $2w \in N_0$.

Agora, seja $\alpha = \inf N_0$. Sabemos que
$$R_\sigma(S(t)) = e^{w_0(A)t},\ \forall t > 0,$$
e assim, dado $\varepsilon > 0$, encontramos
$$e^{(w_0(A)+\varepsilon)t} \in \rho(S(t)),\ \forall t > 0.$$
Considere $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}\lambda \geqslant w_0(A) + \varepsilon$. Assim,
$$R_\sigma(S(t)) < e^{(w_0(A)+\varepsilon)t} \leqslant e^{\operatorname{Re}\lambda t},$$
o que implica em
$$e^{\operatorname{Re}\lambda t} \in \rho(S(t)),\ \forall t > 0.$$
Como $|e^{\lambda t}| = e^{\operatorname{Re}\lambda t}$, então $e^{\lambda t} \in \rho(S(t))$. Fazendo $t = 1$ e $n = 0$, segue do Teorema 2.15 que
$$\lambda \in \varrho(A) \quad \text{e} \quad \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty,\ \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{com} \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant w_0(A) + \varepsilon.$$
Com isso, $w_0(A) + \varepsilon \in N_0$ para qualquer $\varepsilon > 0$. Logo, $\alpha = \inf N_0 \geqslant w_0(A)$.

Por outro lado, seja $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $|\mu| > e^\alpha$. Temos que
$$\log\mu = \{\ln|\mu| + i(\operatorname{Arg}\mu + 2in\pi) : n \in \mathbb{Z}\} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geqslant \ln|\mu|\},$$
ou seja
$$\log\mu \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geqslant \ln|\mu| > \alpha\}.$$
Assim, dado $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geqslant \ln|\mu| > \alpha\}$, deve existir $\gamma \in N_0$ tal que
$$\operatorname{Re}\lambda \geqslant \gamma \quad \text{e} \quad \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant M_\gamma.$$

Deste modo, $\lambda \in \varrho(A)$ e

$$\log \mu \subset \varrho(A) \quad \text{e} \quad \sup_{\lambda \in \log \mu} \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant M_\gamma.$$

Do Teorema 2.16 segue que $\mu \in \rho(S(1))$. Portanto, se

$$\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| > e^\alpha\} \subset \rho(S(1)),$$

então

$$\sigma(S(1)) \subset \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leqslant e^\alpha\}.$$

Assim,

$$e^{w_0(A)} = R_\sigma(S(1)) \leqslant e^\alpha,$$

o que implica em $w_0(A) \leqslant \alpha$. Portanto, $w_0(A) = \alpha = \inf N_0$, de onde segue o desejado.

□

Lema 2.18. *Sejam H um espaço de Hilbert e $A : \mathrm{D}(A) \subset H \to H$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Suponha que*

$$\mathbb{C}_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \geqslant 0\} \subset \varrho(A) \quad e \quad \sup_{\operatorname{Re} \lambda \geqslant 0} \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty.$$

Então, o semigrupo gerado por A é exponencialmente estável.

Demonstração. Vamos mostrar que existe $\delta > 0$ tal que

$$-\delta \in N_0 := \{\mu \in \mathbb{R} : \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant M_\mu, \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \ \text{ com } \ \operatorname{Re} \lambda \geqslant \mu\}.$$

Com efeito, seja $\lambda = \alpha + i\beta$. Primeiramente, note que $N_0 \neq \varnothing$, pois se $\alpha \geqslant 0$, então por hipótese temos

$$\|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant M.$$

Deste modo, obtemos que $0 \in N_0$.

Agora, caso $-\delta \leqslant \alpha < 0$, sabemos que

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(A) \quad \text{e} \quad \sup_{\beta \in \mathbb{R}} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} = k < \infty.$$

Note que

$$\begin{aligned} \lambda I - A &= \alpha I + i\beta I - A \\ &= \alpha(i\beta I - A)^{-1}(i\beta I - A) + (i\beta I - A) \\ &= (\alpha(i\beta I - A)^{-1} + I)(i\beta I - A). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Logo, se $|\alpha| \leqslant \delta < \frac{1}{k}$, o Teorema A.3 nos garante que $(\alpha(i\beta I - A)^{-1} + I)$ é inversível e

$$\|(\alpha(i\beta I - 1)^{-1} + I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \frac{1}{1 - \|\alpha(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)}} \leqslant \frac{1}{1 - |\alpha|k} \leqslant \frac{1}{1 - \delta k}.$$

Deste modo, por (2.18) concluímos que $\lambda I - A$ é inversível, com

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} = \|(i\beta I - A)^{-1}(\alpha(i\beta I - A)^{-1} + I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \frac{k}{1 - \delta k}.$$

Portanto $-\delta \in N_0$, e o Teorema 2.17 nos garante que

$$w_0(A) = \inf N_0 \leqslant -\delta < 0.$$

Então segue da Proposição 2.2 que para $w_0(A) < -w < 0$, existe $M \geqslant 1$ tal que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant Me^{-wt},\ \forall t \geqslant 0.$$

Portanto, $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ é exponencialmente estável. □

Teorema 2.19. *Sejam H um espaço de Hilbert e $A : \mathrm{D}(A) \subset H \to H$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Então, $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ é exponencialmente estável se, e somente se,*

$$\mathbb{C}_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\} \subset \varrho(A) \quad e \quad \sup_{\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0} \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty.$$

Demonstração. Se o semigrupo é exponencialmente estável, então existem $M \geqslant 1$ e $w > 0$ tais que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant Me^{-wt},\ \forall t \geqslant 0.$$

Assim, obtemos

$$w_0(A) = \lim_{t \to \infty} \frac{\ln \|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)}}{t} \leqslant \lim_{t \to \infty} \frac{\ln(Me^{-wt})}{t} = \lim_{t \to \infty} \frac{\ln M}{t} - w < 0.$$

Assim, segue da Proposição 2.6 que $R_\sigma(S(1)) = e^{w_0(A)}$, então

$$R_\sigma(S(1)) < 1.$$

Logo, a Proposição 2.6 nos garante que se $\lambda \in \sigma(A)$, então $e^\lambda \in \sigma(S(1))$, onde devemos ter

$$|e^\lambda| = e^{\operatorname{Re}\lambda} < 1,$$

isto é, $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Assim, $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$ e então

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\} \subset \varrho(A).$$

Logo, se $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, o Teorema de Hille-Yosida nos garante que

$$R(\lambda, A)x = (\lambda I - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} S(\tau)x d\tau, \quad x \in H.$$

Uma vez que $|e^{-\lambda t}| \leqslant 1$ para qualquer $t \geqslant 0$, segue que

$$\begin{aligned}
\|(\lambda I - A)^{-1}x\| &\leqslant \int_0^\infty |e^{-\lambda\tau}| \|S(\tau)\|_{\mathcal{L}(H)} \|x\| d\tau \\
&\leqslant \int_0^\infty M e^{-(\operatorname{Re}\lambda + w)\tau} \|x\| d\tau \\
&= \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda + w} \|x\| \\
&\leqslant \frac{M}{w} \|x\|.
\end{aligned}$$

Como esta limitação independe de λ, temos

$$\sup_{\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0} \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \frac{M}{w} < \infty.$$

A recíproca segue direto do Lema 2.18. $\square$

Caso $S(t)$ seja um C_0-semigrupo de contrações, as hipóteses para verificar a estabilidade exponencial são mais fracas:

Teorema 2.20. *Sejam H um espaço de Hilbert e $A : \mathrm{D}(A) \subset H \to H$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações. Então, $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ é exponencialmente estável se, e somente se,*

$$i\mathbb{R} = \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\} \subset \varrho(A) \quad e \quad \limsup_{|\beta| \to \infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty.$$

Demonstração. Se este semigrupo é exponencialmente estável, então o Teorema 2.19 nos garante que

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\} \subset \varrho(A) \quad \text{e} \quad \sup_{\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0} \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty.$$

Em particular, temos $i\mathbb{R} \subset \varrho(A)$ e $\sup_{\beta \in \mathbb{R}} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty$, então

$$\limsup_{|\beta| \to \infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty.$$

Reciprocamente, como A gera um C_0-semigrupo de contrações, o Teorema de Hille-Yosida nos garante que

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subset \varrho(A) \quad \text{e} \quad \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}.$$

Uma vez que por hipótese $i\mathbb{R} \subset \varrho(A)$, então

$$i\mathbb{R} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\} \subset \varrho(A).$$

Agora, seja $\lambda = \alpha + i\beta$ tal que $\alpha = \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$. Deste modo

$$\lambda I - A = \alpha I + i\beta I - A = (\alpha(i\beta I - A)^{-1} + I)(i\beta I - A). \tag{2.19}$$

Sabemos que

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} = \lim_{\gamma\to\infty} \sup_{|\beta|\geqslant\gamma} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} = k < \infty.$$

Então, para $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $\gamma > n_0$, então

$$\left| \sup_{|\beta|\geqslant\gamma} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} - k \right| < 1,$$

ou ainda,

$$0 \leqslant \sup_{|\beta|\geqslant\gamma} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < 1 + k.$$

Em particular, se $|\beta| = n_0 + 1$, temos que

$$\|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < 1 + k.$$

Logo, se $\beta \in [-n_0 + 1, n_0 + 1]$, como $\lambda \mapsto \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)}$ é contínua em $\varrho(A)$, segue que existe $M > 0$ tal que

$$\|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant M, \ \forall \beta \in [-n_0 - 1, n_0 + 1].$$

Assim, se $k_0 = \max\{k + 1, M\} < \infty$, segue que

$$\sup_{\beta\in\mathbb{R}} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant k_0 < \infty.$$

Então, retornando em (2.19) e tomando $0 \leqslant \alpha < \dfrac{1}{k_0}$, do Teorema A.3 temos que

$$(\alpha(i\beta I - A)^{-1} + I)^{-1} \quad \text{existe e} \quad \|(\alpha(i\beta I - A)^{-1} + I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \frac{1}{1 - \alpha k_0}.$$

Assim, tome $\delta > 0$ fixado tal que $0 < \delta < \dfrac{1}{k_0}$. Se $0 \leqslant \alpha < \delta$, então

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \frac{1}{1 - \alpha k_0} \leqslant \frac{k_0}{1 - \delta k_0} < \infty.$$

Caso $\alpha \geqslant \delta$, então do Teorema de Hille-Yosida temos

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda} = \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\delta}.$$

Tomando $r = \max\left\{\frac{1}{\delta}, \frac{k_0}{1-\delta k_0}\right\}$, segue

$$\sup_{\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0} \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant r < \infty.$$

Portando, segue do Teorema 2.19 que $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é exponencialmente estável. $\square$

3 SEMIGRUPOS ANALÍTICOS

Nesta seção, examinaremos as condições sob as quais um C_0-semigrupo limitado admite uma extensão analítica. Em outras palavras, investigaremos em que situações podemos estender um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ a uma família de operadores $\{T(z)\}_{z\in\Delta}$ definida em uma região $\Delta \subset \mathbb{C}$, de modo que cada operador $T(z)$ é analítico e satisfaz a definição de semigrupo. De maneira geral, a analiticidade de um semigrupo assegura a regularidade das soluções para problemas de Cauchy abstratos do tipo

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Mais especificamente, quando o semigrupo gerado pelo operador A for analítico, demonstraremos que cada operador $S(t)$ é infinitamente diferenciável para $t > 0$.

A seguir, utilizaremos alguns conceitos de integrais definidas em contornos. É importante destacar que grande parte da teoria desenvolvida em Análise Complexa permanece válida quando consideramos funções da forma $\lambda \mapsto f(\lambda) \in X$, onde X é um espaço de Banach. Além disso, dada uma curva retificável $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ e uma função $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to X$ definida em uma vizinhança Ω de γ, a integral de linha de f ao longo de γ é dada por

$$\int_\gamma f(\lambda)d\lambda = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \in X.$$

Mais ainda, valem os seguintes resultados:

Teorema 3.1. *Sejam X um espaço de Banach e $f : \Omega \to X$ uma aplicação analítica definida em um aberto simplesmente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, logo:*

a) *Se γ é um contorno fechado e simples contido em Ω, então*

$$\int_\gamma f(\lambda)d\lambda = 0.$$

b) *Se $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, então*

$$\int_\gamma f(\lambda)d\lambda = \int_{\gamma_1} f(\lambda)d\lambda + \int_{\gamma_2} f(\lambda)d\lambda.$$

c) *Seja γ um contorno simples fechado contido em Ω e que envolve $\mu \in \Omega$ uma vez, então*

$$f(\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\lambda - \mu)^{-1} f(\lambda)d\lambda$$

Demonstração. Ver [12], página 199. □

3.1 Operadores Setoriais

Definição 3.2. *Dizemos que um operador $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ densamente definido em um espaço de Banach X é setorial se:*

(a) *Para algum* $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$,

$$\Sigma_\delta = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg} \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta \right\} \cup \{0\} \subset \varrho(A);$$

(b) *Existe* $M > 0$ *tal que*

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{|\lambda|}, \ \forall \lambda \in \Sigma_\delta \setminus \{0\}.$$

Veremos se um operador $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ é setorial, então gera um C_0-semigrupo limitado e este semigrupo é caracterizado por meio do operador resolvente $R(\lambda, A)$. Mas antes, precisamos do seguinte resultado:

Lema 3.3. *Sejam X um espaço de Banach e $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ um operador fechado e densamente definido. Então, se $\lambda, \mu \in \varrho(A)$, temos:*

(a) $R(\lambda, A)R(\mu, A) = R(\mu, A)R(\lambda, A)$*;*

(b) $R(\lambda, A)R(\mu, A) = \dfrac{R(\mu, A) - R(\lambda, A)}{\lambda - \mu}$, *com* $\lambda \neq \mu$.

Demonstração. Primeiro, note que a demonstração do item (a) segue das seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} R(\lambda, A)R(\mu, A) &= (\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)^{-1} \\ &= [(\mu I - A)(\lambda I - A)]^{-1} \\ &= [\mu(\lambda I - A) - A(\lambda I - A)]^{-1} \\ &= [\lambda(\mu I - A) - A(\mu I - A)]^{-1} \\ &= [(\lambda I - A)(\mu I - A)]^{-1} \\ &= R(\mu, A)R(\lambda, A). \end{aligned}$$

Agora, vamos provar o item (b). Do item (a), temos que

$$\begin{aligned} R(\mu, A) - R(\lambda, A) &= R(\mu, A)R(\lambda, A)(\lambda I - A) - R(\lambda, A)R(\mu, A)(\mu I - A) \\ &= R(\lambda, A)R(\mu, A)(\lambda I - A) - R(\lambda, A)R(\mu, A)(\mu I - A) \\ &= (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A). \end{aligned}$$

Assim, se $\lambda \neq \mu$, encontramos a igualdade desejada. □

Teorema 3.4. *Sejam X um espaço de Banach e $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ um operador setorial. Então, A gera um C_0-semigrupo limitado dado por*

$$S(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda, \ t \geqslant 0,$$

em que γ é uma curva regular contida em Σ_δ de $-\infty e^{-i\theta}$ até $\infty e^{i\theta}$, com $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} + \delta$.

Demonstração. Considere $0 < \theta < \delta$ e $r \geqslant 0$. Defina o operador $T(t) : X \to X$ dado por

$$T(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda, & t > 0 \\ \quad I, & t = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

em que

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma_1(r,\theta) = \left\{ s e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)} : s \in [r, \infty) \right\} \\ \gamma_2 &= \gamma_2(r,\theta) = \left\{ r e^{is} : -\frac{\pi}{2} - \theta < s < \frac{\pi}{2} + \theta \right\} \\ \gamma_3 &= \gamma_3(r,\theta) = \left\{ -s e^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)} : s \in (-\infty, -r] \right\} \\ \gamma &= \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3. \end{aligned} \tag{3.2}$$

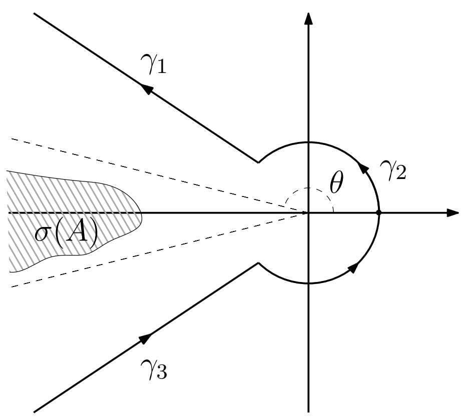

Figura 3.1: Curva γ

Note que:

(i) $T(t)$ esta bem definido;

(ii) $\{T(t)\}_{t \geqslant 0}$ é um C_0-semigrupo limitado;

(iii) $S(t) = T(t)$.

Com efeito:

Prova do item (i): Primeiro, mostraremos que (3.1) converge para $r > 0$. Em seguida, provaremos que T independe da escolha da curva γ, o que significa que o mesmo ocorre para $r = 0$. De fato, sabemos que A é setorial e a Proposição A.6 nos garante que $\varrho(A) \ni \lambda \mapsto R(\lambda, A)$ é analítica. Assim, se $t > 0$, então

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\gamma_1} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\| \int_r^\infty e^{tse^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}} e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)} R(se^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}, A) ds \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leqslant \int_r^\infty e^{ts\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)} \cdot \frac{M}{s} ds \\
&\leqslant \frac{M}{r} \int_0^\infty e^{-ts \operatorname{sen}\theta} ds \\
&= \frac{M}{tr \operatorname{sen}\theta}.
\end{aligned}$$

Analogamente, obtemos

$$\left\| \int_{\gamma_3} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{tr \operatorname{sen}\theta}.$$

Por fim, temos que

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\gamma_2} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\| \int_{-\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} e^{tre^{is}} rie^{is} R(re^{is}, A) ds \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leqslant r\frac{M}{r} \int_{-\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} e^{tr\cos s} ds \\
&\leqslant Me^{tr}(\pi + 2\theta).
\end{aligned}$$

Portanto a integral dada em (3.1) converge uniformemente na topologia dos operadores para qualquer $t > 0$.

Logo, uma vez que o operador definido em (3.1) converge, vamos mostrar que seu valor independe da escolha das curvas. Com efeito, sejam

$$0 \leqslant r_0 < r' < r \quad \text{e} \quad 0 < \theta' < \theta < \frac{\pi}{2}$$

e considere as curvas

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \Gamma_1(r_0,\theta) = \left\{-se^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)} : s \in [-r,-r_0]\right\}\\
\Gamma_2 &= \Gamma_2(r_0,\theta) = \left\{r_0e^{-is} : -\frac{\pi}{2}-\theta \leqslant s \leqslant \frac{\pi}{2}+\theta\right\}\\
\Gamma_3 &= \Gamma_3(r_0,\theta) = \{se^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)} : s \in [r_0,r]\}\\
\Lambda_1 &= \Lambda_1(r',\theta') = \left\{-se^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta')} : s \in [-r,-r']\right\}\\
\Lambda_2 &= \Lambda_2(r',\theta') = \left\{r'e^{is} : -\frac{\pi}{2}-\theta' \leqslant s \leqslant \frac{\pi}{2}+\theta'\right\}\\
\Lambda_3 &= \Lambda_3(r',\theta') = \left\{se^{i(\frac{\pi}{2}+\theta')} : s \in [r',r]\right\}\\
\Omega_1 &= \left\{re^{is} : \frac{\pi}{2}+\theta' \leqslant s \leqslant \frac{\pi}{2}+\theta\right\}\\
\Omega_2 &= \left\{re^{is} : -\frac{\pi}{2}-\theta \leqslant s \leqslant -\frac{\pi}{2}-\theta'\right\},
\end{aligned}$$

em que

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{3}\Gamma_i,\quad \Lambda = \bigcup_{i=1}^{3}\Lambda_i,\quad \Omega = \Omega_1\cup\Omega_2 \quad \text{e} \quad D = \Gamma\cup\Lambda\cup\Omega.$$

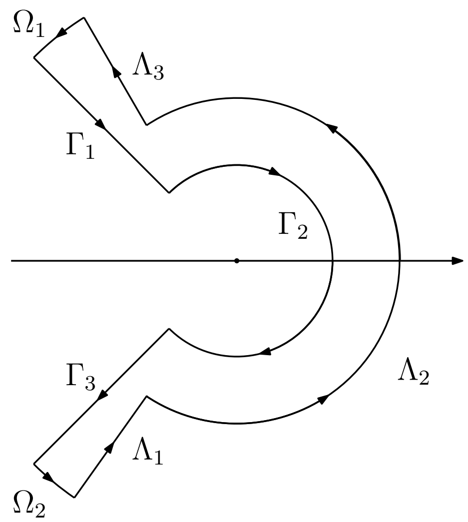

Figura 3.2: Contorno fechado D

Como $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ é analítica, temos que

$$\int_D e^{\lambda t}R(\lambda,A)d\lambda = \int_\Gamma e^{\lambda t}R(\lambda,A)d\lambda + \int_\Lambda e^{\lambda t}R(\lambda,A)d\lambda + \int_\Omega e^{\lambda t}R(\lambda,A)d\lambda = 0.$$

Note que

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\Omega_1} e^{\lambda t}R(\lambda,A)d\lambda\right\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\|\int_{\frac{\pi}{2}+\theta'}^{\frac{\pi}{2}+\theta} e^{tre^{is}} ire^{is}R(re^{is},A)ds\right\|_{\mathcal{L}(X)}\\ &\leqslant \int_{\frac{\pi}{2}+\theta'}^{\frac{\pi}{2}+\theta} e^{tr\cos s} r\frac{M}{r}ds\\ &\leqslant Me^{-tr\operatorname{sen}\theta'}(\theta-\theta')\end{aligned}$$

e analogamente

$$\left\|\int_{\Omega_2} e^{\lambda t}R(\lambda,A)d\lambda\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{-tr\operatorname{sen}\theta'}(\theta-\theta').$$

Logo, devemos ter

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\Omega} e^{\lambda t}R(\lambda,A)d\lambda = 0,$$

o que implica em

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\Lambda} e^{\lambda t}R(\lambda,A)d\lambda = -\lim_{r\to\infty}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}R(\lambda,A)d\lambda.$$

Portanto, obtemos

$$\int_{\gamma(r',\theta')} e^{\lambda t}R(\lambda,A)d\lambda = \int_{\gamma(r,\theta)} e^{\lambda t}R(\lambda,A)d\lambda.$$

De onde segue o desejado.

Prova do item (ii): Note que dada uma curva $\gamma(r,\theta)$, com $r \geqslant 0$ e $0<\theta<\delta$, por definição temos que $T(t)$ é linear, $T(0)=I$ e $T(t)$ é limitado uniformemente. Assim, basta provar que $T(t+s)=T(t)T(s)$ e que este semigrupo é de classe C_0. Primeiro, note que do Lema 3.3, se $\lambda\neq\mu$, então

$$R(\lambda,A)=R(\mu,A) \quad \text{e} \quad R(\lambda,A)R(\mu,A)=\frac{R(\mu,A)-R(\lambda,A)}{\lambda-\mu}.$$

Considere $c>0$ e as curvas $\gamma=\gamma(r,\theta)$ e $\gamma'=\gamma(r+c,\theta)$ definidas como em (3.2). Então

$$\begin{aligned}T(t)T(s) &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma} e^{\lambda t}R(\lambda,A)\int_{\gamma'} e^{\mu s}R(\mu,A)d\mu d\lambda\\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma}\int_{\gamma'} e^{\lambda t}e^{\mu s}R(\lambda,A)R(\mu,A)d\mu d\lambda\\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma}\int_{\gamma'} e^{\lambda t}e^{\mu s}\frac{R(\mu,A)-R(\lambda,A)}{\lambda-\mu}d\mu d\lambda\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} e^{\mu s}R(\mu,A)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda-\mu}d\lambda\right]d\mu\\ &\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} e^{\lambda t}R(\lambda,A)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'}\frac{e^{\mu s}}{\lambda-\mu}d\mu\right]d\lambda.\end{aligned}$$

Para concluir, vamos provar que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'}\frac{e^{\mu s}}{\lambda-\mu}d\mu = -e^{\lambda s} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda-\mu}d\lambda = 0,$$

e assim

$$T(t)T(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} e^{\lambda(t+s)}R(\lambda, A)d\lambda = T(t+s).$$

Com efeito, assim como no item (i), considere as curvas

$$\Lambda = \Lambda(r_0,\theta) = \bigcup_{i=1}^{3}\Lambda_i(r_0,\theta) \quad \text{e} \quad \Lambda' = \Lambda(r',\theta') = \bigcup_{i=1}^{3}\Lambda_i(r',\theta'),$$

em que $r_0 < r' < r$ e $0 < \theta < \theta' < \delta$, com $r' = r_0 + c$. Defina ainda

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \{re^{is} : \frac{\pi}{2}+\theta \leqslant s \leqslant \frac{3\pi}{2}-\theta\} \\
\Phi_2 &= \{re^{is} : \frac{\pi}{2}+\theta' \leqslant s \leqslant \frac{3\pi}{2}-\theta'\} \\
\Phi &= \Phi_1 \cup \Lambda \\
\Phi' &= \Phi_2 \cup \Lambda'.
\end{aligned}$$

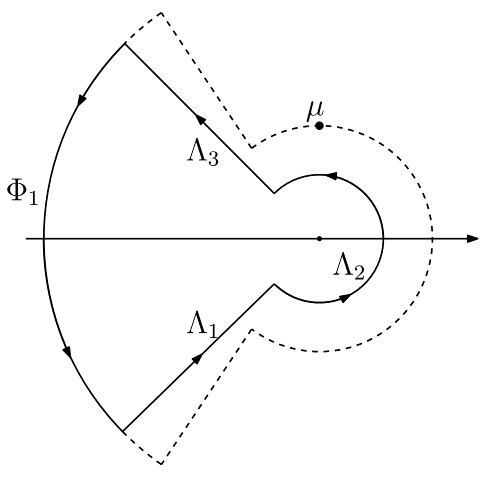

Figura 3.3: Curva Φ

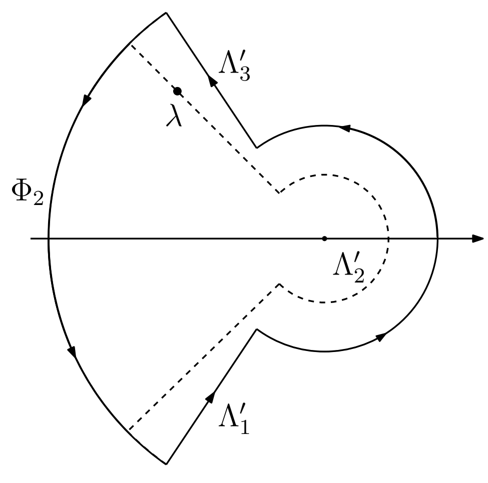

Figura 3.4: Curva Φ'

Deste modo, encontramos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Phi_1}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda-\mu}d\lambda\right| &= \left|\int_{\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{3\pi}{2}-\theta}\frac{1}{re^{is}-\mu}e^{tre^{is}}(ire^{is})ds\right| \\
&\leqslant \int_{\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{3\pi}{2}-\theta} e^{tr\cos s}\frac{r}{r-|\mu|}ds \\
&\leqslant \frac{r}{r-|\mu|}e^{-tr\,\mathrm{sen}\,\theta}(\pi-2\theta).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\Phi_1}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda-\mu}d\lambda = 0.$$

Analogamente,

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\Phi_2}\frac{e^{\mu s}}{\lambda-\mu}d\lambda = 0.$$

Logo, como $\frac{e^{\lambda t}}{\lambda-\mu}$ é analítica em Φ, segue que

$$\int_{\Phi}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda-\mu}d\lambda = 0.$$

Assim, obtemos

$$\int_{\Lambda}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda-\mu}d\lambda + \int_{\Phi_1}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda-\mu}d\lambda = 0,$$

ou ainda

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Lambda}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda-\mu}d\lambda = \int_{\gamma}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda-\mu} = 0.$$

Usando o Teorema de Cauchy (Ver Teorema 3.1 item (c)), temos

$$-2\pi i e^{\lambda s} = \int_{\Phi'}\frac{e^{\mu t'}}{\lambda-\mu}d\mu = \int_{\Lambda'}\frac{e^{\mu t'}}{\lambda-\mu}d\mu + \int_{\Phi_2}\frac{e^{\mu t'}}{\lambda-\mu}d\mu,$$

então

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\Lambda'}\frac{e^{\mu s}}{\lambda-\mu}d\mu = \int_{\gamma'}\frac{e^{\mu s}}{\lambda-\mu}d\mu = -2\pi i e^{\lambda s}.$$

De onde segue o desejado.

Por fim, basta mostrar que dado $x\in X$, temos

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x.$$

Para tanto, considere a região Φ dada na Figura 3.3. O Teorema de Cauchy nos garante que

$$\int_{\Phi}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}d\lambda = 2\pi i e^{0t} = 2\pi i,$$

em que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Phi_1}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}d\lambda\right| &= \left|\int_{\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{3\pi}{2}-\theta}\frac{e^{tre^{is}}}{re^{is}}(rie^{is})ds\right| \\ &\leqslant \int_{\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{3\pi}{2}-\theta} e^{tr\cos s}ds \\ &\leqslant (\pi-2\theta)e^{-tr\operatorname{sen}\theta}.\end{aligned}$$

Assim, temos que
$$\int_{\Phi} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} d\lambda = \int_{\Phi_1} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} d\lambda + \int_{\Lambda} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} d\lambda = 2\pi i,$$
então
$$\lim_{r\to\infty} \int_{\Phi} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} d\lambda = \int_{\gamma} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} d\lambda = 2\pi i.$$

Tomando $x \in \mathrm{D}(A)$, encontramos

$$\begin{aligned}
T(t)x - x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{\lambda t} R(\lambda, A) x d\lambda - x \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{\lambda t} \left(R(\lambda, A) - \frac{1}{\lambda} I \right) x d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} R(\lambda, A) A x d\lambda.
\end{aligned}$$

Note que
$$\left\| \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} R(\lambda, A) A x \right\| \leqslant \frac{e^{t \operatorname{Re} \lambda}}{|\lambda|} \cdot \frac{M}{|\lambda|} \|Ax\| = M \frac{e^{t \operatorname{Re} \lambda}}{|\lambda|^2} \|Ax\|.$$
Se $\operatorname{Re} \lambda \leqslant 1$, então
$$e^{t \operatorname{Re} \lambda} \leqslant e^t < e^t + 1.$$

Caso $\operatorname{Re} \lambda > 1$, considere a aplicação $f(t) = (1 + e^t) - e^{t \operatorname{Re} \lambda}$. Uma vez que f é contínua e $f(0) = 1 > 0$, existe $h > 0$ tal que $f(t) > 0$ para $t \in [0, h)$. Então,

$$e^{t \operatorname{Re} \lambda} \leqslant e^t + 1 \leqslant e^h + 1.$$

Logo, tomando $0 < t < h$, temos

$$\left\| \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} R(\lambda, A) A x \right\| \leqslant M \frac{e^h + 1}{|\lambda|^2} \|Ax\| = \frac{k}{|\lambda|^2}.$$

Note também que

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \frac{k}{|\lambda|^2} d\lambda &= k \left[\int_{\gamma_1} \frac{1}{|\lambda|^2} + \int_{\gamma_2} \frac{1}{|\lambda|^2} + \int_{\gamma_3} \frac{1}{|\lambda|^2} \right] \\
&= k \lim_{R\to\infty} \left[\int_r^R \frac{e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}}{|s e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}|^2} ds + \int_{-\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} \frac{i r e^{is}}{|r e^{is}|^2} ds - \int_{-R}^{-r} \frac{e^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)}}{|s e^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)}|^2} ds \right] \\
&= k \lim_{R\to\infty} \left[e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)} \int_r^R \frac{1}{s^2} ds + \frac{i}{r} \int_{-\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} e^{is} ds - e^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)} \int_{-R}^{-r} \frac{1}{s^2} ds \right] \\
&= k \lim_{R\to\infty} \left[e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{r} (e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)} - e^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)}) - e^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \right] \\
&= \frac{2k}{r} [e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)} - e^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)}].
\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} R(\lambda, A)Ax = \frac{1}{\lambda} R(\lambda, A)Ax,$$

segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x - x = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} R(\lambda, A)Axd\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\lambda} R(\lambda, A)Axd\lambda.$$

Para concluir, basta mostrar que a última integral converge para zero. De fato, considere novamente as curvas $\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ definidas no item (i), porém com sentido contrário. Além disso, para $r > r_0 > 0$, tome

$$\Lambda_r = \{re^{is} : -\frac{\pi}{2} - \theta \leqslant s \leqslant \frac{\pi}{2} + \theta\}.$$

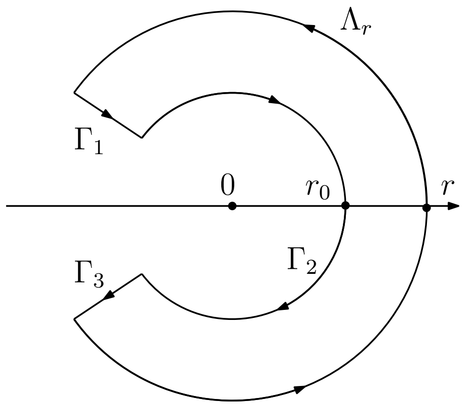

Figura 3.5: Região $\Gamma \cup \Lambda_r$

Como $\varrho(A) \ni \lambda \mapsto \frac{1}{\lambda} R(\lambda, A)$ é analítica na região limitada por estas curvas, temos que

$$\int_{\Gamma\cup\Lambda_r} \frac{1}{\lambda} R(\lambda, A)Axd\lambda = \int_\Gamma \frac{1}{\lambda} R(\lambda, A)Axd\lambda + \int_{\Lambda_r} \frac{1}{\lambda} R(\lambda, A)Axd\lambda = 0, \tag{3.3}$$

em que

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Lambda_r} \frac{1}{\lambda} R(\lambda, A)Axd\lambda \right\| &= \left\| \int_{-\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} \frac{1}{re^{is}} (ire^{is}) R(re^{is}, A)Axds \right\| \\ &\leqslant \frac{1}{r} \int_{-\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} M\|Ax\|ds \\ &= \frac{\pi + 2\theta}{r} \|Ax\| M. \end{aligned}$$

Deste modo, se $r \to \infty$, temos de (3.3) que

$$\lim_{r\to\infty} \int_\Gamma \frac{1}{\lambda} R(\lambda, A)Axd\lambda = -\int_\gamma \frac{1}{\lambda} R(\lambda, A)Axd\lambda = 0.$$

Portanto, para $x \in \mathrm{D}(A)$, temos

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x. \tag{3.4}$$

Agora, seja $x \in X$. Como $\mathrm{D}(A)$ é denso em X, dado $\varepsilon > 0$, existe $x_0 \in \mathrm{D}(A)$ tal que

$$\|x - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2(C+1)},$$

em que $C > 0$ é tal que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C$, para todo $t \geqslant 0$. De (3.4), temos que existe $h > 0$ tal que, se $0 < t < h$, então

$$\|T(t)x_0 - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deste modo, se $0 < t < h$, então

$$\begin{aligned}
\|T(t)x - x\| &\leqslant \|T(t)x - T(t)x_0\| + \|T(t)x_0 - x_0\| + \|x_0 - x\| \\
&\leqslant \|T(t)\|\|x - x_0\| + \|T(t)x_0 - x_0\| + \|x_0 - x\| \\
&< C\frac{\varepsilon}{2(C+1)} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(C+1)} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

O que prova o item (ii).

Prova do item (iii): Note que A satisfaz as hipóteses do Teorema de Hille-Yosida. Para concluir, mostraremos que o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ gerado por A é igual a $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$. Para isto, provaremos que para algum $\lambda > 0$,

$$R(\lambda, A) = R(\lambda, B),$$

em que B é o gerador do semigrupo $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$. Desta forma, teremos $\mathrm{D}(A) = \mathrm{D}(B)$ e

$$(\lambda I - A)x = (\lambda I - B)x,$$

então

$$Ax = Bx, \ \forall x \in \mathrm{D}(A).$$

De fato, sabemos que

$$R(\lambda, B) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt, \ \forall x \in X.$$

Tome $t_0 > 0$ fixado, assim

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_0} e^{-\lambda t} T(t)x dt &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{t_0} e^{-\lambda t}\int_\gamma e^{\mu t} R(\mu, A)x d\mu dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R(\mu, A)x \int_0^{t_0} e^{(\mu-\lambda)t} dt d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R(\mu, A)x \frac{e^{t_0(\mu-\lambda)} - 1}{\mu - \lambda} d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{t_0(\mu-\lambda)}}{\mu - \lambda} R(\mu, A)x d\mu - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\mu - \lambda} R(\mu, A)x d\mu. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Considere novamente as curvas $\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ definidas no item (i), porém com orientação inversa. Para $r > \lambda > r_0 > 0$, com $\lambda > 0$ fixado, tome

$$\Lambda_r = \left\{ re^{is} : -\frac{\pi}{2} - \theta \leqslant s \leqslant \frac{\pi}{2} + \theta \right\}.$$

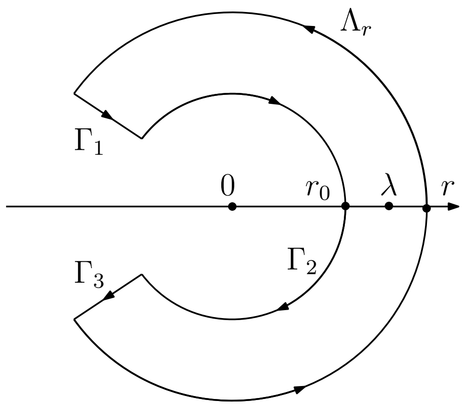

Figura 3.6: Região $\Gamma \cup \Delta_r$

Como λ esta contido no interior da região limitada por estas curvas, temos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma \cup \Lambda_r} \frac{1}{\mu - \lambda} R(\mu, A)x d\mu = R(\lambda, A)x,$$

Note que

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\Lambda_r} \frac{1}{\mu - \lambda} R(\mu, A)x d\mu \right\| &= \left\| \int_{-\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} \frac{1}{re^{is} - \lambda} (ire^{is}) R(re^{is}, A)x ds \right\| \\
&\leqslant \frac{r}{r-\lambda} \cdot \frac{M}{r} \|x\| (\pi + 2\theta).
\end{aligned}$$

Com isso

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\cup\Lambda_r}\frac{1}{\mu-\lambda}R(\mu,A)xd\mu=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\gamma}\frac{1}{\mu-\lambda}R(\mu,A)xd\mu=R(\lambda,A)x,$$

e assim

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{1}{\mu-\lambda}R(\mu,A)xd\mu=-R(\lambda,A)x. \tag{3.6}$$

Considerando as mesmas curvas e usando que

$$|r_0e^{is}-\lambda|\geqslant||r_0e^{is}|-|\lambda||=\lambda-r_0,$$

encontramos

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\gamma_2}\frac{e^{t_0(\mu-\lambda)}}{\mu-\lambda}R(\mu,A)xd\mu\right\| &= e^{-\lambda t_0}\left\|\int_{-\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta}\frac{e^{t_0r_0e^{is}}}{r_0e^{is}-\lambda}(r_0ie^{is})R(r_0e^{is},A)xds\right\|\\ &\leqslant e^{-t_0\lambda}M\int_{-\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta}\frac{1}{\lambda-r_0}e^{t_0r_0\cos s}r_0\frac{M}{r_0}\|x\|ds\\ &\leqslant e^{-t_0(\lambda-r_0)}\frac{M\|x\|}{\lambda-r_0}(\pi+2\theta).\end{aligned}$$

Com isso,

$$\lim_{t_0\to\infty}\int_{\gamma_2}\frac{e^{t_0(\mu-\lambda)}}{\mu-\lambda}R(\mu,A)xd\mu=0.$$

Por outro lado, se $s\in[r_0,r]$, é claro que

$$\lambda-r_0=|\lambda-r_0|\leqslant|se^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)}-\lambda|,$$

e assim

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\Gamma_3}\frac{e^{t_0(\mu-\lambda)}}{\mu-\lambda}R(\mu,A)xd\mu\right\| &= e^{-\lambda t_0}\left\|\int_{r_0}^{r}\frac{e^{t_0se^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)}}}{se^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)}-\lambda}e^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)}R(se^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)},A)xds\right\|\\ &\leqslant e^{-\lambda t_0}\int_{r_0}^{r}\frac{e^{-t_0s\operatorname{sen}\theta}}{\lambda-r_0}\frac{M}{s}\|x\|ds\\ &\leqslant \frac{Me^{-\lambda t_0}\|x\|}{r_0(\lambda-r_0)}\int_{r_0}^{r}e^{-t_0s\operatorname{sen}\theta}ds\\ &= \frac{Me^{-\lambda t_0}\|x\|}{r_0(\lambda-r_0)t_0\operatorname{sen}\theta}[e^{-t_0r_0\operatorname{sen}\theta}-e^{-t_0r\operatorname{sen}\theta}].\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{t_0\to\infty}\int_{\Gamma_3}\frac{e^{t_0(\mu-\lambda)}}{\mu-\lambda}R(\mu,A)xd\mu=0,\ \forall r>0.$$

Então, se $r \to \infty$, devemos ter

$$\lim_{t_0\to\infty}\lim_{r\to\infty}\int_{\Gamma_3}\frac{e^{t_0(\mu-\lambda)}}{\mu-\lambda}R(\mu,A)xd\mu = \lim_{t_0\to\infty}\int_{-\gamma_3}\frac{e^{t_0(\mu-\lambda)}}{\mu-\lambda}R(\mu,A)xd\mu = 0.$$

Analogamente, obtemos que

$$\lim_{t_0\to\infty}\int_{\gamma_1}\frac{e^{t_0(\mu-\lambda)}}{\mu-\lambda}R(\mu,A)xd\mu = 0.$$

Deste modo,

$$\lim_{t_0\to\infty}\int_{\gamma}\frac{e^{t_0(\mu-\lambda)}}{\mu-\lambda}R(\mu,A)xd\mu = 0 \tag{3.7}$$

Portanto, de (3.5), (3.6) e (3.7), segue que se $t_0 \to \infty$

$$R(\lambda,B)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt = R(\lambda,A)x,\ \forall x\in X,$$

isto é, $A = B$. Como o semigrupo gerado por A deve ser único, temos que

$$S(t) = T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\lambda t}R(\lambda,A)d\lambda,\ \forall t>0.$$

O que conclui a demonstração. □

3.2 Semigrupos Analíticos

Definição 3.5. *Sejam X um espaço de Banach e*

$$\Delta = \{z\in\mathbb{C} : \phi_2 < \operatorname{Arg} z < \phi_1\}$$

em que $-\phi_2, \phi_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$. Suponha que $\{T(z)\}_{z\in\Delta}$ seja uma família de operadores lineares limitados $T(z) : X \to X$. Então, $\{T(z)\}_{z\in\Delta}$ é um semigrupo analítico em Δ se:

(i) $z \longmapsto T(z)$ *é analítica em Δ;*

(ii) *Dado $x\in X$, temos* $\lim\limits_{z\in\Delta, z\to 0} T(z)x = x$*;*

(iii) $T(0) = I$*;*

(iv) $T(z_1+z_2) = T(z_1)T(z_2)$*, para quaisquer $z_1, z_2 \in \Delta$.*

Um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é dito analítico caso admita extensão a um semigrupo analítico $\{T(z)\}_{z\in\Delta}$ definido em alguma região Δ, em que $[0,\infty)\subset\Delta$.

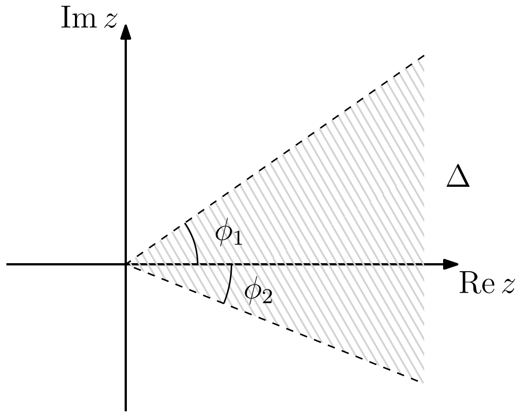

Figura 3.7: Região Δ

A partir da caracterização de semigrupos gerados por operadores setoriais, temos diferentes formas de avaliar quando um operador A gera um semigrupo analítico, como segue no seguinte Teorema:

Teorema 3.6. *Sejam X um espaço de Banach e $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo limitado $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$. Se $0 \in \varrho(A)$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ admite extensão analítica $\{T(z)\}_{z\in\Delta}$ definido em um setor*

$$\Delta_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg} z| < \delta\},$$

em que $T(z)$ é uniformemente limitado em cada subsetor fechado $\overline{\Delta_{\delta'}}$, com $0 < \delta' < \delta$;

(b) *Existe $C > 0$ tal que para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0\}$, $\lambda \in \varrho(A)$ e*

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{|\operatorname{Im}\lambda|}, \ \operatorname{Im}\lambda \neq 0;$$

(c) *A é setorial, ou seja, existem $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ e $M > 0$ tais que*

$$\Sigma_\delta = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg}\lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \cup \{0\} \subset \varrho(A)$$

e vale que

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{|\lambda|}, \ \forall \lambda \in \Sigma_\delta \setminus \{0\};$$

(d) *$t \mapsto S(t)$ é diferenciável para todo $t > 0$ e existe $K > 0$ tal que*

$$\|AS(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{K}{t}, \ \forall t > 0.$$

Demonstração. (a)$\Longrightarrow$(b) Por hipótese, existem $0 < \delta' < \delta$ e $M \geqslant 0$ tais que $\{T(z)\}_{z\in\Delta}$

estende $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ analiticamente e

$$\|T(z)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M, \ \forall z \in \overline{\Delta_{\delta'}}.$$

Como $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é uniformemente limitado, o Teorema de Hille-Yosida nos garante que para $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ tal que, se $\alpha > 0$, então $\lambda \in \varrho(A)$ e

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-(\alpha+i\beta)t} S(t)x dt, \ \forall x \in X.$$

Caso $\beta = 0$, sabemos que $(0, \infty) \subset \varrho(A)$. Caso $\beta > 0$, para $r > 1$ defina a curva $C_r = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{4} C_{ri}$, por

$$\begin{aligned}
C_{r1} &= \left\{ se^{-i\delta'} : s \in \left[\frac{1}{r}, r\right] \right\}, \\
C_{r2} &= \left\{ re^{is} : s \in [-\delta', 0] \right\}, \\
C_{r3} &= \left\{ -s : s \in \left[-r, -\frac{1}{r}\right] \right\}, \\
C_{r4} &= \left\{ \frac{1}{r} e^{-is} : s \in [0, \delta'] \right\}.
\end{aligned}$$

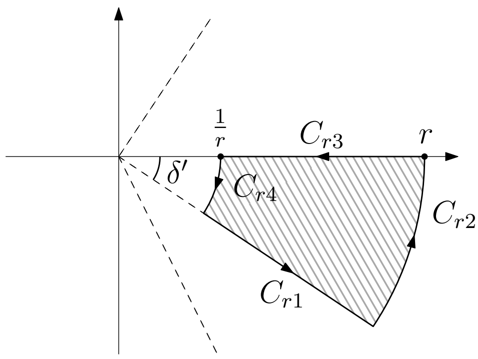

Figura 3.8: Região C_r

Uma vez que $z \mapsto T(z)$ é analítica em Δ_δ, temos que $\overline{\Delta_{\delta'}} \ni z \mapsto e^{-\lambda z} T(z)$ é analítica, então

$$\int_{C_R} e^{-\lambda z} T(z) dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{C_{Ri}} e^{-\lambda z} T(z) dz = 0. \tag{3.8}$$

Uma vez que $\alpha, \beta > 0$, encontramos

$$\begin{aligned}\left\|\int_{C_{r4}} e^{-\lambda z}T(z)dz\right\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\|\int_0^{\delta'} e^{-(\alpha+i\beta)\frac{1}{r}e^{-is}}\left(-\frac{i}{r}e^{-is}\right)T\left(\frac{1}{r}e^{-is}\right)ds\right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \frac{1}{r}\left\|\int_0^{\delta'} e^{-\frac{1}{r}(\alpha\cos s+\beta\operatorname{sen} s)+\frac{i}{r}(\alpha\operatorname{sen} s-\beta\cos s)}e^{-is}T\left(\frac{1}{r}e^{-is}\right)ds\right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leqslant \frac{M}{r}\int_0^{\delta'} e^{-\frac{1}{r}(\alpha\cos s+\beta\operatorname{sen} s)}ds.\end{aligned}$$

Seja

$$k = \min_{s\in[0,\delta']}\{\alpha\cos s+\beta\operatorname{sen} s\},$$

e assim

$$\left\|\int_{C_{r4}} e^{-\lambda z}T(z)dz\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M\delta'}{r}e^{-\frac{k}{r}}.$$

Logo,

$$\lim_{r\to\infty}\int_{C_{r4}} e^{-\lambda z}T(z)dz = 0. \tag{3.9}$$

Do mesmo modo, obtemos

$$\lim_{r\to\infty}\int_{C_{r2}} e^{-\lambda z}T(z)dz = 0. \tag{3.10}$$

Logo, por (3.8), (3.9) e (3.10), segue que

$$\lim_{r\to\infty}\int_{C_{r1}} e^{-\lambda z}T(z)dz = -\lim_{r\to\infty}\int_{C_{r3}} e^{-\lambda t}T(z)dz, \tag{3.11}$$

em que

$$\begin{aligned}\left\|\int_{C_{r1}} e^{-\lambda z}T(z)dz\right\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\|\int_{\frac{1}{r}}^{r} e^{-(\alpha+i\beta)se^{-i\delta'}}e^{-i\delta'}T(se^{-i\delta'})ds\right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \left\|\int_{\frac{1}{r}}^{r} e^{-s(\alpha\cos\delta'+\beta\operatorname{sen}\delta')+is(\alpha\operatorname{sen}\delta'-\beta\cos\delta')}e^{-i\delta'}T(se^{-i\delta'})ds\right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leqslant M\int_{\frac{1}{r}}^{r} e^{-s(\alpha\cos\delta'+\beta\operatorname{sen}\delta')}ds \\ &\leqslant M\int_0^{\infty} e^{-s(\alpha\cos\delta'+\beta\operatorname{sen}\delta')}ds \\ &= \frac{M}{\alpha\cos\delta'+\beta\operatorname{sen}\delta'} < \infty.\end{aligned}$$

Então, as integrais em (3.11) convergem e

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{\lambda t}T(t)dt &= \lim_{r\to\infty}\int_{\frac{1}{r}}^{r} e^{-\lambda s}T(s)ds\\ &= -\lim_{r\to\infty}\int_{-\frac{1}{r}}^{-r} e^{-(\alpha+i\beta)(-s)}T(-s)ds\\ &= \lim_{r\to\infty}\int_{C_{r3}} e^{-\lambda z}T(z)dz\\ &= -\lim_{r\to\infty}\int_{C_{r1}} e^{-\lambda z}T(z)dz.\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} = \left\|\lim_{R\to\infty}\int_{C_{R1}} e^{-\lambda z}T(z)dz\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{\alpha\cos\delta' + \beta\operatorname{sen}\delta'} \leqslant \frac{C}{\beta},$$

em que $C = \frac{M}{\operatorname{sen}\delta'} > 0$.

Agora, caso $\beta < 0$, de maneira análoga defina $C_r = \bigcup_{i=1}^{4} C_{ri}$, em que

$$\begin{aligned}C_{r1} &= \left\{s : s \in \left[\frac{1}{r}, r\right]\right\},\\ C_{r2} &= \{re^{is} : s \in [0, \delta']\},\\ C_{r3} &= \left\{-se^{i\delta'} : s \in \left[-r, -\frac{1}{r}\right]\right\},\\ C_{r4} &= \left\{\frac{1}{r}e^{-is} : s \in [-\delta', 0]\right\}.\end{aligned}$$

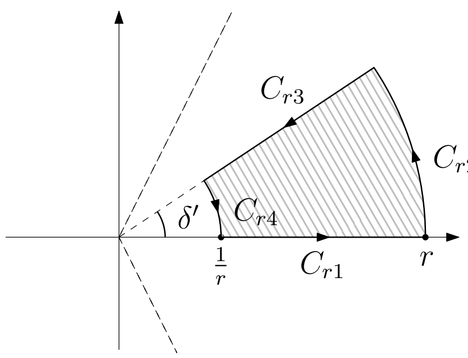

Figura 3.9: Região C_r

Então, temos novamente

$$\int_{C_r} e^{-\lambda t}T(z)dz = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{r\to\infty}\int_{C_{r2}} e^{-\lambda t}T(z)dz = -\lim_{r\to\infty}\int_{C_{r4}} e^{-\lambda t}T(z)dz = 0,$$

de modo que
$$R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-(\alpha+i\beta)se^{i\delta'}} e^{i\delta'} T(se^{i\delta'})ds,$$
ou seja,
$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{\alpha\cos\delta' - \beta \operatorname{sen}\delta'} \leqslant \frac{C}{-\beta}.$$
Portanto, devemos ter
$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{|\operatorname{Im}\lambda|}, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}_+ \text{ com } \operatorname{Im}\lambda \neq 0.$$
O que conclui da demonstração.

(b)$\Longrightarrow$(c) Por hipótese, se $\lambda \in \mathbb{C}_+$, então $\lambda \in \varrho(A)$. Adicionalmente, se $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, temos
$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{|\operatorname{Im}\lambda|}. \tag{3.12}$$
Assim, se $|\operatorname{Im}\lambda| > \operatorname{Re}\lambda$, temos
$$|\lambda|^2 = (\operatorname{Re}\lambda)^2 + (\operatorname{Im}\lambda)^2 \leqslant 2(\operatorname{Im}\lambda)^2,$$
então
$$\frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{|\lambda|}.$$
Logo,
$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C\sqrt{2}}{|\lambda|}.$$
Por outro lado, se $\operatorname{Re}\lambda \geqslant |\operatorname{Im}\lambda|$, o Teorema de Hille-Yosida nos garante que
$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{K}{\operatorname{Re}\lambda}.$$
Analogamente, obtemos
$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{K\sqrt{2}}{|\lambda|}.$$
Logo, se $\lambda \in \mathbb{C}_+$, temos
$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{K_0}{|\lambda|}, \tag{3.13}$$
em que $K_0 = \sqrt{2}\max\{M, C\}$.

Para a constante $C > 0$ dada no item (b), considere $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que
$$0 \leqslant |\operatorname{Re}\lambda| < \frac{|\operatorname{Im}\lambda|}{C}.$$

Mostremos que $\lambda \in \varrho(A)$ e vale (3.13), a menos da constante K_0. Para tanto, mostraremos que existe $\mu \in \varrho(A)$ com

$$|\lambda - \mu| < \frac{1}{\|R(\mu, A)\|_{\mathcal{L}(X)}}. \tag{3.14}$$

Assim, a Proposição A.6 nos garantirá que $\lambda \in \rho(A)$ e a estimativa desejada. Com efeito, tome $\varepsilon > 0$ de modo que

$$|\operatorname{Re}\lambda| < \frac{|\operatorname{Im}\lambda|}{C} - \varepsilon = \frac{|\operatorname{Im}\lambda|}{C}\left(1 - \frac{\varepsilon C}{|\operatorname{Im}\lambda|}\right).$$

Faça $L = 1 - \dfrac{\varepsilon C}{|\operatorname{Im}\lambda|} \in (0,1)$ e tome $\alpha > 0$ tal que

$$|\operatorname{Re}\lambda| + \alpha < \frac{L|\operatorname{Im}\lambda|}{C},$$

de modo que $\mu = \alpha + i\operatorname{Im}\lambda \in \varrho(A)$, pois $\mu \in \mathbb{C}_+$. Como

$$|\mu - \lambda| = |\alpha - \operatorname{Re}\lambda| \leqslant |\operatorname{Re}\lambda| + \alpha < \frac{L|\operatorname{Im}\lambda|}{C},$$

segue de (3.12) que

$$|\mu - \lambda|\|R(\mu, A)\|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{L|\operatorname{Im}\lambda|}{C}\|R(\mu, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant L < 1.$$

Logo, $\mu \in \varrho(A)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfazem (3.14), o que implica em $\lambda \in \varrho(A)$. Uma vez que $0 < L < 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|R(\mu, A)\|_{\mathcal{L}(X)}^{n+1}|\mu - \lambda|^n \\
&\leqslant \|R(\mu, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \sum_{n=0}^{\infty} L^n \\
&\leqslant \|R(\mu, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \frac{1}{1 - L} \\
&\leqslant \frac{C}{|\operatorname{Im}\lambda|(1 - L)}.
\end{aligned}$$

Logo, se $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que $0 \leqslant |\operatorname{Re}\lambda| < \frac{|\operatorname{Im}\lambda|}{C}$, com $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, temos $\lambda \in \varrho(A)$ e

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{|\operatorname{Im}\lambda|} < \frac{K_1}{|\lambda|}, \tag{3.15}$$

uma vez que

$$|\lambda| = |\operatorname{Re}\lambda|^2 + |\operatorname{Im}\lambda|^2 < |\operatorname{Im}\lambda|^2\left(1 + \frac{1}{C^2}\right),$$

e então

$$\frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|} < \frac{\sqrt{\frac{1}{C^2}+1}}{|\lambda|} := \frac{K_1}{|\lambda|}.$$

Portanto, tomando $\delta = \operatorname{arctg}\frac{1}{C} \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $M = \max\{K_0, K_1\}$, vamos mostrar que

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg}\lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \subset \varrho(A) \quad \text{e} \quad \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{K}{|\lambda|}.$$

Com efeito, seja $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. Se $\alpha > 0$ ou $\alpha = 0$, de (3.13) e (3.15), respectivamente, temos $\lambda \in \varrho(A)$ e a limitação desejada quando $\lambda \neq 0$.

Agora, se $\beta < 0$ e $\alpha < 0$, então por hipótese

$$\frac{\pi}{2} < |\operatorname{Arg}\lambda| = \left|-\pi + \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}\right| = \pi - \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha} < \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{C},$$

e assim

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{C} < \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}.$$

Deste modo, temos

$$C < \frac{\beta}{\alpha},$$

ou ainda

$$\frac{\beta}{C} < \alpha < 0.$$

Do mesmo modo, se $\beta > 0$ e $\alpha < 0$, temos que

$$\frac{\pi}{2} < |\operatorname{Arg}\lambda| = \left|\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha} + \pi\right| = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha} + \pi < \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{C}.$$

Assim,

$$-\frac{\beta}{C} < \alpha < 0.$$

Em ambos os casos, temos $|\operatorname{Re}\lambda| < \frac{|\operatorname{Im}\lambda|}{C}$ e de (3.15) segue a estimativa desejada.

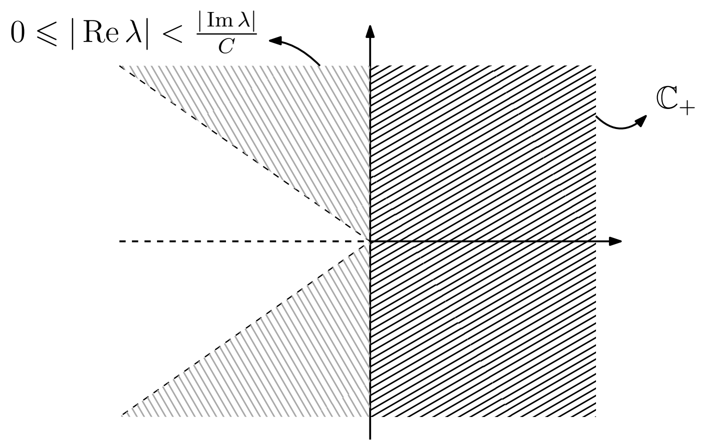

Figura 3.10: Setor Σ_δ

Portanto, como por hipótese $0 \in \varrho(A)$, encontramos

$$\Sigma_\delta = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg}\lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\Big\} \cup \{0\} \subset \varrho(A)$$

e

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{|\lambda|},\ \forall \lambda \in \Sigma_\delta \setminus \{0\}.$$

O que conclui a demonstração do item (c).

(c)$\Longrightarrow$(d) Segue do Teorema 3.4 que

$$S(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\lambda t} R(\lambda, A)d\lambda,\ \forall t > 0,$$

em que γ é qualquer curva contida em Σ_δ indo de $-\infty e^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)}$ até $\infty e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}$, com $0 < \theta < \delta$. Em particular, tome

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 = \{-se^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)} : -\infty < s < 0\} \cup \{se^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)} : 0 < s < \infty\}.$$

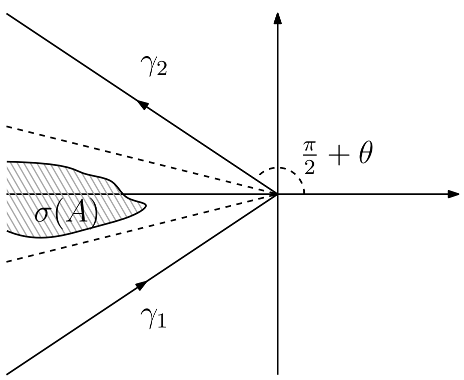

Figura 3.11: Curva γ

Fixado $r > 0$, tome

$$\gamma_r = \gamma_{r1} \cup \gamma_{r2} = \{-se^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)} : -r < s < 0\} \cup \{se^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)} : 0 < s < r\}$$

e defina

$$S_r(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda, \ \forall t > 0.$$

Vamos mostrar que $S_r(t)$ é diferenciável e que

$$S_r'(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \lambda e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda, \ \forall t > 0. \tag{3.16}$$

Note que, para cada $r > 0$, encontramos

$$\frac{S_r(t+h) - S_r(t)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{e^{\lambda(t+h)} - e^{\lambda t}}{h} R(\lambda, A) d\lambda.$$

Assim, se $M_r > 0$ a constante que limita $R(\lambda, A)$ em γ_r, então

$$\left\| \frac{S_r(t+h) - S_r(t)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \lambda e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \left| \frac{e^{\lambda(t+h)} - e^{\lambda t}}{h} - \lambda e^{\lambda t} \right| M_r d\lambda,$$

fazendo $h \to 0$, obtemos (3.16). Note ainda que $S_r(t) \to S(t)$ na norma dos operadores, assim

$$S'(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lambda e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda, \ \forall t > 0.$$

Note também que para qualquer $r > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\|S_r'(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\gamma_{r1}} \lambda e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda + \int_{\gamma_{r2}} \lambda e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{-r}^{0} se^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)} e^{-tse^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)}} e^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)} R(-se^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)}, A) ds \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{0}^{r} se^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)} e^{tse^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}} e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)} R(se^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}, A) ds \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leqslant \frac{M}{2\pi} \left[\int_0^r e^{-ts \operatorname{sen}\theta} ds + \int_{-r}^{0} e^{ts \operatorname{sen}\theta} ds \right] \\
&= \frac{M}{\pi} \int_0^r e^{-ts \operatorname{sen}\theta} ds \\
&= \frac{M}{\pi} \cdot \frac{1}{t \operatorname{sen}\theta} \left(1 - e^{-tr \operatorname{sen}\theta}\right) \\
&\leqslant \frac{M}{\pi \operatorname{sen}\theta} \cdot \frac{1}{t}, \\
&= \frac{C}{t},
\end{aligned}$$

em que $K = \frac{M}{\pi \operatorname{sen}\theta}$. Assim, se $r \to \infty$, encontramos

$$\|S'(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{K}{t},\ \forall t > 0.$$

Além disso, note que

$$\lambda R(\lambda, A) - I = \lambda R(\lambda, A) - R(\lambda, A)(\lambda I - A) = R(\lambda, A)A.$$

Deste modo, se $x \in \mathrm{D}(A)$, então

$$\begin{aligned} AS(t)x &= S(t)Ax \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\lambda t}R(\lambda, A)Axd\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_\gamma \lambda e^{\lambda t}R(\lambda, A)xd\lambda - \int_\gamma e^{\lambda t}d\lambda\right]. \end{aligned}$$

Para para cada $t > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_r} e^{\lambda t}d\lambda &= \int_{\gamma_{r1}} e^{\lambda t}d\lambda + \int_{\gamma_{r2}} e^{\lambda t}d\lambda \\ &= -\int_{-r}^{0} e^{-tse^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)}}e^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)}ds + \int_0^r e^{tse^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}}(e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)})ds \\ &= \left.\frac{e^{-tse^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)}}}{t}\right|_{-r}^{0} + \left.\frac{e^{tse^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}}}{t}\right|_{0}^{r} \\ &= \frac{e^{tre^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}} - e^{tre^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)}}}{t}, \end{aligned}$$

então

$$\left|\int_{\gamma_r} e^{\lambda t}d\lambda\right| \leqslant \frac{e^{tr\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)} + e^{tr\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}}{t} = \frac{2}{t}e^{-tr\operatorname{sen}\theta} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Logo, em $\mathrm{D}(A)$ temos

$$AS(t)x = S'(t)x,$$

o que implica em

$$\|AS(t)x\| \leqslant \frac{K}{t}\|x\|,\ \forall t > 0.$$

Agora, seja $x \in X$. Como $\mathrm{D}(A)$ é denso em X, existe $(x_n) \subset \mathrm{D}(A)$ tal que $x_n \to x$ em X. Então,

$$AS(t)x_n = \int_\gamma e^{\lambda t}R(\lambda, A)Ax_nd\lambda = S'(t)x_n.$$

Como

$$\frac{S'(t+h)-S'(t)}{h} = \int_\gamma \lambda \frac{e^{\lambda(t+h)}-e^{\lambda t}}{h} R(\lambda,A)d\lambda \xrightarrow{h\to 0} \int_\gamma \lambda^2 e^{\lambda t} R(\lambda,A)d\lambda, \tag{3.17}$$

encontramos $S'(t)x_n \to S'(t)x$, pois $S'(t)$ é contínua. Logo, sendo A fechado, segue que $AS(t)x_n \to AS(t)x$ e assim, para $x \in X$, vale que

$$\|AS(t)x\| = \|S'(t)x\| \leqslant \frac{K}{t}\|x\|, \ \forall t > 0.$$

De maneira análoga ao feito em (3.17), mostramos que dado $n \in \mathbb{N}$,

$$S^{(n)}(t) = \int_\gamma \lambda^n e^{\lambda t} R(\lambda,A)d\lambda.$$

Logo, $S(t)$ é diferenciável para cada $t > 0$.

(d)$\Longrightarrow$(a) Mostraremos que a extensão analítica do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é dada por

$$T(z) = S(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^{(n)}(t)}{n!}(z-t)^n, \tag{3.18}$$

em que $t > 0$ é a pare real de $z \in \mathbb{C}_+$. Para isso, precisamos mostrar que $\{T(z)\}_{z\in\Delta_\delta}$ é um semigrupo analítico que estende $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ e é uniformemente limitado em cada subsetor fechado de Δ_δ.

Primeiro, como $S(t)$ é diferenciável para todo $t > 0$, segue que

$$S^{(n)}(t) = \left(AS\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(S'\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Com efeito, por hipótese, esta afirmação é válida para $n = 1$. Agora, suponha que para algum $n \in \mathbb{N}$, temos $S^{(n)}(t) = \left(AS\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$. Assim, se $0 < s < t$, então

$$\left(AS\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = S(t-s)\left(AS\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n.$$

Com isso

$$\frac{d}{dt}S^{(n)}(t) = \frac{d}{dt}\left(S(t-s)\left(AS\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n\right) = AS(t-s)\left(AS\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n.$$

Em particular, se $s = \frac{nt}{n+1}$, temos

$$S^{(n+1)}(t) = AS\left(t - \frac{nt}{n+1}\right)\left(AS\left(\frac{t}{n+1}\right)\right)^n = \left(AS\left(\frac{t}{n+1}\right)\right)^{n+1}.$$

Logo a igualdade é verdadeira.

Agora, note que por hipótese temos

$$\|S^{(n)}(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \left\|S'\left(\frac{t}{n}\right)\right\|_{\mathcal{L}(X)}^n \leqslant \left(\frac{K}{t}\right)^n \cdot n^n.$$

Como $n^n \leqslant e^n n!$, segue que

$$\frac{1}{n!}\|S^{(n)}(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \left(\frac{Ke}{t}\right)^n.$$

Retornando em (3.18), obtemos

$$\left\|\frac{S^{(n)}(t)}{n!}(z-t)^n\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{\|S^{(n)}(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{n!}|z-t|^n \leqslant \left(\frac{Ke|z-t|}{t}\right)^n.$$

Para que a série em (3.18) convirja, basta mostrar que

$$\frac{Ke|z-t|}{t} < k < 1.$$

Para isso, defina $\delta = \operatorname{arctg} \frac{1}{Ke}$, em que $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ e defina

$$\Delta_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg} z| < \delta\}.$$

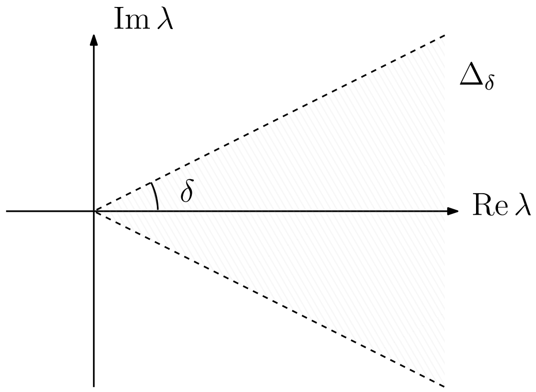

Figura 3.12: Região Δ_δ

Para $z \in \Delta_\delta$, temos que

$$\left|\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right)\right| = |\operatorname{Arg} z| < \delta = \operatorname{arctg}\frac{1}{Ce}$$

se, e somente se,

$$\frac{|\operatorname{Im} z|}{\operatorname{Re} z} < \frac{1}{Ce},$$

o que equivale a

$$|\operatorname{Im} z| < \frac{\operatorname{Re} z}{Ce}.$$

Note que a última desigualdade ocorre se, e somente se, existe $0 < k < 1$ tal que

$$|\operatorname{Im} z| < k\frac{\operatorname{Re} z}{Ce}.$$

Deste modo, tomando $t = \operatorname{Re} z$, obtemos

$$|z - t| = |\operatorname{Im} z| < k \cdot \frac{\operatorname{Re} z}{Ce} = \frac{kt}{Ce},$$

então

$$\frac{Ce|z - t|}{t} < k < 1.$$

Portanto, (3.18) está bem definido em Δ_δ.

Por definição, é claro que $T(t) = S(t)$, com $t \geqslant 0$ e $z \mapsto T(z)$ é analítica em Δ_δ. Vamos mostrar que $T(z + w) = T(w)T(z)$. Com efeito, sejam $z, w \in \Delta_\delta$ com

$$z = t + iu \quad \text{e} \quad w = s + iv,$$

e assim

$$\begin{aligned}
T(z + w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(t + s)}{n!}(z + w - t - s)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n S(t + s)}{n!}(iu + iv)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n S(t + s)}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n - k)!}(iu)^k (iv)^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k S(t)}{k!}(iu)^k \cdot \frac{A^{n-k} S(s)}{(n - k)!}(iv)^{n-k} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n S(t)}{n!}(z - t)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n S(s)}{n!}(w - s)^n\right) \\
&= T(z)T(s).
\end{aligned}$$

Aqui a separação das somas no produto segue é consequência da fórmula do Produto de Cauchy.

Agora, mostraremos que $T(z)$ é uniformemente limitado em subsetores fechados. Para isto, considere $0 < \delta' < \delta$. Como $\delta = \operatorname{arctg} \frac{1}{Ce}$, deve existir $0 < a < 1$ tal que

$$0 < \delta' = \operatorname{arctg} \frac{a}{Ce} < \delta.$$

De maneira análoga ao feito para o setor Δ_δ é claro que se $z \in \overline{\Delta_{\delta'}}$ então $T(z)$ está bem definido, pois se

$$|\operatorname{Im} z| \leqslant a\frac{\operatorname{Re} z}{Ce},$$

então

$$\frac{Ce|z-t|}{t} \leqslant a < 1,$$

isto implica que

$$\begin{aligned}
\|T(z)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{S^{(n)}}{n!}(z-t)^n \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{Ce|z-t|}{t} \right)^n \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} a^n \\
&= \frac{1}{1-a}, \ \forall z \in \overline{\Delta_{\delta'}}.
\end{aligned}$$

Com isso, $T(z)$ é uniformemente limitado em $\overline{\Delta_{\delta'}}$.

Por fim, como para cada $z \in \Delta_\delta$, $T(z)$ é dado por uma série que converge uniformemente na topologia dos operadores, então para $x \in X$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\Delta_\delta}} T(t)x &= \lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\Delta_\delta}} \left[S(t)x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^{(n)}(t)}{n!} x(z-t)^n \right] \\
&= \lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\Delta_\delta}} \lim_{k\to\infty} \left[S(t)x + \sum_{n=1}^{k} \frac{S^{(n)}(t)}{n!} x(z-t)^n \right] \\
&= \lim_{k\to\infty} \lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\Delta_\delta}} \left[S(t)x + \sum_{n=1}^{k} \frac{S^{(n)}(t)}{n!} x(z-t)^n \right] \\
&= \lim_{k\to\infty} x \\
&= x.
\end{aligned}$$

O que completa a demonstração. □

Teorema 3.7. *Seja $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ e suponha que $0 \in \varrho(A)$. Então, $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é analítico se, e somente se,*

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(A) \quad e \quad \limsup_{|\beta|\to\infty} \|\beta(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty.$$

Demonstração. Se $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é analítico e $0 \in \varrho(A)$, então o Teorema 3.6 nos garante que

$i\mathbb{R} \subset \varrho(A)$ e existe $M > 0$ tal que, se $\lambda = i\beta$, com $\beta \neq 0$, então

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{|\beta|},$$

ou ainda,

$$\|\beta(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M.$$

Logo,

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} \|\beta(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M < \infty.$$

Reciprocamente, como $\lambda \mapsto \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é contínua em $\varrho(A)$ e por hipótese

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} \|\beta(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty.$$

Repetindo o argumento feito no Teorema 2.20, existe $M > 0$ tal que

$$\|\beta(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant M, \ \forall \beta \in \mathbb{R}. \tag{3.19}$$

Para concluir, mostraremos que existe $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ tal que

$$\Sigma_\delta = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg} z| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \cup \{0\} \subset \varrho(A) \quad \text{e} \quad \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{K}{|\lambda|}, \ \forall \lambda \in \Sigma_\delta \setminus \{0\},$$

em que $K > 0$ é uma constante fixada. O Teorema de Hille-Yosida nos garante que existe $C > 0$ tal que, se $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}_+$, então

$$\lambda \in \varrho(A) \quad \text{e} \quad \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{\alpha}. \tag{3.20}$$

Caso $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$, de (3.19) segue que

$$\lambda \in \varrho(A) \quad \text{e} \quad \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{|\beta|} = \frac{M}{|\lambda|}. \tag{3.21}$$

Agora, defina

$$D = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\operatorname{Re} \lambda| < \frac{|\operatorname{Im} \lambda|}{2M}\right\}.$$

Note que $D \subset \varrho(A)$. Com efeito, se $\lambda = \alpha + i\beta \in D$, então

$$(\alpha + i\beta)I - A = (i\beta I - A)(I + \alpha(i\beta I - A)^{-1}) \quad \text{e} \quad |\alpha| < \frac{|\beta|}{2M}.$$

Usando (3.19), encontramos

$$\|\alpha(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant |\alpha|\frac{M}{|\beta|} < \frac{|\beta|}{2M} \cdot \frac{M}{|\beta|} = \frac{1}{2} < 1.$$

Assim, $\lambda I - A$ é inversível e

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} &\leqslant \|(I + \alpha(i\beta I - A)^{-1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \frac{M}{|\beta|} \\ &= \frac{2M}{|\beta|}, \end{aligned} \tag{3.22}$$

Logo, segue que $\lambda \in \varrho(A)$ e vale a estimativa (3.22).

Agora, defina $\delta = \operatorname{arctg} \frac{1}{2M}$ e

$$\Sigma_\delta = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg} z| < \frac{\pi}{2} + \delta \right\} \cup \{0\}.$$

Vamos provar que dado $\lambda = \alpha + i\beta \in \Sigma_\delta$, temos $\lambda \in \varrho(A)$. Com efeito, se $\beta > 0$ e $\alpha < 0$, temos

$$\frac{\pi}{2} < |\operatorname{Arg} \lambda| = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} + \pi < \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2M}.$$

Deste modo,

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2M} < -\operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha},$$

então

$$2M < -\frac{\beta}{\alpha},$$

ou ainda

$$|\alpha| < \frac{|\beta|}{2M}.$$

Se $\beta < 0$ e $\alpha < 0$, de maneira análoga temos

$$|\operatorname{Arg} \lambda| = \pi - \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2M} \Longrightarrow \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} < \operatorname{arctg} \frac{1}{2M},$$

então

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2M} < \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}$$

e

$$|\alpha| < \frac{|\beta|}{2M}.$$

Logo, em ambos os casos temos $\lambda \in \mathrm{D}$ e como por hipótese $\mathbb{C}_+ \cup i\mathbb{R} \subset \varrho(A)$, temos que $\Sigma_\delta \subset \varrho(A)$.

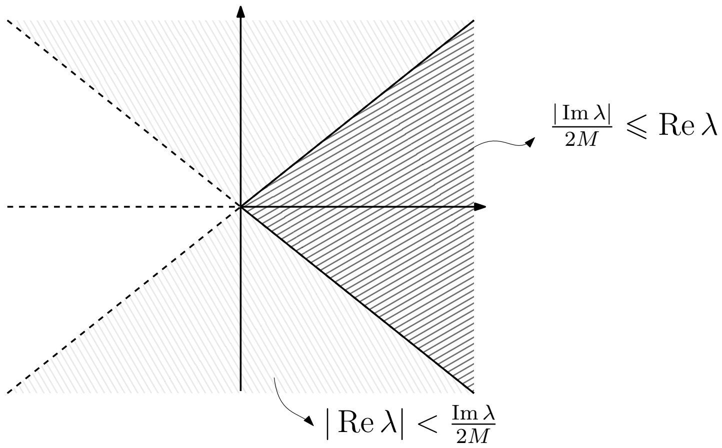

Figura 3.13: Setor Σ_δ

Agora nos resta provar que dado $\lambda = \alpha + i\beta \in \Sigma_\delta$, com $\lambda \neq 0$, então

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{K}{|\lambda|}.$$

De fato, se $0 < |\alpha| < \frac{\beta}{2M}$, então

$$|\lambda|^2 = \alpha^2 + \beta^2 < \beta^2 \left(1 + \frac{1}{4M^2}\right).$$

De (3.22) temos

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{2M}{|\beta|} \leqslant \frac{2M\sqrt{\frac{1}{4M^2} + 1}}{|\lambda|} = \frac{K_1}{|\lambda|}.$$

Caso $\alpha = 0$, então segue de (3.21) que

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{|\beta|} = \frac{M}{|\lambda|}.$$

Caso $\frac{|\beta|}{2M} \leqslant \alpha$, então

$$|\lambda|^2 = \alpha^2 + \beta^2 \leqslant \alpha^2(4M^2 + 1),$$

e assim, de (3.20), encontramos

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{\alpha} \leqslant \frac{C\sqrt{4M^2 + 1}}{|\lambda|} = \frac{K_2}{|\lambda|}.$$

Logo, se $K = \max\{M, K_1, K_2\}$, obtemos

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{K}{|\lambda|}, \ \forall \lambda \in \Sigma_\delta \setminus \{0\}.$$

Portando, segue do Teorema 3.6 que $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ é um semigrupo analítico. $\square$

3.3 Operadores Auto-Adjuntos

Sejam X um espaço de Banach e $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ um operador linear densamente definido. Considerando $\mathrm{D}(A^{\times})$ como sendo o conjunto formado por todos os elementos $\varphi \in X'$ tais que existe $f \in X'$ de modo que

$$\langle \varphi, Ax \rangle_{X,X'} = \langle f, x \rangle_{X,X'}, \ \forall x \in \mathrm{D}(A),$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X,X'}$ denota a dualidade entre X e X'. Assim, o adjunto de A é o operador $A^{\times} : \mathrm{D}(A^{\times}) \subset X' \to X'$ dado por $A^{\times}\varphi = f$.

Caso H seja um espaço de Hilbert, ele será isomorfo ao seu dual e, neste caso, denotaremos H e H' por H. Um operador densamente definido $A : \mathrm{D}(A) \subset H \to H$ será auto adjunto se $A = A^{\times}$. Na prática, isto significa que

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \ \forall x, y \in \mathrm{D}(A).$$

Neste sentido, os seguintes resultados buscam mostrar que se um operador $A : \mathrm{D}(A) \subset H \to H$ é auto-adjunto em um espaço de Hilbert H, dissipativo e tal que $0 \in \varrho(A)$, então ele gera um C_0-semigrupo analítico limitado.

Lema 3.8. *Seja $A : \mathrm{D}(A) \subset H \to H$ um operador densamente definido no espaço de Hilbert H. Se A é auto-adjunto e dissipativo, então A gera um C_0-semigrupo de contrações.*

Demonstração. Como A é dissipativo, basta mostrarmos que $I - A$ é sobrejetivo. Deste modo, suponha que $\mathrm{Im}(I - A) \neq H$. Deste modo, podemos escrever

$$H = \mathrm{Im}(I - A) \oplus [\mathrm{Im}(I - A)]^{\perp}.$$

Assim, existe $y \in H$ tal que $y \neq 0$ e

$$\langle x - Ax, y \rangle = 0, \ \forall x \in \mathrm{D}(A).$$

Uma vez que, como $\mathrm{D}(A^2)$ é denso em H, existe $(y_n) \subset \mathrm{D}(A^2)$ tal que $y_n \to y$. Deste modo,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x - Ax, y \rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle x - Ax, y_n \rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle x, y_n - Ay_n \rangle, \ \forall x \in \mathrm{D}(A). \end{aligned}$$

Em particular, como $y_n - Ay_n \in \mathrm{D}(A)$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - Ay_n\| = 0.$$

Uma vez que A é dissipativo

$$\|y\| \leqslant \|y-y_n\| + \|y_n\| \leqslant \|y-y_n\| + \|(I-A)y_n\| \longrightarrow 0.$$

Logo, $y = 0$ e isso é um absurdo.

Portanto, $I - A$ é sobrejetivo e como A é dissipativo e densamente definido, o Teorema de Lumer-Phillips nos garante que A gera um C_0-semigrupo de contrações. □

Lema 3.9. *Seja $A : \mathrm{D}(A) \subset H \to H$ um operador fechado e densamente definido no espaço de Hilbert H. Sejam*

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle : x \in \mathrm{D}(A) \ \ e \ \ \|x\| = 1\}$$

e $\Sigma \subset \mathbb{C} \setminus \overline{W(A)}$ um aberto conexo. Se $\Sigma \cap \varrho(A) \neq \varnothing$, então

$$\Sigma \subset \varrho(A) \quad e \quad \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \frac{1}{d(\lambda, W(A))}, \ \forall \lambda \in \Sigma.$$

Demonstração. Seja $\lambda \in \Sigma \cap \varrho(A)$. Note que deste modo temos

$$0 < d(\lambda, W(A)) = \inf\{|\lambda - \langle Ax, x\rangle| : x \in \mathrm{D}(A) \text{ e } \|x\| = 1\}.$$

Então para qualquer $x \in \mathrm{D}(A)$ com $\|x\| = 1$, segue que

$$0 < d(\lambda, W(A)) \leqslant |\lambda - \langle Ax, x\rangle| = |\langle \lambda x - Ax, x\rangle| \leqslant \|(\lambda I - A)x\|.$$

Considerando $y \in H \setminus \{0\}$, existe $x \in \mathrm{D}(A)$ tal que

$$y = (\lambda I - A)x,$$

ou seja

$$0 < d(\lambda, W(A)) \leqslant \left|\lambda - \left\langle A\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right| \leqslant \frac{1}{\|x\|}\|(\lambda I - A)x\|.$$

Com isso,

$$\|x\| \leqslant \frac{\|(\lambda I - A)x\|}{d(\lambda, W(A))}.$$

Portanto,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \frac{1}{d(\lambda, W(A))}. \tag{3.23}$$

Por fim, mostraremos que $\Sigma \subset \varrho(A)$. Note que $\Sigma \cap \varrho(A) \subset \Sigma$ é um aberto em Σ, pois ambos os conjuntos também o são. Além disso, seja $(\lambda_n) \subset \Sigma \cap \varrho(A)$ tal que

$\lambda_n \to \lambda \in \Sigma$. Para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, existe $k \in (0,1)$ de modo que

$$|\lambda - \lambda_n| < kd(\lambda_n, W(A)),$$

pois Σ é aberto em $\mathbb{C} \setminus \overline{W(A)}$. Logo, por (3.23), segue que

$$|\lambda - \lambda_n| \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < k < 1.$$

Porém, note que

$$\lambda I - A = [I + (\lambda - \lambda_n)(\lambda_n I - A)^{-1}](\lambda_n I - A),$$

como $\lambda_n \in \varrho(A)$, então $(\lambda I - A)^{-1}$ existe e

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \frac{1}{1-k},$$

ou seja $\lambda \in \varrho(A)$. Logo, $\Sigma \cap \varrho(A) \neq \varnothing$ é aberto e fechado em Σ, sendo Σ conexo, temos

$$\Sigma \cap \varrho(A) = \Sigma.$$

Portanto, $\Sigma \subset \varrho(A)$.

□

Teorema 3.10. *Seja* $A : \mathrm{D}(A) \subset H \to H$ *um operador auto-adjunto definido no espaço de Hilbert* H*. Se* $0 \in \varrho(A)$ *e para cada* $x \in \mathrm{D}(A)$ *temos*

$$\langle Ax, x\rangle < 0, \ x \neq 0.$$

Então, A *gera um semigrupo analítico limitado.*

Demonstração. Note que A é dissipativo, pois

$$\mathrm{Re}\langle Ax, x\rangle = \langle Ax, x\rangle < 0,$$

Logo, o Lema 3.8 nos garante que A gera um C_0-semigrupo de contrações, e assim $(0,\infty) \subset \varrho(A)$. Como $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ e $0 \in \varrho(A)$, temos que $\sigma(A) \subset (-\infty, 0)$, ou seja

$$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0) \subset \varrho(A).$$

Agora, tome $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ fixado e defina

$$\Sigma_\delta = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg}\lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup \{0\}.$$

O Lema 3.9, nos garante que $\Sigma_\delta \subset \varrho(A)$ e

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \frac{1}{d(\lambda, W(A))} \leqslant \frac{1}{d(\lambda, (-\infty, 0))}, \ \forall \lambda \in \Sigma_\delta \setminus \{0\}.$$

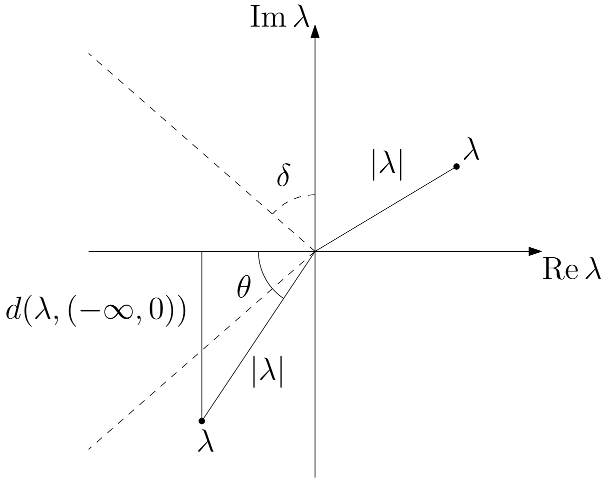

Figura 3.14: $d(\lambda, (-\infty, 0))$

Assim, se $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, então

$$d(\lambda, (-\infty, 0)) = |\lambda|.$$

Por outro lado, se $\operatorname{Re}\lambda < 0$, então

$$d(\lambda, (-\infty, 0)) = |\lambda| \operatorname{sen}\theta > |\lambda| \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)$$

pois $0 < \frac{\pi}{2} - \delta < \theta < \frac{\pi}{2}$. Tomando $M = \frac{1}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \delta)} > 1$, obtemos

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \frac{M}{|\lambda|}, \ \forall \lambda \in \Sigma_\delta \setminus \{0\}.$$

A conclusão segue do Teorema 3.6. $\square$

4 APLICAÇÃO - SISTEMA ABSTRATO DO TIPO TIMOSHENKO

Neste capítulo, estudaremos o seguinte sistema abstrato do tipo Timoshenko

$$\rho_1\varphi_{tt} + kA^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi) + A^{\alpha}\varphi_t = 0, \tag{4.1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} + bA\psi + k(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi) + A^{\beta}\psi_t = 0. \tag{4.2}$$

Com condições iniciais

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(0) = \varphi_1, \quad \psi(0) = \psi_0, \quad \psi_t(0) = \psi_1. \tag{4.3}$$

Revisitando a Introdução, $A : \mathrm{D}(A) \subset H \to H$ é operador estritamente positivo, auto-adjunto, com domínio densamente imerso no espaço de Hilbert $(H, \|\cdot\|, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ e tal que A^{-1} existe e é compacto. Além disso, $\alpha, \beta \in [-1, 1]$ e as constantes físicas do problema k, b, ρ_1 e ρ_2 são positivas.

Nosso primeiro objetivo será reformular as equações (4.1)-(4.2) em um problema de Cauchy abstrato da forma

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = \mathcal{A}U, \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

em que $U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1)$. Deste maneira, mostraremos que o operador $\mathcal{A}$ gera um C_0-semigrupo de contrações $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$.

O segundo objetivo será analisar os efeitos dos expoentes $\alpha, \beta \in [-1, 1]$ da dissipação e das constantes $k, b, \rho_1, \rho_2 > 0$ na estabilidade e regularidade da solução do problema (4.1)-(4.3)

Organizaremos este capítulo da seguinte forma.

Seção 4.1: Definiremos e demonstraremos que o operador $\mathcal{A}$ gera um C_0-semigrupo de contrações $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$, o que assegura existência e unicidade de solução para o problema (4.1)-(4.2);

Seção 4.2: Apresentaremos algumas estimativas que serão utilizadas nas seções seguintes e provaremos que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$;

Seção 4.3: Provaremos que o semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ é polinomialmente estável;

Seção 4.4: Abordaremos a estabilidade exponencial do semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$, demonstrando em quais casos ela ocorre e em quais não;

Seção 4.5: Provaremos que $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ é analítico se, e somente se, $\alpha, \beta \in [\frac{1}{2}, 1]$;

Seção 4.6: Mostraremos que o semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ pertence a alguma classe de Gevrey quando $\alpha, \beta \in (0,1]$.

4.1 Existência de Solução

Primeiramente, note que $A : \mathrm{D}(A) \subset H \to H$ é um operador definido positivo, auto-adjunto, mais ainda, como A^{-1} existe e é compacto e A é densamente definido, segue que $0 \in \varrho(A)$. Assim, segue do Teorema 3.10 que $-A$ gera um C_0-semigrupo analítico limitado. Logo, como feito na Seção A.3, o operador A^r, com $r \in [-1,1]$ está bem definido.

Agora, vamos obter o problema de Cauchy abstrato equivalente ao sistema (1.4)-(1.5). Para tanto, consideraremos o espaço de fase $\mathcal{H}$ dado por

$$\mathcal{H} = \mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}}) \times H \times \mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}}) \times H,$$

munido com o produto interno

$$\begin{aligned}\langle(\varphi,\tilde{\varphi},\psi,\tilde{\psi}),(\Phi,\tilde{\Phi},\Psi,\tilde{\Psi})\rangle_{\mathcal{H}} = k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi, A^{\frac{1}{2}}\Phi+\Psi\rangle + b\langle A^{\frac{1}{2}}\psi, A^{\frac{1}{2}}\Psi\rangle \\ + \rho_1\langle\tilde{\varphi},\tilde{\Phi}\rangle + \rho_2\langle\tilde{\psi},\tilde{\Psi}\rangle\end{aligned}$$

e a norma induzida

$$\|(\varphi,\tilde{\varphi},\psi,\tilde{\psi})\|_{\mathcal{H}}^2 = k\|A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi\|^2 + b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 + \rho_1\|\tilde{\varphi}\|^2 + \rho_2\|\tilde{\psi}\|^2.$$

Observação 4.1. *Nos seguintes resultados utilizaremos os teoremas A.27 e A.28, que nos garantem, respectivamente, que*

(i) $\mathrm{D}(A^p) \hookrightarrow \mathrm{D}(A^q)$ *continuamente para* $0 \leqslant q \leqslant p \leqslant 1$.

(ii) A^r *é auto-adjunto para* $r \in [-1,1]$.

Teorema 4.2. *O espaço de fase* $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}})$ *é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Note que $\mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}}) \times \mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}})$ é completo com a norma

$$\|(\varphi,\psi)\|_1^2 = \|A^{\frac{1}{2}}\varphi\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2.$$

Assim, segue que da Desigualdade de Young que

$$\|A^{\frac{1}{2}}\varphi\|^2 \leqslant \Big(\|A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi\| + \|\psi\|\Big)^2 \leqslant 2\|A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi\|^2 + 2\|\psi\|^2.$$

Como $\mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}}) \hookrightarrow H$ continuamente, temos

$$\|A^{\frac{1}{2}}\varphi\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 \leqslant C\left(\|A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2\right).$$

De maneira análoga, temos

$$\|A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi\|^2 \leqslant \left(\|A^{\frac{1}{2}}\varphi\|+\|\psi\|\right)^2 \leqslant 2\|A^{\frac{1}{2}}\varphi\|^2+C_1\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2,$$

então

$$\|A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi\|^2+\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 \leqslant C_2\left(\|A^{\frac{1}{2}}\varphi\|^2+\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2\right).$$

Logo

$$\|(\varphi,\psi)\|_1^2=\|A^{\frac{1}{2}}\varphi\|^2+\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 \quad \text{e} \quad \|(\varphi,\psi)\|_2^2=\|A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi\|^2+\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2$$

são normas equivalentes em $\mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}})\times\mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}})$.

Portanto, a norma usual em $\mathcal{H}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ são equivalentes. Como $\mathcal{H}$ é completo com norma usual, concluímos então que $\mathcal{H}$ é completo com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. $\square$

Agora, considerando $U=(\varphi,\tilde{\varphi},\psi,\tilde{\psi})$, em que $\tilde{\varphi}=\varphi_t$ e $\tilde{\psi}=\psi_t$, podemos reescrever o problema em sua forma matricial da seguinte forma

$$\frac{dU}{dt}=\begin{pmatrix}\varphi_t\\ \tilde{\varphi}_t\\ \psi_t\\ \tilde{\psi}_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & I & 0 & 0\\ -\frac{k}{\rho_1}A & -\frac{1}{\rho_1}A^{\alpha} & -\frac{k}{\rho_1}A^{\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & I\\ -\frac{k}{\rho_2}A^{\frac{1}{2}} & 0 & -\frac{1}{\rho_2}(bA+kI) & -\frac{1}{\rho_2}A^{\beta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \tilde{\varphi}\\ \psi\\ \tilde{\psi}\end{pmatrix}.$$

Assim, considere o operador $\mathcal{A}:\mathrm{D}(\mathcal{A})\subset\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ definido por

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix}\varphi\\ \tilde{\varphi}\\ \psi\\ \tilde{\psi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ -\frac{1}{\rho_1}A(A^{\alpha-1}\tilde{\varphi}+k\varphi)-\frac{k}{\rho_1}A^{\frac{1}{2}}\psi\\ \tilde{\psi}\\ -\frac{1}{\rho_2}A(A^{\beta-1}\tilde{\psi}+b\psi)-\frac{k}{\rho_2}(A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi)\end{pmatrix} \tag{4.4}$$

e com domínio

$$\mathrm{D}(\mathcal{A})=\left\{U\in\mathcal{H}:\tilde{\varphi},\tilde{\psi}\in\mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}}),\quad A^{\alpha-1}\tilde{\varphi}+k\varphi\in\mathrm{D}(A),\quad A^{\beta-1}\tilde{\psi}+b\psi\in\mathrm{D}(A)\right\}.$$

Note que este operador é bem definido, pois pela definição de $\mathcal{H}$, temos $\varphi,\psi\in\mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}})$ e pela definição de $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ temos $\tilde{\varphi},\tilde{\psi}\in\mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}})$.

Afim de estudar o que ocorre com o problema quando $\alpha,\beta\in[-1,1]$, primeiro mostraremos que o operador $\mathcal{A}$ gera um C_0-semigrupo de contrações, o que significa garantir existência de solução para o problema (1.4)-(1.5).

Lema 4.3. *Se $\alpha,\beta\in[-1,1]$, então o operador $\mathcal{A}$ é dissipativo e vale*

$$\mathrm{Re}\langle\mathcal{A}U,U\rangle_{\mathcal{H}}=-\|A^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{\varphi}\|^2-\|A^{\frac{\beta}{2}}\tilde{\psi}\|^2,\quad\forall U\in\mathrm{D}(\mathcal{A}).$$

Demonstração. Da definição do produto interno em $\mathcal{H}$, temos

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} &= k\langle A^{\frac{1}{2}}\tilde{\varphi} + \tilde{\psi}, A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi\rangle + \rho_1\langle -\rho_1^{-1}A(A^{\alpha-1}\tilde{\varphi} + k\varphi) - k\rho_1^{-1}A^{\frac{1}{2}}\psi, \tilde{\varphi}\rangle \\
&\quad + b\langle A^{\frac{1}{2}}\tilde{\psi}, A^{\frac{1}{2}}\psi\rangle + \rho_2\langle -\rho_2^{-1}A(A^{\beta-1}\tilde{\psi} + b\psi) - k\rho_2^{-1}(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi), \tilde{\psi}\rangle \\
&= k\langle A^{\frac{1}{2}}\tilde{\varphi} + \tilde{\psi}, A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi\rangle - \langle A^{\alpha-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}, A^{\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}\rangle - k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi, A^{\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}\rangle - k\langle A^{\frac{1}{2}}\psi, \tilde{\varphi}\rangle \\
&\quad + b\langle A^{\frac{1}{2}}\tilde{\psi}, A^{\frac{1}{2}}\psi\rangle - \langle A^{\beta-\frac{1}{2}}\tilde{\psi}, A^{\frac{1}{2}}\tilde{\psi}\rangle - b\langle A^{\frac{1}{2}}\psi, A^{\frac{1}{2}}\tilde{\psi}\rangle - k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi, A^{\frac{1}{2}}\tilde{\varphi} + \tilde{\psi}\rangle \\
&= k\langle A^{\frac{1}{2}}\tilde{\varphi} + \tilde{\psi}, A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi\rangle - k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi, A^{\frac{1}{2}}\tilde{\varphi} + \tilde{\psi}\rangle \\
&\quad + b\langle A^{\frac{1}{2}}\tilde{\psi}, A^{\frac{1}{2}}\psi\rangle - b\langle A^{\frac{1}{2}}\psi, A^{\frac{1}{2}}\tilde{\psi}\rangle - \|A^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{\varphi}\|^2 - \|A^{\frac{\beta}{2}}\tilde{\psi}\|^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = -\|A^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{\varphi}\|^2 - \|A^{\frac{\beta}{2}}\tilde{\psi}\|^2.$$

O que prova o desejado. $\square$

Lema 4.4. *Se $\alpha, \beta \in [-1, 1]$, então $0 \in \varrho(\mathcal{A})$, em que $\varrho(\mathcal{A})$ denota o conjunto resolvente do operador $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Primeiro, mostraremos que dado $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{H}$, podemos obter $U = (\varphi, \tilde{\varphi}, \psi, \tilde{\psi}) \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$ tal que

$$-\mathcal{A}U = F.$$

Note que nestas condições, temos as seguintes implicações

$$-\mathcal{A}U = F \iff \begin{cases} -\tilde{\varphi} = f_1, & \text{em} \quad \mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}}), \\ \frac{1}{\rho_1}A(A^{\alpha-1}\tilde{\varphi} + k\varphi) + \frac{k}{\rho_1}A^{\frac{1}{2}}\psi = f_2, & \text{em} \quad H \\ -\tilde{\psi} = f_3, & \text{em} \quad \mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}}), \\ \frac{1}{\rho_2}A(A^{\beta-1}\tilde{\psi} + b\psi) + \frac{k}{\rho_2}(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi) = f_4, & \text{em} \quad H \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \tilde{\varphi} = -f_1, & \text{em} \quad \mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}}), \\ -A^{\alpha-\frac{1}{2}}f_1 + k(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi) = \rho_1 A^{-\frac{1}{2}}f_2, & \text{em} \quad \mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}}), \\ \tilde{\psi} = -f_3, & \text{em} \quad \mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}}), \\ A(-A^{\beta-1}f_3 + b\psi) + k(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi) = \rho_2 f_4, & \text{em} \quad H. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \tilde{\varphi} = -f_1, & \text{em} \quad \mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}}), \\ k(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi) = \rho_1 A^{-\frac{1}{2}} f_2 + A^{\alpha-\frac{1}{2}} f_1, & \text{em} \quad \mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}}), \\ \tilde{\psi} = -f_3, & \text{em} \quad \mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}}), \\ A(-A^{\beta-1} f_3 + b\psi) + \rho_1 A^{-\frac{1}{2}} f_2 + A^{\alpha-\frac{1}{2}} f_1 = \rho_2 f_4, & \text{em} \quad H. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \tilde{\varphi} = -f_1, & \text{em} \quad \mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}}), \\ A^{\frac{1}{2}}\varphi = \frac{\rho_1}{k} A^{-\frac{1}{2}} f_2 + \frac{1}{k} A^{\alpha-\frac{1}{2}} f_1 - \psi, & \text{em} \quad \mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}}), \\ \tilde{\psi} = -f_3, & \text{em} \quad \mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}}), \\ -A^{\beta-1} f_3 + b\psi = \rho_2 A^{-1} f_4 - \rho_1 A^{-\frac{3}{2}} f_2 - A^{\alpha-\frac{3}{2}} f_1, & \text{em} \quad \mathrm{D}(A). \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \tilde{\varphi} = -f_1, & \text{em} \quad \mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}}), \\ \varphi = \frac{\rho_1}{k} A^{-1} f_2 + \frac{1}{k} A^{\alpha-1} f_1 - A^{-\frac{1}{2}}\psi, & \text{em} \quad \mathrm{D}(A), \\ \tilde{\psi} = -f_3, & \text{em} \quad \mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}}), \\ \psi = -\frac{1}{b} A^{\alpha-\frac{3}{2}} f_1 - \frac{\rho_1}{b} A^{-\frac{3}{2}} f_2 + \frac{1}{b} A^{\beta-1} f_3 + \frac{\rho_2}{b} A^{-1} f_4 & \text{em} \quad \mathrm{D}(A). \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \tilde{\varphi} = -f_1, \\ \varphi = (\frac{1}{k} A^{\alpha-1} + \frac{1}{b} A^{\alpha-2}) f_1 + \rho_1 (\frac{1}{k} A^{-1} + \frac{1}{b} A^{-2}) f_2 - \frac{1}{b} A^{\beta-\frac{3}{2}} f_3 - \frac{\rho_2}{b} A^{-\frac{3}{2}} f_4, \\ \tilde{\psi} = -f_3, \\ \psi = -\frac{1}{b} A^{\alpha-\frac{3}{2}} f_1 - \frac{\rho_1}{b} A^{-\frac{3}{2}} f_2 + \frac{1}{b} A^{\beta-1} f_3 + \frac{\rho_2}{b} A^{-1} f_4, \end{cases}$$

onde as últimas igualdades são válidas em $\mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}})$, $\mathrm{D}(A)$, $\mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}})$ e $\mathrm{D}(A)$, respectivamente. Além disso

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &= -f_1 \in \mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}}), \\ \tilde{\psi} &= -f_3 \in \mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}}), \\ A^{\beta-1}\tilde{\psi} + b\psi &= A^{-1}(\rho_2 f_4 - A^{\alpha-\frac{1}{2}} f_1 - \rho_1 A^{-\frac{1}{2}} f_2) \in \mathrm{D}(A), \\ A^{\alpha-1}\tilde{\varphi} + k\varphi &= A^{-1}(\rho_1 f_2 - k A^{\frac{1}{2}}\psi) \in \mathrm{D}(A). \end{aligned}$$

Portanto, $U \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$.

Por fim, note que $-\mathcal{A}$ é injetiva, pois se $F = 0$, podemos concluir que $U = 0$. Assim, $(-\mathcal{A})^{-1}$ existe e é dado por

$$(-\mathcal{A})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b} A^{\alpha-2} + \frac{1}{k} A^{\alpha-1} & \frac{\rho_1}{b} A^{-2} + \frac{\rho_1}{k} A^{-1} & -\frac{1}{b} A^{\beta-\frac{3}{2}} & -\frac{\rho_2}{b} A^{-\frac{3}{2}} \\ -I & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{b} A^{\alpha-\frac{3}{2}} & -\frac{\rho_1}{b} A^{-\frac{3}{2}} & \frac{1}{b} A^{\beta-1} & \frac{\rho_2}{b} A^{-1} \\ 0 & 0 & -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que $(-\mathcal{A})^{-1}$ é limitado, pois suas entradas são operadores limitados, e densamente definido por definição. Logo, $0 \in \varrho(\mathcal{A})$. $\square$

Teorema 4.5. *Se $\alpha, \beta \in [-1, 1]$, então o operador $\mathcal{A}$ definido em* (4.4) *gera um C_0-semigrupo de contrações.*

Demonstração. Segue dos lemas 4.3 e 4.4 que $\mathcal{A}$ é dissipativo e $0 \in \varrho(\mathcal{A})$. Além disso, note que

$$\mathrm{D}(A) \times \mathrm{D}(A) \times \mathrm{D}(A) \times \mathrm{D}(A) \subset \mathrm{D}(\mathcal{A}).$$

Como $\mathrm{D}(A)$ é denso em H e em $\mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}})$, consequentemente $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{H}$. Portanto, segue do Teorema A.18 que $\mathcal{A}$ gera C_0-semigrupo de contrações. $\square$

Deste modo, o operador $\mathcal{A}$ definido em (4.4), satisfaz o seguinte Teorema:

Teorema 4.6. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\mathcal{A} : \mathrm{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações. Então, o problema de Cauchy abstrato*

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = \mathcal{A}U \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{4.5}$$

admite uma única solução $U(t) = S_{\mathcal{A}}(t)U_0$. Além disso, se $U_0 \in \mathcal{H}$, a solução de (4.5) *é dita generalizada , de modo que*

$$U \in C([0, \infty), \mathcal{H}).$$

Quando $U_0 \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$, dizemos que a solução de (4.5) *é clássica e nesse caso temos*

$$U \in C([0, \infty), \mathrm{D}(\mathcal{A})) \cap C^1([0, \infty), X).$$

Demonstração. Ver [43], Teorema 2.4.1, página 42 e Teorema 2.5.1, página 46. $\square$

Provamos que o problema (4.1)-(4.3) admite uma única solução dada por $U(t) = S_{\mathcal{A}}(t)U_0$, em que $U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) \in \mathcal{H}$ e $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t \geqslant 0}$ é o semigrupo gerado por $\mathcal{A}$. Neste sentido, nas próximas seções, buscaremos estudar o que ocorre com a solução obtida a medida que variamos as potências $\alpha, \beta \in [-1, 1]$.

4.2 Resultados Preliminares

Como citado anteriormente, estudaremos a estabilidade e a regularidade do semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t \geqslant 0}$ por meio de estimativas do operador resolvente do operador $\mathcal{A}$. Para tanto, precisamos da equação resolvente, que é dada da seguinte forma: Fixado $\lambda \in \mathbb{R}$, tome $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{H}$ e suponha que exista $U = (\varphi, \tilde{\varphi}, \psi, \tilde{\psi}) \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$ tal que

$$(i\lambda I - \mathcal{A})U = F, \tag{4.6}$$

ou de maneira equivalente

$$i\lambda\varphi - \tilde{\varphi} = f_1, \tag{4.7}$$

$$i\lambda\rho_1\tilde{\varphi} + A(A^{\alpha-1}\tilde{\varphi} + k\varphi) + kA^{\frac{1}{2}}\psi = \rho_1 f_2, \tag{4.8}$$

$$i\lambda\psi - \tilde{\psi} = f_3, \tag{4.9}$$

$$i\lambda\rho_2\tilde{\psi} + A(A^{\beta-1}\tilde{\psi} + b\psi) + k(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi) = \rho_2 f_4. \tag{4.10}$$

Antes de prosseguirmos, o objetivo dessa seção será estabelecer a condições dadas nos teoremas 1.4-1.8. De forma precisa mostraremos que $i\mathbb{R} \subset \varrho(A)$ e determinaremos a existência de constantes $C > 0$ e $\tau(\alpha, \beta)$, de modo que se $U \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$ satisfaz a equação resolvente (4.6), então

$$|\lambda|^{\tau(\alpha,\beta)}\|U\|_{\mathcal{H}} \leqslant C\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

A combinação dessa estimativa com as conclusões dos teoremas 1.4-1.8 mostrará que o semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ será

(a) Polinomialmente estável quando $\tau < 0$;

(b) Exponencialmente estável quando $\tau = 0$;

(c) Analítico quando $\tau = 1$;

(d) De Gevrey de classe $\delta > \frac{1}{\tau}$ quando $0 < \tau < 1$.

Observação 4.7. *Devido à necessidade de realizar limitações e interpolações nos resultados a seguir, a menos que haja necessidade de especificações, a letra C representará uma constante positiva qualquer que não depende de U, F ou λ.*

Lema 4.8 (Desigualdade de Energia)**.** *Sejam $\alpha, \beta \in [-1, 1]$. Se $U \in \mathrm{D}(A)$ satisfaz a equação resolvente* (4.6)*, então*

$$\|A^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{\varphi}\|^2 + \|A^{\frac{\beta}{2}}\tilde{\psi}\|^2 \leqslant \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Demonstração. Temos que

$$\langle(i\lambda I - \mathcal{A})U, U\rangle_{\mathcal{H}} = i\lambda\|U\|^2_{\mathcal{H}} - \langle\mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Tomando a parte real o Lema 4.3 nos garante que

$$\|A^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{\varphi}\|^2 + \|A^{\frac{\beta}{2}}\tilde{\psi}\|^2 = -\operatorname{Re}\langle\mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = \operatorname{Re}\langle(i\lambda I - \mathcal{A})U, U\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Logo, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos a desigualdade desejada. $\square$

Lema 4.9. *Sejam $\alpha, \beta \in [-1, 1]$. Se $U \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$ satisfaz a equação resolvente* (4.6)*, então:*

(a) *Se* $\alpha \geqslant 0$*, vale que*

$$\|\tilde{\varphi}\|^2 \leqslant C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}};$$

(b) *Se* $\beta \geqslant 0$*, vale que*

$$\|\tilde{\psi}\|^2 \leqslant C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Demonstração. Primeiro, suponha que $\alpha \geqslant 0$. Pelo Lema 4.8, segue que

$$\|A^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{\varphi}\|^2 \leqslant \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} - \|A^{\frac{\beta}{2}}\tilde{\psi}\|^2 \leqslant \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Como o Teorema A.27 nos garante que $\mathrm{D}(A^{\frac{\alpha}{2}}) \hookrightarrow H$ continuamente, para $\alpha \geqslant 0$, temos que existe $C > 0$ tal que

$$\|\tilde{\varphi}\|^2 \leqslant C\|A^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{\varphi}\|^2 \leqslant C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

De maneira análoga, mostramos que $\|\tilde{\psi}\|^2 \leqslant C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}$. Portanto, segue o resultado. □

Lema 4.10. *Sejam* $\alpha, \beta \in [-1, 1]$. *Se* $U \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$ *é solução da equação resolvente* (4.6)*, então*

$$k\|A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi\|^2 + b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 \leqslant C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \rho_1\|\tilde{\varphi}\|^2 + \rho_2\|\tilde{\psi}\|^2.$$

Demonstração. Multiplicando (4.8) por φ, obtemos

$$\begin{aligned}
\rho_1\langle f_2, \varphi\rangle &= i\rho_1\lambda\langle\tilde{\varphi}, \varphi\rangle + \langle A(A^{\alpha-1}\tilde{\varphi} + k\varphi), \varphi\rangle + k\langle A^{\frac{1}{2}}\psi, \varphi\rangle \\
&= i\rho_1\lambda\langle\tilde{\varphi}, \varphi\rangle + \langle A^{\alpha-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}, A^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle + k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi, A^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle + k\langle\psi, A^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle.
\end{aligned}$$

De (4.7), segue que

$$\begin{aligned}
k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi, A^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle &= \rho_1\langle f_2, \varphi\rangle - i\rho_1\lambda\langle\tilde{\varphi}, \varphi\rangle - \langle A^{\alpha-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}, A^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle \\
&= \rho_1\langle f_2, \varphi\rangle + \rho_1\langle\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi} + f_1\rangle - \langle A^{\frac{\alpha}{2}}(i\lambda\varphi - f_1), A^{\frac{\alpha}{2}}\varphi\rangle \\
&= \rho_1\langle f_2, \varphi\rangle + \rho_1\|\tilde{\varphi}\|^2 + \rho_1\langle\tilde{\varphi}, f_1\rangle - i\lambda\|A^{\frac{\alpha}{2}}\varphi\|^2 + \langle A^{\frac{\alpha}{2}}f_1, A^{\frac{\alpha}{2}}\varphi\rangle. \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

De maneira análoga, multiplicando (4.9) por ψ, temos

$$\begin{aligned}
\rho_2\langle f_4, \psi\rangle &= i\lambda\rho_2\langle\tilde{\psi}, \psi\rangle + \langle A(A^{\beta-1}\tilde{\psi} + b\psi), \psi\rangle + k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi, \psi\rangle \\
&= i\lambda\rho_2\langle\tilde{\psi}, \psi\rangle + \langle A^{\beta-\frac{1}{2}}\tilde{\psi}, A^{\frac{1}{2}}\psi\rangle + b\langle A^{\frac{1}{2}}\psi, A^{\frac{1}{2}}\psi\rangle + k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi, \psi\rangle.
\end{aligned}$$

De (4.10), encontramos

$$\begin{aligned} k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi,\psi\rangle + b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 &= \rho_2\langle f_4,\psi\rangle - i\lambda\rho_2\langle\tilde{\psi},\psi\rangle - \langle A^{\frac{\beta}{2}}\tilde{\psi}, A^{\frac{\beta}{2}}\psi\rangle \\ &= \rho_2\langle f_4,\psi\rangle + \rho_2\langle\tilde{\psi},\tilde{\psi}+f_3\rangle - \langle A^{\frac{\beta}{2}}(i\lambda\psi - f_3), A^{\frac{\beta}{2}}\psi\rangle \\ &= \rho_2\langle f_4,\psi\rangle + \rho_2\|\tilde{\psi}\|^2 + \rho_2\langle\tilde{\psi}, f_3\rangle - i\lambda\|A^{\frac{\beta}{2}}\psi\|^2 + \langle A^{\frac{\beta}{2}}f_3, A^{\frac{\beta}{2}}\psi\rangle. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Agora, somando (4.11) e (4.12), tomando a parte real, o uso da Desigualdade de Cauchy-Scharwz nos garante que

$$\begin{aligned} k\|A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi\|^2 + b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 \leqslant\ & C\Big[\|f_2\|\|\varphi\| + \|\tilde{\varphi}\|\|f_1\| + \|A^{\frac{\alpha}{2}}f_1\|\|A^{\frac{\alpha}{2}}\varphi\|\Big] \\ &+ C\left[\|f_4\|\|\psi\| + \|\tilde{\psi}\|\|f_3\| + \|A^{\frac{\beta}{2}}f_3\|\|A^{\frac{\beta}{2}}\psi\|\right] \\ &+ \rho_1\|\tilde{\varphi}\|^2 + \rho_2\|\tilde{\psi}\|^2. \end{aligned}$$

Como $\alpha,\beta \in [-1,1]$,

$$\|A^{\frac{\alpha}{2}}f_1\|\|A^{\frac{\alpha}{2}}\varphi\| \leqslant C\|A^{\frac{1}{2}}f_1\|\|A^{\frac{1}{2}}\varphi\| \leqslant C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Do mesmo modo

$$\|A^{\frac{\beta}{2}}f_3\|\|A^{\frac{\beta}{2}}\psi\| \leqslant C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Portanto,

$$k\|A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi\|^2 + b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 \leqslant C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \rho_1\|\tilde{\varphi}\|^2 + \rho_2\|\tilde{\psi}\|^2.$$

O que encerra a demonstração. □

O Lema 4.10 nos mostra que afim de obtermos uma estimativa para o operador resolvente de $\mathcal{A}$, devemos estimar as componentes $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\psi}$ da solução da equação resolvente (4.6). Para tanto, serão necessários os seguintes resultados:

Proposição 4.11. *Seja* $\theta \in [-1,0)$. *Se* $u \in \mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}})$*, então*

$$\|u\| \leqslant C\|A^{\frac{\theta}{2}}u\|^{\frac{1}{1-\theta}}\|A^{\frac{1}{2}}u\|^{\frac{-\theta}{1-\theta}}.$$

Demonstração. Observe que se

$$\xi = \frac{1}{1-\theta}, \quad \eta = -\frac{\theta}{2} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{1}{2} - \theta,$$

então

$$
\begin{aligned}
-\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{1-\theta}+\left(1-\frac{1}{1-\theta}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\theta\right) &= -\frac{\theta}{2(1-\theta)}-\frac{\theta}{1-\theta}\cdot\left(\frac{1}{2}-\theta\right)\\
&= -\theta\left(\frac{1}{1-\theta}-\frac{\theta}{1-\theta}\right)\\
&= -\theta.
\end{aligned}
$$

Logo, o Teorema A.25 nos garante que

$$
\begin{aligned}
\|u\| &\leqslant \|A^{-\theta}(A^{\theta}u)\|\\
&\leqslant \|A^{-\frac{\theta}{2}}(A^{\theta}u)\|^{\frac{1}{1-\theta}}\|A^{\frac{1}{2}-\theta}(A^{\theta}u)\|^{\frac{-\theta}{1-\theta}}\\
&= \|A^{\frac{\theta}{2}}u\|^{\frac{1}{1-\theta}}\|A^{\frac{1}{2}}u\|^{\frac{-\theta}{1-\theta}}.
\end{aligned}
$$

De onde segue a interpolação desejada. □

Proposição 4.12. *Se $p \in (0,1)$ e $a, b \geqslant 0$, então*

$$(a+b)^p \leqslant a^p + b^p.$$

Demonstração. Caso $a = 0$ ou $b = 0$, nada há de se provar. Caso $a \neq 0$ e $b \neq 0$, defina a função $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = (1+t)^p - 1 - t^p.$$

Note que

$$f'(t) = p(1+t)^{p-1} - pt^{p-1} < 0,$$

pois

$$p(1+t)^{p-1} - pt^{p-1} < 0,$$

ocorre se, e somente se,

$$(1+t)^{p-1} < t^{p-1}.$$

ou ainda $t < 1+t$. Logo, f é decrescente e como $f(0) = 0$, tomando $t = \frac{a}{b}$, temos

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^p - 1 - \frac{a^p}{b^p} \leqslant 0,$$

de onde segue que

$$\frac{(a+b)^p}{b^p} \leqslant \frac{a^p+b^p}{b^p},$$

ou ainda,

$$(a+b)^p \leqslant a^p + b^p.$$

Portanto, temos a estimativa desejada. □

Lema 4.13. *Sejam $\alpha, \beta \in [-1,1]$. Se $U \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$ satisfaz a equação resolvente* (4.6)*, então*

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant \begin{cases} C\|F\|_{\mathcal{H}}^2, & (\alpha,\beta) \in [0,1]\times[0,1] \\ C\left[|\lambda|^{4\theta}+1\right]\|F\|_{\mathcal{H}}^2, & (\alpha,\beta) \in \Big([-1,1]\times[-1,1]\Big)\setminus\Big([0,1]\times[0,1]\Big), \end{cases}$$

em que $\theta = |\min\{\alpha,\beta\}|$.

Demonstração. O Lema 4.10 nos garante que basta estimarmos $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\psi}$. Primeiramente, suponha que $\alpha \in [-1,0)$. Dado $\varepsilon > 0$, segue de (4.7), dos lemas 4.8 e 4.11 e da Proposição 4.12 que

$$\begin{aligned} \rho_1\|\tilde{\varphi}\|^2 &= \rho_1\|\tilde{\varphi}\|\|\tilde{\varphi}\| \\ &\leqslant C\|U\|_{\mathcal{H}}\|A^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{\varphi}\|^{\frac{1}{1-\alpha}}\|A^{\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}\|^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} \\ &\leqslant C\|U\|_{\mathcal{H}}\left(\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}\|\|A^{\frac{1}{2}}(i\lambda\varphi - f_1)\|^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} \\ &\leqslant \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon\left(\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\|A^{\frac{1}{2}}(i\lambda\varphi - f_1)\|^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} \\ &\leqslant \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon\left(\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(|\lambda|\|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}\right)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} \\ &\leqslant \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon|\lambda|^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}}\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{1-\alpha}} + C_\varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{1-\alpha}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Note que

$$\frac{1-2\alpha}{2(1-\alpha)} + \frac{1}{2(1-\alpha)} = 1,$$

então pela Desigualdade de Young, obtemos

$$\rho_1\|\tilde{\varphi}\|^2 \leqslant \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon|\lambda|^{-4\alpha}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{4.13}$$

Caso $\beta \in [-1,0)$, de maneira análoga, temos

$$\rho_2\|\tilde{\psi}\|^2 \leqslant \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon|\lambda|^{-4\beta}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Assim, encontramos a seguinte estimativa

$$\rho_1\|\tilde{\varphi}\|^2 + \rho_2\|\tilde{\psi}\|^2 \leqslant 6\varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon\Big[|\lambda|^{-4\alpha} + |\lambda|^{-4\beta} + 1\Big]\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{4.14}$$

Caso $\beta \in [0,1]$, o Lema 4.9 nos garante que

$$\begin{aligned} \|\tilde{\psi}\|^2 &\leqslant C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\ &\leqslant \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Neste caso, de (4.13) segue que

$$\rho_1\|\tilde{\varphi}\|^2 + \rho_2\|\tilde{\psi}\|^2 \leqslant 4\varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon\Big[|\lambda|^{-4\alpha} + 1\Big]\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

De maneira análoga, caso $\alpha \in [0,1]$, o Lema 4.8 nos garante que

$$\rho_1\|\tilde{\varphi}\|^2 \leqslant \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

E assim, encontramos

$$\rho_1\|\tilde{\varphi}\|^2 + \rho_2\|\tilde{\psi}\|^2 \leqslant 4\varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon\Big[|\lambda|^{-4\beta} + 1\Big]\|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

quando $\beta \in [-1,0)$ e

$$\rho_1\|\tilde{\varphi}\|^2 + \rho_2\|\tilde{\psi}\|^2 \leqslant 2\varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2, \tag{4.15}$$

quando $\beta \in [0,1]$.

Portando, de (4.14)-(4.15) e do Lema 4.10, temos o desejado. □

Até então assumimos que todas as estimativas são válidas para soluções da equação resolvente, sem fazer referência a condição $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$. O seguinte resultado nos diz que as limitações obtidas até aqui garantem este fato:

Lema 4.14. *Se $\alpha,\beta \in [-1,1]$, então $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$.*

Demonstração. Suponha que $i\mathbb{R} \not\subset \varrho(A)$. Segue do Lema A.9 que existem $\lambda \neq 0$, $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$, $(U_n) \subset \mathrm{D}(\mathcal{A})$ e $(F_n) \subset \mathcal{H}$ tais que

$$\lambda_n \longrightarrow \lambda, \quad \|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1 \quad \text{e} \quad F_n = (i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n \longrightarrow 0.$$

Como $\lambda \neq 0$, temos um absurdo, pois o Lema 4.13 nos garante que nestas condições $U_n \to 0$ em $\mathcal{H}$, o que contradiz $\|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1$. □

4.3 Estabilidade polinomial

Primeiramente, mostraremos que o semigrupo é polinomialmente estável.

Teorema 4.15. *Sejam $\alpha,\beta \in [-1,1]$. Então, o semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ decai polinomialmente com uma taxa $2|\min\{\alpha,\beta\}|$.*

Demonstração. Note que se $|\lambda| > 1$, o Lema 4.13 no garante que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant C|\lambda|^{4|\min\{\alpha,\beta\}|}\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Então, do Lema 4.14 e do Teorema 1.4, segue o resultado. □

4.4 ESTABILIDADE EXPONENCIAL

Observe que, embora tenhamos obtido decaimento, o Teorema 1.4 nos garante apenas decaimento polinomial. Nosso objetivo, portanto, é melhorar a taxa de decaimento, analisando quais são as condições necessárias para que ela seja uniforme. Nesse sentido, estabeleceremos as condições necessárias e suficientes para que o semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ seja exponencialmente estável.

Teorema 4.16. *Se* $\alpha, \beta \in [0,1]$*, então para qualquer* $U \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$ *satisfazendo a equação resolvente* (4.6)*, obtemos*

$$\|U\|_{\mathcal{H}} = \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leqslant C\|F\|_{\mathcal{H}},$$

ou seja, o semigrupo gerado por $\mathcal{A}$ *é exponencialmente estável.*

Demonstração. Segue direto dos lemas 4.13 e 4.14, que satisfazem as condições para estabilidade exponencial do Teorema 1.5. □

Observação 4.17. *Note que na demonstração do Teorema 4.16, não foi necessário impor restrições para* λ*.*

Para obtermos estabilidade exponencial em $[0,1]\times[0,1]$, não foi necessário impor condições nas constantes físicas do problema (1.4)-(1.5). Para as demais regiões estudadas, veremos que será necessário assumir a igualdade da velocidade de ondas, isto é,

$$\chi = \frac{k}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2} = 0. \tag{4.16}$$

Observe que quando $\alpha, \beta \in [-1, 0]$, temos

$$A^{\alpha-1}\tilde{\varphi} + k\varphi \in \mathrm{D}(A) \quad \text{e} \quad A^{\beta-1}\tilde{\psi} + b\psi \in \mathrm{D}(A)$$

o que ocorre se, e somente se, $\varphi, \psi \in \mathrm{D}(A)$. Assim, o domínio do operador $\mathcal{A}$ definido em (4.4) equivale a

$$\mathrm{D}(\mathcal{A}) = \{U \in \mathcal{H} : \varphi, \psi \in \mathrm{D}(A),\ \tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in \mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}})\}$$

e podemos escrever

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix}\varphi\\ \tilde{\varphi}\\ \psi\\ \tilde{\psi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ -\frac{k}{\rho_1}A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi) - \frac{1}{\rho_1}A^{\alpha}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\psi}\\ -\frac{b}{\rho_2}A\psi - \frac{k}{\rho_2}(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi) - \frac{1}{\rho_2}A^{\beta}\tilde{\psi}\end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

Nestas condições, a equação resolvente definida em (4.7)-(4.10) pode ser reescrita como

$$i\lambda\varphi - \tilde{\varphi} = f_1, \tag{4.18}$$

$$i\lambda\rho_1\tilde{\varphi} + kA^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi) + A^{\alpha}\tilde{\varphi} = \rho_1 f_2, \tag{4.19}$$

$$i\lambda\psi - \tilde{\psi} = f_3, \tag{4.20}$$

$$i\lambda\rho_2\tilde{\psi} + bA\psi + k(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi) + A^{\beta}\tilde{\psi} = \rho_2 f_4. \tag{4.21}$$

Teorema 4.18. *Suponha que* $(\alpha,\beta) \in \big([-1,0)\times\{0\}\big) \cup \big(\{0\}\times[-1,0)\big)$. *Se* $\chi = 0$, *em que* χ *é dado em* (4.16), *então o semigrupo* $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ *é exponencialmente estável.*

Demonstração. Suponha que $\alpha \in [-1,0)$ e $\beta = 0$. Multiplicando (4.21) por $A^{\frac{1}{2}}\varphi$, temos

$$i\lambda\rho_2\langle\tilde{\psi}, A^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle + b\langle A\psi, A^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle + k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi, A^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle + \langle\tilde{\psi}, A^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle = \rho_2\langle f_4, A^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle.$$

Usando (4.18), segue que

$$\begin{aligned} k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi, A^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle &= \rho_2\langle f_4, A^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle - i\lambda\rho_2\langle\tilde{\psi}, A^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle - b\langle A^{\frac{1}{2}}\psi, A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}\varphi)\rangle - \langle\tilde{\psi}, A^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle \\ &= \rho_2\langle f_4, A^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle + \rho_2\langle\tilde{\psi}, A^{\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}\rangle + \rho_2\langle\tilde{\psi}, A^{\frac{1}{2}}f_1\rangle \\ &\quad - b\langle A^{\frac{1}{2}}\psi, A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi)\rangle + b\langle A^{\frac{1}{2}}\psi, A^{\frac{1}{2}}\psi\rangle - \langle\tilde{\psi}, A^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Além disso, (4.19) implica em

$$\begin{aligned} -b\langle A^{\frac{1}{2}}\psi, A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi)\rangle &= -\frac{b}{k}\langle A^{\frac{1}{2}}\psi, \rho_1 f_2 - i\lambda\rho_1\tilde{\varphi} - A^{\alpha}\tilde{\varphi}\rangle \\ &= -\frac{b\rho_1}{k}\langle A^{\frac{1}{2}}\psi, f_2\rangle - i\frac{\lambda b\rho_1}{k}\langle A^{\frac{1}{2}}\psi, \tilde{\varphi}\rangle + \frac{b}{k}\langle A^{\frac{1}{2}}\psi, A^{\alpha}\tilde{\varphi}\rangle \\ &= -\frac{b\rho_1}{k}\langle A^{\frac{1}{2}}\psi, f_2\rangle - \frac{b\rho_1}{k}\langle A^{\frac{1}{2}}\tilde{\psi}, \tilde{\varphi}\rangle - \frac{b\rho_1}{k}\langle A^{\frac{1}{2}}f_3, \tilde{\varphi}\rangle + \frac{b}{k}\langle A^{\frac{1}{2}}\psi, A^{\alpha}\tilde{\varphi}\rangle. \end{aligned}$$

Logo, como $\dfrac{b}{k} = \dfrac{\rho_2}{\rho_1}$, em (4.22) obtemos

$$\begin{aligned} k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi, A^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle &= \rho_2\langle f_4, A^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle + b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 + \rho_2\langle\tilde{\psi}, A^{\frac{1}{2}}f_1\rangle - \langle\tilde{\psi}, A^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle \\ &\quad - \frac{b\rho_1}{k}\left[\langle A^{\frac{1}{2}}\psi, f_2\rangle + \langle A^{\frac{1}{2}}f_3, \tilde{\varphi}\rangle - \frac{1}{\rho_1}\langle A^{\frac{1}{2}}\psi, A^{\alpha}\tilde{\varphi}\rangle\right]. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Por outro lado, multiplicando (4.21) por ψ, temos

$$i\lambda\rho_2\langle\tilde{\psi}, \psi\rangle + b\langle A\psi, \psi\rangle + k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi, \psi\rangle + \langle\tilde{\psi}, \psi\rangle = \rho_2\langle f_4, \psi\rangle.$$

o uso de (4.20) nos garante que

$$
\begin{aligned}
k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi,\psi\rangle+b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2&=\rho_2\langle f_4,\psi\rangle-i\lambda\rho_2\langle\tilde{\psi},\psi\rangle-\langle\tilde{\psi},\psi\rangle\\
&=\rho_2\langle f_4,\psi\rangle+\rho_2\|\tilde{\psi}\|^2+\rho_2\langle\tilde{\psi},f_3\rangle-\langle\tilde{\psi},\psi\rangle. \qquad (4.24)
\end{aligned}
$$

Somando (4.23) e (4.24), encontramos

$$
\begin{aligned}
k\|A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi\|^2=\rho_2\langle f_4,A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi\rangle+\rho_2\langle\tilde{\psi},A^{\frac{1}{2}}f_1+f_3\rangle-\langle\tilde{\psi},A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi\rangle+\rho_2\|\tilde{\psi}\|^2\\
-\frac{b\rho_1}{k}\left[\langle A^{\frac{1}{2}}\psi,f_2\rangle+\langle A^{\frac{1}{2}}f_3,\tilde{\varphi}\rangle-\frac{1}{\rho_1}\langle A^{\frac{1}{2}}\psi,A^{\alpha}\tilde{\varphi}\rangle\right].
\end{aligned}
$$

Os lemas 4.8 e 4.9 nos garantem que

$$
\|A^{\alpha}\tilde{\varphi}\|^2\leqslant C\|A^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{\varphi}\|^2\leqslant C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\quad\text{e}\quad\|\tilde{\psi}\|^2\leqslant C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.
$$

Agora, usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e a Desigualdade de Young, segue que dado $\varepsilon>0$, existe $C_\varepsilon>0$ satisfazendo

$$
k\|A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi\|^2\leqslant C_\varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+\varepsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}}. \qquad (4.25)
$$

Para obter (4.25) usamos as seguintes estimativas:

$$
|\langle\tilde{\psi},A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi\rangle|\leqslant\|\tilde{\psi}\|\|A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi\|\leqslant C\|\tilde{\psi}\|\|U\|_{\mathcal{H}}\leqslant C_\varepsilon\|\tilde{\psi}\|^2+\varepsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}}
$$

e uma vez que $\alpha<0$, temos

$$
|\langle A^{\frac{1}{2}}\psi,A^{\alpha}\tilde{\varphi}\rangle|\leqslant\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|\|A^{\alpha}\tilde{\varphi}\|\leqslant C\|U\|_{\mathcal{H}}\|A^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{\varphi}\|\leqslant C_\varepsilon\|A^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{\varphi}\|^2+\varepsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}}.
$$

Novamente por (4.24), de maneira análoga, para $|\lambda|>1$, temos

$$
\begin{aligned}
b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2&=\rho_2\langle f_4,\psi\rangle-\langle\tilde{\psi},\psi\rangle+\rho_2\|\tilde{\psi}\|^2+\rho_2\langle\tilde{\psi},f_3\rangle-k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi,\psi\rangle\\
&=\rho_2\langle f_4,\psi\rangle-\langle\tilde{\psi},\psi\rangle+\rho_2\|\tilde{\psi}\|^2+\rho_2\langle\tilde{\psi},f_3\rangle+\frac{ik}{\lambda}\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi,\tilde{\psi}+f_3\rangle\\
&\leqslant\varepsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}}+C_\varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+\frac{C_\varepsilon}{|\lambda|}\|U\|^2_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}
$$

Por fim, multiplicando (4.19) por φ, obtemos

$$
\rho_1\langle f_2,\varphi\rangle=i\lambda\rho_1\langle\tilde{\varphi},\varphi\rangle+k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi,A^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle+\langle A^{\alpha}\tilde{\varphi},\varphi\rangle.
$$

Usando (4.18), segue que

$$\begin{aligned} \rho_1\|\tilde{\varphi}\|^2 &= -\rho_1\langle\tilde{\varphi}, f_1\rangle - \rho_1\langle f_2, \varphi\rangle + k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi, A^{\frac{1}{2}}\psi\rangle + \langle A^{\alpha}\tilde{\varphi}, \varphi\rangle \\ &\leqslant \varepsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}} + C_\varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 + \frac{C_\varepsilon}{|\lambda|}\|U\|^2_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Portanto, (4.25)-(4.26) resulta em

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}} \leqslant C_\varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \varepsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{C_\varepsilon}{|\lambda|}\|U\|^2_{\mathcal{H}},$$

e do Teorema 2.20 temos o desejado.

Agora, suponha que $\alpha = 0$ e $\beta \in [-1, 0)$. De maneira análoga, multiplicando (4.19) por φ, temos

$$\rho_1\langle f_2, \varphi\rangle = i\lambda\rho_1\langle\tilde{\varphi}, \varphi\rangle + k\langle A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi), \varphi\rangle + \langle\tilde{\varphi}, \varphi\rangle,$$

então

$$k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi, A^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle = \rho_1\|\tilde{\varphi}\|^2 + \rho_1\langle\tilde{\varphi}, f_1\rangle - \langle\tilde{\varphi}, \varphi\rangle + \rho_1\langle f_2, \varphi\rangle. \tag{4.27}$$

Multiplicando (4.19) por $A^{-\frac{1}{2}}\psi$, de (4.20), obtemos

$$\rho_1\langle f_2, A^{-\frac{1}{2}}\psi\rangle = i\lambda\rho_1\langle\tilde{\varphi}, A^{-\frac{1}{2}}\psi\rangle + k\langle A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi), A^{-\frac{1}{2}}\psi\rangle + \langle\tilde{\varphi}, A^{-\frac{1}{2}}\psi\rangle,$$

ou ainda

$$k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi, \psi\rangle = \rho_1\langle f_2, A^{-\frac{1}{2}}\psi\rangle - \langle\tilde{\varphi}, A^{-\frac{1}{2}}\psi\rangle + \rho_1\langle\tilde{\varphi}, A^{-\frac{1}{2}}\tilde{\psi}\rangle + \rho_1\langle\tilde{\varphi}, A^{-\frac{1}{2}}f_3\rangle. \tag{4.28}$$

Somando ambas as igualdades e usando o Lema 4.9, podemos escrever

$$\begin{aligned} k\|A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi\|^2 &= \rho_1\|\tilde{\varphi}\|^2 + \rho_1\langle\tilde{\varphi}, f_1\rangle - \langle\tilde{\varphi}, \varphi\rangle + \rho_1\langle f_2, \varphi\rangle \\ &\quad + \rho_1\langle f_2, A^{-\frac{1}{2}}\psi\rangle - \langle\tilde{\varphi}, A^{-\frac{1}{2}}\psi\rangle + \rho_1\langle\tilde{\varphi}, A^{-\frac{1}{2}}\tilde{\psi}\rangle + \rho_1\langle\tilde{\varphi}, A^{-\frac{1}{2}}f_3\rangle \\ &\leqslant \varepsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}} + C_\varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \tag{4.29}$$

pois os lemas 4.8 e 4.9 nos garantem as desigualdades

$$\|\tilde{\varphi}\|^2 \leqslant C\|U\|\|F\| \quad \text{e} \quad \|A^{\frac{\beta}{2}}\tilde{\psi}\|^2 \leqslant C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}},$$

e como $\beta \in [-1, 0)$

$$|\langle\tilde{\varphi}, A^{-\frac{1}{2}}\tilde{\psi}\rangle| \leqslant C\|\tilde{\varphi}\|\|A^{\frac{\beta}{2}}\tilde{\psi}\| \leqslant C\|\tilde{\varphi}\|^2 + C\|A^{\frac{\beta}{2}}\tilde{\psi}\|^2 \leqslant C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Agora, multiplicando (4.19) por $A^{\frac{1}{2}}\psi$, temos

$$i\lambda\rho_1\langle\tilde{\varphi}, A^{\frac{1}{2}}\psi\rangle + k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi, A\psi\rangle + \langle\tilde{\varphi}, A^{\frac{1}{2}}\psi\rangle = \rho_1\langle f_2, A^{\frac{1}{2}}\psi\rangle.$$

Usando (4.20), obtemos

$$k\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 = \rho_1\langle f_2, A^{\frac{1}{2}}\psi\rangle - k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi, A\psi\rangle - \langle\tilde{\varphi}, A^{\frac{1}{2}}\psi\rangle + \rho_1\langle\tilde{\varphi}, A^{\frac{1}{2}}\tilde{\psi}\rangle + \rho_1\langle\tilde{\varphi}, A^{\frac{1}{2}}f_3\rangle. \tag{4.30}$$

A equação (4.21) nos garante que

$$\begin{aligned}
k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi, A\psi\rangle &= \frac{k}{b}\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi, \rho_2 f_4 - i\lambda\rho_2\tilde{\psi} - k(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi) - A^{\beta}\tilde{\psi}\rangle \\
&= \frac{k}{b}\left[\rho_2\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi, f_4\rangle - k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi, A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi\rangle - \langle A^{\frac{1}{2}}\varphi, A^{\beta}\tilde{\psi}\rangle + i\lambda\rho_2\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi, \tilde{\psi}\rangle\right] \\
&= \frac{k}{b}\left[\rho_2\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi, f_4\rangle - k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi, A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi\rangle - \langle A^{\frac{1}{2}}\varphi, A^{\beta}\tilde{\psi}\rangle\right] \\
&\quad + \frac{k\rho_2}{b}\langle A^{\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\rangle + \frac{k\rho_2}{b}\langle A^{\frac{1}{2}}f_1, \tilde{\psi}\rangle.
\end{aligned}$$

Como $\frac{k}{b} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$, em (4.30) obtemos

$$\begin{aligned}
b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 = \frac{b}{k}&\left[\rho_1\langle f_2, A^{\frac{1}{2}}\psi\rangle - \langle\tilde{\varphi}, A^{\frac{1}{2}}\psi\rangle + \rho_1\langle\tilde{\varphi}, A^{\frac{1}{2}}f_3\rangle\right] \\
&- \rho_2\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi, f_4\rangle + k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi, A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi\rangle + \langle A^{\frac{1}{2}}\varphi, A^{\beta}\tilde{\psi}\rangle - \rho_2\langle A^{\frac{1}{2}}f_1, \tilde{\psi}\rangle.
\end{aligned}$$

Então, por (4.27), segue que

$$b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 \leqslant \varepsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}} + C_\varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{4.31}$$

Por fim, multiplicando (4.21) por ψ, obtemos

$$\rho_2\langle f_4, \psi\rangle = i\lambda\rho_2\langle\tilde{\psi}, \psi\rangle + b\langle A\psi, \psi\rangle + k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi, \psi\rangle + \langle A^{\beta}\tilde{\psi}, \psi\rangle.$$

De (4.28) e (4.31)

$$\begin{aligned}
\rho_2\|\tilde{\psi}\|^2 &= b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 + k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi, \psi\rangle + \langle A^{\beta}\tilde{\psi}, \psi\rangle - \rho_2\langle\tilde{\psi}, f_3\rangle - \rho_2\langle f_4, \psi\rangle \\
&\leqslant \varepsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}} + C_\varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Portanto, somando (4.29)-(4.32), concluímos que

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}} \leqslant \varepsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}} + C_\varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Novamente, pelo Teorema 2.20 temos o desejado. $\square$

4.4.1 Falta de Estabilidade Exponencial

Note que para a estabilidade exponencial do semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$, não analisamos os seguintes casos:

C1. $(\alpha,\beta)\in\big((0,1]\times[-1,0)\big)\cup\big([-1,0)\times(0,1]\big)$;
C2. $\frac{k}{\rho_1}\neq\frac{b}{\rho_2}$ e $(\alpha,\beta)\in\big([-1,0)\times\{0\}\big)\cup\big(\{0\}\times[-1,0)\big)$;
C3. $\alpha,\beta\in[-1,0)$.

Mostraremos a seguir que nestas condições, o semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ não é exponencialmente estável, para tanto, serão utilizadas duas ferramentas diferentes:

- Para os casos **C1** e **C2**, fazemos via contraexemplos;
- Para o caso **C3**, estudaremos as propriedades do semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ com o objetivo de mostrar que o tipo deste semigrupo é igual a zero.

Primeiro, mostraremos que existem sequências $(\lambda_n)\subset\mathbb{R}_+$ e $(U_n)\subset \mathrm{D}(\mathcal{A})$ tais que

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty,\quad \|U_n\|_{\mathcal{H}}=1\quad \text{e}\quad \lim_{n\to\infty}\|(i\lambda_nI-\mathcal{A})U_n\|_{\mathcal{H}}=0.$$

Deste modo, tomando

$$V_n=(i\lambda_nI-\mathcal{A})U_n\quad \text{e}\quad F_n=\frac{V_n}{\|V_n\|_{\mathcal{H}}},$$

temos

$$\lim_{n\to\infty}\|(i\lambda_nI-\mathcal{A})^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\|U_n\|_{\mathcal{H}}}{\|V_n\|_{\mathcal{H}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\|V_n\|_{\mathcal{H}}}=\infty$$

e como $\|F_n\|_{\mathcal{H}}=1$, isto significa que

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty}\|(i\lambda I-\mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}=\infty.$$

Como o operador A é auto-adjunto e A^{-1} é compacto, seu espectro é formado por uma sequência de autovalores positivos (σ_n) tais que $\sigma_n\to\infty$. Para cada σ_n, considere $v_n\in \mathrm{D}(A)$ como sendo seu autovalor associado, de tal forma que

$$\|v_n\|=1,\quad Av_n=\sigma_nv_n\quad \text{e}\quad A^rv_n=\sigma_n^rv_n,\ r\in[-1,1].$$

Note que a existência de (v_n) está garantida pelo Corolário A.29. Logo, queremos encontrar

$$U_n=(a_nv_n,i\lambda_na_nv_n,c_nv_n,i\lambda_nc_nv_n)\in \mathrm{D}(\mathcal{A})$$

que satisfaça as condições desejadas, em que $(\lambda_n),(a_n)$ e (c_n) serão determinados posteriormente. Nestas condições, temos que

$$(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n = \begin{pmatrix} 0 \\ [-\lambda_n^2\rho_1 + k\sigma_n + i\lambda_n\sigma_n^{\alpha}]\rho_1^{-1}a_n v_n + k\rho_1^{-1}\sigma_n^{\frac{1}{2}}c_n v_n \\ 0 \\ [-\lambda_n^2\rho_2 + b\sigma_n + i\lambda_n\sigma_n^{\beta} + k]\rho_2^{-1}c_n v_n + k\rho_2^{-1}\sigma_n^{\frac{1}{2}}a_n v_n \end{pmatrix}.$$

Teorema 4.19 (C1)**.** *Se* $(\alpha,\beta) \in \big([-1,0)\times(0,1]\big) \cup \big((0,1]\times[-1,0)\big)$*, então* $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ *não é exponencialmente estável.*

Demonstração. Suponha que $\alpha \in [-1,0)$ e $\beta \in (0,1]$. Neste caso, tome $\lambda_n^2 = k\rho_1^{-1}\sigma_n$ e

$$c_n = \frac{k\sigma_n^{\frac{1}{2}}}{\lambda_n^2\rho_2 - b\sigma_n - i\lambda_n\sigma_n^{\beta}} \cdot a_n = \xi_n a_n,$$

o que implica em

$$(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n = \begin{pmatrix} 0 \\ i\rho_1^{-1}\lambda_n\sigma_n^{\alpha}a_n v_n + k\rho_1^{-1}\sigma_n^{\frac{1}{2}}c_n v_n \\ 0 \\ k\rho_2^{-1}c_n v_n \end{pmatrix}.$$

Como devemos ter $\|U_n\|_{\mathcal{H}}^2 = 1$, tomando (a_n) tal que

$$|a_n|^2 = \left[k|\sigma_n^{\frac{1}{2}} + \xi_n|^2 + b\sigma_n|\xi_n|^2 + k\sigma_n + k\rho_2\rho_1^{-1}\sigma_n|\xi_n|^2\right]^{-1},$$

encontramos

$$\begin{aligned} \|U_n\|_{\mathcal{H}}^2 &= k\|A^{\frac{1}{2}}(a_n v_n) + c_n v_n\|^2 + b\|A^{\frac{1}{2}}(c_n v_n)\|^2 + \rho_1\|i\lambda_n a_n v_n\|^2 + \rho_2\|i\lambda_n c_n v_n\|^2 \\ &= k|\sigma_n^{\frac{1}{2}}a_n + c_n|^2 + b|\sigma^{\frac{1}{2}}c_n|^2 + \rho_1\lambda_n^2|a_n|^2 + \rho_2\lambda_n^2|c_n|^2 \\ &= \left[k|\sigma_n^{\frac{1}{2}} + \xi_n|^2 + b\sigma_n|\xi_n|^2 + k\sigma_n + k\rho_2\rho_1^{-1}\sigma_n|\xi_n|^2\right]|a_n|^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Devido as escolhas feitas, temos

$$|\xi_n|^2 = \frac{k^2\sigma_n}{(k\rho_2\rho_1^{-1} - b)^2\sigma_n^2 + k\rho_1^{-1}\sigma_n^{2\beta+1}} \leqslant k\rho_1\sigma_n^{-2\beta}$$

e também

$$|a_n|^2 \leqslant (k\sigma_n)^{-1}.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\|(i\lambda_n I-\mathcal{A})U_n\|_{\mathcal{H}}^2 &= \rho_1^{-1}|i\lambda_n\sigma_n^{\alpha}a_n+k\sigma_n^{\frac{1}{2}}c_n|^2+k^2\rho_2^{-1}|c_n|^2\\
&= \rho_1^{-1}|i\lambda_n\sigma_n^{\alpha}+k\sigma_n^{\frac{1}{2}}\xi_n|^2|a_n|^2+k^2\rho_2^{-1}|\xi_n|^2|a_n|^2\\
&\leqslant \rho_1^{-1}\left[\lambda_n\sigma_n^{\alpha}+k\sigma_n^{\frac{1}{2}}|\xi_n|\right]^2|a_n|^2+k^2\rho_2^{-1}|\xi_n|^2|a_n|^2\\
&\leqslant \rho_1^{-1}\left[(k\rho_1)^{-1}\sigma_n^{\alpha+\frac{1}{2}}+k(k\rho_1)^{\frac{1}{2}}\sigma_n^{\frac{1}{2}-\beta}\right]^2(k\sigma_n)^{-1}+k^2\rho_1\rho_2^{-1}\sigma_n^{-2\beta}\\
&\leqslant (k\rho_1)^{-1}\left[(k\rho_1^{-1})^{\frac{1}{2}}\sigma_n^{\alpha}+k(k\rho_1)^{\frac{1}{2}}\sigma_n^{-\beta}\right]^2+k^2\rho_1\rho_2^{-1}\sigma_n^{-2\beta}.
\end{aligned}
$$

Como $\alpha<0$ e $\beta>0$, temos o desejado.

Caso $\alpha\in(0,1]$ e $\beta\in[-1,0)$, tome $\lambda_n^2=b\rho_2^{-1}\sigma_n$ e

$$
a_n=\frac{k\sigma_n^{\frac{1}{2}}}{\rho_1\lambda_n^2-k\sigma_n-i\lambda_n\sigma_n^{\alpha}}\cdot c_n:=\zeta_n c_n.
$$

O que implica em

$$
(i\lambda_n I-\mathcal{A})U_n=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\ [i\lambda_n\sigma_n^{\beta}+k]\rho_2^{-1}c_nv_n+k\rho_2^{-1}\sigma_n^{\frac{1}{2}}a_nv_n\end{pmatrix}.
$$

De maneira análoga ao feito anteriormente, como queremos que $\|U_n\|_{\mathcal{H}}^2=1$, devemos tomar

$$
|c_n|^2=\left[k|\zeta_n\sigma_n^{\frac{1}{2}}+1|^2+b\sigma_n+\rho_1\lambda_n^2|\zeta_n|^2+\rho_2\lambda_n^2\right]^{-1}.
$$

Além disso, são válidas as estimativas

$$
|\zeta_n|^2\leqslant k^2\rho_2b^{-1}\sigma_n^{-2\alpha}\quad \text{e}\quad |c_n|^2\leqslant(b\sigma_n)^{-1}.
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\|(i\lambda_n I-\mathcal{A})U_n\|_{\mathcal{H}}^2 &= \rho_2^{-1}|(i\lambda_n\sigma_n^{\beta}+k)c_nv_n+k\sigma_n^{\frac{1}{2}}a_nv_n|^2\\
&= \rho_2^{-1}|i\lambda_n\sigma_n^{\beta}+k+k\sigma_n^{\frac{1}{2}}\zeta_n|^2|c_n|^2\\
&\leqslant \rho_2^{-1}\left[\lambda_n\sigma_n^{\beta}+k+k\sigma_n^{\frac{1}{2}}|\zeta_n|\right]^2|c_n|^2\\
&\leqslant \rho_2^{-1}\left[(b\rho_2^{-1})^{\frac{1}{2}}\sigma_n^{\beta+\frac{1}{2}}+k+k(k^2\rho_2b^{-1})^{\frac{1}{2}}\sigma_n^{\frac{1}{2}-\alpha}\right]^2(b\sigma_n)^{-1}\\
&\leqslant (b\rho_2)^{-1}\left[(b\rho_2^{-1})^{\frac{1}{2}}\sigma_n^{\beta}+k\sigma_n^{-\frac{1}{2}}+k^2(\rho_2b^{-1})^{\frac{1}{2}}\sigma_n^{-\alpha}\right]^2.
\end{aligned}
$$

De onde segue o desejado. $\square$

Teorema 4.20 (C2). *Sejam* $(\alpha,\beta) \in \big(\{0\} \times [-1,0)\big) \cup \big([-1,0) \times \{0\}\big)$. *Se* $\chi \neq 0$, *então* $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ *não é exponencialmente estável.*

Demonstração. De maneira análoga ao feito no Teorema 4.19, note que caso $\alpha \in [-1,0)$ e $\beta = 0$, então

$$|\xi_n|^2 \leqslant k^2(k\rho_2\rho_1^{-1} - b)^{-2}\sigma_n^{-1}.$$

E quando $\alpha = 0$ e $\beta \in [-1,0)$, temos

$$|\zeta_n|^2 \leqslant k^2(b\rho_1\rho_2^{-1} - k)^2\sigma_n^{-1}.$$

Em ambos os casos, teremos que

$$\|(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n\|_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0.$$

O que encerra a demonstração. $\square$

Finalmente, mostraremos que caso $\alpha,\beta \in [-1,0)$, o semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ não é exponencialmente estável. Note que dado $U \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$, de (4.17), podemos escrever

$$\mathcal{A}U = \mathcal{A}_0 U + \mathcal{B}U,$$

em que

$$\mathcal{A}_0 U = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ -\frac{k}{\rho_1}A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi) \\ \tilde{\psi} \\ -\frac{b}{\rho_2}A\psi - \frac{k}{\rho_2}(A^{1/2}\varphi + \psi) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}U = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\rho_1}A^{\alpha}\tilde{\varphi} \\ 0 \\ -\frac{1}{\rho_2}A^{\beta}\tilde{\psi} \end{pmatrix}.$$

Pela Proposição A.30, sabemos que $\mathcal{B}$ é compacto. Além disso, como $\mathcal{A}_0$ é o operador do problema (1.4)-(1.5) no caso homogêneo, como feito no Lema 4.4, temos que $0 \in \varrho(\mathcal{A}_0)$ e pelo Lema 4.3, segue que $\mathcal{A}_0$ é conservativo, o que nos permite demonstrar a seguinte proposição:

Proposição 4.21. *O* C_0*-semigrupo* $\{S_0(t)\}_{t\geqslant 0}$ *gerado pelo operador* $\mathcal{A}_0$ *é unitário.*

Demonstração. Primeiro, note que fazendo a mudança de variável $t = -\tau$, com $\tau \leqslant 0$, na versão homogênea do problema (1.4)-(1.5), obtemos o mesmo operador $\mathcal{A}_0$ que sabemos ser conversativo e tal que $0 \in \varrho(\mathcal{A}_0)$. Deste modo, segue que $\mathcal{A}_0$ gera um C_0-grupo.

Assim, pelo Teorema de Stone (Ver Teorema A.20), basta provar que $i\mathcal{A}_0$ é auto-adjunto. Com efeito, dado $U \in \mathrm{D}(\mathcal{A}_0)$, temos

$$\begin{aligned}
\langle i\mathcal{A}_0 U, U\rangle_{\mathcal{H}} &= k\langle i(A^{\frac{1}{2}}\tilde{\varphi} + \tilde{\psi}), A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi\rangle + b\langle iA^{\frac{1}{2}}\tilde{\psi}, A^{\frac{1}{2}}\psi\rangle \\
&\quad + \rho_1\langle i(-k\rho_1^{-1}A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi)), \tilde{\varphi}\rangle + i\rho_2\langle i\rho_2^{-1}(-bA\psi - k(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi)), \tilde{\psi}\rangle \\
&= ik\langle \tilde{\varphi}, A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi)\rangle + ik\langle \tilde{\psi}, A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi\rangle + ib\langle \tilde{\psi}, A\psi\rangle \\
&\quad - ik\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi, A^{\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}\rangle - ik\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi, \tilde{\psi}\rangle - ib\langle A^{\frac{1}{2}}\psi, A^{\frac{1}{2}}\tilde{\psi}\rangle \\
&= k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi, i(A^{\frac{1}{2}}\tilde{\varphi} + \tilde{\psi})\rangle + b\langle A^{\frac{1}{2}}\psi, iA^{\frac{1}{2}}\tilde{\psi}\rangle \\
&\quad + \rho_1\langle \tilde{\varphi}, i(-k\rho_1^{-1}A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi))\rangle + \rho_2\langle \tilde{\psi}, i\rho_2^{-1}(-bA\psi - k(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi))\rangle \\
&= \langle U, i\mathcal{A}_0 U\rangle_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

De onde segue o desejado. □

Note que o semigrupo $\{S_0(t)\}_{t\geqslant 0}$ gerado por $\mathcal{A}_0$ não decai. Assim, mostraremos que se um semigrupo não é exponencialmente estável, perturbar seu gerador ($\mathcal{A}_0$) por um operador compacto ($\mathcal{B}$) resulta em um operador ($\mathcal{A}$) que gera um semigrupo que também não é exponencialmente estável. Para tanto, utilizaremos o conceito de tipo essencial de semigrupos, dado na Definição A.21.

Lema 4.22. $w_{ess}(\mathcal{A}_0) = 0$.

Demonstração. Primeiro, note que existe $C > 0$ satisfazendo

$$C \leqslant \|S_0(t)\|_{ess} \leqslant 1, \ \forall t > 0.$$

De fato, suponha que isto não ocorra, então para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n > 0$ tal que

$$\|S_0(t_n)\|_{ess} < \frac{1}{n}.$$

Assim, $S_0(t_n) \to 0$ na norma essencial, isto significa que $S_0(t_n) \to K$ em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, em que K é um operador linear compacto. O que resulta em um absurdo, pois

$$\|KU\|_{\mathcal{H}} = \lim_{n\to\infty} \|S_0(t_n)U\|_{\mathcal{H}} = \|U\|_{\mathcal{H}}, \ \forall U \in \mathcal{H}.$$

Deste modo, para cada $t > 0$, temos

$$\frac{C}{t} \leqslant \frac{\|S_0(t)\|_{ess}}{t} \leqslant \frac{\|S_0(t)\|}{t} = \frac{1}{t}.$$

De onde segue que

$$w_{ess}(\mathcal{A}_0) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \|S_0(t)\|_{ess}}{t} = 0.$$

Portanto, segue o resultado. □

Lema 4.23. *Para qualquer $t > 0$, o operador $S_{\mathcal{A}}(t) - S_0(t) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é compacto e vale a fórmula integral*

$$S_{\mathcal{A}}(t) - S_0(t) = \int_0^t S_0(t-\tau)\mathcal{B}S_{\mathcal{A}}(\tau)d\tau. \tag{4.33}$$

Demonstração. Primeiro, mostraremos que (4.33) é válida. Com efeito, para cada $U_0 \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$ e $t > 0$ defina $V(\tau) = S_0(t-\tau)S_{\mathcal{A}}(\tau)U_0$, com $\tau < t$. Deste modo,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}V(\tau) &= -\mathcal{A}_0 S_0(t-\tau)S_{\mathcal{A}}(\tau)U_0 + S_0(t-\tau)\frac{d}{d\tau}S_{\mathcal{A}}(\tau)U_0\\ &= -\mathcal{A}_0 S_0(t-\tau)S_{\mathcal{A}}(\tau)U_0 + S_0(t-\tau)\mathcal{A}_0 S_{\mathcal{A}}(\tau)U_0 + S_0(t-\tau)\mathcal{B}S_{\mathcal{A}}(\tau)U_0\\ &= S_0(t-\tau)\mathcal{B}S_{\mathcal{A}}(\tau)U_0.\end{aligned}$$

Integrando de 0 à t, obtemos (4.33) para $U_0 \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$. Para $U_0 \in \mathcal{H}$, sabemos que existe $(U_n) \subset \mathrm{D}(\mathcal{A})$ tal que $U_n \to U_0$ em $\mathcal{H}$. Para qualquer $t > 0$ e $\tau \in [0, t)$, temos

$$\|S_0(t-\tau)S_{\mathcal{A}}(\tau)U_n\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|U_n\|_{\mathcal{H}},$$

e observe que esta desigualdade independe da escolha de t e τ. Assim, obtemos

$$V_n(\tau) = S_0(t-\tau)S_{\mathcal{A}}(\tau)U_n \longrightarrow S_0(t-\tau)S_{\mathcal{A}}(\tau)U_0 = V(\tau),\ \forall \tau \in [0, t).$$

Como a convergência é uniforme para todo $\tau \in [0, t)$, obtemos $\dfrac{dV_n}{d\tau} \to \dfrac{dV}{d\tau}$ e pela unicidade do limite

$$\frac{d}{d\tau}V(\tau) = S_0(t-\tau)\mathcal{B}S_{\mathcal{A}}(\tau)U_0.$$

Integrando de 0 à t, (4.33) segue para $U_0 \in \mathcal{H}$.

Agora, mostraremos que $S_{\mathcal{A}}(t) - S_0(t)$ é compacto. De fato, seja $(U_n) \subset \mathcal{H}$ limitada. Como $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t \geqslant 0}$ é um semigrupo de contrações, temos que

$$\|S_{\mathcal{A}}(t)U_n\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|U_n\|_{\mathcal{H}},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, para cada $t \geqslant 0$, a sequência $(S_{\mathcal{A}}(t)U_n)$ é limitada. Sendo $\mathcal{B}$ compacto, existe uma subsequência (que ainda será denotada por (U_n)) e $V \in \mathcal{H}$ tais que

$$BS_{\mathcal{A}}(t)U_n = V_n \longrightarrow V \in \mathcal{H}.$$

Deste modo, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n, m > n_0$, então

$$\|V_n - V_m\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon.$$

Assim, como $\{S_0(t)\}_{t\geqslant 0}$ é unitário, se $n, m > n_0$, então

$$\begin{aligned}
\|(S_{\mathcal{A}}(t)-S_0(t))(U_n-U_m)\|_{\mathcal{H}} &= \left\|\int_0^t S_0(t-\tau)\mathcal{B}S_{\mathcal{A}}(\tau)(U_n-U_m)d\tau\right\|_{\mathcal{H}}\\
&\leqslant \int_0^t \|S_0(t-\tau)(V_n-V_m)\|_{\mathcal{H}}d\tau\\
&= \int_0^t \|V_n-V_m\|_{\mathcal{H}}d\tau\\
&< t\varepsilon.
\end{aligned}$$

De onde segue que $((S_{\mathcal{A}}-S_0(t))U_n)$ é de Cauchy em $\mathcal{H}$. Portanto, para cada $t>0$, o operador $S_{\mathcal{A}}(t)-S_0(t)$ é compacto. □

Teorema 4.24 (C3). *Sejam $\alpha, \beta \in [-1, 0)$. Então, o semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ não é exponencialmente estável*

Demonstração. O Lema 4.23 nos garante que para cada $t > 0$ o operador $S_{\mathcal{A}}(t)-S_0(t)$ é compacto, então

$$\begin{aligned}
\|S_{\mathcal{A}}(t)\|_{ess} &= \inf\{\|S_{\mathcal{A}}(t)-K\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}:\ K \text{ é compacto}\}\\
&= \inf\{\|S_{\mathcal{A}}(t)-(S_{\mathcal{A}}(t)-S_0(t))-K\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}:\ K \text{ é compacto}\}\\
&= \inf\{\|S_0(t)-K\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}:\ K \text{ é compacto}\}\\
&= \|S_0(t)\|_{ess}.
\end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 4.22 temos

$$w_{ess}(\mathcal{A}) = \lim_{t\to\infty}\frac{\|S_{\mathcal{A}}(t)\|_{ess}}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{\|S_0(t)\|_{ess}}{t} = w_{ess}(\mathcal{A}_0) = 0.$$

Uma vez que $\mathcal{A}$ gera um C_0-semigrupo de contrações, então a Proposição A.22 nos garante que $w_0(\mathcal{A}) = 0$. Logo, pela Proposição 2.6 e do Teorema A.5, para todo $t \geqslant 0$ temos

$$1 = R_\sigma(S_{\mathcal{A}}(t)) = \lim_{n\to\infty}\|S^n_{\mathcal{A}}(t)\|^{\frac{1}{n}}_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leqslant \|S_{\mathcal{A}}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}.$$

Portanto $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ não pode ser exponencialmente estável. □

4.5 ANALITICIDADE

Agora, buscaremos melhorar a regularidade da solução obtida quando temos a estabilidade exponencial. Para tanto, mostraremos que o semigrupo gerado por $\mathcal{A}$ é analítico se, e somente se, $\alpha, \beta \in [\frac{1}{2}, 1]$. Para isto, utilizaremos novamente a equação resolvente dada em (4.7)-(4.10).

Lema 4.25. *Sejam* $\alpha, \beta \in [0,1]$. *Se* $U \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$ *satisfaz a equação resolvente* (4.6)*, então*

$$|\lambda| \left[k\|A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi\|^2 + b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2\right] \leqslant C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \rho_1|\lambda|\|\tilde{\varphi}\|^2 + \rho_2|\lambda|\|\tilde{\psi}\|^2.$$

Demonstração. Multiplicando (4.8) por $\lambda\varphi$, temos

$$\begin{aligned}\lambda\rho_1\langle f_2, \varphi\rangle &= \lambda\langle i\lambda\rho_1\tilde{\varphi} + A(A^{\alpha-1}\tilde{\varphi} + k\varphi) + kA^{\frac{1}{2}}\psi, \varphi\rangle \\ &= i\lambda^2\rho_1\langle\tilde{\varphi}, \varphi\rangle + \lambda\langle A^{\alpha-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}, A^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle + k\lambda\langle A^{\frac{1}{2}}\tilde{\varphi} + \psi, A^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle.\end{aligned}$$

Da equação (4.7), encontramos

$$\begin{aligned}k\lambda\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi, A^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle &= \lambda\rho_1\langle f_2, \varphi\rangle - i\lambda^2\rho_1\langle\tilde{\varphi}, \varphi\rangle - \lambda\langle A^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{\varphi}, A^{\frac{\alpha}{2}}\varphi\rangle \\ &= i\rho_1[\langle f_2, f_1\rangle + \langle f_2, \tilde{\varphi}\rangle] + \lambda\rho_1[\|\tilde{\varphi}\|^2 + \langle\tilde{\varphi}, f_1\rangle] \\ &\quad - i[\|A^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{\varphi}\|^2 + \langle A^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{\varphi}, A^{\frac{\alpha}{2}}f_1\rangle].\end{aligned}$$

Da equação (4.8), obtemos

$$\begin{aligned}\lambda\rho_1\langle\tilde{\varphi}, f_1\rangle &= i\langle A(A^{\alpha-1}\tilde{\varphi} + k\varphi) + kA^{\frac{1}{2}}\psi - \rho_1 f_2, f_1\rangle \\ &= i\langle A^{\alpha-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}, A^{\frac{1}{2}}f_1\rangle + ik\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi, A^{\frac{1}{2}}f_1\rangle - i\rho_1\langle f_2, f_1\rangle.\end{aligned}$$

Assim,

$$k\lambda\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi, A^{\frac{1}{2}}\varphi\rangle = i\rho_1\langle f_2, \tilde{\varphi}\rangle + \lambda\rho_1\|\tilde{\varphi}\|^2 - i\|A^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{\varphi}\|^2 + ik\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi, A^{\frac{1}{2}}f_1\rangle. \tag{4.34}$$

De maneira análoga, multiplicando (4.10) por $\lambda\psi$, temos

$$\lambda\rho_2\langle f_4, \psi\rangle = i\lambda^2\rho_2\langle\tilde{\psi}, \psi\rangle + \lambda\langle A^{\beta-\frac{1}{2}}\tilde{\psi}, A^{\frac{1}{2}}\psi\rangle + \lambda b\langle A^{\frac{1}{2}}\psi, A^{\frac{1}{2}}\psi\rangle + \lambda k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi, \psi\rangle.$$

Usando (4.9), segue que

$$\begin{aligned}k\lambda\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi, \psi\rangle + \lambda b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 &= \lambda\rho_2\langle f_4, \psi\rangle - \lambda\langle A^{\frac{\beta}{2}}\tilde{\psi}, A^{\frac{\beta}{2}}\psi\rangle - i\lambda^2\rho_2\langle\tilde{\psi}, \psi\rangle \\ &= i\rho_2[\langle f_4, f_3\rangle + \langle f_4, \tilde{\psi}\rangle] - i\|A^{\frac{\beta}{2}}\tilde{\psi}\|^2 - i\langle A^{\frac{\beta}{2}}\tilde{\psi}, A^{\frac{\beta}{2}}f_3\rangle \\ &\quad + \lambda\rho_2[\|\tilde{\psi}\|^2 + \langle\tilde{\psi}, f_3\rangle].\end{aligned}$$

Da equação (4.10), obtemos

$$\begin{aligned}\lambda\rho_2\langle\tilde{\psi}, f_3\rangle &= i\langle A(A^{\beta-1}\tilde{\psi} + b\psi) + k(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi) - \rho_2 f_4, f_3\rangle \\ &= i\langle A^{\frac{\beta}{2}}\tilde{\psi}, A^{\frac{\beta}{2}}f_3\rangle + ib\langle A^{\frac{1}{2}}\psi, A^{\frac{1}{2}}f_3\rangle + ik\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi, f_3\rangle - i\rho_2\langle f_4, f_3\rangle.\end{aligned}$$

Com isso,

$$k\lambda\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi,\psi\rangle+\lambda b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2=i\rho_2\langle f_4,\tilde{\psi}\rangle+\lambda\rho_2\|\tilde{\psi}\|^2-i\|A^{\frac{\beta}{2}}\tilde{\psi}\|^2$$
$$+ib\langle A^{\frac{1}{2}}\psi,A^{\frac{1}{2}}f_3\rangle+ik\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi,f_3\rangle. \qquad (4.35)$$

Somando (4.34) e (4.35) e tomando a parte real, obtemos

$$\lambda\left[k\|A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi\|^2+b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2\right]=\lambda\rho_1\|\tilde{\varphi}\|^2+\lambda\rho_2\|\tilde{\psi}\|^2+\mathrm{Re}\left[i\rho_1\langle f_2,\tilde{\varphi}\rangle+i\rho_2\langle f_4,\tilde{\psi}\rangle\right]$$
$$+\mathrm{Re}\left[ik\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi,A^{\frac{1}{2}}f_1+f_3\rangle+ib\langle A^{\frac{1}{2}}\psi,A^{\frac{1}{2}}f_3\rangle\right].$$

Da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, encontramos

$$|\lambda|\left[k\|A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi\|^2+b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2\right]\leqslant C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+\rho_1|\lambda|\|\tilde{\varphi}\|^2+\rho_2|\lambda|\|\tilde{\psi}\|^2.$$

De onde segue a estimativa desejada. □

Teorema 4.26. *O semigrupo gerado por $\mathcal{A}$ é analítico para $\alpha,\beta\in[\frac{1}{2},1]$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.25, basta mostrarmos que se $U\in \mathrm{D}(\mathcal{A})$ satisfaz a equação resolvente dada em (4.6), então

$$\rho_1|\lambda|\|\tilde{\varphi}\|^2+\rho_2|\lambda|\|\tilde{\psi}\|^2\leqslant C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Com efeito, multiplicando (4.8) por $\lambda A^{-\alpha}\tilde{\varphi}$, temos

$$\lambda\langle i\lambda\rho_1\tilde{\varphi}+A(A^{\alpha-1}\tilde{\varphi}+k\varphi)+kA^{\frac{1}{2}}\psi,A^{-\alpha}\tilde{\varphi}\rangle=\lambda\rho_1\langle f_2,A^{-\alpha}\tilde{\varphi}\rangle,$$

isto é,

$$\lambda\langle A^{\alpha-1}\tilde{\varphi},A^{1-\alpha}\tilde{\varphi}\rangle=\lambda\rho_1\langle f_2,A^{-\alpha}\tilde{\varphi}\rangle-i\lambda^2\rho_1\langle\tilde{\varphi},A^{-\alpha}\tilde{\varphi}\rangle-k\lambda\langle\varphi,A^{1-\alpha}\tilde{\varphi}\rangle-\lambda k\langle A^{\frac{1}{2}}\psi,A^{-\alpha}\tilde{\varphi}\rangle.$$

Então,

$$\begin{aligned}\lambda\|\tilde{\varphi}\|^2&=\lambda\rho_1\langle f_2,A^{-\alpha}\tilde{\varphi}\rangle-i\lambda^2\rho_1\|A^{-\frac{\alpha}{2}}\tilde{\varphi}\|^2-\lambda k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi,A^{\frac{1}{2}-\alpha}\tilde{\varphi}\rangle\\&=\lambda\rho_1\langle f_2,A^{-\alpha}\tilde{\varphi}\rangle-i\lambda^2\rho_1\|A^{-\frac{\alpha}{2}}\tilde{\varphi}\|^2+ik\|A^{\frac{1-\alpha}{2}}\tilde{\varphi}\|^2\\&\quad+ik\left[\langle A^{\frac{1}{2}}f_1,A^{\frac{1}{2}-\alpha}\tilde{\varphi}\rangle+\langle\tilde{\psi},A^{\frac{1}{2}-\alpha}\tilde{\varphi}\rangle+\langle f_3,A^{\frac{1}{2}-\alpha}\tilde{\varphi}\rangle\right].\end{aligned} \qquad (4.36)$$

Aplicando $A^{-\alpha}$ em (4.8) e usando que $\frac{1}{2}\leqslant\alpha$, obtemos

$$i\lambda\rho_1A^{-\alpha}\tilde{\varphi}+kA^{\frac{1}{2}-\alpha}(A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi)+\tilde{\varphi}=\rho_1A^{-\alpha}f_2,$$

e assim

$$\lambda\rho_1\langle f_2, A^{-\alpha}\tilde{\varphi}\rangle = -ik\langle f_2, A^{\frac{1}{2}-\alpha}(A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi)\rangle - i\langle f_2,\tilde{\varphi}\rangle + i\rho_1\langle f_2, A^{-\alpha}f_2\rangle.$$

Retornando em (4.36), obtemos

$$\begin{aligned}\lambda\|\tilde{\varphi}\|^2 &= -ik\langle A^{\frac{1}{2}-\alpha}f_2, A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi\rangle - i\langle f_2,\tilde{\varphi}\rangle + i\rho_1\|A^{-\frac{\alpha}{2}}f_2\|^2 - i\lambda^2\rho_2\|A^{-\frac{\alpha}{2}}\tilde{\varphi}\|^2\\ &\quad + ik\|A^{\frac{1-\alpha}{2}}\tilde{\varphi}\|^2 + ik\left[\langle A^{\frac{1}{2}}f_1, A^{\frac{1}{2}-\alpha}\tilde{\varphi}\rangle + \langle\tilde{\psi}, A^{\frac{1}{2}-\alpha}\tilde{\varphi}\rangle + \langle f_3, A^{\frac{1}{2}-\alpha}\tilde{\varphi}\rangle\right]\end{aligned}$$

Tomando a parte real e passando o módulo e usando que $\frac{1}{2}\leqslant\alpha$, temos pela Desigualdade de Young e o Lema 4.9 que

$$\rho_1|\lambda|\|\tilde{\varphi}\|^2 \leqslant C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \tag{4.37}$$

De maneira análoga, tomando o produto interno de (4.10) por $\lambda A^{-\beta}\tilde{\psi}$, obtemos

$$\lambda\langle i\lambda\rho_2\tilde{\psi} + A(A^{\beta-1}\tilde{\psi}+b\psi) + k(A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi), A^{-\beta}\tilde{\psi}\rangle = \lambda\rho_2\langle f_4, A^{-\beta}\tilde{\psi}\rangle.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\lambda\|\tilde{\psi}\|^2 &= \lambda\rho_2\langle f_4, A^{-\beta}\tilde{\psi}\rangle - i\lambda^2\rho_2\|A^{-\frac{\beta}{2}}\tilde{\psi}\|^2 - \lambda b\langle A^{\frac{1}{2}}\psi, A^{\frac{1}{2}-\beta}\tilde{\psi}\rangle - \lambda k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi, A^{-\beta}\tilde{\psi}\rangle\\ &= \lambda\rho_2\langle f_4, A^{-\beta}\tilde{\psi}\rangle - i\lambda^2\rho_2\|A^{-\frac{\beta}{2}}\tilde{\psi}\|^2 + ib\|A^{\frac{1-\beta}{2}}\tilde{\psi}\|^2 + ib\langle A^{\frac{1}{2}}f_3, A^{\frac{1}{2}-\beta}\tilde{\psi}\rangle\\ &\quad + ik\left[\langle\tilde{\varphi}, A^{\frac{1}{2}-\beta}\tilde{\psi}\rangle + \langle A^{\frac{1}{2}}f-1, A^{-\beta}\tilde{\psi}\rangle + \langle f_3, A^{-\beta}\tilde{\psi}\rangle\right] + ik\|A^{-\beta}\tilde{\psi}\|^2.\end{aligned} \tag{4.38}$$

Aplicando $A^{-\beta}$ em (4.10), obtemos

$$i\lambda\rho_2 A^{-\beta}\tilde{\psi} + bA^{\frac{1}{2}-\beta}(A^{\frac{1}{2}}\psi) + kA^{-\beta}(A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi) + \tilde{\psi} = \rho_2 A^{-\beta}f_4,$$

e assim

$$\lambda\langle f_4, A^{-\beta}\tilde{\psi}\rangle = -ib\langle A^{\frac{1}{2}-\beta}f_4, A^{\frac{1}{2}}\psi\rangle - ik\langle A^{\frac{1}{2}-\beta}f_4, A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi\rangle - i\langle f_4,\tilde{\psi}\rangle + i\rho_2\|A^{-\frac{\beta}{2}}f_4\|^2.$$

Retornando em (4.38), econtramos

$$\begin{aligned}\lambda\|\tilde{\psi}\|^2 &= -ib\langle A^{\frac{1}{2}-\beta}f_4, A^{\frac{1}{2}}\psi\rangle - ik\langle A^{\frac{1}{2}-\beta}f_4, A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi\rangle - i\langle f_2,\tilde{\psi}\rangle + \rho_2\|A^{-\frac{\beta}{2}}f_4\|^2\\ &\quad - i\lambda^2\rho_2\|A^{-\frac{\beta}{2}}\tilde{\psi}\|^2 + ib\|A^{\frac{1-\beta}{2}}\tilde{\psi}\|^2 + ib\langle A^{\frac{1}{2}}f_3, A^{\frac{1}{2}-\beta}\tilde{\psi}\rangle + ik\|A^{-\frac{\beta}{2}}\tilde{\psi}\|^2\\ &\quad + ik\left[\langle\tilde{\varphi}, A^{\frac{1}{2}-\beta}\tilde{\psi}\rangle + \langle A^{\frac{1}{2}}f_1, A^{-\beta}\tilde{\psi}\rangle + \langle f_3, A^{-\beta}\tilde{\psi}\rangle\right].\end{aligned}$$

Uma vez que $\frac{1}{2} \leqslant \beta$, temos a estimativa

$$\rho_2|\lambda|\|\tilde{\psi}\|^2 \leqslant C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{4.39}$$

Portanto, do Lema 4.25 e usando as estimativas (4.37) e (4.39) concluímos que

$$|\lambda|\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

A conclusão segue do Teorema 3.7. □

4.5.1 Falta de Analiticidade

Afim de mostrar que o semigrupo gerado por $\mathcal{A}$ não é analítico caso $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ ou $\beta \in [0, \frac{1}{2})$, mostraremos que existe uma sequência de números reais positivos $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ e $(U_n) \subset \mathrm{D}(\mathcal{A})$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty, \quad \|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n^{-1}\|(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

Deste modo, tomando

$$V_n = \lambda_n^{-1}(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n \quad \text{e} \quad F_n = \frac{V_n}{\|V_n\|_{\mathcal{H}}},$$

encontramos

$$\lim_{n\to\infty} \|\lambda_n(i\lambda_n I - \mathcal{A})^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\|U_n\|_{\mathcal{H}}}{\|V_n\|_{\mathcal{H}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\|V_n\|_{\mathcal{H}}} = \infty.$$

Como $\|F_n\|_{\mathcal{H}} = 1$, isto significa que

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} \|\lambda(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \infty.$$

De maneira análoga a demonstração dos teoremas 4.19 e 4.20, mostraremos que existem sequências $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}_+$ e $(U_n) \subset \mathrm{D}(\mathcal{A})$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty, \quad \|U_n\|_{\mathcal{H}} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \|(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

Como $\varrho(A)$ é composto por uma sequência de autovalores positivos $\sigma_n \to \infty$, podemos considerar

$$U_n = (a_n v_n, i\lambda_n a_n v_n, c_n v_n, i\lambda_n c_n v_n) \in \mathrm{D}(\mathcal{A}),$$

de modo que (a_n) e (c_n) serão determinadas posteriormente e (v_n) é uma sequência de autovetores satisfazendo

$$\|v_n\| = 1, \quad Av_n = \sigma_n \quad \text{e} \quad A^r v_n = \sigma_n^r v_n, \ r \in [0,1].$$

Note que nestas hipóteses, temos

$$(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n \begin{pmatrix} 0 \\ [-\lambda_n^2\rho_1 + i\lambda_n\sigma_n^\alpha + k\sigma_n]\rho_1^{-1}a_n v_n + k\rho_1^{-1}\sigma_n^{\frac{1}{2}}c_n v_n \\ 0 \\ [-\lambda_n^2\rho_2 + i\lambda_n\sigma_n^\beta + b\sigma_n + k]\rho_2^{-1}c_n v_n + k\rho_2^{-1}\sigma_n^{\frac{1}{2}}a_n v_n \end{pmatrix}.$$

Teorema 4.27. *Suponha que α ou β pertençam ao intervalo $[0, \frac{1}{2})$, então o semigrupo gerado por $\mathcal{A}$ não será analítico.*

Demonstração. Suponha que $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$. Neste caso, tome $c_n = 0$ e $\lambda_n^2 = k\rho_1^{-1}\sigma_n$, então

$$(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n = \begin{pmatrix} 0 \\ [-\lambda_n^2\rho_1 + i\lambda_n\sigma_n^\alpha + k\sigma_n]\rho_1^{-1}a_n v_n \\ 0 \\ k\rho_2^{-1}\sigma_n^{\frac{1}{2}}a_n v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i\rho_1^{-1}\lambda_n\sigma_n^\alpha a_n v_n \\ 0 \\ k\rho_2^{-1}\sigma_n^{\frac{1}{2}}a_n v_n \end{pmatrix}.$$

A fim de mostrar o desejado devemos ter $\|U_n\|_{\mathcal{A}} = 1$, isto é,

$$\begin{aligned} \|U_n\|_{\mathcal{H}}^2 &= k\|A^{\frac{1}{2}}(a_n v_n)\|^2 + \rho_1\|i\lambda_n a_n v_n\|^2 \\ &= k|a_n\sigma_n^{\frac{1}{2}}|^2\|v_n\|^2 + \rho_1|\lambda_n a_n|^2\|v_n\|^2 \\ &= 2k\sigma_n|a_n|^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Tomando

$$|a_n|^2 = (2k\sigma_n)^{-1},$$

encontramos $\|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} \lambda_n^{-2}\|(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n\|_{\mathcal{H}}^2 &= \lambda_n^{-2}\left[\rho_1\|i\rho_1^{-1}\lambda_n\sigma_n^\alpha a_n v_n\|^2 + \rho_2\|k\rho_2^{-1}\sigma_n^{\frac{1}{2}}a_n v_n\|^2\right] \\ &= \lambda_n^{-2}\left[\rho_1^{-1}\lambda_n^2\sigma_n^{2\alpha} + k^2\rho_2^{-1}\sigma_n\right]|a_n|^2 \\ &= \left[\rho_1^{-1}\sigma_n^{2\alpha} + k\rho_1\rho_2^{-1}\right]|a_n|^2 \\ &= (2k\rho_1)^{-1}\sigma_n^{2\alpha-1} + \rho_1(2\rho_2)^{-1}\sigma_n^{-1}. \end{aligned}$$

Como $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\|\lambda_n^{-1}(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

Caso $\beta \in [0, \frac{1}{2})$, considere $a_n = 0$ e $\lambda_n^2 = b\rho_2^{-1}\sigma_n$. Então, de maneira análoga

$$(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n = \begin{pmatrix} 0 \\ k\rho_1^{-1}\sigma^{\frac{1}{2}}c_n v_n \\ 0 \\ [-\lambda_n^2\rho_2 + i\lambda_n\sigma_n^\beta + b\sigma_n + k]\rho_2^{-1}c_n v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k\rho_1^{-1}\sigma_n^{\frac{1}{2}}c_n v_n \\ 0 \\ [i\lambda_n\sigma_n^\beta + k]\rho_2^{-1}c_n v_n \end{pmatrix}.$$

Novamente, desejamos obter $(U_n) \in \mathcal{H}$ tal que $\|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1$, ou seja,

$$\begin{aligned} \|U_n\|_{\mathcal{H}}^2 &= [k\|c_n v_n\|^2 + b\|A^{\frac{1}{2}}(c_n v_n)\|^2 + \rho_2\|i\lambda_n c_n v_n\|^2] \\ &= [k + b\sigma_n + \rho_2\lambda_n^2]|c_n|^2 \\ &= [k + 2b\sigma_n]|c_n|^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Então, tomando

$$|c_n|^2 = (k + 2b\sigma_n)^{-1} \leqslant (2b\sigma_n)^{-1},$$

obtemos $\|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1$. Com isso, se $\beta \in [0, \frac{1}{2})$,

$$\begin{aligned} \lambda_n^{-2}\|(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n\|_{\mathcal{H}}^2 &= \lambda_n^{-2}\left[\rho_1\|k\rho_1^{-1}\sigma_n^{\frac{1}{2}}c_n v_n\|^2 + \rho_2\|(i\lambda_n\sigma_n^\beta + k)\rho_2^{-1}c_n v_n\|^2\right] \\ &= \lambda_n^{-2}\left[\rho_1^{-1}k^2\sigma_n + \rho_2^{-1}(\lambda_n^2\sigma_n^{2\beta} + k^2)\right]|c_n|^2 \\ &= \left[k^2\rho_2(b\rho_1)^{-1} + \rho_2^{-1}\sigma_n^{2\beta} + k^2 b^{-1}\sigma_n^{-1}\right]|c_n|^2 \\ &\leqslant k^2\rho_2(2b^2\rho_1)^{-1}\sigma_n^{-1} + (2b\rho_2)^{-1}\sigma_n^{2\beta-1} + k^2(2b^2)^{-1}\sigma_n^{-2}. \end{aligned}$$

De onde segue

$$\lim_{n\to\infty} \|\lambda_n^{-1}(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

□

4.6 Classe de Gevrey

Até então mostramos que a estabilidade polinomial é válida em $[-1, 1]$, porém a estabilidade exponencial e a analiticidade estão mais restritas. Nosso objetivo a seguir é verificar se o semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ admite propriedades adicionais quando é exponencialmente estável, porém não é analítico.

Para tanto, trabalharemos nas regiões

$$R_1 = \left\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \min\{\alpha, \beta\} \leqslant \tfrac{1}{3} \quad \text{e} \quad \alpha + \beta \leqslant 1\right\}$$

e

$$R_2 = \left[(0, 1] \times (0, 1]\right] \setminus \left[R_1 \cup \left([\tfrac{1}{2}, 1] \times [\tfrac{1}{2}, 1]\right)\right]$$

definidas como na Figura 1.5. Antes de mostrarmos a quais classes de Gevrey o semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ pertence, vamos demonstrar um Lema técnico que será fundamental para as futuras demonstrações.

Lema 4.28. *Sejam $u \in \mathrm{D}(A^{\frac{1}{2}})$ e $\gamma \in [0, \frac{1}{2}]$, então as seguintes desigualdades de interpolação são válidas:*

$$\|u\| \leqslant C\|A^{\frac{\gamma}{2}}u\|^{1-\gamma}\|A^{-\frac{1}{4}}u\|^{\gamma} \tag{4.40}$$

e

$$\|u\| \leqslant C\|A^{\frac{\gamma}{2}}u\|^{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}\|A^{\frac{\gamma-1}{4}}u\|^{\frac{2\gamma}{1+\gamma}}. \tag{4.41}$$

Demonstração. Como $A : \mathrm{D}(A) \subset H \to H$ é um operador auto-adjunto e positivo definido, o Corolário A.26 nos garante a seguinte interpolação: dados $0 \leqslant r \leqslant p \leqslant q$ e $u \in \mathrm{D}(A^q)$, segue que

$$\|A^p u\| \leqslant C\|A^q u\|^{\frac{p-r}{q-r}}\|A^r u\|^{\frac{q-p}{q-r}}. \tag{4.42}$$

Primeiro, note que escolhendo

$$r = 0, \quad p = \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{4}\right)(1-\gamma) \quad \text{e} \quad q = \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{4},$$

em que $p = q(1-\gamma)$, obtemos

$$\frac{p-r}{q-r} = \frac{q(1-\gamma)}{q} = 1-\gamma \quad \text{e} \quad \frac{q-p}{q-r} = \frac{q\gamma}{q} = \gamma$$

Então, por (4.42) segue que

$$\|u\| = \|A^p(A^{-p}u)\| \leqslant C\|A^{q-p}u\|^{1-\gamma}\|A^{-p}u\|^{\gamma}$$

Nestas condições

$$p = \frac{1}{4} + \frac{\gamma}{4}(1-\gamma) \geqslant \frac{1}{4}$$

e ainda, uma vez que $\gamma \leqslant \frac{1}{2}$, temos

$$q - p = \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\gamma}{4} \leqslant \frac{\gamma}{2}.$$

Portanto,

$$\|u\| \leqslant C\|A^{\frac{\gamma}{2}}u\|^{1-\gamma}\|A^{-\frac{1}{4}}u\|^{\gamma}.$$

Por outro lado, note que mostrar (4.41) é equivalente a provar que

$$\|A^{\frac{1}{4}}v\| \leqslant \|A^{\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{4}}v\|^{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}\|A^{\frac{\gamma}{4}}v\|^{\frac{2\gamma}{1+\gamma}},$$

com $v = A^{-\frac{1}{4}}u$. Assim, tome

$$r = \frac{\gamma}{4}, \ \ p = \frac{1}{4} \ \ \text{e} \ \ q = \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{4},$$

de modo que

$$\frac{p-r}{q-r} = \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \qquad \text{e} \qquad \frac{q-p}{q-r} = \frac{2\gamma}{1+\gamma}.$$

Logo, de (4.42) segue o desejado. □

Lema 4.29. *Seja* $U \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$ *solução da equação resolvente* (4.6)*. Se* $(\alpha, \beta) \in R_1 \cup R_2$*, então dado* $\varepsilon > 0$*, existe* $C_\varepsilon > 0$ *tal que*

$$\rho_1\|\tilde{\varphi}\|^2 + \rho_2\|\tilde{\psi}\|^2 \leqslant \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon|\lambda|^{-2\min\{\alpha,\beta\}}\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha que $\min\{\alpha, \beta\} = \alpha$. Multiplicando (4.8) por $A^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}$, temos

$$i\lambda\rho_1\|A^{-\frac{1}{4}}\tilde{\varphi}\|^2 + k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi, A^{-\frac{1}{4}}\tilde{\varphi}\rangle + \langle A^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{\varphi}, A^{\frac{\alpha-1}{2}}\tilde{\varphi}\rangle = \rho_1\langle f_2, A^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}\rangle.$$

O Teorema 4.16 e o Lema 4.8 nos garantem que

$$\|A^{-\frac{1}{4}}\tilde{\varphi}\|^2 \leqslant \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Logo, de (4.40) encontramos

$$\begin{aligned}
\rho_1\|\tilde{\varphi}\|^2 &\leqslant C\|A^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{\varphi}\|^{2(1-\alpha)}\|A^{-\frac{1}{4}}\tilde{\varphi}\|^{2\alpha} \\
&\leqslant C|\lambda|^{-\alpha}\big(\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\big)^{1-\alpha}\big(\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\big)^{\alpha} \\
&= C|\lambda|^{-\alpha}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\leqslant \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}} + C_\varepsilon|\lambda|^{-2\alpha}\|F\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Analogamente, multiplicando (4.10) por $A^{-\frac{1}{2}}\tilde{\psi}$, podemos concluir que

$$\|A^{-\frac{1}{4}}\tilde{\psi}\| \leqslant \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Como $\frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{\beta}{2}$, segue que

$$\rho_2\|\tilde{\psi}\|^2 \leqslant \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon|\lambda|^{-2\alpha}\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{4.44}$$

Portando, de (4.43) e (4.44) segue o desejado. $\square$

Veremos adiante que o Lema 4.29 nos garante que o semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ é de Gevrey de classe $\delta > \frac{1}{\min\{\alpha,\beta\}}$ em $R_1 \cup R_2$. Nosso objetivo é obter a estimativa

$$|\lambda|^{\tau(\alpha,\beta)}\|U\|_{\mathcal{H}} \leqslant C\|F\|_{\mathcal{H}},$$

onde $(i\lambda I - \mathcal{A})U = F$ e $\tau(\alpha,\beta) \in (0,1)$. Deste modo, podemos assumir sem perda de generalidade que $\|F\|_{\mathcal{H}} = 1$, uma vez que o objetivo final é obter uma estimativa para a norma do operador resolvente $(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lema 4.30. *Seja $U \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$ solução da equação resolvente* (4.6)*. Se $(\alpha,\beta) \in R_1$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$\rho_1\|\tilde{\varphi}\|^2 + \rho_2\|\tilde{\psi}\|^2 \leqslant \varepsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}} + C|\lambda|^{-4\min\{\alpha,\beta\}}\|F\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Demonstração. Suponha que $\min\{\alpha,\beta\} = \alpha$. Multiplicando (4.8) por $A^{\frac{\alpha-1}{2}}\tilde{\varphi}$, obtemos

$$i\lambda\rho_1\|A^{\frac{\alpha-1}{4}}\tilde{\varphi}\|^2 + k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi, A^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{\varphi}\rangle + \langle A^{\frac{3\alpha-1}{2}}\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}\rangle = \rho_1\langle f_2, A^{\frac{\alpha-1}{2}}\tilde{\varphi}\rangle.$$

Como $\frac{3\alpha-1}{2} \leqslant \frac{\alpha}{2}$ para $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, o Lema 4.8 nos garante que

$$\|A^{\frac{\alpha-1}{4}}\tilde{\varphi}\|^2 \leqslant \frac{C}{|\lambda|}\left[\|U\|^{\frac{3}{2}}_{\mathcal{H}}\|F\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{H}} + \|A^{\frac{\alpha-1}{2}}\tilde{\varphi}\|F\|\|\right].$$

Logo, usando (4.41), a Proposição 4.12, a Desigualdade de Young com

$$\frac{1+2\alpha}{2(1+\alpha)} + \frac{1}{2(1+\alpha)} = 1,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\rho_1\|\tilde{\varphi}\|^2 &\leqslant C\|A^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{\varphi}\|^{\frac{2(1-\alpha)}{1+\alpha}}\|A^{\frac{\alpha-1}{4}}\tilde{\varphi}\|^{\frac{4\alpha}{1+\alpha}} \\
&\leqslant C|\lambda|^{-\frac{2\alpha}{1+\alpha}}\left(\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\right)^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\left[\|U\|^{\frac{3\alpha}{1+\alpha}}_{\mathcal{H}} + \|A^{\frac{\alpha-1}{2}}\tilde{\varphi}\|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}\right] \\
&= C|\lambda|^{-\frac{2\alpha}{1+\alpha}}\left[\|U\|^{\frac{1+2\alpha}{1+\alpha}}_{\mathcal{H}} + \|U\|^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}_{\mathcal{H}}\|A^{\frac{\alpha-1}{2}}\tilde{\varphi}\|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}\right] \\
&\leqslant \varepsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}} + C|\lambda|^{-4\alpha}\|F\|^2_{\mathcal{H}} + C|\lambda|^{-\frac{2\alpha}{1+\alpha}}\|U\|^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}_{\mathcal{H}}\|A^{\frac{\alpha-1}{2}}\tilde{\varphi}\|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}. \qquad (4.45)
\end{aligned}$$

Agora, multiplicado (4.8) por $A^{\alpha-1}\tilde{\varphi}$, segue que

$$i\lambda\rho_1\|A^{\frac{\alpha-1}{2}}\tilde{\varphi}\|^2 + k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi, A^{\alpha-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}\rangle + \langle A^{2\alpha-1}\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}\rangle = \rho_1\langle f_2, A^{\alpha-1}\tilde{\varphi}\rangle.$$

De maneira análoga, encontramos

$$\|A^{\frac{\alpha-1}{2}}\tilde{\varphi}\|^2 \leqslant \frac{C}{|\lambda|}\left[\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \|A^{\alpha-1}\tilde{\varphi}\|\|F\|_{\mathcal{H}}\right].$$

Retornando em (4.45) e usando a Desigualdade de Young com

$$\frac{2+\alpha}{4(1+\alpha)} + \frac{2+3\alpha}{4(1+\alpha)} = 1,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\rho_1\|\tilde{\varphi}\|^2 &\leqslant \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C|\lambda|^{-4\alpha}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C|\lambda|^{-\frac{3\alpha}{1+\alpha}}\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\left[\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3\alpha}{2(1+\alpha)}} + \|A^{\alpha-1}\tilde{\varphi}\|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\right] \\
&= \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon|\lambda|^{-4\alpha}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C|\lambda|^{-\frac{3\alpha}{1+\alpha}}\left[\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{2+\alpha}{2(1+\alpha)}} + \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\|A^{\alpha-1}\tilde{\varphi}\|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\right] \\
&\leqslant \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon\left[|\lambda|^{-4\alpha} + |\lambda|^{-\frac{12\alpha}{2+3\alpha}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C|\lambda|^{-\frac{3\alpha}{1+\alpha}}\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\|A^{\alpha-1}\tilde{\varphi}\|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}. \quad (4.46)
\end{aligned}$$

Da equação (4.8), encontramos

$$i\lambda\rho_1 A^{\alpha-1}\tilde{\varphi} + kA^{\alpha-\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi) + A^{2\alpha-1}\tilde{\varphi} = \rho_1 A^{\alpha-1} f_2.$$

Assim,

$$\|A^{\alpha-1}\tilde{\varphi}\| \leqslant \frac{C}{|\lambda|}\big(\|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}\big).$$

Uma vez que

$$\frac{1}{2(1+\alpha)} + \frac{1+2\alpha}{2(1+\alpha)} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1-\alpha}{2(1+\alpha)} + \frac{1+3\alpha}{2(1+\alpha)} = 1,$$

de (4.46) obtemos

$$\begin{aligned}
\rho_1\|\tilde{\varphi}\|^2 &\leqslant \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon\left[|\lambda|^{-4\alpha} + |\lambda|^{-\frac{12\alpha}{2+3\alpha}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon|\lambda|^{-\frac{4\alpha}{1+\alpha}}\left[\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{1+\alpha}} + \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\right] \\
&\leqslant \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon\left[|\lambda|^{-4\alpha} + |\lambda|^{-\frac{12\alpha}{2+3\alpha}} + |\lambda|^{-\frac{8\alpha}{1+2\alpha}} + |\lambda|^{-\frac{8\alpha}{1+3\alpha}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Portanto, se $\alpha \leqslant \frac{1}{3}$, devemos ter

$$-\frac{8\alpha}{1+2\alpha} \leqslant -\frac{8\alpha}{1+3\alpha} \leqslant -\frac{12\alpha}{2+3\alpha} \leqslant -4\alpha.$$

De onde segue que

$$\rho_1\|\tilde{\varphi}\|^2 \leqslant \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C|\lambda|^{-4\alpha}\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (4.47)$$

De maneira análoga utilizando (4.9) e multiplicando por $A^{\frac{\alpha-1}{2}}\tilde{\psi}$, temos

$$i\lambda\rho_2\|A^{\frac{\alpha-1}{4}}\tilde{\psi}\|^2+b\langle A^{\frac{1}{2}}\psi,A^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{\psi}\rangle+k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi,A^{\frac{\alpha-1}{2}}\tilde{\psi}\rangle+\langle A^{\beta+\frac{\alpha-1}{2}}\tilde{\psi},\tilde{\psi}\rangle=\rho_2\langle f_4,A^{\frac{\alpha-1}{2}}\tilde{\psi}\rangle,$$

Multiplicando (4.10) por $A^{\alpha-1}\tilde{\psi}$, obtemos

$$i\lambda\rho_2\|A^{\frac{\alpha-1}{2}}\tilde{\psi}\|^2+b\langle A^{\frac{1}{2}}\psi,A^{\alpha-\frac{1}{2}}\tilde{\psi}\rangle+k\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi,A^{\alpha-1}\tilde{\psi}\rangle+\langle A^{\beta+\alpha-1}\tilde{\psi},\tilde{\psi}\rangle=\rho_2\langle f_4,A^{\alpha-1}\tilde{\psi}\rangle$$

e aplicando $A^{\alpha-1}$ em (4.10), segue que

$$i\lambda\rho_2A^{\alpha-1}\tilde{\psi}+bA^{\alpha-\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}\psi)+kA^{\alpha-1}(A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi)+A^{\alpha+\beta-1}\tilde{\psi}=\rho_2A^{\alpha-1}f_4.$$

Usando que $\alpha+\beta\leqslant 1$ e $\alpha\leqslant\beta$, obtemos as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned}\|A^{\frac{\alpha-1}{4}}\tilde{\psi}\|^2&\leqslant\frac{C}{|\lambda|}\left[\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}+\|A^{\frac{\alpha-1}{2}}\|\|F\|_{\mathcal{H}}\right],\\ \|A^{\frac{\alpha-1}{2}}\tilde{\psi}\|^2&\leqslant\frac{C}{|\lambda|}\left[\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}+\|A^{\alpha-1}\tilde{\psi}\|\|F\|_{\mathcal{H}}\right]\end{aligned}$$

e

$$\|A^{\alpha-1}\tilde{\psi}\|\leqslant\frac{C}{|\lambda|}\Big[\|U\|_{\mathcal{H}}+\|F\|_{\mathcal{H}}\Big].$$

Logo, de maneira análoga ao feito anteriormente, supondo que $\alpha\leqslant\frac{1}{3}$, encontramos

$$\|\tilde{\psi}\|^2\leqslant\varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2+C|\lambda|^{-4\alpha}\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{4.48}$$

Portando, de (4.47) e (4.48), temos o desejado. Caso $\min\{\alpha,\beta\}=\beta$, procedemos de maneira análoga. Deste modo, o resultado segue. □

Teorema 4.31. *O semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geqslant 0}$ é de Gevrey de classe $\delta>\frac{1}{\tau(\alpha,\beta)}$ em $R_1\cup R_2$, onde*

$$\tau(\alpha,\beta)=\begin{cases}2\min\{\alpha,\beta\}, & (\alpha,\beta)\in R_1\\ \min\{\alpha,\beta\}\ , & (\alpha,\beta)\in R_2.\end{cases}$$

Demonstração. O Lema 4.25 nos garante que

$$|\lambda|\left[k\|A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi\|^2+b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2\right]\leqslant|\lambda|\left[\rho_1\|\tilde{\varphi}\|^2+\rho_2\|\tilde{\psi}\|^2\right]+C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Usando a Desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}k\|A^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi\|^2+b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2&\leqslant\rho_1\|\tilde{\varphi}\|^2+\rho_2\|\tilde{\psi}\|^2+\frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\\ &\leqslant\rho_1\|\tilde{\varphi}\|^2+\rho_2\|\tilde{\psi}\|^2+\varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2+C_\varepsilon|\lambda|^{-2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2.\end{aligned}$$

Logo, dos lemas 4.29 e 4.30 e usando que $-2 \leqslant -2\tau(\alpha,\beta)$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno obtemos

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant C|\lambda|^{-2\tau(\alpha,\beta)}\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Do Teorema 1.8, temos o desejado. $\square$

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, estudamos as condições necessárias e suficientes para que um semigrupo seja exponencialmente estável ou analítico, sendo que essa caracterização depende diretamente do resolvente do operador que gera o semigrupo. Primeiro, demonstramos as condições necessárias para a estabilidade exponencial, começando com a definição de um semigrupo e sua relação com o operador resolvente do gerador. Em seguida, caracterizamos os semigrupos gerados por operadores setoriais, mostrando que esses devem ser analíticos, além das demais condições envolvendo o operador resolvente e operadores auto-adjuntos.

Por fim, esta teoria foi aplicada a um modelo do tipo Timoshenko abstrato com dissipação friccional dado a seguir:

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} + kA^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi) + A^{\alpha}\varphi_t &= 0, \\ \rho_2\psi_{tt} + bA\psi + k(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi) + A^{\beta}\psi_t &= 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Para este sistema, foi obtida estabilidade polinomial para toda a região estudada. Em relação à estabilidade exponencial, à classe de Gevrey e à analiticidade, as regiões dependem diretamente dos expoentes da dissipação fracionária.

Um ponto importante a ser ressaltado é que, quando um dos expoentes da dissipação fracionária é positivo e o outro é negativo, não há estabilidade exponencial. Por outro lado, quando um dos expoentes é igual a zero e o outro é negativo, a estabilidade é alcançada somente quando ocorre a igualdade das velocidades de ondas

$$\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}.$$

Isso demonstra que, embora possamos exigir maior regularidade de uma das dissipações, a presença de um expoente negativo impede a estabilidade exponencial.

Por fim, faremos um comparativo com os sistemas de Timoshenko abstratos utilizados como base para este trabalho e apresentados no Capítulo 1. Para o sistema termoelástico

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} + kA^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi) &= 0 \\ \rho_2\psi_{tt} + bA\psi + k(A^{\frac{1}{2}}\varphi + \psi) - \delta A^{\beta}\theta &= 0 \\ \rho_3\theta_t + cA\theta + \delta A^{\beta}\psi_t &= 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

proposto por [13], foram analisadas condições de existência de solução e estabilidade.

	Sistema (5.2)	Sistema (5.1)
Expoentes	$\beta \in \mathbb{R}$	$\alpha, \beta \in [-1, 1]$
Estabilidade Polinomial	$\beta \in [\frac{1}{2}, 1]$	$\alpha, \beta \in [-1, 1]$
Estabilidade Exponencial	$\beta = \frac{1}{2}$ e $\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$	$\alpha, \beta \in [0, 1]$ ou $\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$ e $(\alpha, \beta) \in \big(\{0\} \times [-1, 0)\big) \cup \big([-1, 0) \times \{0\}\big)$
Falta de Estabilidade Exponencial	Para os demais casos	Para os demais casos
Classe de Gevrey	Não Considerado	$\alpha, \beta \in (0, 1)$
Analiticidade	Não Considerado	$\alpha, \beta \in [\frac{1}{2}, 1]$
Falta de Analiticidade	Não Considerado	Demais Casos

Tabela 5.1: Comparação com o Modelo Proposto em [13]

Para o sistema com dissipação friccional

$$\begin{aligned} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + A^\alpha \varphi_t = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} + bA\psi + k(\varphi_x + \psi) + A^\beta \psi_t = 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

proposto por [35], foram estudadas condições de existência, estabilidade e regularidade de solução.

	Sistema (5.3)	Sistema (5.1)
Expoentes	$\alpha, \beta \in [0, 1]$	$\alpha, \beta \in [-1, 1]$
Est. Polinomial	Não Considerado	$\alpha, \beta \in [-1, 1]$
Est. Exponencial	$\alpha, \beta \in [0, 1]$	$\alpha, \beta \in [0, 1]$ ou $\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$ e $(\alpha, \beta) \in \big(\{0\} \times [-1, 0)\big) \cup \big([-1, 0) \times \{0\}\big)$
Falta de Est. Exponencial	Não Considerado	Demais Casos
Classe de Gevrey	$\alpha, \beta \in (0, 1)$	$\alpha, \beta \in (0, 1)$
Analiticidade	$\alpha, \beta \in [\frac{1}{2}, 1]$	$\alpha, \beta \in [\frac{1}{2}, 1]$
Falta de Analiticidade	Não Considerado	Demais Casos

Tabela 5.2: Comparação com o Modelo Proposto em [35]

Por fim, para os sistemas termoelásticos

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \mu_1 A^\alpha \varphi_t &= 0, \\ \rho_2\psi_{tt} + bA\psi + k(\varphi_x + \psi) + \eta\theta_{tx} + \mu_2 A^\beta \psi_t &= 0, \\ \rho_3\theta_{tt} + \delta A\theta + \eta\psi_{tx} + KA^\gamma \theta_t &= 0, \end{aligned} \tag{5.4}$$

e

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \mu\theta_{tx} + \mu_1 A^\alpha \varphi_t &= 0, \\ \rho_2\psi_{tt} + bA\psi + k(\varphi_x + \psi) - \mu\theta_t + \mu_2 A^\beta \psi_t &= 0, \\ \rho_3\theta_{tt} + \delta A\theta + \mu(\varphi_x + \psi)_t + \eta A^\gamma \theta_t &= 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

propostos por [24], foram estudadas condições de estabilidade e regularidade.

	Sistemas (5.4) e (5.5)	Sistema (5.1)
Expoentes	$\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$	$\alpha, \beta \in [-1, 1]$
Est. Polinomial	Não Considerado	$\alpha, \beta \in [-1, 1]$
Est. Exponencial	$\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$	$\alpha, \beta \in [0, 1]$ ou $\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$ e $(\alpha, \beta) \in \big(\{0\} \times [-1, 0)\big) \cup \big([-1, 0) \times \{0\}\big)$
Falta de Est. Exponencial	Não Considerado	Demais Casos
Classe de Gevrey	$\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$	$\alpha, \beta \in (0, 1)$
Analiticidade	$\alpha, \beta, \gamma \in [\frac{1}{2}, 1]$ com $\beta = \gamma$ para (5.5)	$\alpha, \beta \in [\frac{1}{2}, 1]$
Falta de Analiticidade	Não Considerado	Demais Casos

Tabela 5.3: Comparação com o Modelo Proposto em [24]

A RESULTADOS AUXILIARES

Nosso objetivo neste apêndice é enunciar os principais pré-requisitos utilizados neste trabalho, mais especificamente, iremos expor alguns dos resultados de teoria espectral, semigrupos lineares e potências fracionárias de operadores que fundamentam a teoria desenvolvida nas demais seções.

A.1 Espectro e Resolvente

Definição A.1. *Seja $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ um operador linear densamente definido, com X espaço de Banach. Dizemos que λ está no resolvente de A se*

(i) $(\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda, A)$ *existe;*

(ii) $R(\lambda, A)$ *é limitado;*

(iii) $R(\lambda, A)$ *é densamente definido.*

Neste caso, denotamos o resolvente do operador A como sendo $\varrho(A)$ e seu espectro será denotado por $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \varrho(A)$.

Teorema A.2. *Se $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ é um operador linear densamente definido, então*

(a) $\varrho(A)$ *é aberto e* $\sigma(A)$ *é fechado;*

(b) *Se A é limitado, então $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(X)}\}$;*

(c) *Se A é fechado ou limitado, então $\mathrm{D}(R(\lambda, A)) = X$.*

Demonstração. Ver [18], Lema 7.2-3 e teoremas 7.3-2 e 7.3-4, páginas 373-377. □

Teorema A.3. *Sejam X um espaço de Banach e $A : X \to X$ um operador linear limitado. Se $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$, então $(I - A)$ é inversível, com*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^n \quad e \quad \|(I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{1}{1 - \|A\|_{\mathcal{L}(X)}}.$$

Demonstração. Ver [18], Teorema 7.3-1, página 375. □

Definição A.4. *Seja $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ um operador densamente definido. A cota superior do espectro de A é o valor*

$$w_\sigma(A) = \sup\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

O raio espectral do operador A, denotado por $R_\sigma(A)$, é o raio da menor bola centrada na origem que contém o resolvente do operador A.

Teorema A.5. *Seja $A : X \to X$ um operador linear limitado. Então,*

$$R_\sigma(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{1/n}.$$

Demonstração. Ver [18], Teorema 7.5-5, página 391. $\square$

Proposição A.6. *Sejam X um espaço de Banach e $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ um operador linear densamente definido. Então, $\lambda \mapsto \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é analítica em $\varrho(A)$ e vale que*

$$R(\mu, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n R(\lambda, A)^{n+1},$$

para qualquer $\mu \in \mathbb{C}$ tal que

$$|\mu - \lambda| < \frac{1}{\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)}}.$$

Demonstração. Ver [42], Teorema 1, página 211. $\square$

Lema A.7. *Seja X um espaço de Banach e $A : X \to X$ um operador linear, limitado e com inversa limitada. Se existe $T : X \to X$ limitado tal que*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{1}{\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}},$$

então $A + T$ é linear, contínuo e inversível, em que $A + T$ é sobrejetor.

Demonstração. Note que $A + T$ é linear. Tome $u \in X$ tal que $(A + T)u = 0$. Assim, obtemos

$$u + A^{-1}Tu = 0$$

e então

$$u = -A^{-1}Tu.$$

Por hipótese, caso $u \neq 0$, temos

$$\|u\| \leqslant \|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \|T\|_{\mathcal{L}(X)} \|u\| < \|u\|,$$

um absurdo. Logo, $u = 0$ de onde segue que $A + T$ é injetor.

Agora, seja $u_0 \in Y$ fixado. Como A é sobrejetora, considere a aplicação

$$\begin{aligned} F : X &\longrightarrow X \\ u &\longmapsto F(x) = A^{-1}u_0 - A^{-1}Tu. \end{aligned}$$

Note que F é tal que

$$\begin{aligned}\|F(u)-F(x)\| &= \|A^{-1}Tx - A^{-1}Tu\| \\ &\leqslant \|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\|T\|_{\mathcal{L}(X)}\|u-x\|,\end{aligned}$$

em que $\|A^{-1}\|\|T\| < 1$, então F é uma contração. Como X completo, segue do Teorema do Ponto Fixo de Banach que existe um único $u \in X$ tal que $F(u) = u$, então

$$A^{-1}u_0 - A^{-1}Tu = u,$$

ou ainda

$$u_0 = Au + Tu.$$

Logo, $A + T$ é sobrejetor. Portanto, como A e T são limitados, temos o desejado. $\square$

Lema A.8. *Seja $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado e densamente definido no espaço de Banach X. Suponha que $0 \in \varrho(A)$ e $i\mathbb{R} \not\subset \varrho(A)$, então deve existir $w \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}} \leqslant |w| < \infty, \quad \{i\lambda : |\lambda| < |w|\} \subset \varrho(A) \quad e \quad \sup_{|\lambda|<|w|} \|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \infty.$$

Além disso, se $w_0 \in \mathbb{R}$ é tal que $|w_0| < |w|$, então

$$\sup_{|\lambda|\leqslant|w_0|} \|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty.$$

Demonstração. Primeiro, como $0 \in \varrho(A)$, podemos escrever

$$(i\lambda I - A) = A(i\lambda A^{-1} - I).$$

Assim, se

$$|\lambda| < \frac{1}{\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}},$$

o Lema A.7 nos garante que $(i\lambda A^{-1} - I)$ existe, é limitado e densamente definido. Logo,

$$\left\{ i\lambda : |\lambda| < \frac{1}{\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}} \right\} \subset \varrho(A).$$

Deste modo, como $i\mathbb{R} \not\subset \varrho(A)$, existe $w \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}} \leqslant |w|,$$

com

$$w \notin \varrho(A), \quad \{i\lambda : |\lambda| < |w|\} \subset \varrho(A) \quad \text{e} \quad \{i\lambda : |\lambda| \leqslant |w|\} \not\subset \varrho(A).$$

Suponha que

$$\sup_{|\lambda|<|w|} \|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = M < \infty.$$

Para $\lambda_0 \in \varrho(A)$, podemos escrever

$$(i\lambda I - A) = (i\lambda_0 I - A)[I + i(\lambda - \lambda_0)(i\lambda_0 I - A)^{-1}].$$

O Teorema A.3 nos garante que a inversa existe e é limitada para

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{M},$$

pois

$$\|i(\lambda - \lambda_0)(i\lambda_0 I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant |\lambda - \lambda_0| \|(i\lambda_0 I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < M^{-1}M = 1.$$

Caso $w > 0$, em particular se $\lambda = w$ e $\lambda_0 = w - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$|\lambda_0 - \lambda| = \frac{1}{n} < \frac{1}{M}$$

para n suficientemente grande, um absurdo, pois neste caso $w \in \varrho(A)$. Caso $w < 0$, basta considerarmos $\lambda_0 = w + \frac{1}{n}$ e de maneira análoga obtemos um absurdo. Logo, devemos ter

$$\sup_{|\lambda|<|w|} \|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \infty.$$

Agora, seja $|w_0| < |w|$. Segue que

$$\{i\lambda : |\lambda| \leqslant |w_0|\} \subset \varrho(A)$$

sendo este conjunto um compacto e $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ contínua em $\varrho(A)$, segue que

$$\sup_{|\lambda|\leqslant|w_0|} \|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty.$$

□

Lema A.9. *Seja A um operador fechado e densamente definido no espaço de Banach X, tal que $0 \in \varrho(A)$. Se $i\mathbb{R} \not\subset \varrho(A)$, então existe $w \in \mathbb{R}^*$ tal que podemos encontrar $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$, $(u_n) \subset \mathrm{D}(A)$ e $(f_n) \in X$ de modo que*

$$\lambda_n \longrightarrow w, \quad \|u_n\| = 1 \quad e \quad f_n = (i\lambda_n I - A)u_n \longrightarrow 0.$$

Demonstração. Segue do Lema A.8 que existe $w \in \mathbb{R}^*$ tal que para qualquer $n \in \mathbb{N}$

$$\left\{ i\lambda : |\lambda| \leqslant |w| - \frac{1}{n} \right\} \subset \varrho(A) \quad \text{e} \quad \sup_{|\lambda| \leqslant |w| - \frac{1}{n}} \|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty.$$

Além disso, o mesmo Lema nos garante que podemos obter uma sequência $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ com

$$|w| - \frac{1}{n} < |\lambda_n| < |w| \quad \text{e} \quad \|(i\lambda_n I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \geqslant n.$$

Sendo (λ_n) limitada, existe uma subsequência (que ainda será denotada por (λ_n)) que converge para w ou $-w$. Sem perda de generalidade, suponha que $\lambda_n \to w$, em que

$$|\lambda_n| < |w| \quad \text{e} \quad \|(i\lambda_n I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \geqslant n.$$

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $v_n \subset X \setminus \{0\}$ tal que

$$\|v_n\| = 1 \quad \text{e} \quad \|(i\lambda_n I - A)^{-1} v_n\| \geqslant n.$$

Tomando

$$u_n = \frac{(i\lambda_n I - A)^{-1} v_n}{\|(i\lambda_n I - A)^{-1} v_n\|} \quad \text{e} \quad f_n = \frac{v_n}{\|(i\lambda_n I - A)^{-1} v_n\|},$$

obtemos

$$\|u_n\| = 1 \quad \text{e} \quad \|f_n\| \leqslant \frac{1}{n} \to 0,$$

em que $\lambda_n \to w$ e $f_n = (i\lambda_n I - A)u_n$. □

A.2 SEMIGRUPOS LINEARES

Definição A.10. *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que uma família $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ de operadores $S : [0, \infty) \to \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo linear se:*

(i) $S(0) = I$;

(ii) $S(t + r) = S(t)S(r)$, *para* $t, r \geqslant 0$.

Adicionalmente, temos que:

(iii) *Se* $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant 1$, *dizemos que este semigrupo é de contrações;*

(iv) *Se para cada $u \in X$ temos $\lim_{t \to 0^+} \|S(t)u - u\| = 0$, dizemos que este é um C_0-semigrupo.*

Cada semigrupo está ligado a um operador linear chamado de gerador do semigrupo. Este operador é dado da seguinte forma: Defina o conjunto

$$\mathrm{D}(A) = \left\{ u \in X : \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)u - u}{h} \ \text{existe} \right\},$$

então o gerador infinitesimal do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é o operador $A : \mathrm{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ dado por

$$Au = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)u - u}{h}, \ \ u \in \mathrm{D}(A).$$

Proposição A.11. *Sejam X um espaço de Banach e $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Então, A é fechado e densamente definido, mais ainda para cada $u \in \mathrm{D}(A)$, $S(t)u \in \mathrm{D}(A)$ e vale que*

$$\frac{d}{dt}S(t)u = Au.$$

Demonstração. Ver [20], lemas 2.1.1, 2.1.2 e 2.1.2, páginas 24-26. □

Proposição A.12. *Sejam X um espaço de Banach e $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ e $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ dois C_0-semigrupos gerados por A. Então, $S(t) = T(t)$, para todo $t \geqslant 0$.*

Demonstração. Seja $u \in \mathrm{D}(A)$. Sabemos que $S(t)u$ e $T(t)u$ são deriváveis, então fixado $t > 0$ qualquer

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(T(t-s)S(s)u) &= -AT(t-s)S(s)u + T(t-s)AS(s)u \\ &= T(t-s)AS(s)u - T(t-s)AS(s)u \\ &= 0, \ \forall s \in [0,t].\end{aligned}$$

Logo, a aplicação $s \mapsto T(t-s)S(s)u$ é constante, em particular,

$$T(t)u = T(t-0)S(0)u = T(t-t)S(t)u = S(t)u, \ \forall t \geqslant 0.$$

Então, $T(t) = S(t)$ em $\mathrm{D}(A)$. Como $\overline{\mathrm{D}(A)} = X$ e $S(t)$ e $T(t)$ são operadores limitados, segue que $T(t)u = S(t)u$ para todo $u \in X$. □

Teorema A.13 (Hille-Yosida)**.** *Sejam X um espaço de Banach e $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ um operador Linear. Então, A gera um C_0-semigrupo se, e somente se, as seguintes condições são válidas:*

(i) *A é fechado e densamente definido;*

(ii) *Existem $M \geqslant 1$ e $w \in \mathbb{R}$ tais que, se $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}\lambda > w$, então $\lambda \in \varrho(A)$ e*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - w}.$$

Neste caso, temos que $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{wt}, \ t \geqslant 0$ e para $\lambda \in \varrho(A)$

$$R(\lambda, A)x \equiv (\lambda I - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt, \ \ x \in X.$$

Demonstração. Ver [14], Corolário 3.6, página 76. □

Teorema A.14 (Hille-Yosida para Contrações)**.** *Sejam X um espaço de Banach e considere $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ um operador linear. Então, A gera um C_0-semigrupo de contrações se, e somente se, as seguintes condições são válidas:*

(a) *A é fechado e densamente definido;*

(b) *Se $\lambda > 0$, então $\lambda \in \varrho(A)$ e*

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração. Ver [20], Teorema 2.2.1, página 27. □

Corolário A.15. *Sejam X um espaço de Banach e $A : \mathrm{D}(A) \subset X$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações. Então, dado $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}\lambda > 0$, temos que $\lambda \in \varrho(A)$ e*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}.$$

Demonstração. Ver [30], Teorema 5.3 e Observação 5.4, página 20. □

Podemos obter alguns condições mais simples para verificar quando um operador A gera um semigrupo. Para isso, precisamos do conceito de operadores dissipativos:

Definição A.16. *Sejam X um espaço de Banach e $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ um operador linear. Dizemos que A é dissipativo se, para $\lambda > 0$, temos*

$$\lambda\|u\| \leqslant \|(\lambda I - A)u\|, \ \forall u \in \mathrm{D}(A).$$

De maneira equivalente, podemos mostrar que se H é um espaço de Hilbert, A é dissipativo se, e somente se, $\operatorname{Re}\langle Au, u\rangle \leqslant 0$, para todo $u \in \mathrm{D}(A)$. Com efeito, dados $u \in \mathrm{D}(A)$ e $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \lambda^2\|u\|^2 &\leqslant \|(\lambda I - A)u\|^2 \\ &= \lambda^2\|u\|^2 - \lambda\langle u, Au\rangle - \lambda\langle Au, u\rangle + \|Au\|^2 \\ &= \lambda^2\|u\|^2 - 2\lambda\operatorname{Re}\langle Au, u\rangle + \|Au\|^2 \end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\operatorname{Re}\langle Au, u\rangle \leqslant \frac{1}{2\lambda}\|Au\|^2.$$

Então, fixando $x \in \mathrm{D}(A)$ e fazendo $\lambda \to \infty$, temos que $\operatorname{Re}\langle Au, u\rangle \leqslant 0$. Reciprocamente, caso $u \in \mathrm{D}(A)$, uma vez que $\operatorname{Re}\langle Au, u\rangle \leqslant 0$, para $\lambda > 0$ temos

$$\lambda\|u\|^2 = \langle u, \lambda u\rangle \leqslant \langle u, \lambda u\rangle - \operatorname{Re}\langle Au, u\rangle = \operatorname{Re}\langle u, \lambda u\rangle + \operatorname{Re}\langle u, -Au\rangle,$$

então pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\lambda\|u\|^2 \leqslant \operatorname{Re}\langle u, \lambda u - Au\rangle \leqslant |\operatorname{Re}\langle u, \lambda u - Au\rangle| \leqslant \|u\|\|\lambda u - Au\|,$$

de onde segue o desejado.

Teorema A.17 (Lumer-Phillips). *Sejam X um espaço de Banach e $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ um operador linear densamente definido.*

(a) *Se A é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que $\lambda_0 I - A$ é sobrejetivo, então A gera um C_0-semigrupo de contrações.*

(b) *Se A gera um C_0-semigrupo de contrações, então A é dissipativo e $\lambda I - A$ é sobrejetivo para qualquer $\lambda > 0$.*

Demonstração. Ver [26], Teorema 2.12.2, página 88. □

Teorema A.18. *Sejam X um espaço de Banach e $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ um operador linear dissipativo com domínio denso. Se $0 \in \varrho(A)$, então A gera um C_0-semigrupo de contrações.*

Demonstração. Como A é inversível, podemos escrever

$$\lambda I - A = A(\lambda A^{-1} - I).$$

Logo, tomando $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} < |\lambda|$, temos que

$$\frac{1}{\|(\lambda A^{-1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}} = \frac{|\lambda|}{\|A\|_{\mathcal{L}(X)}} > 1 = \|-I\|,$$

então segue do Lema A.7 que $(\lambda A^{-1} - I)$ é inversível, de onde segue que existe $(\lambda I - A)^{-1}$. Portanto, segue do Teorema de Lumer-Phillips que A gera um C_0-semigrupo de contrações. □

O próximo resultado de caracterização de geradores de semigrupos será o Teorema de Stone. Para este teorema, precisaremos da definição de uma família de grupos lineares, que é dada de maneira similar aos semigrupos.

Definição A.19. *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que uma família $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ de operadores $S : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(X)$ é um grupo de operadores lineares se:*

(i) $S(0) = I$;

(ii) $S(t + r) = S(t)S(r)$, *para* $t, r \in \mathbb{R}$.

Adicionalmente, se para cada $u \in X$ temos $\lim\limits_{t\to 0} \|S(t)u - u\| = 0$, dizemos que este grupo é de classe C_0.

De maneira equivalente, podemos definir o gerador infinitesimal de um grupo $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ como sendo

$$Au = \lim_{h\to 0} \frac{S(h)u - u}{h}, \ u \in \mathrm{D}(A),$$

em que $\mathrm{D}(A)$ é o conjunto dos pontos de X tais que este limite existe.

Antes de enunciarmos o teorema que caracteriza os geradores de grupos lineares, vale ressaltar que um operador limitado $T : X \to X$ é unitário caso

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X)} = 1.$$

Por definição, um grupo $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é unitário caso

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 1, \ \forall t \geqslant 0.$$

Teorema A.20 (Stone)**.** *Um operador $A : \mathrm{D}(A) \subset H \to H$ gera um C_0-grupo de operadores unitários no espaço de Hilbert H se, e somente se, iA é auto-adjunto.*

Demonstração. Ver [30], Teorema 10.8, página 41. □

Seja X um espaço de Banach e considere $\mathcal{L}(X)$ o espaço dos operadores limitados em X e $\mathcal{K}(X)$ o espaço dos operadores compactos definidos em X. Podemos definir o espaço quociente $\mathcal{C}(X) = \mathcal{L}(X) \setminus \mathcal{K}(X)$, chamada de álgebra de Calkin e munida com a aplicação de identificação

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} : \mathcal{L}(X) &\longrightarrow \mathcal{C}(X) \\ T \quad &\longmapsto \mathcal{Q}(T) = T + \mathcal{K}(X) = \tilde{T}, \end{aligned}$$

com

$$T + \mathcal{K}(X) = \{T + K : K \in \mathcal{K}(X)\}.$$

Deste modo, para $T \in \mathcal{L}(X)$, temos que a norma essencial de T é dada por

$$\|\tilde{T}\|_{\mathcal{C}(X)} = \inf\{\|T - K\|_{\mathcal{L}(X)} : K \in \mathcal{K}(X)\} = \|T\|_{ess}.$$

Nestas condições, definimos o espetro essencial como sendo

$$\sigma_{ess}(T) = \sigma(\tilde{T}),$$

em que o espectro de $\tilde{T}$ é definido na álgebra $\mathcal{C}(X)$.

Definição A.21. *Sejam X um espaço de Banach e $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal* *do C_0-semigrupo $S(t)$. O tipo essencial do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ é dado por*

$$w_{ess}(A) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \|S(t)\|_{ess}}{t}$$

Proposição A.22. *Sejam X um espaço de Banach e $A : \mathrm{D}(A) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Então,*

$$w_0(A) = \max\{w_{ess}(A), w_\sigma(A)\}.$$

Demonstração. Ver [14], Corolário 2.11, página 258. □

A.3 Potências Fracionárias de Operadores

Sejam H um espaço de Hilbert e $A : \mathrm{D}(A) \subset H \to H$ um operador fechado, densamente definido e suponha que existe $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ tal que

$$\Sigma_\delta = \{\lambda \in \mathbb{C} : \delta < |\operatorname{Arg}\lambda| < \pi\} \cup \{0\} \subset \varrho(A),$$

de modo que existe $M > 0$ que satisfaz

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant \frac{M}{|\lambda|},\ \forall \lambda \in \Sigma_\delta \setminus \{0\}.$$

Nestas condições, devemos ter que

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg}\lambda| \leqslant \delta\} \subset \mathbb{C}_+.$$

Assim, o Teorema 3.6 nos garante que o operador $-A$ gera um semigrupo analítico, dado por

$$S(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\lambda t}(\lambda I + A)^{-1} d\lambda,\ t > 0,$$

com γ sendo uma curva contida em

$$-\Sigma_\delta = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg}\lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \cup \{0\} \subset \rho(-A),$$

indo de $-\infty e^{-i\theta}$ até $\infty e^{i\theta}$, com $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} + \delta$. Então, para $\alpha > 0$ podemos definir

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1} S(t) dt,$$

em que $\Gamma(\cdot)$ é a função gama dada por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt,\ \alpha > 0.$$

Este operador satisfaz:

Propriedade A.23. *Seja* $A : \mathrm{D}(A) \subset H \to H$ *um operador linear tal que* $A^{-\alpha}$ *está bem definido. Então, para* $\alpha, \beta > 0$*, segue que*

(i) $A^{-\alpha}A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}$;

(ii) $A^{-\alpha}$ *é um operador limitado;*

(iii) $A^{-\alpha}$ *é injetivo.*

Demonstração. Ver [30], lemas 6.2, 6.3 e 6.6, páginas 70-72. □

Deste modo, podemos definir o operador

$$A^{\alpha} = (A^{-\alpha})^{-1},$$

em que $\mathrm{D}(A^{\alpha}) = \mathrm{Im}(A^{-\alpha})$, $\alpha > 0$ e $A^0 = I$. Para este operador A^{α}, temos:

Proposição A.24. *Seja* $A : \mathrm{D}(A) \subset H \to H$ *um operador linear tal que* A^{α} *está bem definido. Então:*

(a) A^{α} *é fechado e densamente definido, para qualquer* $\alpha > 0$*;*

(b) *Se* $\alpha \geqslant \beta$*, então* $\mathrm{D}(A^{\alpha}) \subset \mathrm{D}(A^{\beta})$*;*

(c) $A^{\alpha}A^{\beta} = A^{\beta}A^{\alpha} = A^{\alpha+\beta}$ *em* $\mathrm{D}(A^{\gamma})$*, com* $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha+\beta\}$*;*

(d) $A^{\alpha}S(t) = S(t)A^{\alpha}$ *em* $\mathrm{D}(A^{\alpha})$.

Demonstração. Ver [30], Teorema 6.8, página 72. □

Teorema A.25. *Se* $\theta = \eta\xi + (1-\xi)\gamma$*, com* $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ *e* $\eta, \gamma \geqslant 0$*, então existe* $C > 0$ *tal que*

$$\|A^{\theta}x\| \leqslant C\|A^{\eta}x\|^{\xi}\|A^{\gamma}x\|^{1-\xi}.$$

Demonstração. Ver [33], Corolário 1.3.1, página 50. □

Corolário A.26. *Sejam* $0 \leqslant r \leqslant p \leqslant q$ *e* $u \in \mathrm{D}(A^q)$*. Então*

$$\|A^p u\| \leqslant C\|A^q u\|^{\frac{p-r}{q-r}}\|A^r u\|^{\frac{q-p}{q-r}}.$$

Demonstração. Tomando

$$\theta = p, \quad \eta = q \quad \text{e} \quad \gamma = r,$$

temos o Teorema A.25 nos garante que

$$\|A^p u\| \leqslant C\|A^q u\|^{\xi}\|A^r u\|^{1-\xi},$$

em que

$$\xi = \frac{p-r}{q-r} \quad \text{e} \quad 1-\xi = \frac{q-p}{q-r}.$$

O que garante a estimativa desejada. $\square$

Teorema A.27. $\mathrm{D}(A^\alpha) \hookrightarrow \mathrm{D}(A^\beta)$ *continuamente para* $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Demonstração. A Proposição A.24 nos garante que $\mathrm{D}(A^\beta) \subset \mathrm{D}(A^\alpha)$, com

$$\alpha = \beta + r, \quad r \in [0,1].$$

Deste modo, seja $u \in \mathrm{D}(A^\beta)$, então

$$\|A^\beta u\| = \|A^{\alpha-r}u\| = \|A^{-r}(A^\alpha u)\|.$$

Como A^{-r} é limitado, segue que

$$\|A^\beta u\| \leqslant C\|A^\alpha u\|.$$

$\square$

Teorema A.28. *Seja* $A : \mathrm{D}(A) \subset H \to H$ *tal que* A^α *está bem definido. Se* A *é auto-adjunto, então* A^α *também será auto-adjunto, para qualquer* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Caso $\alpha = 0$, nada há de se provar. Se $\alpha > 0$, o resultado segue direto de [23], Exemplo 3.3.2, página 70 e Corolário 5.1.12 (ii), página 110.

Por outro lado, note que

$$\langle A^{-\alpha}u, u\rangle = \langle A^{-\alpha}u, A^\alpha(A^{-\alpha}u)\rangle = \langle u, A^{-\alpha}u\rangle,$$

então $A^{-\alpha}$ também é auto-adjunto. Portanto, segue o desejado. $\square$

Corolário A.29. *Seja* $A : \mathrm{D}(A) \subset H \to H$ *um operador auto-adjunto tal que* A^α *está bem definido, com* $\alpha \geqslant 0$*. Então, se* $\lambda \in \sigma(A)$*, temos* $\lambda^\alpha \in \sigma(A^\alpha)$ *e*

$$A^\alpha u = \lambda^\alpha u,$$

em que $u \in \mathrm{D}(A^\alpha)$ *é o autovetor associado a* λ*. Mais ainda, temos que*

$$A^{-\alpha}u = \lambda^{-\alpha}u.$$

Demonstração. Caso $\alpha > 0$, o resultado segue de [23], Proposição 3.1.2, página 59. Por outro lado, note que se $A^\alpha u = \lambda^\alpha u$, então

$$u = \lambda^\alpha A^{-\alpha} u,$$

ou ainda

$$A^{-\alpha} u = \lambda^{-\alpha} u.$$

Portanto, segue o resultado. $\square$

Proposição A.30. *Se A^{-1} é compacto, então A^{-r} é compacto para qualquer $r > 0$.*

Demonstração. Seja $(x_n) \subset H$ uma sequência limitada. Como A^{-1} é compacto, existe uma subsequência de (x_n), que também será denotada por (x_n), tal que

$$A^{-1} x_n \to y \in H.$$

Assim, caso $r > 1$, note que

$$-r = -1 - \delta,$$

com $\delta > 0$, de onde segue que

$$A^{-r} x_n = A^{-\delta}(A^{-1} x_n) \longrightarrow A^{-\delta} y,$$

pois $A^{-\delta}$ é limitado.

Caso $0 < r < 1$, considere

$$\beta = 1 + r, \quad \gamma = r \quad \text{e} \quad \theta = 1 - r,$$

de modo que

$$(1 + r)(1 - r) + (1 - (1 - r))r = 1 - r^2 + r^2 = 1,$$

então vale a interpolação

$$\begin{aligned} \|A^{-r} x_n\| &= \|A(A^{-r-1} x_n)\| \\ &\leqslant \|A^{1+r}(A^{-r-1} x_n)\|^{1-r} \|A^r(A^{-r-1} x_n)\|^r \\ &= \|x_n\|^{1-r} \|A^{-1} x_n\|^r \\ &\leqslant C \|A^{-1} x_n\|^r, \end{aligned}$$

em que $C > 0$ é uma constante que limita $\|x_n\|^{1-r}$ e que existe, pois (x_n) é limitada. Logo,

$$\|A^{-r} x_n - A^{-r} x_m\| \leqslant C \|A^{-1} x_n - A^{-1} x_m\|^r,$$

então como $(A^{-1}x_n)$ converge, esta sequência é de Cauchy e o mesmo vale para $(A^{-r}x_n)$. Uma vez que H é um espaço de Hilbert, segue que $(A^{-r}x_n)$ converge.

Portanto, A^{-r} é compacto. $\square$

REFERÊNCIAS

[1] ALABAU-BOUSSOUIRA, F. *Asymptotic behavior for Timoshenko beams subject to a single nonlinear feedback control*, Nonlinear Differ. Equ. Appl., 14 (2007) 643-669.

[2] ALMEIDA JÚNIOR, D. S.; SANTOS, M. L.; MUÑOZ RIVERA, J. E. *Stability to weakly dissipative Timoshenko systems*. Math. Meth. Appl. Sci., 36 (2013) 1965-1976.

[3] ALVES, M. S.; MUÑOZ RIVERA, J. E.; SEPÚLVEDA, M.; VILLAGRÁN, O. P. R. *Analyticity of Semigroups Associated with Thermoviscoelastic Mixtures of Solids*, 32 (2006), 986-1004.

[4] AMMARI, K.; SHEL, F.; TEBOU, L. *Regularity and stability of the semigroup associated with some interacting elastic systems I: a degenerate damping case*, J. Evol. Equ., 21 (2021) 4973-5002.

[5] AMMAR-KHODJA, F.; KERBAL, S.; SOUFYANE, A. *Stabilization of the nonuniform Timoshenko beam*, J. Appl. Math. Anal. Appl., 1 (2007) 525-538.

[6] BALAKRISHAN, A. V. *Fractional Powers of Closed Operators and the Semigroups Generated by them.* Pacific Journal of Mathematics, 1960.

[7] BORICHEV, A.; TOMILOV, Y. *Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups*. Math. Ann. (2010) 347:455–478.

[8] BREZIS H. Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. New York: Springer, 2010.

[9] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; FALCÃO NASCIMENTO, F. A.; LASIECKA, I.; RODRIGUES, J.H. *Uniform decay rates for the energy of Timoshenko system with the arbitrary speeds of propagation and localized nonlinear damping*, Z. Angew. Math. Phys., 65 (2014) 1189-1206.

[10] CHENG, S. P.; TRIGGIANI, R. *Gevrey class semigroups arising from elastic systems with gentle dissipation: the case* $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, Proc. Am. Math. Soc., 110 (1990) 401-415.

[11] CHEN, S. P.; TRIGGIANNI, R. *Proof of extensions of two conjectures on structural damping for elastic systems*, Pacific J. Math., 136 (1989) 15-55.

[12] CONWAY, J. B. A Course in Functional Analysis. Springer, 1990.

[13] DANESE, V.; DELL'ORO, F.; PATA, V. *Stability analysis of abstract systems of Timoshenko type*, J. Evol. Equ., 16 (2016) 587-615.

[14] ENGEL, K. J.; NAGEL R. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. Springer, 2006.

[15] FERNÁNDEZ SARE, H. D.; LIU, Z.; RACKE, R. *Stability of abstract thermoelastic systems with inertial terms*, J. Differ. Equ., 12 (2019) 7085-7134(2019).

[16] HENRY, D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. Springer, 1980.

[17] HYTONEN, T.; NEERVEN, J.; VERAAR, M.; WEIS, L. Analysis in Banach Spaces, Vol. 1. Springer, 2016.

[18] KREYSZIG, E. Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley & Sons, 1978.

[19] KUANG, Z.; LIU, Z.; FERNÁNDEZ SARE, H. D. *Regularity Analysis for an Abstract Thermoelastic System with Inertial Term*, ESAIM: COCV 27 (2021) S24.

[20] LIU, Z.; ZHENG, S. Semigroups Associated with Dissipative Systems. Chapman & Hall/CRC, 1999.

[21] LIU, Z.; ZHANG, Q. *Stability and Regularity of Solution to the Timoshenko Beam Equation with Local Kelvin-Voigt Damping*, SIAM J. Control Optim., 6 (2018) 3919-3947.

[22] MALACARNE, A.; MUÑOZ RIVERA, J. E. *Lack of exponential stability to Timoshenko system with viscoelastic Kelvin–Voigt type*, Z. Angew. Math. Phys., 67 (2016) 1-10.

[23] MARTINEZ, C.; SANZ, M. The theory of fractional powers of operators. North-Holland Mathematics Studies, Volume 187, 2000.

[24] MENDES, F. B. R.; SOBRADO, L. D. B.; SUÁREZ, F. M. S. *Regularity to Timoshenko's System with Thermoelasticity of Type III with Fractional Damping*, Ciências Exatas e da Terra: Teorias e Princípios 2, Editora Atena, São Paulo (2023) doi: 10.22533/at.ed.3742302081.

[25] MENDES, F. B. R.; SUÁREZ, F. M. S. *A Gevrey class semigroup, exponential decay and Lack of analyticity for a system formed by a Kirchhoff-Love plate equation and the equation of a membrane-like electric network with indirect fractional damping*. arXiv:1908.04826v3.

[26] MUÑOZ RIVERA, J. E. Estabilização de Semigrupos e Aplicações. Série de Métodos Matemáticos, Rio de Janeiro, 2008.

[27] MUÑOZ RIVERA, J. E.; RACKE, R. *Timoshenko systems with indefinite damping*, J. Math. Anal. Appl., 341 (2) (2008) 1068-1083.

[28] MUÑOZ RIVERA, J. E.; NASO, M. G. *Stability to Signorini Problem with Pointwise Damping*, Appl. Math. Optim., 61 (2023) 1-31.

[29] PALOMINO, J. A. S.; CAVALCANTI, M. M. CAVALCANTI, V. N. D. Semigrupos Lineares e não Lineares e Aplicações. UEM/DMA, 2016.

[30] PAZY, A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York: Springer, 1983.

[31] PRUSS, J. *On the Spectrum of C_0-Semigroups*. Transactions of the American Mathematical Society 284, 847-857 (1984).

[32] RAPOSO, C. A.; FERREIRA, J.; SANTOS, M. L.; CASTRO, N. N. O. *Exponential stability for the Timoshenko system with two weak dampings*, Appl. Math. Lett., Volume 18 (2005) 535-541.

[33] ROCHA, D. V. *Potências fracionárias de operadores: resultados teóricos*. 2016. 178p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto.

[34] SOUFYANE, A. *Stabilisation de la poutre de Timoshenko*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 8 (1999) 731-734.

[35] SUÁRES, F. M. S. *Regularity for the Timoshenko system with fractional damping*, (2023) arXiv:2308.00573v2.

[36] TAYLOR, S. Ph.D. Thesis, Chapter “Gevrey semigroups”, School of Mathematics, University of Minnesota, 1989.

[37] TEBOU, L. *A localized nonstandard stabilizer for the Timoshenko beam*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 353 (2015) 247–253.

[38] TIAN, X.; ZHANG, Q. *Stability of a Timoshenko system with local Kelvin–Voigt damping*, Z. Angew. Math. Phys. 20 (2017) 1-15.

[39] TIMOSHENKO, S. Vibration Problems in Engineering. New York: D. Van Nostrand Company, Inc., 1937.

[40] VOIGT, G. *A Perturbation Theorem for the Essential Spectral Radius of Strongly Continuous Semigroups*. Mh. Math. 90, 153-161 (1980).

[41] WEHBE, A.; YOUSSEF, W. *Stabilization of the uniform Timoshenko beam by one locally distributed feedback*, Appl. Anal. 88 (2009) 1067-1078.

[42] YOSIDA, K. Functional Analysis. Springer, 1980.

[43] ZHENG, S. Nonlinear Evolution Equations. Chapman & Hall/CRC, 2004.