Universidade Estadual de Londrina

JOÃO PAULO DA SILVA

VARIEDADES CR E O COMPLEXO TANGENCIAL DE CAUCHY-RIEMANN

Londrina
2022

JOÃO PAULO DA SILVA

VARIEDADES CR E O COMPLEXO TANGENCIAL DE CAUCHY-RIEMANN

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Antonio Liboni Filho

Londrina
2022

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S232c Silva, João Paulo.
Variedades CR e o Complexo Tangencial de Cauchy-Riemann/
João Paulo da Silva. – Londrina, 2022.
74 f. : il.

Orientador: Paulo Antonio Liboni Filho.
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2022.

Inclui Bibliografia.

1. Variedades Diferenciáveis - Teses. 2. Distribuições - Teses. 3. Correntes - Teses. 4. Variedades CR - Teses. 5. Complexo Tangencial de Cauchy-Riemann - Teses. I. Liboni Filho, Paulo Antonio. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

519.681-7

JOÃO PAULO DA SILVA

VARIEDADES CR E O COMPLEXO TANGENCIAL DE CAUCHY-RIEMANN

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Paulo Antonio Liboni Filho
Universidade Estadual de Londrina

Profa. Dra. Michele de Oliveira Alves
Universidade Estadual de Londrina

Profa. Dra. Ana Lucia da Silva
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 04 de janeiro de 2022.

Dedico este trabalho a minha família e amigos.

AGRADECIMENTOS

Nos momentos felizes, Ele sorriu comigo. Nos momentos difíceis, Ele me consolou. Pelos campos floridos onde caminhei, pelas cavernas escuras que cruzei, sempre estivemos de mãos dadas. Obrigado Deus por estar sempre ao meu lado, me amando, me protegendo e iluminando meu caminho.

Agradeço a minha mãe, pelo amor e carinho que me oferece todos os dias, pela educação transmitida e por sempre orar em meu nome. A meu pai por ser minha inspiração, mesmo nas dificuldades ele nunca deixou faltar nada, é o meu escudo e meu refúgio.

Sou grato aos meus irmãos, que são também meus melhores amigos, pelos conselhos e todos os momentos agradáveis que passamos juntos. Posso sempre contar com eles.

Como poderia não agradecer meu orientador Paulo Liboni, o orientador mais admirável de todos. Sempre me atendendo com carinho, me ensinando, corrigindo, dando conselhos e de vez em quando, rindo do canto das minhas galinhas.

Agradeço a professora Ana Lúcia por sempre me incentivar, desde os tempos onde eu era apenas um garotinho com uma medalha. A OBMEP com toda certeza foi fundamental em minha trajetória, sempre abrindo as portas e dando oportunidades. Fiz grandes amigos durante esses anos e os levarei comigo para sempre.

Agradeço a todos os professores que me instruíram ao longo de minha vida. Um agradecimento especial à professora Michele, e à professora Luci. Tenho muita sorte por estar cercado de pessoas incríveis, super inteligentes e competentes, mas que, por outro lado, são grandes amigos, gentis e divertidos.

Finalmente, agradeço a UEL, pelo acolhimento e curso maravilhoso oferecido.

"Pedi e recebereis, procurai e achareis, batei e vos será aberto."
Mateus 7,7

SILVA, João Paulo. **Variedades CR** 2022. 95 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2022.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo o estudo das Variedades CR e do Complexo Tangencial de Cauchy-Riemann, conceitos de extrema importância na teoria das estruturas diferenciáveis de variáveis complexas. Uma variedade diferenciável é um espaço topológico que se assemelha a $\mathbb{R}^N$ localmente. Isto posto, conceitos familiares de análise em espaços Euclidianos, como diferenciação, campos vetoriais e formas diferenciais, podem ser naturalmente definidos. Os objetos base deste trabalho são os espaços tangentes complexos, dos quais, a partir deles, é possível definir uma Variedade CR. A Teoria das Distribuições e as Correntes são também fundamentais na construção dos resultados.

Palavras-chave: Variedades Diferenciáveis. Variedades CR. Distribuições. Correntes. Complexo Tangencial de Cauchy-Riemann.

SILVA, João Paulo. **CR Manifolds** 2022. 95 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2022.

ABSTRACT

The goal of this work is to study the CR Manifolds and the Tangential Cauchy-Riemann Complex, concepts of extreme importance in the theory of differentiable structures of complex variables. A differentiable manifold is a topological space that resembles $\mathbb{R}^N$ locally. In this way, familiar concepts of analysis in Euclidean spaces, such as differentiation, vector fields and differential forms, can be naturally defined. The base objects of this work are the complex tangent spaces, from which, from them, it is possible to define a CR manifold. The Theory of Distributions and the currents are also fundamental in the construction of the results.

Keywords: Differentiable Manifold. CR Manifolds. Distributions. Currents. Tangential Cauchy-Riemann Complex.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O presente trabalho está dividido em partes. Inicialmente, o Capítulo 1 apresenta análise em variedades. Em seguida, os capítulos 2 e 3 abordam distribuições e correntes, respectivamente. Para concluir, o Capítulo 4 desenvolve as variedades CR e o Capítulo 5 algumas aplicações, como o Complexo Tangencial de Cauchy-Riemann e as Funções CR.

Como a maioria dos conceitos matemáticos, as ideias sobre variedades não se originaram de uma única pessoa, mas sim de anos de atividade coletiva. Em sua obra-prima "Disquisitiones generales circa superficies curvas" publicado em 1827, Carl Friedrich Gauss utilizou coordenadas locais em uma superfície para obter mais facilmente suas propriedades. Além disso, ele parecia ser o primeiro a considerar uma superfície abstrata mergulhada em um espaço Euclidiano. Alguns anos depois, Bernhard Riemann em sua palestra "Uber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen", em 1854, apresentou as bases da geometria diferencial de dimensão superior. A palavra "variedade" é uma tradução direta de a palavra alemã "Mannigfaltigkeit", que Riemann usou para descrever os objetos de sua indagação. Os estudos seguiram com os trabalhos de Henri Poincaré no final do século XIX. O início do século XX também foi um período em que os espaços localmente Euclidianos figuravam em destaque. Até que, em 1931, foi escrita a definição moderna de uma variedade que conhecemos hoje.

Intuitivamente, uma variedade é uma generalização de curvas e superfícies em altas dimensões. Pela sua definição, podemos dizer que uma variedade é um espaço localmente Euclidiano. Dessarte, conceitos familiares de análise em espaços Euclidianos, como diferenciação, campos vetoriais e formas diferenciais, podem ser definidos. Naturalmente, esses conceitos também estão presentes nas subvariedades.

Um dos objetos mais importantes em nossos estudos é o espaço dos vetores tangentes em um ponto p de Ω, denotado por $T_p(\Omega)$. Veremos que este espaço e o espaço dos campos vetoriais são essencialmente o mesmo, isto é, são isomorfos. Utilizando de sua base usual, é muito útil a representação de seus elementos em coordenadas locais. Por este motivo, desde o início iremos trabalhar em vista a um sistema de coordenadas.

No Capítulo 2 iremos tratar a Teoria das Distribuições, inventada por S. Sobolev e L. Schwartz por volta 1950. O propósito das distribuições é remediar o fato que, no Cálculo Diferencial, nem toda função é diferenciável. Segundo Hörmander, o espaço das distribuições é essencialmente a menor extensão do espaço das funções contínuas onde a diferenciação está sempre bem definida. Portanto, é evidente que se tenha interesse em realizar tal técnica.

Ainda em Hörmander, vê-se que alguns exemplos da teoria das equações diferenciais necessitam de uma abordagem mais geral, como por exemplo, a equação da onda

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

cujas soluções clássicas são todas da forma

$$v(x,y) = f(x+y) + g(x-y), \tag{2}$$

com f e g duas vezes continuamente diferenciáveis. Porém, uma sequência formada por soluções clássicas pode ter, como limite uniforme, uma função da forma (2) com f e g contínuas. Esta função deve, portanto, ser reconhecida como solução da Equação (1) e assim a definição de solução clássica se mostra restritiva.

Será definido na Seção (2.2.1) a diferenciação para distribuições, tendo como motivação o uso de integração por partes repetidas vezes. Com esta definição, as funções se tornam infinitamente diferenciáveis neste sentido. Como consequência, a noção de diferenciabilidade se torna abrangentes.

No Capítulo 3 veremos que correntes são para as formas o que as distribuições são para as funções. Sendo assim, a teoria das correntes é similar à teoria das distribuições, porém, mais abstrusa.

Dada M uma variedade suave de dimensão real N temos duas formas de tornar $T_p(M)$ (que também tem dimensão N) um espaço complexo. A primeira forma é fazer $T_p(M) \otimes \mathbb{C}$, chamado espaço tangente complexificado, cuja dimensão é $2N$. O segundo modo é tomar o maior subespaço J-invariante de $T_p(M)$, onde J é uma função estrutura complexa. Neste caso

$$H_p(M) = T_p(M) \cap J\{T_p(M)\}$$

é chamado espaço tangente complexo de M, cuja dimensão é menor ou igual a $2N$. O espaço $H_p(M)$ é a base para as variedades CR.

As Variedades de Cauchy-Riemann (CR) são um dos principais objetos de investigação na teoria moderna de funções de várias variáveis complexas. Após um desenvolvimento lento e pacífico nos anos setenta, o interesse aumentou acentuadamente no início dos anos oitenta, quando métodos da Teoria das Equações Diferenciais Parciais começaram a ser explorados com grande efeito na teoria das Variedades CR. Consequentemente, seguiu-se uma série de fortes resultados, enriquecimento a teoria. Atualmente, as Variedades CR estão desfrutando de um período de florescimento e boas perspectivas para o futuro.

No entanto, os fundamentos de Variedades CR estudados nos anos sessenta e setenta estão um pouco datados e não atendem às necessidades do presente. Em razão disso, uma situação desconfortável surgiu: torna-se cada vez mais difícil informar-se adequadamente nesta área.

Tendo em mãos o conceito de subvariedades CR de $\mathbb{C}^n$, surge o seguinte questionamento: é possível definir algo semelhante ao operador de Cauchy-Riemann $\overline{\partial}$ de variedades complexas para as subvariedades CR? Quando trabalhamos em $\mathbb{C}^n$, por exemplo, o conjunto das (p,q)-formas suaves $\mathcal{E}^{p,q}(\mathbb{C}^n)$ é gerado por elementos do tipo $dz^I \wedge d\overline{z}^J$ com $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ e $J = \{j_1, \ldots, j_q\}$ conjuntos de índices. No caso das variedades CR, pode existir um inteiro

$1 \leq k \leq n$ de modo que $dx_k \in T^{\mathbb{C}}(M)$, porém, $dy_k \notin T^{\mathbb{C}}(M)$, ou vice versa. Assim, não teríamos os elementos $dz_k = dx_k + idy_k$ e $d\overline{z}_k = dx_k - idy_k$ em $H^{*^{p,q}}(M)$. Portanto, não é possível definir as (p, q)-formas suaves do modo padrão. Veremos como remediar esse problema no Capítulo 5, onde definiremos o Complexo Tangencial de Cauchy-Riemann.

Para uma subvariedade CR de $\mathbb{C}^n$, existem duas formas de definir um Complexo Tangencial de Cauchy-Riemann e ambas as abordagens aparecem na teoria. A primeira é uma aproximação extrínseca que usa $\overline{\partial}$ em $\mathbb{C}^n$. A segunda forma é uma aproximação intrínseca que não faz uso do ambiente $\mathbb{C}^n$ e portanto generaliza as variedades CR abstratas. Serão apresentados ambas as aproximações e provado que os dois complexos são isomorfos.

A segunda parte do Capítulo 5 será destinado às Funções CR e Aplicações CR, como aplicações do Complexo Tangencial de Cauchy-Riemann. As Funções CR em variedades complexas são análogas às funções holomorfas. Entretanto, existem diferenças importantes, como o fato das funções CR nem sempre serem suaves. Por outro lado, a restrição de uma função holomorfa em uma subvariedade CR é uma função CR. Enquanto que, extensões de funções CR nem sempre são funções holomorfas. Será demonstrado que uma função CR analítica real em uma subvariedade CR analítica real se estende localmente a uma função holomorfa.

1 TÓPICOS DA TEORIA DE ESTRUTURAS DIFERENCIÁVEIS

O objetivo deste capítulo é introduzir conceitos e resultados que servirão de alicerce para o desenvolvimento do trabalho. Inicialmente, introduziremos o conceito de variedade diferenciável com alguns exemplos. Em seguida, apresentaremos a definição de campo vetorial e alguns resultados importantes como, por exemplo, o fato do conjunto dos campos vetoriais ser um módulo livre e a representação dos mesmos em coordenadas locais. Nosso objetivo em seguida será provar que campos vetoriais e vetores tangentes são essencialmente o mesmo objeto. Poderemos assim definir as formas diferenciais, a derivada exterior e as contrações. Para finalizar, faremos a complexificação dos espaços estudados.

1.1 Variedades Diferenciáveis

Definição 1.1. *Seja Ω um espaço topológico com as seguintes propriedades, Ω é Hausdorff e segundo enumerável. Uma estrutura diferenciável de dimensão N sobre Ω é uma família de pares $\mathcal{F} = \{(U,x)$: onde U é um aberto de Ω e x: $U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é um homeomorfismo sobre x(U)$\}$ que satisfaz as seguintes condições:*

(i) $\displaystyle\bigcup_{(U,x)\in\mathcal{F}} U = \Omega$;

(ii) A função $x_V \circ {x_U}^{-1} : x_U(U\cap V) \longrightarrow x_V(U\cap V)$ é C^∞ para cada par (U,x_U), $(V,x_V) \in \mathcal{F}$ com $U \cap V \neq \emptyset$ (figura 1.1);

(iii) $\mathcal{F}$ é maximal com respeito à (i) e (ii), ou seja, se (V,x_V) é um par onde $V \subset \Omega$ é um aberto e $x_V : V \to \mathbb{R}^N$ é um homeomorfismo sobre sua imagem tal que, para qualquer $(U,x) \in \mathcal{F}$ com $U \cap V \neq \emptyset$, a composição $x_V \circ x^{-1} : x(U \cap V) \to x_V(U \cap V)$ é C^∞, temos que $(V,x_V) \in \mathcal{F}$.

Definição 1.2. *Uma variedade diferenciável de dimensão N é um par $(\Omega,\mathcal{F})$, onde Ω é um espaço topológico de Hausdorff segundo enumerável e $\mathcal{F}$ uma estrutura diferenciável de dimensão N sobre Ω. Além disso os elementos de $\mathcal{F}$ são chamados de cartas locais.*

Podemos dizer que uma variedade diferenciável é um objeto localmente Euclidiano, pois para cada ponto existe uma vizinhança U e uma função $x : U \to \mathbb{R}^N$, de modo que (U,x) é uma carta local. Dessa forma, conceitos familiares de análise em espaço Euclidiano como diferenciabilidade, espaços tangentes e formas diferenciais podem ser definidos. Começaremos com o sistema de coordenadas.

Definição 1.3. *Seja (U,x) uma carta local. Dizemos que $x_1,\ldots,x_N$ são coordenadas de (U,x) quando $x = (x_1,\ldots,x_N)$.*

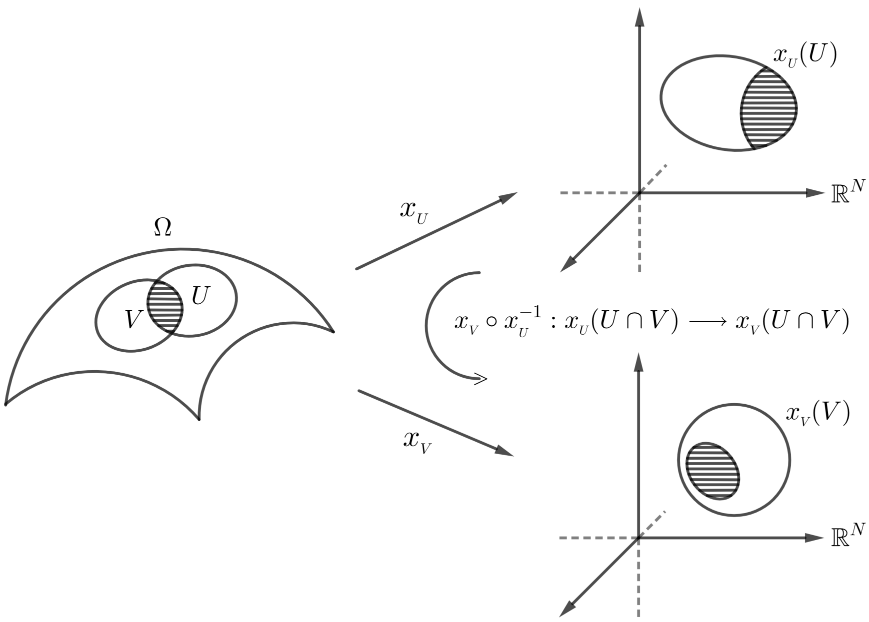

Figura 1.1: A função $x_V \circ x_U{}^{-1}$.

Em geral, pode ser difícil verificar se uma família $\mathcal{F}$ dada cumpre a condição *(iii)* da Definição 1.1, pois para isto é necessário conhecer todos os abertos de Ω e os homeomorfismos destes sobre abertos de $\mathbb{R}^N$. A proposição a seguir nos possibilita desviar da dificuldade apresentada e dar exemplos de variedades diferenciáveis.

Proposição 1.4. *Seja $\mathcal{F}^*$ uma familia de pares como na* Definição 1.1*, porém satisfazendo apenas (i) e (ii). Então, existe uma única estrutura diferenciável $\mathcal{F}$ de dimensão N, tal que $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$.*

Demonstração. Basta supor que existem duas estruturas diferenciáveis diferentes e obtemos facilmente uma contradição. □

Exemplo 1.5. A seguir apresentamos alguns exemplos simples de variedade diferenciável.

(a) Considerando $\mathcal{F}^* = \{(\mathbb{R}^N, Id) : \ Id : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N)\}$ temos que $(\mathbb{R}^N, \mathcal{F})$, onde $\mathcal{F}$ é a única estrutura diferenciável que contém $\mathcal{F}^*$, é uma variedade diferenciável.

(b) Considere o seguinte espaço (esfera)

$$S^n = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+1} : \sum_{i=1}^{N+1} x_i^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{N+1},$$

com a topologia induzida. Sejam p_N o pólo norte da esfera, p_S o pólo sul da esfera e π_N e π_S as projeções estereográfica por p_N e p_S, respectivamente. Defina

$$\mathcal{F}^* = \{(S^n - \{p_N\}, \pi_N), (S^n - \{p_S\}, \pi_S)\}.$$

Se $\mathcal{F}$ é a única estrutura diferenciável de dimensão N que contém $\mathcal{F}^*$, então $(S^n, \mathcal{F})$ é uma variedade diferenciável.

(c) Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ uma variedade diferenciável de dimensão N e $W \subset \Omega$ um aberto. Se considerarmos W com a topologia induzida de Ω podemos induzir de $\mathcal{F}$ uma família $\mathcal{F}_W$ de modo que $(W, \mathcal{F}_W)$ também seja uma variedade diferenciável de dimensão N da seguinte maneira:

$$\mathcal{F}_W = \{(U \cap W, x|_{U \cap W}) : (U, x) \in \mathcal{F}\}.$$

(d) Sejam $(\Omega, \mathcal{F})$ e $(\Omega', \mathcal{F}')$ duas variedades diferenciáveis de dimensões N e N', respectivamente. Suponha que $\mathcal{F} = \{(U, x)\}$ e $\mathcal{F}' = \{(U', x')\}$. Desta forma, definindo

$$\mathcal{G} = \{(U \times U', x \times x'); \text{ onde } x \times x' : U \times U' \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N'})\},$$

temos que $(\Omega \times \Omega', \mathcal{G})$ é uma variedade diferenciável. Assim, obtemos que o cilindro infinito $S^1 \times \mathbb{R}$ e o toro $S^1 \times S^1$ são variedades.

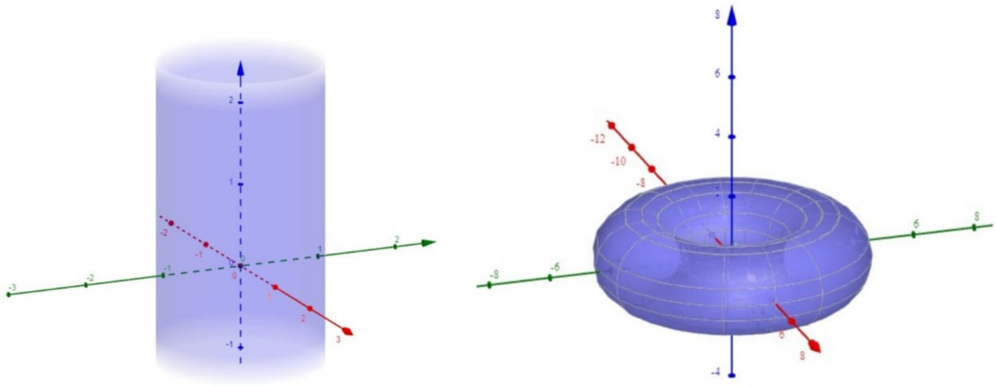

Figura 1.2: o cilindro infinito e o toro.

A partir de agora Ω representará a variedade diferenciável $(\Omega, \mathcal{F})$ de dimensão N, exceto quando for dito o contrário.

Definição 1.6. *A função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é dita ser suave quando para todo par $(U, x) \in \mathcal{F}$ a composição $f \circ x^{-1} : x(U) \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ é C^∞ em $x(U)$. Denota-se por $\mathcal{E}(\Omega)$ o conjunto de tais funções.*

Observação 1.7. O conjunto $\mathcal{E}(\Omega)$ é também denotado por $C^\infty(\Omega)$. No entanto, optamos por $\mathcal{E}(\Omega)$ por conveniência.

Definição 1.8. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ contínua. O suporte de f é definido como sendo*

$$supp(f) = \overline{\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\}}.$$

Se esse conjunto for um compacto de $\mathbb{R}^N$, então é dito f ter suporte compacto.

Definição 1.9. *A função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é dita ser uma função teste quando é suave, isto é, $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ e possui suporte compacto. Denota-se por $\mathcal{D}(\Omega)$ o conjunto de tais funções.*

Definição 1.10. *Dizemos que M é uma subvariedade suave de Ω de dimensão l se para cada ponto $p_0 \in M$, existe uma vizinhança U de p_0 em M e uma função $x : U \to \mathbb{R}^N$ tal que*

(i) $x : U \to x(U) \subset \mathbb{R}^N$ *é um difeomorfirmo.*

(ii) $x(p_0)$ *é a origem em* $\mathbb{R}^N$.

(iii) $x\{U \cap M\}$ *é um aberto na cópia de* $\mathbb{R}^l$ *dado por* $\{(t_1, \ldots, t_l, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^N\}$.

Observação 1.11. No lema a seguir, $\wedge$ denota o Produto Exterior, que é bilinear, isto é,

$$\begin{aligned} v \wedge (au + bw) &= a(v \wedge u) + b(v \wedge w), \qquad a, b \in \mathbb{R}, \\ (au + bw) \wedge v &= a(u \wedge v) + b(w \wedge v), \qquad v, u, w \in V, \end{aligned}$$

e anti-simétrico

$$v \wedge w = -w \wedge v \qquad v, w \in V.$$

Em particular, $v \wedge v = 0$. Para mais detalhes da definição de Produto Exterior, vide [6].

Lema 1.12. *Suponha $M \subset \mathbb{R}^N$ com a seguinte propriedade: para cada ponto p_0 em M existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^N$ e funções suaves $\rho_1, \ldots, \rho_{N-l} : U \to \mathbb{R}$ tais que*

$$M \cap U = \{q \in U;\ \rho_1(q) = \ldots = \rho_{N-l}(q) = 0\} \quad com \quad d\rho_1 \wedge \ldots \wedge d\rho_{N-l} \neq 0 \quad em \quad p_0.$$

Então, existe um difeomorfismo $x = (x_1, \ldots, x_N)$ definido próximo à p_0, de modo que as coordenadas satisfazem $x_{l+1} = \rho_1, \ldots, x_N = \rho_{N-l}$. Em particular, M é uma subvariedade suave de dimensão l.

Demonstração. Suponha $p_0 \in M$ e $\rho_1, \ldots, \rho_{N-l}$ dadas. Como $d\rho_1 \wedge \ldots \wedge d\rho_{N-l} \neq 0$ em p_0, podemos escolher coordenadas $(u, v) \in \mathbb{R}^N$ com $u \in \mathbb{R}^l$ e $v \in \mathbb{R}^{N-l}$ tais que $D_v\{(\rho_1, \ldots, \rho_{N-l})\}$ em p_0 é uma matriz não-singular $(N-l) \times (N-l)$. Deste modo, definimos $x : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ por

$$x(u, v) = (u, \rho(u, v)) \quad \text{com} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{N-l},$$

onde $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_{N-l})$. Pelas escolhas de coordenadas, Dx em p_0 é não-singular e logo, pelo Teorema da Função Inversa, x é um difeomorfismo local. Portanto, x tem as propriedades requeridas pelo lema. $\square$

Exemplo 1.13. Vejamos alguns exemplos de subvariedades suaves de $\mathbb{R}^N$:

(a) A esfera unitária $\{x \in \mathbb{R}^N;\ |x|^2 - 1 = 0\}$ é uma subvariedade de dimensão $N - 1$. Subvariedades de dimensão $N - 1$ são chamadas hipersuperfícies.

(b) Sejam $(u, v) \in \mathbb{R}^N$ coordenadas tais que $u \in \mathbb{R}^l$ e $v \in \mathbb{R}^{N-l}$. Seja $h : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^{N-l}$ uma função suave. Defina

$$M = \{(u, v) \in \mathbb{R}^N;\ v = h(u)\}.$$

Chamamos M de gráfico de h. Sejam $\rho_j(u, v) = v_j - h_j(u)$, para $1 \leq j \leq N - l$, onde $h = (h_1, \ldots, h_{N-l})$. M é identicamente zero para $\rho_1, \ldots, \rho_{N-l}$. Por outro lado, $d\rho_1 \wedge \ldots \wedge d\rho_{N-l}$ é não nula (em todo ponto) e assim, segue do Lema 1.12 que M é uma subvariedade l dimensional. Neste caso, x é dada por $x(u, v) = (u, v - h(u))$. A volta também vale localmente. Concluímos que uma subvariedade pode sempre ser escrita localmente como o gráfico de uma função suave.

1.2 Campos vetoriais

Voltemos nossa atenção para as variedades Ω. A seguir, vamos definir um dos objetos principais do capítulo, os campos vetoriais. Abordaremos também alguns aspectos do mesmo, por exemplo, mostraremos que o conjunto dos campos vetoriais é um espaço vetorial complexo e veremos sua representação em coordenadas locais.

Definição 1.14. *Um campo vetorial sobre Ω é uma função linear*

$$L : \mathcal{E}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega),$$

que satisfaz a Regra de Leibniz, isto é

$$L(fg) = fL(g) + gL(f) \quad \forall f\,,\, g \in \mathcal{E}(\Omega).$$

O conjunto de todos os campos vetoriais sobre Ω será denotado por $\mathfrak{X}(\Omega)$.

Exemplo 1.15. A seguir, veremos alguns exemplos de campos vetoriais:

(a) A derivada de uma função f suave é um campo vetorial. Isto é claro, pois f' é linear e satisfaz a Regra de Leibniz.

(b) A aplicação $L : \mathcal{E}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ definida por $L = x\dfrac{\partial}{\partial x} - y\dfrac{\partial}{\partial y}$ é um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^2$. A prova desta afirmação vem do fato das derivadas parciais serem lineares e satisfazerem a Regra de Leibniz.

Proposição 1.16. *Se $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ é constante, então $L\,(f) = 0$ para todo $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$.*

Demonstração. Digamos que $f \equiv c$ e consideremos $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ arbitrário. Note que, pela Regra de Leibniz, temos $L(1) = L(1 \cdot 1) = L(1) + L(1) = 2L(1)$, de onde podemos concluir que $L(1) = 0$. Deste modo, como L é linear, segue que $L(f) = L(c) = cL(1) = 0$. $\square$

Proposição 1.17. *Se* $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$*, então* $\operatorname{supp} Lf \subset \operatorname{supp} f$ *para toda* $f \in \mathcal{E}(\Omega)$.

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ qualquer, vamos mostrar que se $V \subset \Omega$ é um aberto tal que $f|_V \equiv 0$ então $Lf|_V \equiv 0$. Com efeito, dado $p \in V$ tome uma carta local (U, x) tal que $p \in U$ e $U \subset V$, daí como $x(p) \in x(U)$ segue que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x(p)) \subset x(U)$. De onde podemos concluir que $\overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x(p))} \subset B_\varepsilon(x(p)) \subset x(U)$, e uma vez que $\overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x(p))}$ é compacto e $B_\varepsilon(x(p))$ é aberto podemos definir uma função $\xi : x(U) \to \mathbb{R}$ de forma que $\xi \in \mathcal{E}(x(U))$, e além disso $\xi|_K = 1$ e $\operatorname{supp}\xi \subset B_\varepsilon(x(p))$ onde $K = \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x(p))}$. Agora definindo $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(q) = \begin{cases} \xi(x(q)), & \text{se } q \in U \\ 0, & \text{se } q \notin U \end{cases}$$

temos que φ se anula em $\Omega - V$ e $f = (1 - \varphi)f$. Assim

$$L(f)(p) = L((1-\varphi)f)(p) = (1-\varphi)(p)L(f) + f(p)L((1-\varphi))(p) = 0 + 0 = 0.$$

Portanto como $p \in V$ é arbitrário segue que $Lf|_V \equiv 0$ sempre que $f|_V \equiv 0$, ou seja, se $x \in \Omega - \operatorname{supp} f$ temos que $x \in \Omega - \operatorname{supp} Lf$, e isto é o mesmo que escrever $\operatorname{supp} Lf \subset \operatorname{supp} f$. E pela arbitrariedade de f o resultado segue. $\square$

Observação 1.18. A função ξ definida na demonstração da Proposição 1.17 pertence a classe das funções conhecidas como funções corte e existe mais de uma maneira de construí-la.

Como consequência da Proposição 1.17, temos o seguinte resultado

Proposição 1.19. *Dado* $W \subset \Omega$ *um aberto, existe uma função*

$$\begin{aligned} \pi : \mathfrak{X}(\Omega) &\longrightarrow \mathfrak{X}(W) \\ L &\longmapsto L_W \end{aligned},$$

de modo que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(\Omega) & \xrightarrow{L} & \mathcal{E}(\Omega) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E}(W) & \xrightarrow{L_W} & \mathcal{E}(W) \end{array},$$

seja comutativo.

Demonstração: Note que dado $p \in W$ e $f \in \mathcal{E}(W)$ é possível determinar uma $g \in \mathcal{E}(\Omega)$ tal que $f = g$ em V, onde V representa uma vizinhança de p, por meio do auxílio de uma função corte. Assim, se para cada $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e $f \in \mathcal{E}(W)$ definirmos $L_W(f)$ dada por

$$L_W(f)(p) = L(\hat{f})(p), \tag{1.1}$$

onde $\hat{f} \in \mathcal{E}(\Omega)$ e coincide com f em uma vizinhança de p, temos que $L_W \in \mathfrak{X}(W)$ e que a função dada por $\pi(L) = L_W$ é linear e torna o diagrama comutativo.

$\square$

Antes de prosseguirmos vejamos que a definição de $L_W(f)$ na Proposição 1.19 está bem defida. De fato, dado $p \in W$ e funções $\hat{f}$,$\tilde{f} \in \mathcal{E}(\Omega)$ tais que ambas coincidem com f em alguma vizinhança de p, digamos que respectivamente nos abertos U e V, temos que $p \notin \text{supp}\ (\hat{f} - \tilde{f})$ de onde segue pela Proposição 1.17 que $p \notin \text{supp}(L(\hat{f} - \tilde{f}))$, ou seja, $L(\hat{f})(p) = L(\tilde{f})(p)$.

Por fim, para encerrar esta seção, vamos tornar $\mathfrak{X}(\Omega)$ uma estrutura algébrica e apresentar um representação local para os campos vetoriais.

Definição 1.20. *Dados L , $M \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, definamos a soma e a multiplicação por escalar em $\mathfrak{X}(\Omega)$ da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} (L+M)(f) &:= L(f) + M(f), \\ (\lambda L)(f) &:= \lambda L(f). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Observação 1.21. As operações definidas em (1.2) são fechadas em $\mathfrak{X}(\Omega)$. Com efeito, dados $f, g \in \mathcal{E}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que $L + M$ satiifaz

$$\begin{aligned} (L+M)(\alpha f + g) &= L(\alpha f + g) + M(\alpha f + g) \\ &= (\alpha L(f) + L(g)) + (\alpha M(f) + M(g)) \\ &= (\alpha L(f) + \alpha M(f)) + (L(g) + M(g)) \\ &= \alpha(L(f) + M(f)) + (L(g) + M(g)) \\ &= \alpha(L+M)(f) + (L+M)(g), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (L+M)(fg) &= L(fg) + M(fg) \\ &= (gL(f) + fL(g)) + gM(f) + fM(g)) \\ &= (gL(f) + gM(f)) + (fL(g) + fM(g)) \\ &= g(L(f) + M(f)) + f(L(g) + M(g)) \\ &= g(L+M)(f) + f(L+M)(g), \end{aligned}$$

isto é, $L + M \in \mathfrak{X}(\Omega)$. E λL satisfaz

$$\begin{aligned} (\lambda L)(\alpha f + g) &= \lambda L(\alpha f + g) \\ &= \lambda(\alpha L(f) + L(g)) \\ &= \alpha(\lambda L(f)) + \lambda M(g) \\ &= \alpha(\lambda L)(f) + (\lambda L)(g), \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
(\lambda L)(fg) &= \lambda L(fg) \\
&= \lambda(gL(f) + fL(g)) \\
&= g\lambda L(f) + f\lambda L(g) \\
&= g(\lambda L)(f) + f(\lambda L)(g),
\end{aligned}
$$

ou seja, $\lambda L \in \mathfrak{X}(\Omega)$.

Proposição 1.22. *Se L , $M \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e $g \in \mathcal{E}(\Omega)$. Então, as funções*

$$
\begin{aligned}
gL : \mathcal{E}(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{E}(\Omega) \\
f \quad &\longmapsto g \cdot L(f),
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

e

$$
\begin{aligned}
[\cdot,\cdot] : \mathfrak{X}(\Omega) \times \mathfrak{X}(\Omega) &\longrightarrow \mathfrak{X}(\Omega) \\
(L, M) \quad &\longmapsto L(M(f)) - M(L(f)),
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

estão bem definidas e $gL \in \mathfrak{X}(\Omega)$

Demonstração. Basta mostrar que as funções 1.3 e 1.4 são lineares e satisfazem a Regra de Leibniz, como são contas simples e análogas as feitas na Observação 1.21, deixaremos a cargo do leitor. □

Observação 1.23. O conjunto $\mathfrak{X}(\Omega)$ munido das operações definidas em (1.2) é um espaço vetorial. Além disso $(\mathfrak{X}(\Omega), +)$ dotado da multiplicação dada em (1.3) é um $\mathcal{E}(\Omega)$-módulo.

Definição 1.24. *A função definida em (1.4) é chamada de comutador (ou colchete de Lie) entre dois campos vetoriais.*

Teorema 1.25. *Dada uma carta local (U, x) em Ω as seguintes afirmações são verdadeiras*

(a) A função

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathcal{E}(U) &\longrightarrow \mathcal{E}(U) \\
f \qquad &\longmapsto \frac{\partial (f \circ x^{-1})}{\partial x_j} \circ x,
\end{aligned}
$$

pertence a $\mathfrak{X}(U)$ para todo $j = 1, \ldots, N$.

(b) Se $L \in \mathfrak{X}(U)$, então

$$
L = \sum_{j=1}^{N} L(x_j) \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{1.5}
$$

Demonstração. Para a parte (a), vejamos inicialmente se tal função está bem definida. Dada $f \in \mathcal{E}(U)$ temos que $f \circ x^{-1} \in \mathcal{E}(x(U))$ e portanto $\dfrac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x_j} \in \mathcal{E}(x(U))$, assim como para cada $(V, y) \in \mathcal{F}_U$ temos

$$\left(\frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x_j} \circ x\right) \circ y^{-1} = \underbrace{\left(\frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x_j}\right)}_{\in\, \mathcal{E}(x(U))} \circ \underbrace{(x \circ y^{-1})}_{\in\, \mathcal{E}(x(V))},$$

segue que

$$\frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x_j} \circ x \in \mathcal{E}(U).$$

Agora vamos mostrar que $\dfrac{\partial}{\partial x_j} \in \mathfrak{X}(U)$. Com efeito para f , $g \in \mathcal{E}(U)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(\alpha f + g) &= \frac{\partial((\alpha f + g) \circ x^{-1})}{\partial x_j} \circ x \\
&= \frac{\partial((\alpha f \circ x^{-1}) + (g \circ x^{-1}))}{\partial x_j} \circ x \\
&= \left[\alpha \left(\frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial(g \circ x^{-1})}{\partial x_j}\right] \circ x \\
&= \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(f) + \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(g),
\end{aligned}$$

ou seja, $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ é linear. Além disso vale também que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(fg) &= \frac{\partial((fg) \circ x^{-1})}{\partial x_j} \circ x \\
&= \frac{\partial((f \circ x^{-1})(g \circ x^{-1}))}{\partial x_j} \circ x \\
&= \left[(g \circ x^{-1})\frac{\partial((f \circ x^{-1})}{\partial x_j} + (f \circ x^{-1})\frac{\partial(g \circ x^{-1}))}{\partial x_j}\right] \circ x \\
&= g\left[\frac{\partial((f \circ x^{-1})}{\partial x_j} \circ x\right] + f\left[\frac{\partial(g \circ x^{-1}))}{\partial x_j} \circ x\right] \\
&= g\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(f) + f\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(g),
\end{aligned}$$

isto é, $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ satisfaz a Regra de Leibniz.

Agora, para (b), considere $L \in \mathfrak{X}(U)$ dado e $p \in U$ fixado. Como $x(U)$ é aberto podemos tomar uma bola $B \subset \mathbb{R}^N$ tal que $x(p) \in B \subset x(U)$. Assim, tomando $f \in \mathcal{E}(U)$ qualquer e definindo para cada $q \in V$ onde $V = x^{-1}(B)$ a função

$$\begin{aligned} \varphi : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t \quad &\longmapsto \hat{f}((1-t)x(p) + tx(q)) \end{aligned}$$

com $\hat{f} = f \circ x^{-1}$, podemos aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo encontrar a seguinte expressão

$$\hat{f}(x(q)) = \hat{f}(x(p)) + \int_0^1 \left[\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_j}((1-t)x(p) + tx(q))(x_j(q) - x_j(p)) \right] dt,$$

que pode ser reescrita do seguinte modo

$$\hat{f}(x(q)) = \hat{f}(x(p)) + \left[\sum_{j=1}^{N} h_j(x(q))(x_j(q) - x_j(p)) \right],$$

onde $h_j(x(q)) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_j}((1-t)x(p) + tx(q))dt$. De onde podemos concluir, pela arbitariedade de $q \in V$, o seguinte

$$f|_V = f(p) + \sum_{j=1}^{N} g_j((x_j|_V - x_j|_V(p)),$$

onde $g_j = h_j \circ x$. Assim, aplicando L_V obtemos

$$L_V(f|_V) = \sum_{j=1}^{N} \left[g_j L_V(x_j|_V) + x_j|_V L_V(g_j) - x_j|_V(p) L_V(g_j) \right],$$

e em particular

$$L_V(f|_V)(p) = \sum_{j=1}^{N} g_j(p) L_V(x_j|_V)(p).$$

E por fim, da definição de L_V (ver 1.1) e do fato de

$$g_j(p) = (h_j(x(p)) = \int_0^1 \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_j}((1-t)x(p) + tx(p))dt = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_j}(x(p)) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)(f) \right](p),$$

concluímos que

$$L(f)(p) = \sum_{j=1}^{N} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)(f) \right](p) L(x_j)(p).$$

Entretanto $f \in \mathcal{E}(U)$ e $p \in U$ eram arbitrários. Logo

$$L = \sum_{j=1}^{N} L(x_j) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

□

A letra (b) do Teorema 1.25 nos mostra como é a representação de um campo vetorial em coordenadas locais. Este tipo de representação será muito presente no texto futuramente.

Corolário 1.26. *$\mathfrak{X}(U)$ é um $\mathcal{E}(U)$-módulo livre, isto é, possui uma base.*

Demonstração: Vejamos inicialmente que para todo $j, k = 1, \ldots, N$ vale que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(x_k) = \delta_{jk}. \tag{1.6}$$

Com efeito, note que $(x_k \circ x^{-1})(q) = q_k$ para todo $q = (q_1, \ldots, q_N) \in x(U)$, pois

$$Id = x \circ x^{-1} = (x_1 \circ x^{-1}, \ldots, x_N \circ x^{-1}).$$

Assim se para cada $p \in U$ denotarmos $x(p)$ por q temos que se $j \neq k$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(x_k)(p) &= \frac{\partial(x_k \circ x^{-1})}{\partial x_j}(x(p)) \\
&= \frac{\partial(x_k \circ x^{-1})}{\partial x_j}(q) \\
&= \lim_{t \to 0}\left[\frac{(x_k \circ x^{-1})(q + t\mathrm{e}_j) - (x_k \circ x^{-1})(q)}{t}\right] \\
&= \lim_{t \to 0}\frac{q_k - q_k}{t} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

e se $q = k$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(x_k)(p) &= \frac{\partial(x_k \circ x^{-1})}{\partial x_j}(x(p)) \\
&= \frac{\partial(x_k \circ x^{-1})}{\partial x_j}(q) \\
&= \lim_{t \to 0}\left[\frac{(x_k \circ x^{-1})(q + t\mathrm{e}_j) - (x_k \circ x^{-1})(q)}{t}\right] \\
&= \lim_{t \to 0}\frac{q_k + t - q_k}{t} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Afirmamos que $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_N}\right\}$ é um conjunto linearmente independente. Com efeito, sejam $g_1, \ldots, g_N \in \mathcal{E}(U)$ tal que

$$\sum_{j=1}^{N} g_j \frac{\partial}{\partial x_j} = 0.$$

Assim em particular para cada $k = 1, \dots, N$

$$\sum_{j=1}^{N} g_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(x_k) = 0.$$

Mas como consequência da primeira parte da demonstração segue que para cada $k = 1, \dots, N$ vale também

$$g_k = g_k.1 = g_k \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)(x_k) = \sum_{j=1}^{N} g_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(x_k),$$

logo $g_j = 0$ para todo $j = 1, \dots, N$, e como os $g_j's$ foram tomados de modo arbitrário segue o desejado. Portanto, como por (1.5) temos que $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N}\right\}$ gera $\mathfrak{X}(U)$ e segue o resultado. $\square$

1.3 Espaços Tangentes

Nesta seção será apresentada a definição de espaço tangente à Ω em p, denotado por $T_p(\Omega)$. Provaremos que o conjunto dos campos vetoriais e dos vetores tangentes são o mesmo, a menos de um isomorfismo. Definiremos também os fibrados e subfibrados tangentes, as estruturas formalmente integráveis e, por fim, o *push forward*.

Antes de definir o conceito de espaço tangente à Ω em p precisamos definir o que é o germe de uma função suave em um ponto p.

Definição 1.27. *Dado $p \in \Omega$, definamos $\mathcal{B}_p$ como sendo o conjunto de todos os pares (V, f) onde $V \subset \Omega$ é uma vizinhança de p e $f \in \mathcal{E}(V)$. Além disso nós diremos que dois elementos (V, f) e $(\tilde{V}, g)$ de $\mathcal{B}_p$ estão relacionados se existir um aberto $W \subset V \cap \tilde{V}$ onde f e g coincidem, e neste caso escreveremos $(V, f) \sim (\tilde{V}, g)$.*

Proposição 1.28. *A relação $\sim$ definida em $\mathcal{B}_p$ é de equivalência*

Demonstração. As propriedades de reflexividade e de simetria são triviais, portanto resta apenas mostrar que $\sim$ é transitiva. De fato, sejam (V, f), $(\tilde{V}, g)$ e $(\hat{V}, h)$ elementos arbitrários de $\mathcal{B}_p$ tais que $(V, f) \sim (\tilde{V}, g)$ e $(V, f) \sim (\hat{V}, h)$, assim existem abertos $W_1 \subset V \cap \tilde{V}$ e $W_2 \subset \tilde{V} \cap \hat{V}$ de modo que $(f - g)|_{W_1} = 0$ e $(g - h)|_{W_2} = 0$. Logo, se tomarmos $W = W_1 \cap W_2$ temos que W é um subconjunto aberto de $V \cap \hat{V}$ onde f e h coincidem, isto é, $(V, f) \sim (\hat{V}, h)$. $\square$

Observação 1.29. A partir de agora vamos utilizar $\mathcal{E}(p)$ para denotar o espaço quociente $\mathcal{B}_p/\sim$ e dado $(U, f) \in \mathcal{B}_p$ vamos denotar sua classe de equivalência por $\underline{f}$.

Definição 1.30. *Dada $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ e $p \in \Omega$. O germe da função f em p é a classe de equivalência de (Ω, f), isto é, $\underline{f}$.*

Definição 1.31. *Dado $p \in \Omega$, definamos a soma e a multiplicação por escalar em $\mathcal{E}(p)$ por:*

$$\underline{f} + \underline{g} := \underline{f + g} \qquad e \qquad \alpha\underline{f} := \underline{\alpha f}. \tag{1.7}$$

Afirmamos que as operações descritas em (1.7) estão bem definidas. De fato, sem perda de generalidade suponhamos f, $g \in \mathcal{E}(\Omega)$. Assim, se $\tilde{f} \in \mathcal{E}(V)$ e $\tilde{g} \in \mathcal{E}(U)$ são tais que $(\underline{f}, \underline{g}) = (\underline{\tilde{f}}, \underline{\tilde{g}})$, então existem abertos $W_1 \subset V$ e $W_2 \subset U$ de maneira que

$$f|_{W_1} = \tilde{f}|_{W_1} \qquad \text{e} \qquad g|_{W_2} = \tilde{g}|_{W_2}.$$

Daí tomando $\tilde{W} = V \cap U$ temos que $W_1 \cap W_2 \subset \tilde{W}$, e além disso vale

$$(f+g)|_{W_1 \cap W_2} = f|_{W_1 \cap W_2} + g|_{W_1 \cap W_2} = \tilde{f}|_{W_1 \cap W_2} + \tilde{g}|_{W_1 \cap W_2} = (\tilde{f} + \tilde{g})|_{W_1 \cap W_2}.$$

Logo podemos concluir que $(\Omega, f+g) \sim (\tilde{W}, \tilde{f} + \tilde{g})$ e consequentemente que $\underline{f+g} = \underline{\tilde{f} + \tilde{g}}$. Agora, se $(\alpha, \underline{f}) = (\alpha, \underline{\tilde{f}})$, de maneira análoga temos $\underline{\alpha f} = \underline{\alpha \tilde{f}}$.

Definição 1.32. *Dizemos que uma função $v : \mathcal{E}(p) \longrightarrow \mathbb{R}$ é um vetor tangente à Ω em p se satisfaz as seguintes condições*

(i) v *é linear;*

(ii) $v(\underline{fg}) = f(p)v(\underline{g}) + g(p)v(\underline{f})$ *para toda* $\underline{f}, \underline{g} \in \mathcal{E}(p)$.

O conjunto de todos os vetores tangentes à Ω em p será denotado por $T_p(\Omega)$ e chamado de espaço tangente à Ω em p.

A seguir vamos ver que dado $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e $p \in \Omega$ podemos induzir de maneira natural um elemento $L_p \in T_p(\Omega)$. Além disso vamos ver também que dado $v \in T_p(\Omega)$ existe $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ tal que $v = L_p$.

Proposição 1.33. *Se $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e $p \in \Omega$, então $L_p : \mathcal{E}(p) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$L_p(\underline{f}) = L(\tilde{f})(p), \tag{1.8}$$

onde $\tilde{f} \in \mathcal{E}(\Omega)$ e coincide com f em uma vizinhança de p, pertence à $T_p(\Omega)$.

Demonstração. Inicialmente vejamos que L_p está bem definida. De fato, sem perda de generalidade suponha $f \in \mathcal{E}(\Omega)$. Assim se $g \in \mathcal{E}(U)$ é tal que $\underline{f} = \underline{g}$ temos que existe uma carta local (V, x) tal que $V \subset U$ e $p \in V$ de maneira que $f|_V = \tilde{g}|_V$, onde $\tilde{g} \in \mathcal{E}(\Omega)$ e é uma extensão de g, portanto de (1.5) e do fato da derivada ser um conceito local segue que

$$\begin{aligned} L(f)(p) = L_V(f|_V)(p) &= \sum_{j=1}^{N} L_V(x_j)(p) \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) (f|_V) \right](p) \\ &= \sum_{j=1}^{N} L_V(x_j)(p) \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) (\tilde{g}|_V) \right](p) \\ &= L_V(\tilde{g}|_V)(p) = L(\tilde{g})(p), \end{aligned}$$

isto é, $L_p(\underline{f}) = L_p(\underline{g})$. Agora, dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\underline{f}$, $\underline{g} \in \mathcal{E}(p)$, sem perda de generalidade podemos supor que f, $g \in \mathcal{E}(\Omega)$, e assim temos

$$L_p(\alpha\underline{f} + \underline{g}) = L_p(\underline{\alpha f + g}) = L(\alpha f + g)(p) = \alpha L(f)(p) + L(g)(p) = \alpha L_p(\underline{f}) + L_p(\underline{g}),$$

e

$$L_p(\underline{fg}) = L(fg)(p) = f(p)L(g)(p) + g(p)L(f)(p) = f(p)L_p(\underline{g}) + g(p)L_p(\underline{f}).$$

De onde segue o resultado.

□

Proposição 1.34. *Dado $p \in \Omega$ e $f \in \mathcal{E}(\Omega)$. Se f é localmente constante em uma vizinhança de p , então $v(\underline{f}) = 0$ para todo $v \in T_p(\Omega)$.*

Demonstração. Digamos que $f \equiv c$ em uma vizinhança de p e consideremos $v \in T_p(\Omega)$ arbitrário. Note que, pela Regra de Leibniz, temos $v(\underline{1}) = v(\underline{1 \cdot 1}) = v(\underline{1}) + v(\underline{1}) = 2v(\underline{1})$, de onde podemos concluir que $v(\underline{1}) = 0$. Desta forma, como v é linear, segue que

$$v(\underline{f}) = v(\underline{c}) = cv(\underline{1}) = 0.$$

□

Teorema 1.35. *Se (U, x) é uma carta local e $p \in U$, então*

$$v = \sum_{j=1}^{N} v(\underline{x_j}) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p, \tag{1.9}$$

para todo $v \in T_p(\Omega)$.

Demonstração. Dada $f \in \mathcal{E}(U)$ e fazendo contas análogas a do item (b) do Teorema (1.25) segue que existe um aberto $V \subset U$ tal que $p \in V$ e

$$f|_V = f(p) + \sum_{j=1}^{N} g_j((x_j|_V - x_j|_V(p)),$$

com $g_j = h_j \circ x$ onde $h_j(x(q)) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x_j}((1-t)x(p) + tx(q))dt$. Logo

$$\underline{f} = \underline{f(p)} + \sum_{j=1}^{N} \underline{g_j}(\underline{x_j} - \underline{x_j(p)}).$$

Assim dado $v \in T_p(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned} v(\underline{f}) = v\left(\sum_{j=1}^{N} \underline{g_j}(\underline{x_j} - \underline{x_j(p)})\right) &= \sum_{j=1}^{N} v(\underline{g_j}(\underline{x_j} - \underline{x_j(p)})) \\ &= \sum_{j=1}^{N} g_j(p) v(\underline{x_j}) \\ &= \sum_{j=1}^{N} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(f)\right](p) v(\underline{x_j}) \\ &= \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p (\underline{f}) v(\underline{x_j}). \end{aligned}$$

Assim, como para toda $\underline{g} \in \mathcal{E}(p)$ é possível encontrar $f \in \mathcal{E}(U)$ tal que $\underline{f} = \underline{g}$, segue que

$$v = \sum_{j=1}^{N} v(\underline{x_j}) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p,$$

e consequentemente pela arbitrariedade de v o resultado.

$\square$

Proposição 1.36. $T_p(\Omega) \subset \{L_p : L \in \mathfrak{X}(\Omega)\}$

Demonstração. Por definição, existe uma carta local U tal que $p \in U$. Assim, dado $v \in T_p(\Omega)$ sabemos pelo Teorema 1.35 que

$$v = \sum_{j=1}^{N} v(\underline{x_j}) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p,$$

e definindo

$$\tilde{L} = \sum_{j=1}^{N} v(\underline{x_j}) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

temos $\tilde{L} \in \mathfrak{X}(U)$ é tal que $\tilde{L}_p = v$. Além disso, como existe $g \in \mathcal{E}(\Omega)$ tal que $g|_V = 1$, onde $V \subset U$ é uma vinhança de p e $g|_{\Omega - U} = 0$ (construção feita na Proposição 1.17), podemos definir a aplicação $L : \mathcal{E}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega)$ dada por

$$L(f)(q) = \begin{cases} (g\tilde{L})(f|_U)(q) & \text{se } q \in U \\ 0 & \text{se } q \notin U \end{cases}, \tag{1.10}$$

ou seja, um elemento $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ tal que $L_V = \tilde{L}_V$. De onde podemos concluir que $v = L_p$, que por sua vez junto com arbitrariedade de $v \in T_p(\Omega)$ nos garante o resultado.

$\square$

As proposições (1.33) e (1.36) nos garantem que os campos vetoriais e os vetores tangentes são essencialmente o mesmo objeto.

É também importante saber identificar um espaço tangente em uma subvariedade. Para isso temos o seguinte lema, que deve ser observado à luz do Lema 1.12.

Lema 1.37. *Seja M uma subvariedade de dimensão l de $\mathbb{R}^N$ definida por*

$$M = \{t \in \mathbb{R}^N;\ \rho_1(t) = \ldots = \rho_{N-l}(t) = 0\} \quad \textit{com} \quad d\rho_1 \wedge \ldots \wedge d\rho_{N-l} \neq 0 \quad \textit{em} \quad M.$$

Para um ponto $p \in M$

$$T_p(M) = \{L \in T_p(\mathbb{R}^N);\ L\{\rho_j\} = 0 \textit{ em } p \textit{ para } 1 \leq j \leq N-l\}.$$

Demonstração. A prova segue diretamente do Lema 1.12. Próximo a $p \in M$ podemos encontrar um difeomorfismo $x = (x_1, \ldots, x_N)$ com $x_{l+1} = \rho_1, \ldots, x_N = \rho_{N-l}$. Agora tome a aplicação $t \mapsto (x_1(t), \ldots, x_l(t)) \in \mathbb{R}^l$ como um sistema de coordenadas para M. Do Corolário 1.26 e lembrando que campos vetoriais e vetores tangentes são o mesmo objeto, podemos concluir que

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right)_p \right\}$$

é uma base para $T_p(M)$. Como $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right)(x_k) = 0$ se $j \neq k$, claramente $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right)(\rho_k) = 0$ para todo $1 \leq j \leq l$ e $1 \leq k \leq N-l$. Segue o resultado.

□

A seguir vamos definir os conceitos de fibrado e subfibrado tangente de Ω.

Definição 1.38. *Dizemos que a união disjunta $\mathcal{V} = \bigcup_{p \in \Omega} \mathcal{V}_p$ é um subfibrado tangente de $T(\Omega)$ de dimensão n e co-dimensão $N-n$ se ela satisfaz as seguintes condições*

(i) $\mathcal{V}_p$ é um subespaço vetorial de $T_p(\Omega)$ de dimensão n para todo $p \in \Omega$.

(ii) Dado $p_0 \in \Omega$ existe uma vizinhança U_0 de p_0 e campos vetoriais $L_1, \ldots, L_n \in \mathfrak{X}(U_0)$ tal que $\mathcal{V}_p$ é gerado por $L_{1_p}, \ldots, L_{n_p}$ para todo $p \in U_0$.

O subespaço vetorial $\mathcal{V}_p$ é chamado de fibra de $\mathcal{V}$ em p.

Exemplo 1.39. Considere $\Omega = \mathbb{R}^2$ e

$$T_p(\Omega) = \text{span}\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p \right\},$$

para todo $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$. Note que as fibras $\mathcal{V}_p = \text{span}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p\right\}$ satisfazem as condições (i) e (ii) da definição. Porém, se escolhermos $\mathcal{V}_p$ na forma

$$\mathcal{V}_p = \begin{cases} \text{span}\left\{\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)_p\right\}, & \text{se } p_1 > 0 \\ \text{span}\left\{\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)_p\right\}, & \text{se } p_2 \leq 0 \end{cases},$$

vemos que a condição (i) da definição é satisfeita, porém a condição (ii) não é satisfeita. Isto nos mostra uma descontinuidade em torno de qualquer ponto sobre o eixo y.

Definição 1.40. *Seja $\mathcal{V}$ um subfibrado tangente de $T(\Omega)$ e $W \subset \Omega$ um aberto. Dizemos que $L \in \mathfrak{X}(W)$ é uma seção de $\mathcal{V}$ sobre W se $L_p \in \mathcal{V}_p$ para todo $p \in W$.*

Definição 1.41. *Seja $\mathcal{V}$ um subfibrado tangente de $T(\Omega)$. Dizemos que $\mathcal{V}$ satisfaz a condição involutiva (ou de Frobenius) quando para todo $W \subset \Omega$ aberto vale o seguinte:*
Se L e M são seções de $\mathcal{V}$ sobre W então $[L, M]$ também é uma seção de $\mathcal{V}$ sobre W.

Definição 1.42. *Dizemos que o subfibrado tangente $\mathcal{V}$ é uma estrutura formalmente integrável sobre Ω quando $\mathcal{V}$ satisfaz a condição involutiva.*

Definição 1.43. *Uma solução clássica para uma estrutura formalmente integrável $\mathcal{V}$ sobre Ω é uma função u de classe C^1 em Ω tal que $Lu = 0$ para toda seção L de $\mathcal{V}$ sobre algum aberto de Ω.*

Exemplo 1.44. Suponha $\Omega = \mathbb{R}^2$ e defina

$$\mathcal{V} = \text{span}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p\right\},$$

para todo $p \in \mathbb{R}^2$. Temos que o subfibrado tangente $\mathcal{V}$ é uma estrutura formalmente integrável. De fato, pela Definição 1.42 basta verificarmos que $\mathcal{V}$ satisfaz a condição de Frobenius. Sejam $W \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $L, M \in \mathfrak{X}(W)$ seções de $\mathcal{V}$ sobre W. Então

$$L = a\frac{\partial}{\partial x} \quad e \quad M = b\frac{\partial}{\partial x},$$

onde $a, b \in \mathcal{E}(W)$. Logo,

$$\begin{aligned}
[L, M](f) &= L(M(f)) - M(L(f)) \\
&= L\left(b\frac{\partial f}{\partial x}\right) - M\left(a\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\
&= a\frac{\partial}{\partial x}\left(b\frac{\partial f}{\partial x}\right) - b\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\
&= a\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + ab\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - b\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} - ba\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\
&= \left(a\frac{\partial b}{\partial x} - b\frac{\partial a}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \text{para todo} \quad f \in \mathcal{E}(W).
\end{aligned}$$

Portanto, $[L, M] = \left(a\frac{\partial b}{\partial x} - b\frac{\partial a}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}$, donde $[L, M]$ é seção de $\mathcal{V}$ sobre W. Além disso, considere a aplicação $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $u(p) = c$ para todo $p \in \mathbb{R}^2$. É claro que $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Como $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, temos que u é solução clássica para a estrutura formalmente integrável $\mathcal{V}$ sobre $\mathbb{R}^2$.

Observação 1.45. A fim de facilitar as notações, a partir de agora iremos denotar os elementos da forma $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p$ pertencentes a $T_p(\Omega)$ por apenas $\frac{\partial}{\partial x_j}$, fica subentendida a aplicação em p.

Definição 1.46. *Seja $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N'}$ uma função suave em uma vizinhança do ponto $p \in \mathbb{R}^N$. Definimos a função $F_* : T_p(\mathbb{R}^N) \to T_{F(p)}(\mathbb{R}^{N'})$, chamada push forward de F em p, da seguinte forma*

$$F_*(v)\{g\} = v\{g \circ F\}, \tag{1.11}$$

para $v \in T_p(\mathbb{R}^N)$ e $g \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{N'})$.

Observação 1.47. Se L é um campo vetorial em Ω, a Equação 1.11 se torna

$$[F_*(L)]_{F(p)}\{g\} = L_p\{g \circ F\}.$$

Se $F : \Omega \to \Omega'$ é um difeomorfismo, então $F_*(L)$ é um campo vetorial em Ω'.

Exemplo 1.48. Vamos computar $F_*(\partial/\partial x_j)$, $1 \leq j \leq N$. Temos por definição que

$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\{x_k\} = \frac{\partial}{\partial x_j}\{x_k \circ F\} = \frac{\partial F_k}{\partial x_j},$$

onde $F = (F_1, \ldots, F_{N'})$. Portanto

$$\left[F_*\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right]_{F(p)} = \sum_{k=1}^{N'} \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(p)\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Se $L = \sum_{j=1}^{N} v_j \partial/\partial x_j$, então

$$\begin{aligned}
[F_*(L)]_{F(p)} &= \sum_{j=1}^{N} v_j \left[F_* \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right]_p \\
&= \sum_{k=1}^{N'} \left(\sum_{j=1}^{N} v_j \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(p) \right) \frac{\partial}{\partial x_k}.
\end{aligned}$$

1.4 FORMAS

Na presente seção definiremos o espaço dual de $T_p(\mathbb{R}^N)$, chamado espaço das formas de grau 1. Em seguida apresentaremos as r-formas, para então definir o *pull back*.

Definição 1.49. *O espaço dual de $T_p(\mathbb{R}^N)$ é denotado por $T_p^*(\mathbb{R}^N)$ e é chamado espaço das 1-formas (formas de grau 1) de $\mathbb{R}^N$ em p. Ou seja, este é o espaço dos funcionais lineares em $T_p(\mathbb{R}^N)$. Se ϕ é uma forma e v é um vetor em p, então denotamos o valor de ϕ aplicado em v por*

$$\langle \phi, v \rangle_p .$$

Seja $\{dx_j;\ 1 \leq j \leq N\}$ a base dual para $\{\partial/\partial x_j\ 1 \leq j \leq N\}$. Assim,

$$\left\langle dx_j, \frac{\partial}{\partial x_k} \right\rangle_p = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k. \end{cases}$$

Se $\alpha = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j dx_j$ é uma 1-forma e $v = \sum_{k=1}^{N} v_k(\partial/\partial x_k)$ é um vetor, então

$$\langle \alpha, v \rangle_p = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j v_j.$$

Note que $\langle \alpha, v \rangle$ é similar ao produto interno Euclidiano entre $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ e $(v_1, \ldots, v_N)$. Uma 1-forma diferencial em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um objeto na forma

$$\alpha = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j dx_j,$$

onde cada α_j é um elemento de $\mathcal{E}(\Omega)$.

Definição 1.50. *Seja V é um espaço vetorial, será denotado por $\Lambda^r(V)$ a r-ésima exterior de V, cuja base e dada por*

$$\{v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_r};\ 1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq N\},$$

onde $\{v_1, \ldots, v_N\}$ é uma base para V. Geralmente usamos a notação $v^I = v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_r}$ com I representando o conjunto multi-índice $\{i_1, \ldots, i_r\}$.

No contexto de vetores e formas, temos o espaço dos r-vetores $\Lambda^r(T_p(\mathbb{R}^N))$ e o espaço das r-formas $\Lambda^r(T_p^*(\mathbb{R}^N))$. Estes conjuntos possuem as seguintes bases, respectivamente,

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^I} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_r}};\ 1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq N\right\}$$

e

$$\left\{dx^I = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r};\ 1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq N\right\}.$$

O espaço $\Lambda^r(T_p^*(\mathbb{R}^N))$ pode ser visto como o espaço de funcionais lineares em $\Lambda^r(T_p(\mathbb{R}^N))$ pela definição

$$\langle \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_r, v_1 \wedge \ldots \wedge v_r \rangle_p = \sum_\sigma sgn(\sigma) \left\langle \phi_1, v_{\sigma(1)} \right\rangle_p \ldots \left\langle \phi_r, v_{\sigma(r)} \right\rangle_p,$$

onde $\phi_i \in T_p^*(\mathbb{R}^N)$ e $v_i \in T_p(\mathbb{R}^N)$ e com o somatório correndo sobre o conjunto de todas as permutações σ do conjunto $\{1, \ldots, r\}$. Aqui, $sgn(\sigma)$ é o fator $+1$ se a permutação σ for par e -1 se a permutação for ímpar. A coleção $\{dx^I\}$ é a base dual para $\{\partial/\partial x^J\}$, isto é,

$$\left\langle dx^I, \frac{\partial}{\partial x^J} \right\rangle_p = \begin{cases} 1 & \text{se } I = J; \\ 0 & \text{se } I \neq J. \end{cases}$$

Se $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N'}$ é uma função de classe C^1, podemos estender a definição de *push forward* à função $F_* : \Lambda^r(T_p\Omega) \to \Lambda^r(T_{F(p)}\Omega')$ tal que

$$F_*(v_1 \wedge \ldots \wedge v_r) = F_*(v_1) \wedge \ldots \wedge F_*(v_r).$$

Definição 1.51. *Dada $F : \Omega \to \Omega'$ função suave, definimos o pull back $F^* : \mathcal{E}^r(\Omega') \to \mathcal{E}^r(\Omega)$ do seguinte modo:*

(i) Se $r = 1$, ou seja, $F^* : \mathcal{E}^1(\Omega') \to \mathcal{E}^1(\Omega)$, defina

$$\langle F^*(\phi), v \rangle_p = \langle \phi, F_*(v) \rangle_{F(p)}, \tag{1.12}$$

com $v \in T_p\Omega$ e $\phi \in \mathcal{E}^1(\Omega')$. Se $v_n \to v$ em $T_p\Omega$, então $F_*(v_n) \to F_*(v)$ em $T_{F(p)}\Omega'$, logo $F^*(\phi)$ é funcional linear contínuo em $\mathcal{E}^r(\Omega')$.

(ii) Se $r > 1$, defina

$$F^*(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_r) = F^*(\phi_1) \wedge \ldots \wedge F^*(\phi_r). \tag{1.13}$$

Notemos que, das equações 1.12 e 1.13, temos

$$\langle F^*(\phi_1) \wedge \ldots \wedge F^*(\phi_r), v_1 \wedge \ldots \wedge v_r \rangle_p = \langle \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_r, F_*(v_1) \wedge \ldots \wedge F_*(v_r) \rangle_{F(p)}.$$

Podemos também computar *pull back* de uma forma usando coodenadas. Comecemos com uma forma de gral 1, dx_j. Segue das definições que

$$\left\langle F^*(dx_j), \frac{\partial}{\partial x_k} \right\rangle_p = \left\langle dx_j, F_* \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) \right\rangle_{F(p)}.$$

Porém, escrevendo $F = (F_1, \ldots, F_{N'})$, temos

$$F_* \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) \{x_l\} = \frac{\partial}{\partial x_k} \{x_l \circ F\} = \frac{\partial F_l}{\partial x_k},$$

e

$$\left[F_* \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) \right]_{F(p)} = \sum_{l=1}^{N'} \frac{\partial F_l}{\partial x_k}(p) \frac{\partial}{\partial x_l}.$$

Desse modo,

$$\left\langle F^*(dx_j), \frac{\partial}{\partial x_k} \right\rangle_p = \left\langle dx_j, \sum_{l=1}^{N'} \frac{\partial F_l}{\partial x_k}(p) \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle_{F(p)} = \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(p).$$

Agora, para um ponto $p \in \mathbb{R}^N$ temos

$$(F^* dx_j)(p) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial F_j(p)}{\partial x_k} dx_k = dF_j(p).$$

Se $\phi = \alpha dx^I = \alpha dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}$ com $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$F^*(\phi) = \alpha dF_{i_1} \wedge \ldots \wedge dF_{i_r}.$$

Finalmente, para $\alpha \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{N'})$, temos

$$F^*(\phi) = (\alpha \circ F) \ . \ dF_{i_1} \wedge \ldots \wedge dF_{i_r} = (\alpha \circ F) \ . \ dF^I. \tag{1.14}$$

Exemplo 1.52. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y, z) = (x + y^2, yz)$ e $\phi \in \mathcal{E}^2(\mathbb{R}^2)$ com $\phi = v^2 du \wedge dv$, assim

$$\begin{aligned} F^*(\phi) &= (yz)^2 d(x + y^2) \wedge d(yz) \\ &= (yz)^2 (dx + 2ydy) \wedge (zdy + ydz) \\ &= (yz)^2 (zdx \wedge dy + ydx \wedge dz + 2y^2 dy \wedge dz). \end{aligned}$$

Exemplo 1.53. Para a projeção $\pi : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ definido por $\pi(x, y) = y$, $x \in \mathbb{R}^N$ e $y \in \mathbb{R}^k$, temos $\pi^*(\phi) = \phi(y)$.

1.5 Derivada Exterior e Contração

Nesta seção iremos apresentar dois importantes exemplos de r-formas. A primeira é uma 1-forma, chamada derivada exterior de uma função f e denotada por df. A segunda é uma $(r-1)$-forma, chamada contração de ϕ por v e denotada po $v \lrcorner \phi$.

Definição 1.54. *Sejam $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, $p \in \mathbb{R}^N$, e $v \in T_p(\mathbb{R}^N)$. Define-se a derivada exterior df sendo*

$$\langle df(p), v \rangle_p = v\{f\}.$$

Se colocarmos f sendo a função coordenada x_j e v sendo o vetor $\partial/\partial x_k$, vemos que a derivada exterior de x_j é a mesma que a base dual definida como dx_j que vimos anteriormente. Deste modo, segue que

$$df(p) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) dx_k.$$

Agora, gostaríamos de estender a definição de derivada exterior para formas de alto grau e discutir suas propriedades. Primeiramente, é requerida a seguinte definição.

Definição 1.55. *Uma forma diferencial suave de grau r, ou ainda, uma r-forma suave em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um objeto na forma*

$$\phi = \sum_{|I|=r} f_I dx^I,$$

onde cada f_I é um elemento de $\mathcal{E}(\Omega)$.

O espaço de todas as r-formas suaves é denotado por $\mathcal{E}^r(\Omega)$. Além disso, denotamos por $\mathcal{D}^r(\Omega)$ o espaço das r-formas suaves com suporte compacto. Daremos mais ênfase aos conjuntos $\mathcal{E}^r(\Omega)$ e $\mathcal{D}^r(\Omega)$ no Capítulo 3

Definição 1.56. *A derivada exterior $d : \mathcal{E}^r(\Omega) \to \mathcal{E}^{r+1}(\Omega)$ é definida por*

$$d\left\{\sum_{|I|=r} f_I dx^I\right\} = \sum_{|I|=r} df_I \wedge dx^I.$$

Sendo df_I uma 1-forma suave, o lado direito é uma $(r+1)$-forma suave.

Lema 1.57. *Da definição de derivada exterior, tem-se*

(i) (Regra do Produto) $d(\phi_1 \wedge \phi_2) = d\phi_1 \wedge \phi_2 + (-1)^r \phi_1 \wedge d\phi_2$, para $\phi_1 \in \mathcal{E}^r(\Omega)$ e $\phi_2 \in \mathcal{E}^s(\Omega)$.

(ii) $d^2 = 0$, isto é, se $\phi \in \mathcal{E}^r(\Omega)$, então $d(d\phi) = 0$.

Demonstração. A parte (i) segue da Regra do Produto para diferenciação. Pela definição de derivada exterior, é suficiente provar a propriedade (ii) para funções (0-formas). Porém, isto segue por uma simples computação, lembrando do fato que para funções suaves a derivada parcial independe da ordem de derivação. $\square$

O seguinte lema mostra que a derivada exterior comuta com o *pull back*.

Lema 1.58. *Suponha* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\Omega' \subset \mathbb{R}^{N'}$ *e* $F : \Omega \to \Omega'$ *uma função* C^1. *Então,* $F^* \circ d = d \circ F^*$ *são funções de* $\mathcal{E}^r(\Omega')$ *para* $\mathcal{E}^{r+1}(\Omega)$, *para* $0 \leq r \leq N'$.

Demonstração. Suponha $\phi = \alpha dx^I$ com $\alpha \in \mathcal{E}(\Omega')$ e $|I| = r$. Segue de 1.14 que

$$F^*\phi = (\alpha \circ F)dF^I.$$

Como $d^2 = 0$, temos

$$d(F^*\phi) = d(\alpha \circ F) \wedge dF^I.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} F^*d\phi &= F^*(d\alpha \wedge dx^I) \\ &= F^*(d\alpha) \wedge dF^I. \end{aligned}$$

Comparando as duas expressões, podemos notar que para provar o lema, basta mostrar que

$$F^*(d\phi) = d(\alpha \circ F) \quad \text{para} \quad \alpha \in \mathcal{E}(\Omega').$$

Usando a notação $F^*(\alpha) = \alpha \circ F$, esta equação pode ser vista como o lema no caso $r = 0$. Isto pode ser provado com a Regra da Cadeia. $\square$

Observação 1.59. Dados v,w campos vetoriais suaves, a notação $[v, w]$ denota o Colchete de Lie dos vetores v e w, que é definido da mesma forma dos campos vetoriais (veja Definição 1.24): seja $p \in \mathbb{R}^N$, então

$$[v, w]_p\{f\} = v_p\{wf\} - w_p\{vf\}, \text{ para } f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N).$$

Se computarmos os Colchete de Lie nas funções coordenadas $f = x_j$, com $1 \leq j \leq N$, podemos facilmente mostrar que, para

$$v = \sum_{j=1}^{N} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad w = \sum_{j=1}^{N} b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad a_j, b_j \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$$

tem-se

$$[v, w] = \sum_{j=1}^{N} (v\{b_j\} - w\{a_j\}) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Lema 1.60. *Suponha ϕ uma 1-forma suave e v,w campos vetoriais suaves. Então*

$$\langle d\phi, v \wedge w\rangle = v\{\langle \phi, w\rangle\} - w\{\langle \phi, v\rangle\} - \langle \phi, [v,w]\rangle .$$

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que ambos os lados da equação são multilineares como funções dos campos vetoriais v e w. Isto é verdade para o lado esquerdo, pois produto exterior é multilinear. Para o lado direito, veja que

$$[a_1 v, a_2 w] = a_1(v\{a_2\}).w - a_2(w\{a_1\}).v + a_1 a_2 [v,w],$$

com $a_1, a_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$. Portanto, é suficiente provar o lema para $v = \partial/\partial x_j$ e $w = \partial/\partial x_k$ com $1 \leq j,k \leq N$. Nesse caso, $[v,w] \equiv 0$ e a equação segue de forma simples. $\square$

O operador contração $\lrcorner$ é definido no dual do produto exterior.

Definição 1.61. *Suponha v um vetor em $T_p(\mathbb{R}^N)$ e ϕ uma r-forma em $p \in \mathbb{R}^N$. A $(r-1)$-forma $v \lrcorner \phi$ definida por*

$$\langle v \lrcorner \phi, v_1 \wedge \ldots \wedge v_{r-1}\rangle_p = \langle \phi, v \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_{r-1}\rangle_p ,$$

é chamada contração de ϕ por v.

Por exemplo,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \lrcorner (dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}) = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq i_1, \ldots, i_r; \\ (-1)^{k-1} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dx_{i_{k+1}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} & \text{se } j = i_k. \end{cases}$$

Note que, na segunda expressão do lado direito apenas dx_{i_k} foi removido. O operador contração também satisfaz a Regra do Produto, como mostra o lema seguinte.

Lema 1.62. *Suponha v um vetor em $T_p^*(\mathbb{R}^N)$ e suponha que ϕ_1 pertence a $\Lambda^r T_p^*(\mathbb{R}^N)$ e ϕ_2 pertence a $\Lambda^s T_p^*(\mathbb{R}^N)$. Então,*

$$v \lrcorner (\phi_1 \wedge \phi_2) = (v \lrcorner \phi_1) \wedge \phi_2 + (-1)^r \phi_1 \wedge (v \lrcorner \phi_2).$$

Demonstração. A prova deste lema se faz primeiramente para os elementos básicos $v = \partial/\partial x_j$, $\phi_1 = dx^I$, $|I| = r$ e $\phi_2 = dx^J$, $|J| = s$. O caso geral segue do fato dos dois lados da equação serem multilineares como funções de v, ϕ_1 e ϕ_2. $\square$

Teorema 1.63. ***(Teorema de Stokes)*** *Suponha M uma subvariedade suave, orientada de dimensão l cuja fronteira está contido em uma variedade Ω de dimensão N. Suponha $\phi \in D^{l-1}(M)$, então*

$$\int_M d_M \phi = \int_{\partial M} \phi.$$

Aqui, ∂M tem a orientação induzida pelo fecho.

Demonstração. Vide [5], pág 33. □

Teorema 1.64. ***(Fórmula de Green)*** *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^N$ um domínio limitado cujo limite é suave e sejam u e v funções suaves em $\overline{\Omega}$. Então,*

$$\int_{\partial\Omega} (u\mathbb{N}v - v\mathbb{N}u)d\sigma = \int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)dx,$$

onde $\mathbb{N}$ é o vetor normal exterior unitário a $\partial\Omega$.

Demonstração. Vide [5], pág 37. □

Observação 1.65. Nas condições do Teorema de Green, se f é uma função suave em $\overline{\Omega}$, então

$$\mathbb{N}f = \left\langle \nabla f, \left(\frac{\partial|x|}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial|x|}{\partial x_n}\right)\right\rangle.$$

1.6 Complexificação de um Espaço Vetorial Real

Seja V um espaço vetorial real. A complexificação de V é o produto tensorial $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ (ou, simplesmente $V \otimes \mathbb{C}$). Claramente, $V \otimes \mathbb{C}$ é um espaço vetorial sobre os reais e é gerado por $v \otimes 1$ e $v \otimes i$, com $v \in V$. Além disso, $V \otimes \mathbb{C}$ pode ser visto como espaço vetorial complexo ao definir

$$\alpha(v \otimes \beta) = v \otimes \alpha\beta,$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $v \in V$. Dessa forma, $V \otimes \mathbb{C}$ é gerado sobre $\mathbb{C}$ por $v \otimes 1$ com $v \in V$. Se V é um espaço vetorial real de dimensão N, então $\dim_{\mathbb{R}} V \otimes \mathbb{C} = 2N$ e $\dim_{\mathbb{C}} V \otimes \mathbb{C} = N$. Para simplificar a notação será escrito $v\alpha$ ou αv para $v \otimes \alpha$. A forma mais natural de conjugar um operador de $V \otimes \mathbb{C}$ é a seguinte

$$\overline{\alpha v} = \overline{\alpha} v = v \otimes \overline{\alpha}.$$

Para exemplificar, seja M uma variedade suave de dimensão real N. Para $p \in M$, $T_p(M) \otimes \mathbb{C}$ é chamado espaço tangente complexificado e $T_p^*(M) \otimes \mathbb{C}$ chamado espaço cotangente complexificado. O espaço $T_p^*(M) \otimes \mathbb{C}$ pode ser visto como espaço complexo dual de $T_p(M) \otimes \mathbb{C}$ ao se definir

$$\langle \phi \otimes \alpha, L \otimes \beta \rangle_p = \langle \phi, L \rangle_p \otimes \alpha\beta,$$

com $\phi \in T_p^*(M)$, $L \in T_p(M)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Se $F : M \to N$ é uma função suave entre duas variedades suaves, então os operadores *push forward* e *pull back* podem ser estendidos à configuração complexificada. Se define $F_*(L \otimes \alpha) = F_*(L) \otimes \alpha$ e $F^*(\phi \otimes \alpha) = F_*\phi \otimes \alpha$, para $L \in T_p(M)$, $\phi \in T_p^*(M)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

O fibrado tangente complexificado $T^{\mathbb{C}}(M)$ é definido como

$$T^{\mathbb{C}}(M) = \bigcup_{p \in M} T_p(M) \otimes \mathbb{C}.$$

De forma similar, o fibrado cotangente complexificado é definido por

$$T^{*^{\mathbb{C}}}(M) = \bigcup_{p \in M} T_p^*(M) \otimes \mathbb{C}.$$

Um campo vetorial complexificado L de M é uma seção suave de $T^{\mathbb{C}}(M)$. Isto significa que L atribui para cada ponto $p \in M$ um vetor L_p pertencente a $T_p(M) \otimes \mathbb{C}$. Em qualquer sistema de coordenadas $\chi = (x_1, \ldots, x_n) : U \subset M \to \mathbb{R}^N$, pode-se expressar L por

$$L_p = \sum_{j=1}^{N} a_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

onde cada a_j é uma função suave de valores complexos definida em U. Um subfibrado $\mathcal{V}$ de $T^{\mathbb{C}}(M)$ de dimensão complexa m atribui a um subespaço $\mathcal{V}_p$ de $T_p(M) \otimes \mathbb{C}$ de dimensão complexa m em cada ponto $p \in M$. É requerido que esses espaços se encaixem suavemente, no sentido que próximo a um ponto $p_0 \in M$ existam m campos vetoriais complexos suaves linearmente independentes $L^1, \ldots, L^m$ tal que $\mathcal{V}_p$ é gerado em $\mathbb{C}$ por $L_p^1, \ldots, L_p^m$.

Se M é uma variedade complexa de dimensão complexa n, é importante distinguir entre um fibrado tangente real e um fibrado tangente complexificado. O fibrado tangente real $T(M)$ e suas fibras $T_p(M)$, têm dimensão real $2n$, quando admitimos M ter dimensão real $2n$. Já as fibras de um fibrado tangente complexificado $T_p(M) \otimes \mathbb{C}$ têm dimensão complexa $2n$.

O r-ésimo exterior de $T_p(M) \otimes \mathbb{C}$ e $T_p^*(M) \otimes \mathbb{C}$ são chamados de espaço de r-vetores complexificados e espaço de r-formas complexificadas, respectivamente. Seja $p \in M$ um ponto qualquer, tem-se o fibrado de r-vetores $\Lambda^r T^{\mathbb{C}}(M)$ e o fibrado de r-formas $\Lambda^r T^{*^{\mathbb{C}}}(M)$. O espaço das r-formas suaves de $\Lambda^r T^{*^{\mathbb{C}}}(M)$ é chamado de espaço das formas diferenciais complexas de grau r e é denotado por $\mathcal{E}^r(M)$. Um elemento de $\mathcal{E}^r(M)$ pode ser escrito em coordenadas locais $\chi = (x_1, \ldots, x_N) : U \subset M \to \mathbb{R}^N$ por

$$\phi = \sum_{|I|=r} \phi_I dx^I,$$

onde cada ϕ_I é uma função suave de valores complexos em U.

A derivada exterior e a integral é facilmente generalizada para a forma complexa. Em coordenadas locais, define-se

$$d\phi = \sum_{|I|=r} d\phi_I \wedge dx^I \in \mathcal{E}^{r+1}(M),$$

onde

$$d\phi_I = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \phi_I}{\partial x_j} dx_j.$$

A prova que a derivada exterior é independente da escolha das coordenadas locais é análoga a prova do caso real.

1.7 Estruturas Complexas

Nesta seção iremos definir a função estrutura complexa, que será de extrema importância na definição de Variedades CR (Capítulo 4). Também iremos encontrar bases para $T_p(M)$ e $T_p^*(M)$, onde M é uma variedade complexa.

Definição 1.66. *Seja V um espaço vetorial real. Uma função linear $J : V \to V$ é chamada de função estrutura complexa se $J \circ J = -I$, onde $I : V \to V$ é a função identidade.*

Uma função estrutura complexa só pode ser definida em espaços vetoriais de dimensão par, pois $(\det J)^2 = (-1)^N$ onde $N = \dim_{\mathbb{R}} V$.

Exemplo 1.67. Seja $V = T_p(\mathbb{R}^{2n}) \cong T_p(\mathbb{C}^n)$. Tomemos as coordenadas de $\mathbb{R}^{2n}$ na forma $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$. A estrutura complexa padrão definida em $T_p(\mathbb{R}^{2n})$ é a seguinte

$$
\begin{aligned}
J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) &= \frac{\partial}{\partial y_j},\\
J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) &= -\frac{\partial}{\partial x_j},
\end{aligned}
$$

com $1 \leq j \leq n$. Essa função estrutura complexa pode ser vista como uma simulação da multiplicação por $i = \sqrt{-1}$.

Lema 1.68. *Se $u, v \in T_p(\mathbb{R}^{2n})$, então $Ju.v = -u.Jv$. Em particular $Ju.Jv = u.v$.*

Demonstração. Sejam $v, w \in T_p(\mathbb{R}^{2n})$, suponha

$$
\begin{aligned}
u &= \sum_{j=1}^{n}\left(u_j\frac{\partial}{\partial x_j} + \hat{u}_j\frac{\partial}{\partial y_j}\right),\\
v &= \sum_{j=1}^{n}\left(v_j\frac{\partial}{\partial x_j} + \hat{v}_j\frac{\partial}{\partial y_j}\right).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
Ju &= \sum_{j=1}^{n}\left(\hat{u}_j\frac{\partial}{\partial y_j} - u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right),\\
Jv &= \sum_{j=1}^{n}\left(\hat{v}_j\frac{\partial}{\partial y_j} - v_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right).
\end{aligned}
$$

Dessa forma,

$$Ju.v = \sum_{j=1}^{n}\left(-u_jv_j\frac{\partial}{\partial x_j} + \hat{u}_j\hat{v}_j\frac{\partial}{\partial y_j}\right),$$
$$u.Jv = \sum_{j=1}^{n}\left(u_jv_j\frac{\partial}{\partial x_j} - \hat{u}_j\hat{v}_j\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

Portanto, $Ju.v = -u.Jv$. □

Exemplo 1.69. Um exemplo de função estrutura complexa é dada por $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ onde $J(x, y) = (-y, x)$. Note que,

$$J(x, y).(w, z) = (-y, x).(w, z) = -yw + xz = (-x, -y).(-z, w) = -(x, y).J(w, z).$$

A função estrutura complexa J^* para o espaço cotangente $T_p^*(\mathbb{R}^{2n})$ é definida sendo o dual de J. Para $p \in \mathbb{R}^{2n}$, tem-se

$$\langle J^*\phi, v\rangle_p = \langle \phi, Jv\rangle_p \qquad \text{com } \phi \in T_p^*(\mathbb{R}^{2n}) \text{ e } v \in T_p(\mathbb{R}^{2n}).$$

Pondo $\phi = dx_j$ ou dy_j e $v = \partial/\partial x_j$ ou $\partial/\partial y_j$, obtem-se

$$J^*dx_j = -dy_j$$
$$J^*dy_j = dx_j \qquad 1 \leq j \leq n.$$

Um estrutura complexa pode ser definida em um fibrado tangente real de uma variedade complexa M via *push forward* de $\mathbb{C}^n$ para M com um sistema de coordenadas. Para $p \in M$ e um sistema de coordenadas holomórfico $Z : U \subset M \to \mathbb{C}^n$ (com $p \in U$), define-se a estrutura complexa $J_p : T_p(M) \to T_p(M)$ por

$$J_p(v) = Z_*^{-1}(Z(p))\{JZ_*(p)(v)\}. \tag{1.15}$$

Na Equação 1.15, J é uma estrutura complexa em $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. Ao tomar $z = (z_1, \ldots, z_n)$ com $z_j = x_j + iy_j$, segue da definição que $J_p(\partial/\partial x_j) = \partial/\partial y_j$ e $J_p(\partial/\partial y_j) = -(\partial/\partial x_j)$. Além disso, J_p é independente da escolha do sistema de coordenadas holomórfico. De fato, dado um outro sistema $W : U' \to \mathbb{C}^n$, então $Z \circ W^{-1}$ é uma função holomorfa de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^n$, portanto, o *push forward* comuta com J. Então, $J_p : T_p(M) \to T_p(M)$ está bem definido para $p \in M$. De forma análoga, uma estrutura complexa J_p^* se define em $T_p^*(M)$.

Se $J : V \to V$ é uma estrutura complexa em um espaço vetorial real V, então J pode ser estendido a uma função estrutura complexa na complexificação de V com a configuração

$$J(\alpha v) = \alpha J(v) \qquad \text{com } v \in V \text{ e } \alpha \in \mathbb{C}.$$

Dessa forma,

$$J\overline{v} = \overline{Jv} \qquad \text{com } v \in V \otimes \mathbb{C}.$$

Como $J \circ J = -I$ em V, o mesmo acontece em $V \otimes \mathbb{C}$. Portanto, $J : V \otimes \mathbb{C} \to V \otimes \mathbb{C}$ tem autovalores $+i$ e $-i$ cujos autoespaços correspondentes serão denotados por $V^{1,0}$ e $V^{0,1}$. Tem-se, da álgebra elementar que

$$V \otimes \mathbb{C} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}.$$

Como $J\overline{v} = \overline{Jv}$, para $v \in V \otimes \mathbb{C}$, tem-se $\overline{V^{1,0}} = V^{0,1}$.

Podem ser facilmente construídas bases para $V^{1,0}$ e $V^{0,1}$. Primeiramente, nota-se para $v \in V$ que, os vetores v e Jv são linearmente independentes em $\mathbb{R}$ pois J não tem autovalor real. Assim, pode intuitivamente se criar uma base (em $\mathbb{R}$) para V na forma

$$v_1, Jv_1, \ldots, v_n, Jv_n,$$

onde $2n = \dim_{\mathbb{R}} V$. Afirmamos que o conjunto

$$\{v_1 - iJv_1, \ldots, v_n - iJv_n\},$$

é uma base para o espaço vetorial $V^{1,0}$ de dimensão complexa n. De fato, cada vetor $v_j - iJv_j$ pertence a $V^{1,0}$, uma vez que

$$J(v_j - iJv_j) = -iJ^2 v_j + Jv_j = i(v_j - iJv_j).$$

Além disso, esse conjunto de vetores é linearmente independente em $\mathbb{C}$. Por outro lado, o conjunto

$$\{v_1 + iJv_1, \ldots, v_n + iJv_n\},$$

é uma base para $V^{0,1}$.

Retomaremos para $T_p(M)$ onde M é uma variedade complexa n-dimensional. Seja $(z_1, \ldots, z_n)$ com $z_j = x_j + iy_j$ um conjunto de coordenadas locais holomórfico de M. Define-se os campos vetoriais

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_j} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \qquad 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Deste modo, uma base para $T_p^{1,0}(M)$ é dada por $\{\partial/\partial z_1, \ldots, \partial/\partial z_n\}$ e uma base para $T_p^{0,1}(M)$ por $\{\partial/\partial\overline{z}_1, \ldots, \partial/\partial\overline{z}_n\}$. Analogamente, define-se

$$\begin{aligned} dz_j &= dx_j + idy_j \\ d\overline{z}_j &= dx_j - idy_j, \qquad 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

e tem-se como uma base para $T_p^{*^{1,0}}(M)$ o conjunto $\{dz_1, \ldots, dz_n\}$ e como uma base para $T_p^{*^{0,1}}(M)$ o conjunto $\{d\overline{z}_1, \ldots, d\overline{z}_n\}$.

Com esses elementos temos as seguintes combinações

$$\left\langle dz_j, \frac{\partial}{\partial z_k} \right\rangle_p = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k, \end{cases}$$

$$\left\langle d\overline{z}_j, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \right\rangle_p = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k. \end{cases}$$

Além disso,

$$\left\langle dz_j, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \right\rangle_p = 0 \qquad \text{e} \qquad \left\langle d\overline{z}_j, \frac{\partial}{\partial z_k} \right\rangle_p = 0.$$

Em particular, se $\phi \in T_p^{*^{1,0}}(M)$ e $v \in T_p^{0,1}(M)$, então $\langle \phi, v \rangle_p = 0$. Analogamente, se $\psi \in T_p^{*^{0,1}}(M)$ e $w \in T_p^{1,0}(M)$, então $\langle \psi, w \rangle_p = 0$.

Lema 1.70. *Suponha V um espaço vetorial real de dimensão par. Seja $\mathcal{V}$ um subespaço complexo de $V \otimes \mathbb{C}$ com as seguintes propriedades*

(i) $\mathcal{V} \cap \overline{\mathcal{V}} = \{0\}$;

(ii) $\mathcal{V} \oplus \overline{\mathcal{V}} = V \otimes \mathbb{C}$.

Então, existe uma única função estrutura complexa J em V tal que $\mathcal{V}$ e $\overline{\mathcal{V}}$ são auto-espaços da extensão de J em $V \otimes \mathbb{C}$.

Demonstração. Primeiramente, definamos $J^{\mathbb{C}} : V \otimes \mathbb{C} \to V \otimes \mathbb{C}$ por

$$\begin{aligned} J^{\mathbb{C}}(L) &= iL \qquad \text{se} \qquad L \in \mathcal{V}, \\ J^{\mathbb{C}}(L) &= -iL \qquad \text{se} \qquad L \in \overline{\mathcal{V}}. \end{aligned}$$

A propriedade (i) implica que $J^{\mathbb{C}}$ está bem definida. A propriedade (ii) mostra que $J^{\mathbb{C}}$ pode ser estendida à uma função linear complexa, definida em todo $V \otimes \mathbb{C}$. Claramente, $\mathcal{V}$ e $\overline{\mathcal{V}}$ são os auto-espaços $+i$ e $-i$ para $J^{\mathbb{C}}$, respectivamente. Resta provar que $J^{\mathbb{C}}$ é uma função que leva V em V, para assim encontrarmos a J desejada que é a restrição de $J^{\mathbb{C}}$ em V. Notemos que os vetores

$$
\begin{aligned}
X &= L + \overline{L} \qquad L \in \mathcal{V}, \\
Y &= i(L - \overline{L}) \qquad L \in \mathcal{V},
\end{aligned}
$$

são reais, isto é, $\overline{X} = X$ e $\overline{Y} = Y$. Logo, X e Y pertencem $V \otimes 1$. Como $\mathcal{V} \oplus \overline{\mathcal{V}} = V \otimes \mathbb{C}$, V é gerado por vetores da forma de X e Y. Como $J^{\mathbb{C}}X = Y$ e $J^{\mathbb{C}}Y = -X$, temos que J^C é uma função de V em V, como queríamos mostrar. $\square$

1.8 FORMAS COMPLEXIFICADAS DE GRAU ELEVADO

Seja M uma variedade complexa de dimensão n. Para $0 \leq r \leq 2n$, foi definido $\Lambda^r T^{*^{\mathbb{C}}}(M)$ sendo o fibrado das r-formas complexificadas e $\mathcal{E}^r(M)$ o espaço das r-formas em M cujos coeficientes são funções suaves de valores complexos. Para $0 \leq p, q \leq n$ e $p \in M$, define-se o espaço

$$
\Lambda_z^{p,q} T^*(M) = \Lambda^p\{T_z^{*^{1,0}}(M)\} \widehat{\otimes} \Lambda^q\{T_z^{*^{0,1}}(M)\}.
$$

Aqui, $\widehat{\otimes}$ denota o produto tensorial antissimétrico. Em outras palavras, se $(z_1, \ldots, z_n)$ é um conjunto de coordenadas holomorfas de M, então $\Lambda_z^{p,q}T^*(M)$ é o espaço vetorial gerado em $\mathbb{C}$ por

$$
\{dz^I \wedge d\overline{z}^J = dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{j_q}\},
$$

com $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ e $J = \{j_1, \ldots, j_q\}$ conjuntos de multi-índices. Analogamente, define-se o espaço

$$
\Lambda_z^{p,q} T(M) = \Lambda^p\{T_z^{1,0}(M)\} \widehat{\otimes} \Lambda^q\{T_z^{0,1}(M)\},
$$

o qual, é gerado pelo conjunto

$$
\left\{ \frac{\partial}{\partial z^I} \wedge \frac{\partial}{\partial \overline{z}^J};\ |I| = p, |J| = q \right\}.
$$

Ao deixar o ponto $z \in M$ variar, obtemos os fibrados $\Lambda^{p,q}(T^*(M))$ e $\Lambda^{p,q}T(M)$ de forma usual. O espaço das seções suaves de $\Lambda^{p,q}(T^*(M))$ é denotado por $\mathcal{E}^{p,q}(M)$ e chamado de espaço das formas diferenciais em M de bigrau (p, q), e seus elementos podem ser expressados em coordenadas locais por

$$
\phi = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \phi_{IJ} dz^I \wedge d\overline{z}^J
$$

onde cada ϕ_{IJ} é uma função suave de valores complexos. Em coordenadas locais $z_j = x_j + iy_j$, tem-se

$$\begin{aligned} dx_j &= \frac{1}{2}\left(dz_j + d\overline{z}_j\right) \\ dy_j &= -\frac{i}{2}\left(dz_j - d\overline{z}_j\right) \qquad \text{com } 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Sendo assim, qualquer elemento de $\Lambda^r(T^{*^{\mathbb{C}}}(M))$ pode ser escrito como a soma de formas de grau elevado, isto é,

$$\Lambda^r(T^{*^{\mathbb{C}}}(M)) = \Lambda^{r,0}(T^*(M)) \oplus \ldots \oplus \Lambda^{0,r}(T^*(M)).$$

Portanto

$$\mathcal{E}^r(M) = \mathcal{E}^{r,0}(M) \oplus \ldots \oplus \mathcal{E}^{0,r}(M).$$

Para $0 \leq p, q \leq n$ com $p + q = r$, define-se a projeção natural

$$\pi^{p,q} : \Lambda^r(T^{*^{\mathbb{C}}}(M)) \to \Lambda^{p,q}(T^*(M)).$$

Definição 1.71. *O operador de Cauchy-Riemann* $\overline{\partial} : \mathcal{E}^{p,q}(M) \to \mathcal{E}^{p,q+1}(M)$ *e o operador* $\partial : \mathcal{E}^{p,q}(M) \to \mathcal{E}^{p+1,q}(M)$ *são definidos por*

$$\begin{aligned} \overline{\partial} &= \pi^{p,q+1} \circ d \\ \partial &= \pi^{p+1,q} \circ d. \end{aligned}$$

Para uma função suave $f : M \to \mathbb{C}$, tem-se

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j,$$

a qual pode ser reescrita como

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j.$$

O primeiro termo do lado direito é um elemento de $\mathcal{E}^{1,0}(M)$ e o segundo termo uma elemento de $\mathcal{E}^{0,1}(M)$. Portanto

$$\begin{aligned} \partial f &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j \\ \overline{\partial} f &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j. \end{aligned}$$

Assim, $df = \partial f + \overline{\partial} f$. Nota-se também que, uma função C^1 $f : M \to \mathbb{C}$ é holomorfa se, e somente se, $\overline{\partial} f = 0$. Agora, para as formas de grau elevado, tem-se

$$\begin{aligned} \partial\{f dz^I \wedge d\overline{z}^J\} &= \partial f \wedge dz^I \wedge d\overline{z}^J \qquad \text{com } f \in \mathcal{E}(M) \\ \overline{\partial}\{f dz^I \wedge d\overline{z}^J\} &= \overline{\partial} f \wedge dz^I \wedge d\overline{z}^J \end{aligned}$$

então

$$df = \partial f + \overline{\partial} f. \tag{1.16}$$

Outras observações importantes são que $\partial^2 \phi = 0$, $\overline{\partial}^2 \phi = 0$ e $\partial\overline{\partial}\phi = -\overline{\partial}\partial\phi$ para $\phi \in \mathcal{E}^{p,q}(M)$. Isto segue do fato de $0 = d^2\phi = \partial^2\phi + (\partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial)\phi + \overline{\partial}^2\phi$ e que $\partial^2\phi$, $(\partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial)\phi$ e $\overline{\partial}^2\phi$ possuem bigraus diferentes ($(p+2,q)$, $(p+1,q+1)$ e $(p,q+2)$, respectivamente).

Lema 1.72.

(i) $d = \partial + \overline{\partial}$;

(ii) $\partial^2 = 0$, $\partial\overline{\partial} = -\overline{\partial}\partial$ *e* $\overline{\partial}^2 = 0$.

Demonstração. Segue da Equação 1.16. □

Lema 1.73. *Se* $f \in \mathcal{E}^{p,q}(M)$ *e* $g \in \mathcal{E}^{r,s}(M)$*, então*

$$\begin{aligned} \overline{\partial}(f \wedge g) &= \overline{\partial} f \wedge g + (-1)^{p+q} f \wedge \overline{\partial} g, \\ \partial(f \wedge g) &= \partial f \wedge g + (-1)^{p+q} f \wedge \partial g. \end{aligned}$$

Demonstração. Segue da Regra do Produto para derivada exterior. □

Lema 1.74. *Sejam* M *e* N *variedades complexas e* $F : M \to N$ *uma função holomorfa. Se* $\phi \in \Lambda^{p,q}_{F(z)} T^*(N)$*, então* $F^*\phi$ *é um elemento de* $\Lambda^{p,q}_z T^*(M)$.

Demonstração. Sejam $w_1, \ldots, w_n$ um sistema de coordenadas em N e $F_j = w_j \circ F : M \to \mathbb{C}$, $1 \leq j \leq n$, então

$$F^* dw_j = dF_j \quad \text{e} \quad F^* d\overline{w}_j = d\overline{F}_j.$$

Como F é holomorfa, $\overline{\partial} F_j = 0$. Conjugando obtem-se $\partial \overline{F}_j = 0$. Assim, como $d = \partial + \overline{\partial}$, tem-se

$$F^* dw_j = \partial F_j \in \Lambda^{1,0} T^*(M)$$

$$F^* d\overline{w}_j = \overline{\partial F}_j \in \Lambda^{0,1} T^*(M).$$

Se $|I| = p$ e $|J| = q$, então $F^*(dw^I \wedge d\overline{w}^J) \in \Lambda^{p,q} T^*(M)$. Como $\{dw^I \wedge d\overline{w}^J; |I| = p, |J| = q\}$ é uma base local de $\Lambda^{p,q} T^*(N)$, a prova está completa. □

Sabe-se da Seção 1.5 que o operador pull back comuta com a derivada exterior. Dada uma função holomorfa entre variedades complexas, o operador pull back também comuta com ∂ e $\overline{\partial}$, como diz o próximo lema.

Lema 1.75. *Sejam M e N variedades complexas e $F : M \to N$ uma função holomorfa. Então $F^* \circ \overline{\partial} = \overline{\partial} \circ F^*$ e $F^* \circ \partial = \partial \circ F^*$.*

Demonstração. No lado esquerdo da equação $F^* \circ \overline{\partial} = \overline{\partial} \circ F^*$ o operador $\overline{\partial}$ está em N enquanto que no lado direito $\overline{\partial}$ está em M. Como F^* comuta com a derivada exterior e preserva o bigrau, a prova do lema segue facilmente. □

Lema 1.76. *Se f é uma função suave de valores complexos definida em uma variedade complexa M, então*

$$\begin{aligned} \partial f &= \frac{1}{2}(df - iJ^*df) \\ \overline{\partial} f &= \frac{1}{2}(df + iJ^*df). \end{aligned}$$

O operador $J^* \circ d$ também pode ser denotado por $d^{\mathbb{C}}$. Logo, $(1/2)d^{\mathbb{C}} = (1/2)J^* \circ d$ é parte imaginária do operador $\overline{\partial}$.

Demonstração. Dada a função f, a forma ∂f pertence a $T^{*^{1,0}}(M)$, o qual é o auto-espaço $+i$ de J^*. Da mesma forma, $\overline{\partial} f$ pertence a $T^{*^{0,1}}(M)$, o qual é o auto-espaço $-i$ de J^*. Aplicando J^* na equação $df = \partial f + \overline{\partial} f$, obtem-se

$$J^*df = i\partial f - i\overline{\partial} f.$$

Somando esta equação com $idf = i\partial f + i\overline{\partial} f$ e dividindo o resultado por $2i$ prova-se a primeira afirmação do lema. A segunda se prova de forma similar. □

2 TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES

A Teoria das Distribuições generaliza noções clássicas da Análise Matemática. Isto possibilita, em Equações Diferenciais Parciais, um estudo sistemático das soluções fundamentais, pois é permitido derivar uma maior classe de funções. Neste texto, é definido o espaço das distribuições e suas operações essenciais, dispondo de exemplos. Também se demonstra que se uma função é diferenciável no sentido clássico, então a derivada nos dois sentidos coincidem. Em seguida, para ilustrar a força das técnicas apresentadas, se calcula as soluções fundamentais para algumas equações diferenciais parciais de suma importância, a saber: o operador de Cauchy-Riemann em $\mathbb{C}$ e o Laplaciano Δ em $\mathbb{R}^N$.

2.1 Os Espaços $\mathcal{D}'$ e $\mathcal{E}'$

Seja Ω um conjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. A topologia em $\mathcal{E}(\Omega)$ pode ser descrita pelas seminormas a seguir. Seja $\{K_n\}$ uma sequência de subconjuntos compactos encaixados de Ω tal que $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$. As seminormas $\rho_n : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, são definidas por

$$\rho_n(f) = \sup_{\substack{|\alpha| \leq n \\ x \in K_n}} |D^\alpha f(x)| \quad , \quad f \in \mathcal{E}(\Omega).$$

Tem-se que $f_m \to f$ em $\mathcal{E}(\Omega)$ se, e somente se, $\rho_n(f_m) - \rho_n(f) \to 0$ quando $m \to \infty$ para cada $n = 1, 2, \ldots$. Munido desta topologia, $\mathcal{E}(\Omega)$ é completo (Boggess, 1991) e tem a seguinte propriedade: uma sequência (f_n) converge para f em $\mathcal{E}(\Omega)$ quando $D^\alpha f_n$ converge uniformemente a $D^\alpha f$ em cada subconjunto compacto de Ω, para cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, onde

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}} \;\text{ e }\; |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N.$$

No espaço $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$ será empregada a topologia do subespaço. A sequência (ϕ_n) é dita convergir a ϕ em $\mathcal{D}(\Omega)$ se existe um compacto fixado K que contém o suporte de cada ϕ_n e tal que $D^\alpha \phi_n \to D^\alpha \phi$ uniformemente em K para cada α.

Definição 2.1. *Dado um subconjunto aberto Ω de $\mathbb{R}^N$, o espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$ é definido como sendo o dual topológico do espaço $\mathcal{D}(\Omega)$. Isto é, $\mathcal{D}'(\Omega)$ é o espaço de todos os funcionais lineares contínuos $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$. Analogamente, $\mathcal{E}'(\Omega)$ é definido como o espaço dual topológico de $\mathcal{E}(\Omega)$.*

Nota-se que $\mathcal{E}'(\Omega)$ é um subespaço de $\mathcal{D}'(\Omega)$, pois $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$ e, se uma sequência converge em $\mathcal{D}(\Omega)$, ela também converge em $\mathcal{E}(\Omega)$. O pareamento entre um elemento

T de $\mathcal{D}'(\Omega)$ e um elemento ϕ de $\mathcal{D}(\Omega)$ será denotado por $(T,\phi)_\Omega \in \mathbb{C}$.

Exemplo 2.2. Dado um ponto $p \in \mathbb{R}^N$, a distribuição delta de p, δ_p, é definida em $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ por

$$(\delta_p, f)_{\mathbb{R}^N} = f(p) \quad , \quad f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N).$$

De fato, δ_p é linear visto que, dados f e g em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$(\delta_p, \alpha f + g)_{\mathbb{R}^N} = (\alpha f + g)(p) = \alpha f(p) + g(p) = \alpha(\delta_p, f)_{\mathbb{R}^N} + (\delta_p, g)_{\mathbb{R}^N},$$

e δ_p é contínua pois dada uma sequência (f_n) e f em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$,

$$|(\delta_p, f_n)_{\mathbb{R}^N} - (\delta_p, f)_{\mathbb{R}^N}| = |f_n(p) - f(p)|,$$

ou seja, se $f_n \to f$ em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, então $(\delta_p, f_n)_{\mathbb{R}^N} \to (\delta_p, f)_{\mathbb{R}^N}$ em $\mathbb{C}$.

O próximo exemplo é o mais importante da Teoria das Distribuições. A saber, é possível ser feita uma identificação entre o espaço $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e um subconjunto próprio de $\mathcal{D}'(\Omega)$, visto que, dada uma função f localmente integrável em Ω, pode-se definir, de modo injetivo, a distribuição T_f. Ressaltamos que, na Seção (2.2), as funções suaves serão trabalhadas como distribuições, pois são localmente integráveis.

Exemplo 2.3. Seja f uma função localmente integrável em Ω. Então, T_f pode ser visto como um elemento de $\mathcal{D}'(\Omega)$ quando se define

$$(T_f, \phi)_\Omega = \int_{x\in\Omega} f(x)\phi(x)dx \quad , \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.1}$$

A linearidade é clara, e a continuidade decorre da estimativa

$$|(T_f, \phi)_\Omega| \leq \sup |\phi(t)| \int_{x\in\Omega} |f(x)|dx,$$

uma vez que, dados (ϕ_n) e ϕ em $\mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
|(T_f, \phi_n)_\Omega - (T_f, \phi)_\Omega| &= \left| \int_{x\in\Omega} f(x)\phi_n(x)dx - \int_{x\in\Omega} f(x)\phi(x)dx \right| \\
&= \left| \int_{x\in\Omega} f(x)(\phi_n(x) - \phi(x))dx \right| \\
&\leq \sup |\phi_n(t) - \phi(t)| \int_{x\in\Omega} |f(x)|dx.
\end{aligned}$$

Dessa forma, se $\phi_n \to \phi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $(T_f, \phi_n)_\Omega \to (T_f, \phi)_\Omega$. Assim, $T_f = (T_f, .)_\Omega$ define um elemento de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Se o suporte de f é um subconjunto compacto de Ω, então T_f é um elemento de $\mathcal{E}'(\Omega)$.

A Identificação (2.1) é injetiva, em outras palavras, se $(T_f, \phi)_\Omega = (T_g, \phi)_\Omega$ para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e f e g são localmente integráveis, então $f = g$ $q.t.p.$. Com efeito, se K é um compacto de Ω, $h = f - g$ $q.t.p.$ e $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ é igual a 1 em K e 0 fora de Ω, então ψh é integrável em $\mathbb{R}^N$. Considere

$$(\psi h)_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \int (\psi h)(y) \phi \left(\frac{x-y}{\varepsilon} \right) dy = (T_f, \beta)_\Omega - (T_g, \beta)_\Omega = 0,$$

onde $\beta(y) = \varepsilon^{-n} \psi(y) \phi \left(\frac{x-y}{\varepsilon} \right) \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Segue (Teorema I.2.1, Hounie, 1979) que

$$\int |(\psi h)_\varepsilon(x) - (\psi h)(x)| dx = \|(\psi h)_\varepsilon - \psi h\|_1 \longrightarrow 0 \text{ quando } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

e daí concluí-se que $\psi h = 0$ $q.t.p.$ e, em particular, $h(x) = 0$ $q.t.p.$ em K. Tomando uma sequência de compactos $\{K_n\}$ tais que $\cup K_n = \Omega$, obtém-se que $f = g$ $q.t.p.$.

A Partir de agora, será abandonada a notação T_f e será escrito simplesmente $(f, \phi)_\Omega = \displaystyle\int f \phi dx$. Uma distribuição T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ ou $\mathcal{E}'(\Omega)$ é dita se anular em um aberto U de Ω se $(T, \phi)_\Omega = 0$ para toda $\phi \in \mathcal{D}(U)$. O suporte de uma distribuição T (denotada por $supp\ T$) é definido como sendo o menor conjunto fechado em Ω que contém o conjunto em que T não se anula. No Exemplo (2.2), $supp\ \delta_p$ é o conjunto unitário $\{p\}$, pois se $p \notin U$ e $f \in \mathcal{D}(U)$ então $f(p) = 0$. No Exemplo (2.3), o suporte de f, vista como distribuição, é igual ao suporte usual de f, vista como função definida em Ω, já que, se f se anula em $U \subset \Omega$ então $(f, \phi)_\Omega$ também se anula para toda $\phi \in \mathcal{D}(U)$.

Lema 2.4. *Se T é um elemento de $\mathcal{E}'(\Omega)$, então existe um compacto $K \subset \Omega$, um inteiro $M > 0$, e uma constante $C > 0$ tais que*

$$|(T, f)_\Omega| \leq C \sup_{\substack{|\alpha| \leq n \\ x \in K_n}} |\mathcal{D}^\alpha f(x)| \quad , \quad f \in \mathcal{E}(\Omega). \tag{2.2}$$

Em particular, $supp\ T \subset K$. Por outro lado, se T é um elemento de $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $supp\ T$ é compacto em Ω, então T define um elemento de $\mathcal{E}'(\Omega)$.

Demonstração. É um fato padrão da topologia que um funcional linear e contínuo definido em um espaço de Fréchet é limitado. Então, a Inequação (2.2) segue para algum inteiro M, constante C, e conjunto compacto K. Em particular, $supp\ T$ deve estar contido em K, porque se não, deveria existir um elemento $f \in \mathcal{D}(\Omega - K)$ com $(T, f)_\Omega \neq 0$, o que contradiz a inequação.

Para a recíproca, suponha que T pertença a $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $supp\ T$ é compacto. Seja $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ uma função suave com $\phi = 1$ em uma vizinhança de $supp\ T$ (função corte). Defina

$$(T, f)_\Omega = (T, \phi f)_\Omega \quad , \quad f \in \mathcal{E}(\Omega). \tag{2.3}$$

O lado direito está bem definido pois ϕf pertence a $\mathcal{D}(\Omega)$ e T pertence a $\mathcal{D}'(\Omega)$. Além disso, se $f_n \to f$ em $\mathcal{E}(\Omega)$, então $\phi f_n \to \phi f$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Portanto, essa definição para T faz uma distribuição bem definida em $\mathcal{E}'(\Omega)$. Como $1-\phi$ é nula em uma vizinhança de $supp\, T$, claramente

$$(T,(1-\phi)f)_\Omega = 0 \text{ para cada } f \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Consequentemente, na Definição (2.3), T é uma função linear atuando em $\mathcal{E}(\Omega)$ de acordo com a definição original de T, uma função linear atuando em $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$. $\square$

Os espaços $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $\mathcal{E}'(\Omega)$ são dotados de uma topologia chamada topologia fraca. Nesta topologia, diz-se que a sequência (T_n) converge para T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ (ou $\mathcal{E}'(\Omega)$) se

$$(T_n,\phi)_\Omega \longrightarrow (T,\phi)_\Omega$$

para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (ou $\mathcal{E}(\Omega)$). Para esta convergência não é requerido uniformidade.

2.2 Operações Com Distribuições

Nesta Seção, destacaremos algumas das principais operações da Teoria das Distribuições. Todas as definições são motivadas pelo caso onde a distribuição é uma função suave, generalizando-as.

2.2.1 Diferenciação de Distribuições

Suponha que f é função suave em $\mathbb{R}$ e $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, assim existe $k \in \mathbb{R}$ de forma que $supp\, g \subset [-k,k]$. Tomando $h = fg$ se obtém

$$0 = \int_{-k}^{k} h'(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} h'(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x)dx.$$

Tendo isso como motivação e utilizando integração por partes repetidas vezes, pode se definir a diferenciação de distribuições. Se T é uma função suave em Ω e $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, então

$$\begin{aligned}(D^\alpha T,\phi)_\Omega = \int_{x\in\Omega} (D^\alpha T)\phi dx &= (-1)^{|\alpha|}\int_{x\in\Omega} T D^\alpha \phi dx \\ &= (-1)^{|\alpha|}(T, D^\alpha\phi)_\Omega.\end{aligned}$$

Definição 2.5. *Seja T uma distribuição em $\mathcal{D}'(\Omega)$, a distribuição $D^\alpha T$ é definida por*

$$(D^\alpha T,\phi)_\Omega = (-1)^{|\alpha|}(T, D^\alpha\phi)_\Omega, \qquad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Se $\phi_n \longrightarrow \phi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então a sequência $D^\alpha \phi_n$ também converge a $D^\alpha \phi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Assim, $(D^\alpha T, .)_\Omega$ é contínua e $D^\alpha T$ está bem definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Se uma sequência de distribuições (T_n) em $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para a distribuição T, então $D^\alpha T_n$ converge a $D^\alpha T$.

Exemplo 2.6. Para a distribuição δ_p, tem-se

$$(D^\alpha \delta_p, \phi)_{\mathbb{R}^N} = (-1)^{|\alpha|}(\delta_p, D^\alpha \phi)_{\mathbb{R}^N} = (-1)^{|\alpha|}(D^\alpha \phi)(p), \qquad \phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N).$$

Exemplo 2.7. Se $f \in C^1(\mathbb{R})$, isto é, f é continuamente diferenciável, a fórmula de integração por partes prova que a derivada de f, no sentido das distribuições, coincide com a distribuição definida pela sua derivada f'. Por exemplo, para $f(x) = x^2$ em $C^1(\mathbb{R})$ e $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ temos

$$\begin{aligned}(Dx^2, \phi)_{\mathbb{R}} &= (-1)(x^2, \phi')_{\mathbb{R}} = -\int x^2 \phi' dx \\ &= \int (x^2)' \phi dx = \int 2x\phi dx = (2x, \phi)_{\mathbb{R}}.\end{aligned}$$

Aqui Dx^2 é a derivada de x^2 no sentido das distribuições.

Exemplo 2.8. Suponha que f apresente um ponto de descontinuidade, por exemplo, $f \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ e que os limites $\lim\limits_{x \searrow 0} = f(0^+)$ e $\lim\limits_{x \nearrow 0} = f(0^-)$ existam e são finitos. Para calcular a derivada de f no sentido das distribuições, basta observar que se $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e $supp\ \phi \subset [-k, k]$ para algum $k \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned}(Df, \phi)_{\mathbb{R}} &= -(f, \phi')_{\mathbb{R}} = -\int f\phi' dx \\ &= -\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{-k}^{-\varepsilon} f\phi' dx + \int_{\varepsilon}^{k} f\phi' dx\right) \\ &= -\lim_{\varepsilon \to 0}\left(f(x)\phi(x)|_{-k}^{-\varepsilon} - \int_{-k}^{-\varepsilon} f'\phi dx + f(x)\phi(x)|_{\varepsilon}^{k} - \int_{\varepsilon}^{k} f'\phi dx\right) \\ &= (f(0^+) - f(0^-))\phi(0) + \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{-k}^{-\varepsilon} f'\phi dx + \int_{\varepsilon}^{k} f'\phi dx\right) \\ &= (f(0^+) - f(0^-))\phi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \{f'\}\, \phi dx,\end{aligned}$$

onde $\{f'\}$ denota a função definida q.t.p. como f' para $x \neq 0$ e não definida em $x = 0$. Nota-se que, nesse caso, $\{f'\}$ pode ser diferente para valores positivos e negativos. Por exemplo, para $f(x) = |x|$ temos

$$(f', \phi)_{\mathbb{R}} = \int_{-\infty}^{\infty} \{f'\}\, \phi dx = \int_0^{+\infty} \phi dx - \int_{-\infty}^{0} \phi dx.$$

2.2.2 Multiplicação de uma Distribuição por uma Função Suave

Sejam T e ψ funções suaves em Ω, então $T\psi$ define uma distribuição em $\mathcal{D}'(\Omega)$ onde

$$(T\psi, \phi)_\Omega = \int_{x\in\Omega} T(x)\psi(x)\phi(x)dx \quad , \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Nota-se que $(T\psi, \phi)_\Omega = (T, \psi\phi)_\Omega$.

Definição 2.9. *Seja T uma distribuição em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $\psi \in \mathcal{E}(\Omega)$, define-se a distribuição $T\psi$ como sendo*

$$(T\psi, \phi)_\Omega = (T, \psi\phi)_\Omega \quad , \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com esta definição, $T\psi$ satisfaz as condições de uma distribuição, isto é, $T\psi$ é linear e contínua.

2.2.3 Convolução Entre uma Distribuição e uma Função Suave

Na Seção (2.3) será definida a solução fundamental de um operador diferencial L. Esta solução é especial pois com ela podemos encontrar todas as soluções de L por meio de uma convolução. Por esse motivo é essencial que seja visto as propriedades desta operação. Será considerado o caso especial onde $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Definição 2.10. *Se T pertence a $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ e ψ pertence a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, então a convolução $T * \psi$ é uma função suave definida por*

$$(T * \psi)(x) = \int_{y\in\mathbb{R}^N} T(y)\psi(x-y)dy.$$

Como distribuição em $\mathbb{R}^N$, tem-se

$$\begin{aligned}(T * \psi, \phi)_{\mathbb{R}^N} &= \int_x \left(\int_y T(y)\psi(x-y)dy\right)\phi(x)dx \\ &= \int_y T(y)\left(\int_x \psi(x-y)\phi(x)dx\right)dy \quad , \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).\end{aligned}$$

Com a notação $\widehat{\psi}(t) = \psi(-t)$, obtém-se

$$(T * \psi, \phi)_{\mathbb{R}^N} = \int_y T(y)(\widehat{\psi} * \phi)(y)dy = (T, \widehat{\psi} * \phi)_{\mathbb{R}^N}.$$

Agora, $\widehat{\psi} * \phi$ pertence a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ pois ψ e ϕ pertencem a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Assim, $(T, \widehat{\psi} * \phi)_{\mathbb{R}^N}$ está bem definido para $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

Definição 2.11. *Definimos a convolução de T uma distribuição em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, da seguinte forma*

$$(T * \psi, \phi)_{\mathbb{R}^N} = (T, \widehat{\psi} * \phi)_{\mathbb{R}^N} \quad , \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N). \tag{2.4}$$

Se $\phi_n \to \phi$ em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ então $\widehat{\psi} * \phi_n \to \widehat{\psi} * \phi$ em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, com a Definição (2.4) $T * \psi$ está bem definida em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Se $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ e $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, então $\widehat{\psi} * \phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$. Logo a mesma definição pode ser feita para definir uma convolução entre $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ e um elemento ψ de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$. O resultado é uma distribuição em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

Lema 2.12. *Sejam T uma distribuição em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ e ψ um elemento de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Então, a distribuição $T * \psi$ é dada pelo pareamento de funções suaves*

$$T * \psi(x) = (T(y), \psi(x-y))_{y \in \mathbb{R}^N}.$$

Além disso, $D^\alpha (T * \psi) = D^\alpha T * \psi = T * D^\alpha \psi$. O operador $\psi \mapsto T * \psi$ é uma função linear contínua de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ para $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Sejam T um elemento de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ e ψ e ϕ elementos de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Usando a linearidade e continuidade de T, pode-se intercalar a ordem das integrais da seguinte forma

$$\begin{aligned}
(T * \psi, \phi)_{\mathbb{R}^N} &= (T, \widehat{\psi} * \phi)_{\mathbb{R}^N} \\
&= \int_y T(y) \left(\int_x \psi(x-y)\phi(x)dx \right) dy \\
&= \int_x \left(\int_y T(y)\psi(x-y)dy \right) \phi(x)dx \\
&= \int_x (T(y), \psi(x-y))_{y \in \mathbb{R}^N} \phi(x)dx \\
&= \Big((T(y), \psi(x-y))_{y \in \mathbb{R}^N}, \phi(x) \Big)_{x \in \mathbb{R}^N}.
\end{aligned}$$

Portanto, a distribuição $T * \psi$ é dada pela seguinte função

$$x \longmapsto (T(y), \psi(x-y))_{y \in \mathbb{R}^N}. \tag{2.5}$$

A Fórmula (2.5) generaliza a fórmula usual de convolução quando T é função suave de $\mathbb{R}^N$. Por outro lado, note que

$$\begin{aligned}
(\widehat{\psi} * D^\alpha \phi)(y) &= \int_x \psi(x-y) D^\alpha \phi(x)dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_x D^\alpha \psi(x-y)\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} (\widehat{D^\alpha \psi} * \phi)(y),
\end{aligned}$$

assim, para $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned}
(D^\alpha (T * \psi), \phi)_{\mathbb{R}^N} &= (-1)^{|\alpha|} (T * \psi, D^\alpha \phi)_{\mathbb{R}^N} = (-1)^{|\alpha|} (T, \widehat{\psi} * D^\alpha \phi)_{\mathbb{R}^N} \\
&= (T, \widehat{D^\alpha \psi} * \phi)_{\mathbb{R}^N} = (T * D^\alpha \psi, \phi)_{\mathbb{R}^N}.
\end{aligned}$$

Portanto, $D^\alpha (T * \psi)(x) = (T * D^\alpha \psi)(x)$. Além disso, usando índice na derivada para evitar equívocos,

$$\begin{aligned}
D_x^\alpha\left(T*\psi\right)(x) &= (T*D_x^\alpha\psi)(x)\\
&= (T(y), D_x^\alpha\psi(x-y))_{y\in\mathbb{R}^N}\\
&= \big(T(y),(-1)^\alpha D_y^\alpha\psi(x-y)\big)_{y\in\mathbb{R}^N}\\
&= \big(D_y^\alpha T(y),\psi(x-y)\big)_{y\in\mathbb{R}^N}\\
&= (D_y^\alpha T*\psi)(x).
\end{aligned}$$

Logo $D^\alpha(T*\psi)$ pode ser escrito como $T*D^\alpha\psi$ ou $D^\alpha T*\psi$. Isso mostra que $T*\psi$ é uma função suave em $\mathbb{R}^N$.

□

Podemos definir a convolução de uma distribuição em $\mathcal{D}'$ com uma distribuição de $\mathcal{E}'$. Vamos imitar a Definição 2.11 de convolução de um elemento de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ com um elemento de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Primeiramente, dado $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, defina $\widehat{T}$ sendo

$$(\widehat{T},\phi)_{\mathbb{R}^N} = (T,\widehat{\phi})_{\mathbb{R}^N} \qquad \phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^N),$$

onde $\widehat{\phi}(t)=\phi(-t)$. Essa definição resulta em $\widehat{T}(x)=T(-x)$ quando T é uma função suave. Para $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ e $S\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, a distribuição $T*S$ é definida por

$$(T*S,\phi)_{\mathbb{R}^N} = (T,\widehat{S}*\phi)_{\mathbb{R}^N} \qquad \phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Como $\widehat{S}*\phi$ é uma função suave com suporte compacto, o lado direito está bem definido.

Lema 2.13. *Se $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, então $\delta_0*T=T$.*

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}
(\delta_0*T,\phi)_{\mathbb{R}^N} &= (\delta_0,\widehat{T}*\phi)_{\mathbb{R}^N} = (\widehat{T}*\phi)(0)\\
&= (\widehat{T}(y),\phi(0-y))_{y\in\mathbb{R}^N} = (T(y),\widehat{\phi}(-y))_{y\in\mathbb{R}^N} = (T,\phi)_{\mathbb{R}^N}.
\end{aligned}$$

□

O Lema (2.13) nos diz que δ_0 representa o operador identidade das convoluções.

Além de ser útil para encontrar a solução fundamental de um operador diferencial, a convolução também permite demonstrar que $\mathcal{D}'(\Omega)$ é, de fato, a menor extensão de $\mathcal{D}(\Omega)$ onde a diferenciação está bem definida. Antes de provarmos tal resultado, precisamos definir uma certa classe ne funções.

Definição 2.14. *Define-se a classe das funções mollifier* $\{\chi_\theta : \theta > 0\} \subset C^\infty(\Omega)$*, sendo*

$$\chi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right) & se\ |x| < 1; \\ 0 & se\ |x| \geq 1. \end{cases}$$

e

$$\chi_\theta(x) = \frac{\chi\left(x/\theta\right)}{\|\chi\|_{L^1(\Omega)}}\theta^{-N}.$$

Teorema 2.15. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um conjunto aberto, então* $\mathcal{D}(\Omega)$ *é um subconjunto denso de* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *com a topologia fraca.*

Demonstração. Seja T uma distribuição em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Preencha Ω com uma sequência crescente $\{K_n\}$ de conjuntos compactos de Ω. Seja $\psi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ uma função corte igual a 1 em uma vizinhança de K_n. Assim $\psi_n T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ e claramente $\psi_n T$ converge para T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ quando $n \to \infty$. Seja $\{\chi_\theta : \theta > 0\}$ o conjunto das funções *mollifier*. Defina

$$T_n = (\psi_n T) * \chi_\theta,$$

uma função em $\mathcal{D}(\Omega)$ cujo suporte esta contido em Ω para um θ pequeno. Deste modo

$$\begin{aligned} (T_n, \phi)_{\Omega'} &= ((\psi_n T) * \chi_\theta, \phi)_{\Omega'} \\ &= (\psi_n T, \widehat{\chi_n} * \phi)_{\Omega'} \\ &= (T, \psi_n(\chi_n * \phi))_{\Omega'} \longrightarrow (T, \phi)_{\Omega'}, \end{aligned}$$

pois se ϕ pertence a $\mathcal{E}(\Omega)$, então $\chi_\theta * \phi \to \phi$ em $\mathcal{E}(\Omega)$ quando $\theta \to 0$, logo $\psi_n(\chi_n * \phi) \to \phi$ em $\mathcal{E}(\Omega)$ (Note que $\widehat{\chi_n} = \chi_n$). Portanto, $T_n \to T$ em $\mathcal{D}'(\Omega')$. □

2.2.4 Produto Tensorial

Dadas funções $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ e $g \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^K)$, a função $f \otimes g \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^K$ definida como

$$(f \otimes g)(x, y) = f(x).g(y), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^K,$$

é chamada de produto tensorial de f e g. Podemos estender essa definição para as distribuições, observando que $f \otimes g \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^K)$ e

$$\int\int (f \otimes g)(\phi \otimes \psi) dx dy = \int f \phi dx. \int g \psi dy, \qquad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^K).$$

Definição 2.16. *Suponhamos que* T *seja um elemento de* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *e* S *um elemento de* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^K)$*. Definimos o produto tensorial* $T \otimes S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^K)$ *da seguinte forma*

$$((T \otimes S)(x, y), \phi(x)\psi(y))_{(x,y)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^K} = (T, \phi)_{\mathbb{R}^N}.(S, \psi)_{\mathbb{R}^K},$$

para $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^K)$.

Dado $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^K)$, a função $x \longrightarrow (S(y), g(x,y))_{y\in\mathbb{R}^K}, x \in \mathbb{R}^N$, é uma função suave com suporte compacto. Isso segue do fato de S ser linear e o quociente diferencial de $g(x,y)$ na variável x convergir em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^K)$ para a derivada em relação a x de $g(x,y)$. Portanto o par

$$(T(x), (S(y), g(x,y))_{y\in\mathbb{R}^K})_{x\in\mathbb{R}^N},$$

está bem definido para $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Sendo assim, definimos

$$(T \otimes S, g)_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^K} = (T(x), (S(y), g(x,y))_{y\in\mathbb{R}^K})_{x\in\mathbb{R}^N}.$$

Exemplo 2.17. Considere as funções $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ e $1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^K)$. Para $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^K)$, temos

$$\begin{aligned}
(\delta_0 \otimes 1, g(x,y))_{(x,y)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^K} &= (\delta_0(x), (1(y), g(x,y))_{y\in\mathbb{R}^K})_{x\in\mathbb{R}^N} \\
&= \left(\delta_0(x), \int_{y\in\mathbb{R}^K} g(x,y)dy\right)_{x\in\mathbb{R}^N} \\
&= \int_{y\in\mathbb{R}^K} g(0,y)dy.
\end{aligned}$$

2.2.5 Composição de uma Distribuição com um Difeomorfismo

Sejam Ω e Ω' conjuntos abertos conexos em $\mathbb{R}^N$ e $F : \Omega \to \Omega'$ um difeomorfismo. Se T é uma função complexa suave em Ω', então $T \circ F$ é uma função suave em Ω. Como distribuição em Ω, temos

$$\begin{aligned}
(T \circ F, \phi)_\Omega &= \int_\Omega T(F(y))\phi(y)dy, \qquad \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \\
&= \int_{\Omega'} T(x)\phi(F^{-1}(x))|det\ DF^{-1}(x)|dx,
\end{aligned}$$

pela troca de variáveis $x = F(y)$. Assim

$$(T \circ F, \phi)_\Omega = (T, (\phi \circ F^{-1})|det\ DF^{-1}|)_{\Omega'}.$$

Desde que F seja difeomorfismo, $det\ \ DF^{-1}$ é sempre positivo ou sempre negativo em Ω'. Então, $(\phi \circ F^{-1})|det\ \ DF^{-1}|$ é uma função suave com suporte compacto em Ω'. Dessa forma, para $T \in \mathcal{D}'(\Omega')$, com esta definição, temos $T \circ F \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

2.3 Soluções Fundamentais Para Equações Diferenciais Parciais

Uma das razões para se introduzir a Teoria das Distribuições é que esta fornece uma linguagem propícia para se discutir soluções para certas classes de equações diferenciais parciais. Neste trabalho, será definida, a seguir, uma solução fundamental para um operador diferencial parcial com coeficientes constantes

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq M} a_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}, \qquad a_\alpha \in \mathbb{C}.$$

Definição 2.18. *$T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fundamental para $P(D)$ se*

$$P(D)\{T\} = \delta_0.$$

A razão para o nome "solução fundamental" é que a solução da equação $P(D)\{u\} = \phi$ com $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ pode ser encontrada por uma convolução com T, como o próximo teorema mostra.

Teorema 2.19. *Seja $P(D)$ um operador diferencial parcial com coeficientes constantes. Suponha que T é uma solução fundamental para $P(D)$. Se $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, então $u = T * \phi$ é a solução para a equação diferencial $P(D)\{u\} = \phi$.*

Demonstração. Segue dos lemas (2.12) e (2.13) que

$$P(D)\{T * \phi\} = (P(D)\{T\}) * \phi = \delta_0 * \phi = \phi.$$

Portanto, $P(D)\{T * \phi\} = \phi$. □

Observação 2.20. Se $P(D)$ tiver coeficiente variáveis, então o Teorema (2.19) não segue. De fato, o passo $P(D)\{T * \phi\} = (P(D)\{T\}) * \phi$ não é válido, pois quando se é aplicada as derivadas em T, integração por partes é requerida e expressões envolvendo derivadas dos coeficientes de $P(D)$ irão aparecer.

Teorema 2.21. *A distribuição $T(z) = 1/\pi z$ é uma solução fundamental para o operador de Cauchy-Riemann em $\mathbb{C}$*

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Demonstração. Temos que $T(z) = 1/\pi z$ é uma função localmente integrável em $\mathbb{C}$ e assim T define um elemento de $\mathcal{D}'(\mathbb{C})$. Deve-se mostrar que, dada $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left\{\frac{1}{\pi z}\right\} &= \delta_0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left\{\frac{1}{\pi z}\right\}, \phi\right)_{\mathbb{C}} &= (\delta_0, \phi)_{\mathbb{C}} \\ \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{\pi z}, \frac{\partial \phi}{\partial \overline{z}}\right)_{\mathbb{C}} &= (\delta_0, \phi)_{\mathbb{C}}, \end{aligned}$$

que é equivalente a provar

$$-\int_{z\in\mathbb{C}}\int \frac{\partial\phi(z)}{\partial\overline{z}}\frac{1}{\pi z}dxdy = \phi(0), \qquad \phi\in\mathcal{D}(\mathbb{C}). \tag{2.6}$$

Como é dado $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$, é possível escolher $0 < R < \infty$ de forma que $supp\ \phi \subset \{|z| < R\}$ e ao tomar $0 < \varepsilon < R$, define-se o disco $\Delta_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C};\ \varepsilon < |z| < R\}$. Segue do Teorema de Green para integrais complexas que

$$\int_{\partial\Delta_\varepsilon}\frac{\phi(z)dz}{2\pi iz} = \int_{\Delta_\varepsilon}\int \frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left(\frac{\phi(z)}{2\pi iz}\right)2i\ dxdy. \tag{2.7}$$

E ainda

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left(\frac{\phi(z)}{2\pi iz}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\phi(z)}{2\pi iz}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi(z)}{\partial x}\ \frac{1}{2\pi iz}+i\frac{\partial\phi(z)}{\partial y}\ \frac{1}{2\pi iz}\right)\\ &= \frac{1}{2\pi iz}\left(\frac{\partial\phi(z)}{\partial x}+i\frac{\partial\phi(z)}{\partial y}\right)\\ &= \frac{1}{2\pi iz}\frac{\partial\phi(z)}{\partial\overline{z}}.\end{aligned}$$

Logo, o lado direito da Equação (2.7) se torna

$$\int_{\Delta_\varepsilon}\int \frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left(\frac{\phi(z)}{2\pi iz}\right)2i\ dxdy = \int_{\Delta_\varepsilon}\int \frac{\partial\phi(z)}{\partial\overline{z}}\frac{dxdy}{\pi z}. \tag{2.8}$$

Observa-se que a curva $\{|z| = R\}$ é orientada no sentido anti-horário. Já a curva $\{|z| = \varepsilon\}$ é orientada no sentido horário. Como $\phi = 0$ em $\{|z| = R\}$, tem-se das Equações (2.7) e (2.8), que

$$-\oint_{\{|z|=\varepsilon\}}\frac{\phi(z)dz}{2\pi iz} = \int_{\Delta_\varepsilon}\int \frac{\partial\phi(z)}{\partial\overline{z}}\frac{dxdy}{\pi z}. \tag{2.9}$$

Sabe-se que $\phi = 0$ em $\{|z| \geq R\}$ e os discos Δ_ε são conjuntos encaixados, isto é, $\Delta_{\varepsilon_1} \supset \Delta_{\varepsilon_2}$ quando $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, e também $\bigcup\limits_{0<\varepsilon<R}\Delta_\varepsilon = \{|z| < R\} - \{0\}$. Como o integrando é localmente integrável em $\mathbb{C}$ e adicionar o ponto $z = 0$ não altera o valor da integral, quando se faz $\varepsilon \longrightarrow 0$, o lado direito da Equação (2.9) converge para

$$\int_{\mathbb{C}}\int \frac{\partial\phi(z)}{\partial\overline{z}}\frac{dxdy}{\pi z}.$$

Pela parametrização de $\{|z| = \varepsilon\}$ por $z = \varepsilon e^{it}$ o lado esquerdo da Equação

(2.9) se torna

$$-\oint_{\{|z|=\varepsilon\}} \frac{\phi(z)dz}{2\pi iz} = -\int_0^{2\pi} \frac{\phi(\varepsilon e^{it})}{2\pi i\varepsilon e^{it}}\, i\varepsilon e^{it}dt = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(\varepsilon e^{it})dt.$$

Usando a continuidade de ϕ em 0, dado $\xi > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x| < \delta \Rightarrow |\phi(x) - \phi(0)| < \xi.$$

Em particular

$$|\varepsilon e^{it}| < \delta \Rightarrow |\phi(\varepsilon e^{it}) - \phi(0)| < \xi.$$

Logo, se $|\varepsilon e^{it}| < \delta$

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(\varepsilon e^{it})dt - \phi(0)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(\varepsilon e^{it})dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(0)dt\right| \\ &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \phi(\varepsilon e^{it}) - \phi(0)dt\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\phi(\varepsilon e^{it}) - \phi(0)\right| dt \\ &< \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi dt = \xi.\end{aligned}$$

Portanto o lado esquerdo da Equação (2.9) converge a $-\phi(0)$ quando $\varepsilon \longrightarrow 0$. Está provada a Equação (2.6), e consequentemente, o teorema. $\square$

Teorema 2.22. *Seja*

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{\log\ |x|}{2\pi} & \text{se } N = 2; \\ \dfrac{|x|^{2-N}}{(2-N)\omega_{N-1}} & \text{se } N \ge 3. \end{cases}$$

onde $\omega_{N-1} = \left(\dfrac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}\right)$ *é o volume da esfera unitária em* $\mathbb{R}^N$ *e* Γ *é o fatorial generalizado. Então,* T *é a solução fundamental para o Laplaciano* $\Delta = \displaystyle\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)$ *em* $\mathbb{R}^N$.

Demonstração. Para $N = 2$, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

o que implica

$$\Delta = 4\left(\frac{\partial^2}{\partial \overline{z}\partial z}\right).$$

Além disso, sabe-se que

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{2\pi}\log\ |z|\right\} = \frac{1}{4\pi z}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

e assim, segue do Teorema (2.21) que

$$\begin{aligned}\Delta\left\{\frac{1}{2\pi}\log\ |z|\right\} &= 4\left(\frac{\partial^2}{\partial\overline{z}\partial z}\right)\left\{\frac{1}{2\pi}\log\ |z|\right\}\\ &= 4\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left(\frac{1}{4\pi z}\right) = \frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left(\frac{1}{\pi z}\right) = \delta_0.\end{aligned}$$

O que prova o teorema para $N = 2$. Agora, para $N \geq 3$, deve-se mostrar que

$$\Delta\left\{T\right\} = \delta_0,$$

porém

$$\begin{aligned}(\Delta\left\{T\right\}, \phi)_{\mathbb{R}^N} &= \left(\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)\left\{T\right\}, \phi\right)_{\mathbb{R}^N}\\ &= \sum_{j=1}^{N}\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)\left\{T\right\}, \phi\right)_{\mathbb{R}^N}\\ &= \sum_{j=1}^{N}\left(T, \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)\phi\right)_{\mathbb{R}^N}\\ &= \sum_{j=1}^{N}\left(\int_{x\in\mathbb{R}^N} T(x)\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x_j^2}dx\right)\\ &= \int_{x\in\mathbb{R}^N} T(x)\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x_j^2}\right)dx.\end{aligned}$$

Logo

$$\int_{x\in\mathbb{R}^N} T(x)\Delta\phi(x)dx = \phi(0), \qquad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Tome $0 < R < \infty$ de forma que $supp\ \phi \subset \{|x| < R\}$ e $0 < \varepsilon < R$ para definir o disco $\Delta_\varepsilon = \left\{x \in \mathbb{R}^N;\ \varepsilon < |x| < R\right\}$. Agora, será aplicada a Fórmula de Green em Δ_ε com $u = T$ e $v = \phi$. Primeiramente, nota-se que $\Delta T = 0$. De fato,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(|x|^{2-N}\right) = \frac{(2-N)}{|x|^N}\left(1 - \frac{Nx_j^2}{|x|^2}\right).$$

Desse modo,

$$\Delta\left(|x|^{2-N}\right)=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(|x|^{2-N}\right)=\frac{(2-N)}{|x|^N}\left(N-\frac{N|x|^2}{|x|^2}\right)=0$$

$$\Rightarrow \Delta T=\frac{1}{(2-N)\omega_{N-1}}\Delta\left(|x|^{2-N}\right)=0.$$

Assim, a Fórmula de Green se resume a

$$\int_{\Delta_\varepsilon} T(x)\Delta\phi(x)dx=\int_{\partial\Delta_\varepsilon}\left[T(x)(\mathbb{N}\phi)(x)-\phi(x)(\mathbb{N}T)(x)\right]d\sigma(x), \tag{2.10}$$

onde $\mathbb{N}$ é o vetor normal unitário externo ao campo $\partial\Delta_\varepsilon$. Sabe-se que $\phi=0$ em uma vizinhança de $\{|x|=R\}$ pela escolha de R. Logo a Equação (2.10) se reduz a

$$\int_{\Delta_\varepsilon} T(x)\Delta\phi(x)dx=\int_{\{|x|=\varepsilon\}}\left[T(x)(\mathbb{N}\phi)(x)-\phi(x)(\mathbb{N}T)(x)\right]d\sigma(x). \tag{2.11}$$

De forma análoga ao feito no Teorema (2.21), como T é localmente integrável em $\mathbb{R}^N$, tem-se

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Delta_\varepsilon} T(x)\Delta\phi(x)dx=\int_{\mathbb{R}^N} T(x)\Delta\phi(x)dx.$$

Por outro lado, nota-se que $|T(x)|\leq c|x|^{2-N}=c\varepsilon^{2-N}$ em $\{|x|=\varepsilon\}$, onde c é constante. Assim,

$$\left|\int_{\{|x|=\varepsilon\}} T(x)\mathbb{N}\phi(x)d\sigma(x)\right|\leq\int_{\{|x|=\varepsilon\}}|\mathbb{N}\phi(x)|\,d\sigma(x)\;c\varepsilon^{2-N}.$$

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz em $|\mathbb{N}\phi(x)|$ e como $\{|x|=\varepsilon\}$ é compacto,

$$\left|\int_{\{|x|=\varepsilon\}} T(x)\mathbb{N}\phi(x)d\sigma(x)\right|\leq\max_{|x|=\varepsilon}|\nabla\phi(x)|\int_{\{|x|=\varepsilon\}}d\sigma(x)\;c\varepsilon^{2-N}=c_2\varepsilon^{N-1}\varepsilon^{2-N}=c_2\varepsilon.$$

Logo

$$\left|\int_{\{|x|=\varepsilon\}} T(x)\mathbb{N}\phi(x)d\sigma(x)\right|\longrightarrow 0 \text{ quando } \varepsilon\longrightarrow 0.$$

Por outro lado, $\dfrac{\partial}{\partial x_j}(|x|^{2-N}) = \dfrac{(2-N)x_j}{|x|^N}$, assim

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N}T(x) &= -\left\langle \nabla T(x), \left(\frac{\partial |x|}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial |x|}{\partial x_N}\right)\right\rangle \\
&= -\left\langle \frac{1}{\omega_{N-1}}\left(\frac{x_1}{|x|^N}, \ldots, \frac{x_N}{|x|^N}\right), \left(\frac{x_1}{|x|}, \ldots, \frac{x_N}{|x|}\right)\right\rangle \\
&= -\frac{1}{\omega_{N-1}}\sum_{j=1}^{N}\frac{x_j^2}{|x|^{N+1}} \\
&= -\frac{1}{\omega_{N-1}}\frac{|x|^2}{|x|^{N+1}} = -\frac{1}{\omega_{N-1}}|x|^{1-N}.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, tem-se

$$
-\int_{\{|x|=\varepsilon\}} \phi(x)(\mathbb{N}T)(x)d\sigma(x) = \frac{\varepsilon^{1-N}}{\omega_{N-1}}\int_{\{|x|=\varepsilon\}} \phi(x)d\sigma(x).
$$

Fazendo a mudança de variável $x = \varepsilon z$ no lado direito se obtém

$$
-\int_{\{|x|=\varepsilon\}} \phi(x)(\mathbb{N}T)(x)d\sigma(x) = \frac{1}{\omega_{N-1}}\int_{\{|z|=1\}} \phi(\varepsilon z)d\sigma(z).
$$

Pela continuidade de ϕ em $x = 0$, o lado direito converge a $\phi(0)$ quando $\varepsilon \longrightarrow 0$. Isso prova o teorema. $\square$

3 CORRENTES

O intuito deste capítulo é apresentar o espaço das correntes e suas operações essenciais, dispondo de alguns exemplos. Veremos que o espaço das correntes de dimensão r é o dual do espaço das formas diferenciais suaves de grau r com suporte compacto. Então, basicamente, as correntes são para as formas o que as distribuições são para as funções. Inicialmente, consideremos dois espaços de formas, definidos a seguir.

Definição 3.1. *Dado um subconjunto aberto Ω em uma variedade suave, definimos $\mathcal{E}^r(\Omega)$ o espaço das formas diferenciais suaves de grau r. Além disso, definimos $\mathcal{D}^r(\Omega)$ espaço dos elementos de $\mathcal{E}^r(\Omega)$ com suporte compacto.*

Uma topologia para o espaço $\mathcal{E}^r(\Omega)$ pode ser dada da seguinte forma: em coordenadas locais, $\chi = (x_1, \ldots, x_N) : U \subset \Omega \to \mathbb{R}^N$, a sequência $f_n \in \mathcal{E}^r(\Omega),\ n = 1, 2, \ldots$, é escrita como

$$f_n(x) = \sum_{|I|=r} f_n^I(x) dx^I,$$

onde cada f_n^I é um elemento em $\mathcal{E}(U)$. Dizemos que f_n converge para $f = \sum_{|I|=r} f^I(x) dx^I$ no arranjo de coodenadas U se a função componente f_n^I converge a f^I quando $n \longrightarrow \infty$ na topolgia de $\mathcal{E}(U)$ (isto é, convergência uniforme em conjuntos compactos para cada derivada). A sequência $f_n \in \mathcal{E}^r(\Omega)$ é dita convergir à forma f em $\mathcal{E}^r(\Omega)$ se f_n converge a f em cada arranjo de coodenadas U de Ω. A definição de convergência independe da escolha do arranjo.

Uma topologia para $\mathcal{D}^r(\Omega)$ pode ser definida de forma análoga. A sequência $\phi_n, n = 1, 2, \ldots$ converge a ϕ em $\mathcal{D}^r(\Omega)$ se existe um compacto $K \in \Omega$ com $supp\ \phi_n \subset K$ para todo n e cada derivada das funções coeficientes de ϕ_n converge para a derivada correspondente a função coeficiente de ϕ.

Definição 3.2. *Seja Ω um subconjunto aberto de uma variedade suave. O dual do espaço $\mathcal{D}^r(\Omega)$, denotado por $\{\mathcal{D}^r(\Omega)\}'$, é chamado de espaço de correntes de dimensão r. Do mesmo modo, o dual do espaço $\mathcal{E}^r(\Omega)$ é denotado por $\{\mathcal{E}^r(\Omega)\}'$.*

Uma vez que $\mathcal{D}^r(\Omega)$ é um subespaço de $\mathcal{E}^r(\Omega)$ e a função inclusão é contínua, $\{\mathcal{E}^r(\Omega)\}'$ é um subespaço de $\{\mathcal{D}^r(\Omega)\}'$.

O pareamento entre elementos de $\{\mathcal{D}^r(\Omega)\}'$ e elementos de $\mathcal{D}^r(\Omega)$ será denotado por $\langle\ ,\ \rangle_\Omega$. Ocasionalmente, podemos também escrever

$$\langle T(x), f(x)\rangle_\Omega = \langle T, f\rangle_\Omega \quad \text{com} \quad T \in \{\mathcal{D}^r(\Omega)\}'\ ,\ f \in \mathcal{D}^r(\Omega).$$

Exemplo 3.3. Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e $T = T_J dx^J$ uma forma de grau $N - r$ (isto é, $|J| = N - r$). Suponha $T_J : \Omega \to \mathbb{C}$ localmente integrável. T pode ser visto como uma corrente em $\{\mathcal{D}^r(\Omega)\}'$ pela definição

$$\langle T, f\rangle_\Omega = \int_{x\in\Omega} T(x)\wedge f(x) \quad \text{com} \quad f\in\mathcal{D}^r(\Omega).$$

$T\wedge f$ é uma forma de grau N em $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ com coeficientes integráveis e assim o lado direito está bem definido. Se $f = f_I dx^I$, $|I| = r$, para alguma função $f_I\in\mathcal{E}(\Omega)$, então

$$\langle T, f\rangle_\Omega = \begin{cases} 0 & \text{se } dx^J\wedge dx^I = 0 \\ (-1)^{\varepsilon_{IJ}} \displaystyle\int_{x\in\Omega} T_J(x) f_I(x)dx & \text{se } dx^J\wedge dx^I \neq 0 \end{cases},$$

onde $(-1)^{\varepsilon_{IJ}}$ é definido por

$$dx^J\wedge dx^I = (-1)^{\varepsilon_{IJ}} dx_1\wedge\ldots\wedge dx_N.$$

Note que $\int_{x\in\Omega} T_J(x) f_I(x)dx$ é a mesma do pareamento entre a distribuição $T_J\in\mathcal{D}'(\Omega)$ e a função $f_I\in\mathcal{D}(\Omega)$. Nesse caso, correntes possuem uma pequena relação com distribuições. Veremos com mais precisão no lema mais a frente.

Exemplo 3.4. Considere o ponto $p\in\mathbb{R}^N$. Então, $[p]$ é uma corrente em $\{\mathcal{E}^0(\mathbb{R}^N)\}'$, definido por

$$\langle [p], f\rangle_{\mathbb{R}^N} = f(p) \quad \text{com} \quad f\in\mathcal{E}^0(\mathbb{R}^N) = \mathcal{E}(\mathbb{R}^N).$$

Esse exemplo é análogo a funcão delta de p dada no Capítulo 2.

Exemplo 3.5. Seja M uma subvariedade orientada de $\mathbb{R}^N$ de dimensão r. Então, $[M]$ pode ser vista como uma corrente em $\{\mathcal{D}^r(M)\}'$ com a definição

$$\langle [M], f\rangle_{\mathbb{R}^N} = \int_M f \quad \text{com} \quad f\in\mathcal{D}^r(\mathbb{R}^N).$$

Se M é compacto, então podemos tomar $f\in\mathcal{E}^r(\mathbb{R}^N)$ e nesse caso, $[M]$ é um elemento de $\{\mathcal{E}^r(\mathbb{R}^N)\}'$.

Definição 3.6. *Seja Ω um subconjunto aberto de uma variedade orientada de dimensão N e seja $0\leq q\leq N$. Definimos $\mathcal{D}'^q(\Omega)$ sendo o espaço das formas de grau q cujos coeficientes são distribuições em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Este espaço é chamado de espaço das correntes de gral q. Da mesma forma, definimos $\mathcal{E}'^q(\Omega)$ como o espaço das formas de grau q cujos coeficientes são distribuições em $\mathcal{E}'(\Omega)$.*

Lema 3.7. *Seja Ω um subconjunto aberto de uma variedade orientada N-dimensional e considere $0\leq r\leq N$. Então, $\{\mathcal{D}^r(\Omega)\}'$ é isomorfo a $\mathcal{D}'^{N-r}(\Omega)$.*

Demonstração. Nos concentremos primeiro no caso em que Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. Dados $T = T_J dx^J\in\mathcal{D}'^{N-r}(\Omega)$ e $f = f_I dx^I\in\mathcal{D}^r(\Omega)$, definimos T uma corrente em $\{\mathcal{D}^r(\Omega)\}'$

da seguinte forma

$$\langle T, f\rangle_\Omega = \begin{cases} 0 & \text{se } dx^I \wedge dx^J = 0; \\ (-1)^{\varepsilon_{IJ}}(T_J, f_I)_\Omega & \text{se } dx^I \wedge dx^J \neq 0. \end{cases}$$

Como no Exemplo 3.3, $(-1)^{\varepsilon_{IJ}}$ é definida por $dx^I \wedge dx^J = (-1)^{\varepsilon_{IJ}} dx$. T_J é uma distribuição de $\mathcal{D}'(\Omega)$ e f_I é um elemento de $\mathcal{D}(\Omega)$, claramente o lado direito está bem definido. Portanto, qualquer corrente de grau $N - r$ pode ser considerado um elemento de $\{\mathcal{D}^r(\Omega)\}'$.

Reciprocamente, suponha T um elemento de $\{\mathcal{D}^r(\Omega)\}'$. Para cada $(N-r)$-lista J, defina a distribuição $T_J \in \mathcal{D}'(\Omega)$ por

$$(T_J, \phi)_\Omega = \left\langle T, \phi dx^{J'} \right\rangle_\Omega \quad \text{com} \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

onde J' é a r-lista formada pelos índices de $\{1, \ldots, N\}$ que não pertencem a J. Obtemos assim

$$T = \sum_{|J|=N-r} (-1)^{\varepsilon_{IJ}} T_J dx^J.$$

$\square$

A prova do Lema 3.7 para variedades orientadas é a mesma. Nesse caso, a forma dx é substituída pela forma volume $d\sigma$.

Agora vamos descrever os exemplos 3.3, 3.4 e 3.5 pelo ponto de vista do Lema 3.7. O Exemplo 3.3 já se apresenta com os coeficientes sendo distribuições. Para o Exemplo 3.4, temos

$$\langle [p], f\rangle_{\mathbb{R}^N} = f(p) = (\delta_p, f)_{\mathbb{R}^N},$$

logo $[p] = \delta_p dx \in \mathcal{E}'^N(\mathbb{R}^N)$. Para o Exemplo 3.5 suponha primeiramente que M é uma fronteira suave de um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com a orientação usual. Considere $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N;\ \rho(x) < 0\}$ onde $\rho : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é suave e $|\nabla\rho| = 1$ em M. Seja μ_M a medida de Hausdorff de dimensão $N-1$. Vamos mostrar que

$$[M] = \mu_M d\rho,$$

que exibe M como uma corrente de grau 1. Vejamos, primeiro precisamos trabalhar com μ_M. Se $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, então

$$(\mu_M, \phi)_{\mathbb{R}^N} = \int_M \phi d\sigma,$$

onde $d\sigma$ é a forma volume de M. Como $|\nabla\rho| = 1$ em M

$$d\sigma = \nabla\rho \lrcorner dx.$$

Seja $g = \phi dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_N$ com $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Segue das definições que

$$\langle \mu_M d\rho, g\rangle_{\mathbb{R}^N} = (-1)^{j-1}\left(\mu_M, \phi\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\right)_{\mathbb{R}^N} = (-1)^{j-1}\int_M \phi\frac{\partial\rho}{\partial x_j}d\sigma.$$

Por outro lado

$$g = (\nabla\rho\lrcorner d\rho)g = \nabla\rho\lrcorner(d\rho\wedge g) + d\rho\wedge(\nabla\rho\lrcorner g),$$

a última equação segue da Regra do Produto de $\lrcorner$. Como $j^*d\rho = 0$ em M, onde $j : M \to \mathbb{R}^N$ é a inclusão, temos

$$\langle [M], g\rangle_{\mathbb{R}^N} = \int_M g = \int_M \nabla\rho\lrcorner(d\rho\wedge g).$$

Inserindo $g = \phi dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_N$ e usando $d\sigma = \nabla\rho\lrcorner dx$ obtemos

$$\langle [M], g\rangle_{\mathbb{R}^N} = (-1)^{j-1}\int_M \phi\frac{\partial\rho}{\partial x_j}d\sigma.$$

Portanto, $[M] = \mu_M d\rho$. Analogamente, se

$$M = \{x \in \mathbb{R}^N;\ \rho_1(x) = \ldots = \rho_d(x) = 0\},$$

então a corrente $[M]$ é dada por

$$\mu_M \alpha d\rho_1 \wedge \ldots \wedge d\rho_d,$$

onde $\alpha = |d\rho_1 \wedge \ldots \wedge d\rho_d|^{-1}$ ou $\alpha = -|d\rho_1 \wedge \ldots \wedge d\rho_d|^{-1}$ dependendo da orientação de M.

3.1 Operações Com Correntes

Analogamente à Teoria de Distribuições, as operações definidas para correntes são motivadas considerando o caso onde a corrente é uma forma suave.

3.1.1 Produto Exterior de uma Corrente Com uma Forma Suave

Se T é uma forma suave de grau q em Ω e f é uma forma suave de grau r em Ω, então $T \wedge f$ é uma forma suave de grau $q + r$. Dessa forma, é uma corrente em Ω

$$\begin{aligned}\langle T\wedge f, \phi\rangle_\Omega &= \int_\Omega (T\wedge f)\wedge\phi \quad \text{com} \quad \phi\in\mathcal{D}^{N-q-r}(\Omega)\\ &= \langle T, f\wedge\phi\rangle_\Omega .\end{aligned}$$

Agora, definimos $T \wedge f$ para $T \in \mathcal{D}'^q(\Omega)$ e $f \in \mathcal{D}^r(\Omega)$ pela fórmula

$$\langle T\wedge f, \phi\rangle_\Omega = \langle T, f\wedge\phi\rangle_\Omega \quad \text{com} \quad \phi\in\mathcal{D}^{N-q-r}(\Omega).$$

O resultado é uma corrente em $\mathcal{D}'^{q+r}(\Omega)$.

3.1.2 Derivada Exterior

Suponha T uma forma suave de grau $N-r$ e seja $\phi \in \mathcal{D}^{r-1}(\Omega)$. Então, dT é um elemento de $\mathcal{E}^{N-r+1}(\Omega)$ e

$$\langle dT, \phi \rangle_\Omega = \int_\Omega dT \wedge \phi.$$

Pela Regra do Produto de derivada exterior, temos

$$\begin{aligned} d(T \wedge \phi) &= dT \wedge \phi + (-1)^{N-r} T \wedge d\phi \\ \Rightarrow \langle dT, \phi \rangle_\Omega &= \int_\Omega d(T \wedge \phi) + (-1)^{N-r+1} \int_\Omega T \wedge d\phi. \end{aligned}$$

Como $T \wedge \phi$ tem suporte compacto em Ω, pelo Teorema de Stokes a primeira integral do lado direito é igual a 0 . Então,

$$\langle dT, \phi \rangle_\Omega = (-1)^{N-r+1} \int_\Omega T \wedge d\phi = (-1)^{N-r+1} \langle T, d\phi \rangle_\Omega .$$

Agora, podemos definir dT com $T \in \mathcal{D}'^{N-r}(\Omega)$ pela fórmula

$$\langle dT, \phi \rangle_\Omega = (-1)^{N-r+1} \langle T, d\phi \rangle_\Omega \quad \text{com} \quad \phi \in \mathcal{D}^{r-1}(\Omega).$$

Note que a derivada exterior sobe um grau da corrente, por outro lado desce uma dimensão do espaço.

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. Se $T = T_I dx^I$, $|I| = N - r$, e $T_I \in \mathcal{D}'(\Omega)$, então uma expressão equivalente para dT é dada por

$$dT = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial T_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx^I,$$

onde $\partial T_I / \partial x_j$ é a derivada de T_I no sentido das distribuições. Essa fórmula generaliza a fórmula de derivada exterior usual para formas suaves. Se $T_n \longrightarrow T$ em $\{\mathcal{D}^r(\Omega)\}'$ então a sequência $dT_n \longrightarrow dT$ em $\{\mathcal{D}^{r-1}(\Omega)\}'$.

Teorema 3.8. *Seja M uma subvariedade orientada de dimensão r cuja fronteira está contida em uma variedade suave X de dimensão N. Então, $d[M] = (-1)^{N-r+1}[\partial M]$.*

Demonstração. A prova segue do Teorema de Stokes. Seja $\phi \in \mathcal{D}^{r-1}(X)$, então

$$\begin{aligned}\langle d[M], \phi \rangle_X &= (-1)^{N-r+1} \langle [M], d\phi \rangle_X \\ &= (-1)^{N-r+1} \int_M d\phi \\ &= (-1)^{N-r+1} \int_{\partial M} \phi \\ &= (-1)^{N-r+1} \langle [\partial M], \phi \rangle_X .\end{aligned}$$

Como queríamos mostrar. □

Para um subconjunto Ω de uma variedade complexa, temos $d = \partial + \overline{\partial}$ onde $\partial : \mathcal{E}^{p,q}(\Omega) \to \mathcal{E}^{p+1,q}(\Omega)$ e $\overline{\partial} : \mathcal{E}^{p,q}(\Omega) \to \mathcal{E}^{p,q+1}(\Omega)$ são definidos por $\partial = \pi^{p+1,q} \circ d$ e $\overline{\partial} = \pi^{p,q+1} \circ d$. Segue da definição de derivada exterior de correntes que, se $T \in \mathcal{D}'^{p,q}(\Omega)$, então

$$\begin{aligned}\langle \partial T, \phi \rangle_\Omega &= (-1)^{p+q+1} \langle T, \partial\phi \rangle_\Omega \quad \text{com} \quad \phi \in \mathcal{D}^{n-p-1,n-q}(\Omega) \\ \left\langle \overline{\partial} T, \phi \right\rangle_\Omega &= (-1)^{p+q+1} \left\langle T, \overline{\partial}\phi \right\rangle_\Omega \quad \text{com} \quad \phi \in \mathcal{D}^{n-p,n-q-1}(\Omega).\end{aligned}$$

3.1.3 Push Forward de uma Corrente em uma Função Suave

Definição 3.9. *Seja $F : \Omega \to \Omega'$ uma função suave. Se $T \in \{\mathcal{E}^r(\Omega)\}'$, o push forward de T por F, denotado por F_*T, é a corrente em $\{\mathcal{E}^r(\Omega')\}'$ definida por*

$$\langle F_*T, \phi \rangle_{\Omega'} = \langle T, F^*\phi \rangle_\Omega \quad \textit{com} \quad \phi \in \mathcal{E}^r(\Omega').$$

Como $F^*\phi$ é um elemento de $\mathcal{E}^r(\Omega)$, o lado direito está bem definido. Além disso, se $\phi_n \to \phi$ em $\mathcal{E}^r(\Omega')$, então $F^*\phi_n \to F^*\phi$ em $\mathcal{E}^r(\Omega)$ e assim F_*T é um funcional linear contínuo em $\mathcal{E}^r(\Omega')$. Portanto, F_*T é uma corrente em $\{\mathcal{E}^r(\Omega')\}'$.

Push forward preserva dimensão (mas não o grau) pois F^* preserva o grau. Note que $F^*\phi$ não necessariamente possue suporte compacto quando ϕ tem suporte compacto. Por esse motivo, o *push forward* em um elemento de $\{\mathcal{D}^r(\Omega)\}'$ não está bem definido.

Para funções suaves F e G temos $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$ em formas. Desse modo, $(F \circ G)_* = F_* \circ G_*$.

Exemplo 3.10. Sejam M e M' subvariedades suaves orientadas de $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{R}^{N'}$, respectivamente. Seja $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N'}$ uma função suave bijetiva que preserva orientação com $M' = F\{M\}$.

Então, $F_*[M] = [M']$. De fato, para $\phi \in \mathcal{D}^r(\mathbb{R}^{N'})$

$$\begin{aligned}\langle F_*[M], \phi\rangle_{\mathbb{R}^{N'}} &= \langle [M], F^*\phi\rangle_{\mathbb{R}^N}\\ &= \int_M F^*\phi\\ &= \int_{M'} \phi\\ &= \langle [M'], \phi\rangle_{\mathbb{R}^{N'}}.\end{aligned}$$

Exemplo 3.11. Suponha $\pi : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ a projeção $\pi(x,y) = y$, $x \in \mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^k$. Podemos computar π_* no subespaço $\mathcal{D}^{N+k-r}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k) \subset \{\mathcal{E}^r(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k)\}'$. Para $T \in \mathcal{D}^{N+k-r}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k)$ e $\phi \in \mathcal{D}^r(\mathbb{R}^k)$

$$\begin{aligned}\langle \pi_* T, \phi\rangle_{\mathbb{R}^k} &= \langle T, \pi^*\phi\rangle_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^k}\\ &= \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^k} T \wedge \pi^*\phi\\ &= \int_{y\in\mathbb{R}^k} \left(\int_{x\in\mathbb{R}^N} T(x,y)\right) \wedge \phi(y).\end{aligned}$$

A integral interior em x é igual a zero a menos que todos os dx's estejam presentes. Então, escrevemos

$$T(x,y) = \sum_{r=0}^{N} \sum_{|I|=r} dx^I \wedge T_I(x,y),$$

onde cada T_I é uma forma nas variáveis de y com coeficientes dependendo de x e y. Com esta notação, temos

$$\int_{x\in\mathbb{R}^N} T(x,y) = \int_{x\in\mathbb{R}^N} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_N \wedge T_{1\ldots N}(x,y).$$

Todos os x's e dx's são integrados deixando a forma diferencial em y. Sendo assim,

$$\langle \pi_* T, \phi\rangle_{\mathbb{R}^k} = \left\langle \int_{x\in\mathbb{R}^N} T(x,y), \phi(y)\right\rangle_{y\in\mathbb{R}^k},$$

e então

$$(\pi_* T)(y) = \int_{x\in\mathbb{R}^N} T(x,y) \quad \text{com} \quad y \in \mathbb{R}^k.$$

Em outras palavras, *push forward* em π é o mesmo que a operação de integral.

Lema 3.12. *Defina $\tau : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ por $\tau(y,x) = x - y$. Se $T \in \mathcal{D}^{2N-r}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ em $\{\mathcal{E}^r(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)\}'$, então*

$$(\tau_* T)(x) = \int_{y\in\mathbb{R}^N} (s^*T)(y,x),$$

onde $s : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ *é definida por* $s(y, x) = (y, x + y)$.

Demonstração. Suponha $\phi \in \mathcal{D}^r(\mathbb{R}^N)$. Então,

$$\langle \tau_* T, \phi \rangle_{\mathbb{R}^N} = \langle T, \tau^* \phi \rangle_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} T \wedge \tau^* \phi.$$

Além disso, $det(Ds) = 1$ e s é um isomorfismo linear que preserva orientação. Segue da fórmula de integração por mudança de variáveis que

$$\begin{aligned} \langle \tau_* T, \phi \rangle_{\mathbb{R}^N} &= \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} (s^* T) \wedge (s^* \tau^* \phi) \\ &= \int_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{y \in \mathbb{R}^N} s^* T(y, x) \wedge \phi(x), \end{aligned}$$

onde a última equação segue de $s^* \circ \tau^* = (\tau \circ s)^*$ e também $(\tau \circ s)(y, x) = x$. Portanto,

$$\langle \tau_* T, \phi \rangle_{\mathbb{R}^N} = \left\langle \int_{y \in \mathbb{R}^N} (s^* T)(y, x), \phi(x) \right\rangle_{x \in \mathbb{R}^N},$$

e a prova do lema está completa. □

Lema 3.13. *Suponha* Ω *e* Ω' *subconjuntos abertos de uma variedade N-dimensional. Seja* $F : \Omega \to \Omega'$ *um difeomorfismo que preserva orientação. Para* $T \in \mathcal{D}^{N-r}(\Omega) \subset \{\mathcal{E}^r(\Omega)\}'$, *temos*

$$F_* T = (F^{-1})^* T.$$

Se F *reverte orientação, então* $F_* T = -(F^{-1})^* T$.

Demonstração. Seja $\phi \in \mathcal{D}^r(\Omega')$. Então,

$$\langle F_* T, \phi \rangle_{\Omega'} = \langle T, F^* \phi \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} T \wedge F^* \phi.$$

Como $F^{-1} : \Omega' \to \Omega$ é um difeomorfismo que preserva orientação, da fórmula de integração por mudança de variáveis resulta que

$$\langle F_* T, \phi \rangle_{\Omega'} = \int_{\Omega'} ((F^{-1})^* T) \wedge \phi = \left\langle (F^{-1})^* T, \phi \right\rangle_{\Omega'}.$$

□

Lema 3.14. *Sejam* Ω *e* Ω' *subconjuntos abertos das variedades orientadas* X *e* Y *com dimensões reais* N *e* N', *respectivamente. Seja* $F : \Omega \to \Omega'$ *uma função suave. Então,*

$$F_* \circ d_X = (-1)^{N+N'} d_Y \circ F_*$$

é um operador de $\{\mathcal{E}^r(\Omega)\}'$ *para* $\{\mathcal{E}^{r-1}(\Omega')\}'$.

Demonstração. Suponha que T seja um elemento de $\{\mathcal{E}^r(\Omega)\}' \approx \mathcal{E}'^{N-r}(\Omega)$, e seja $\phi \in \mathcal{E}^{r-1}(\Omega')$. Então,

$$\begin{aligned}
\langle F_* d_X T, \phi \rangle_{\Omega'} &= \langle d_X T, F^* \phi \rangle_{\Omega} \\
&= (-1)^{N-r+1} \langle T, d_X(F^*\phi) \rangle_{\Omega} \\
&= (-1)^{N-r+1} \langle T, F^*(d_Y\phi) \rangle_{\Omega} \\
&= (-1)^{N-r+1} \langle F_* T, d_Y\phi \rangle_{\Omega'} \\
&= (-1)^{N+N'} \langle d_Y F_* T, \phi \rangle_{\Omega'} .
\end{aligned}$$

□

Lema 3.15. *Sejam Ω e Ω' subconjuntos abertos de variedades complexas com dimensões complexa n e n', respectivamente. Seja $F : \Omega \to \Omega'$ uma função holomorfa. Então,*

$$F_* \circ \overline{\partial} = \overline{\partial} \circ F_*$$

é um operador de $\{\mathcal{E}^{p,q}(\Omega)\}'$ para $\{\mathcal{E}^{p,q-1}(\Omega')\}'$.

Demonstração. Análoga a prova do Lema 3.14. □

3.1.4 Pull Back de uma Corrente Via uma Função Suave

A definição de *pull back* para correntes será feita de forma distinta do habitual. Como o espaço das formas diferenciais compõem uma grande subclasse das correntes e também o *pull back* de uma forma diferencial é bem definido, iremos encontrar uma forma conveniente de estender a operação de *pull back* para correntes. Primeiramente, o operador *pull back* é definido como sendo o dual do operador *push forward*. De forma mais precisa, devemos mostrar que o *push forward* tranforma formas suaves em formas suaves de maneira contínua.

Lema 3.16. *Suponha Ω e Ω' subconjuntos abertos de uma variedade orientada de dimensões N e N', respectivamente com $N \geq N'$. Seja $F : \Omega \to \Omega'$ uma função suave sobrejetiva tal que $F_*(p) : T_p(\Omega) \to T_{F(p)}(\Omega')$ tem ranque maximal N' em cada ponto $p \in \Omega$. Então, F_* é uma forma contínua de $\mathcal{D}^r(\Omega)$ para $\mathcal{D}^{r+N'-N}(\Omega')$.*

Demonstração. Pelo argumento da partição da unidade e pelo uso de coodenadas locais, iremos assumir que Ω e Ω' são subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{R}^{N'}$, respectivamente. Seja p_0 um ponto arbitrário de Ω. Como $DF(p_0)$ tem ranque maximal igual a N', podemos arranjar coodenadas (x, y) em $\mathbb{R}^N$ tal que $x \in \mathbb{R}^{N-N'}$ e $y \in \mathbb{R}^{N'}$ e, então $(D_yF)(p_0)$ é uma matriz não singular $N' \times N'$. Seja $p_0 = (x_0, y_0)$, pelo Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança de $(x_0, F(p_0))$, em $\mathbb{R}^{N-N'} \times \mathbb{R}^{N'}$, na forma $U' \times V'$ com $V' \subset \Omega'$ e um difeomorfismo $G : U' \times V' \to G\{U' \times V'\} \subset \Omega$ tal que $F(G(x, y)) = y$ para $y \in V'$. Dessa forma, $F \circ G : U' \times V' \to V'$ é a projeção $\pi : U' \times V' \to V'$, $\pi(x, y) = y$.

Seja ϕ um elemento de $\mathcal{D}^r(G\{U' \times V'\})$. Então,

$$F_*\phi = (F \circ G)_* \circ (G_*^{-1}\phi).$$

Segue do Lema 3.13 que $G_*^{-1}\phi = G^*\phi$ ou $-G^*\phi$, logo $G_*^{-1}\phi$ é uma forma suave com suporte compacto em $U' \times V'$. Como G é difeomorfismo, a função $\phi \mapsto G_*^{-1}\phi$ é contínua e linear de $\mathcal{D}^r(G\{U' \times V'\})$ para $\mathcal{D}^r(U' \times V')$. Além disso, como $F \circ G = \pi$, o cálculo de π_* nos concede pelo exemplo 3.11

$$(F_*\phi)(y) = (\pi_* G_*^{-1}\phi)(y) = \int_{x \in \mathbb{R}^{N-N'}} (G_*^{-1}\phi)(x, y),$$

onde a integral do lado direito envolve a variável x e todos os $dx's$, resultando em uma forma diferencial em y. Portanto, $F_*\phi$ é um forma suave com suporte compacto em $V' \subset \Omega'$ e a função $\phi \mapsto F_*\phi$ é uma função linear contínua de $\mathcal{D}^r(G\{U \times V'\})$ para $\mathcal{D}^{N'-N+r}(V')$. A dimensão de $F_*\phi$ é $N - r$ pois F_* preserva dimensão. Por outro lado, o grau de $F_*\phi \in \Omega'$ é $N' - N + r$.

O caso geral para $\phi \in \mathcal{D}^r(\Omega)$ segue do argumento da partição da unidade subordinado a uma cobertura aberta de Ω por conjuntos abertos da forma $G\{U' \times V'\}$. A prova do Lema está completa. $\square$

Definição 3.17. *Suponha Ω e Ω' subconjuntos abertos de variedades orientadas X e Y com dimensões N e N' ($N \geq N'$) respectivamente. Seja $F : \Omega \to \Omega'$ uma função suave sobrejetiva tal que $F_*(p) : T_p(\Omega) \to T_{F(p)}(\Omega')$ tem ranque maximal N' em cada ponto $p \in \Omega$. Para uma corrente $T \in \mathcal{D}'^r(\Omega')$, defina o pull back $F^*T \in \mathcal{D}'^r(\Omega)$ por*

$$(F^*T, \phi\rangle = (T, F_*\phi\rangle \quad \textit{com} \quad \phi \in \mathcal{D}^{N-r}(\Omega).$$

Segue do Lema 3.16 que F^*T está bem definido. Note que a operação de *push forward* preserva dimensão enquanto que a operação *pull back* preserva o grau da corrente. O caso onde a corrente T é dada sendo uma forma suave, temos F^*T definida na forma do *pull back* usual.

Como $\mathcal{D}^r(\Omega')$ é denso em $\mathcal{D}'^r(\Omega')$, podemos aplicar *pull back* em muitas correntes da mesma forma que aplicamos em formas diferenciais. Por exemplo, suponha

$$T = \sum_{|I|=r} T_I dx^I,$$

onde cada T_I é uma função localmente integrável em Ω'. Então,

$$F^*T = \sum_{|I|=r} (T_I \circ F)(dF^I).$$

Lema 3.18. *Sejam $\tau : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ dado por $\tau(y, x) = x - y$ e $\Delta = \{(x, x);\ x \in \mathbb{R}^N\}$.*

Então, $\tau^*[0] = \Delta$.

Demonstração. Uma forma atraente de prova pode ser dada escrevendo $[0]$ e $[\Delta]$ como formas cujos coeficientes são distribuições. Pelo Lema 3.7, nós temos

$$[0] = \delta_0(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_N,$$

$$[\Delta] = \delta_0(x-y)d(x_1-y_1) \wedge \ldots \wedge d(x_N-y_N),$$

e a prova segue substituindo x por $\tau(y,x) = x - y$ e dx_j por $d\tau_j(y,x) = d(x_j - y_j)$. □

A demonstração do Lema 3.18 pode ser mais rigoroso pela aproximação de $[0]$ por uma sequência de formas suaves. Contudo, temos outra abordagem usando a Definição 3.17. Seja $\phi \in \mathcal{D}^N(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Escreva

$$\phi(x,y) = \sum_{|I|+|J|=N} \phi_{IJ}(y,x)dy^I \wedge dx^J,$$

onde cada ϕ_{IJ} é um elemento de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Então, do Lema 3.12

$$\begin{aligned}\langle \tau^*[0], \phi\rangle_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} &= \langle [0], \tau_*\phi\rangle_{\mathbb{R}^N} \\ &= \left\langle [0], \int_{y\in\mathbb{R}^N} \phi(y, x+y)\right\rangle_{x\in\mathbb{R}^N},\end{aligned}$$

onde

$$\phi(y,x+y) = \sum_{|I|+|J|=N} \phi_{IJ}(y,x+y)dy^I \wedge d(x+y)^J.$$

Como somente a parte de $\phi(y,x+y)$ de grau N em dy contribui na integral, obtemos

$$\int_{y\in\mathbb{R}^N} \phi(y,x+y) = \sum_{|I|+|J|=N} \int_{y\in\mathbb{R}^N} \phi_{IJ}(y,x+y)dy^I \wedge dy^J.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\langle \tau[0], \phi\rangle_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} &= \left\langle [0], \sum_{|I|+|J|=N} \int_{y\in\mathbb{R}^N} \phi_{IJ}(y,x+y)dy^I \wedge dy^J \right\rangle_{x\in\mathbb{R}^N} \\ &= \sum_{|I|+|J|=N} \int_{y\in\mathbb{R}^N} \phi_{IJ}(y,y)dy^I \wedge dy^J \\ &= \int_\Delta \phi \\ &= \langle [\Delta], \phi\rangle_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N}.\end{aligned}$$

4 VARIEDADES CR

Vamos iniciar o capítulo com a definição de variedade CR mergulhada (ou subvariedade CR), uma classe mais simples das variedades CR. Em seguida, veremos as propriedades das subvariedades CR genéricas e das subvariedades quadráticas. Posteriormente, apresentaremos a definição de variedade CR abstrata.

A que medida que vamos nos aprofundando nas variedades CR, elas vão se tornando mais difíceis de se imaginar, como o nome já diz, se torna abstrato. No ambiente $\mathbb{C}^n$ ainda é possível encontrar exemplos, porém, em uma variedade complexa geral isso se torna complicado.

4.1 Variedade CR Mergulhada

Dada uma subvariedade suave M em $\mathbb{C}^n$, lembre que $T_p(M)$ é o espaço tangente real de M no ponto $p \in M$. Em geral, $T_p(M)$ não é invariante sob uma função estrutura complexa J de $T_p(\mathbb{C}^n)$. Portanto, daremos uma denominação especial ao maior subespaço J-invariante de $T_p(M)$.

Definição 4.1. *Para um ponto $p \in M$, o espaço tangente complexo de M em p é o espaço vetorial*

$$H_p(M) = T_p(M) \cap J\{T_p(M)\}.$$

Temos que $H_p(M)$ sempre é um espaço vetorial real de dimensão par, pois

$$J \circ J|_{H_p(M)} = -I,$$

e portanto

$$[\det J|_{H_p(M)}]^2 = (-1)^m,$$

onde $m = \dim_{\mathbb{R}} H_p(M)$. Note que, se $A : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ é uma função linear complexa (isto é, $J \circ A = A \circ J$), então

$$\begin{aligned} A\{H_p(M)\} &= A\left\{T_p(M) \cap J\{T_p(M)\}\right\} \\ &\subset A\left\{T_p(M)\right\} \cap A \circ J\{T_p(M)\} \\ &= T_{A(p)}(A(M)) \cap J\{T_{A(p)}(A(M))\} = H_{A(p)}(A\{M\}). \end{aligned}$$

Definição 4.2. *A parte real total de um espaço tangente de M é o espaço quociente*

$$X_p(M) = \frac{T_p(M)}{H_p(M)}.$$

Utilizando o produto interno Euclidiano em $T_p(\mathbb{R}^{2n})$, podemos identificar $X_p(M)$ como o complemento ortogonal de $H_p(M)$ (denotado por $H_p(M)^{\perp}$) em $T_p(M)$. Além disso, temos $J\{X_p(M)\} \cap X_p(M) = \{0\}$, pois $H_p(M)$ é o maior subespaço J-invariante de $T_p(M)$. Logo $T_p(M) = H_p(M) \oplus X_p(M)$. Pelo Lema 1.68, $J\{X_p(M)\}$ é ortogonal a $H_p(M)$. Portanto, $J\{X_p(M)\}$ é transversal a $T_p(M)$.

Lema 4.3. *Seja M uma subvariedade real em $\mathbb{C}^n$ de dimensão real $2n - d$. Então,*

$$2n - 2d \leq \textit{dim}_{\mathbb{R}}\ H_p(M) \leq 2n - d$$

e

$$0 \leq \textit{dim}_{\mathbb{R}}\ X_p(M) \leq d.$$

Demonstração. Primeiramente note que $H_p(M) \subset T_p(M)$, então

$$\dim_{\mathbb{R}} H_p(M) \leq \dim_{\mathbb{R}} T_p(M) = 2n - d.$$

Para a outra desigualdade, note que

$$T_p(\mathbb{R}^{2n}) \supset T_p(M) + J\{T_p(M)\}$$

e, então

$$\dim_{\mathbb{R}} T_p(\mathbb{R}^{2n}) \geq \dim_{\mathbb{R}} T_p(M) + \dim_{\mathbb{R}} J\{T_p(M)\} - \dim_{\mathbb{R}} H_p(M).$$

Como J é uma isometria,

$$\dim_{\mathbb{R}} J\{T_p(M)\} = \dim_{\mathbb{R}} T_p(M) = 2n - d,$$

segue que

$$\dim_{\mathbb{R}} H_p(M) \geq -2n + (2n - d) + (2n - d) = 2n - 2d.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} X_p(M) &= \dim_{\mathbb{R}} T_p(M) - \dim_{\mathbb{R}} H_p(M) \\ &\leq 2n - d - (2n - 2d) = d. \end{aligned}$$

O que prova o lema. □

A dimensão real de $X_p(M)$ é chamada codimensão CR de M. Se M é uma hipersuperfície, então $d = 1$ e então a única possibilidade é $\dim_{\mathbb{R}} H_p(M) = 2n - 2$. Em particular, a dimensão de $H_p(M)$ nunca muda. Se $d > 1$, então temos mais possibilidades, como no exemplo a seguir.

Exemplo 4.4. Seja $M = \{z \in \mathbb{C}^n;\ |z| = 1$ e Im $z_1 = 0\}$, ou seja, M é a esfera unitária de $\mathbb{C}^n$ de dimensão real $2n-2$. Então, $d = 2$ e assim $2n-4 \leq \dim_{\mathbb{R}} H_p(M) \leq 2n-2$, com $p \in M$.

Para o ponto $p_1 = (z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = 0, \ldots, z_n = 0) \in M$, $T_{p_1}(M)$ é gerado sobre $\mathbb{R}$ por $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial y_3}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}\right\}$. Os vetores $J\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial y_1}$ e $J\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_2}$ são ortogonais em $T_{p_1}(M)$ e portanto $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}$ geram $X_{p_1}(M)$. Já os vetores $\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial y_3}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}\right\}$, geram um suberpaço J-invariante $H_{p_1}(M)$. Logo, nesse caso, $\dim_{\mathbb{R}} H_{p_1}(M) = 2n-4$ e $\dim_{\mathbb{R}} X_{p_1}(M) = 2$.

Agora, considere o ponto $p_2 = (z_1 = 1, z_2 = 0, \ldots, z_n = 0) \in M$. Aqui, $T_{p_2}(M)$ é gerado sobre $\mathbb{R}$ por $\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}\right\}$, que é J-invariante. Portanto, $H_{p_2}(M) = T_{p_2}(M)$ e $X_{p_2}(M) = \{0\}$. Nesse caso, $\dim_{\mathbb{R}} H_{p_2}(M) = 2n-2$ e $\dim_{\mathbb{R}} X_{p_2}(M) = 0$.

No Exemplo 4.4 a dimensão de $H_p(M)$ varia de acordo com p. O requerimento básico em variedades CR é que a dimensão de $H_p(M)$ seja independente de $p \in M$.

Definição 4.5. *Uma subvariedade M de $\mathbb{C}^n$ é chamada variedade CR mergulhada ou subvariedade CR de $\mathbb{C}^n$ se $\dim_{\mathbb{R}} H_p(M)$ é independente de $p \in M$.*

Uma hipersuperfície em $\mathbb{C}^n$ é uma subvariedade CR em $\mathbb{C}^n$. Outra classe de subvariedades CR é a classe se subvariedades complexas de $\mathbb{C}^n$. Para uma subvariedade complexa M, o espaço tangente real é sempre J-invariante e assim $T_p(M) = H_p(M)$.

Definição 4.6. *Uma subvariedade M em $\mathbb{C}^n$ é dita ser totalmente real se $H_p(M) = \{0\}$, para cada $p \in M$.*

Uma definição equivalente para subvariedade totalmente real é quando ocorre $X_p(M) = T_p(M)$, para todo $p \in M$. Segue do Lema 4.3 que a dimensão real de uma subvariedade totalmente real é sempre n. Um exemplo de subvariedade totalmente real é a cópia de $\mathbb{R}^n$ dada por $\{(x+iy) \in \mathbb{C}^n;\ y = 0\}$.

As complexificações de $T_p(M)$, $H_p(M)$ e $X_p(M)$ são denotadas $T_p(M) \otimes \mathbb{C}$, $H_p(M) \otimes \mathbb{C}$ e $X_p(M) \otimes \mathbb{C}$, respectivamente. A função estrutura complexa J em $T_p(\mathbb{R}^{2n}) \otimes \mathbb{C}$ pode se restringir à $H_p(M) \otimes \mathbb{C}$ pois $H_p(M)$ é J-invariante. Vimos na Seção 1.7 que $H_p(M) \otimes \mathbb{C}$ é a soma direta dos auto-espaços $+i$ e $-i$ de J que são denotados por $H_p^{1,0}(M)$ e $H_p^{0,1}(M)$, respectivamente. Assim, tem-se

$$
\begin{aligned}
H_p^{1,0}(M) &= T_p^{1,0}(\mathbb{C}^n) \cap \{T_p(M) \otimes \mathbb{C}\}, \\
H_p^{0,1}(M) &= T_p^{0,1}(\mathbb{C}^n) \cap \{T_p(M) \otimes \mathbb{C}\}, \\
H_p^{0,1}(M) &= \overline{H_p^{1,0}(M)}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 4.7. Tomemos novamente o conjunto $M = \{z \in \mathbb{C}^n;\ |z| = 1 \text{ e Im } z_1 = 0\}$, e o ponto $p = (z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = 0, \ldots, z_n = 0) \in M$. Como foi visto na Seção 1.7, uma base para $T_p^{1,0}(\mathbb{C}^n)$ é dada por

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right\} = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial y_1}\right), \ldots, \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_n} - i\frac{\partial}{\partial y_n}\right)\right\}.$$

Enquanto que uma base para $T_p(M) \otimes \mathbb{C}$ é dada por

$$\{v \otimes 1, v \otimes i;\ v \text{ um elemento da base de } T_p(M)\},$$

e como visto no Exemplo 4.4, $T_p(M)$ é gerado sobre $\mathbb{R}$ por

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial y_3}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}\right\}.$$

Portanto os elementos $\frac{\partial}{\partial z_1}$ e $\frac{\partial}{\partial z_2}$ não pertencem a $T_p(M) \otimes \mathbb{C}$, enquanto que todos $\frac{\partial}{\partial z_i}$, com $3 \leq i \leq n$, pertencem. Isso mostra que $T_p^{1,0}(\mathbb{C}^n) \cap \{T_p(M) \otimes \mathbb{C}\}$ é gerada por

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z_3}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right\} = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_3} - i\frac{\partial}{\partial y_3}\right), \ldots, \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial y_1}\right)\right\},$$

que é também a base de $H_p^{1,0}(M)$.

Será bastante útil ter uma forma de identificar estes espaços em termos de um sistema definido localmente em M. Para isso, tem-se o seguinte lema:

Lema 4.8. *Seja M uma subvariedade suave de $\mathbb{C}^n$ definida próximo a um ponto $p \in M$ com $M = \{z \in \mathbb{C}^n; \rho_1(z) = \ldots = \rho_d(z) = 0\}$, onde $\rho_1, \ldots, \rho_d$ são funções suaves com valor real com $d\rho_1 \wedge \ldots \wedge d\rho_d \neq 0$ próximo de p.*

(a) Um vetor $W = \sum_{j=1}^n w_j \frac{\partial}{\partial z_j} \in T_p^{1,0}(\mathbb{C}^n)$ pertence a $H_p^{1,0}(M)$ se, e somente se

$$W\{\rho_k\}(p) = \langle \partial\rho_k, W\rangle_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho_k}{\partial z_j}(p) w_j = 0, \qquad 1 \leq k \leq d.$$

(b) Um vetor $W = \sum_{j=1}^n w_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \in T_p^{0,1}(\mathbb{C}^n)$ pertence a $H_p^{0,1}(M)$ se, e somente se

$$W\{\rho_k\}(p) = \langle \overline{\partial}\rho_k, W\rangle_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho_k}{\partial \bar{z}_j}(p) w_j = 0, \qquad 1 \leq k \leq d.$$

Lembre-se que $W\{\rho_k\}$ denota a ação de um vetor W em uma função ρ_k, e $\langle\ ,\ \rangle_p$ denota o pareamento entre formas e vetores.

Demonstração. Tem-se $H_p^{1,0}(M) = T_p^{1,0}(\mathbb{C}^n) \cap \{T_p(M) \otimes \mathbb{C}\}$ e

$$T_p(M) \otimes \mathbb{C} = \{W \in T_p(\mathbb{C}^n) \otimes \mathbb{C}; \langle d\rho_k, W \rangle_p = 0 \ \text{ com } \ 1 \leq k \leq d\}.$$

Como $\overline{\partial}\rho_k$ é forma bigral $(0,1)$, então $\left\langle \overline{\partial}\rho_k, W \right\rangle_p = 0$ para $W \in T_p^{1,0}(\mathbb{C}^n)$. Além disso, $d\rho_k = \partial\rho_k + \overline{\partial}\rho_k$. Portanto, $W \in H_p^{1,0}(M)$ se, e somente se, $\langle \partial\rho_k, W \rangle_p = 0$. A parte (b) se mostra de forma análoga. $\square$

Se M é uma subvariedade CR em $\mathbb{C}^n$, então as dimensões de $H_p^{1,0}(M)$, $H_p^{0,1}(M)$ e $H_p(M) \otimes \mathbb{C}$ são independentes do ponto $p \in M$. Logo, pode-se definir subconjuntos de $T^{\mathbb{C}}(M)$ como segue:

$$\begin{aligned} H^{\mathbb{C}}(M) &= \bigcup_{p \in M} H_p(M) \otimes \mathbb{C}, \\ H^{1,0}(M) &= \bigcup_{p \in M} H_p^{1,0}(M), \\ H^{0,1}(M) &= \bigcup_{p \in M} H_p^{0,1}(M). \end{aligned}$$

Um subfibrado de $T^{\mathbb{C}}(M)$ é um objeto que atribui a cada ponto $p \in M$ um subespaço de $T_p(M) \otimes \mathbb{C}$ cuja dimensão é independente de p. Além disso, para esses subespaços é requerido que se encaixem suavemente, no sentido de que são localmente gerados por bases de campos vetoriais suaves. Pode-se ver facilmente que esse último requerimento é satisfeito pelos espaços $H^{1,0}(M)$, $H^{0,1}(M)$ e $H^{\mathbb{C}}(M)$. Para M localmente definido por $\{\rho_1, \ldots, \rho_d\}$, próximo de um ponto $p_0 \in M$, pode ser escolhido de $\{\partial\rho_1, \ldots, \partial\rho_d\}$ uma coleção de k elementos $\partial\rho_{i_1}, \ldots, \partial\rho_{i_k}$ $(1 \leq k \leq d)$, linearmente independentes. O número k é a codimensão CR de M. Segue da álgebra elementar que, existem campos vetoriais suaves linearmente independentes $L_1, \ldots, L_{n-k}$ que são anulados por $\partial\rho_{i_1}, \ldots, \partial\rho_{i_k}$. Esses campos vetoriais geram localmente $H^{1,0}(M)$ pelo Lema 4.8, e então $H^{1,0}(M)$ é subfibrado de $T^{\mathbb{C}}(M)$. Analogamente, $H^{0,1}(M)$ e $H^{\mathbb{C}}(M)$ são subfibrado de $T^{\mathbb{C}}(M)$.

Lema 4.9. *Seja M uma subvariedade CR de $\mathbb{C}^n$. Então,*

(a) $H_p^{0,1}(M) \cap H_p^{1,0}(M) = \{0\}$ *para todo* $p \in M$.

(b) Os subfibrados $H^{0,1}(M)$ e $H^{1,0}(M)$ são involutivos.

Lembrando que uma subvariedade é involutiva se é fechada para o colchete de Lie.

Demonstração. A prova da parte (a) segue do fato que a interseção de autoespaços de uma função linear correspondentes a autovalores diferentes é sempre o espaço trivial. Para a parte

(b), nota-se primeiramente que

$$\begin{aligned} H^{1,0}(M) &= \bigcup_{p\in M} H_p^{1,0}(M) \\ &= \bigcup_{p\in M} \big(T_p^{1,0}(\mathbb{C}^n) \cap \{T_p(M)\otimes\mathbb{C}\}\big) \\ &= \bigcup_{p\in M} T_p^{1,0}(\mathbb{C}^n) \cap \bigcup_{p\in M} T_p(M)\otimes\mathbb{C} \\ &= \{T^{1,0}(\mathbb{C}^n)|_M\} \cap T^{\mathbb{C}}(M). \end{aligned}$$

O fibrado $T^{1,0}(\mathbb{C}^n)$ é involutivo pois o colchete de Lie de quaisquer dois campos vetoriais gerados por $\dfrac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial z_n}$ é também gerado por $\left\{\dfrac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial z_n}\right\}$. Além disso, $T^{\mathbb{C}}(M)$ é involutivo pois é o fibrado tangente de qualquer variedade é involutiva. Portanto, $H^{1,0}(M)$ é involutivo, como queríamos. Como $H^{0,1}(M) = \overline{H^{1,0}(M)}$, $H^{0,1}(M)$ é também involutivo. □

O Lema 4.9 é importante pois as propriedades (a) e (b) são as que definem uma variedade CR abstrata. O Lema 4.9 não implica que $H^{\mathbb{C}}(M) = H^{1,0}(M) \oplus H^{0,1}(M)$ é involutiva. Em geral, isso não é verdade.

O Lema 4.8 implica que $\dim_{\mathbb{C}} H_p^{1,0}(M) = n - k$ onde k é o número de elementos linearmente independentes de $\{\partial\rho_1(p), \ldots, \partial\rho_d(p)\}$. Se $\partial\rho_1 \wedge \ldots \wedge \partial\rho_d \neq 0$ então $\dim_{\mathbb{C}} H_p^{1,0}(M) = n - d = \dim_{\mathbb{C}} H_p^{0,1}(M)$ e assim $\dim_{\mathbb{R}} H_p(M) = 2n - 2d$. De acordo com o Lema 4.3, esse é o valor mínimo para a dimensão de $H_p(M)$.

Definição 4.10. *Uma subvariedade CR M é chamada genérica se $\dim_{\mathbb{R}} H_p(M)$ é mínima.*

Uma hipersuperfície em $\mathbb{C}^n$ é sempre genérica. Pelo Lema 4.3, uma subvariedade CR genérica de $\mathbb{C}^n$ cuja codimensão real é ao menos n deve ser totalmente real. Uma subvariedade complexa de $\mathbb{C}^n$ que não é um subconjunto aberto de $\mathbb{C}^n$ é um exemplo de variedade CR não genérica.

Lema 4.11. *Seja M uma subvariedade CR de $\mathbb{C}^n$ com $\dim_{\mathbb{R}} = 2n - d$, $0 \leq d \leq n$. São equivalentes:*

(a) M é genérica.

(b) $\dim_{\mathbb{R}} H_p(M) = 2n - 2d$, para $p \in M$.

(c) A codimensão CR de M é igual a d.

(d) $\partial\rho_1 \wedge \ldots \wedge \partial\rho_d \neq 0$ em M para cada sistema local definido $\{\rho_1, \ldots, \rho_d\}$ para M.

(e) $T_p(\mathbb{C}^n) = T_p(M) \oplus J\{X_p(M)\}$.

Demonstração. A prova segue do que foi comentado na seção, por esse motivo, deixaremos a cargo do leitor. □

Exemplo 4.12. Como no Exemplo 4.4, considere $M = \{z \in \mathbb{C}^n;\ |z| = 1 \text{ e } \mathrm{Im} z_1 = 0\}$. Defina as funções $\rho_1(z) = |z|^2 - 1$ e $\rho_2(z) = (1/2i)\,(z_1 - \overline{z}_1)$. Desse modo,

$$\begin{aligned}
\partial\rho_1(z) = \partial\left(|z|^2 - 1\right) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\left(|z|^2 - 1\right)}{\partial z_j} dz_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{j=1}^{n}(x_j^2 + y_j^2)\right) - i\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\sum_{j=1}^{n}(x_j^2 + y_j^2)\right)\right) dz_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} (x_j - iy_j) dz_j = \sum_{j=1}^{n} \overline{z}_j dz_j = \overline{z} dz. \\
\partial\rho_2(z) = \partial\left(\left(\frac{1}{2i}\right)(z_1 - \overline{z}_1)\right) &= \frac{1}{2i} dz_1.
\end{aligned}$$

Claramente, $\partial\rho_1 \wedge \partial\rho_2 = 0$ somente nos pontos $z = (z_1, \dots, z_n) \in M$ com $z_2 = \dots = z_n$, $z_1 = \pm 1$. Então, M não é subvariedade CR. Por outro lado, o conjunto

$$\widetilde{M} = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in M;\ z_1 \neq \pm 1\},$$

é uma subvariedade CR genérica (não compacta) de $\mathbb{C}^n$.

Se M é uma hipersuperfície, então $X_p(M)$ é um subespaço uni dimensional (real) de $T_p(M)$. Pelo Lema 1.68, $J\{X_p(M)\}$ é ortogonal a ambos $X_p(M)$ e $H_p(M)$. Portanto, $J\{X_p(M)\}$ pode ser identificado como o complemento ortogonal de $T_p(M)$. Para codimensões mais altas, ambos $X_p(M)$ e $J\{X_p(M)\}$ são ortogonais a $H_p(M)$. Contudo, em geral, $J\{X_p(M)\}$ não é ortogonal a $X_p(M)$ e assim $J\{X_p(M)\}$ não pode ser identificado como o complemento ortogonal de $T_p(M)$ em todos os casos. Considere o exemplo que segue:

Exemplo 4.13. Seja

$$M = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2;\ \mathrm{Im} z_1 = \mathrm{Re} z_2,\ \mathrm{Im} z_2 = 0\}.$$

M é totalmente real e a base de $T_0(M)$ é dada por

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right\}.$$

Nota-se que $J\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y_1}$ não é ortogonal a $\dfrac{\partial}{\partial y_1} + \dfrac{\partial}{\partial x_2}$.

4.2 Uma forma normal para uma subvariedade CR genérica.

Nesta seção, será apresentado uma descrição de coordenadas conveniente para uma subvariedade CR genérica. Inicialmente, será caracterizado o gráfico de uma subvariedade

CR localmente sobre o espaço tangente real. Então, será mostrado que a função gráfico pode ser fechada para certos "termos puros" na expansão de Taylor. O caso analítico real é trabalhado primeiro. Disto, a versão em C^k segue facilmente.

Lema 4.14. *Seja M uma subvariedade CR genérica suave de $\mathbb{C}^n$ com $\dim_{\mathbb{R}} M = 2n - d$, onde $1 \leq d \leq n$. Tomemos p_0 um ponto em M. Existe uma função linear complexa afim e não-singular $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, uma vizinhança U de p_0, e uma função suave $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \to \mathbb{R}^d$ com $h(0) = 0$ e $Dh(0) = 0$ tal que*

$$A\{M \cap U\} = \{(x + iy, w) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}; y = h(x, w)\}.$$

Demonstração. Primeiramente, vamos transladar o ponto p_0 para a origem. É suficiente encontrar uma função linear complexa não-singular $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ que leva $T_0(M)$ no espaço $\{y = 0\}$ em $\mathbb{R}^{2n}$, onde $y = \text{ Im } z \in \mathbb{R}^d$. Para ela e a função gráfica h, em $A\{M\}$ serão satisfeitas as propriedades requeridas.

A fim de encontrar a função desejada A, seja $\widehat{v}_1, \ldots, \widehat{v}_d$ uma base ortonormal para $X_0(M)$. O espaço J-invariante $H_0(M)$ é ortogonal tanto para $X_0(M)$ como $J\{X_0(M)\}$. Além disso, J não possui autovalores reais e $Jv.w = -v.Jw$ para $v, w \in T_0(\mathbb{R}^{2n})$. Portanto, existe uma base ortonormal para $H_0(M)$ na forma $\widehat{v}_{d+1}, J\widehat{v}_{d+1}, \ldots, \widehat{v}_n, J\widehat{v}_n$. Como M é genérico, o conjunto

$$\{\widehat{v}_1, J\widehat{v}_1, \ldots, \widehat{v}_n, J\widehat{v}_n\},$$

é uma base pra $T_0(\mathbb{R}^{2n})$, pelo Lema 4.11.

Agora, seja $z = x + iy \in \mathbb{C}^d$ e $w = u + iv \in \mathbb{C}^{n-d}$. Nesse caso, x e y pertencem a $\mathbb{R}^d$ e u, v pertencem a $\mathbb{R}^{n-d}$. Defina a função linear real $A : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ da seguinte forma

$$A(\widehat{v}_j) = \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad A(J\widehat{v}_j) = \frac{\partial}{\partial y_j} \qquad 1 \leq j \leq d,$$

$$A(\widehat{v}_j) = \frac{\partial}{\partial u_{j-d}}, \qquad A(J\widehat{v}_j) = \frac{\partial}{\partial v_{j-d}} \qquad d + 1 \leq j \leq n.$$

Como $J(\partial/\partial x_j) = \partial/\partial y_j$ e $J(\partial/\partial u_k) = \partial/\partial v_k$, segue que $A \circ J = J \circ A$ nos elementos da base de $T_0(\mathbb{R}^{2n})$ e portanto $A \circ J = J \circ A$ em todo $T_0(\mathbb{R}^{2n})$. Visto que esta função é de $\mathbb{C}^n$ para $\mathbb{C}^n$, A é complexa linear. Claramente,

$$A\{T_0(M)\} = \{(x, 0, u, v) \; ; \; x \in \mathbb{R}^d \text{ e } u, v \in \mathbb{R}^{n-d}\} = \{y = 0\},$$

como queríamos. Isto completa a prova do lema. $\square$

Temos A complexa linear, logo $A\{H_p(M)\} = H_0(A\{M\})$. Assim, a extensão de A para $T_p(\mathbb{C}^n) \otimes \mathbb{C}$ satisfaz $A\{H_p^{1,0}(M)\} = H_0^{1,0}(A\{M\})$ e $A\{H_p^{0,1}(M)\} = H_0^{0,1}(A\{M\})$. Além disso, A relaciona uma base ortonormal de $T_p(M)$ em uma base ortonormal de $T_0(A\{M\})$.

Em particular, $A\{X_p(M)\} = X_0(A\{M\})$. Nas novas coordenadas, temos

$$\begin{aligned} T_0(M) &= \{(x,0,u,v)\ ;\ x \in \mathbb{R}^d \text{ e } u,v \in \mathbb{R}^{n-d}\}, \\ H_0(M) &= \{(0,0,u,v)\ ;\ u,v \in \mathbb{R}^{n-d}\}, \\ X_0(M) &= \{(x,0,0,0)\ ;\ x \in \mathbb{R}^d\}. \end{aligned}$$

Pode-se identificar $H_0^{1,0}(M)$ por $\{(0,w)\ ;\ w \in \mathbb{C}^{n-d}\}$ na forma complexa linear, onde $w = u + iv$.

A nossa maior preocupação neste trabalho é com as subvariedades CR genéricas. Contudo, devemos apontar uma versão do Lema 4.14 para um caso não genérico. Seja k a codimensão CR de M e seja d a codimensão real de M. Para o caso não genérico, temos $0 \leq k < d$ e então $n \geq \dim_{\mathbb{C}} H^{1,0}(M) > n - d$ pelo Lema 4.3. Defina o inteiro j por $\dim H_{\mathbb{C}}^{1,0}(M) = n - d + j$. Temos

$$\begin{aligned} 2n - d &= \dim_{\mathbb{C}} H^{1,0}(M) + \dim_{\mathbb{C}} H^{0,1}(M) + \dim_{\mathbb{R}} X(M) \\ &= 2n - 2d + 2j + k. \end{aligned}$$

Portanto, $2j + k = d$. Como $J\{X_p(M)\}$ é um subespaço k-dimensional transverso a $T_p(M)$, existe um subespaço J-invariante de $T_p(\mathbb{C}^n)^\perp$ de dimensão real $2j$ que é transverso a $T_p(M) \oplus J\{X_p(M)\}$. A prova do Lema 4.14 pode ser modificada para haver uma mudança complexa linear de coordenadas, definindo equações para M como segue

$$\begin{aligned} z_1 &= H_1(x_{j+1}, \ldots, x_{d-j}, w_1, \ldots, w_{n-d+j}), \\ &\cdots \\ z_j &= H_j(x_{j+1}, \ldots, x_{d-j}, w_1, \ldots, w_{n-d+j}), \\ y_{j+1} &= h_{j+1}(x_{j+1}, \ldots, x_{d-j}, w_1, \ldots, w_{n-d+j}), \\ &\cdots \\ y_{d-j} &= h_{d-j}(x_{j+1}, \ldots, x_{d-j}, w_1, \ldots, w_{n-d+j}), \end{aligned}$$

onde $H_1, \ldots, H_j$ são funções suaves com valores complexos tal que $H_l(0) = 0$ e $DH_l(0) = 0$, $1 \leq l \leq j$, e $h_{j+1}, \ldots, h_{d-j}$ são funções suaves com valores complexos tal que $h_l(0) = 0$ e $Dh_l(0) = 0$, $j + 1 \leq l \leq d - j$,

Teorema 4.15. *Suponha M uma subvariedade CR genérica, analítica e real de $\mathbb{C}^n$ tal que $\dim_{\mathbb{R}} M = 2n - d$ $(1 \leq d \leq n)$. Suponha que p_0 é um ponto de M. Existe uma vizinhança U de p_0 em $\mathbb{C}^n$, um biholomorfismo $\Phi : U \to \Phi\{U\} \subset \mathbb{C}^n$, e uma função analítica real $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \to \mathbb{R}^d$ com $h(0) = 0$ e $Dh(0) = 0$ tal que*

$$\Phi\{M \cap U\} = \{(x + iy, w) \in \Phi\{U\} \subset \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}\ ;\ y = h(x,w)\}.$$

Além disso,

$$\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}h(0)}{\partial x^{\alpha}\partial w^{\beta}} = 0$$
$$\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}h(0)}{\partial x^{\alpha}\partial \overline{w}^{\beta}} = 0$$

Para todos os multi-índices α e β.

Outra forma de descrever a função gráfico h é por meio da expansão de Taylor sobre a origem

$$h(x,w) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} a_{\alpha,\beta,\gamma} x^{\alpha} w^{\beta} \overline{w}^{\gamma},$$

onde

$$a_{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{1}{\alpha!\beta!\gamma!}\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}h}{\partial x^{\alpha}\partial w^{\beta}\partial \overline{w}^{\gamma}}(0).$$

Os termos da expansão de Taylor com $\beta = 0$ ou $\gamma = 0$ são chamados termos puros.

Demonstração. Como no Lema 4.14, iremos assumir que o ponto dado p_0 é a origem e

$$M = \{(x+iy, w) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d};\ y = h(x,w)\},$$

onde $h(0) = 0$ e $Dh(0) = 0$. Como M é analítica real, a função gráfica $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \to \mathbb{R}^d$ é analítica real. A Expansão de Taylor de h é dado por

$$h(x,w,\overline{w}) = \sum a_{\alpha\beta\gamma} x^{\alpha} w^{\beta} \overline{w}^{\gamma}.$$

Temos enfatizado que h é não holomorfica em w pela notação $h(x,w,\overline{w})$, o qual ilustra a dependência de h em $\overline{w}$. Então, iremos substituir $\overline{w}$ pela coordenada independente $\eta \in \mathbb{C}^{n-d}$ e x por $z \in \mathbb{C}^d$ e definimos a função holomórfica $\widetilde{h} : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^{n-d} \to \mathbb{C}^d$ como segue

$$\widetilde{h}(z,w,\eta) = \sum a_{\alpha\beta\gamma} x^{\alpha} w^{\beta} \eta^{\gamma}.$$

Esta série converge para $\{|z|,|w|,|\eta| < \delta\}$ para algum $\delta > 0$.

Como $h(0) = 0$ e $Dh(0) = 0$, temos $\widetilde{h}(0) = 0$ e $D\widetilde{h}(0) = 0$. Do Teorema da Função Implícita para funções holomorfas, existe um holomorfismo $\phi : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \to \mathbb{C}^d$ definido próximo a origem tal que

$$\phi(z + i\widetilde{h}(z,w,0), w) = z \qquad \text{com} \qquad |z|,|w| < \delta, \tag{4.1}$$

para algum, possivelmente pequeno $\delta > 0$.

Defina agora a mudança holomórfica de variáveis $(\widehat{z}, \widehat{w}) = \Phi(z, w)$ onde

$$\begin{aligned} \widehat{z} &= z - i\widetilde{h}(\phi(z,w), w, 0) \in \mathbb{C}^d, \\ \widehat{w} &= w \in \mathbb{C}^{n-d}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Como $D\widetilde{h}(0,0,0) = 0$, $D\Phi(0,0)$ é a identidade. Então, para um $\delta > 0$ apropriado, a função Φ é um biholomorfismo para $\{|z|, |w| < \delta\}$ em uma vizinhança da origem em $\mathbb{C}^n$.

Seja $\widehat{M}$ a imagem de $M \cap \{|z|, |w| < \delta\}$ por Φ. Desejamos encontrar uma função definida para $\widehat{M}$ em $\widehat{z} = \widehat{x} + i\widehat{y}$, $\widehat{w}$ coordenadas na forma

$$\widehat{y} = \widehat{h}(\widehat{x}, \widehat{w}),$$

de forma que $\widehat{h}$ satisfaça as propriedades requeridas no teorema.

De 4.2,

$$\widehat{y} = y - \text{ Re } \{\widetilde{h}(\phi(z,w), w, 0)\}.$$

Se $(\widehat{z}, \widehat{w})$ pertencem a $\widehat{M}$, então (z, w) pertencem a M e então

$$y = \widetilde{h}(x, w, \overline{w}) \in \mathbb{R}^d.$$

Substituindo esta equação na anterior, temos

$$\widehat{y} = \text{ Re } \{\widetilde{h}(x, w, \overline{w}) - \widetilde{h}(\phi(x + i\widetilde{h}(x, w, \overline{w}), w), w, 0)\}, \tag{4.3}$$

com $(\widehat{z}, \widehat{w}) = \Phi(z, w) \in \widehat{M}$.

Para obter uma equação definida em $\widehat{M}$ nas coordenadas $(\widehat{z}, \widehat{w})$, devemos transformar o lado direito da Equação 4.3 em uma função em $\widehat{x}$ e $\widehat{w}$. Agora, como Φ é um biholomorfismo local, claramente $(z, w) = \Phi^{-1}(\widehat{z}, \widehat{w})$ e escrevemos

$$\begin{aligned} z &= z(\widehat{z}, \widehat{w}) \\ w &= \widehat{w}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde $z : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \to \mathbb{C}^d$ é holomorfismo próximo à origem. Portanto $x = \text{ Re } z$ é uma função analítica de $\text{Re}\, \widehat{z}$, $\text{Im}\, \widehat{z}$, $\text{Re}\, \widehat{w}$, $\text{Im}\, \widehat{w}$ e escrevemos $x = x(\widehat{z}, \widehat{w})$. Substituindo $x = x(\widehat{z}, \widehat{w})$ e $w = \widehat{w}$ no lado direito de 4.3 resulta em uma função gráfica local para $\widehat{M}$, exceto se envolver a variável $\widehat{y} = \text{ Im}\, \widehat{z}$. A função gráfica deve envolver somente $\widehat{x}$ e $\widehat{w}$. Para resolver isso, usamos o fato de $D\widetilde{h}(0,0,0) = 0$ e o Teorema da Função Implícita para concluir que a variável $\widehat{y} = \widehat{y}(\widehat{x}, \widehat{w}, \overline{\widehat{w}})$ em 4.3 é uma função analítica real de $\widehat{x}$, $\text{Re}\, \widehat{w}$, $\text{Im}\, \widehat{w}$ próximo à origem. Substituindo $\widehat{y}(\widehat{x}, \widehat{w}, \overline{\widehat{w}})$ por $\widehat{y} = \text{ Im}\, \widehat{z}$ em $x(\widehat{z}, \widehat{w})$ produzimos uma nova função denotada por $x(\widehat{x}, \widehat{w}, \overline{\widehat{w}})$. Esta função é analítica real em uma vizinhança da origem.

Substituindo $x(\widehat{x}, \widehat{w}, \overline{\widehat{w}})$ por x e $\widehat{w}$ por w, 4.3 se torna

$$\widehat{y} = \text{ Re } \{\widehat{h}(\widehat{x}, \widehat{w}, \overline{\widehat{w}})\} \qquad \text{com} \qquad (\widehat{z}, \widehat{w}) \in \widehat{M},$$

onde

$$\widehat{h}(\widehat{x}, \widehat{w}, \overline{\widehat{w}}) = \widetilde{h}(x(\widehat{x}, \widehat{w}, \overline{\widehat{w}}), \widehat{w}, \overline{\widehat{w}}) - \widetilde{h}(\phi(x(\widehat{x}, \widehat{w}, \overline{\widehat{w}}) + i\widetilde{h}(x(\widehat{x}, \widehat{w}, \overline{\widehat{w}}), \widehat{w}, \overline{\widehat{w}}), \widehat{w}), \widehat{w}, 0).$$

Portanto, Re $\widehat{h}$ é função gráfica para $\widehat{M}$.

Falta mostrar que

$$\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} \text{ Re } \widehat{h}(0)}{\partial \widehat{x}^{\alpha} \partial \widehat{w}^{\beta}} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} \text{ Re } \widehat{h}(0)}{\partial \widehat{x}^{\alpha} \partial \overline{\widehat{w}}^{\beta}} = 0. \tag{4.5}$$

A segunda equação segue da conjugação da primeira, então é suficiente provar apenas uma delas. A função

$$(\widehat{x}, \widehat{w}) \longmapsto x(\widehat{x}, \widehat{w}, \overline{\widehat{w}}),$$

é analítica real próximo da origem e portanto pode ser expressa em séries de potências em $\widehat{x}$, $\widehat{w}$ e $\overline{\widehat{w}}$. Substituindo $\widehat{x}$ por $\widehat{z} \in \mathbb{C}^d$ e $\overline{\widehat{w}}$ por $\widehat{\eta} \in \mathbb{C}^{n-d}$, obtemos a função

$$x : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^{n-d} \to \mathbb{C}^d,$$

a qual é holomorfica em uma vizinhaça da origem. Pela substituição de $x(\widehat{z}, \widehat{w}, \widehat{\eta})$ por $x(\widehat{x}, \widehat{w}, \overline{\widehat{w}})$ e $\widehat{\eta}$ por $\overline{\widehat{w}}$ na definição de $\widehat{h}$, obtemos a função $\widehat{h} : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^{n-d} \to \mathbb{C}^d$ dada por

$$\widehat{h}(\widehat{z}, \widehat{w}, \widehat{\eta}) = \widetilde{h}(x(\widehat{z}, \widehat{w}, \widehat{\eta}), \widehat{w}, \widehat{\eta}) - \widetilde{h}(\phi(x(\widehat{z}, \widehat{w}, \widehat{\eta}) + i\widetilde{h}(x(\widehat{z}, \widehat{w}, \widehat{\eta}), \widehat{w}, \widehat{\eta}), \widehat{w}), \widehat{w}, 0).$$

que é holomórfica para $(\widehat{z}, \widehat{w}, \widehat{\eta})$ em uma vizinhança da origem. Para estabelecermos a primeira equação em 4.5, devemos mostrar que

$$\widehat{h}(\widehat{z}, \widehat{w}, 0) = 0.$$

Segue de 4.1, com $x(\widehat{z}, \widehat{w}, 0)$ no lugar de z e $\widehat{w}$ no de w, que

$$\phi(x(\widehat{z}, \widehat{w}, 0) + i\widetilde{h}(x(\widehat{z}, \widehat{w}, 0), \widehat{w}, 0), \widehat{w}) = x(\widehat{z}, \widehat{w}, 0).$$

Substituindo isto em $\widehat{h}$ obtemos

$$\widehat{h}(\widehat{z}, \widehat{w}, 0) = \widetilde{h}(x(\widehat{z}, \widehat{w}, 0), \widehat{w}, 0) - \widetilde{h}(x(\widehat{z}, \widehat{w}, 0), \widehat{w}, 0) = 0,$$

como queríamos. Portanto a prova do teorema está completa $\square$

Uma versão C^k do Teorema 4.15 segue facilmente da versão alalítica real. Seja $M = \{y = h(x,w)\}$ onde h é de classe C^k para $k \geq 2$. Segue da k-ésima ordem da expansão de Taylor de h, que

$$h(x,w) = p(x,w,\overline{w}) + e(x,w),$$

onde p é um polinômio de grau k nas variáveis $x, w, \overline{w}$ e o resto de Taylor e satisfaz

$$\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}e(0)}{\partial x^\alpha \partial w^\beta \partial \overline{w}^\gamma} = 0 \qquad \text{com} \qquad |\alpha| + |\beta| + |\gamma| \leq k.$$

Portanto, as variedades M e $\overline{M} = \{y = p(x,w,\overline{w})\}$ combinam com a ordem k na origem. Como p é analítica real, o Teorema 4.15 se aplica a $\widehat{M}$.

Teorema 4.16. *Seja M uma subvariedade CR genérica de $\mathbb{C}^n$ de classe C^k $(k \geq 2)$ com* $\dim_{\mathbb{R}} M = 2n - d$ $(1 \leq d \leq n)$*. Suponha p_0 um ponto de M. Existe uma vizinhança U de p_0 em $\mathbb{C}^n$, um biholomorfismo $\Phi : U \to \Phi\{U\} \subset \mathbb{C}^n$, e uma função $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \to \mathbb{R}^d$ de classe C^k com $h(0) = 0$ e $Dh(0) = 0$ tal que*

$$\Phi\{M \cap U\} = \{(x+iy, w) \in \Phi\{U\} \subset \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d};\ y = h(x,w)\}.$$

Além disso,

$$\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}h(0)}{\partial x^\alpha \partial w^\beta} = \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}h(0)}{\partial x^\alpha \partial \overline{w}^\beta} = 0 \qquad \textit{com} \qquad |\alpha| + |\beta| \leq k.$$

Agora vamos voltar à questão de encontrar uma base local canônica para $H^{1,0}(M)$ e $H^{0,1}(M)$. Assumimos que

$$M = \{y = h(x,w)\},$$

onde $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \to \mathbb{R}^d$ é de classe C^k, para $k \geq 2$, e $h(0) = 0$ e $Dh(0) = 0$. O espaço $H_0^{0,1}(M)$ é spam (em $\mathbb{C}$) de $\partial/\partial\overline{w}_1, \ldots, \partial/\partial\overline{w}_{n-d}$ e o espaço $H_0^{1,0}(M)$ é spam de $\partial/\partial w_1, \ldots, \partial/\partial w_{n-d}$. Nosso desejo é estender estes vetores à campos vetoriais localmente gerados em $H^{0,1}(M)$ e $H^{1,0}(M)$, respectivamente.

Teorema 4.17. *Seja $M = \{(x+iy, w) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d};\ y = h(x,w)\}$ onde $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \to \mathbb{R}^d$ é de classe C^k $(k \geq 2)$, e $h(0) = 0$ e $Dh(0) = 0$. Uma base para $H^{1,0}(M)$ próximo à origem é dada por $L_1, \ldots, L_{n-d}$, com*

$$L_j = \frac{\partial}{\partial w_j} + 2i \sum_{l=1}^{d} \left(\sum_{k=1}^{d} \mu_{lk} \frac{\partial h_k}{\partial w_j} \frac{\partial}{\partial z_l} \right), \qquad 1 \leq j \leq n-d,$$

onde μ_{lk} é o (l,k)-ésimo elemento da matriz $d \times d$ $\left(I - i\dfrac{\partial h}{\partial x}\right)^{-1}$.

Uma base para $H^{0,1}(M)$ próximo à origem é dada por $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_{n-d}$. Como $Dh(0) = 0$, note que $L_j|_0 = \partial/\partial w_j$ e $\overline{L}_j|_0 = \partial/\partial \overline{w}_j$, para $1 \leq j \leq n-d$.

Demonstração. Seja

$$L_j = \frac{\partial}{\partial w_j} + \sum_{k=1}^{d} A_{kj} \frac{\partial}{\partial z_k} \in T^{1,0}(\mathbb{C}^n), \qquad 1 \leq j \leq n-d,$$

onde A_{kj} são funções suaves escolhidas de forma que $L_j|_M$ pertença a $H^{1,0}(M)$.

Seja $\rho_j(z,w) =$ Im $z_j - h_j(x,w)$, $1 \leq j \leq d$. A variedade M normalmente é o conjunto zero de $\rho_1, \ldots, \rho_d$. Pelo Lema 4.8, se um campo vetorial L em $T^{1,0}(\mathbb{C}^n)|_M$ pertence a $H^{1,0}(M)$, então

$$\langle \partial \rho_l, L \rangle = 0 \quad \text{em } M \text{ com} \quad 1 \leq l \leq d.$$

Inserindo $L = L_j$ nessa equação, obtemos

$$\frac{1}{2i} A_{lj} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial h_l}{\partial x_k} A_{kj} - \frac{\partial h_l}{\partial w_j} = 0,$$

com $1 \leq l \leq d$ e $1 \leq j \leq n-d$. Esta equação pode ser reescrita na forma de matriz como

$$\frac{1}{2i}\left[I - i\frac{\partial h}{\partial x}\right].(A) = \frac{\partial h}{\partial w}.$$

A fórmula para L_j dada prova o teorema. □

4.3 Subvariedade Quadrática

Temos do Teorema 4.16, que uma subvariedade CR de $\mathbb{C}^n$, genérica e suave, possui uma função gráfico h definida localmente sem termos puros na expansão de Taylor até determinada ordem. Em particular, os termos quadráticos na expansão de Taylor de h não contém termos envolvendo a coordenada x. Portanto, todas as informações de segunda ordem estão contidas no termo

$$q(w, \overline{w}) = \sum_{j,k=1}^{n-d} \frac{\partial h^2(0)}{\partial w_j \partial \overline{w}_k} w_j \overline{w}_k.$$

Substituindo $\overline{w}$ por uma variável independente $\eta \in \mathbb{C}^{n-d}$, obtemos uma forma quadrática.

Definição 4.18. *Uma função $q : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^d$ é uma forma quadrática se*

i) q é bilinear sobre $\mathbb{C}$;

ii) *q é simétrica, isto é, $q(w,\eta) = q(\eta, w)$ para $w, \eta \in \mathbb{C}^m$.*

iii) *$\overline{q(w,\eta)} = q(\overline{w}, \overline{\eta})$ para $w, \eta \in \mathbb{C}^m$.*

Definição 4.19. *Uma subvariedade $M \subset \mathbb{C}^n$ definida por*

$$M = \{(x+iy, w) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d};\ y = q(w, \overline{w})\},$$

onde $q : \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^{n-d} \to \mathbb{C}^d$ é uma forma quadrática, é chamada subvariedade quadrática de $\mathbb{C}^n$.

Os requerimentos (ii) e (iii) da Definição 4.18 implica que $q(w, \overline{w})$ é um vetor em $\mathbb{R}^d$. Logo, a subvariedade quadrática da Definição 4.19 é uma subvariedade bem definida de dimensão real $2n - d$.

Subvariedades quadráticas são rígidas pois as funções gráficas são independentes de x. Como iremos ver, a classe das subvariedades quadráticas fornece uma classe com exemplos fáceis de se estudar. Como discutimos no início da seção, qualquer subvariedade CR genérica pode ser aproximada a terceira ordem na origem por uma subvariedade quadrática. Portanto, uma subvariedade quadrática muitas vezes providencia um modelo para uma subvariedade genérica geral.

Outra razão do porque as subvariedades quadráticas são interessantes é que cada subvariedade quadrática possui uma estrutura de grupo, como iremos descrever agora.

Definição 4.20. *Seja $q : \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^{n-d} \to \mathbb{C}^d$ uma forma quadrática. Para $(z_1, w_1) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}$ e $(z_2, w_2) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}$, defina*

$$(z_1, w_1) \circ (z_2, w_2) = (z_1 + z_2 + 2iq(w_1, \overline{w}_2), w_1 + w_2).$$

Lema 4.21. *A operação $\circ$ define uma estrutura de grupo em $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ que se restringe a uma estrutura de grupo em $M \times M$, onde $M = \{y = q(w, \overline{w})\}$.*

Demonstração. A operação $\circ$ é claramente associativa. O elemento neutro é a origem. O inverso do ponto (z, w) é o ponto

$$(z, w)^{-1} = (-z + 2iq(w, \overline{w}), -w).$$

Falta mostrar que $\circ$ se restringe a uma estrutura de grupo em $M \times M$. Se (z_1, w_1) e (z_2, w_2) pertencem a M, então $Im\ z_1 = q(w_1, \overline{w}_1)$ e $Im\ z_2 = q(w_2, \overline{w}_2)$. Portanto

$$Im\{z_1 + z_2 + 2iq(w_1, \overline{w}_2)\} = q(w_1, \overline{w}_1) + q(w_2, \overline{w}_2) + 2Re\ q(w_1, \overline{w}_2).$$

Usando as propriedades de q, podemos reescrever na forma

$$Im\{z_1 + z_2 + 2iq(w_1, \overline{w}_2)\} = q(w_1 + w_2, \overline{w}_1 + \overline{w}_2).$$

Isso mostra que $\circ$ é fechado em $M \times M$. A prova de que o elemento inverso pertence a M também é facilmente mostrada. Isto completa a demonstração do lema. $\square$

O Lema 4.3 implica que uma subvariedade quadrática é um grupo de Lie, o que significa que a operação de grupo $(\circ) : M \times M \to M$ é uma função suave. Para $p_0 = (z_0, w_0) \in M$, define-se a função $G_{p_0} : M \to M$ por

$$G_{p_0}(z,w) = (z,w) \circ (z_0, w_0) = (z + z_0 + 2iq(w, \overline{w}_0), w + w_0).$$

A função $G_{p_0}(z,w)$ é suave em ambos (z,w) e p_0. Para p_0 fixado, G_{p_0} é a restrição de uma função holomórfica pois q é uma função linear complexa.

Segue do Teorema 4.17 que os geradores de $H^{1,0}(M)$ são

$$L_j = \frac{\partial}{\partial w_j} + 2i \sum_{l=1}^{d} \frac{\partial q_l}{\partial w_j} \frac{\partial}{\partial z_l} \qquad 1 \leq j \leq n-d,$$

onde $q = (q_1, \ldots, q_d)$. Do mesmo modo, os geradores de $H^{0,1}(M)$ são $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_{n-d}$. Esses campos vetoriais são definidos globalmente em M e exibidos globalmente no gráfico de q. Note também que $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_d$ são geradores globais do espaço tangente totalmente real $X(M)$.

Os campos vetoriais $L_1, \ldots, L_{n-d}, \overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_{n-d}$ e $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_d$ possuem outra importante propriedade. Eles são invariantes perante a operação de grupo $(\circ)$ em M. Isto significa que, a função $(z,w) \mapsto G_{p_0}(z,w)$ leva a origem no ponto $p_0 = (z_0, w_0) \in M$. Portanto, $(G_{p_0})_*(0)$ é uma função linear complexa de $T_0(M) \otimes \mathbb{C}$ para $T_{p_0}(M) \otimes \mathbb{C}$.

Definição 4.22. *Um campo vetorial $L \in T^{\mathbb{C}}(M)$ é dito ser invariante (à esquerda) para a aplicação de grupo $(\circ)$ em M se*

$$(G_{p_0})_*(0)\{L_0\} = L_p \qquad \textit{para cada} \qquad p \in M,$$

onde $G_p(z,w) = (z,w) \circ p$.

Como $G_{p_1} \circ G_{p_2} = G_{p_1 \circ p_2}$ e $(G_{p_1} \circ G_{p_2})_* = (G_{p_1})_* \circ (G_{p_2})_*$, um campo vetorial invariante L satisfaz

$$(G_{p_1})_*(p_2)\{L_{p_2}\} = L_{p_2 \circ p_1} \qquad \text{para} \qquad p_1, p_2 \in M.$$

Teorema 4.23. *Os campos vetoriais*

$$\begin{aligned} L_j = \quad & \frac{\partial}{\partial w_j} + 2i\sum_{l=1}^{d} \frac{\partial q_l}{\partial w_j}\frac{\partial}{\partial z_l} && 1 \le j \le n-d, \\ & \overline{L}_j && 1 \le j \le n-d, \\ & \frac{\partial}{\partial x_j} && 1 \le j \le d, \end{aligned}$$

são invariantes para a aplicação de grupo $(\circ)$ *definida em* $M = \{y = q(w, \overline{w})\}$.

Demonstração. Seja $G : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ uma função suave, então

$$\begin{aligned} G_*(0)\left\{\frac{\partial}{\partial \zeta_j}\right\} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial G_k}{\partial \zeta_j}(0)\frac{\partial}{\partial \zeta_k} + \frac{\partial \overline{G}_k}{\partial \zeta_j}(0)\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}_k}, \\ G_*(0)\left\{\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}_j}\right\} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial G_k}{\partial \overline{\zeta}_j}(0)\frac{\partial}{\partial \zeta_k} + \overline{\left(\frac{\partial \overline{G}_k}{\partial \zeta_j}(0)\right)}\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}_k}, \end{aligned}$$

onde escrevemos $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ nas coordenadas de $\mathbb{C}^n$ e também $G = (G_1, \ldots, G_n)$.

A função $G_p(\zeta) = G_p(z, w)$ é holomórfica em $\zeta = (z, w) \in \mathbb{C}^n$, e então $\partial G_p/\partial \overline{\zeta}_j = 0 = \partial(\overline{G}_p)/\partial \zeta_j$. Usando a fórmula de L_j e escrevendo $\partial/\partial x_j = \partial/\partial z_j + \partial/\partial \overline{z}_j$, a prova do teorema se reduz a um simples cálculo. $\square$

Teorema 4.24. *Seja* M *uma subvariedade quadrática com codimensão dois de* $\mathbb{C}^4$ *definida por*

$$M = \left\{ \begin{array}{l} y_1 = q_1(w, \overline{w}) \\ y_2 = q_2(w, \overline{w}) \end{array} \right\}.$$

(a) Se q_1 *e* q_2 *são linearmente dependentes sobre* $\mathbb{R}$*, então existe uma mudança linear complexa não-singular de coordenadas em* $\mathbb{C}^4$ *de modo que nas novas coordenadas*

$$M = \left\{ \begin{array}{l} y_1 = q_1(w, \overline{w}) \\ y_2 = 0 \end{array} \right\},$$

onde q_1 *é uma forma quadrática de valor escalar.*

(b) Se q_1 *e* q_2 *são linearmente independentes sobre* $\mathbb{R}$*, então existe uma mudança linear complexa não-singular de coordenadas em* $\mathbb{C}^4$ *de modo que nas novas coordenadas,* M *tem uma das seguintes formas*

(i) $M = \left\{ \begin{array}{l} y_1 = |w_1|^2 \\ y_2 = |w^2|^2 \end{array} \right\}.$

(ii) $M = \left\{ \begin{array}{l} y_1 = |w_1|^2 \\ y_2 = Re(w_1\overline{w}_2) \end{array} \right\}.$

(iii) $M = \left\{ \begin{array}{l} y_1 = Re(w_1\overline{w}_2) \\ y_2 = Im(w_1\overline{w}_2) \end{array} \right\}.$

Demonstração. Para a parte (a), se $q_2 = \lambda q_1$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, então faremos a seguinte mudança linear complexa e não-singular de variáveis

$$\begin{aligned} \widehat{z}_1 &= z_1 \\ \widehat{z}_2 &= z_2 - \lambda z_1 \\ \widehat{w}_1 &= w_1 \\ \widehat{w}_2 &= w_2. \end{aligned}$$

Nas novas coordenadas

$$\begin{aligned} \widehat{y}_1 = Im\ \widehat{z}_1 = Im\ z_1 & \\ &= q_1(w, \overline{w}) \quad (\text{ com } (z, w) \in M) \\ &= q_1(\widehat{w}, \widehat{w}), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \widehat{y}_2 = Im\ \widehat{z}_2 = Im\ z_2 - \lambda Im\ z_1 & \\ &= q_2(w, \overline{w}) - \lambda q_1(w, \overline{w}) \quad (\text{ com } (z, w) \in M) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, se $\widehat{M}$ é a imagem de M pela função $(z, w) \mapsto (\widehat{z}, \widehat{w})$, então $\widehat{M}$ é definido por

$$\begin{aligned} \widehat{y}_1 &= q_1(\widehat{w}, \overline{\widehat{w}}) \\ \widehat{y}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Assim, está provada a parte (a). Para provar (b), começaremos diagonalizando a matriz de q_1. Isto pode ser feito por uma mudança unitária de coordenadas a qual tem efeito somente em w_1 e w_2. Depois de reescalonar, existem três casos a se considerar:

1. $q_1(w, \overline{w}) = |w_1|^2 + |w_2|^2$ $\quad$ (q_1 é positivo definido)

2. $q_1(w, \overline{w}) = |w_1|^2 - |w_2|^2$ $\quad$ (q_1 tem autovalores de sinais opostos)

3. $q_1(w, \overline{w}) = |w_1|^2$ $\quad$ (q_1 tem um autovalor).

Note que, no caso 1 está incluso o caso onde q_1 é negativo definido, pois a troca de variáveis $\widehat{z} = -z$ e $\widehat{w} = w$ torna q_1 positivo definido. Dessa forma,

$$q_2(w, \overline{w}) = A|w_1|^2 + 2\ Re(\lambda w_1 \overline{w}_2) + C|w_2|^2,$$

onde A e C são reais e λ é complexo.

Caso 1**.** (q_1 é positivo definido). Primeiramente, existem números complexos a e b (com $b \neq 0$) e um número real t de modo que

$$q_2(w, \overline{w}) + tq_1(w, \overline{w}) = |aw_1 + bw_2|^2.$$

Expandindo esta equação, vemos que a, b e t satisfazem

$$\begin{aligned} a\bar{b} &= \lambda \\ |a|^2 &= A + t \\ |b|^2 &= C + t. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Se $\lambda = 0$, então procedemos da seguinte forma. Temos $A > C$ ou $C > A$; se $A = C$ e $\lambda = 0$, então q_1 e q_2 são linearmente independente. Trocando os papéis de w_1 e w_2 se necessário, considere $C > A$. Defina $a = 0$. Isto força $t = -A$. Por outro lado, $|b|^2 = C - A > 0$. Então, podemos considerar $b = \sqrt{C - A}$. Com estas escolhas, as equações em 4.6 são satisfeitas com um b diferente de zero.

Se $\lambda \neq 0$, devemos escolher valores a e b diferentes de zero. Temos

$$A + t = |a|^2 = \frac{|\lambda|^2}{|b|^2} = \frac{|\lambda|^2}{C + t}.$$

Esta equação pode ser rearranjada na seguinte equação quadrática em t

$$t^2 + (A + C)t + (AC - |\lambda|^2) = 0. \tag{4.7}$$

O discriminante, $(A + C)^2 - 4(AC - |\lambda|^2) = (A - C)^2 + 4|\lambda|^2$, é positivo porque $\lambda \neq 0$. Portanto, a equação quadrática 4.7 tem duas raízes reais. Seja t a maior raiz. Claramente $t + A > 0$ e $t + C > 0$ pois $(t + A)(t + C) = |\lambda|^2 > 0$. Seja θ um argumento de λ. As três equações em 4.6 são satisfeitas pela escolha de t e

$$\begin{aligned} a &= (t + A)^{1/2} e^{i\theta} \\ b &= (t + C)^{1/2} > 0. \end{aligned}$$

Com estas escolhas para a, b e t, temos

$$\begin{aligned} q_1(w, \overline{w}) &= |w_1|^2 + |w_2|^2 \\ q_2(w, \overline{w}) + tq_1(w, \overline{w}) &= |aw_1 + bw_2|^2. \end{aligned}$$

Defina a seguinte mudança linear de variáveis:

$$\begin{aligned} \widehat{z}_1 &= z_1 \\ \widehat{z}_2 &= z_2 + tz_1 \\ \widehat{w}_1 &= w_1 \\ \widehat{w}_2 &= aw_1 + bw_2. \end{aligned}$$

Está é uma função linear não-singular quando $b \neq 0$. Assim

$$\begin{aligned} Im\ \widehat{z}_1 &= Im\ z_1 \\ &= q_1(w, \overline{w}) \quad (\text{se } (z, w) \in M) \\ &= |w_1|^2 + |w_2|^2 \\ &= |\widehat{w}_1|^2 + \left|\frac{1}{b}(\widehat{w}_2 - a\widehat{w}_1)\right|^2 \\ &= \alpha|\widehat{w}_1|^2 + 2\ Re(\gamma \widehat{w}_1 \overline{\widehat{w}}_2) + \beta|\widehat{w}_2|^2, \end{aligned}$$

onde α e β são números reais positivos e γ é um número complexo. Análogamente

$$\begin{aligned} Im\ \widehat{z}_2 &= Im\ z_2 + t\ Im\ z_1 \\ &= q_2(w, \overline{w}) + tq_1(w, \overline{w}) \quad (\text{se } (z, w) \in M) \\ &= |aw_1 + bw_2|^2 \\ &= |\widehat{w}_2|^2. \end{aligned}$$

Portanto, se $\widehat{M}$ é a imagem de M pela função linear $(z, w) \mapsto (\widehat{z}, \widehat{w})$, então, nas novas coordenadas, $\widehat{M} = \{\text{Im } \widehat{z} = \widehat{q}(\widehat{w}, \overline{\widehat{w}})\}$ com $\widehat{q} = (\widehat{q}_1, \widehat{q}_2)$ onde

$$\begin{aligned} \widehat{q}_1(\widehat{w}, \overline{\widehat{w}}) &= \alpha|\widehat{w}_1|^2 + 2\,\text{Re}(\gamma \widehat{w}_1 \overline{\widehat{w}}_2) + \beta|\widehat{w}_2|^2 \\ \widehat{q}_2(\widehat{w}, \overline{\widehat{w}}) &= |\widehat{w}_2|^2. \end{aligned}$$

Agora iremos completar quadrado em $\widehat{q}_1$. Depois de remover o $\wedge$, obtemos

$$q_1(w, \overline{w}) = |\alpha^{1/2} w_1 + \overline{\gamma}\alpha^{-1/2} w_2|^2 + (\beta - |\gamma|^2\alpha^{-1})|w_2|^2, \quad \alpha > 0.$$

Fazendo mais uma mudança de coordenadas

$$\widehat{z}_1 = z_1 - (\beta - |\gamma|^2\alpha^{-1})z_2, \quad \widehat{z}_2 = z_2$$
$$\widehat{w}_1 = \alpha^{1/2}w_1 + \overline{\gamma}\alpha^{-1/2}w_2, \quad \widehat{w}_2 = w_2$$

Esta mudança de coordenadas é não singular pois $\alpha > 0$. Novamente, seja $\widehat{M}$ a imagem de M pela função $(z, w) \mapsto (\widehat{z}, \widehat{w})$. A equação que define $\widehat{M}$ nas novas coordenadas é dada por

$$\widehat{M} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Im } \widehat{z}_1 = |\widehat{w}_1|^2 \\ \text{Im } \widehat{z}_2 = |\widehat{w}_2|^2 \end{array} \right\}.$$

o qual é a forma normal dada em (i) da parte (b) do teorema.

Caso 2. $q_1(w, \overline{w}) = |w_1|^2 - |w_2|^2$ (q_1 tem autovalores de sinais opostos). Nesse caso, será feita a mudança linear não-singular de coordenadas seguinte:

$$\begin{array}{ll} z_1 = \widehat{z}_1 & z_2 = \widehat{z}_2 \\ w_1 = \dfrac{\widehat{w}_1 + \widehat{w}_2}{2} & w_2 = \dfrac{\widehat{w}_1 - \widehat{w}_2}{2}. \end{array}$$

Nas novas coordenadas, (a imagem de) M é dada por (após retirar o $\wedge$)

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \text{Im } z_1 = \text{Re}(w_1\overline{w}_2) \\ \text{Im } z_2 = A|w_1|^2 + 2\,\text{Re}(\lambda w_1\overline{w}_2) + B|w_2|^2 \end{array} \right\},$$

para algum $A, B \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Suponha $\lambda = r + is$, $r, s \in \mathbb{R}$. Após as mudanças de variáveis $\widehat{z}_1 = z_1, \widehat{z}_2 = z_2 - 2rz_1, \widehat{w}_1 = w_1, \widehat{w}_2 = w_2$, M é dado por (retirando $\wedge$)

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \text{Im } z_1 = q_1(w, \overline{w}) \\ \text{Im } z_2 = q_2(w, \overline{w}) \end{array} \right\},$$

onde

$$q_1(w, \overline{w}) = \text{Re}(w_1\overline{w}_2),$$
$$q_2(w, \overline{w}) = A|w_1|^2 - 2s\,\text{Im}(w_1\overline{w}_2) + B|w_2|^2.$$

Na forma de matriz temos

$$q_2(w, \overline{w}) = (\overline{w}_1, \overline{w}_2) \begin{pmatrix} A & -is \\ is & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Se o determinante $AB - s^2$ é positivo, então a matriz de q_2 é positiva ou negativa definida e assim caímos no Caso 1, com os papéis de q_1 e q_2 trocados. Isso nos leva a forma normal dada em (i) da parte (b). Então, assumiremos

$$AB - s^2 \leq 0.$$

Primeiramente, será mostrado que o coeficiente $|w_1|^2$ em q_2 pode desaparecer ao fazer a troca de variáveis

$$\begin{aligned} z_1 &= \widehat{z}_1 & z_2 &= \widehat{z}_2 \\ w_1 &= \widehat{w}_1 & w_2 &= \widehat{w}_2 + it\widehat{w}_1, \end{aligned}$$

para um t apropriado que será escolhido mais tarde. Esta mudança de variáveis preserva q_1. Além disso

$$q_2(w, \overline{w}) = (A + 2st + Bt^2)|\widehat{w}_1|^2 - 2(s + Bt)\,\text{Im}(\widehat{w}_1\overline{\widehat{w}}_2) + B|\widehat{w}_2|^2.$$

A equação quadrática $A + 2st + Bt^2 = 0$ possui uma raiz real pois seu discriminante $4(s^2 - AB)$ é não-negativo. Com essa escolha para t, o coeficiente de $|\widehat{w}_1|^2$ desaparece e assim temos (após retirar $\wedge$)

$$\begin{aligned} q_1(w, \overline{w}) &= \text{Re}(w_1\overline{w}_2) \\ q_2(w, \overline{w}) &= \alpha\,\text{Im}(w_1\overline{w}_2) + \beta|w_2|^2, \end{aligned}$$

onde α e β são números reais.

Se $\alpha = 0$ então β é diferente de zero, caso contrário $q_2 \equiv 0$. Após re-escalar na variável z_2, M tem a forma normal dada em (ii) da parte (b) com os papéis de w_1 e w_2 e de z_1 e z_2, trocados.

Se $\alpha \neq 0$, podemos forçar com que o coeficiente $|w_2|^2$ desapareça pela mudança de variáveis

$$\begin{aligned} z_1 &= \widehat{z}_2 & z_2 &= \widehat{z}_2 \\ w_1 &= \widehat{w}_1 + it\widehat{w}_2 & w_2 &= \widehat{w}_2, \end{aligned}$$

onde t é um número real. Novamente, esta mudança de variáveis preserva q_1. Temos

$$q_2(w, \overline{w}) = \alpha\,\text{Im}(\widehat{w}_1\overline{\widehat{w}}_2) + (\beta + \alpha t)|\widehat{w}_2|^2.$$

Como $\alpha \neq 0$, podemos pôr $t = -\beta\alpha^{-1}$, isto força o coeficiente $|w_2|^2$ a desaparecer. Após re-escalar na variável z_2, M tem a forma normal dada em (iii) da parte (b).

Caso 3. $q_1(w, \overline{w}) = |w_1|^2$ (q_1 tem um autovalor). Temos

$$q_2(w, \overline{w}) = A|w_1|^2 + 2\,\text{Re}(\lambda w_1\overline{w}_2) + B|w_2|^2,$$

onde A e B são reais e λ complexo. Façamos a troca de variáveis

$$\begin{aligned} \widehat{z}_1 &= z_1 \qquad & \widehat{z}_2 &= z_2 - Az_1 \\ \widehat{w}_1 &= w_1 \qquad & \widehat{w}_2 &= w_2, \end{aligned}$$

Nas novas variáveis, M é definido por

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \text{Im } \widehat{z}_1 = |\widehat{w}_1|^2 \\ \text{Im } \widehat{z}_2 = 2 \text{ Re}(\lambda \widehat{w}_1 \overline{\widehat{w}_2}) + B|\widehat{w}_2|^2 \end{array} \right\}.$$

Seja $q_2(w, \overline{w}) = 2 \text{ Re}(w_1 \overline{w}_2) + B|w_2|^2$. A matriz que representa q_2 é

$$\begin{pmatrix} 0 & \overline{\lambda} \\ \lambda & B \end{pmatrix}.$$

Se $\lambda \neq 0$, então o determinante da matriz é $-|\lambda|^2$, o qual é negativo. Logo, os autovalores da matriz de q_2 têm sinais opostos e obtemos o Caso 2 com os papéis de q_1 e q_2 trocados. Se $\lambda = 0$, após re-escalar, M tem a forma normal dada em (i) da parte (b). A Prova do teorema está completa. $\square$

4.4 Variedade CR abstrata

Até este momento, estivemos lidando com subvariedades CR de $\mathbb{C}^n$. Nesta seção, iremos definir um conceito abstrato de variedades CR que não requer menção do ambiente $\mathbb{C}^n$ ou variedades complexas.

Seja M uma variedade abstrata infinitamente diferenciável. Como foi visto, $T^{\mathbb{C}}(M)$ denota o complexificado tangente cujas fibras em cada ponto $p \in M$ são dadas por $T_p(M) \otimes \mathbb{C}$. Se M é uma subvariedade CR de $\mathbb{C}^n$, pelo Lema 4.9

(i) $H^{1,0}(M) \cap \overline{H^{1,0}(M)} = \{0\}$,

(ii) $H^{1,0}(M)$ e $H^{0,1}(M)$ são involutivos.

Essas duas propriedades fazem uma menção a uma estrutura complexa de $\mathbb{C}^n$ além de definir o espaço $H^{1,0}(M)$. Portanto, definimos uma variedade CR abstrata sendo uma variedade juntamente com um subconjunto de $T^{\mathbb{C}}(M)$ a qual satisfaz as duas propriedades.

Definição 4.25. *Seja M uma variedade suave e suponha $\mathcal{V}$ um subfibrado de $T^{\mathbb{C}}(M)$. O par $(M, \mathcal{V})$ é chamada variedade CR abstrata ou estrutura CR se*

(a) $\mathcal{V}_p \cap \overline{\mathcal{V}}_p = \{0\}$ para cada $p \in M$.

(b) $\mathcal{V}$ é involutiva, isto é, $[L_1, L_2]$ pertence a $\mathcal{V}$ sempre que $L_1, L_2 \in \mathcal{V}$.

5 COMPLEXO TANGENCIAL DE CAUCHY-RIEMANN

Para uma subvariedade CR de $\mathbb{C}^n$, existem duas formas de definir o Complexo Tangencial de Cauchy-Riemann. A primeira é uma aproximação extrínseca, que é calculada fazendo extensões da subvariedade CR para um aberto de $\mathbb{C}^n$, em seguida aplicando o operador de Cauchy-Riemann $\overline{\partial}$. A segunda é uma aproximação intrínseca, que não faz uso do ambiente $\mathbb{C}^n$ e portanto generaliza as variedades CR abstratas. Neste capítulo, serão apresentadas ambas as aproximações e provada a equivalência entre elas. Ademais, partindo do Complexo Tangencial de Cauchy-Riemann podem ser definidas as Funções CR e as Aplicações CR, estudadas na segunda parte deste capítulo.

5.1 APROXIMAÇÃO INTRÍNSECA PARA $\overline{\partial}_M$

Nesta seção, iremos trabalhar uma aproximação para $\overline{\partial}_M$ repetindo os passos da definição do operador de Cauchy-Riemann $\overline{\partial}$ em $\mathbb{C}^n$ (ou outra variedade complexa), visto na Seção 1.8. Será importante conhecer o conjunto das (p,q)-formas de $\mathbb{C}^n$, denotado por $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)$. O espaço da (p,q)-formas suaves de $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)$ sobre um aberto U de $\mathbb{C}^n$ é denotado por $\mathcal{E}^{p,q}(U)$. Para cada ponto $p_0 \in \mathbb{C}^n$, o conjunto $\{dz^I \wedge d\overline{z}^J;\ |I| = p, |J| = q\}$ é uma base ortonormal para $\Lambda^{p,q}_{p_0}T^*(\mathbb{C}^n)$.

Assuma $(M, \mathcal{V})$ uma estrutura CR abstrata, como na Definição 4.25. Então, $\mathcal{V}$ é um subconjunto involutivo de $T^{\mathbb{C}}(M)$ e $\mathcal{V} \cap \overline{\mathcal{V}} = \{0\}$. Será necessário encontrar um subconjunto complementar a $\mathcal{V} \oplus \overline{\mathcal{V}}$. Para isso, iremos assumir M equipado com a métrica Hermitiana para $T^{\mathbb{C}}(M)$ de modo que $\mathcal{V}$ seja ortogonal a $\overline{\mathcal{V}}$. Se M é uma subvariedade de $\mathbb{C}^n$, então a métrica natural a se usar é a restrição para $T^{\mathbb{C}}(M)$ da métrica Hermitiana usual em $T^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$. Se M é uma variedade abstrata, então a métrica pode ser construída localmente exibindo uma base local de campos vetoriais ortonormais. Essa métrica pode ser estendida globalmente por uma partição da unidade.

Para cada ponto $p_0 \in M$, fazemos X_{p_0} ser o complemento ortogonal de $\mathcal{V}_{p_0} \oplus \overline{\mathcal{V}}_{p_0}$ em $T_{p_0}(M) \otimes \mathbb{C}$. Claramente, o espaço $\{X_{p_0};\ p_0 \in M\}$ adequa-se suavemente e assim, o espaço

$$X(M) = \bigcup_{p_0 \in M} X_{p_0}$$

forma um subconjunto de $T^{\mathbb{C}}(M)$.

Se M é uma subvariedade CR de $\mathbb{C}^n$, então $\mathcal{V} = H^{1,0}(M)$ e $\overline{\mathcal{V}} = H^{0,1}(M)$. Nesse caso, $X(M)$ é a parte totalmente real do conjunto tangente. Defina os subconjuntos

$$T^{1,0}(M) = \mathcal{V} \oplus X(M)$$
$$T^{0,1}(M) = \overline{\mathcal{V}}.$$

Os duais desses espaços são denotado por $T^{*0,1}(M)$ e $T^{*1,0}(M)$, respectivamente. Defina o conjunto

$$\Lambda^{p,q}T^*(M) = \Lambda^p(T^{*1,0}(M))\widehat{\otimes}\Lambda^q(T^{*0,1}(M)),$$

chamado de espaço das (p,q)-formas em M.

Exemplo 5.1. Seja $(z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2, w_1 = x_3 + iy_3, w_2 = x_4 + iy_4)$ as coordenadas de $\mathbb{C}^4$. Suponha M uma subvariedade CR em $\mathbb{C}^4$ de dimensão real igual a 6, tal que, para todo $p \in M$,

$$T_p(M) = span\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial y_3}, \frac{\partial}{\partial x_4}, \frac{\partial}{\partial y_4}\right\}.$$

Note que $\dim_{\mathbb{R}} H_p(M) = 4$ e $\dim_{\mathbb{R}} X_p(M) = 2$. Além disso,

$$\begin{aligned} H^{*^{1,0}} &= span\{dw_1, dw_2\}, \\ H^{*^{0,1}} &= span\{d\overline{w}_1, d\overline{w}_2\}. \end{aligned}$$

Então, uma base para o espaço das (p,q)-formas $\Lambda^{p,q}T^*(M)$, definida intrinsecamente, é dada por

$$\{dx^I \wedge dw^J \wedge d\overline{w}^K; |I| + |J| = p, |K| = q\},$$

onde dx representa os elementos dx_1 e dy_2.

A métrica pontual em $T^{\mathbb{C}}(M)$ induz uma métrica dual pontual em $T^{*\mathbb{C}}(M)$. Seja $\phi_1, \ldots, \phi_{m+d}$ uma base ortonormal para $T^{*1,0}(M)$ e seja $\psi_1, \ldots, \psi_m$ uma base ortonormal para $T^{*0,1}(M)$. A métrica para $T^{*\mathbb{C}}(M)$ se estende para uma métrica em $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ ao declararmos que o conjunto

$$\{\phi^I \wedge \psi^J;\ |I| = p,\ |J| = q,\ I,\ J \text{ conjuntos multi-índices}\},$$

é uma base ortonormal. Nós também apontamos que $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ é ortogonal a $\Lambda^{r,s}T^*(M)$ se $p \neq r$ ou $q \neq s$. Podemos fazer uma decomposição ortogonal como segue

$$\Lambda^r T^{*\mathbb{C}}(M) = \Lambda^{r,0}T^*(M) \oplus \ldots \oplus \Lambda^{0,r}T^*(M),$$

onde alguns dos somatórios pode ser igualar a zero se $r > m$. Seja

$$\pi_M^{p,q} :\ \Lambda^r T^{*\mathbb{C}}(M) \longrightarrow \Lambda^{p,q}T^*(M), \quad \text{com} \quad p + q = r,$$

a aplicação projeção natural.

O espaço das r-formas suaves em um aberto $U \subset M$ é denotado por $\mathcal{E}_M^r(U)$. O espaço das seções suaves de $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ sobre U é denotado por $\mathcal{E}_M^{p,q}(U)$ enquanto $\mathcal{D}_M^{p,q}(U)$ é o espaço dos elementos compactos de $\mathcal{E}_M^{p,q}(U)$. O conjunto U pode ser omitido das notações se não for importante na discussão.

A definição intrínseca para o operador tangencial de Cauchy-Riemann pode agora ser dada em termos da derivada exterior $d_M : \mathcal{E}_M^r \to \mathcal{E}_M^{r+1}$.

Definição 5.2. *O operador tangencial de Cauchy-Riemann $\overline{\partial}_M : \mathcal{E}_M^{p,q} \to \mathcal{E}_M^{p,q+1}$ é definido por*

$$\overline{\partial}_M = \pi_M^{p,q+1} \circ d_M.$$

Desejamos mostrar que $\overline{\partial}_M : \mathcal{E}_M^{p,q} \to \mathcal{E}_M^{p,q+1}$ é um complexo, isto é, que $\overline{\partial}_M \circ \overline{\partial}_M = 0$. Isto segue do fato que $d_M \circ d_M = 0$ e mais alguns resultados que veremos a seguir.

Lema 5.3. *Se M é uma variedade CR, então*

$$d_M\{\mathcal{E}_M^{p,q}\} \subset \mathcal{E}_M^{p+2,q-1} \oplus \mathcal{E}_M^{p+1,q} \oplus \mathcal{E}_M^{p,q+1}.$$

Isso implica que, a derivada exterior de uma (p,q)-forma ϕ, pode ser um somatório de formas de bigraus diferentes. Porém os únicos componentes de $d_M\phi$ que podem ser não-nulos têm bigraus iguais a $(p+2, q-1)$, $(p+1, q)$ e $(p, q+1)$.

Demonstração. Primeiramente, trataremos o caso $p = 1$ e $q = 0$. Devemos mostrar que $\pi^{0,2}(d_M\phi) = 0$ se $\phi \in \mathcal{E}_M^{1,0}$. Isto é equivalente a provar

$$\left\langle d_M\phi, \overline{L}_1 \wedge \overline{L}_2 \right\rangle = 0 \quad \text{para todo} \quad \overline{L}_1, \overline{L}_2 \in \overline{\mathcal{V}} = T^{0,1}(M).$$

Segue do Lema 1.60 que

$$\left\langle d_M\phi, \overline{L}_1 \wedge \overline{L}_2 \right\rangle = \overline{L}_1\{\left\langle \phi, \overline{L}_2 \right\rangle\} - \overline{L}_2\{\left\langle \phi, \overline{L}_1 \right\rangle\} - \left\langle \phi, [\overline{L}_1, \overline{L}_2] \right\rangle.$$

Como $\phi \in \mathcal{E}_M^{1,0}$ e $\overline{L}_1, \overline{L}_2 \in T^{0,1}(M)$, temos $\left\langle \phi, \overline{L}_1 \right\rangle = \left\langle \phi, \overline{L}_2 \right\rangle = 0$. Pela definição de estrutura CR, $\overline{\mathcal{V}}$ é involutivo, e assim $[\overline{L}_1, \overline{L}_2] \in \overline{\mathcal{V}}$. Portanto, $\left\langle \phi, [\overline{L}_1, \overline{L}_2] \right\rangle = 0$. Dessa forma $\left\langle d_M\phi, \overline{L}_1 \wedge \overline{L}_2 \right\rangle = 0$ como queríamos.

Por outro lado, o lema segue automaticamente para $p = 0$ e $q = 1$. Para $p, q \geq 1$, $\mathcal{E}_M^{p,q}$ é gerado pelos seguintes termos

$$\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_p \wedge \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_q,$$

onde cada ϕ_j é uma $(1,0)$-forma suave e cada ψ_j é uma $(0,1)$-forma suave. O caso geral segue usando a Regra do Produto para d_M. □

Lema 5.4. *Se M é uma variedade CR, então $\overline{\partial}_M \circ \overline{\partial}_M = 0$.*

Demonstração. Suponha ϕ uma (p,q)-forma, então $\overline{\partial}_M\phi = \pi^{p,q+1}(d_M\phi)$. O Lema 5.3 fornece

$$\overline{\partial}_M\phi = d_M\phi - [\pi^{p+2,q-1}(d_M\phi) + \pi^{p+1,q}(d_M\phi)].$$

Portanto

$$\begin{aligned}\overline{\partial}_M\overline{\partial}_M\phi &= \pi^{p,q+2}[d_M(\overline{\partial}_M\phi)]\\ &= -\pi^{p,q+2}[d_M\pi^{p+2,q-1}(d_M\phi) + d_M\pi^{p+1,q}(d_M\phi)].\end{aligned}$$

Na última passagem, foi usado que $d_M \circ d_M = 0$. Do Lema 5.3 segue que o lado direito é nulo. Portanto $\overline{\partial}_M\overline{\partial}_M\phi = 0$. □

Lema 5.5. *Se $f \in \mathcal{E}_M^{p,q}$ e $g \in \mathcal{E}_M^{r,s}$, então*

$$\overline{\partial}_M(f \wedge g) = (\overline{\partial}_M f) \wedge g + (-1)^{p+q} f \wedge \overline{\partial}_M g.$$

Demonstração. A prova da Regra do Produto para $\overline{\partial}_M$ segue diretamente da Regra do Produto para derivada exterior. □

Lema 5.6. *Se $f \in \mathcal{E}_M^{p,q}$ e g é alguma forma suave de M com suporte compacto, então*

$$\int_M (\overline{\partial}_M f) \wedge g = (-1)^{p+q+1} \int_M f \wedge \overline{\partial}_M g.$$

Demonstração. Seja m a dimensão de $\mathcal{V}$ (e $\overline{\mathcal{V}}$) e seja d a dimensão de $X(M)$. Logo, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{V} \oplus X) = \dim_{\mathbb{C}} T^{1,0}(M) = m+d$ e $\dim_{\mathbb{C}} T^{0,1}(M) = m$. O espaço $T^{\mathbb{C}}(M)$ tem dimensão complexa $2m+d$ que é igual a dimensão real de M. Então uma forma de grau mais alto em M tem bigrau $(m+d, m)$. Se $f \in \mathcal{E}_M^{p,q}$, então $\overline{\partial}_M f \in \mathcal{E}_M^{p,q+1}$ e assim $\overline{\partial}_M f$ emparelha com formas de bigrau $(m+d-p, m-q-1)$. Seja $g \in \mathcal{D}_M^{m+d-p,m-q-1}$. Pela Regra do Produto, obtemos

$$\int_M (\overline{\partial}_M f) \wedge g = \int_M \overline{\partial}_M(f \wedge g) + (-1)^{p+q+1} \int_M f \wedge \overline{\partial}_M g. \tag{5.1}$$

O bigrau de $f \wedge g$ é $(m+d, m-1)$. Como o bigrau mais alto em M é $(m+d, m)$, temos

$$\overline{\partial}_M(f \wedge g) = d_M(f \wedge g).$$

Como g tem suporte compacto em M, segue do Teorema de Stokes que

$$\int_M d_M(f \wedge g) = 0. \tag{5.2}$$

Substituindo 5.2 em 5.1, obtemos a prova do lema. □

5.2 APROXIMAÇÃO EXTRÍNSECA PARA $\overline{\partial}_M$

Nesta seção, iremos aproximar o Complexo Tangencial de Cauchy-Riemann a partir de restrições e extensões, utilizando das (p, q)-formas de $\mathbb{C}^n$ e do operador $\overline{\partial}$. Primeiramente será definido as (p, q)-formas em M, em seguida $\overline{\partial}_M$.

Definição 5.7. *Seja M uma subvariedade CR genérica e suave em $\mathbb{C}^n$ com dimensão real igual a $2n-d$. Define-se $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$ como a restrição do conjunto $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)$ em M, isto é, $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$ é a união dos conjuntos $\Lambda^{p,q}_{p_0}T^*(\mathbb{C}^n)$ com p_0 variando em M.*

O espaço $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$ é diferente do espaço $\{j^*w;\ w \in \Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)\}$, onde $j : M \to \mathbb{C}^n$ é a função inclusão. Uma (p, q)-forma suave de $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$ é um elemento do tipo

$$f = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} f_{IJ} dz^I \wedge d\overline{z}^J \in \mathcal{E}^{p,q}(\mathbb{C}^n),$$

com funções coeficientes, f_{IJ}, restritas em M.

Definição 5.8. *Para $0 \leq p,\ q \leq n$, define-se $I^{p,q}$ sendo o ideal em $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)$ gerado por ρ e $\overline{\partial}\rho$ onde $\rho : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ é uma função qualquer suave e nula em M.*

Elementos de $I^{p,q}$ são somatórios de (p, q)-formas do tipo

$$\Phi_1\rho + \Phi_2 \wedge \overline{\partial}\rho, \quad \Phi_1 \in \Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n), \quad \Phi_2 \in \Lambda^{p,q-1}T^*(\mathbb{C}^n).$$

Se $\{\rho_1, \ldots, \rho_d\}$ é um sistema local definido em M, então $\{\rho_1, \ldots, \rho_d\}$ gera localmente o ideal de todas as funções de valores reais que são nulas em M. Portanto, $I^{p,q}$ é o ideal em $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)$ gerado localmente por

$$\rho_1, \ldots, \rho_d, \overline{\partial}\rho_1, \ldots, \overline{\partial}\rho_d.$$

Definição 5.9. *Define-se $I^{p,q}|_M$ como a restrição de $I^{p,q}$ em M, isto é, $I^{p,q}|_M$ é o ideal em $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$ gerado localmente por $\overline{\partial}\rho_1, \ldots, \overline{\partial}\rho_d$.*

Como M é CR, a dimensão da fibra $I^{p,q}_{p_0}|_M$ é independente do ponto $p_0 \in M$. Logo, $I^{p,q}|_M$ é um subconjunto de $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$. A seguir veremos a definição extrínseca do conjunto das (p, q)-formas de M.

Definição 5.10. *Seja M uma subvariedade CR genérica e suave de $\mathbb{C}^n$ com dimensão real igual a $2n-d$. Para $0 \leq p,\ q \leq n$, define-se $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ sendo o complemento ortogonal de $I^{p,q}|_M$ em $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$.*

Exemplo 5.11. Seja M uma subariedade CR conforme o Exemplo 5.1. Então, uma base para o conjunto das (p, q)-formas $\Lambda^{p,q}T^*(M)$, definida extrinsecamente, é dada por

$$\{dz^I \wedge dw^J \wedge d\overline{w}^K;\ |I| + |J| = p, |K| = q\}.$$

Elementos em $\Lambda^{p,q}_{p_0}T^*(M)$, $p_0 \in M$, são ortogonais ao ideal em $\Lambda^{p,q}_{p_0}T^*(\mathbb{C}^n)$ gerado por $\overline{\partial}\rho_1(p_0), \ldots, \overline{\partial}\rho_d(p_0)$. Seja k o número de elementos linearmente independentes de $\{\overline{\partial}\rho_1(p_0), \ldots, \overline{\partial}\rho_d(p_0)\}$ (isto é, k é a codimensão CR de M). Como M é CR, k é independente de $p_0 \in M$. Portanto, a dimensão de $\Lambda^{p,q}_{p_0}T^*(M)$ é independente de p_0. Dessa forma, o espaço $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ é um subconjunto de $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$. Note que $\Lambda^{p,q}T^*(M) = 0$ se $p > n$ ou $q > n - k$. Se M é genérico, então $k = d$ (codimensão real de M) pelo lema 4.11.

O espaço $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ é não intrínseco para M, isto é, não é um subespaço de uma álgebra exterior gerada pelo complexificado cotangente de M. Isto se deve ao fato de $\rho : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ ser nulo em M. Assim, $\overline{\partial}\rho = (1/2)(d\rho + iJ^* d\rho)$ não é ortogonal ao espaço cotangente de M devido a presença de $J^*d\rho$.

Para $s \geq 0$, seja

$$\Lambda^s_M = \Lambda^{s,0}T^*(M) \oplus \ldots \oplus \Lambda^{0,s}T^*(M),$$

onde alguns dos somatórios do lado direito pode ser igual a 0. O espaço Λ^s_M não é o igual ao espaço $\Lambda^sT^*(M)$. O espaço $\Lambda^sT^*(M)$ é intrínseco em M enquanto que Λ^s_M não.

Exemplo 5.12. Seja $M = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2;\ Im\ z = 0\}$. Então $\rho(z, w) = (2i)^{-1}(z - \overline{z})$. Logo $\overline{\partial}\rho = -(i/2)d\overline{z}$ e $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ é o espaço das (p, q)-formas de M que são ortogonais para o ideal gerado por $d\overline{z}$. Em particular, $\Lambda^{2,1}T^*(M)$ é gerado pela forma $dz \wedge dw \wedge d\overline{w}$ e $\Lambda^{1,2}T^*(M) = 0$. Portanto, $\Lambda^3_M = \Lambda^{2,1}T^*(M)$, enquanto $\Lambda^3T^*(M)$ é gerado por $dx \wedge dw \wedge d\overline{w}$ com $x = Re\ z$. Note também que $\{j^*w;\ w \in \Lambda^3_M\} = \Lambda^3T^*(M)$.

Para um conjunto aberto $U \subset M$, denota-se por $\mathcal{E}^{p,q}_M(U)$ o espaço das seções suaves em $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ sobre U, e por $\mathcal{D}^{p,q}_M(U)$ o espaço dos elementos de $\mathcal{E}^{p,q}_M(U)$ com suporte compacto. O conjunto aberto U será omitido da notação caso não seja essencial na discussão.

Para $s \geq 0$, tem-se

$$\mathcal{E}^s_M(U) = \mathcal{E}^{s,0}_M(U) \oplus \ldots \oplus \mathcal{E}^{0,s}_M(U),$$

onde alguns dos somatórios do lado direito podem ser nulos. Novamente, note que $\mathcal{E}^s_M(U) \neq \mathcal{E}^s(U)$.

Seja $t_M : \Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)|_M \to \Lambda^{p,q}T^*(M)$ a aplicação projeção ortogonal. Dada uma forma $f \in \Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$, $t_m(f)$ é frequentemente denotada por f_{t_M} e chamada parte tangencial de f. Se f é uma (p, q)-forma suave em $\mathbb{C}^n$, então f_{t_M} é um elemento em $\mathcal{E}^{p,q}_M$. Por outro lado, qualquer forma $f \in \mathcal{E}^{p,q}_M(U)$ pode ser estendida a um elemento $\widetilde{f} \in \mathcal{E}^{p,q}(\widetilde{U})$, onde $\widetilde{U}$ é um conjunto aberto de $\mathbb{C}^n$ e $\widetilde{U} \cap M = U$. Isto é feito escrevendo

$$f = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} f_{IJ} dz^I \wedge d\overline{z}^J, \qquad f_{IJ} \in \mathcal{E}(U),$$

e estendendo cada função coeficiente f_{IJ} a um subconjunto aberto $\widetilde{U}$ de $\mathbb{C}^n$.

Agora será definido o complexo tangencial de Cauchy-Riemann (extrínseco).

Definição 5.13. *Seja $U \subset M$ um conjunto aberto. O complexo tangencial de Cauchy-Riemann $\overline{\partial}_M : \mathcal{E}_M^{p,q}(U) \to \mathcal{E}_M^{p,q+1}(U)$ é definido da seguinte forma: dada $f \in \mathcal{E}_M^{p,q}(U)$, seja $\widetilde{U}$ um conjunto aberto em $\mathbb{C}^n$ de modo que $\widetilde{U} \cap M = U$ e seja $\widetilde{f} \in \mathcal{E}^{p,q}(\widetilde{U})$ com $\widetilde{f}_{t_M} = f$ em $\widetilde{U} \cap M = U$. Então*

$$\overline{\partial}_M f = (\overline{\partial}\widetilde{f})_{t_M}.$$

A forma $\overline{\partial}_M f$ é calculada estendendo f a um conjunto aberto em $\mathbb{C}^n$, aplicando $\overline{\partial}$ e tomando a parte tangencial do resultado. Como existem muitas possibilidades para a extensão de um elemento de $\mathcal{E}_M^{p,q}$, será mostrado que a definição de $\overline{\partial}_M f$ é independente da extensão.

Lema 5.14. *O operador $\overline{\partial}_M$ está bem definido, isto é, se $\widetilde{f}_1$ e $\widetilde{f}_2$ são elementos de $\mathcal{E}^{p,q}(\widetilde{U})$ com $(\widetilde{f}_1)_{t_M} = (\widetilde{f}_2)_{t_M}$ em $M \cap \widetilde{U}$, então $(\overline{\partial}\widetilde{f}_1)_{t_M} = (\overline{\partial}\widetilde{f}_2)_{t_M}$ em $M \cap \widetilde{U}$.*

Demonstração. Note que $(\widetilde{f}_1 - \widetilde{f}_2)$ é um elemento de $I^{p,q}$. Portanto, é suficiente provar que $\overline{\partial}$ é uma aplicação suave de $I^{p,q}$ para $I^{p,q+1}$. Sejam $\alpha \in \mathcal{E}^{p,q}(\widetilde{U})$, $\beta \in \mathcal{E}^{p,q-1}(\widetilde{U})$ e $\rho : \widetilde{U} \to \mathbb{R}$ nula em $M \cap \widetilde{U}$, então

$$\overline{\partial}(\alpha\rho + \beta \wedge \overline{\partial}\rho) = (\overline{\partial}\alpha)\rho + (\alpha + \overline{\partial}\beta) \wedge \overline{\partial}\rho.$$

O lado direito é claramente um elemento de $I^{p,q+1}$. □

Como foi mencionado, o espaço $\Lambda^{p,q}(M)$ não é intrínseco para M. Portanto, o espaço $\mathcal{E}_M^{p,q}$ e o operador tangencial de Cauchy-Riemann também não são intrínsecos para M. Por esse motivo que nos referimos a Definição 5.13 como sendo extrínseca para o operador tangencial de Cauchy-Riemann.

Lema 5.15. *Suponha $M = \{z \in \mathbb{C}^n;\ \rho(z) = 0\}$ uma hipersuperfície real em $\mathbb{C}^n$ onde $\rho : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ é suave com $|d\rho| = 1$ em M. Seja*

$$\mathbb{N} = 4\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = 4\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\rho}{\partial z_j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\right).$$

Então

$$\phi_{t_M} = \mathbb{N} \lrcorner (\overline{\partial}\rho \wedge \phi), \quad com \quad \phi \in \Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$$

e

$$\overline{\partial}_M f = \mathbb{N} \lrcorner (\overline{\partial}\rho \wedge \overline{\partial}\widetilde{f}), \quad com \quad f \in \mathcal{E}_M^{p,q},$$

onde $\widetilde{f}$ é uma (p,q)-forma suave com $\widetilde{f}_{t_M} = f$ em M.

Demonstração. Como $|d\rho| = 1$, o campo vetorial $\mathbb{N}$ é o dual da forma $\overline{\partial}\rho$. Se $\phi \in \Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)$ e $\psi \in \Lambda^{p,q-1}T^*(\mathbb{C}^n)$, temos

$$(\mathbb{N} \lrcorner \phi) \cdot \psi = \phi \cdot (\overline{\partial}\rho \wedge \psi),$$

onde $(\cdot)$ é o produto interno Hermitiano em $\Lambda^* T^*(\mathbb{C}^n)$. Portanto $\mathbb{N}\lrcorner\phi = 0$ em M se, e somente se, $\phi \in \Lambda^{p,q}T^*(M)$. Pela Regra do Produto para contrações, temos

$$\mathbb{N}\lrcorner(\overline{\partial}\rho \wedge \phi) = (\mathbb{N}\lrcorner\overline{\partial}\rho)\phi - \overline{\partial}\rho \wedge (\mathbb{N}\lrcorner\phi).$$

Como $\mathbb{N}\lrcorner\overline{\partial}\rho = |d\rho|^2 = 1$ em M, isso implica

$$\phi = \mathbb{N}\lrcorner(\overline{\partial}\rho \wedge \phi) + \overline{\partial}\rho \wedge (\mathbb{N}\lrcorner\phi). \tag{5.3}$$

Agora, $\mathbb{N}\lrcorner(\mathbb{N}\lrcorner) \equiv 0$ e assim $\mathbb{N}\lrcorner(\overline{\partial}\rho \wedge \phi)|_M$ é um elemento de $\Lambda^{p,q}T^*(M)$. A forma $\overline{\partial}\rho \wedge (\mathbb{N}\lrcorner\phi)$ é elemento de $I^{p,q}$. Portanto, a Equação 5.3 provém de uma decomposição ortogonal de um elemento ϕ de $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$. Em particular, $\phi_{t_M} = \mathbb{N}\lrcorner(\overline{\partial}\rho \wedge \phi)$, como queríamos mostrar. A fórmula para $\overline{\partial}_M f$ segue da expressão para ϕ_{t_M} e a definição de $\overline{\partial}_M$. $\square$

O termo $\mathbb{N}\lrcorner\phi$ é chamado de componente normal de ϕ e é denotado por ϕ_{n_M}. Assim a Equação 5.3 pode ser escrita na forma

$$\phi = \phi_{t_M} + \overline{\partial}\rho \wedge \phi_{n_M}.$$

Lema 5.16. *Suponha M uma subvariedade CR suave de $\mathbb{C}^n$.*

(a) $\overline{\partial}_M(f \wedge g) = \overline{\partial}_M f \wedge g + (-1)^{p+q} f \wedge \overline{\partial}_M g$ *para* $f \in \mathcal{E}_M^{p,q}$ *e* $g \in \mathcal{E}_M^{r,s}$*;*

(b) $\overline{\partial}_M \circ \overline{\partial}_M = 0.$

Demonstração. A parte (a) é provada facilmente de forma análoga a Regra do Produto para $\overline{\partial}$, enquanto a parte (b) basta notar que, se $\overline{\partial}_M f = g$, então $\overline{\partial}_M g = 0$. $\square$

Uma interpretação útil para a equação $\overline{\partial}_M f = g$ é em termos de correntes. Se M é uma subvariedade orientada suave de $\mathbb{C}^n$ de dimensão real $2n - d$ $(1 \leq d \leq n)$, então a corrente "integração sobre M" é definida por

$$\langle [M], \phi \rangle_{\mathbb{C}^n} = \int_M \phi \quad \text{para} \quad \phi \in \mathcal{D}^{2n-d}(\mathbb{C}^n).$$

A corrente $[M]$ tem grau d e portanto pode ser escrita na forma

$$[M] = [M]^{d,0} + \ldots + [M]^{0,d}.$$

Em particular

$$\left\langle [M]^{0,d}, \phi \right\rangle_{\mathbb{C}^n} = \int_M \phi^{n,n-d} \quad \text{para} \quad \phi \in \mathcal{D}^{2n-d}(\mathbb{C}^n),$$

onde $\phi^{n,n-d}$ indica a parte de ϕ de bigrau $(n, n-d)$. Segue do Teorema de Stokes que $d[M] = 0$. Como $\overline{\partial}[M]^{0,d}$ é a parte de $d[M]$ de bigrau $(0, d+1)$, tem-se $\overline{\partial}[M]^{0,d} = 0$.

Lema 5.17. *Seja M uma subvariedade CR genérica e orientada de $\mathbb{C}^n$ de dimensão real $2n-d$, $1 \leq d \leq n$. Suponha $f \in \mathcal{E}^{p,q}(\mathbb{C}^n)$. Então $f_{t_M} = 0$ em M se, e somente se, $[M]^{0,d} \wedge f = 0$ como uma corrente em $\mathbb{C}^n$.*

Demonstração. Pelo argumento da partição da unidade, é suficiente provar o lema para formas f com suporte em uma vizinhança $U \subset \mathbb{C}^n$ de um ponto $p_0 \in M$ dado. Como vimos no Capítulo X, a corrente $[M]$ é dada por $\mu_M \alpha d\rho_1 \wedge \ldots \wedge d\rho_d$ onde $\{\rho_1, \ldots, \rho_d\}$ é um sistema local definido para M próximo à p_0 e $\alpha = |d\rho_1 \wedge \ldots \wedge d\rho_d|^{-1}$. Aqui, μ_M é a distribuição dada pela medida de Hausdorff em M. A parte de bigrau $(0, d)$ da corrente é

$$[M]^{0,d} = \mu_M \alpha \overline{\partial} \rho_1 \wedge \ldots \wedge \overline{\partial} \rho_d.$$

Então, para $f \in \mathcal{D}^{p,q}(U)$, $[M]^{0,d} \wedge f = 0$ se, e somente se,

$$\overline{\partial} \rho_1 \wedge \ldots \wedge \overline{\partial} \rho_d \wedge f = 0,$$

em $M \cap U$. Como M é genérico, temos $\overline{\partial} \rho_1 \wedge \ldots \wedge \overline{\partial} \rho_d \neq 0$ e

$$\overline{\partial} \rho_1 \wedge \ldots \wedge \overline{\partial} \rho_d \wedge f = \overline{\partial} \rho_1 \wedge \ldots \wedge \overline{\partial} \rho_d \wedge f_{t_M}.$$

Isto implica que a equação $[M]^{0,d} \wedge f = 0$ é equivalente a $f_{t_M} = 0$ em M. □

Suponha f um elemento de $\mathcal{E}_M^{p,q}$. Tecnicamente, a corrente $[M]^{0,d} \wedge f$ não está bem definida pois $[M]^{0,d}$ é uma corrente em $\mathbb{C}^n$ e f não está definida em $\mathbb{C}^n$. Porém, pode-se definir $[M]^{0,d} \wedge f$ como $[M]^{0,d} \wedge \widetilde{f}$, onde $\widetilde{f}$ é uma (p,q)-forma suave com $\widetilde{f}_{t_M} = f$. O Lema 5.17 implica que a definição independe da extensão $\widetilde{f}$.

Lema 5.18. *Suponha M uma subvariedade CR genérica, orientada de $\mathbb{C}^n$ de dimensão real $2n-d$. Sejam $f \in \mathcal{E}_M^{p,q}$ e $g \in \mathcal{E}_M^{p,q+1}$. A equação $\overline{\partial}_M f = g$ em M é equivalente a equação de corrente*

$$\overline{\partial}(f \wedge [M]^{0,d}) = g \wedge [M]^{0,d} \quad \textit{em} \quad \mathbb{C}^n.$$

Demonstração. Segue do Lema 5.17 e do fato que $\overline{\partial}[M]^{0,d} = 0$, que

$$\begin{aligned} \overline{\partial}(f \wedge [M]^{0,d}) &= \overline{\partial} f \wedge [M]^{0,d} \\ &= (\overline{\partial} f)_{t_M} \wedge [M]^{0,d}. \end{aligned}$$

Portanto, $\overline{\partial}_M f = g$ se, e somente se, $\overline{\partial}(f \wedge [M]^{0,d}) = g \wedge [M]^{0,d}$, como queríamos. □

Ambos operadores $\overline{\partial}$ e d satisfazem a fórmula de integração por partes. Para $f \in \mathcal{E}^{p,q}(\mathbb{C}^n)$ e $g \in \mathcal{D}^{n-p,n-q-1}(\mathbb{C}^n)$, temos

$$\left\langle \overline{\partial} f, g \right\rangle_{\mathbb{C}^n} = (-1)^{p+q+1} \left\langle f, \overline{\partial} g \right\rangle_{\mathbb{C}^n}.$$

A mesma fórmula segue (por definição) se f é uma corrente de bigrau (p,q). A partir desta equação, vamos obter a fórmula de integração por partes para $\overline{\partial}_M$. Lembramos que o pareamento de correntes em M é denotado por $\langle\ ,\ \rangle_M$. Vamos estender o pareamento de correntes ao espaço $\mathcal{D}_M^r$ fazendo

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle_M &= \int_M f \wedge g \\ &= \langle [M] \wedge f, g\rangle_{\mathbb{C}^n},\end{aligned}$$

para $f \in \mathcal{E}_M^r(M)$ e $g \in \mathcal{D}_M^{2n-d-r}(M)$. Para uma variedade genérica M, $\Lambda^{p,q}T^*(M) = 0$ se fornecido $p > n$ ou $q > n-d$. Portanto, se $f \in \mathcal{E}_M^{p,q}$ e $g \in \mathcal{D}_M^{2n-d-(p+q)}$, então

$$\langle f, g\rangle_M = \left\langle f, g^{n-p,n-q-d}\right\rangle_M,$$

onde $g^{n-p,n-q-d}$ é a parte de g com bigrau $(n-p, n-q-d)$. Se $f \in \mathcal{E}_M^{p,q}$ e $g \in \mathcal{D}_M^{n-p,n-q-d}(M)$, então $f \wedge g$ tem bigrau $(n, n-d)$ e assim

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle_M &= \int_M f \wedge g \\ &= \left\langle [M]^{0,d} \wedge f, g\right\rangle_{\mathbb{C}^n}.\end{aligned}$$

Lema 5.19. *Suponha M uma subvariedade CR genérica, orientada de $\mathbb{C}^n$ de dimensão real $2n-d$. Sejam $f \in \mathcal{E}_M^{p,q}(M)$ e $g \in \mathcal{D}_M^{n-p,n-q-d-1}(M)$. Então*

$$\left\langle \overline{\partial}_M f, g\right\rangle_M = (-1)^{p+q+1}\left\langle f, \overline{\partial}_M g\right\rangle_M.$$

Demonstração. Nos lemas decorridos, obtemos que

$$\left\langle \overline{\partial}_M f, g\right\rangle_M = \left\langle [M]^{0,d}, (\overline{\partial}\widetilde{f})_{t_M} \wedge \widetilde{g}\right\rangle_{\mathbb{C}^n},$$

onde $\widetilde{f} \in \mathcal{E}^{p,q}(\mathbb{C}^n)$ e $\widetilde{g} \in \mathcal{D}^{n-p,n-q-d-1}(\mathbb{C}^n)$ são extensões de f e g, respectivamente. Deste modo

$$\begin{aligned}\left\langle \overline{\partial}_M f, g\right\rangle_M &= \left\langle [M]^{0,d} \wedge (\overline{\partial}\widetilde{f})_{t_M}, \widetilde{g}\right\rangle_{\mathbb{C}^n} \\ &= \left\langle [M]^{0,d} \wedge \overline{\partial}\widetilde{f}, \widetilde{g}\right\rangle_{\mathbb{C}^n} \\ &= (-1)^d\left\langle \overline{\partial}\{[M]^{0,d} \wedge \widetilde{f}\}, \widetilde{g}\right\rangle_{\mathbb{C}^n} \\ &= (-1)^{p+q+1}\left\langle [M]^{0,d} \wedge \widetilde{f}, \overline{\partial}\widetilde{g}\right\rangle_{\mathbb{C}^n}.\end{aligned}$$

A última equação segue da definição de $\overline{\partial}$ aplicada em uma corrente. Pelo Lema 5.17, temos

$[M]^{0,d} \wedge \overline{\partial}\widetilde{g} = [M]^{0,d} \wedge (\overline{\partial}\widetilde{g})_{t_M}$. Portanto

$$\begin{aligned}\left\langle \overline{\partial}_M f, g \right\rangle_M &= (-1)^{p+q+1} \left\langle [M]^{0,d}, \widetilde{f} \wedge (\overline{\partial}\widetilde{g})_{t_M} \right\rangle_{\mathbb{C}^n} \\ &= (-1)^{p+q+1} \left\langle f, \overline{\partial}_M g \right\rangle_M ,\end{aligned}$$

como queríamos mostrar. □

A fórmula de integração por partes nos permite estender a definição de $\overline{\partial}_M$ para as correntes em M. O espaço das correntes em M de bidimensão (p, q) é o dual do espaço $\mathcal{D}_M^{p,q}$ e é denotado por $\{\mathcal{D}_M^{p,q}\}'$.

Definição 5.20. *Suponha M uma subvariedade CR genérica, orientada de $\mathbb{C}^n$ de dimensão real $2n - d$. Seja $T \in \mathcal{D}_M'^{p,q}$. Então, $\overline{\partial}_M T \in \mathcal{D}_M'^{p,q+1}$ é uma corrente definida por*

$$\left\langle \overline{\partial}_M T, g \right\rangle_M = (-1)^{p+q+1} \left\langle T, \overline{\partial}_M g \right\rangle_M \quad \textit{para} \quad g \in \mathcal{D}_M^{n-p,n-q-d-1}.$$

5.3 A equivalência entre os complexos tangenciais de Cauchy-Riemann extrínseco e intrínseco

Se M é uma subvariedade CR de $\mathbb{C}^n$, existem dois pontos de vista para o complexo tangencial de Cauchy-Riemann: o extrínseco e o intrínseco. Esses dois complexos são diferentes, porém, mostraremos que são isomorfos. Antes de estabelecer o isomorfismo, precisamos definir como é um isomorfirmo entre dois complexos.

Definição 5.21.

(a) Um complexo é uma coleção de espaços vetoriais $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_q;\ q \in \mathbb{Z}, q \geq 0\}$ munido de aplicações $d_q : \mathcal{A}_q \to \mathcal{A}_{q+1}$ tais que $d_{q+1} \circ d_q = 0$ para todo $q \geq 0$.

(b) Sejam $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_q, d_q;\ q \geq 0\}$ e $A = \{A_q, D_q;\ q \geq 0\}$ dois complexos. Estes complexos são isomorfos se existe uma coleção de isomorfismos de espaços vetoriais $P_q : A_q \to \mathcal{A}_q$ de modo que

$$P_{q+1} \circ D_q = d_q \circ P_q.$$

O seguinte diagrama comutativo descreve a parte (b) da Definição 5.21:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \to & A_q & \overset{D_q}{\to} & A_{q+1} & \overset{D_{q+1}}{\to} & A_{q+2} & \to & \cdots \\ & & \downarrow P_q & & \downarrow P_{q+1} & & \downarrow P_{q+2} & & \\ \cdots & \to & \mathcal{A}_q & \overset{d_q}{\to} & \mathcal{A}_{q+1} & \overset{d_{q+1}}{\to} & \mathcal{A}_{q+2} & \to & \cdots \end{array}$$

Exemplo 5.22. Suponha M e N variedades suaves e $F : M \to N$ um difeomorfismo. Os complexos $\{d_M : \mathcal{E}^r(M) \to \mathcal{E}^{r+1}(M)\}$ e $\{d_N : \mathcal{E}^r(N) \to \mathcal{E}^{r+1}(N)\}$ são isomorfos e o isomorfismo é dado por $F^* : \mathcal{E}^r(N) \to \mathcal{E}^r(M)$.

Teorema 5.23. *Seja M uma subvariedade CR de $\mathbb{C}^n$. Os complexos tangenciais extrínseco e intrínseco, de Cauchy-Riemann, são isomorfos.*

Demonstração. Fixemos p, onde $0 \leq p \leq n$. Para $q \geq 0$, seja

$$A_q = \mathcal{E}_M^{p,q} \text{ - via definição extrínseca.}$$
$$\mathcal{A}_q = \mathcal{E}_M^{p,q} \text{ - via definição intrínseca.}$$

A_q é o espaço das funções suaves do fibrado $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ definido extrinsecamente, que por definição é o complemento ortogonal de $I^{p,q}$ em $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$. Por outro lado, $\mathcal{A}_q$ é o espaço das funções suaves do fibrado $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ definido intrinsecamente, que por definição é

$$\Lambda^p\{H^{*1,0}(M) \oplus X^*(M)\}\widehat{\otimes}\Lambda^q\{H^{*0,1}(M)\}.$$

Tomemos

$$D_q : A_q \to A_{q+1} \text{ sendo a definição extrínseca de } \overline{\partial}_M$$
$$d_q : \mathcal{A}_q \to \mathcal{A}_{q+1} \text{ sendo a definição intrínseca de } \overline{\partial}_M.$$

O operador D_q é a parte tangencial de $\overline{\partial}$, isto é, $t_M \circ \overline{\partial}$. Em contrapartida, $d_q = \pi_M^{p,q+1} \circ d_M$, com d_M sendo a derivada exterior em M e $\pi_M^{p,q+1}$ sendo a projeção de $\Lambda^{p+q+1}T^*(M)$ para $\Lambda^{p,q+1}T^*(M)$.

Seja $j : M \to \mathbb{C}^n$ a aplicação inclusão. Vamos mostrar que j^* é o isomorfismo desejado entre os complexos $\{D_q : A_q \to A_{q+1}\}$ e $\{d_q : \mathcal{A}_q \to \mathcal{A}_{q+1}\}$. Para isso, temos dois pontos a serem provados:

(i) A aplicação j^* leva A_q para $\mathcal{A}_q$ isomorficamente.

(ii) $j^* \circ D_q = d_q \circ j^*$.

Para provar (i), é suficiente provar o seguinte lema.

Lema 5.24. *Para cada ponto $p_0 \in M$, j^* é um isomorfismo de $\Lambda^{p,q}T^*_{p_0}(M)$ extrínseco para $\Lambda^{p,q}T^*_{p_0}(M)$ intrínseco.*

Demonstração. Para simplificar a notação, iremos provar o lema para o caso em que M é genérico. Do Lema 4.14, podemos encontrar uma mudança de coordenadas linear, complexa e afim, $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, de modo que o ponto $p_0 \in M$ dado seja a origem e

$$M = \{(x + iy, w) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d};\ y = h(x, w)\},$$

onde $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \to \mathbb{R}^d$ é suave com $h(0) = 0$ e $Dh(0) = 0$. Como também foi mencionado, A preserva o espaço tangente holomórfico de M, o espaço tangente totalmente real de

M e a métrica do espaço tangente real de M. Portanto, a definição de $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ intrínseco é invariante por meio de uma mudança de coordenadas. Em adição, o pull back de A comuta com $\overline{\partial}$. Logo, a definição de $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ extrínseco também é invariante sob uma mudança de coordenadas.

Os seguintes argumentos podem ser modificados para o caso não-genérico usando as observações do Lema 4.14.

Um sistema local definido para M é dado por $\{\rho_1, \ldots, \rho_d\}$ de modo que $\rho_j(z, w) = \text{Im } z_j - h_j(\text{Re } z, w)$. Como $Dh(0) = 0$, segue que $\overline{\partial}\rho_j(0) = -(2i)^{-1}d\overline{z}_j$. Por definição, $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ extrínseco é o complemento ortogonal em $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$ do ideal gerado por $\overline{\partial}\rho_1, \ldots, \overline{\partial}\rho_d$. Portanto, uma base para $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ extrínseco na origem é dada por

$$\{dz^I \wedge dw^J \wedge d\overline{w}^K;\ |I| + |J| = p, |K| = q\}.$$

Uma base para $\mathcal{V}_0^* = H_0^{*^{1,0}}(M)$ é dada por $\{dw_1, \ldots, dw_{n-d}\}$ e uma base para $\overline{\mathcal{V}}_0^* = H_0^{*^{0,1}}(M)$ é dada por $\{d\overline{w}_1, \ldots, d\overline{w}_{n-d}\}$. Como $X_0^*(M)$ é o complemento ortogonal de $\mathcal{V}_0^* \oplus \overline{\mathcal{V}}_0^*$ em $T_0^{*^{\mathbb{C}}}(M)$, uma base para $X_0^*(M)$ é dada por $\{dx_1, \ldots, dx_d\}$. Portanto, uma base para $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ intrínseco é dada por

$$\{dx^I \wedge dw^J \wedge d\overline{w}^K;\ |I| + |J| = p, |K| = q\}.$$

Como $Dh(0) = 0$, seguem as seguintes relações próximo à origem:

$$\begin{array}{ll} j^*(dw_k) = dw_k & 1 \leq k \leq n - d \\ j^*(d\overline{w}_k) = d\overline{w}_k & 1 \leq k \leq n - d \\ j^*(dy_k) = 0 & 1 \leq k \leq d \\ j^*(dx_k) = dx_k & 1 \leq k \leq d. \end{array}$$

Em particular, $j^*(dz_k) = dx_k$ para $1 \leq k \leq d$ e assim

$$j^*(dz^I \wedge dw^J \wedge d\overline{w}^K) = dx^I \wedge dw^J \wedge d\overline{w}^K.$$

Desta forma, j^* leva uma base de $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ extrínseco (na origem), em uma base de $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ intrínseco (na origem). Isto completa a prova do lema e, consequentemente, de (i). □

Para provar (ii), primeiramente recordemos que, por definição

$$\begin{aligned} D_q &= t_M \circ \overline{\partial} = t_M \circ \pi_{\mathbb{C}^n}^{p,q+1} \circ d_{\mathbb{C}^n} \\ d_q &= \pi_M^{p,q+1} \circ d_M. \end{aligned}$$

Como $j^* \circ d_{\mathbb{C}^n} = d_M \circ j^*$, o seguinte lema é suficiente para provar (ii).

Lema 5.25. *Dados p e q inteiros,*

$$j^* \circ t_M \circ \pi_{\mathbb{C}^n}^{p,q+1} = \pi_M^{p,q+1} \circ j^*$$

é uma aplicação de $\{\Lambda^{p,q+1}T^*(\mathbb{C}^n) \oplus \Lambda^{p+1,q}T^*(\mathbb{C}^n)\}|_M$ para $\Lambda^{p,q+1}T^*(M)$ intrínseco.

Demonstração. Para cada ponto $p_0 \in M$, devemos provar que aplicação dada no lema leva o espaço $\{\Lambda^{p,q+1}T^*_{p_0}(\mathbb{C}^n) \oplus \Lambda^{p+1,q}T^*(\mathbb{C}^n)\}|_M$ em $\Lambda^{p,q+1}T^*_{p_0}(M)$ definido intrinsecamente. Como feito no Lema 5.24, assumiremos M genérico, o ponto p_0 sendo a origem, e

$$M = \{(x + iy, w) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d};\ y = h(x, w)\},$$

com $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \to \mathbb{R}^d$ suave com $h(0) = 0$ e $Dh(0) = 0$.

Primeiramente, suponha ϕ um elemento de $\Lambda^{p,q+1}T_0^*(\mathbb{C}^n)$. Assim

$$\phi = \sum_{r=0}^{\min(d,p)} \sum_{s=0}^{\min(d,q+1)} \sum_{\substack{|I|=r \\ |J|=s}} \phi_{IJ}^{r,s} \wedge dz^I \wedge d\overline{z}^J,$$

onde cada $\phi_{IJ}^{r,s}$ é uma forma (na origem) de bigrau $(p - r, q + 1 - s)$, que envolvem apenas $dw_1, \ldots, dw_{n-d}, d\overline{w}_1, \ldots, d\overline{w}_{n-d}$. Na origem, t_M extingue $d\overline{z}_1, \ldots, d\overline{z}_d$. Portanto

$$t_M \circ \pi_{\mathbb{C}^n}^{p,q+1}(\phi) = t_M(\phi) = \sum_{r=0}^{\min(d,p)} \sum_{|I|=r} \phi_I^{r,0} \wedge dz^I.$$

Como $j^* dz_k = dx_k$, temos

$$j^* \circ t_M \circ \pi_{\mathbb{C}^n}^{p,q+1}(\phi) = \sum_{r=0}^{\min(d,p)} \sum_{|I|=r} \phi_I^{r,0} \wedge dx^I. \tag{5.4}$$

Por outro lado,

$$\pi_M^{p,q+1} \circ j^*(\phi) = \pi_M^{p,q+1} \left\{ \sum_{r=0}^{\min(d,p)} \sum_{s=0}^{\min(d,q+1)} \sum_{\substack{|I|=r \\ |J|=s}} \phi_{IJ}^{r,s} \wedge dx^I \wedge dx^J \right\}.$$

Cada dx_k pertence a $\Lambda^{1,0}T_0^*(M)$ intrínseco e $\phi_{IJ}^{r,s}$ pertence a $\Lambda^{p-r,q+1-s}T_0^*(M)$ intrínseco. Então, $\phi_{IJ}^{r,s} \wedge dx^I \wedge dx^J$ pertence a $\Lambda^{p+s,q+1-s}T_0^*(M)$. Devido à presença de $\pi_M^{p,q+1}$, o único termo que contribui para o somatório do lado direito ocorre quando $s = 0$. Portanto

$$\pi_M^{p,q+1} \circ j^*(\phi) = \sum_{r=0}^{\min(d,p)} \sum_{|I|=r} \phi_I^{r,0} \wedge dx^I. \tag{5.5}$$

Comparando as Equações 5.4 e 5.5, obtemos

$$j^* \circ t_M \circ \pi^{p,q+1}_{\mathbb{C}^n}(\phi) = \pi^{p,q+1}_M \circ j^*(\phi), \tag{5.6}$$

no espaço $\Lambda^{p,q+1}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$. Examinando este argumento, podemos notar que ambas as aplicações são nulas em $\Lambda^{p+1,q}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$. Concluímos que a Equação 5.6 sempre vale no espaço $\Lambda^{p+1,q}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$ e então o lema está provado. □

Com isto provamos (ii) e, portanto, a prova do Teorema 5.23 está completa. □

5.4 FUNÇÕES CR

Nesta seção, apresentaremos as definições e as propriedades básicas das funções CR. Funções CR são análogas às funções holomorfas em uma variedade complexa. Entretanto, existem diferenças importantes. Por exemplo, as funções CR nem sempre são suaves. Existem relações entre funções CR em uma variedade CR mergulhada e funções holomorfas em $\mathbb{C}^n$. Por exemplo, a restrição de uma função holomorfa em uma subvariedade CR é uma função CR. Porém, a extensão de uma função CR nem sempre é uma função holomorfa. Iremos mostrar que uma função CR analítica real em uma subvariedade CR analítica real se estende localmente a uma função holomorfa.

Definição 5.26. *Suponha $(M, \mathcal{V})$ uma estrutura CR. A função $f : M \to \mathbb{C}$ (ou distribuição) é chamada de função CR se $\overline{\partial}_M f = 0$ em M.*

A Definição 5.26 se aplica a qualquer variedade CR, abstrata ou mergulhada em $\mathbb{C}^n$. Agora, serão apresentadas outras formas de caracterizar as funções CR.

Lema 5.27.

(a) Suponha $(M, \mathcal{V})$ uma estrutura CR. Uma função C^1, $f : M \to \mathbb{C}$, é uma função CR se, e somente se, $\overline{L}f = 0$ em M para todo $\overline{L} \in \mathcal{V}$.

(b) Suponha $M = \{z \in \mathbb{C}^n;\ \rho_1(z) = \ldots = \rho_d(z) = 0\}$ uma subvariedade CR genérica de $\mathbb{C}^n$. Uma função C^1, $f : M \to \mathbb{C}$, é uma função CR se, e somente se,

$$\overline{\partial}\widetilde{f} \wedge \overline{\partial}\rho_1 \wedge \ldots \wedge \overline{\partial}\rho_d = 0$$

em M, onde $\widetilde{f} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ é qualquer extensão C^1 de f.

Demonstração. Para a parte (a), recordemos que $\overline{\partial}_M f = \pi^{0,1} d_M f$. Como $\pi^{0,1}$ é a projeção de $T^{*\mathbb{C}}(M)$ em $T^{*0,1}(M) = \overline{\mathcal{V}}^*$, temos que $\pi^{0,1}(d_M f) = 0$ se, e somente se, $\langle d_M f, \overline{L}\rangle = 0$ para todo $\overline{L} \in \overline{\mathcal{V}}$. Sendo assim, a prova de (a) segue da equação $\langle d_M f, \overline{L}\rangle = \overline{L}\{f\}$, que é a definição de derivada exterior de uma função.

Em contrapartida, a parte (b) segue da definição extrínseca de $\overline{\partial}_M f$ como uma parte de $\overline{\partial}\widetilde{f}|_M$, que é ortogonal ao ideal gerado por $\{\overline{\partial}\rho; \rho : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ é suave, $\rho = 0$ em $M\}$. $\square$

Se M é uma subvariedade CR de $\mathbb{C}^n$, então qualquer função holomorfa em uma vizinhança de M em $\mathbb{C}^n$ se restringe a uma função CR em M pela parte (b) do Lema 5.27. No entanto, a volta não é verdadeira, como o seguinte exemplo ilustra.

Exemplo 5.28. Seja $M = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2;\ \text{Im}\, z = 0\}$. Aqui, $\overline{\mathcal{V}} = H^{0,1}(M)$ é gerado (sobre $\mathcal{E}(M)$) pelo campo vetorial $\partial/\partial\overline{w}$. A função $f : M \to \mathbb{C}$ é CR se

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{w}}(x, w) = 0 \qquad (x = \text{Re}\, z).$$

Uma função CR em M é uma função que é holomorfa em w com $x \in \mathbb{R}$ mantido fixado. Já que não há condição no comportamento de uma função CR na variável x, uma função arbitrária de x é automaticamente CR. Portanto, qualquer função não analítica em x é um exemplo de uma função CR que não se estende a uma função holomorfa em uma vizinhança de M em $\mathbb{C}^2$.

Teorema 5.29. *Suponha que M é uma subvariedade CR genérica, analítica e real de $\mathbb{C}^n$, com dimensão real maior ou igual a n. Seja $f : M \to \mathbb{C}$ uma função CR, analítica e real em M. Então, existe uma vizinhança U de M em $\mathbb{C}^n$ e uma única função holomorfa $F : U \to \mathbb{C}$ com $F|_M = f$.*

Antes de demonstrarmos o teorema, veremos o seguinte lema.

Lema 5.30. *Suponha M uma subvariedade CR suave e genérica de $\mathbb{C}^n$ de dimensão real $2n-d$, $0 \leq d \leq n$. Se f é holomorfa em uma vizinhança conexa de M em $\mathbb{C}^n$ e f é nula em M, então f é identicamente nula.*

Demonstração. Pelo Teorema da Identidade para funções holomorfas, é suficiente provar que todas as derivadas de f são nulas em um ponto fixado $p_0 \in M$. Próximo à p_0, existe uma base local para $H^{1,0}(M)$, que consiste nos campos vetoriais suaves $L_1, \ldots, L_{n-d}$. A coleção de campos vetoriais $\{\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_{n-d}\}$ forma uma base local para $H^{0,1}(M)$. Seja $X_1, \ldots, X_d$ uma base local para o fibrado tangente totalmente real, $X(M)$. Fazendo a extensão dos coeficientes, podemos assumir que esses campos vetoriais são definidos em uma vizinhança de $p_0 \in \mathbb{C}^n$. Os campos vetoriais $N_1 = JX_1, \ldots, N_d = JX_d$ (restritos a M) são transversais para M. Como M é genérico, uma base para $T^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ próximo à p_0 é dado por

$$\{L_1, \ldots, L_{n-d}, \overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_{n-d}, X_1, \ldots, X_d, N_1, \ldots, N_d\}.$$

Os campos vetoriais $L_1, \ldots, L_{n-d}, \overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_{n-d}, X_1, \ldots, X_d$ são chamados tangenciais, enquanto que os campos vetoriais $N_1, \ldots, N_d$ são chamados transversais.

Para provar que $D^\alpha f = 0$, próximo de p_0 em M, para todos os operadores diferenciais D^α, vamos usar indução dupla na ordem do operador diferencial D^α e no número, m, de campos vetoriais transversos em D^α.

Se $m = 0$, então D^α envolve apenas campos vetoriais tangenciais e assim $D^\alpha f = 0$ em M, pois $f = 0$ em M.

Agora, assuma por indução que para $m \geq 0$, $D^\alpha f = 0$ em M, para todo operador diferencial que envolve somente m campos vetoriais transversais. Queremos mostrar que

$$N_{j_1} \dots N_{j_{m+1}}\{f\} = 0$$

em M, onde $j_1, \dots, j_{m+1}$ são índices quaisquer do conjunto $\{1, \dots, d\}$. Temos, das equações de Cauchy-Riemann em $\mathbb{C}^n$ que, para $X \in T(\mathbb{C}^n)$, $(X + iJX)(f) = 0$. Logo,

$$N_{j_{m+1}}\{f\} = JX_{j_{m+1}}\{f\} = iX_{j_{m+1}}\{f\},$$

próximo à p_0 em $\mathbb{C}^n$. Assim

$$N_{j_1} \dots N_{j_{m+1}}\{f\} = iN_{j_1} \dots N_{j_m} X_{j_{m+1}}\{f\}.$$

O lado direito é um operador diferencial que envolve apenas m campos vetoriais transversais, portanto é nulo em M, como queríamos mostrar.

Para completar a indução dupla, vamos assumir que: para inteiros $N \geq 0$ e $m \geq 0$, $D^\alpha f = 0$ em M, para $|\alpha| \leq N$ e com D^α envolvendo apenas m campos vetoriais transversais. Também assumiremos que $D^\alpha f = 0$ em M para operadores de qualquer ordem que envolva no máximo $m - 1$ campos vetoriais transversos. Queremos mostrar que $D^\alpha f = 0$ em M para $|\alpha| = N + 1$, com D^α envolvendo m campos vetoriais transversais. Temos dois casos a considerar:

Caso (i). $D^\alpha = T \circ D^{\alpha'}$.

Aqui, T é um campo vetorial tangencial e $D^{\alpha'}$ é um operador diferencial de ordem $|\alpha'| \leq N$, que envolve apenas m campos vetoriais transversais. Neste caso, $D^{\alpha'} f = 0$ em M pela nossa hipótese de indução e assim, $T\{D^{\alpha'} f\} = 0$ em M, como queríamos.

Caso (ii). $D^\alpha = N_j \circ D^{\alpha'}$.

Agora, $N_j = JX_j$ é transverso e $D^{\alpha'}$ é um operador diferencial de ordem $|\alpha'| \leq N$, que envolve apenas $m - 1$ campos vetoriais transversais. Neste caso,

$$\begin{aligned} D^\alpha f &= N_j\{D^{\alpha'} f\} \\ &= D^{\alpha'}\{N_j f\} + [N_j, D^{\alpha'}]\{f\}, \end{aligned}$$

onde [,] denota o comutador. O termo $D^{\alpha'}\{N_j f\}$ é igual a $iD^{\alpha'}\{X_j f\}$ pelas equações de Cauchy-Riemann. Este termo é nulo em M pelas hipóteses de indução, já que $D^{\alpha'}$ envolve apenas $m-1$ campos vetoriais transversais. O segundo termo, $[N_j, D^{\alpha'}]\{f\}$, é um operador diferencial de ordem N e logo é nulo em M, também pelas hipóteses de indução.

Concluímos por indução dupla, que $D^\alpha f = 0$ próximo à p_0 em M para todos os operadores diferenciais, e portanto f é identicamente nula. A prova do lema está completa. $\square$

Apresentaremos duas provas para existência, do Teorema 5.29. A primeira aparenta ser mais simples, mas a segunda pode ser facilmente modificada para lidar com uma versão C^∞ do Teorema 5.29. Ambas as provas ilustram ideias importantes.

Primeira Prova de Existência: Esta prova trata ambos ζ e $\overline{\zeta}$ em $\mathbb{C}^n$ como coordenadas independentes. Vamos mostrar que, uma função CR f, analítica e real, se estende a uma função holomorfa em $\mathbb{C}^{2n}$ (de ζ e $\overline{\zeta}$). Em seguida, usando as equações de Cauchy-Riemann, mostraremos que a extensão de f não depende da coordenada $\overline{\zeta}$ e assim, a restrição a uma função holomorfa em $\mathbb{C}^n$ será a extensão desejada de f.

Agora apresentaremos os detalhes. Dada uma função CR, é suficiente estendê-la holomorficamente em uma vizinhança de um ponto $p_0 \in M$ fixado. A extensão global pode ser obtida ao reunir as extensões locais.

Do Lema 4.14, podemos assumir que p_0 é a origem e

$$M = \{(z = x + iy, w) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d};\ y = h(x, w)\}.$$

com $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \to \mathbb{R}^d$ analíca e real em uma vizinhança da origem e $Dh(0) = 0$. Agora, do Teorema 4.17, uma base local para $H^{0,1}(M)$ é dada por

$$\overline{L}_j = -2i \sum_{l=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} \mu_{lk} \frac{\partial h_k}{\partial \overline{w}_j} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_l} + \frac{\partial}{\partial \overline{w}_j}, \qquad 1 \leq j \leq n-d,$$

com μ_{lk} sendo a (l,k)-ésima entrada da matrix $(I + i(\partial h/\partial x))^{-1}$.

Como h é uma função analítica, real e linear na origem, h pode ser expressa em uma série de potências nas variáveis $z, \overline{z} \in \mathbb{C}^d$ e $w, \overline{w} \in \mathbb{C}^{n-d}$. Substituindo $\overline{z}$ pela variável independente $\zeta \in \mathbb{C}^d$ e $\overline{w}$ pela variável independente $\eta \in \mathbb{C}^{n-d}$ na série de potências para h, obtemos uma função holomorfa $\widetilde{h} : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^{n-d} \to \mathbb{C}^d$, com $\widetilde{h}(z, \overline{z}, w, \overline{w}) = h(x, w)$. Defina

$$M_{\mathbb{C}} = \{(z, \zeta, w, \eta) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^{n-d};\ \frac{1}{2i}(z - \zeta) = \widetilde{h}(z, \zeta, w, \eta)\}.$$

Defina também $\Delta : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \to \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^{n-d}$ sendo

$$\Delta(z, w) = (z, \overline{z}, w, \overline{w}).$$

O espaço $M_{\mathbb{C}}$ é uma subvariedade de $\mathbb{C}^{2n}$ com dimensão complexa $2n - d$. Além disso, $\Delta\{M\}$ é mergulhado como uma subvariedade totalmente real de $M_{\mathbb{C}}$.

Se $f : M \to \mathbb{C}$ é uma função analítica e real em M, então, pelo procedimento anterior de substituir $\overline{z}$ por ζ e $\overline{w}$ por η na expansão em séries de potências de f, produzimos uma função holomorfa $\widetilde{f} : M_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, tal que, $\widetilde{f} \circ \Delta = f$. Analogamente, os coeficientes analíticos reais de $\overline{L}_j$ podem ser estendidos holomorficamente para campos vetoriais $\widetilde{L}_1, \ldots, \widetilde{L}_{n-d} \in T^{1,0}(M_{\mathbb{C}})$ com

$$\widetilde{L}_j = -2i \sum_{l=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} \mu_{lk}(z, \zeta, w, \eta) \frac{\partial \widetilde{h}_k}{\partial \overline{\eta}_j} \frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}_l} + \frac{\partial}{\partial \overline{\eta}_j}, \qquad 1 \leq j \leq n - d. \tag{5.7}$$

Como $\widetilde{f}$ é holomorfa, temos $(\widetilde{L}_j \widetilde{f}) = \Delta_* \overline{L}_j\{\widetilde{f}\}$ em $\Delta\{M\}$. Se f é CR, então

$$\begin{aligned} (\widetilde{L}_j \widetilde{f}) \circ \Delta &= \overline{L}\{\widetilde{f} \circ \Delta\} \\ &= \overline{L}_j f = 0 \quad \text{em} \quad M. \end{aligned}$$

Como $\Delta\{M\}$ é uma subvariedade genérica de dimensão real igual a $2n - d$ de $M_{\mathbb{C}}$, temos, pelo Lema 5.30,

$$\widetilde{L}_j \widetilde{f} \equiv 0 \quad \text{em} \quad M_{\mathbb{C}}. \tag{5.8}$$

Cada Vetor $\partial / \partial \zeta_j$ é transverso para $M_{\mathbb{C}}$ pois $D\widetilde{h}(0) = 0$. Defina $\widetilde{F} : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^{n-d} \to \mathbb{C}$ sendo a extensão de $\widetilde{f} : M_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ que é independente de ζ. Assim

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \zeta_j} = 0 \quad \text{próximo à origem}, \quad 1 \leq j \leq d. \tag{5.9}$$

Também desejamos que

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \eta_j} = 0 \quad \text{próximo à origem}, \quad 1 \leq j \leq n - d. \tag{5.10}$$

Para mostrar isto, notemos que

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_j} \left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \eta_j} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta_j} \left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \zeta_j} \right) = 0.$$

Com o que vimos em (5.7) e (5.9), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \eta_j} &= \widetilde{L}_j \widetilde{F} \quad \text{em} \quad M_{\mathbb{C}}, \quad 1 \le j \le n-d \\ &= 0 \quad \text{em} \quad M_{\mathbb{C}} \quad (\text{ por } (5.8)).\end{aligned}$$

Finalmente, a extensão holomorfa de f em $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}$ é obtida fazendo $F = \widetilde{F} \circ \Delta$. De (5.9) e (5.10), $\widetilde{F}$ é independente de ζ e η, logo a série de potências de F é independente de $\overline{z}$ e $\overline{w}$. Portanto, F é holomorfa em uma vizinhança da origem em $\mathbb{C}^n$. Além disso, $F|_M = f$, pois

$$\begin{aligned}F|_M &= (\widetilde{F} \circ \Delta)|_M \\ &= (\widetilde{f} \circ \Delta)|_M \\ &= f.\end{aligned}$$

$\square$

Segunda Prova de Existência: Esta prova é baseada em ideias vistas em um documento de Baouendi, Jacobowitz e Treves. Começaremos novamente apresentando M próximo à origem na forma

$$M = \{(x + iy, w) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d};\ y = h(x, w)\},$$

com h analíca e real, $h(0) = 0$ e $Dh(0) = 0$. Se $h \equiv 0$, então uma função CR analítica real, próximo da origem, é uma série de potências em x e w (não em $\overline{w}$). A extensão holomorfa desejada é obtida substituindo x por $z = x + iy$ em sua série de potências. Queremos imitar este procedimento, tanto quanto for possível, para o caso geral. O problema é que, geralmente, uma função CR analítica real é dependente de $\overline{w}$. No entanto, sua dependência de $\overline{w}$ está intimamente ligada com a dependência da série de potências de h em $\overline{w}$. Em vez de deixar $\overline{w}$ sendo uma coordenada complexa independente como na primeira prova, devemos mudar a estrutura complexa para $\mathbb{C}^n$ de modo a tornar h holomorfa.

Agora apresentaremos os detalhes. Na série de potências de h, substituímos x por z. Então h é definida em $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}$ e $h(z, w)$ é holomorfa em z próximo à origem. Definamos $H : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \to \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}$ como sendo

$$H(z, w) = (z + ih(z, w), w).$$

Seja $H_1, \ldots, H_n$ as funções componentes de H. Usaremos $H = (H_1, \ldots, H_n)$ como um sistema de coordenadas para definir uma nova estrutura complexa para $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}$. Uma função g é holomorfa com respeito a nova estrutura complexa se existe uma função holomorfa G, no sentido usual, tal que $g = G \circ H$. Esta estrutura complexa concorda com a estrutura complexa usual nas variáveis z pois H é holomorfa em $z \in \mathbb{C}^d$ no sentido usual.

Os campos vetorial $T^{0,1}$ para a nova estrutura complexa, são aqueles campos vetoriais que são nulos nas funções coordenadas $H_1, \dots, H_n$.

Lema 5.31. *Uma base local para o fibrado $T^{0,1}(\mathbb{C}^n)$ na nova estrutura complexa é dada por*

$$\Lambda_j = -i \sum_{k,l=1}^{d} \mu_{lk}(z,w) \frac{\partial h_k}{\partial \overline{w}_j}(z,w) \frac{\partial}{\partial z_l} + \frac{\partial}{\partial \overline{w}_j}, \qquad 1 \le j \le n-d,$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}, \quad 1 \le j \le d,$$

onde μ_{lk} é a (l,k)-ésima entrada da matriz $d \times d$, $[I + i(\partial h/\partial z)]^{-1}$.

Demonstração. Para provar esse lema, basta notarmos que, para cada $1 \le l \le n$,

$$\Lambda_j\{H_l\} = 0 \quad \text{para} \quad 1 \le j \le n-d, \quad \text{e}$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\{H_l\} = 0 \quad \text{para} \quad 1 \le j \le d.$$

Além disso, esses campos vetoriais são linearmente independentes próximo à origem, pois $Dh(0) = 0$. □

Seja $H_0 = H|_{\{\mathrm{Im}\, z=0\}}$. A aplicação $H_0 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \to M$ é uma parametrização para M. Defina $\pi : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d}$ a projeção dada por $\pi(x+iy, w) = (x, w)$. Assim, $\pi|_M$ é o inverso de H_0.

Segue do Teorema 4.17, que uma base local para $H^{0,1}(M)$ é dada por

$$\overline{L}_j = -2i \sum_{k,l=1}^{d} \mu_{lk} \frac{\partial h_k}{\partial \overline{w}_j} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_l} + \frac{\partial}{\partial \overline{w}_j}, \qquad 1 \le j \le n-d,$$

onde μ_{lk} é a (l,k)-ésima entrada da matrix $[I + i(\partial h/\partial x)]^{-1}$. Uma função C^1, $f : M \to \mathbb{C}$, é CR em M se, e somente se, $\overline{L}_j f = 0$, $1 \le j \le n-d$. Isso é equivalente a $\pi_* \overline{L}_j\{f \circ H_0\} = 0$ em $\mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d}$ pois $H_0 \circ \pi$ é a função identidade em M. O campo vetorial $\pi_* \overline{L}_j$ pode ser computado usando $\pi_*(\partial/\partial y_j) = 0$, $\pi_*(\partial/\partial x_j) = \partial/\partial x_j$ e $\pi_*(\partial/\partial \overline{w}_j) = \partial/\partial \overline{w}_j$. Assim, temos

$$\pi_* \overline{L}_j = -i \sum_{k,l=1}^{d} \mu_{lk} \frac{\partial h_k}{\partial \overline{w}_j} \frac{\partial}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial \overline{w}_j}, \qquad 1 \le j \le n-d.$$

Suponha $f : M \to \mathbb{C}$ uma função CR analítica real. Seja $f_0 = f \circ H_0 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \to \mathbb{C}$. A função f_0 é uma função analítica real de $x \in \mathbb{R}^d$ e $w \in \mathbb{C}^{n-d}$. Seja $F_0 : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \to \mathbb{C}$ a extensão de f_0 obtida pela substituição de x por $z = x + iy$ na expansão em séries de potências de f_0 sobre a origem. Como F_0 e h são holomorfas em $z \in \mathbb{C}^d$, temos $\partial h/\partial z_k = \partial h/\partial x_k$,

$\partial F_0/\partial z_k = \partial F_0/\partial x_k$. Comparando as expressões para Λ_j e $\pi_* \overline{L}_j$, obtemos

$$\Lambda_j F_0|_{\{\mathrm{Im}\, z=0\}} = \pi_* \overline{L}_j\{f_0\} = 0.$$

Como $\Lambda_j F_0$ é holomorfa em $z \in \mathbb{C}^d$ e se anula em $\{\mathrm{Im}\ z = 0\}$, $\Lambda_j F_0$ também é identicamente nula.

Agora, como $\Lambda_j F_0 = 0$ e $\partial F_0/\partial \overline{z}_k = 0$, a função F_0 é holomorfa com respeito à nova estrutura complexa. Portanto, existe uma função $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ que é holomorfa no sentido usual, definida em uma vizinhança da origem, com $F_0 = F \circ H$. A restrição de F em M é f, pois $f \circ H_0 = F \circ H_0$ em $\{\mathrm{Im}\ z = 0\}$. A segunda prova de existência para o Teorema 5.29 está completa.

□

Teorema 5.32. *Suponha M uma subvariedade CR, genérica e C^∞ de $\mathbb{C}^n$ com dimensão real $2n - d$, $1 \leq d \leq n$. Se f é uma função CR e C^∞ em M, então existe uma função C^∞, F, definida em $\mathbb{C}^n$ tal que $\overline{\partial} F$ é nula em M na ordem infinita e $F|_M = f$. F é um módulo único no espaço das funções que se anulam na ordem infinita em M.*

Se M ou f são somente de classe C^k, $k \geq 2$, então uma simples modificação da prova produz uma extensão C^k, F, tal que $\overline{\partial} F$ é nula em M na ordem $k - 1$.

O ingrediente chave na prova do Teorema 5.29 é o fato de que uma função analítica real $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ é, localmente, a restrição de uma função holomorfa $\Phi : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$. Na prova do Teorema 5.32 vamos substituir essa ideia com o lema seguinte.

Lema 5.33.

(a) Seja $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, $d \geq 1$, uma função C^∞. Então, existe uma função C^∞, $\Phi : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$, tal que $\overline{\partial}\Phi$ é nula na ordem infinita em $\{Im\ z = 0\}$ e $\Phi = \phi$ em $\{Im\ z = 0\}$.

(b) A função Φ, da parte (a), é módulo único no espaço das funções suaves que se anulam na ordem infinita em $\{Im\ z = 0\}$.

Demonstração. Seja $z = x + iy$. O requerimento de $\Phi = \phi$ em $\{y = 0\}$ determina todas as x-derivadas de Φ, em $\{y = 0\}$. Enquanto que, $\overline{\partial}\Phi$ se anular na ordem infinita em $\{y = 0\}$ é equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial y_j} - i\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right\} = 0 \quad \text{em} \quad \{y = 0\}, \quad 1 \leq j \leq d, \tag{5.11}$$

para todo índice α. Esta equação determina indutivamente todas as y-derivadas de Φ, em $\{y = 0\}$. Assim o item (a) segue do Teorema de Extensão de Whitney.

Para o item (b), se Φ se anula em $\{y = 0\}$, então todas as x-derivadas de Φ se anulam em $\{y = 0\}$. Se $\overline{\partial}\Phi$ se anula na ordem infinita em $\{y = 0\}$, então de (5.11) e indução, temos que todas as derivadas (em x e y) de Φ se anulam em $\{y = 0\}$. □

Demonstração do Teorema 5.32: A prova da Unicidade é similar à prova do Lema 5.30. O argumento a ser mostrado é o seguinte: se $F = 0$ em M e $\overline{\partial} F$ é nula na ordem infinita em M, então todas as derivadas de F também se anulam em M.

A prova de Existência é análoga à Segunda Prova de Existência do Teorema 5.29. Vamos organizar as ideias. A função gráfico h de M pode ser estendida para $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}$ como função suave de modo que $\overline{\partial}_z h$ e $\overline{\partial}_z H$ sejam nulas na ordem infinita em $\{\text{Im } z = 0\}$ pelo Lema 5.33. Como antes, usaremos $H = (H_1, \ldots, H_n)$ para definir uma nova estrutura complexa para $\mathbb{C}^n$. O Lema 5.31 exibe uma base local $\{\Lambda_j, \partial/\partial\overline{z}_j\}$ que, para o fibrado $T^{0,1}$ nesta nova estrutura complexa, ainda é válido. Para uma função CR suave em M, seja $f_0 = f \circ H|_{\{\text{Im } z=0\}}$. Estendamos f_0 para $F_0 : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \to \mathbb{C}$ de modo que $\overline{\partial}_z F_0$ seja nula para ordem infinita em $\{\text{Im } z = 0\}$. O resultado que $\Lambda_j F_0$ é nula em $\{\text{Im } z = 0\}$ é ainda válida. Como $\overline{\partial}_z h$ e $\overline{\partial}_z F_0$ são nulas na ordem infinita em $\{\text{Im } z = 0\}$, $\overline{\partial}_z\{\Lambda_j F_0\}$ também é nula na ordem infinita em $\{\text{Im } z = 0\}$. Segue do Lema 5.33 que $\Lambda_j F_0$ é nula na ordem infinita em $\{\text{Im } z = 0\}$. Portanto, ambos $\Lambda_j F_0$ e $\partial F_0/\partial\overline{z}_j$ são nulas na ordem infinita em $\{\text{Im } z = 0\}$.

Como $H : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \to \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}$ é um difeomorfismo próximo à origem, podemos definir

$$F = F_0 \circ H^{-1}.$$

Como visto anteriormente, $F|_M = f$ pois $F \circ H|_{\{\text{Im } z=0\}} = f_0 = f \circ H|_{\{\text{Im } z=0\}}$. Resta mostrar que $\overline{\partial} F$ é nula em ordem infinita em M. Isto é equivalente a mostrar que $\overline{L} F$ é nula em ordem infinita em M para todo $\overline{L}$ pertencente a $T^{0,1}(\mathbb{C}^n)$ para a estrutura complexa usual de $\mathbb{C}^n$. Nós já sabemos que $\overline{L} F_0$ é nula em ordem infinita em $\{\text{Im } z = 0\}$ para todo $\overline{L}$ no fibrado $T^{0,1}$ para a nova estrutura complexa de $\mathbb{C}^n$. Como $H : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é o sistema de coordenadas para a nova estrutura complexa, a aplicação push forward em H^{-1} manda o fibrado $T^{0,1}$ na estrutura complexa usual de $\mathbb{C}^n$ para o fibrado $T^{0,1}$ na nova estrutura complexa de $\mathbb{C}^n$. Então, $(H_*^{-1}\overline{L})F_0$ é nula na ordem infinita em $\{\text{Im } z = 0\}$ para todo $\overline{L}$ em $T^{0,1}$ para a estrutura complexa usual de $\mathbb{C}^n$. Como $F = F_0 \circ H^{-1}$, concluímos que $\overline{L} F$ é nula em ordem infinita em M para todo $\overline{L}$ no fibrado $T^{0,1}$ para a estrutura complexa usual de $\mathbb{C}^n$. A Prova do Teorema 5.32 está completa.

□

5.5 Aplicações CR

Suponha M e N variedades CR e $f : M \to N$ uma função C^1. Se o espaço de destino N é uma subvariedade CR de $\mathbb{C}^m$, então f tem funções componentes $f_1, \ldots, f_m$. Nesse caso, é razoável chamar f de uma aplicação CR se cada uma de suas funções componentes são funções CR. Esta definição precisa ser modificada caso não se tenha N mergulhado em $\mathbb{C}^m$. Para encontrar essa definição, vamos examinar mais de perto o caso onde M e N são subvariedades CR de $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^m$, respectivamente.

Segue do Teorema 5.32 que, podemos estender $f = (f_1, \ldots, f_m) : M \to N$ para a função $F = (F_1, \ldots, F_m)$ definida em $\mathbb{C}^n$ tal que $\overline{\partial} F_j = 0$ em M, $1 \leq j \leq m$. Então, para $p \in M$, $F_*(p)$ é uma função de $T_p^{1,0}(\mathbb{C}^n)$ em $T_{F(p)}^{1,0}(\mathbb{C}^n)$ e de $T_p^{0,1}(\mathbb{C}^n)$ em $T_{F(p)}^{0,1}(\mathbb{C}^n)$. Além disso, $F_*(p)$ é também função de $T_p^{\mathbb{C}}(M)$ em $T_{F(p)}^{\mathbb{C}}(N)$, pois F é uma função de M em N. Portanto, para $p \in M$, $F_*(p)$ é uma função de $H_p^{1,0}(M)$ em $H_{F(p)}^{1,0}(N)$ e de $H_p^{0,1}(M)$ em $H_{F(p)}^{0,1}(N)$. Dada uma estrutura CR abstrata $(M, \mathcal{V})$, o subfibrado $\mathcal{V}$ toma o lugar de $H^{1,0}(M)$. Isto motiva a definição seguinte.

Definição 5.34. *Suponha $(M, \mathcal{V}_M)$ e $(N, \mathcal{V}_N)$ estruturas CR. Uma função C^1, $f : M \to N$, é chamada aplicação CR se $f_*\{\mathcal{V}_M\} \subset \mathcal{V}_N$.*

A extensão de f_* em $T^{\mathbb{C}}(M)$ satisfaz $f_*(\overline{L}) = \overline{f_*(L)}$ para todo $L \in T^{\mathbb{C}}(M)$. Portanto, a Definição 5.34 é equivalente ao requerimento $f_*\{\overline{\mathcal{V}}_M\} \subset \overline{\mathcal{V}}_N$. Em particular, $f_*\{\mathcal{V}_M \oplus \overline{\mathcal{V}}_M\} \subset \mathcal{V}_N \oplus \overline{\mathcal{V}}_N$.

Lema 5.35. *Suponha $(M, \mathcal{V})$ uma estrutura CR. Uma função C^1, $f = (f_1, \dots, f_m) : M \to \mathbb{C}^m$, é uma aplicação CR se, e somente se, cada f_j é uma função CR.*

Demonstração. Nosso objetivo é a estrutura CR $(\mathbb{C}^m, T^{1,0}(\mathbb{C}^m))$. A função f é CR se, e somente se, $f_*(\overline{L})$ pertence a $T^{0,1}(\mathbb{C}^m)$, para cada $\overline{L} \in \overline{\mathcal{V}}$. Dado $1 \leq j \leq m$, seja z_j a j-ésima função coordenada de $\mathbb{C}^m$. Temos

$$(f_*(\overline{L})\{z_j\}) \circ f = \overline{L}\{z_j \circ f\} = \overline{L}\{f_j\}.$$

Dessa forma, segue que $f_*(\overline{L})$ pertence a $T^{0,1}(\mathbb{C}^m)$ se, e somente se, $\overline{L}\{f_j\} = 0$, para todo $1 \leq j \leq m$. A prova do lema segue do item (a) do Lema 5.27. $\square$

Defina o subfibrado $H(M) = \{L + \overline{L};\ L \in \mathcal{V}_M\}$, no fibrado tangente real de M. No Lema 1.70 construímos uma função estrutura complexa $J : H(M) \to H(M)$ de forma que sua extensão em $H^{\mathbb{C}}(M) = \mathcal{V} \oplus \overline{\mathcal{V}}$ tem auto-espaços $\mathcal{V}$ e $\overline{\mathcal{V}}$, que correspondem aos autovalores $+i$ e $-i$. O teorema a seguir oferece uma caracterização alternativa de uma aplicação CR em termos de f_* em $H(M)$ e da função J.

Teorema 5.36. *Suponha $(M, \mathcal{V}_M)$ e $(N, \mathcal{V}_N)$ estruturas CR. Sejam $J_M : H(M) \to H(M)$ e $J_N : H(N) \to H(N)$ as funções estruturas complexas associadas, respectivamente. Uma função C^1, $f : M \to N$, é uma aplicação CR se, e somente se, $f_*(p)\{H_p(M)\} \subset H_{f(p)}(N)$ para todo $p \in M$, e $J_N \circ f_*(p) = f_*(p) \circ J_M$ em $H_p(M)$.*

Demonstração. Primeiramente, vamos assumir f uma aplicação CR como na Definição 5.34. Se $L \in \mathcal{V}_M$, então

$$f_*(L + \overline{L}) = f_*(L) + \overline{f_*(L)}.$$

Como $f_*(L) \in \mathcal{V}_N$, segue que $f_*(L + \overline{L})$ é um elemento de $H(N)$. Além disso, $\mathcal{V}_M$ e $\overline{\mathcal{V}}_M$ são os auto-espaços $+i$ e $-i$ de J_M. Portanto

$$\begin{aligned} f_*(J_M(L + \overline{L})) &= f_*(iL - i\overline{L}) \\ &= i(f_*(L) - \overline{f_*(L)}). \end{aligned}$$

O elemento $f_*(L)$ pertence a $\mathcal{V}_N$, que é o auto-espaço $+i$ de J_N, logo

$$f_*(J_M(L+\overline{L})) = J_N(f_*(L+\overline{L})).$$

Portanto, $f_* \circ J_M = J_N \circ f_*$ em $H(M)$, como queríamos. Reciprocamente, para cada elemento $L \in \mathcal{V}_M$, podemos escrever

$$L = X - iJ_M X,$$

com $X = \dfrac{1}{2(L+\overline{L})} \in H(M)$. Deste modo,

$$\begin{aligned} f_*(L) &= f_*(X) - if_*(J_M X) \\ &= f_*(X) - iJ_N f_*(X). \end{aligned} \tag{5.12}$$

Sabemos também que $\mathcal{V}_N$ é gerado pelos vetores do tipo $Y - iJ_N Y$, com $Y \in H(N)$. Como $f_*(X)$ pertence a $H(N)$, segue da Equação 5.12 que $f_*(L)$ pertence a $\mathcal{V}_N$. A prova do teorema está completa. $\square$

A partir de agora, vamos mudar nossa atenção do *push forward* de vetores para o *pull back* de formas via aplicação CR. Para isso, necessitamos do seguinte lema.

Lema 5.37. *Suponha $F : M \to N$ é uma aplicação CR entre as estruturas CR $(M, \mathcal{V}_M)$ e $(N, \mathcal{V}_N)$. Então,*

(a) $F^*\{T^{*^{1,0}}(N)\} \subset T^{*^{1,0}}(M)$;

(b) Se $p, q \geq 0$, então

$$F^*\{\Lambda^{p,q}T^*(N)\} \subset \Lambda^{p,q}T^*(N) \oplus \ldots \oplus \Lambda^{p+r,q-r}T^*(N),$$

onde $r = \min\{q, n-p\}$ com $n = \dim_{\mathbb{C}} T^{*^{1,0}}(M)$.

Demonstração. Para provar o item (a), tomemos $\phi \in T^{*^{1,0}}(N)$. Devemos mostrar que,

$$\left\langle F^*\phi, \overline{L}\right\rangle = 0,$$

para todo $\overline{L} \in T^{0,1}(M) = \overline{\mathcal{V}}_M$. Como F é aplicação CR, $F_*\overline{L}$ é um elemento de $\overline{L}_N = T^{0,1}(N)$ e então $0 = \left\langle \phi, F_*\overline{L}\right\rangle = \left\langle F^*\phi, \overline{L}\right\rangle$, como queríamos.

Para o item (b), podemos escrever um elemento de $\Lambda^{p,q}T^*(N)$ na forma

$$\phi = \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_p \wedge \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_q,$$

com $\phi_i \in T^{*^{1,0}}(N)$, $1 \leq i \leq p$, e $\psi_j \in T^{*^{0,1}}(N)$, $1 \leq j \leq q$. O resultado segue aplicando o item (a). $\square$

Teorema 5.38. *Suponha M e N variedades CR e $F : M \to N$ aplicação CR. Então,*

$$\overline{\partial}_M \circ \pi_M^{p,q} \circ F^* = \pi_M^{p,q+1} \circ F^* \circ \overline{\partial}_N$$

são funções de $\mathcal{E}_N^{p,q}$ em $\mathcal{E}_M^{p,q+1}$.

Demonstração. Seja ϕ um elemento de $\mathcal{E}_N^{p,q}$. Segue do Lema 5.37 que

$$\pi^{p,q} F^* \phi = F^* \phi - [\phi_M^{p+1,q-1}(F^*\phi) + \ldots + \pi_M^{p+r,q-r}(F^*\phi)].$$

Da definição de $\overline{\partial}_M$, temos

$$\overline{\partial}_M(\pi^{p,q} F^* \phi) = \pi_M^{p,q+1}(d_M F^* \phi) - \pi_M^{p,q+1} \left\{ \sum_{j=1}^{r} d_M(\pi_M^{p+j,q-j} F^* \phi) \right\}. \tag{5.13}$$

Agora, do Lema 5.3 sabemos que

$$d_M\{\pi_M^{p+j,q-j} F^* \phi\} \in \mathcal{E}_M^{p+j+2,q-j-1} \oplus \mathcal{E}_M^{p+j+1,q-j} \oplus \mathcal{E}_M^{p+j,q-j+1}.$$

Como $j \geq 1$, o somatório do lado direito da Equação 5.13 se anula. Portanto

$$\overline{\partial}_M(\pi^{p,q} F^* \phi) = \pi_M^{p,q+1}(d_M F^* \phi).$$

Usando o fato que d_M comuta com F^*, obtemos

$$\overline{\partial}_M(\pi^{p,q} F^* \phi) = \pi_M^{p,q+1}(F^* d_N \phi). \tag{5.14}$$

Novamente do Lema 5.3 e da definição de $\overline{\partial}_N$, temos

$$d_N \phi = \overline{\partial}_N \phi + [\pi_N^{p+1,q}(d_N \phi) + \pi_N^{p+2,q-1}(d_N \phi)]. \tag{5.15}$$

Pelo Lema 5.37, $F^*(\pi_N^{p+1,q}(d_N\phi))$ é um somatório de termos com bigral do tipo $(p+1+j, q-j)$, para $0 \leq j \leq \min(q, n-p-1)$. Em particular $\pi_M^{p,q+1}(F^* \pi_N^{p+1,q}(d_N \phi)) = 0$. Analogamente, $\pi_M^{p,q+1}(F^* \pi_N^{p+2,q-1}(d_N \phi)) = 0$.

Estes dois resultados junto das equações 5.14 e 5.15 resulta

$$\overline{\partial}_M \pi_M^{p,q} F^* \phi = \pi_M^{p,q+1} F^* d_N \phi = \pi_M^{p,q+1} F^* \overline{\partial}_N \phi.$$

Portanto, a prova do teorema está completa. □

Definição 5.39. *Duas estruturas CR, $(M, \mathcal{V}_M)$ e $(N, \mathcal{V}_N)$, são ditas CR equivalentes se existe um CR difeomorfismo entre M e N.*

Definição 5.40. *Seja $(M, \mathcal{V}_M)$ uma estrutura CR. O Complexo Tangencial de Cauchy-Riemann é dito ser solúvel em bigral (p, q) em M se, para toda forma $f \in \mathcal{E}_M^{p,q}(M)$ com $\overline{\partial}_M f = 0$, existe uma forma $u \in \mathcal{E}_M^{p,q-1}(M)$ tal que $\overline{\partial}_M u = f$.*

Corolário 5.41. *Sejam $(M, \mathcal{V}_M)$ e $(N, \mathcal{V}_N)$ estruturas CR equivalentes. O Complexo Tangencial de Cauchy-Riemann é solúvel em bigral (p, q) em M se, e somente se, o mesmo acontece para N.*

Demonstração. Suponha $F : M \to N$ um difeomorfismo CR e f um elemento de $\mathcal{E}_N^{p,q}(N)$ com $\overline{\partial}_N f = 0$. Do Teorema 5.38, temos

$$\overline{\partial}_M(\pi_M^{p,q} F^* f) = \pi_M^{p,q+1} F^* \overline{\partial}_N f = 0 \qquad \text{em} \qquad M.$$

Se $\overline{\partial}_M$ é solúvel em bigral (p, q) em M, então existe uma forma $u \in \mathcal{E}_M^{p,q-1}(M)$ tal que

$$\overline{\partial}_M u = \pi_M^{p,q} F^* f.$$

Aplicando $\pi_N^{p,q} \circ F^{-1*}$ e usando o Teorema 5.38 com N no lugar de M e F^{-1} no lugar de F, obtemos

$$\overline{\partial}_N\{\pi_N^{p,q-1}(F^{-1*}u)\} = \pi_N^{p,q}(F^{-1*}\pi_M^{p,q} F^* f). \tag{5.16}$$

Agora, segue do Lema 5.37 que

$$(\pi_M^{p,q} F^* f) = F^* f - \left(\sum_{j=1}^{r} \pi_M^{p+j,q-j}(F^* f) \right),$$

com $r = \min(q, n - p)$. Aplicando $\pi_N^{p,q} \circ F^{-1*}$ e usando o Lema 5.37 com F^{-1} no lugar de F, obtemos

$$\begin{aligned} \pi_N^{p,q}(F^{-1*}(\pi_M^{p,q} F^* f)) &= \pi_N^{p,q} F^{-1*} F^* f \\ &= \pi_N^{p,q}(f) \\ &= f, \end{aligned} \tag{5.17}$$

pois $f \in \mathcal{E}_N^{p,q}$. Substituindo a Equação 5.17 na Equação 5.16, resulta

$$\overline{\partial}_N\{\pi_N^{p,q-1}(F^{-1*}u)\} = f \qquad \text{em} \qquad N,$$

como queríamos mostrar. A volta se faz de forma análoga. $\square$

CONCLUSÃO

No presente trabalho, estabelecemos a conexão entre dois conceitos de grande valor na matemática moderna: as variedades diferenciáveis e a análise complexa. Obtemos como resultado a teoria de Cauchy-Riemann, a saber: as variedades CR, o complexo tangencial, as funções CR e as aplicações CR. No momento, temos uma boa base de estudos desta teoria, com diversos ramos a serem seguidos.

Como foi comentado, o Complexo Tangencial de Cauchy-Riemann desempenha nas variedades CR o mesmo papel do operador de Cauchy-Riemann para espaços complexos. Analogamente, as funções CR desempenham o papel das funções holomorfas. Isto posto, é natural seguir na teoria das variedades CR generalizando a análise complexa. Por exemplo, empenhar-se em formular teoremas para as funções CR fazendo analogias a teoremas importantes para funções holomorfas, como é o caso do Teorema da Identidade cuja versão para funções CR é o Lema 5.30.

Ao fazer a restrição de uma função holomorfa em $\mathbb{C}^n$ para uma subvariedade CR, obtemos uma função CR. Entretanto, a volta nem sempre é verdadeira. Nos teoremas 5.29 e 5.32 vimos algumas hipóteses necessárias para que exista uma extensão de uma função CR que seja holomorfa em $\mathbb{C}^n$. Quais destas hipóteses são realmente necessárias? Existem mais variações para estes teoremas? É possível propor uma equação diferencial parcial a partir deste problema? Os matemáticos tentam com muito afinco responder estas perguntas, oportunizando a evolução e o surgimento da teoria.

REFERÊNCIAS

[1] BERNARU, S., CORDARO, P. D., AND HOUNIE, J. *An Introduction to Involutive Structures*. Cambridge University Press: New York, 1a edição, 2008.

[2] BOGGESS, A. *CR Manifolds and the Tangential Cauchy-Riemann Complex*. Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1991.

[3] CHIRKA, E. M. *Introduction to the Geometry of CR-manifolds*. Russin Mathematical Surveys, 1991.

[4] HORMANDER, L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*. Classics in mathematics. Springer, 1990.

[5] HOUNIE, J. *Teoria Elementar das Distribuições*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, Rio de janeiro, 1979.

[6] LIMA, E. L. *Curso de Análise, Volume 2*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, Rio de Janeiro, 2014.

[7] LORING, W. T. *An Introduction to Manifolds*. Second Edition. Springer New York Dordrecht Heidelberg, London, 2010.

[8] PEREIRA, E. M. *Uma propriedade das funções e distribuições anuladas por uma estrutura localmente integrável*. Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.