



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

PAULO FERNANDO MERCADANTE DAMAZIO

**INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS DE ESTABILIDADE E
APLICAÇÕES EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS**

Londrina

2023

PAULO FERNANDO MERCADANTE DAMAZIO

**INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS DE ESTABILIDADE E
APLICAÇÕES EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Antonio Jorge da
Silva
Co-orientador: Prof. Dr. Wellington José Corrêa

Londrina
2023

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da
Universidade Estadual de Londrina**

Dados Internacionais de Catalogação -na-Publicação (CIP)

Damazio, Paulo Fernando Mercadante.

Introdução aos Métodos de Estabilidade e Aplicações em Equações Diferenciais
/

Paulo Fernando Mercadante Damazio. – Londrina, 2023.

136 f. : il.

Orientador: Márcio Antonio Jorge da Silva.

Coorientador: Wellington José Corrêa.

Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2023.

Inclui Bibliografia.

1. Equações Diferenciais - Tese. 2. Análise de Estabilidade - Tese. 3. Funcional de Liapunov - Tese. I. da Silva, Márcio Antonio Jorge. II. Corrêa, Wellington José. III. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. IV. Título.

CDU 51

PAULO FERNANDO MERCADANTE DAMAZIO

INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS DE ESTABILIDADE E APLICAÇÕES EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Wellington José Corrêa
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dr. André Vicente
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Prof. Dr. Janaina Pedroso Zanchetta
Universidade Estadual de Maringá

Londrina, 07 de MARÇO de 2023.

Dedico este trabalho a Deus, pois me deu força, coragem, disciplina e, principalmente, apoio através de pessoas muito estimadas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em especial, à Deus por me conduzir no sentido certo.

À minha noiva, Thaís, que por conhecer a realidade de uma vida universitária e por seu grande coração, teve um papel importantíssimo na minha caminhada e permaneceu ao meu lado nesta etapa de minha vida.

À meus pais, Paulo e Fernanda, os quais sempre me apoiaram a seguir meu sonho nesta área. Sem dúvida, muito do que sou hoje é graças a eles.

À minha irmã, Giuliene, que apesar dos desentendimentos comuns entre irmãos, conseguiu oferecer o apoio que eu precisava em momentos difíceis.

À Rafaella, uma amizade construída na graduação e que lutou ao meu lado durante os quatro anos e, posteriormente no Mestrado, travou suas próprias batalhas enquanto eu travava as minhas, e neste período de dois anos, se mostrou ser aquela amiga com quem se pode contar.

Ao Rafael, que nos ajudou com demonstrações "pesadas" na parte de estabilidade.

À meu orientador Márcio Antonio Jorge da Silva, o qual não mediu esforços para sanar minhas dúvidas desde a graduação nas disciplinas de Análise Real, Teoria da Medida e Integral de Lebesgue. Sem dúvida, um exemplo de pessoa, de professor e de orientador. Será meu norte sobre como ser um profissional na área.

À meu co-orientador Wellington José Corrêa, o qual lutou por mim nesta reta final do curso.

Por fim, ao próprio PGMAC, o qual atingiu e superou todas as minhas expectativas.

DAMAZIO, Paulo Fernando Mercadante. **Introdução aos Métodos de Estabilidade e Aplicações em Equações Diferenciais**. 2023. 136. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2023.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é introduzir e desenvolver a teoria de estabilidade e seu estudo via o método de Liapunov. Para isto, o texto iniciará com conceitos básicos de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) e alguns resultados como Existência e Unicidade de solução. Posteriormente, contemplará as definições clássicas de estabilidade (uniforme e assintótica). Ainda, abordará o funcional de Liapunov e os resultados que o relacionam com o comportamento da solução de EDO's. Por fim, estes resultados serão aplicados em problemas pertencentes à outras áreas de estudo (Biologia, Física, ...) que são descritos por EDO's.

Palavras-chave: Equação Diferencial Ordinária. Estabilidade. Liapunov.

DAMAZIO, Paulo Fernando Mercadante. **Introduction to Stability Methods and Applications in Differential Equations**. 2023. 136. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2023.

ABSTRACT

The objective of this work is to introduce and develop the theory of stability and its study through Lyapunov's method. To achieve this, the text will begin with basic concepts of Ordinary Differential Equations (ODEs) and some results such as Existence and Uniqueness of solutions. Subsequently, it will cover the classical definitions of stability (uniform and asymptotic). Additionally, it will address the Lyapunov functional and the results that relate it to the behavior of solutions of ODEs. Finally, these results will be applied to problems belonging to other areas of study (Biology, Physics, ...) which are described by ODEs.

Keywords: Ordinary Differential Equation. Stability. Liapunov

SUMÁRIO

| | |
|---|------------|
| INTRODUÇÃO | 12 |
| 1 PRELIMINARES | 14 |
| 1.1 EXISTÊNCIA | 20 |
| 1.2 CONTINUAÇÃO DE SOLUÇÃO | 26 |
| 1.3 UNICIDADE | 28 |
| 1.4 APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS | 35 |
| 1.5 DEPENDÊNCIA CONTÍNUA | 40 |
| 2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES | 50 |
| 2.1 SISTEMAS LINEARES | 50 |
| 2.2 RESULTADOS PARA SISTEMA HOMOGÊNEO | 56 |
| 2.3 SISTEMAS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES | 63 |
| 3 UMA INTRODUÇÃO DOS MÉTODOS DE ESTABILIDADE | 71 |
| 3.1 INTRODUÇÃO | 71 |
| 3.2 DEFINIÇÕES | 73 |
| 3.3 ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES | 77 |
| 3.4 ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES | 84 |
| 4 MÉTODOS AVANÇADOS DE ESTABILIDADE | 90 |
| 4.1 PRELIMINARES | 90 |
| 4.2 ESTABILIDADE LOCAL E INSTABILIDADE DE SISTEMAS AUTÔNOMOS . . | 92 |
| 4.3 ESTABILIDADE LOCAL PARA SISTEMAS NÃO AUTÔNOMOS | 100 |
| 4.4 CAMPOS VETORIAIS, FLUXOS E CONJUNTOS LIMITES | 104 |
| 5 APLICAÇÕES | 109 |
| 5.1 O PROBLEMA NEOCLÁSSICO ECONÔMICO | 109 |
| 5.2 A EQUAÇÃO DE LORENTZ | 111 |
| 5.3 A EQUAÇÃO DE KRASOVSKII | 115 |
| 5.3.1 Caso k identicamente nula | 115 |
| 5.3.2 Caso k igual a 1 | 116 |
| 5.3.3 Caso geral | 117 |
| 5.4 ESPÉCIES EM COMPETIÇÃO | 118 |
| 5.5 PÊNDULO | 121 |
| 5.6 UM CASO DA EQUAÇÃO DE LIENARD | 122 |

| | |
|--|------------|
| CONCLUSÃO | 128 |
| A DECOMPOSIÇÃO DE JORDAN | 129 |
| B RESULTADOS PARA AS APLICAÇÕES | 133 |
| B.1 LEMAS AUXILIARES PARA O PROBLEMA ECONÔMICO | 133 |
| B.2 UM RESULTADO DE ÁLGEBRA PARA POLINÔMIOS | 135 |
| REFERÊNCIAS | 136 |

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|-----|--|-----|
| 1.1 | Inclinação $f(t_0, \phi(t_0))$ da solução $\phi(t)$ no ponto $t_0 \in I$ | 14 |
| 3.1 | Interpretação geométrica da propriedade da solução nula ser estável | 75 |
| 4.1 | Fonte: Autoria própria (2023). a solução nula é instável, pois sai de um conjunto limitado D_0 em um tempo finito t_1 | 96 |
| 4.2 | As soluções ϕ são curvas integrais de f | 104 |
| 5.1 | Fonte: Autoria própria (2023). O campo de direções nos permite dizer que a solução nula é assintoticamente estável | 119 |
| 5.2 | Fonte: Autoria própria (2023). Baseado no campo de direções, temos que o ponto de equilíbrio $A = (0.5, 0.5)$ atrai outras soluções, portanto, assintoticamente estável | 121 |
| 5.3 | Pêndulo oscilando | 122 |
| 5.4 | Fonte: Autoria própria (2023). Baseado no campo de direções, temos que o ponto de equilíbrio $A = (0, 0)$ é estável. | 123 |

INTRODUÇÃO

As equações diferenciais têm sido uma ferramenta fundamental na modelagem matemática de fenômenos físicos, biológicos, econômicos e sociais. A solução dessas equações permite prever o comportamento de sistemas dinâmicos ao longo do tempo, o que é crucial para a compreensão e o controle de muitos processos naturais e artificiais. No entanto, nem sempre é possível encontrar soluções analíticas para as equações diferenciais, e mesmo quando isso é possível, muitas vezes é difícil analisar a estabilidade das soluções encontradas.

A teoria da estabilidade do movimento ganhou importância crescente nas últimas décadas, como é evidente pelo grande número de publicações sobre o assunto. Uma parte considerável deste trabalho diz respeito a problemas práticos, especialmente problemas da área de controle e problemas concretos de engenharia foram os que primeiro deram o impulso decisivo para a expansão e desenvolvimento moderno da teoria da estabilidade.

A palavra “estabilidade” tem origem na mecânica onde caracteriza o equilíbrio de um corpo rígido. O equilíbrio é chamado de estável se o corpo retorna à sua posição original, tendo sido “perturbado” por ser ligeiramente movido de sua posição de repouso. Se o corpo após um leve deslocamento tende para uma nova posição, seu equilíbrio é chamado de instável. Se um ponto do corpo rígido, por exemplo, de um pêndulo composto, é fixo e o corpo está sujeito à gravidade, pode-se fornecer um critério geométrico bem conhecido para a estabilidade de seu equilíbrio: é estável se o ponto fixo estiver acima do centro de gravidade e instável se o ponto fixo encontra-se abaixo do centro de gravidade. Se o centro de gravidade e o ponto de suspensão (ponto de apoio) coincidirem temos o caso limite de um equilíbrio neutro. O corpo não retorna à sua posição anterior, mas um deslocamento arbitrariamente pequeno faz com que ele permaneça “arbitrariamente próximo” de sua posição original.

Uma abordagem para estudar a estabilidade de soluções de equações diferenciais é o método de Liapunov, o qual consiste em encontrar uma função escalar e verificar que esta satisfaz hipóteses como ser definida positiva e mostrar que é não crescente (decrecente) ao longo do tempo. Se isso for verdade, então a solução do sistema é estável (assintoticamente estável), isto é, qualquer perturbação inicial tende a desaparecer ao longo do tempo e o sistema se aproxima de um estado de equilíbrio.

Nesta dissertação, investiga-se a análise de estabilidade das soluções de equações diferenciais via método de Liapunov, ainda que a solução seja desconhecida. Para ilustrar os resultados, aplica-se o método em alguns exemplos clássicos de sistemas dinâmicos, incluindo o pêndulo simples, o sistema de Lorentz e espécies em competição.

No decorrer do texto, muitos resultados importantes de Álgebra Linear e Análise mostraram-se extremamente úteis e, por vezes, indispensáveis nos quais recorreremos as seguintes referências: [2], [4], [5], [9], [11], [12], [13], [14].

No Capítulo 1, apresenta-se uma revisão sobre equações diferenciais, e pontua-se pontos como Existência e Unicidade de solução, aproximações sucessivas e dependência con-

tínua. O desenvolvimento deste capítulo insere o leitor no contexto do trabalho e nas notações utilizada de modo que recorreremos aos seguintes textos [1], [3], [6], [7], [8], [15].

O Capítulo 2 introduz-se sistemas lineares de equações diferenciais e resultados quanto aos autônomos e aos com coeficientes constantes.

No Capítulo 3, inicia-se uma abordagem mais aprofundada sobre a estabilidade clássica, enquanto o Capítulo 4 aborda o funcional de Liapunov e suas relações com a estabilidade.

No Capítulo 5, apresentam-se aplicações em áreas diversas, como as já mencionadas, e também em um problema econômico.

Por fim, conclui-se sobre a importância do método de Liapunov.

1 PRELIMINARES

Definição 1.1. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto e conexo (domínio). Tomados um número real $t \in I$ e $x \in \mathbb{R}^n$, temos que os elementos de D são da forma $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^n$. Se supormos que f é uma função contínua com domínio $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e contradomínio \mathbb{R}^n , ou seja, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, temos que uma equação da forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) \quad (1.1)$$

é chamada equação diferencial ordinária (EDO), e podemos denotá-la por

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (1.2)$$

sendo $\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt}$.

Definição 1.2. Se existir uma função continuamente diferenciável $\phi(t)$ definida em algum intervalo real aberto I de tal modo que, para $t \in I$, valer que

$$\begin{aligned} (t, \phi(t)) &\in D \\ \dot{\phi}(t) &= f(t, \phi(t)), \end{aligned} \quad (1.3)$$

diremos que $\phi(t)$ é solução da equação diferencial (1.1) em I .

A função f em (1.1) é chamada de campo vetorial em D , pois toma o vetor $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e leva no vetor $\dot{x} \in \mathbb{R}^n$.

Se analisarmos geometricamente, para o caso particular \mathbb{R}^2 , (1.1) prescreve uma inclinação $f(t, x(t))$ em cada ponto $(t, x) \in D$. E uma solução $\phi(t)$, com $t \in I$, é uma função cujo gráfico (conjunto de todos os pontos $(t, \phi(t))$) tem a inclinação $f(t, \phi(t))$ em cada ponto $t \in I$. Em outras palavras, uma solução $\phi(t)$ é uma curva cuja direção em cada ponto $t \in I$ coincide com a direção do campo vetorial.

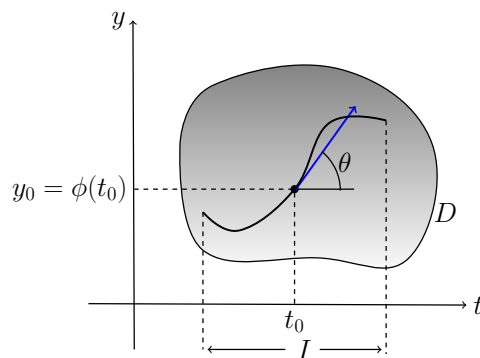


Figura 1.1: Inclinação $f(t_0, \phi(t_0))$ da solução $\phi(t)$ no ponto $t_0 \in I$.

Definição 1.3. *Uma equação diferencial da forma*

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.4)$$

que não inclui a variável independente t no lado direito da igualdade, é chamada de equação diferencial autônoma ou independente do tempo.

Geometricamente, as soluções $\phi(t)$ de (1.2) ou (1.4) podem ser representadas como curvas no x -espaço com t como parâmetro da curva. Esta curva é chamada de caminho. Em outras palavras, os caminhos são as projeções dos gráficos em algum hiperplano com t constante. O espaço das variáveis x que contém os caminhos é chamado espaço fase de (1.4).

Definição 1.4. *Fixado $(t_0, x_0) \in D$, um problema de valor inicial para (1.1) consiste em encontrar um intervalo I que contém t_0 e uma solução $\phi(t)$ de (1.1) que satisfaz $\phi(t_0) = x_0$. Este problema é denotado por*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & t \in I, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Aqui, chamamos t_0 de ponto inicial ou tempo inicial e x_0 de valor inicial. E o ponto (t_0, x_0) é chamado condição inicial. Geometricamente, (1.5) significa que procuramos por uma solução que passa pelo ponto (t_0, x_0) .

Lema 1.5. *Se a função $f(t, x)$ é contínua, então o problema de valor inicial $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, $t \in I$, é equivalente à equação da integral de Volterra*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x) ds, \quad t \in I. \quad (1.6)$$

Demonstração. Assuma que $f(t, x)$ está bem definida e é contínua em algum domínio D com $t \in I$ e que $(t_0, x_0) \in D$. Da continuidade de f , sabemos que a integral existe. Integrando (1.2) com limites t_0 e t , isto é,

$$\int_{t_0}^t \dot{x} ds = \int_{t_0}^t f(s, x) ds,$$

e obtemos que

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t f(s, x) ds,$$

sendo assim, como $x(t_0) = x_0$ da condição inicial, segue que a equação da integral de Volterra é

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x) ds, \quad t \in I. \quad (1.7)$$

Note que $x(t)$ em (1.7) é uma solução para o problema de valor inicial em (1.5), uma vez que $x(t)$ é continuamente diferenciável e satisfaz (1.5) em algum intervalo aberto I que contém t_0 . Reciprocamente, lembre do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), que garante que, se f é contínua, então é integrável com $F'(t) = f(t)$, em que

$$F(t) = \int_a^t f(s) ds.$$

Sendo assim, para qualquer função continuamente diferenciável $x(t)$ da forma (1.7), colocando $t = t_0$, obtemos $x(t_0) = x_0$. Além disso, sabemos que, derivando (1.7), obtemos $\dot{x} = f(t, x)$ e, portanto, (1.7) fornece um problema de valor inicial. \square

Exemplo 1. Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = \alpha x, \quad (1.8)$$

na qual $\alpha \in \mathbb{R}$. Como $f(t, x) = \alpha x$ segue que o campo vetorial depende apenas da variável x . Integrando (1.8), obtemos uma solução da forma

$$\phi(t) = ce^{\alpha t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.9)$$

em que c é um número real arbitrário. Note que (1.9) é continuamente diferenciável para $t \in \mathbb{R}$ e satisfaz (1.8), pois

$$\dot{x} = \dot{\phi}(t) = \alpha ce^{\alpha t} = \alpha \phi(t) = \alpha x. \quad (1.10)$$

Para termos um problema de valor inicial em (1.8), é necessário especificar um ponto t_0 e um valor correspondente $x(t_0)$. No caso, suponhamos que $t_0 = 0$ e $x(0) = 1$, e escrevemos o problema de valor inicial como

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (1.11)$$

e temos que $1 = \phi(0) = c$ e a solução do problema de valor inicial é

$$\phi(t) = 1e^{\alpha t}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.12)$$

Se considerarmos o caso particular quando $t > 0$ e $\alpha > 0$, (1.8) pode ser usada para denotar juros instantâneos ganhos por uma quantidade x de dólares. Sua solução em (1.9)

denota o valor atual de uma soma de capital c com juros compostos instantâneos. Neste caso em particular, o problema de valor inicial (1.11) especifica tanto o interesse instantâneo ganho por x dólares quanto a quantidade inicial de capital. A sua solução em (1.12) rende, no tempo t , o valor total de \$1 ganhando juros compostos instantaneamente por t períodos. Desta forma, o 1 em (1.12) denota o valor inicial investido. Para entender melhor esta ideia, vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 2. Suponha que uma quantia em dinheiro é depositada em um banco ou fundo que paga juros em uma taxa anual r . O valor $S(t)$ do investimento em qualquer instante t depende da frequência com o qual os juros são compostos, bem como a taxa de juros. As instituições financeiras têm várias políticas relativas à composição: alguns compostos mensais, semanais, e até diariamente. Se assumirmos que a composição ocorre continuamente, então podemos configurar um problema de valor inicial simples que descreve o crescimento do investimento.

A taxa de variação do valor do investimento é $\frac{dS}{dt}$, e esta quantia é igual à taxa de acumulação de juros, que é a taxa de juros r vezes o valor atual do investimento $S(t)$. Desta forma,

$$\frac{dS}{dt} = rS \quad (1.13)$$

é a equação diferencial do problema. Suponha que sabemos o valor deste investimento em algum instante particular, isto é,

$$S(0) = S_0. \quad (1.14)$$

A solução para o problema de valor inicial (1.13), (1.14) fornece um equilíbrio $S(t)$ da conta em qualquer instante t .

Resolvendo este problema de valor inicial, temos que

$$\frac{dS}{S} = r dt \Rightarrow \int \frac{dS}{S} = \int r dt$$

$$\ln(S) = tr + k, \quad k \text{ constante} \Rightarrow S = e^{tr+k}$$

$$S = e^k e^{rt} \Rightarrow S = ce^{rt},$$

e aplicando a condição inicial, temos $S_0 = S(0) = c$, logo a solução do problema é da forma

$$S(t) = S_0 e^{rt} \quad (1.15)$$

e isto nos mostra que uma conta bancária com juros compostos continuamente cresce exponencialmente. Iremos comparar os resultados deste modelo contínuo com o caso em que a composição ocorre em intervalos de tempo finitos. Se os juros forem compostos uma vez por ano, então em t anos,

$$S(t) = S_0(1+r)^t. \quad (1.16)$$

De maneira geral, se os juros forem compostos n vezes por ano, temos que

$$S(t) = S_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}. \quad (1.17)$$

E podemos observar de (1.15) e (1.17), que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = S_0 e^{rt}. \quad (1.18)$$

O mesmo modelo também se aplica a investimentos mais gerais em que os dividendos e, talvez, ganhos de capital também possam se acumular, assim como o juros. Desta forma, utilizaremos r para nos referir à taxa de retorno.

Retornando ao caso da composição contínua, vamos supor que podem ocorrer, também, depósitos ou retiradas. Se assumirmos que estes ocorrem a uma taxa constante k (k positivo para depósitos e negativo para retiradas), então a equação (1.13) é reescrita como

$$\frac{dS}{dt} = rS + k,$$

e, na forma padrão,

$$\frac{dS}{dt} - rS = k. \quad (1.19)$$

Multiplicando os termos da igualdade (1.19) por e^{-rt} , aplicando a propriedade da derivada do produto e integrando, nesta ordem, temos que

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} e^{-rt} - rS e^{-rt} &= k e^{-rt} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (S e^{-rt}) &= k e^{-rt} \\ \Rightarrow S e^{-rt} &= -\frac{k e^{-rt}}{r} + c \\ \Rightarrow S &= c e^{rt} - \frac{k}{r}. \end{aligned}$$

Portanto, a equação (1.19) tem como solução geral

$$S(t) = c e^{rt} - \frac{k}{r},$$

com c uma constante arbitrária. Para satisfazer a condição inicial, precisa-se que $c = S_0 + \frac{k}{r}$, logo uma solução para o problema de valor inicial (1.19), (1.14) é

$$S(t) = S_0 e^{rt} + \frac{k}{r} (e^{rt} - 1), \quad (1.20)$$

sendo o primeiro termo a parte de $S(t)$ que ocorre devido ao retorno acumulado no valor inicial

S_0 , enquanto o segundo termo é a parte que ocorre devido ao depósito ou taxa de retirada k .

Agora, perceba que manter o problema na sua forma geral, isto é, não especificar os valores S_0 , r e k , é vantajoso, pois a solução em (1.20) permite comparar resultados de diferentes programas de investimentos ou diferentes taxas de retorno.

Para exemplificar, suponha que uma pessoa de 25 anos passa a investir R\$ 2.000,00 por ano ($k = 2.000$) de maneira contínua em uma conta com taxa de retorno de 8%, isto é, $r = 0,08$. Desta forma, temos que $S_0 = 0$ e, com 65 anos (40 anos após), seu balanço será, pela fórmula (1.20),

$$S(40) = 25.000(e^{3,2} - 1) = R\$ 588.313,00.$$

É interessante notar que o valor total investido foi R\$ 80.000,00, ou seja, o restante R\$ 508.313,00 é resultado do retorno de acúmulo de investimento. Note ainda que o saldo após 40 anos é sensível à taxa pois, se tivermos $r = 0,075$, $S(40) = R\$ 508.948,00$, enquanto que, se tivermos $r = 0,085$, $S(40) = R\$ 681.508,00$, e isto se dá ao fato de estarmos trabalhando com uma função exponencial.

Mas é importante lembrar que estes valores ocorrem devido a suposições que foram feitas para este modelo. Primeiramente, assumimos que o retorno é composto continuamente e que o capital adicional é investido continuamente, o que não é verdade em uma situação financeira real. Também assumimos que a taxa de retorno r é constante para todo o período envolvido, porém é provável que flutue consideravelmente. Sendo assim, não é possível prever o que irá acontecer de maneira totalmente segura, a fórmula em (1.20) apenas determina o efeito aproximado.

Para melhorar a precisão do nosso problema e da nossa solução, podemos considerar r e k em (1.19) como funções de t , e não constantes, mas, neste caso, a solução pode ser bem mais complicada do que a obtida em (1.20).

Exemplo 3. Consideremos a equação diferencial

$$\dot{x} = x^2. \quad (1.21)$$

Neste caso, $f(t, x) = x^2$, ou seja, a equação é autônoma. Assumindo que $x \neq 0$, temos que $\frac{\dot{x}}{x^2} = 1$. Integrando esta última igualdade em relação à variável t , temos

$$\int \left(\frac{\dot{x}}{x^2} \right) dt = \int dt. \quad (1.22)$$

Disto, obtemos que $-x^{-1} = t + c$, em que c é uma constante real não nula arbitrária. Ou seja, nossa solução tem o formato

$$\phi(t) = -\frac{1}{t + c}, \quad (1.23)$$

com $\phi(0) = -\frac{1}{c}$. Note que, para $c > 0$, temos que (1.23) é solução de (1.21) para $t \in (-c, \infty)$,

pois é continuamente diferenciável neste intervalo e

$$\dot{x} = \dot{\phi}(t) = \frac{1}{(t+c)^2} = \phi^2(t) = x^2. \quad (1.24)$$

Se assumirmos que $c < 0$, temos que (1.23) é solução de (1.21) para $t \in (-\infty, -c)$. Para o caso $c = 0$, (1.23) não é uma solução do problema para $t \in \mathbb{R}$, pois $\phi(t) = -\frac{1}{t}$ não é continuamente diferenciável na reta. Ainda, para $c = 0$, $\phi(t)$ é descontínua e não se classifica como solução. No entanto, podemos dizer que $\phi(t) = -\frac{1}{t}$ é solução de (1.21) para $t > 0$. Este exemplo ilustra que, embora $f(t, x) = x^2$ seja contínua em toda a reta, a solução está restrita a um subconjunto da reta que depende do valor da constante c . Esta observação nos sugere que a existência de uma solução é uma propriedade local. E para exemplificar um problema de valor inicial, consideremos

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = -1 \end{cases} \quad (1.25)$$

Ora, temos que $-1 = \phi(0) = -\frac{1}{c} \Rightarrow -1 = -\frac{1}{c}$, ou seja, $c = 1$ e temos que a solução do problema (1.25) é

$$\phi(t) = -\frac{1}{1+t} \quad (1.26)$$

para $t \in (-1, \infty)$ e $c = 1$. Se mudarmos o problema de valor inicial para

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (1.27)$$

a solução se torna

$$\phi(t) = \frac{1}{1-t}, \quad (1.28)$$

para $t \in (-\infty, 1)$ e $c = -1$.

Isto ilustra que mudar os valores iniciais pode afetar o intervalo de existência de solução.

Nos dois exemplos, a continuidade de $f(t, x)$ em (1.8) e (1.21) nos permite integrar para encontrar a solução da equação diferencial. Em geral, a fim de estabelecer a existência de soluções, o método geralmente utilizado consiste em substituir a equação diferencial por uma equação integral, como no Lema 1.5

1.1 EXISTÊNCIA

Consideremos a equação diferencial de primeira ordem

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1.29)$$

na qual f é uma função contínua $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Os próximos resultados serão analisados para o caso de equações diferenciais de primeira ordem, o que não gera prejuízos, uma vez que os teoremas e as demonstrações podem ser generalizadas substituindo os valores absolutos pelas normas dos vetores.

Em muitas aplicações econômicas, $f(t, x)$ não é explicitada. E mesmo quando é, há uma grande chance de não conseguirmos resolver explicitamente. E com isso, é importante se perguntar como sabemos que (1.29) tem uma solução e que ela é única. E para responder, teremos um teorema que garante existência e unicidade de uma única função com certas propriedades que a qualifica como uma solução, sem ser necessário explicitá-la.

Agora, note que assumir que f é contínua é de extrema importância, pois se tivermos o caso em que f é de Dirichlet e não é Riemann integrável, como

$$\begin{cases} 1, & \text{se } t \text{ é racional} \\ 0, & \text{se } t \text{ é irracional,} \end{cases} \quad (1.30)$$

não existe chance de se encontrar uma solução $\phi(t)$ que satisfaz (1.29).

Ainda, assumir que f é contínua não é suficiente para garantir existência de solução em qualquer local do domínio, como vimos no Exemplo 3. Sendo assim, qualquer teorema de existência é local. Um teorema de existência em todo o espaço pode ser obtido adicionando condições em f .

Com o intuito de realizar a análise de existência, seguiremos dois passos. Primeiro, vamos mostrar que uma solução aproximada de (1.29) existe, e posteriormente, mostrar que existe uma sequência de soluções aproximadas que converge para uma solução. Desta forma, estamos verificando a existência de solução sem explicitá-la.

Para o primeiro passo, vejamos algumas definições e teoremas que serão necessários. Mas antes, relembremos que assumimos $f(t, x)$ contínua no domínio $D \subset \mathbb{R}^2$, em que um elemento de D é da forma (t, x) com t em um intervalo I .

Definição 1.6. *Uma solução ε -aproximada $\phi(t)$ da EDO $\dot{x} = f(t, x)$ em (1.29) em um intervalo I é uma função contínua que satisfaz:*

- (1) $(t, \phi(t)) \in D$, para $t \in I$;
- (2) ϕ é continuamente diferenciável, exceto em um conjunto finito de pontos $S \subset I$, em que ϕ pode ter descontinuidade simples. Chamamos de descontinuidade simples em um ponto quando os limites laterais à direita e à esquerda de ϕ existem e são finitos, mas não equivalentes;
- (3) $|\dot{\phi} - f(t, \phi(t))| \leq \varepsilon$, para $t \in I \setminus S$.

O próximo lema mostra que existe uma solução ε -aproximada para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.31)$$

Lema 1.7. Escolha dois números a e b reais e positivos quaisquer e seja R o retângulo

$$R = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a \text{ e } |x - x_0| \leq b\}.$$

Suponha que $f(t, x)$ é contínua no retângulo R e seja $\varepsilon > 0$ dado. Então existe uma solução ε -aproximada $\phi(t)$ em algum intervalo I que satisfaz o problema de valor inicial em (1.31).

Demonstração. Como supomos f contínua no retângulo R , podemos assumir que f é limitada em R , sendo assim, seja

$$M = \max |f(t, x)|, \text{ para } (t, x) \in R \text{ e defina } \alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}.$$

Ainda, como R é fechado e limitado, temos que R é compacto, logo a função f contínua em R é, na verdade, uniformemente contínua, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta_0 > 0$, que depende apenas de ε , de tal modo que

$$(t, x), (s, y) \in R, |t - s| \leq \delta_0, |x - y| \leq \delta_0 \Rightarrow |f(t, x) - f(s, y)| \leq \varepsilon.$$

Agora, escolha uma partição para o intervalo $[t_0, t_0 + \alpha]$ da forma

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n = t_0 + \alpha$$

de tal modo que

$$\max |t_k - t_{k-1}| \leq \min \left\{ \delta_0, \frac{\delta_0}{M} \right\}$$

e podemos construir uma solução ε -aproximada no intervalo $[t_0, t_0 + \alpha]$, que consiste em um número finito de segmentos de reta unidos nas extremidades (denominado polígono de Euler) e limitados entre as retas

$$x = x_0 + M(t - t_0) \text{ e } x = x_0 - M(t - t_0). \quad (1.32)$$

Para os pontos e valor inicial (t_0, x_0) , construa uma reta com inclinação $f(t_0, x_0)$ até interceptar a reta $t = t_1$. Posteriormente, construa outra reta iniciada no ponto (t_1, x_1)

com inclinação $f(t_1, x_1)$ até interceptar a reta $t = t_2$. Repetindo este processo finitas vezes, o caminho resultante $\phi(t)$ irá de encontro com a reta $t = t_0 + \alpha$. Este caminho estará entre as retas em (1.32) pela definição de α e pelo fato de $f(t, x) \leq M$. Desta forma, $\phi(t)$ é a solução ε -aproximada desejada e, além disso, a construção especifica o intervalo de existência, que é $|t - t_0| \leq \alpha$.

Note que, para $t = t_0$, as retas em (1.32) equivalem à $x = x_0$, ou seja, ambas passam pelo ponto (t_0, x_0) e o caminho construído se inicia neste ponto. Ainda, temos que no ponto $t_0 + \alpha$, as retas são dadas por

$$x = x_0 + M\alpha \text{ e } x = x_0 - M\alpha,$$

sendo $f(t, x) \leq M$ no retângulo R e $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$, ou seja, para $\alpha = a$, temos

$$x = x_0 + Ma \text{ e } x = x_0 - Ma$$

e para $\alpha = \frac{b}{M}$, temos

$$x = x_0 + b \text{ e } x = x_0 - b.$$

Desta forma a solução ε -aproximada $\phi(t)$ construída acima está entre as retas. Logo, $(t, \phi(t)) \in R$. Além disso, a derivada de $\phi(t)$ em relação a t é constante em todos os pontos, exceto nos finitos n pontos que determinam a partição, logo é continuamente diferenciável, a menos de um número finito de pontos.

Por fim, tomemos $\delta = \min\{a, b, \delta_0\}$ e um ponto t em uma partição (t_i, t_{i+1}) , segue que $|t - t_i| \leq \delta$, e além disso, $|\phi(t_i) - \phi(t)| = |x_i - \phi(t)| \leq \delta$, pois a distância das retas neste ponto é menor que δ e sabemos que $\dot{\phi}(t_i) = f(t_i, x_i)$. Com isso,

$$|t - t_i| \leq \delta \text{ e } |\phi(t) - x_i| \leq \delta \Rightarrow |f(t_i, x_i) - f(t, \phi(t))| \leq \varepsilon.$$

Logo,

$$|\dot{\phi}(t_i) - f(t, \phi(t))| \leq \varepsilon.$$

□

Antes demonstrar o Teorema de Existência de Cauchy¹-Peano² que veremos a seguir, enunciaremos uma definição e um resultado, os quais serão importantes no desenvolvimento da demonstração.

¹Augustin-Louis Cauchy foi um matemático francês (1789-1857) considerado um dos mais importantes matemáticos do século XIX e é amplamente conhecido por suas contribuições para as teorias das funções complexas, dos números complexos, das séries, das equações diferenciais e da análise.

²Giovanni Peano (1858-1932) foi um matemático conhecido por suas contribuições para a lógica matemática, a teoria da linguística e a matemática elementar.

Observação 1. A solução ε -aproximada construída na demonstração do Lema 1.7 é lipschitziana pois, se tomarmos $s, t \in (t_{i-1}, t_i)$ temos que $\phi(t)$ e $\phi(s)$ estão sobre uma mesma reta e vale a igualdade $\phi(t) - \phi(s) = M(t - s)$. Ainda se tomarmos $t \in (t_{i-1}, t_i)$ e $s \in (t_i, t_{i+1})$, temos que

$$|\phi(t) - \phi(s)| \leq |\phi(t) - \phi(t_i)| + |\phi(t_i) - \phi(s)| \leq M|t - t_i| + M|t_i - s|.$$

Em ambas desigualdades, utilizamos M devido ao fato da inclinação da reta ser dada por f e $f(t, x) \leq M$. E $M|t - t_i| + M|t_i - s| = M(|t - t_i| + |t_i - s|) = M(-t + t_i + (-t_i + s)) = M(s - t)$, uma vez que $t < t_i < s$. E concluímos que

$$|\phi(t) - \phi(s)| \leq M|t - s|.$$

Se tomarmos os pontos t e s em partições da forma (t_i, t_{i+1}) e (t_j, t_{j+1}) , com i suficientemente menor do que j , a demonstração é análoga. Portanto, a solução ε -aproximada é lipschitziana.

Definição 1.8. *Seja E um conjunto de funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, todas definidas no mesmo domínio $X \subset \mathbb{R}$. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, diremos que o conjunto E é equicontínuo no ponto x_0 quando, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$x \in X, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ qualquer que seja } f \in E.$$

Lema 1.9 (Ascoli). *Seja F uma família de funções limitadas e equicontínuas em todo ponto de um intervalo I . Então toda sequência $\{f_n\}$ de funções em F contém uma subsequência uniformemente convergente em todo subintervalo compacto de I .*

Demonstração. Ver Lima, E. L. [10]. □

Teorema 1.10 (Teorema de Existência de Cauchy-Peano³). *Se $f(t, x)$ é uma função contínua no retângulo $R = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a \text{ e } |x - x_0| \leq b\}$, então existe uma solução continuamente diferenciável $\phi(t)$ no intervalo $|t - t_0| \leq \alpha$ que soluciona o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.33)$$

Demonstração. Vamos construir uma sequência de soluções ε -aproximadas e mostrar que estas soluções convergem para uma solução de (1.33). Seja $\{\varepsilon_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, uma sequência de números reais positivos monótona decrescente de tal modo que $\varepsilon_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

³Este teorema foi desenvolvido pelo matemático francês Augustin-Louis Cauchy e posteriormente aperfeiçoado pelo matemático italiano Giovanni Peano. Este teorema é importante porque fornece uma maneira de encontrar soluções para equações diferenciais em muitas aplicações práticas, incluindo a física, a engenharia, a economia, entre outras. Além disso, o teorema de Cauchy-Peano é um dos pilares da teoria da existência e unicidade das soluções para equações diferenciais.

Para cada n , o Lema 1.7, garante existência de soluções ε_n -aproximadas, denotadas por ϕ_n , para o problema (1.33) em $|t - t_0| \leq \alpha$ tal que $\phi_n(t_0) = x_0$. Vamos verificar que esta sequência é equicontínua. De fato, pela construção de ϕ_n , temos que

$$|\phi_n(t) - \phi_n(s)| \leq M|t - s|, \quad (1.34)$$

para t e s em $[t_0, t_0 + \alpha]$. Aplicando $s = t_0$ em (1.34) e usando o fato de ϕ_n ser lipschitziana como evidenciado na Observação 1, temos

$$|\phi_n(t) - \phi_n(t_0)| \leq M|t - t_0| \leq M \frac{b}{M} = b. \quad (1.35)$$

Sendo assim, temos que

$$|\phi_n(t)| \leq |\phi_n(t) - \phi_n(t_0)| + |\phi_n(t_0)| \leq |\phi_n(t_0)| + b = |x_0| + b, \quad (1.36)$$

ou seja, a sequência $\{\phi_n\}$ é uniformemente limitada.

Desta forma, a sequência $\{\phi_n\}$ é uma sequência de soluções ε_n -aproximadas que é equicontínua e uniformemente limitada em um intervalo limitado $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Segue do Lema 1.9 que existe uma subsequência $\{\phi_{n_k}\}$, $k = 1, 2, \dots$ de $\{\phi_n\}$ que converge uniformemente em $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ para uma função limite denotada por ϕ . Ainda, como cada ϕ_n é contínua, temos que ϕ é contínua.

Para verificar que ϕ é solução de (1.33), seja

$$\Delta_n(t) = \begin{cases} \dot{\phi}_n(t) - f(t, \phi_n(t)), & \text{quando } \dot{\phi}_n \text{ existe;} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e escrevendo a solução ε_n -aproximada na forma de equação integral, tendo em mente o Lema 1.5, temos que

$$\begin{aligned} \phi_n(t) &= \phi_n(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{\phi}_n(s) ds \\ &= x_0 + \int_{t_0}^t [f(s, \phi_n(s)) + \dot{\phi}_n(s) - f(s, \phi_n(s))] ds \\ &= x_0 + \int_{t_0}^t [f(s, \phi_n(s)) + \Delta_n(s)] ds \\ &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_n(s)) ds + \int_{t_0}^t \Delta_n(s) ds, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\phi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_n(s)) ds + \int_{t_0}^t \Delta_n(s) ds. \quad (1.37)$$

Escolha uma subsequência $\{\phi_{n_k}\}$ de (1.37). Como f é uniformemente contínua em R e $\phi_{n_k} \rightarrow \phi$ quando $k \rightarrow \infty$ uniformemente em $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, segue que, neste mesmo intervalo,

$$k \rightarrow \infty \Rightarrow f(t, \phi_{n_k}(t)) \rightarrow f(t, \phi(t)) \text{ uniformemente.}$$

Ainda, pela definição de $\Delta_n(t)$ pela Definição 1.6, item 3 com $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, temos

$$\left| \int_{t_0}^t \Delta_n(s) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |\Delta_n(s)| ds \leq \varepsilon_n \int_{t_0}^t ds \leq \varepsilon_n (t - t_0) \leq \varepsilon_n \alpha,$$

e $\varepsilon_n \rightarrow 0$, ou seja, tomando limite em (1.37), obtemos que

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds.$$

Portanto, $\phi(t)$ é solução de (1.33). □

1.2 CONTINUAÇÃO DE SOLUÇÃO

Definição 1.11. *Seja $\phi(t)$, $t \in I$, uma solução de (1.33). Se $\psi(t)$ também é uma solução de (1.33) em um intervalo J que contém I propriamente e, ainda, $\phi(t) = \psi(t)$ para todo $t \in I$, então ψ é uma continuação de ϕ . E diremos que J é extensão de I . Caso não exista ψ , diremos que $\phi(t)$ é solução definida maximamente e I é dito intervalo maximal de existência.*

Exemplo 4. No Exemplo 3, vimos que a solução para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

é da forma

$$\phi(t) = \frac{1}{1-t}$$

no intervalo $I = (-\infty, 1)$. Esta solução é definida maximamente e I é maximal, pois note que para $t = 1$, $\phi(t)$ não é limitada, ou seja, não é possível estendê-la para o intervalo $J = (-\infty, 1]$.

Definição 1.12. *Dado um intervalo finito (a, b) da reta e $t \in (a, b)$, denotamos por*

$$\begin{aligned} t \rightarrow a^+ & \quad \text{para expressar que } t \text{ se aproxima de } a \text{ pela direita;} \\ t \rightarrow b^- & \quad \text{para expressar que } t \text{ se aproxima de } b \text{ pela esquerda.} \end{aligned} \quad (1.38)$$

Para uma função $\phi(t)$, $t \in (a, b)$, denotamos

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow a^+} \phi(t) &= \phi(a^+); \\ \lim_{t \rightarrow b^-} \phi(t) &= \phi(b^-).\end{aligned}\tag{1.39}$$

Lema 1.13 (Critério de Convergência de Cauchy para funções). *Seja $X \subset \mathbb{R}$, a um ponto de acumulação de X e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. O limite $\lim_{t \rightarrow a} f(x)$ existe se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $0 < |x - a| < \delta$, $0 < |y - a| < \delta$ implica que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Teorema 1.14. *Seja $f(t, x)$ contínua e limitada em um domínio $D \subset \mathbb{R}^2$. Se $\phi(t)$ é uma solução de (1.33) em um intervalo (a, b) , então os limites $\phi(a^+)$ e $\phi(b^-)$ existem. Além disso, se $(b, \phi(b^-)) \in D$, podemos estender ϕ para a direita de b . Analogamente, se $(a, \phi(a^+)) \in D$, podemos estender ϕ para a esquerda de a .*

Demonstração. Vamos verificar que $\phi(b^-)$ existe e, para isso, utilizemos a equação de Volterra

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds,$$

para $t, t_0 \in (a, b)$. Se $a < u < v < b$, então

$$\begin{aligned}|\phi(v) - \phi(u)| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^v f(s, \phi(s)) ds - x_0 - \int_{t_0}^u f(s, \phi(s)) ds \right| \\ &= \left| \int_u^v f(s, \phi(s)) ds \right| \\ &\leq \int_u^v |f(s, \phi(s))| ds \\ &\leq M \int_u^v ds = M|u - v|.\end{aligned}$$

Desta forma,

$$|\phi(v) - \phi(u)| \leq M|u - v|,\tag{1.40}$$

em que $|f| \leq M < \infty$. Ainda, se u e v se aproximam de b pela esquerda, então, resulta que $\phi(u) - \phi(v) \rightarrow 0$. Pelo Critério de Convergência de Cauchy para funções, Lema 1.13, segue

que

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \phi(t) = \phi(b^-) < \infty.$$

Analogamente, podemos mostrar que $\phi(a^+)$ existe. Suponha agora que $(b, \phi(b^-)) \in D$ e defina

$$\psi(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{se } t \in (a, b), \\ \phi(b^-), & \text{se } t = b. \end{cases}$$

Desta forma, $\psi(t)$ é uma continuação de $\phi(t)$ em $(a, b]$. Mais ainda, se supormos que $(b, \phi(b^-))$ é uma condição inicial, podemos estender ψ pois, pelo Teorema 1.10, existe uma solução $\chi(t)$ para $t \in [b, b + \beta]$, $\beta > 0$ de tal modo que $\chi(b) = \phi(b^-)$. Definindo

$$\theta(t) = \begin{cases} \psi(t), & \text{se } t \in (a, b], \\ \chi(t), & \text{se } t \in [b, b + \beta], \end{cases}$$

veja que $\theta(t)$, $t \in (a, b + \beta]$, é uma continuação de $\psi(t)$, $t \in (a, b]$. □

1.3 UNICIDADE

Em quaisquer aplicações (em particular, nas econômicas) como modelos dinâmicos descritos por equações diferenciais, é importante saber quando a solução de um problema é única e, para isso, é necessário impor condições sobre $f(t, x)$ pois, apenas continuidade não garante unicidade de solução como veremos no seguinte exemplo:

Exemplo 5. Suponha $f(t, x) = 3x^{\frac{2}{3}}$ contínua. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x^{\frac{2}{3}} \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

temos que $x(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ é uma solução (trivial). Se $x \neq 0$, então

$$x^{-\frac{2}{3}}\dot{x} = 3$$

$$\Rightarrow x^{-\frac{2}{3}}dx = 3dt$$

$$\Rightarrow \int x^{-\frac{2}{3}}dx = 3 \int dt$$

$$\Rightarrow 3x^{\frac{1}{3}} = 3t + k$$

$$\Rightarrow x^{\frac{1}{3}} = t + \frac{k}{3}$$

$$\Rightarrow x^{\frac{1}{3}} = t + c$$

$$\Rightarrow x = (t + c)^3.$$

Ou seja, $x(t) = (t + c)^3$. Defina, para $c > 0$, ϕ_c por

$$\phi_c(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, c] \\ (t - c)^3, & t \in (c, \infty). \end{cases}$$

Desta forma, $\phi_c(t)$ é solução do problema para todo t real e, como c é uma constante positiva arbitrária, este problema possui infinitas soluções.

Quando um modelo dinâmico apresenta mais de uma solução, este passa a não ser aplicável, pois torna-se difícil decidir qual solução representa melhor o modelo, o que nos leva a buscar restrições que garantem a unicidade de solução. Analisando o problema no Exemplo 5, percebe-se que $\frac{\partial f}{\partial x}$ não existe para $x = 0$. Na verdade, como $f(t, x) = 3x^{\frac{2}{3}}$, segue que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x^{-\frac{1}{3}}$$

é ilimitado quando $x \rightarrow 0$. Com o intuito de resolver esta questão e obter unicidade de solução, introduziremos alguns conceitos e resultados com o intuito de enunciar e demonstrar teorema que garantirá a unicidade de solução.

Definição 1.15. *Seja $f(t, x)$ definida em um domínio D do plano (t, x) e suponha que exista*

uma constante positiva k tal que, para todo (t, x) e (t, y) em D ,

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq k|x - y|. \quad (1.41)$$

Dizemos que f satisfaz a condição de Lipschitz⁴ com respeito a x e k é chamada constante de Lipschitz.

Lema 1.16. Se $f(t, x)$ é contínua no retângulo

$$R = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a \text{ e } |x - x_0| \leq b\}$$

com a e b positivos e, além disso, se $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe e é contínua no retângulo R , então f satisfaz a condição de Lipschitz.

Demonstração. Como a derivada parcial é contínua no retângulo R e R é fechado e limitado, segue que $\frac{\partial f}{\partial x}$ é limitada, ou seja, para algum k positivo e (t, x) em R , temos que

$$\left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right| \leq k.$$

Ainda, da continuidade de $\frac{\partial f}{\partial x}$ em R , segue que

$$f(t, x) - f(t, y) = \int_y^x \frac{\partial f}{\partial x}(t, u) du.$$

Tomando módulo, obtemos

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, y)| &= \left| \int_y^x \frac{\partial f}{\partial x}(t, u) du \right| \\ &\leq \int_y^x \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, u) \right| du \\ &\leq \int_y^x k du = k|x - y|. \end{aligned}$$

□

⁴Rudolf Lipschitz foi um matemático alemão do século XIX, conhecido por suas contribuições à análise, geometria, teoria de séries e equações diferenciais.

Exemplo 6. Dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = tx^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

no retângulo

$$R = \{(t, x) : |t| \leq 1 \text{ e } |x| \leq 1\},$$

vamos verificar que $f(t, x) = tx^2$ satisfaz a condição de Lipschitz.

De fato, note que

$$\left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right| = |2tx| \leq 2,$$

e, com isso, segue do Lema 1.16 satisfaz a condição de Lipschitz em R com $k = 2$ a constante de Lipschitz.

Exemplo 7. Dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x^{\frac{2}{3}} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

no retângulo

$$R = \{(t, x) : |t| \leq 1 \text{ e } |x| \leq 1\},$$

temos que $f(t, x) = 3x^{\frac{2}{3}}$ não satisfaz a condição de Lipschitz, pois para $x > 0$, temos que

$$\frac{|f(t, x) - f(t, 0)|}{|x - 0|} = \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{x} = 3x^{-\frac{1}{3}}$$

e, quando $x \rightarrow 0$, temos que $\frac{3}{x^{\frac{1}{3}}}$ é ilimitado.

Lema 1.17. Se $f(t, x)$ é contínua em $R = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a \text{ e } |x - x_0| \leq b\}$ e $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe e é limitada em R com $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq k$, em que k é uma constante positiva, então f satisfaz a condição de Lipschitz.

Demonstração. Pelo Teorema do Valor Médio, para t fixado e $u \in (x, y)$, temos

$$f(t, x) - f(t, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, u)(x - y).$$

Tomando módulo, obtemos

$$|f(t, x) - f(t, y)| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, u)(x - y) \right| \leq k|x - y|.$$

□

Se substituirmos R por um domínio D fechado, é necessário impor que D é convexo para, desta forma, garantir que $u \in D$ e permitir o uso do Teorema do Valor Médio.

Exemplo 8. Se uma função $f(t, x)$ satisfaz a condição de Lipschitz, não se pode garantir que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe. Vejamos, para

$$f(t, x) = t^2|x|$$

em $R = \{(t, x) : |t| \leq 1 \text{ e } |x| \leq 1\}$, temos que

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |t^2|x| - t^2|y|| = t^2(|x| - |y|) \leq |x| - |y| \leq |x - y|.$$

Ou seja, f satisfaz a condição de Lipschitz e $k = 1$ é a constante de Lipschitz. Porém, note que $\frac{\partial f}{\partial x}(t, 0)$ não existe, qualquer que seja $t \neq 0$.

Desta forma, temos finalmente, o seguinte resultado:

Teorema 1.18. *Seja f e $\frac{\partial f}{\partial x}$ contínuas no retângulo R definido por*

$$R = \{(t, x); |t - t_0| \leq a \text{ e } |x - x_0| \leq b\}$$

com a e b positivos. Defina

$$M = \max |f(t, x)| \text{ e } \alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}.$$

Então, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} & = f(t, x) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases} \quad (1.42)$$

possui uma única solução para $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$.

Demonstração. Como f é contínua, segue do Teorema 1.10 que o problema de valor inicial (1.42) possui pelo menos uma solução. Suponha que $\phi(t)$ e $\psi(t)$ são duas soluções do problema e vamos mostrar que $\phi(t) = \psi(t)$ para $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ quando $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua. Sendo ϕ e ψ soluções, o Lema 1.5 afirma que podemos expressá-los por

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds$$

$$\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds.$$

Denote $L = \max \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|$ para t e x no retângulo R e vejamos a diferença entre $\phi(t)$ e $\psi(t)$ (utilizaremos o Lema 1.16 ou, com o mesmo objetivo, para cada s dado fixo, o Teorema do Valor Médio na segunda variável):

$$\begin{aligned}
 |\phi(t) - \psi(t)| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds \right| \\
 &= \left| \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds \right| \\
 &= \left| \int_{t_0}^t [f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s))] ds \right| \\
 &\leq \int_{t_0}^t |f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s))| ds \\
 &\leq L \int_{t_0}^t |\phi(s) - \psi(s)| ds.
 \end{aligned}$$

Com isto, temos que

$$|\phi(t) - \psi(t)| \leq L \int_{t_0}^t |\phi(s) - \psi(s)| ds \quad (1.43)$$

e, para verificar que esta desigualdade implica que $\phi(t) = \psi(t)$, defina

$$U(t) = \int_{t_0}^t |\phi(s) - \psi(s)| ds.$$

Substituindo $U(t)$ em (1.43), obtemos

$$\frac{dU(t)}{dt} = |\phi(t) - \psi(t)| \leq L \int_{t_0}^t |\phi(s) - \psi(s)| ds = LU(t).$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \frac{dU(t)}{dt} &\leq LU(t) \\ \Rightarrow e^{-L(t-t_0)} \frac{dU(t)}{dt} &\leq e^{-L(t-t_0)} LU(t) \\ \Rightarrow e^{-L(t-t_0)} \frac{dU(t)}{dt} - e^{-L(t-t_0)} LU(t) &\leq 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (U(t)e^{-L(t-t_0)}) &\leq 0 \\ e^{-L(t-t_0)} U(t) - e^{-L(t_0-t_0)} U(t_0) &\leq 0 \end{aligned}$$

Ainda, $U(t_0) = 0$ pela definição de U , sendo assim, $U(t) = 0$, e com isso,

$$0 \leq |\phi(t) - \psi(t)| \leq LU(t) = 0$$

e, portanto, $\phi(t) = \psi(t)$. □

Portanto, as condições do Teorema 1.18 são suficientes para implicar que f satisfaz a condição de Lipschitz.

Observação 2. Se uma função $f(t, x)$ satisfaz a condição de Lipschitz com respeito a x , então para cada t , $f(t, x)$ é uniformemente contínua em x . A recíproca é falsa, isto é, a função ser uniformemente contínua não implica que satisfaça a condição de Lipschitz.

De fato, seja $\varepsilon > 0$ dado. Como a função satisfaz a condição de Lipschitz, segue que existe $k > 0$ tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq k|x - y|.$$

Tome $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ e suponha que $|x - y| < \delta$, sendo assim,

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq k|x - y| < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

Para verificar que recíproca não é válida, temos como exemplo a função $f(t, x) = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$, a qual é uniformemente contínua, mas não satisfaz a condição de Lipschitz.

Com efeito, temos que f é contínua e seu domínio é compacto, sendo assim, f é

uniformemente contínua. Por outro lado,

$$\frac{|f(t, x) - f(t, y)|}{|x - y|} = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{|x - y|} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

e $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ é ilimitado para valores suficientemente pequenos de x e y .

1.4 APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

Definição 1.19. *Seja o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.44)$$

com f contínua no retângulo

$$R = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a \text{ e } |x - x_0| \leq b\} \quad (1.45)$$

e a e b positivos. Da continuidade de f no retângulo R , segue que f é limitada. Sendo assim, seja $|f(t, x)| \leq M$ em R e defina $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$. Para o problema de valor inicial (1.44), as aproximações sucessivas (iterações de Picard) são funções ϕ_0, ϕ_1, \dots definidas recursivamente como

$$\begin{cases} \phi_0(t) = x_0 \\ \phi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_n(s)) ds \end{cases} \quad (1.46)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$ e $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Com esta definição, o seguinte resultado verificará que as aproximações sucessivas convergem uniformemente para uma única solução de (1.44).

Teorema 1.20. *Seja $f(t, x)$ contínua que satisfaz a condição de Lipschitz no retângulo R dado em (1.45). Seja M uma cota superior para $|f(t, x)|$ e $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$. Então as aproximações sucessivas $\phi_n(t)$, $n = 0, 1, \dots$ (definidas em (1.46)) existem, são funções contínuas em $|t - t_0| \leq \alpha$ e convergem uniformemente para a solução única $\phi(t)$ do problema de valor inicial em (1.44).*

Demonstração. Vamos provar o resultado no intervalo $[t_0, t_0 + \alpha]$. A demonstração para o intervalo $[t_0 - \alpha, t_0]$ é análoga. Primeiramente, vejamos que $\phi_n(t)$ existe em $[t_0, t_0 + \alpha]$ e é continuamente diferenciável. De fato, $\phi_0(t) = x_0$ é constante e é continuamente diferenciável.

Se supormos que as mesmas condições valem para $\phi_n(t)$, então $f(t, \phi_n(t))$ está bem definida e é contínua em $[t_0, t_0 + \alpha]$. Desta forma, $\phi_{n+1}(t)$ dada em (1.46) existe e é continuamente diferenciável em $[t_0, t_0 + \alpha]$. Por indução, segue que $\phi_n(t)$, para $n = 0, 1, \dots$ existem e são funções contínuas em $[t_0, t_0 + \alpha]$. Ainda, de (1.46) e da limitação de $f(t, x)$, segue que

$$\begin{aligned} |\phi_{n+1}(t) - \phi_0(t)| &= |\phi_{n+1}(t) - x_0| \\ &= \left| \int_{t_0}^t f(s, \phi_n(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, \phi_n(s))| ds \\ &\leq M(t - t_0) \\ &\leq M\alpha. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$|\phi_{n+1}(t) - x_0| \leq M\alpha. \quad (1.47)$$

Agora, iremos verificar que $\phi_n(t)$ converge uniformemente em $[t_0, t_0 + \alpha]$. Para isto, mostraremos por indução que vale a seguinte desigualdade:

$$|\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t)| \leq \frac{M k^{n+1} (t - t_0)^{n+1}}{k (n+1)!}, \text{ para } t \in [t_0, t_0 + \alpha], \quad (1.48)$$

onde k é a constante de Lipschitz.

De fato, o caso $n = 0$ ocorre devido à conclusão obtida em (1.47). Suponha que (1.48) é válida para $n \geq 1$, isto é,

$$|\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)| \leq \frac{M k^n (t - t_0)^n}{k (n)!} \quad (1.49)$$

e vamos mostrar que é válida para $n + 1$. Note que

$$\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t) = \int_{t_0}^t [f(s, \phi_n(s)) - f(s, \phi_{n-1}(s))] ds,$$

sendo assim, como f satisfaz a condição de Lipschitz e pela hipótese de indução em (1.49),

segue que

$$\begin{aligned}
|\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(s, \phi_n(s)) - f(s, \phi_{n-1}(s))] ds \right| \\
&\leq \int_{t_0}^t |f(s, \phi_n(s)) - f(s, \phi_{n-1}(s))| ds \\
&\leq k \int_{t_0}^t |\phi_n(s) - \phi_{n-1}(s)| ds \\
&\leq \frac{M k^{n+1}}{k n!} \int_{t_0}^t (s - t_0)^n ds \\
&= \frac{M k^{n+1} (t - t_0)^{n+1}}{k (n+1)!}.
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Desta forma, verificamos que (1.48) é válida e, ainda, este resultado é usado para concluir que os termos da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t)| \tag{1.51}$$

são majorados por aqueles da série de potências para $\frac{M}{k} e^{k|t-t_0|}$, logo (1.51) é uniformemente convergente em $[t_0, t_0 + \alpha]$. Com isto, a série

$$\phi_0(t) + \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t))$$

é absolutamente e uniformemente convergente em $[t_0, t_0 + \alpha]$ e a soma parcial $\phi_n(t)$, em que

$$\phi_n(t) = \phi_0(t) + \sum_{i=0}^{n-1} (\phi_{i+1}(t) - \phi_i(t))$$

converge uniformemente para uma função contínua $\phi(t)$ em $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Como $f(t, x)$ é uniformemente contínua no retângulo R , segue que $f(t, \phi_n(t))$ converge uniformemente para $f(t, \phi(t))$ quando $n \rightarrow \infty$, logo $\phi(t)$ é uma solução do problema em (1.44). Fazendo $n \rightarrow \infty$ em (1.46), obtemos

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds.$$

Finalmente, vamos verificar que a solução do problema de valor inicial dado em (1.44) é único e, para isso, seja $\psi(t)$ outra solução em $[t_0, t_0 + \alpha]$ e denote-a por

$$\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds.$$

Analogamente à indução verificada em (1.48), obtemos que

$$|\phi_n(t) - \psi(t)| \leq \frac{M k^{n+1} (t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (1.52)$$

para $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ e $n = 0, 1, 2, \dots$. Quando $n \rightarrow \infty$, sabemos que $\phi_n(t) \rightarrow \phi(t)$ uniformemente e (1.52) fornece que $|\phi(t) - \psi(t)| \leq 0$, logo $\phi(t) = \psi(t)$. \square

Para ilustrar a construção destas soluções aproximadas, vejamos os seguintes exemplos:

Exemplo 9. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

o qual é equivalente a equação de Volterra

$$x(t) = 1 + \int_0^t x(s) ds$$

e $\phi_0(t) = x_0 = 1$. Desta forma, temos

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= x_0 + \int_0^t \phi_0(s) ds = 1 + \int_0^t 1 ds = 1 + t \\ \phi_2(t) &= x_0 + \int_0^t \phi_1(s) ds = 1 + \int_0^t (1 + s) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2!}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

De modo geral, temos

$$\begin{aligned}\phi_n(t) &= x_0 + \int_0^t \phi_{n-1}(s) ds = 1 + \int_0^t \left[1 + s + \dots + \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} \right] ds \\ &= 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!},\end{aligned}\tag{1.54}$$

e, quando $n \rightarrow \infty$, temos que $\phi_n(t) \rightarrow e^t$ e $\phi(t) = e^t$ é a solução desejada com t real.

Exemplo 10. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = tx \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

o qual é equivalente a equação de Volterra

$$x(t) = 1 + \int_0^t sx(s) ds$$

e $\phi_0(t) = x_0 = 1$. Desta forma, temos

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= x_0 + \int_0^t s\phi_0(s) ds = 1 + \int_0^t s ds = 1 + \frac{t^2}{2} \\ \phi_2(t) &= x_0 + \int_0^t s\phi_1(s) ds = 1 + \int_0^t s \left(1 + \frac{s^2}{2} \right) ds = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2 \cdot 4}.\end{aligned}\tag{1.55}$$

De modo geral, temos

$$\begin{aligned}\phi_n(t) &= x_0 + \int_0^t s\phi_{n-1}(s) ds \\ &= 1 + \int_0^t s \left[1 + \left(\frac{s^2}{2} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{s^2}{2} \right)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{s^2}{2} \right)^{n-1} \right] ds \\ &= 1 + \left(\frac{t^2}{2} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{t^2}{2} \right)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{t^2}{2} \right)^n.\end{aligned}\tag{1.56}$$

e, quando $n \rightarrow \infty$, temos que $\phi_n(t) \rightarrow e^{\frac{t^2}{2}}$ e $\phi(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ é a solução desejada com t real.

1.5 DEPENDÊNCIA CONTÍNUA

Suponhamos que $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja contínua em $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e que, para cada ponto inicial (t_0, x_0) , passe uma única solução $\phi = \phi(t, t_0, x_0)$ do problema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.57)$$

definida em um intervalo maximal de existência I . Veremos que ϕ depende continuamente e diferenciavelmente (se f for diferenciável) das variáveis (t, t_0, x_0) . E veremos também a dependência em relação às variáveis (t, t_0, x_0, λ) das soluções de uma família de equações do tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.58)$$

em que λ é um parâmetro num espaço euclidiano Λ de tal modo que, para cada λ fixo, (1.58) possui uma única solução $\phi = \phi(t, t_0, x_0, \lambda)$ definida no seu intervalo maximal de existência I . Neste caso, f está definida no aberto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Lambda$.

Lema 1.21. *Seja $\{\phi_n\}$ uma sequência equicontínua e uniformemente limitada de funções reais e contínuas num espaço métrico compacto X . Suponha que toda subsequência uniformemente convergente de $\{\phi_n\}$ possua o mesmo limite ϕ . Então $\{\phi_n\}$ converge uniformemente para ϕ .*

Demonstração. Por absurdo, vamos supor que $\{\phi_n\}$ não converge uniformemente para ϕ . Então existe um ε e uma subsequência $\{\phi_{n'}\}$ tal que $|\phi_{n'}(t_{n'}) - \phi(t_{n'})| \geq \varepsilon$ para alguma sequência $\{t_{n'}\}$ em X . Note que $\{\phi_{n'}\}$ é uniformemente limitada e equicontínua e, sendo X espaço métrico compacto, segue que $\{\phi_{n'}\}$ tem uma subsequência $\{\phi_{n''}\}$ que converge uniformemente para ϕ , o que é um absurdo, pois $|\phi_{n''}(t_{n''}) - \phi(t_{n''})| \geq \varepsilon$, para todo n'' \square

Proposição 1.22. *Seja $f_m : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma sequência de funções contínuas com tal que f_m converge uniformemente para f_0 em cada parte compacta de D . Seja (t_m, x_m) uma sequência de pontos em D que converge para (t_0, x_0) . Suponha que*

$$\begin{cases} \dot{x} = f_m(t, x) \\ x(t_m) = x_m \end{cases}$$

tem uma única solução ϕ_m definida maximamente no seu intervalo maximal de existência I_m . Seja $[a, b] \subset I_0$. Então existe $n_0 = n_0(a, b)$ tal que, para $m > n_0$ $[a, b] \subset I_m$ e $\phi_m|_{[a,b]} \rightarrow \phi_0|_{[a,b]}$ uniformemente.

Demonstração. Seja C um compacto que contém o gráfico de ϕ_0 em $[a, b]$. Seja $D_0 \subset D$ um outro compacto que contém C . Existe n_1 tal que, para $m > n_1$, $|f_m| < M$ em D_0 . Sendo assim, existe $\alpha > 0$ de tal forma que, para todo $(t^1, x^1) \in C$,

$$\begin{cases} \dot{x} = f_m(t, x) \\ x(t^1) = x^1, m > n_1 \end{cases}$$

possui uma única solução definida em $|t - t^1| \leq \alpha$ e seu gráfico está contido em D_0 .

Seja $\varepsilon = \frac{\alpha}{3}$. Existe $n_2 > n_1$ tal que, se $m > n_2$, $(t_m, x_m) \in C$ e $|y_m - t_0| < \varepsilon$ e, desta forma, ϕ_m , $m > n_2$, está bem definida em $|t - t_0| \leq \varepsilon$ pois, $|t_m - t| \leq \alpha = 3\varepsilon$ contém $|t - t_0| \leq \varepsilon$.

Vejamus que a família $F = \{\phi_m |_{|t-t_0| \leq \varepsilon}, m \geq n_2\}$ é uma sequência que satisfaz as hipóteses do Lema 1.21. De fato, esta família é uniformemente limitada e equicontínua pois o gráfico de ϕ_m está no compacto D_0 , com $|\phi'_m(t)| = |f_m(t, \phi_m(t))| < M$ e, ainda, toda subsequência $\phi_{m'}$ uniformemente convergente em $|t - t_0| \leq \varepsilon$ converge para ϕ_0 e, para verificar este fato, basta mostrarmos que $\phi = \lim \phi_{m'}$ é solução de

$$\begin{cases} \dot{x} = f_0(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Com efeito,

$$\phi_{m'}(t) = x_{m'} + \int_{t_{m'}}^t f_{m'}(s, \phi_{m'}(s)) ds$$

e fazendo $m' \rightarrow \infty$, temos

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f_0(s, \phi(s)) ds.$$

Pela unicidade de soluções, segue que $\phi = \phi_0$ em $|t - t_0| \leq \varepsilon$. Desta forma, segue do Lema 1.21 que ϕ_n converge uniformemente para ϕ_0 em $|t - t_0| \leq \varepsilon$.

Se $t_0 + \varepsilon \leq b$, repetindo a construção para a sequência $x_{m'} = \phi_m(t_0 + \varepsilon)$, com $t_{m'} = t_0 + \varepsilon$, obtemos que existe n_3 tal que, para $m > n_3$, ϕ_m está bem definida em $[t_0 - \varepsilon, t_0 + 2\varepsilon]$ e converge uniformemente para ϕ_0 neste intervalo. Repetindo esta construção finitas vezes com, no máximo, $\frac{b-a}{\varepsilon}$ etapas, concluímos que existe $n_0 = n_0(a, b)$ tal que, para $m > n_0$, ϕ_m está bem definida em $[a, b]$ (em outras palavras, $[a, b] \subset I_m$) e converge uniformemente para ϕ_0 em $[a, b]$. \square

Teorema 1.23. *Seja f contínua no conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Lambda$. Para cada $(t_0, x_0, \lambda) \in \Omega$,*

suponha que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} &= f_0(t, x, \lambda) \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \quad (1.59)$$

com λ fixo, possui uma única solução $\phi = \phi(t, t_0, x_0, \lambda)$ definida no seu intervalo maximal de existência (ω_-, ω_+) , $\omega_{\pm} = \omega_{\pm}(t_0, x_0, \lambda)$. Então o conjunto

$$D = \{(t, t_0, x_0, \lambda) : (t_0, x_0, \lambda) \in \Omega \text{ e } t \in (\omega_-(t_0, x_0, \lambda), \omega_+(t_0, x_0, \lambda))\}$$

é aberto em $\mathbb{R} \times \Omega$ e ϕ é contínua em D .

Demonstração. Note primeiramente que as questões de dependência em relação à (t, t_0, x_0, λ) das soluções de (1.58) podem ser reduzidas a questões relativas às soluções de (1.57), sem parâmetros. E isto é verdade pois, substituindo (1.58) por

$$\begin{cases} \dot{y} &= F(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 = (x_0, \lambda_0), \end{cases} \quad (1.60)$$

com $y = (x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \Lambda$ e $F(t, y) = (f(t, x, \lambda); 0)$. Desta forma, a solução de (1.60) pelo ponto (t_0, y_0) é

$$\psi(t, t_0, y_0) = (\phi(t, t_0, x_0, \lambda_0), \lambda_0)$$

e assim, as propriedades de continuidade e diferenciabilidade para ψ também serão válidas para ϕ .

Desta forma, para provar o Teorema, basta prová-lo para equações da forma $\dot{x} = f(t, x)$ com todas as suas soluções únicas. Na Proposição 1.22, tomando $f_m = f$, temos que, para todo $(t_0, x_0) \in \Omega$, dado $\varepsilon > 0$ e $[a, b] \subset I(t_0, x_0)$, existe uma vizinhança $V_0 = V_0(t_0, x_0)$ tal que, para todo $(t', x') \in V_0$, $[a, b] \subset I(t', x')$ e

$$|\phi(t, t', x') - \phi(t, t_0, x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } t \in [a, b].$$

Sendo assim, temos que

$$D' = \bigcup_{t_0 \in \mathbb{R}} I(t_0, x_0) \times \bigcup_{(t_0, x_0) \in \Omega} V_0$$

é aberto e $D' = D$, logo D é aberto. Ainda, como $\phi(t, t_0, x_0)$ é contínua em t , temos que, para s suficientemente próximo de t , $|\phi(s, t_0, x_0) - \phi(t, t_0, x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ e, assim, podemos garantir a

continuidade de ϕ em (t, t_0, x_0) pois, para $t \in (a, b)$, temos que

$$\begin{aligned} |\phi(s, t', x') - \phi(t, t_0, x_0)| &\leq |\phi(s, t', x') - \phi(s, t_0, x_0)| + |\phi(s, t_0, x_0) - \phi(t, t_0, x_0)| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Lema 1.24 (Gronwall⁵). *Sejam u e v funções contínuas não negativas em $[a, b]$ tais que, para $\alpha > 0$,*

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t v(s)u(s)ds, \quad t \in [a, b].$$

Então,

$$u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}$$

e, em particular, se $\alpha = 0$, então $u = 0$.

Demonstração. Se $\alpha > 0$, podemos definir $\omega(t) = \alpha + \int_a^t v(s)u(s)ds$ e, desta forma, $\omega(a) = \alpha$ e $\omega(t) \geq \alpha > 0$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $\omega'(t) = v(t)u(t) \leq v(t)\omega(t)$. Integrando entre a e t , temos que

$$\omega'(t) \leq v(t)\omega(t) \Rightarrow \omega'(t) - v(t)\omega(t) \leq 0,$$

e sendo assim,

$$\begin{aligned} e^{-\int_a^t v(s)ds} [\omega'(t) - v(t)\omega(t)] &\leq 0 \\ \Rightarrow e^{-\int_a^t v(s)ds} \omega'(t) - e^{-\int_a^t v(s)ds} v(t)\omega(t) &\leq 0. \end{aligned}$$

Com isto, segue que

$$\frac{d}{dt} \left(\omega(t) e^{-\int_a^t v(s)ds} \right) \leq 0.$$

Desta forma,

⁵Tullio Grönwall foi um matemático finlandês do século XX conhecido por suas contribuições à teoria das equações diferenciais, as quais têm sido de grande importância para o desenvolvimento da mesma.

$$\begin{aligned}
\omega(t)e^{-\int_a^t v(s)ds} - \omega(a)e^{-\int_a^a v(s)ds} &\leq 0 \\
\Rightarrow \omega(t)e^{-\int_a^t v(s)ds} &\leq \omega(a)e^{-\int_a^a v(s)ds} \\
\Rightarrow \omega(t) &\leq e^{\int_a^t v(s)ds} \omega(a) \\
\Rightarrow \omega(t) &\leq \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$u(t) \leq \omega(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}.$$

Em particular, para $\alpha = 0$,

$$0 \leq u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s)ds} = 0,$$

ou seja, $u(t) = 0$ para todo $t \geq a$. □

Proposição 1.25. *Dado os problemas de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= y_0, \end{cases}$$

com f uma função que satisfaz a condição de Lipschitz e k a constante de Lipschitz de f . Desta forma, para $t \in I(t_0, x_0) \cap I(t_0, y_0)$, as soluções $\phi(t)$ e $\psi(t)$ dos problemas, respectivamente, satisfazem

$$|\phi(t, t_0, x_0) - \psi(t, t_0, y_0)| \leq e^{k|t-t_0|} |x_0 - y_0|.$$

Demonstração. Denotemos $\phi(t) = \phi(t, t_0, x_0)$ e $\psi(t) = \psi(t, t_0, y_0)$. Então pelo Lema 1.5, temos que

$$\phi(t) - \psi(t) = x_0 - y_0 + \int_{t_0}^t [f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s))] ds$$

e

$$\begin{aligned}
|\phi(t) - \psi(t)| &= \left| x_0 - y_0 + \int_{t_0}^t [f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s))] ds \right| \\
&\leq |x_0 - y_0| + \left| \int_{t_0}^t [f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s))] ds \right| \\
&\leq |x_0 - y_0| + \left| \int_{t_0}^t k |\phi(s) - \psi(s)| ds \right|.
\end{aligned}$$

Se $t \geq t_0$, o resultado segue do Lema 1.24 para $\alpha = |x_0 - y_0|$, $u(t) = |\phi(t) - \psi(t)|$ e $v(t) = k$.

Se $t \leq t_0$, temos os problemas de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} &= -f(-t, x) \\ x(-t_0) &= x_0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dot{x} &= -f(-t, x) \\ x(-t_0) &= y_0. \end{cases}$$

Como f é lipschitziana, segue que ambos problemas possuem solução. Definindo $\tilde{\phi}(t) = \phi(-t)$ e $\tilde{\psi}(t) = \psi(-t)$, vejamos que $\tilde{\phi}(t)$ e $\tilde{\psi}(t)$ são soluções dos problemas, respectivamente.

De fato,

$$(\tilde{\phi}(t))' = (\phi(-t))' = \phi'(-t)(-1) = -f(-t, x)$$

$$\tilde{\phi}(t_0) = \phi(-t_0) = x_0.$$

Analogamente,

$$(\tilde{\psi}(t))' = (\psi(-t))' = \psi'(-t)(-1) = -f(-t, x)$$

$$\tilde{\psi}(t_0) = \psi(-t_0) = y_0.$$

Desta forma, temos $-t \geq -t_0$ e, pelo caso anterior,

$$\begin{aligned}
|\tilde{\phi}(t) - \tilde{\psi}(t)| &= |\phi(-t) - \psi(-t)| \\
&\leq e^{k(-t+t_0)} |x_0 - y_0|.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|\phi(t) - \psi(t)| \leq e^{k|t-t_0|} |x_0 - y_0|.$$

□

Observação 3. Se $|f| \leq M$, e ϕ é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

então ϕ satisfaz a condição de Lipschitz relativamente a t , pois, utilizando o Lema 1.5, temos

$$\begin{aligned} |\phi(t) - \phi(s)| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(u, \phi(u)) du - x_0 - \int_{t_0}^s f(u, \phi(u)) du \right| \\ &\leq \left| \int_s^t f(u, \phi(u)) du \right| \\ &\leq \int_s^t |f(u, \phi(u))| du \\ &\leq M \int_s^t du \\ &\leq |t - s| M. \end{aligned}$$

Lema 1.26. *Seja f contínua em $(a, b) \times K$ com K um aberto convexo de \mathbb{R}^n . Se f admite derivada parcial em relação à segunda variável, $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$, contínua em $(a, b) \times K$, então existe uma função $g : (a, b) \times K \times K \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$ contínua tal que*

$$(1) \quad g(t, x, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}, \quad (t, x) \in (a, b) \times K;$$

$$(2) \quad f(t, x_2) - f(t, x_1) = g(t, x_1, x_2)(x_2 - x_1).$$

Estamos utilizando $L(\mathbb{R}^n)$ para denotar o espaço de aplicações lineares de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n , identificado com o espaço de matrizes $n \times n$, ou seja, \mathbb{R}^{n^2} .

Demonstração. Se definirmos $x = x(\theta) = \theta x_2 + (1 - \theta)x_1$ e

$$g(t, x_1, x_2) = \int_0^1 \frac{\partial f(t, \theta x_2 + (1 - \theta)x_1)}{\partial x} d\theta,$$

a continuidade de g segue diretamente da continuidade de $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$. Ainda,

$$g(t, x, x) = \int_0^1 \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} d\theta = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}.$$

Por fim, temos que

$$\begin{aligned} f(t, x_2) - f(t, x_1) &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \theta}(t, \theta x_2 + (1 - \theta)x_1) d\theta \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f(t, \theta x_2 + (1 - \theta)x_1)}{\partial x} (x_2 - x_1) d\theta \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f(t, \theta x_2 + (1 - \theta)x_1)}{\partial x} d\theta (x_2 - x_1) \\ &= g(t, x_1, x_2)(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

□

Teorema 1.27. *Seja f contínua no aberto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Lambda$, com $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$ contínua em Ω . Então, para cada λ fixo, a solução $\phi = \phi(t, t_0, x_0, \lambda)$ de*

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

é única e admite derivada parcial $\frac{\partial \phi}{\partial x_0}$. Ainda, a aplicação $(t, t_0, x_0, \lambda) \rightarrow \frac{\partial \phi(t, t_0, x_0, \lambda)}{\partial x_0}$ é contínua no seu domínio

$$D = \{(t, t_0, x_0, \lambda) : (t_0, x_0, \lambda) \in \Omega, \omega_-(t_0, x_0, \lambda) < t < \omega_+(t_0, x_0, \lambda)\}$$

e

$$x(t) = \frac{\partial \phi(t, t_0, x_0, \lambda)}{\partial x_0} \cdot e_k = \frac{\partial \phi}{\partial x_0^k}(t, t_0, x_0, \lambda)$$

é solução de

$$\begin{cases} \dot{x} &= J(t)x \\ x(t_0) &= e_k, \end{cases} \quad (1.61)$$

com $J(t) = J(t, t_0, x_0, \lambda) = \frac{\partial f(t, \phi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda)}{\partial \phi(t, t_0, x_0, \lambda)}$, para todo $1 \leq k \leq n$.

Demonstração. Sejam $a_- < a_+$ tais que $\omega_-(t_1, x_1, \lambda_1) < a_- < a_+ < \omega_+(t_1, x_1, \lambda_1)$. Pelo Teorema 1.23, para (t_0, x_0, λ) numa vizinhança de (t_1, x_1, λ_1) e todo $t \in [a_-, a_+]$, temos que $\phi(t, t_0, x_0, \lambda)$ está bem definida e é contínua.

Defina $y_h = \phi(t, t_0, x_0 + he_k, \lambda)$ para um valor pequeno de h . Segue da Proposição 1.22 que $y_h \rightarrow y_0$ uniformemente em $[a_-, a_+]$ quando $h \rightarrow 0$. Sendo assim, pelo Lema 1.26, escrevemos

$$\begin{aligned} \frac{d(y_h - y_0)(t)}{dt} &= f(t, y_h(t), \lambda) - f(t, y_0(t), \lambda) \\ &= g(t, y_0(t), y_h(t), \lambda)(y_h(t) - y_0(t)). \end{aligned}$$

A existência de $\frac{\partial \phi}{\partial y_0^k}(t, t_0, y_0, \lambda)$ é equivalente à existência do limite de $x_h(t)$ quando $h \rightarrow 0$ e $x_h = \frac{y_h - y_0}{h}$, para $h \neq 0$.

Mas perceba que x_h é solução da equação linear

$$\begin{cases} \dot{x} &= J(t, h)x \\ x(t_0) &= e_k \end{cases} \quad (1.62)$$

com $J(t, h) = g(t, y_0(t), y_h(t), \lambda)$, pois

$$\begin{aligned} x_h(t_0) &= \frac{y_h - y_0}{h}(t_0) \\ &= \frac{y_h(t_0) - y_0(t_0)}{h} \\ &= \frac{x_0 + he^k - x_0}{h} \\ &= e^k. \end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_h &= \left(\frac{y_h - y_0}{h} \right)' \\
&= \frac{y'_h - y'_0}{h} \\
&= \frac{\phi'(t, t_0, x_0 + he^k, \lambda) - \phi'(t, t_0, x_0, \lambda)}{h} \\
&= \frac{f(t, y_h, \lambda) - f(t, y_0, \lambda)}{h} \\
&= g(t, y_h, y_0, \lambda) \frac{(y_h - y_0)}{h} \\
&= g(t, y_h, y_0, \lambda) x_h
\end{aligned}$$

Note que $J(t, h)$ é contínua para valores pequenos de h e

$$J(t, 0) = g(t, y_0, y_0, \lambda) = \frac{\partial f(t, \phi(t_0, x_0, \lambda), \lambda)}{\partial \phi(t, t_0, x_0, \lambda)} = J(t).$$

Como (1.62) tem soluções únicas, o Teorema 1.23 implica que $\lim_{h \rightarrow 0} x_h(t)$ existe e equivale à $x_0(t) = x(t)$, o qual é solução de (1.62) com $h = 0$, o que é equivalente a (1.61).

Vejamos agora que $\frac{\partial \phi}{\partial y_0^k}$ é contínua em relação a todas as suas variáveis e, para isto, considere a família de equações dependentes do parâmetro (t_0, x_0, λ) dada por

$$\begin{cases} \dot{x} &= J(t, t_0, x_0, \lambda)x \\ x(t_0) &= e_k. \end{cases} \quad (1.63)$$

A função $J(t, t_0, x_0, \lambda)x$ é contínua em $(t, t_0, x_0, \lambda, x)$ no conjunto $D \times \mathbb{R}^n$ e (1.63) tem soluções únicas para cada (t_0, x_0, λ) fixado. O Teorema 1.23 implica que $\frac{\partial \phi}{\partial y_0^k}$ é contínua em todos os seus argumentos. Desta forma, ϕ é diferenciável relativamente a y_0 e $\frac{\partial \phi}{\partial x_0}$ é contínua em D .

Analogamente, verifica-se que ϕ admite derivada parcial contínua em relação a t_0 .

□

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

2.1 SISTEMAS LINEARES

Definição 2.1. *Considere o sistema linear de n equações diferenciais de primeira ordem*

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + h_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1)$$

em que $t \in [a, b]$ e $a_{ij}(t)$ e $h(t)$ são funções reais contínuas com i, j variando de 1 até n . Reescrevendo este somatório de maneira mais explícita, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + h_1(t) \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + h_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + h_n(t) \end{array} \right.$$

Desta forma, podemos utilizar a notação em matriz

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ \vdots \\ h_n(t) \end{pmatrix}$$

Finalmente, podemos denotar

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

e

$$h(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ \vdots \\ h_n(t) \end{pmatrix}.$$

Desta forma, escrevemos o sistema linear dado em (2.1) da seguinte forma:

$$\dot{x} = A(t)x + h(t). \quad (2.2)$$

Se $h(t) = 0$ em (2.2), então o sistema é chamado linear homogêneo. Caso $h(t) \neq 0$, então é chamado linear não homogêneo.

Teorema 2.2. Considere o problema de valor inicial com um sistema linear não homogêneo

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(t)x + h(t) \\ x(t_0) &= x_0, \text{ para } t_0 \in [a, b] \end{cases} \quad (2.3)$$

e suponha que $A(t)$ e $h(t)$ são contínuas¹ para $t \in [a, b]$. Então existe uma única solução continuamente diferenciável $\phi(t)$ definida em todo intervalo $[a, b]$ que satisfaz (2.3)

Serão apresentadas duas demonstrações para este resultado. A primeira utilizará resultados já provados, enquanto a segunda remete a mesma construção realizada na demonstração do Teorema 1.20 de Aproximações Sucessivas.

Demonstração 1. Se $A(t)$ e $h(t)$ forem contínuas no retângulo

$$R = \{(t, x) : t \in [a, b] \text{ e } x \in \mathbb{R}^n\},$$

segue do Teorema 1.10, com $f(t, x) = A(t)x + h(t)$ contínua, que existe uma solução em algum intervalo contendo t_0 .

Ainda, como $f(t, x) = A(t)x + h(t)$ é contínua em R e R é compacto, temos que $f(t, x)$ é limitada. Segue do Teorema 1.14 que a solução existe para todo $t \in [a, b]$.

Finalmente, note que

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial A(t)x + h(t)}{\partial x} = A(t),$$

e desta forma, $f(t, x)$ é contínua e sua derivada parcial em x também. Segue do Teorema 1.18 que, se existe uma solução, ela é única. \square

¹Entendemos que a matriz $A(t)$ e o vetor coluna $h(t)$ são contínuos quando todas suas funções componentes forem contínuas.

Demonstração 2. Considere sequência de aplicações $\phi_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\begin{cases} \phi_0(t) = x_0 \\ \phi_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [A(s)\phi_{i-1}(s) + h(s)]ds, \quad i \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Vamos verificar que, para todo intervalo compacto $[p, q] \subset [a, b]$, a sequência ϕ_i converge uniformemente em $[p, q]$ para uma solução de (2.3). Para isto, considere

$$\begin{cases} K = \sup\{\|A(s)\| : s \in [p, q]\}; \\ c = \sup\{|\phi_1(s) - \phi_0(s)| : s \in [p, q]\}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Desta forma, temos as seguintes desigualdades, supondo sem perda de generalidade que $t > t_0$:

$$\begin{aligned} |\phi_2(t) - \phi_1(t)| &= \left| \int_{t_0}^t A(s)[\phi_1(s) - \phi_0(s)]ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|A(s)\| \cdot |\phi_1(s) - \phi_0(s)|ds \\ &\leq Kc(t - t_0) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |\phi_3(t) - \phi_2(t)| &= \left| \int_{t_0}^t A(s)[\phi_2(s) - \phi_1(s)]ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|A(s)\| \cdot |\phi_2(s) - \phi_1(s)|ds \\ &\leq \int_{t_0}^t K Kc(s - t_0)ds \\ &= K^2c \int_{t_0}^t (s - t_0)ds \\ &= \frac{K^2c(t - t_0)^2}{2!}. \end{aligned}$$

Indutivamente, obtemos que

$$|\phi_{i+1}(t) - \phi_i(t)| \leq \frac{K^i c}{i!} (t - t_0)^i, \forall t \in [p, q]$$

e desta forma

$$\|\phi_{i+1}(t) - \phi_i(t)\| = \sup_{t \in [p, q]} |\phi_{i+1}(t) - \phi_i(t)| \leq \frac{[K(q-p)]^i c}{i!}, i \in \mathbb{N}.$$

Agora perceba que a série

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{[K(q-p)]^i c}{i!}$$

é convergente (ver Observação 4). Logo, ϕ_i converge uniformemente, digamos para ϕ , em $[p, q]$ pelo teste de Weierstrass (ver Observação 5). Desta forma, ϕ existe em $[a, b]$, pois este intervalo é união de intervalos compactos $[p, q]$ e, fazendo $i \rightarrow \infty$ em (2.4), temos, para todo $t \in [a, b]$,

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [A(s)\phi(s) + h(s)] ds$$

e, derivando em t , obtemos

$$\phi'(t) = A(t)\phi(t) + h(t).$$

Ainda, temos que

$$\phi(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} [A(s)\phi(s) + h(s)] ds = x_0,$$

ou seja, ϕ é solução de (2.3).

Por fim, vejamos que ϕ é única e, para isso, suponhamos que ψ é uma outra solução de (2.3) em $[a, b]$. Então, para todo $t \in [a, b]$,

$$\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [A(s)\psi(s) + h(s)] ds.$$

Denotemos $m = \sup_{t \in [a, b]} |\psi(t) - \phi_1(t)|$, então

$$\begin{aligned} |\psi(t) - \phi_2(t)| &= \left| \int_{t_0}^t A(s)[\psi(s) - \phi_1(s)] ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|A(s)\| \cdot |\psi(s) - \phi_1(s)| ds \\ &\leq Km(t - t_0) \end{aligned}$$

e

$$|\psi(t) - \phi_3(t)| \leq \frac{K^2 m}{2!} (t - t_0)^2.$$

Novamente por indução, obtemos

$$|\psi(t) - \phi_i(t)| \leq \frac{K^{i-1} m}{(i-1)!} (t - t_0)^{i-1}$$

e

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{K^{i-1} m}{(i-1)!} (t - t_0)^{i-1} = 0.$$

Portanto, $\psi(t) = \phi(t)$. □

Observação 4. O teste da razão afirma que, dada uma série $\sum a_n$ com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

com L um número não negativo, tem-se que

- 1) Se $L < 1$, então $\sum a_n$ é absolutamente convergente;
- 2) Se $L > 1$, então $\sum a_n$ é divergente;
- 3) Se $L = 1$, nada pode-se afirmar.

Desta forma, seja a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{K^n c (q-p)^n}{n!},$$

obtida na demonstração do Teorema 2.2. Temos que

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{K^{n+1}c(q-p)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{K^n c(q-p)^n}{n!}} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{K^{n+1}c(q-p)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{K^n c(q-p)^n} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{K(q-p)}{n+1} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K(q-p)}{n+1} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Ou seja, $L = 0 < 1$ e L é não negativo. Desta forma, pelo teste da razão, a série é absolutamente convergente e, portanto, convergente.

Observação 5. O teste de Weierstrass afirma que uma série de funções $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformemente em $\Omega \subset \mathbb{R}$ se são satisfeitas as seguintes propriedades, com M_i uma série numérica:

- (1) $\|f_i\|_{\Omega} \leq M_i$;
- (2) $\sum_{i=0}^{\infty} M_i$ é convergente.

Desta forma, seja $f_i = \phi_{i+1}(t) - \phi_i(t)$, em que ϕ_i é a sequência de aplicações definida no Teorema 2.2. Temos que

$$\|f_i\|_{\Omega} = \|\phi_{i+1}(t) - \phi_i(t)\| = \sup_{t \in [p, q]} |\phi_{i+1}(t) - \phi_i(t)| \leq \frac{[K(q-p)]^i c}{i!} = M_i,$$

e a Observação 4 prova que $\sum_{i=0}^{\infty} M_i < \infty$. Sendo assim, aplicando o teste de Weierstrass, obtemos que $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge, ou seja, $\sum_{k=0}^{\infty} (\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t))$ converge.

Finalmente, note que podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \phi_i(t) &= \phi_0(t) + (\phi_1(t) - \phi_0(t)) + \dots + (\phi_i(t) - \phi_{i-1}(t)) \\
 &= \phi_0(t) + \sum_{j=0}^i (\phi_j(t) - \phi_{j-1}(t))
 \end{aligned}$$

e

$$\sum_{j=0}^i (\phi_{j+1}(t) - \phi_j(t)) \leq \sum_{j=0}^{\infty} (\phi_{j+1}(t) - \phi_j(t)) < \infty,$$

logo a sequência de aplicações ϕ_i é convergente.

Exemplo 11. Dado problema de valor inicial de segunda ordem homogêneo

$$\begin{cases} \ddot{y} + e^t \dot{y} + (1+t)y = 0 \\ y(1) = 0 \\ \dot{y}(1) = 0 \end{cases}$$

e denotando $y = x_1$ e $\dot{y} = x_2$, temos

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = -e^t \dot{y} - (1+t)y = -e^t x_2 - (1+t)x_1 \end{cases}$$

Reescrevendo em formato de matriz, segue que

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1+t) & -e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

e note que a solução identicamente nula satisfaz (2.6) e, como as funções na matriz são contínuas para $t \in (-\infty, \infty)$, segue do Teorema 2.2 que esta solução é única.

2.2 RESULTADOS PARA SISTEMA HOMOGÊNEO

Definição 2.3. Considerando o sistema homogêneo

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (2.7)$$

dizemos que a matriz $n \times n$ $\Phi(t)$ é solução fundamental se cada coluna satisfizer o problema (2.7) e se $\det \Phi(t) \neq 0$. Ainda, considerando um tempo inicial t_0 , chamamos de matriz solução principal $\Phi(t)$ a matriz solução fundamental que satisfaz $\Phi(t_0) = I$, com I a matriz identidade de ordem $n \times n$.

Com as notações $A(t) = [a_{ij}(t)]$ a matriz $n \times n$ em (2.7), $\Phi(t) = [\phi_{ij}(t)]$ a matriz solução (ou matriz solução fundamental) de (2.7), $X(t) = [x_{ij}(t)]$ uma matriz $n \times n$, com $i, j = 1, \dots, n$ em todos os casos, temos os seguintes resultados:

Teorema 2.4. Considere a equação diferencial matricial

$$\dot{X} = A(t)X, \quad t \in [a, b]. \quad (2.8)$$

Se Φ é uma matriz solução fundamental de (2.7), então Φ satisfaz (2.8) para $t \in [a, b]$.

Demonstração. Como Φ é solução fundamental de (2.7), segue que cada uma de suas colunas satisfazem (2.7). Denotando cada coluna de Φ por $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$, então para $t \in [a, b]$, temos que

$$\dot{\Phi} = [\dot{\phi}_1, \dots, \dot{\phi}_n] = [A(t)\phi_1, \dots, A(t)\phi_n] = A(t)[\phi_1, \dots, \phi_n] = A(t)\Phi.$$

□

Teorema 2.5. [Fórmula de Abel] Suponha que Φ é uma matriz solução de $\dot{X} = A(t)X$, para $t \in [a, b]$ e fixe $t_0 \in [a, b]$. Então

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr} A(s) ds}, \quad (2.9)$$

para todo $t \in [a, b]$.

Demonstração. Vamos provar para o caso $n = 2$. Para isso, veja que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\det \Phi(t)] &= \frac{d}{dt} (\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21}) \\ &= \dot{\phi}_{11}\phi_{22} + \phi_{11}\dot{\phi}_{22} - \dot{\phi}_{12}\phi_{21} - \phi_{12}\dot{\phi}_{21} \\ &= \begin{vmatrix} \dot{\phi}_{11} & \dot{\phi}_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \dot{\phi}_{21} & \dot{\phi}_{22} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}\phi_{11} + a_{12}\phi_{21} & a_{11}\phi_{12} + a_{12}\phi_{22} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ a_{21}\phi_{11} + a_{22}\phi_{21} & a_{21}\phi_{12} + a_{22}\phi_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

No determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}\phi_{11} + a_{12}\phi_{21} & a_{11}\phi_{12} + a_{12}\phi_{22} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{vmatrix},$$

podemos multiplicar a segunda linha por a_{12} e subtrair este resultado da primeira linha sem alterar o determinante. Analogamente, no determinante

$$\begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ a_{21}\phi_{11} + a_{22}\phi_{21} & a_{21}\phi_{12} + a_{22}\phi_{22} \end{vmatrix},$$

podemos multiplicar a primeira linha por a_{21} e subtrair da segunda sem alterar o determinante.

Desta forma, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\det \Phi(t)] &= \begin{vmatrix} a_{11}\phi_{11} & a_{11}\phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ a_{22}\phi_{21} & a_{22}\phi_{22} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \det \Phi + a_{22} \det \Phi \\ &= \operatorname{tr}A(t) \det \Phi(t). \end{aligned}$$

Finalmente, temos que

$$\frac{d}{dt}[\det \Phi(t)] - \operatorname{tr}A(t) \det \Phi(t) = 0.$$

Utilizando fator integrante, temos que

$$\begin{aligned} e^{-\int_{t_0}^t \operatorname{tr}A(s)ds} \left[\frac{d}{dt}[\det \Phi(t)] - \operatorname{tr}A(t) \det \Phi(t) \right] &= 0 \\ e^{-\int_{t_0}^t \operatorname{tr}A(s)ds} \frac{d}{dt}[\det \Phi(t)] - e^{-\int_{t_0}^t \operatorname{tr}A(s)ds} \operatorname{tr}A(t) \det \Phi(t) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left[\det \Phi(t) e^{-\int_{t_0}^t \operatorname{tr}A(s)ds} \right] &= 0 \\ \det \Phi(t) e^{-\int_{t_0}^t \operatorname{tr}A(s)ds} - \det \Phi(t_0) e^{-\int_{t_0}^{t_0} \operatorname{tr}A(s)ds} &= 0 \\ \det \Phi(t) e^{-\int_{t_0}^t \operatorname{tr}A(s)ds} &= \det \Phi(t_0) \\ \det \Phi(t) &= \det \Phi(t_0) e^{\int_{t_0}^t \operatorname{tr}A(s)ds}. \end{aligned}$$

□

Observação 6. A demonstração do Teorema 2.5 foi feita para o caso $n = 2$. O caso n -dimensional é demonstrado de maneira análoga utilizando a fórmula para determinantes de matrizes de ordem $n \times n$ e fazendo as devidas adaptações.

Corolário 2.6. *Suponha que Φ é uma matriz solução de (2.8), então $\det \Phi(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$ ou $\det \Phi(t) = 0$ para todo $t \in [a, b]$.*

Demonstração. Note na fórmula de Abel dada em (2.9) que o determinante de Φ em qualquer t é caracterizado (múltiplo) do determinante de Φ no ponto t_0 e, como a exponencial nunca se anula, segue o resultado. \square

Observação 7. No caso de funções f, g diferenciáveis, vale a regra

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Da mesma forma, se tivermos duas matrizes A, B diferenciáveis, então vale a mesma fórmula, ou seja,

$$\frac{d}{dt}[AB] = \frac{d}{dt}[A]B + A\frac{d}{dt}[B]$$

e o cálculo para verificar esta igualdade é direto. Este será um recurso bastante utilizado na demonstração dos próximos teoremas.

Teorema 2.7. *Seja Φ uma matriz solução fundamental do problema dado em (2.7) e C uma matriz $n \times n$ constante com $\det C \neq 0$. Então ΦC é uma matriz solução fundamental de (2.7).*

Demonstração. De fato, note que

$$\frac{d}{dt}[\Phi C] = \dot{\Phi}C = [A(t)\Phi]C = A(t)[\Phi C]$$

e, desta forma, ΦC é uma matriz solução. Por fim, temos que $\det(\Phi C) \neq 0$, pois

$$\det(\Phi C) = \det \Phi \det C \neq 0.$$

\square

Teorema 2.8. *Suponha que $\Phi(t)$ e $\Psi(t)$ são duas matrizes solução fundamentais diferentes de (2.7) para $t \in [a, b]$. Então existe uma matriz C de ordem $n \times n$, constante com $\det C \neq 0$ tal que*

$$\Psi = \Phi C.$$

Demonstração. Por hipótese, $\det \Phi(t) \neq 0$, pois é solução fundamental. Logo, existe $\Phi^{-1}(t)$, para todo $t \in [a, b]$ e $\Phi\Phi^{-1} = I$. Derivando esta igualdade, obtemos

$$\frac{d}{dt}(\Phi\Phi^{-1}) = \frac{d}{dt}I$$

$$\dot{\Phi}\Phi^{-1} + \Phi\frac{d}{dt}\Phi^{-1} = 0$$

$$\Phi\frac{d}{dt}\Phi^{-1} = -\dot{\Phi}\Phi^{-1}.$$

Desta forma, temos a seguinte igualdade:

$$\frac{d}{dt}\Phi^{-1} = -\Phi^{-1}\dot{\Phi}\Phi^{-1} \quad (2.10)$$

e, utilizando-a, provaremos que $\frac{d}{dt}(\Phi^{-1}\Psi) = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Phi^{-1}\Psi) &= \Phi^{-1}\dot{\Psi} + \left(\frac{d}{dt}\Phi^{-1}\right)\Psi \\ &= \Phi^{-1}A(t)\Psi + (-\Phi^{-1}\dot{\Phi}\Phi^{-1})\Psi \\ &= \Phi^{-1}A(t)\Psi - \Phi^{-1}A(t)\Phi\Phi^{-1}\Psi \\ &= \Phi^{-1}A(t)\Psi - \Phi^{-1}A(t)\Psi \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\Phi^{-1}\Psi = C$ e, finalmente,

$$\Psi = \Phi C,$$

com C uma matriz constante de ordem $n \times n$ com $\det C \neq 0$. □

Exemplo 12. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2, \end{cases}$$

o qual pode ser escrito em forma de matriz como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Se tomarmos

$$\phi_1(t) = \phi_2(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix},$$

temos que

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz solução de (2.11), porém não é fundamental, pois $\det \Phi(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, se tomarmos

$$\phi_1(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \phi_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix},$$

temos então

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

uma matriz solução fundamental, pois cada coluna satisfaz o problema e $\det \Phi(t) = e^0 = 1$ que é diferente de 0 para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definição 2.9. Dada a equação em (2.7), em que x e \dot{x} são vetores colunas de dimensão n , definimos equação adjunta como

$$\dot{y} = -yA(t) \tag{2.12}$$

com \dot{y} e y vetores linha também com dimensão n .

Teorema 2.10. Se Φ é uma matriz solução fundamental de $\dot{x} = A(t)x$, então Φ^{-1} é matriz solução fundamental de $\dot{y} = -yA(t)$.

Demonstração. Derivando a igualdade $\Phi\Phi^{-1} = I$, temos o seguinte:

$$\dot{\Phi}\Phi^{-1} + \Phi \frac{d}{dt}(\Phi^{-1}) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\Phi^{-1}) = -\Phi^{-1}\dot{\Phi}\Phi^{-1}.$$

Mas como Φ é solução de $\dot{x} = A(t)x$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Phi^{-1}) &= -\Phi^{-1}\dot{\Phi}\Phi^{-1} \\ &= -\Phi^{-1}A(t)\Phi\Phi^{-1} \\ &= -\Phi^{-1}A(t) \end{aligned}$$

e, portanto, Φ^{-1} é matriz solução fundamental da equação adjunta. □

Teorema 2.11. [Variação das Constantes] Se Φ é uma matriz solução fundamental do sistema linear homogêneo $\dot{x} = A(t)x$, então toda solução do sistema não homogêneo $\dot{x} = A(t)x + h(t)$ é dada por

$$\phi(t) = \Phi(t) \left[\Phi^{-1}(t_0)\phi(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)h(s)ds \right],$$

para todo $t_0 \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja Φ uma matriz solução fundamental do sistema linear homogêneo. Pelo Teorema 2.7, a solução geral deste sistema pode ser escrita como

$$\phi(t) = \Phi(t)c \tag{2.13}$$

com c um vetor constante arbitrário. Para resolver a equação não homogênea, vamos reescrever (2.13) com c uma função de t (por isso o nome variação das constantes) e, desta forma, temos

$$\phi(t) = \Phi(t)c(t) \quad (2.14)$$

e, derivando, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \dot{\Phi}c + \Phi\dot{c} \\ &= A\Phi c + \Phi\dot{c} \\ &= A\phi + \Phi\dot{c}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Comparando as equações em (2.2) e (2.15), temos que (2.15) satisfaz o sistema não homogêneo se $\Phi\dot{c} = h$, logo $\dot{c} = \Phi^{-1}h$. Desta forma,

$$\begin{aligned} c(t) - c(t_0) &= \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)h(s)ds \\ c(t) &= c(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)h(s)ds \end{aligned}$$

e segue de (2.14) que

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \Phi(t)c(t) \\ &= \Phi(t) \left[c(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)h(s)ds \right] \\ &= \Phi(t) \left[\Phi^{-1}(t_0)\phi(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)h(s)ds \right]. \end{aligned}$$

Portanto, a solução da equação não homogênea será

$$\phi(t) = \Phi(t) \left[\Phi^{-1}(t_0)\phi(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)h(s)ds \right].$$

□

2.3 SISTEMAS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

Definição 2.12. *Um problema da forma*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + h(t) \\ x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in [a, b]. \end{cases} \quad (2.16)$$

com A uma matriz constante $n \times n$ com n^2 entradas e $h(t)$ um vetor coluna de ordem n de funções contínuas é chamado sistema linear com coeficientes constantes. Um sistema neste formato é importante para o estudo de dinâmicas econômicas e análise de estabilidade

Definição 2.13. *Dada uma matriz constante $n \times n$ A , definimos*

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n, \quad (2.17)$$

a qual é uma série convergente para todo A e t .

Teorema 2.14. *Seja A uma matriz constante $n \times n$ e considere o sistema homogêneo*

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.18)$$

então uma matriz solução fundamental Φ é dada por

$$\Phi(t) = e^{At} \quad (2.19)$$

e, dada a condição inicial $x(t_0) = x_0$, a solução é dada por

$$\phi(t) = e^{A(t-t_0)} x_0. \quad (2.20)$$

Demonstração. Para verificar que Φ é solução, basta mostrarmos que

$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At}$$

e, para isto, seja $h > 0$ para aplicar a definição de limite, ou seja,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(e^{At}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} e^{At} \left(\frac{e^{Ah} - I}{h} \right) \\
 &= e^{At} \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \left[\left(\frac{1}{h} \right) \left(I + Ah + \frac{1}{2!} A^2 h^2 + \dots - I \right) \right] \right\} \\
 &= e^{At} \left[A + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2!} A^2 h + \frac{1}{3!} A^3 h^2 + \dots \right) \right] \\
 &= Ae^{At}.
 \end{aligned}$$

E, para verificar que esta solução Φ é fundamental, basta utilizarmos a fórmula de Abel dada em (2.9) para verificar que

$$\det \Phi(t) = \det e^{At} = (\det e^{At_0}) e^{\text{tr}A(t-t_0)} \neq 0.$$

Por fim, dado valor inicial $x(t_0) = x_0$, temos que $\phi(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$ é solução pois, analogamente,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(e^{A(t-t_0)}x_0) &= x_0 \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(t-t_0+h)} - e^{A(t-t_0)}}{h} \right) \\
 &= x_0 \left[\lim_{h \rightarrow 0} e^{A(t-t_0)} \left(\frac{e^{Ah} - I}{h} \right) \right] \\
 &= x_0 e^{A(t-t_0)} \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \left[\left(\frac{1}{h} \right) \left(I + Ah + \frac{1}{2!} A^2 h^2 + \dots - I \right) \right] \right\} \\
 &= x_0 A e^{A(t-t_0)}
 \end{aligned}$$

e, ainda,

$$\phi(t_0) = e^{A(t_0-t_0)}x_0 = x_0.$$

□

A expressão para e^{At} na Definição 2.13 não é muito prática. Vejamos uma outra forma de calcular e^{At} .

Definição 2.15. Dada A uma matriz constante $n \times n$, expressamos

$$e^{At} = a_0 I + a_1 At + a_2 A^2 t^2 + \dots + a_{n-1} A^{n-1} t^{n-1}, \quad (2.21)$$

com a_0, a_1, \dots, a_{n-1} funções de t determinadas da seguinte forma: defina

$$r(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1} \quad (2.22)$$

e, para cada autovalor λ_i de At com multiplicidade 1, escreva

$$e^{\lambda_i} = r(\lambda_i) \quad (2.23)$$

para encontrar os coeficientes a_0, \dots, a_{n-1} . Se a multiplicidade de λ_i for k com $k > 1$, escreva

$$e^{\lambda_i} = \frac{dr(\lambda)}{d\lambda}; \quad e^{\lambda_i} = \frac{d^2 r(\lambda)}{d\lambda^2}; \dots; \quad e^{\lambda_i} = \frac{d^{k-1} r(\lambda)}{d\lambda^{k-1}}, \quad (2.24)$$

com todas as derivadas aplicadas em λ_i para determinar a_0, \dots, a_{n-1} .

Exemplo 13. Para calcular e^{At} quando $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, precisamos determinar os autovalores de At , os quais são dados da seguinte forma:

$$\begin{vmatrix} 2t - \lambda & 0 \\ 0 & 2t - \lambda \end{vmatrix} = (2t - \lambda)(2t - \lambda) = 0$$

e, desta forma, $\lambda = 2t$ é autovalor de multiplicidade 2. De (2.22), obtemos $r(2t) = a_0 + a_1 2t$. Ainda, de (2.23), temos $e^{2t} = a_0 + a_1 2t$ e, finalmente, de (2.24), temos $e^{2t} = a_1$. Desta forma, podemos determinar os valores de a_0 e a_1 em função de t , pois $a_1 = e^{2t}$ e

$$a_0 = e^{2t} - a_1 2t = e^{2t} - e^{2t} 2t = e^{2t}(1 - 2t).$$

Com os valores de a_0 e a_1 determinados em função de t , aplicamos (2.21) para

encontramos o resultado desejado, isto é,

$$\begin{aligned}
 e^{At} &= a_0 I + a_1 A t \\
 &= \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 2t & 0 \\ 0 & a_1 2t \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} e^{2t} - e^{2t} 2t + e^{2t} 2t & 0 \\ 0 & e^{2t} - e^{2t} 2t + e^{2t} 2t \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \\
 &= e^{2t} I.
 \end{aligned}$$

Exemplo 14. Para calcular e^{At} quando $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, precisamos determinar os autovalores de At , os quais são dados da seguinte forma:

$$\begin{vmatrix} 2t - \lambda & 0 \\ 0 & -3t - \lambda \end{vmatrix} = (2t - \lambda)(-3t - \lambda) = 0$$

e, desta forma, $\lambda_1 = 2t$ e $\lambda_2 = -3t$ são autovalores de multiplicidade 1. De (2.22), obtemos

$$r(2t) = a_0 + a_1 2t$$

$$r(-3t) = a_0 + a_1(-3t).$$

Ainda, de (2.23), temos

$$e^{2t} = a_0 + a_1 2t$$

$$e^{-3t} = a_0 + a_1(-3t).$$

Desta forma, podemos determinar os valores de a_0 e a_1 em função de t , pois

$$e^{2t} - e^{-3t} = a_1 5t \Rightarrow a_1 = \frac{1}{5t}(e^{2t} - e^{-3t});$$

$$e^{-3t} = a_0 + \frac{1}{5t}(e^{2t} - e^{-3t})(-3t) = a_0 + \frac{3}{5}(e^{-3t} - e^{2t}) \Rightarrow a_0 = \frac{2}{5}e^{-3t} + \frac{3}{5}e^{2t}.$$

Com os valores de a_0 e a_1 determinados em função de t , aplicamos (2.21) para

encontramos o resultado desejado, isto é,

$$\begin{aligned}
 e^{At} &= a_0 I + a_1 A t \\
 &= \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 2t & 0 \\ 0 & a_1(-3t) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{2}{5}e^{-3t} + \frac{3}{5}e^{2t} + \frac{2t}{5t}(e^{2t} - e^{-3t}) & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}e^{-3t} + \frac{3}{5}e^{2t} - \frac{3t}{5t}(e^{2t} - e^{-3t}) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Os Exemplos 13 e 14 indicam como calcular e^{At} . Aplicando Teorema 2.14, encontramos uma solução para o problema homogêneo $\dot{x} = Ax$ com condição inicial $x(t_0) = x_0$ da forma

$$\Phi(t)x_0 = e^{A(t-t_0)}x_0. \quad (2.25)$$

Além disso, se tivermos um sistema não homogêneo

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + h(t) \\ x(t_0) &= x_0, t_0 \in [a, b], \end{cases}$$

então a solução é obtida aplicando o Teorema 2.11 e é da forma

$$\phi(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}h(s)ds.$$

Exemplo 15. Dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\dot{x} - 8x &= 0 \\ x(1) &= 2 \\ \dot{x}(1) &= 3, \end{cases}$$

denotemos $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$, ou seja, temos $\dot{x}_1 = \dot{x} = x_2$ e $\dot{x}_2 = \ddot{x} = -2\dot{x} + 8x = -2x_2 + 8x_1$ e escrevendo em formato de matriz, obtemos

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Neste formato, temos $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$ e calculando os autovalores de At , obtemos

$$\begin{vmatrix} -\lambda & t \\ 8t & -2t - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2t\lambda - 8t^2 = 0,$$

donde segue que $\lambda_1 = 2t$ e $\lambda_2 = -4t$. Desta forma, temos

$$\begin{cases} e^{2t} = a_0 + a_1 2t \\ e^{-4t} = a_0 + a_1(-4t) \end{cases}$$

e obtemos $a_0 = \frac{1}{3}(2e^{2t} + e^{-4t})$ e $a_1 = \frac{1}{6t}(e^{2t} - e^{-4t})$. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} e^{At} &= a_0 I + a_1 At \\ &= \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_1 t \\ a_1 8t & a_1(-2t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2e^{2t} + e^{-4t}) & \frac{1}{6}(e^{2t} - e^{-4t}) \\ \frac{8}{6}(e^{2t} - e^{-4t}) & \frac{1}{3}(2e^{2t} + e^{-4t}) - \frac{2}{6}(e^{2t} - e^{-4t}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4e^{2t} + 2e^{-4t} & e^{2t} - e^{-4t} \\ 8e^{2t} - 8e^{-4t} & 2e^{2t} + 4e^{-4t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente, note que $t_0 = 1$ e aplicando (2.25), temos que

$$\begin{aligned} \Phi(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4e^{2(t-1)} + 2e^{-4(t-1)} & e^{2(t-1)} - e^{-4(t-1)} \\ 8e^{2(t-1)} - 8e^{-4(t-1)} & 2e^{2(t-1)} + 4e^{-4(t-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11e^{2(t-1)} + e^{-4(t-1)} \\ 22e^{2(t-1)} - 4e^{-4(t-1)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo 16. Dado o problema

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = 1 \\ x(\pi) = 1 \\ \dot{x}(\pi) = 2, \end{cases}$$

denotemos $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$ e escrevendo em formato de matriz, obtemos

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_1(\pi) \\ x_2(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Neste formato, temos $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e calculando os autovalores de At , obtemos

$$\begin{vmatrix} -\lambda & t \\ -t & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + t^2 = 0,$$

donde segue que $\lambda_1 = +it$ e $\lambda_2 = -it$. Desta forma, temos

$$\begin{cases} e^{it} = a_0 + a_1 it \\ e^{-it} = a_0 - a_1 it \end{cases}$$

e obtemos $a_0 = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ e $a_1 = \frac{1}{2it}(e^{it} - e^{-it})$. Pelas leis de Euler dadas por

$$\begin{aligned} e^{it} &= \cos(t) + i\text{sen}(t) \\ e^{-it} &= \cos(t) - i\text{sen}(t), \end{aligned}$$

temos que $a_0 = \cos(t)$ e $a_1 = \frac{\text{sen}(t)}{t}$. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} e^{At} &= a_0 I + a_1 At \\ &= \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_1 t \\ -a_1 t & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) & \text{sen}(t) \\ -\text{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente, note que $t_0 = \pi$ e aplicando (2.25), temos que

$$\begin{aligned} \Phi(t)x_0 = e^{A(t-t_0)}x_0 &= \begin{pmatrix} \cos(t-\pi) & \text{sen}(t-\pi) \\ -\text{sen}(t-\pi) & \cos(t-\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t-\pi) + 2\text{sen}(t-\pi) \\ -\text{sen}(t-\pi) + 2\cos(t-\pi) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e^{A(t-s)}h(s) &= \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \text{sen}(t-s) \\ -\text{sen}(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \text{sen}(t-s) \\ \cos(t-s) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}h(s) &= \begin{pmatrix} \int_{t_0}^t \text{sen}(t-s)ds \\ \int_{t_0}^t \cos(t-s)ds \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 - \cos(t - \pi) \\ \text{sen}(t - \pi) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
 \phi(t) &= e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}h(s)ds \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(t - \pi) + 2\text{sen}(t - \pi) \\ -\text{sen}(t - \pi) + 2\cos(t - \pi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \cos(t - \pi) \\ \text{sen}(t - \pi) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 + 2\text{sen}(t - \pi) \\ 2\cos(t - \pi) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

3 UMA INTRODUÇÃO DOS MÉTODOS DE ESTABILIDADE

3.1 INTRODUÇÃO

Para motivar as ideias que serão apresentadas, retomemos o Exemplo 3 já estudado anteriormente e os conceitos vistos até o presente momento e, para isso, considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = c, c > 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

A continuidade de $f(t, x) = x^2$ garante a existência de uma solução em algum intervalo pelo Teorema 1.10. Ainda, integrando a primeira linha de (3.1), temos

$$\int_0^t x^{-2} \dot{x} ds = \int_0^t ds$$

$$-x^{-1}(t) + x^{-1}(0) = t$$

e aplicando a segunda linha de (3.1), obtemos

$$-x^{-1}(t) + \frac{1}{c} = t$$

$$x^{-1}(t) = \frac{1}{c} - t$$

$$x^{-1}(t) = \frac{1 - ct}{c}$$

e podemos concluir que a solução é da forma

$$\phi(t) = \frac{c}{1 - ct} \quad (3.2)$$

no intervalo $(-\infty, c)$. Além disso, como $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ é contínua, segue que esta solução é única pelo Teorema 1.18. Também, o intervalo $(-\infty, c)$ é maximal e a solução não pode ser continuada para direita, uma vez que $\phi\left(\frac{1}{c}\right)$ não existe. Por fim, a dependência contínua com respeito ao dado inicial $x(0) = c > 0$ ocorre, pois $\phi(t, 0, c)$ é única e contínua em todos os argumentos do seu domínio.

Até aqui, nada de novo em relação ao que já foi visto. Para aprofundar, seja $[0, T]$ um intervalo com T um número real positivo e considere $\varepsilon > 0$ dado. Desta forma, fica o

questionamento: pode ser colocada uma restrição no dado inicial $x(0) = c$ de tal modo que

$$|\phi(t, t_0, x_0)| = |\phi(t, 0, c)| < \varepsilon? \quad (3.3)$$

A equação (3.3) sugere que existe alguma forma de limitação para a solução em seu domínio $[0, T]$. Em outras palavras, (3.3) descreve quão próxima a solução $\phi(t, t_0, x_0)$ está da solução nula, isto é, $\phi(t, 0, 0) \equiv 0$. Se analisarmos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

teremos que $\phi(t) = \phi(t, 0, 0) = 0$ é solução de (3.4). Utilizando a solução nula como referência, o questionamento é reformulado como: pode ser colocada uma restrição no dado inicial de tal modo que

$$\begin{aligned} |\phi(t, t_0, x_0) - \phi(t, 0, 0)| &= |\phi(t, 0, c) - \phi(t, 0, 0)| \\ &= |\phi(t, 0, c) - 0| < \varepsilon? \end{aligned} \quad (3.5)$$

A equação (3.5) é motivada pelo interesse em conhecer o desvio de uma solução da solução nula. A mudança de $\phi(t, 0, 0)$ para $\phi(t, 0, c)$ ocorre devido a mudança no dado inicial, para $t = 0$, de 0 para c . O objetivo desta análise é determinar as consequências que uma perturbação nos dados iniciais acarreta em referência com a solução de equilíbrio.

Para o problema de valor inicial em (3.1), a resposta ao questionamento é: para $T > 0$ e $\varepsilon > 0$ dados, existe um $\delta = \delta(\varepsilon, T) > 0$ tal que, se $c < \delta$, então (3.3) ocorre. Para este caso, podemos estimar δ substituindo c por δ e t por T em (3.2) e, desta forma, temos

$$\frac{\delta}{1 - \delta T} < \varepsilon,$$

logo

$$\delta < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon T}. \quad (3.6)$$

Para esta estimativa de δ , temos que, se $|c| < \delta$, então

$$|\phi(t, 0, c)| = \left| \frac{c}{1 - ct} \right| < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.7)$$

De (3.6), percebemos que, conforme o intervalo $[0, T]$ aumenta quando $T \rightarrow \infty$, temos que δ se aproxima de 0 e isto implica que a continuidade da solução $\phi(t, 0, c)$ não é uniforme com respeito a t no intervalo $[0, \infty)$.

Este cálculo ilustra a importância da dependência contínua de soluções em dados iniciais em um intervalo finito $[0, T]$. Enquanto tais informações são úteis, devemos agora perguntar o que acontece com a dependência contínua de soluções nos dados iniciais à medida

que o intervalo é estendido para se tornar $[0, \infty)$.

Em muitas aplicações, a variável independente t denota tempo, e o domínio apropriado para esta variável é $[0, \infty)$. A análise da dependência contínua de soluções em dados iniciais em um intervalo de tempo infinito é conhecida como análise de estabilidade, a qual descreve mais uma propriedade importante de equações diferenciais. A análise realizada do problema em (3.1) mostra que as propriedades de existência, unicidade e continuidade com respeito aos dados iniciais ocorrem em um intervalo finito $[0, T]$ que é subconjunto de $\left(-\infty, \frac{1}{c}\right)$, mas esta estabilidade falha em $[0, \infty)$. Na verdade, este problema de valor inicial não admite solução no intervalo $[0, \infty)$ e, menos ainda, uma solução estável.

3.2 DEFINIÇÕES

Relembremos que, dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

com $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função que satisfaz as condições dos Teoremas 1.10 (existência), 1.18 (unicidade) e dependência contínua de soluções em condições iniciais. A solução para o problema (3.8) é denotada por $\phi(t, t_0, x_0)$ ou por $x(t, t_0, x_0)$. Com esta notação, temos que

$$\phi(t_0, t_0, x_0) = x_0.$$

Definição 3.1. *Considere (3.8) com as condições iniciais $(0, c_1), (0, c_2) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$. Se c_1 e c_2 estão suficientemente próximos e $\phi(t, 0, c_1)$ e $\phi(t, 0, c_2)$ se “aproximam” quando $t \rightarrow \infty$, temos o que chamamos de estabilidade. Por outro lado, se $\phi(t, 0, c_1)$ e $\phi(t, 0, c_2)$ se “afastam” quando $t \rightarrow \infty$, temos o que chamamos de instabilidade.*

Observação 8. Se definirmos

$$y = \phi(t, 0, c_1) - \phi(t, 0, c_2), \quad (3.9)$$

então estudar a estabilidade de $\phi(t, 0, c_1)$ em relação à $\phi(t, 0, c_2)$ é o mesmo que estudar a estabilidade de y em relação à solução nula. Ainda, se derivarmos (3.9), obtemos

$$\dot{\phi}(t, 0, c_1) = \dot{y} + \dot{\phi}(t, 0, c_2). \quad (3.10)$$

Como $\phi(t, 0, c_1)$ e $\phi(t, 0, c_2)$ são soluções de (3.8), temos que

$$\begin{cases} \dot{\phi}(t, 0, c_1) &= f(t, \phi(t, 0, c_1)) \\ \dot{\phi}(t, 0, c_2) &= f(t, \phi(t, 0, c_2)) \end{cases} \quad (3.11)$$

e, combinando (3.10) e (3.11), segue que

$$\begin{aligned}\dot{y} &= f(t, \phi(t, 0, c_1)) - \dot{\phi}(t, 0, c_2) = f(t, y + \phi(t, 0, c_2)) - f(t, \phi(t, 0, c_2)) \\ &\equiv g(t, y).\end{aligned}\tag{3.12}$$

Desta forma, temos que y satisfaz o problema

$$\begin{cases} \dot{y} &= g(t, y), \text{ com } g(t, 0) = 0 \\ y(0) &= c_1 - c_2 \end{cases}$$

Porém, na maioria dos casos, o interessante não é estudar quão próximas duas soluções arbitrárias estão entre si, mas sim quão próxima uma solução permanece da solução de equilíbrio.

Definição 3.2. *Uma solução de equilíbrio do problema (3.8) é uma solução \bar{x} que satisfaz a igualdade*

$$f(t, \bar{x}) = 0, \forall t \in [0, \infty).\tag{3.13}$$

Observação 9. Refazendo a análise de (3.9) até (3.12), percebe-se que não há prejuízos ao transladar a solução de equilíbrio \bar{x} para a solução nula e, por isso, algumas definições de estabilidade são feitas com a solução nula de equilíbrio, isto é,

$$\dot{x} = f(t, x), \text{ com } f(t, 0) = 0 \text{ para todo } t \in [0, \infty),\tag{3.14}$$

com $f(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que as condições de existência, unicidade e dependência contínua são satisfeitas.

De fato, refazendo a análise para este caso, dados os problemas

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= c_1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \dot{x} &= f(t, x), \text{ com } f(t, 0) = 0 \\ x(t_0) &= 0 \end{cases}$$

os quais possuem $\phi(t, t_0, c_1)$ e \bar{x} como soluções, respectivamente. Definindo $y = \phi(t, t_0, c_1) - \bar{x}$, temos que

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \dot{\phi}(t, t_0, c_1) - \dot{\bar{x}} \\ &= \dot{\phi}(t, t_0, c_1) \\ &= f(t, \phi(t, t_0, c_1)) \\ &= f(t, y + \bar{x}) \\ &= g(t, y)\end{aligned}$$

e, ainda, $g(t, 0) = 0$ e $y(t_0) = c_1$.

Definição 3.3. A solução nula é chamada de estável no sentido de Liapunov¹ se, para todo $\varepsilon > 0$ e $t_0 \geq 0$, existir um $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que, se $|x_0| < \delta$, então $|\phi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$, para todo $t \in [t_0, \infty)$.

A solução nula é chamada de assintoticamente estável no sentido de Liapunov se for estável e se $\phi(t, t_0, x_0) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Em outras palavras, a solução nula é assintoticamente estável se for estável e se, para todo $t_0 \geq 0$, existir um $\delta = \delta(t_0) > 0$ tal que, se $|x_0| < \delta$, então $|\phi(t, t_0, x_0)| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

A solução nula é chamada de uniformemente estável se for estável e se δ pode ser escolhido sem depender de $t_0 \geq 0$. A solução nula é chamada de uniformemente assintoticamente estável se for uniformemente estável, se $\delta_0(t_0)$ da definição de assintoticamente estável pode ser escolhido sem depender de $t_0 \geq 0$ e se, para todo $\eta > 0$, existir $T(\eta) > 0$ tal que, se $|x_0| < \delta_0$, então $|\phi(t, t_0, x_0)| < \eta$, para $t \geq t_0 + T(\eta)$.

Por fim, a solução nula é chamada de instável se não for estável.

Observação 10. A propriedade da solução nula sendo estável pode ser visualizada geometricamente pela figura a seguir considerando as soluções de (3.14) como curvas em espaço de dimensão $(n + 1)$. A desigualdade $|x_0| < \delta$ define uma bola no hiperplano $t = t_0$ e a desigualdade $|\phi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$ determina um cilindro de raio ε sobre o eixo t . Escolhendo pontos iniciais (t_0, x_0) em uma bola suficientemente pequena, podemos “forçar” o gráfico da solução a permanecer para $t \geq t_0$ inteiramente dentro de um cilindro de raio ε .

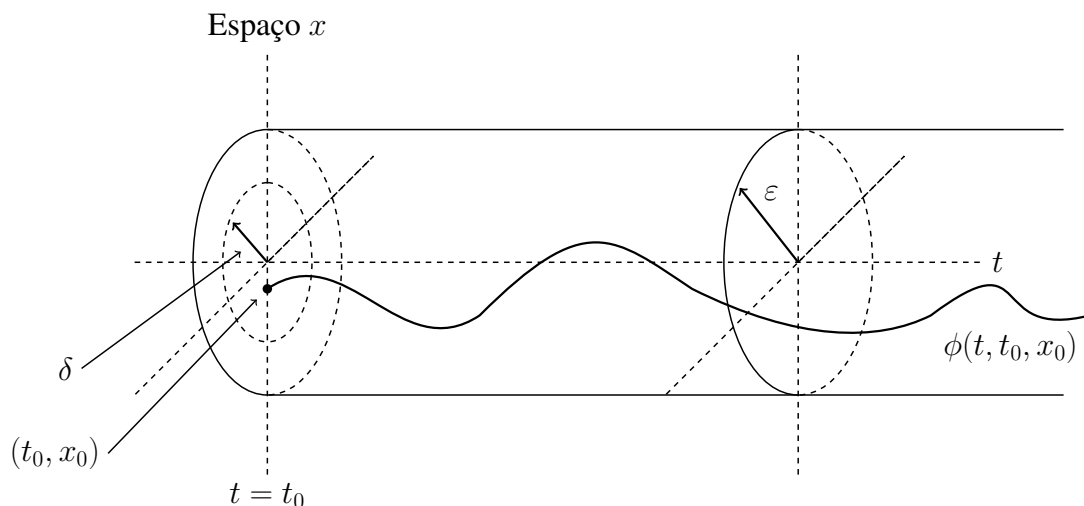


Figura 3.1: Interpretação geométrica da propriedade da solução nula ser estável

Exemplo 17. Para a equação $\dot{x} = 0$, as soluções são da forma $x(t) = x_0$, com x_0 uma constante arbitrária. A solução nula é estável para $t \geq 0$, mas não é assintoticamente estável. Ainda, como as soluções independem do tempo, segue que a solução nula é uniformemente estável.

¹Alexander Liapunov (1857-1918) foi um matemático russo conhecido por suas contribuições na teoria da estabilidade de sistemas dinâmicos. Ele também fez importantes contribuições à teoria da função e ao cálculo diferencial.

De fato, sejam $\varepsilon > 0$ e $t_0 > 0$ fixado. Tome $\delta = \varepsilon$. Se $|x_0| < \delta$, então

$$|x(t)| = |x_0| < \delta = \varepsilon, \forall t > 0.$$

E não é assintoticamente estável pois, como a solução $x(t) = x_0$ é constante, então $|x(t)| \rightarrow 0$ se, e somente se, $x(t) = 0$, isto é, para $x_0 \neq 0$, $|x(t)| = |x_0| > 0$, para todo $t > 0$.

Exemplo 18. Para a equação $\dot{x} = x$, as soluções são da forma $x(t) = x_0 e^t$, com x_0 uma constante arbitrária. A solução nula é instável, pois fazendo $x_0 \rightarrow 0$, não temos que $x_0 e^t$ se aproxima de 0 em $[0, \infty)$.

De fato, seja $\varepsilon = 1$. Para cada $\delta > 0$, tome $x_0 = \frac{1}{n} < \delta$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Além disso, para $t = t_0 + n$, temos que

$$|x(t)| = |x_0 e^t| = |x_0| e^t = \frac{1}{n} e^t = \frac{1}{n} e^{t_0+n} = e^{t_0} \frac{e^n}{n} \geq \frac{1}{e^{t_0}} e^{t_0} = 1 = \varepsilon.$$

Exemplo 19. Para a equação $\dot{x} = \lambda x$ com $\lambda \in \mathbb{R}$, as soluções são da forma $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$, com x_0 uma constante arbitrária. Se $\lambda = 0$, a solução nula é estável e uniformemente estável, visto o Exemplo 17. Se $\lambda > 0$, a solução nula não é estável, visto o Exemplo 18. Se $\lambda < 0$, a solução nula é estável, assintoticamente estável, uniformemente estável e uniformemente assintoticamente estável.

De fato: os casos $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$ já foram vistos nos exemplos anteriores. Vejamos o caso $\lambda < 0$. Sejam $\varepsilon > 0$ e $t_0 \geq 0$ fixado. Tome $\delta = \varepsilon$. Temos, para $|x_0| < \delta$, que

Uniformemente estável: $|x(t)| = |x_0 e^{\lambda t}| < \delta e^{\lambda t} < \delta = \varepsilon$

Assintoticamente estável: $|x(t)| \leq x_0 e^{\lambda t} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Uniformemente assintoticamente estável: Dado η , tome A suficientemente grande tal que $A > t_0$ e $x_0 e^{\lambda t} < \eta$, para $t > A$. Assim, tomando $T(\eta) = A - t_0 > 0$, temos

$$|x_0| < \delta \Rightarrow |x(t)| = |x_0 e^{\lambda t}| < \eta, \text{ para } t > A = T(\eta) + t_0.$$

Exemplo 20. Dado o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

com as soluções denotadas por $x(t)$ e $y(t)$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [x^2(t) + y^2(t)] &= 2[x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t)] \\ &= 2[x(t)\dot{x}(t) - \dot{x}(t)x(t)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Desta forma, para uma constante real positiva r , temos $x^2(t) + y^2(t) = r^2$ e, assim, as soluções são círculos centrados na origem, os quais podem ser arbitrariamente pequenos pela escolha de r , logo a 0 solução é estável, mas não é assintoticamente estável. Note ainda que $|(x(t), y(t))| = r > 0$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar r suficientemente pequeno com $r < \varepsilon$, sendo assim, $|(x(t), y(t))| = r < \varepsilon$, o que mostra que, de fato, é estável.

3.3 ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES

Para realizar o estudo sobre a análise de estabilidade de equações diferenciais ordinárias, começaremos com equações lineares da forma

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (3.15)$$

com $A(t)$ uma matriz $n \times n$ contínua, \dot{x} e x vetores coluna de ordem n . Como $A(t)$ é contínua, temos existência e unicidade de solução que satisfaz algum dado inicial. Ainda, perceba que $\phi(t) = 0$ é uma solução de equilíbrio para (3.15) e, portanto, todas as definições de estabilidade presentes na seção anterior, com referência à solução nula, se aplica ao sistema linear homogêneo.

Iniciaremos a análise de estabilidade do sistema linear homogêneo pois sistemas não lineares podem ser aproximados por lineares e, devido a isto, vamos introduzir o conceito de linearização, o qual estuda aproximações lineares de sistemas não lineares perto do equilíbrio.

Para isto, considere $\dot{x} = f(t, x)$ com $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ com pelo menos duas derivadas parciais contínuas com respeito a variável x (isto é necessário para poder aplicar o Teorema de Taylor na linearização de $\dot{x} = f(t, x)$).

Seja, para $t \in [0, \infty)$, $\bar{x}(t)$ uma solução de equilíbrio de $\dot{x} = f(t, x)$ e defina

$$x(t) = z(t) + \bar{x}(t), \quad (3.16)$$

isto é, uma translação de coordenadas utilizando $\bar{x}(t)$ como ponto de referência e definindo $z(t) = x(t) - \bar{x}(t)$. Derivando $z(t)$ com respeito ao tempo, lembrando que $f(t, \bar{x}) = 0$ e utilizando a equação (3.16), segue que

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t) = f(t, x(t)) - f(t, \bar{x}(t)) = f(t, \bar{x}(t) + z(t)). \quad (3.17)$$

Note que a solução $z(t) \equiv 0$ é uma solução de equilíbrio do sistema $\dot{z} = f(t, \bar{x} + z)$ em (3.17) e que as propriedades da estabilidade da solução $\bar{x}(t)$ de $\dot{x} = f(t, x)$ são equivalentes às propriedades de estabilidade da solução nula do sistema $\dot{z} = f(t, \bar{x} + z)$.

Agora, vamos aproximar $f(t, \bar{x} + z)$ e, utilizando o Teorema de Taylor, escrevemos

$$f(t, \bar{x} + z) = f(t, \bar{x}) + \frac{\partial f(t, \bar{x})}{\partial x} z + h(t, z). \quad (3.18)$$

Denote agora a matriz Jacobiana das parciais de primeira ordem por $A(t)$, ou seja, $\frac{\partial f(t, \bar{x})}{\partial x} \equiv A(t)$ com

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(t, \bar{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(t, \bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(t, \bar{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(t, \bar{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Utilizando (3.17), (3.18) e o fato de que $f(t, \bar{x}) = 0$, concluímos que

$$\dot{z}(t) = A(t)z + h(t, z), \quad (3.19)$$

com $h(t, 0) = 0$ e $\frac{\partial h(t, 0)}{\partial z} = 0$. Portanto, utilizando a translação de variáveis e o Teorema de Taylor, podemos escrever $\dot{z} = f(t, \bar{x} + z)$ como a soma de um sistema linear e um sistema não linear residual. Como $\frac{|h(t, z)|}{|z|} \rightarrow 0$ para t fixado, espera-se que a solução nula de (3.19) mostre o mesmo comportamento de estabilidade que a solução nula do sistema linear $\dot{z} = A(t)z$.

Resumindo, dado um sistema não linear $\dot{x} = f(t, x)$ com uma solução de equilíbrio $\bar{x}(t)$, as propriedades de estabilidade de $\bar{x}(t)$ podem ser estudadas analisando as propriedades de estabilidade da solução nula do sistema não linear em (3.19). Este sistema dado em (3.19) consiste de um termo linear e um termo não linear com polinômios superiores de z . Se o termo não linear é pequeno comparado com $|z|$, uniformemente em t , então as propriedades de estabilidade da solução nula de (3.19) podem ser deduzidas das propriedades de estabilidade do sistema linear $\dot{z} = A(t)z$.

Analogamente, o mesmo procedimento de linearização pode ser aplicado para equações diferenciais autônomas $\dot{x} = f(x)$, em que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ possui duas derivadas parciais com respeito a x . Seja \bar{x} uma solução de equilíbrio de $\dot{x} = f(x)$ e suponha que (3.17) ocorra. Aplicando o Teorema de Taylor como em (3.18), escrevemos

$$f(\bar{x} + z) = f(\bar{x}) + Az + h(z).$$

Nesta última equação, $f(\bar{x}) = 0$, A é o Jacobiano das primeiras ordens parciais avaliadas em \bar{x} , isto é,

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

e $\frac{h(z)}{|z|}$ é uma função contínua de z que tende a 0 quando $z \rightarrow 0$. Novamente, os sistemas linearizados aproximados $\dot{z} = Az$ podem ser usados para deduzir, com certas condições, as propriedades de estabilidade da solução nula de

$$\dot{z} = A(z) + h(z). \quad (3.20)$$

Teorema 3.4. *Seja $\Phi(t)$ uma matriz solução fundamental de (3.15). O sistema (3.15) é estável para qualquer $t_0 \in \mathbb{R}$ se, e somente se, existir uma constante positiva $K = K(t_0)$ tal que*

$$|\Phi(t)| \leq K, \text{ para todo } t \geq t_0. \quad (3.21)$$

Demonstração. Seja $t_0 \in \mathbb{R}$ e suponha que $|\Phi(t)| \leq K$ para todo $t \geq t_0$. Vimos em (2.13) que qualquer solução $\phi(t)$ pode ser escrita na forma $\phi(t) = \Phi(t)c$, com $\Phi(t)$ uma matriz solução fundamental e c um vetor constante arbitrário. Escolha $c = \Phi^{-1}(t_0)x(t_0)$ e escreva a solução como

$$\phi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x(t_0).$$

Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) \leq \frac{\varepsilon}{K|\Phi^{-1}(t_0)|}$. A estabilidade ocorre pois, se $|x_0| < \delta$, então

$$\begin{aligned} |\phi(t)| &= |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| \leq |\Phi(t)||\Phi^{-1}(t_0)||x_0| \\ &< |\Phi(t)||\Phi^{-1}(t_0)|\delta \leq K|\Phi^{-1}(t_0)|\frac{\varepsilon}{K|\Phi^{-1}(t_0)|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que a estabilidade ocorra, isto é, para cada $\varepsilon > 0$ e t_0 , existe $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que, se $|x_0| < \delta$, então $|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| < \varepsilon$. Sendo assim,

$$|\phi(t)|\delta^{-1} = |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0\delta^{-1}| < \varepsilon\delta^{-1}. \quad (3.22)$$

Utilizando (3.22), defina $K = \varepsilon\delta^{-1}|\Phi(t_0)|$ e, desta forma,

$$|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)| = \sup_{|x_0| < \delta} |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0\delta^{-1}| \leq \varepsilon\delta^{-1}.$$

Portanto,

$$|\Phi(t)| = |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\Phi(t_0)| \leq |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)||\Phi(t_0)| \leq \varepsilon\delta^{-1}|\Phi(t_0)| = K.$$

□

Teorema 3.5. *Seja $\Phi(t)$ uma matriz solução fundamental de (3.15) e seja $\beta \in \mathbb{R}$. O sistema (3.15) é uniformemente estável para $t_0 \geq \beta$ se, e somente se, existir uma constante positiva*

$K = K(\beta)$ tal que

$$|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)| \leq K \text{ para } t_0 \leq s \leq t < \infty. \quad (3.23)$$

Demonstração. Assuma que (3.23) ocorra, seja $\varepsilon > 0$ dado e escolha $\delta = \delta(\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{K}$. Então, para cada $t_0 \geq \beta$, se $|x_0| < \delta$, temos que

$$|\phi(t)| = |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| \leq K|x_0| < \varepsilon$$

e vale a estabilidade uniforme.

A recíproca é demonstrada de maneira análoga à demonstração do Teorema 3.4. Vejamos, suponha que a estabilidade uniforme ocorra, isto é, para cada $\varepsilon > 0$ e t_0 , existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que, se $|x_0| < \delta$, então $|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| < \varepsilon$. Sendo assim,

$$|\phi(t)|\delta^{-1} = |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0\delta^{-1}| < \varepsilon\delta^{-1}. \quad (3.24)$$

Utilizando (3.24), defina $K = \varepsilon\delta^{-1}|\Phi(t_0)|$ e, desta forma,

$$|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)| = \sup_{|x_0| < \delta} |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0\delta^{-1}| < \varepsilon\delta^{-1}.$$

Portanto,

$$|\phi(t)| = |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\Phi(t_0)| \leq |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)||\Phi(t_0)| < \varepsilon\delta^{-1}|\Phi(t_0)| = K.$$

□

Teorema 3.6. *Seja $\Phi(t)$ uma matriz solução fundamental de (3.15). O sistema (3.15) é assintoticamente estável para qualquer $t_0 \in \mathbb{R}$ se, e somente se,*

$$|\Phi(t)| \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty. \quad (3.25)$$

Demonstração. Suponha que $|\Phi(t)| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Então, para qualquer $t_0 \in \mathbb{R}$, existe uma constante positiva $K = K(t_0)$ tal que $|\Phi(t)| \leq K$ para $t \geq t_0$ e, pelo Teorema 3.4, segue a estabilidade. Além disso, considere $\delta = \frac{1}{|\Phi^{-1}(t_0)|}$ tal que

$$\begin{aligned} |x_0| < \delta &\Rightarrow |\phi(t, t_0, x_0)| = |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| \\ &\leq |\Phi(t)||\Phi^{-1}(t_0)||x_0| \\ &< |\Phi(t)||\Phi^{-1}(t_0)|\delta \\ &= |\Phi(t)| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

desta forma, $|\phi(t, t_0, x_0)| \rightarrow 0$ e ocorre a estabilidade assintótica.

Reciprocamente, para todo $t_0 > 0$, existe $\delta = \delta(t_0) > 0$ tal que $|x_0| < \delta \Rightarrow |\phi(t, t_0, x_0)| \rightarrow 0$. E como $|\phi(t, t_0, x_0)| = |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0|$, segue que $|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| \rightarrow 0$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que

$$t > A \Rightarrow |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| < \frac{\varepsilon\delta}{2|\Phi(t_0)|}.$$

Segue disto que $|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0\delta^{-1}| < \frac{\varepsilon}{2|\Phi(t_0)|}$. Além disso,

$$|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)| = \sup_{|x_0| < \delta} |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0\delta^{-1}| \leq \frac{\varepsilon}{2|\Phi(t_0)|} < \frac{\varepsilon}{|\Phi(t_0)|}.$$

Finalmente,

$$|\Phi(t)| = |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)||\Phi(t_0)| < \frac{\varepsilon}{|\Phi(t_0)|}|\Phi(t_0)| = \varepsilon$$

e $|\Phi(t)| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. □

Teorema 3.7. *Sejam $\Phi(t)$ uma matriz solução fundamental de (3.15) e $\beta \in \mathbb{R}$. O sistema (3.15) é uniformemente assintoticamente estável para $t_0 \geq \beta$ se, e somente se, for exponencialmente assintoticamente estável, isto é, existem constantes $K = K(\beta) > 0$ e $\alpha = \alpha(\beta) > 0$ tais que*

$$|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, \quad \beta \leq s \leq t < \infty. \quad (3.26)$$

Demonstração. Suponha que (3.26) ocorra. Segue disto que (3.23) ocorre e, pelo Teorema 3.5, ocorre a estabilidade uniforme. Agora, tome $\delta_0 = 1 > 0$ que não depende de t_0 e seja $|x_0| < \delta_0 = 1$. Note que, para cada $\eta > 0$ tal que $0 < \eta < K$, queremos mostrar que existe um $T(\eta) > 0$ tal que

$$|\phi(t)| = |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| \leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}|x_0| \leq \eta \quad (3.27)$$

se $t_0 \geq \beta$ e $t \geq t_0 + T(\eta)$.

Para que (3.27) ocorra, escolha $T(\eta) = -\alpha^{-1} \ln\left(\frac{\eta}{K}\right)$. Desta forma, para $|x_0| < \delta_0$ e $t \geq t_0 + T(\eta)$, temos que

$$|\phi(t)| = |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| \leq |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)||x_0| < Ke^{-\alpha(t-t_0)}.$$

E, ainda, para $t \geq t_0 - \alpha^{-1} \ln\left(\frac{\eta}{K}\right)$, temos que $e^{-\alpha(t-t_0)} \leq \frac{\eta}{K}$, sendo assim,

$$|\phi(t)| < Ke^{-\alpha(t-t_0)} \leq K\frac{\eta}{K} = \eta.$$

Reciprocamente, suponha que a solução nula é uniformemente assintoticamente estável para $t_0 \geq \beta$. Então existe $\delta_0 > 0$ tal que, para qualquer η , $0 < \eta < \delta_0$, existe

$T = T(\eta) > 0$ tal que, pela definição de uniformemente assintoticamente estável,

$$|\phi(t)| = |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| < \eta, \quad t > t_0 + T$$

com $t_0 \geq \beta$ e $|x_0| < \delta_0$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)| &= \sup_{\substack{|x_0| < \delta_0 \\ \frac{|x_0|}{\delta_0} < 1}} \left| \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) \frac{x_0}{\delta_0} \right| \\ &< \frac{\eta}{\delta_0} < 1, \quad t_0 \geq \beta \text{ e } t \geq t_0 + T. \end{aligned}$$

Em particular, $|\Phi(t+T)\Phi^{-1}(t)| < 1$ para $t \geq \beta$. Além disso, como a solução nula é uniformemente estável por hipótese, segue do Teorema 3.5 que existe uma constante positiva $M = M(\beta)$ tal que $|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)| \leq M$ para $\beta \leq s \leq t < \infty$.

Seja $\alpha = -\frac{\ln\left(\frac{\eta}{\delta_0}\right)}{T}$ e $K = Me^{\alpha T}$. Note que, para qualquer $t \geq t_0$, existe um inteiro positivo k tal que $kT \leq t - t_0 < (k+1)T$, sendo assim, temos finalmente que

$$\begin{aligned} |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)| &\leq |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0 + kT)| |\Phi(t_0 + kT)\Phi^{-1}(t_0)| \\ &\leq M |\Phi(t_0 + kT)\Phi^{-1}(t_0)| \\ &\leq M \left(\frac{\eta}{\delta_0}\right) |\Phi(t_0 + (k-1)T)\Phi^{-1}(t_0)| \\ &\leq M \left(\frac{\eta}{\delta_0}\right)^k \\ &= Me^{-\alpha kT} \\ &= Ke^{-\alpha(k+1)T} \\ &\leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.8. *Suponha que:*

- 1:** $\dot{x} = A(t)x$ em (3.15) é uniformemente assintoticamente estável para $t_0 \geq \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$;
- 2:** $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua em (t, x) ;
- 3:** para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|h(t, x)| < \varepsilon|x| \text{ com } t \in \mathbb{R} \text{ e } |x| < \delta. \quad (3.28)$$

Então a solução nula de $\dot{x} = A(t)x + h(t, x)$ é uniformemente assintoticamente estável para $t_0 \geq \beta$.

Demonstração. Como $\dot{x} = A(t)x$ é uniformemente assintoticamente estável, segue do Teorema 3.7 que existem constantes $K = K(\beta)$ e $\alpha = \alpha(\beta)$ tais que

$$|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, \quad \beta \leq s \leq t < \infty.$$

Ainda, do Teorema 2.11, qualquer solução do sistema linear não homogêneo $\dot{x} = A(t)x + h(t, x)$ é da forma

$$\phi(t) = \Phi(t) \left[\Phi^{-1}(t_0)\phi(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)h(s, \phi(s))ds \right].$$

Escolha $\varepsilon > 0$ de tal modo que $\varepsilon K < \alpha$ e seja δ tal que (3.28) ocorra. Para $t \geq t_0$ tal que $|\phi(t)| < \delta$, temos

$$|\phi(t)| \leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}|\phi(t_0)| + \int_{t_0}^t \varepsilon Ke^{-\alpha(t-s)}|\phi(s)|ds.$$

Tomando $z(t) = e^{\alpha t}|\phi(t)|$, temos

$$z(t) \leq Kz(t_0) + \int_{t_0}^t \varepsilon Kz(s)ds, \quad t \geq t_0.$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall, obtemos

$$z(t) \leq Kz(t_0)e^{\int_{t_0}^t \varepsilon K ds}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} |\phi(t)| = |z(t)e^{-\alpha t}| &\leq K|\phi(t_0)|e^{\alpha t_0}e^{-\alpha t}e^{\int_{t_0}^t \varepsilon K ds} \\ &= K|\phi(t_0)|e^{\alpha(t_0)}e^{\varepsilon K(t-t_0)}e^{-\alpha t} \\ &= K|\phi(t_0)|e^{-(\alpha-\varepsilon K)(t-t_0)}, \end{aligned}$$

para qualquer valor $t \geq t_0$ com $|\phi(t)| < \delta$. Como $\alpha - \varepsilon K > 0$ pela escolha das constantes, temos que $|\phi(t)| < \delta$ desde que $|\phi(t_0)| < \frac{\delta}{K}$. Com estas condições, note ainda que $e^{-(\alpha-\varepsilon K)(t-t_0)} < 1$. Finalmente, vejamos que a solução nula é uniformemente assintoticamente estável.

Dado $\tilde{\varepsilon} > 0$, tome $\delta = \frac{\tilde{\varepsilon}}{K} > 0$. Com isto, se $|\phi(t_0)| < \delta$, então $|\phi(t)| < K\delta = \tilde{\varepsilon}$ e a solução é uniformemente estável.

Ainda, para $\tilde{\varepsilon} = 1$, $\delta = \frac{1}{K}$ e, se $|\phi(t_0)| < \delta$, então

$$|\phi(t)| \leq e^{-(\alpha - \tilde{\varepsilon}K)(t-t_0)} \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty$$

e, assim, $\phi(t) \rightarrow 0$ e a solução é assintoticamente estável.

Por fim, dado $\eta > 0$, tome $T(\eta) = \frac{\ln\left(\frac{\eta}{K\delta_0}\right)}{\alpha - \varepsilon K}$, e, com isto, para $0 < \eta < K\delta_0$, temos que

$$|\phi(t_0)| < \delta_0 \Rightarrow |\phi(t)| \leq K\delta_0 e^{-(\alpha - \varepsilon K)(t-t_0)} < \eta$$

para $t > t_0 + T(\eta)$ e temos que a solução é uniformemente assintoticamente estável.

Portanto, a solução nula de $\dot{x} = A(t)x + h(t, x)$ é uniformemente assintoticamente estável. \square

3.4 ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

Aqui, estudaremos um caso particular de (3.15), isto é, um sistema linear autônomo homogêneo da forma

$$\dot{x} = Ax \tag{3.29}$$

com A uma matriz constante $n \times n$. Como se trata de um caso particular, os Teoremas 3.4 ao 3.7 se aplicam a este caso. Mas como estamos tomando A como constantes, novos resultados podem ser obtidos. Ainda, note que $x = 0$ é uma solução de equilíbrio de (3.29) e veremos que a estabilidade pode ser dada através dos autovalores de A .

Teorema 3.9. *Temos que:*

- 1) *A solução nula de (3.29) é estável se todos os autovalores de A possuem a parte real não positiva e se todos os autovalores de A com parte real nula são zeros simples do polinômio característico de A .*
- 2) *A solução nula é assintoticamente estável se todos os autovalores de A possuem a parte real negativa.*
- 3) *A solução nula é instável se pelo menos um autovalor de A possuir parte real positiva.*

Demonstração.

Suponha que a matriz A em (3.29) está na forma canônica de Jordan sem perda de generalidade. Então a solução de (3.29) pode ser escrita como

$$\phi(t) = Pe^{J(t-t_0)}P^{-1}x_0 \tag{3.30}$$

em que J está definido em (A.8) do Apêndice A.

Considere os blocos de Jordan J_0 e J_i com $i = 1, \dots, s$. Pela construção, se um autovalor for simples, então está em J_0 . Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ os elementos da diagonal de J_0 . Desta forma, observe que

$$|e^{J_0 t}| = \left| \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_k t} \end{bmatrix} \right| = \max_{1 \leq j \leq k} \sum_{i=1}^k |a_{i,j}|,$$

ou seja,

$$|e^{J_0 t}| = |e^{\lambda_j t}| \text{ para algum } j \in \{1, \dots, k\}$$

e

$$\begin{aligned} |e^{\lambda_j t}| &= |e^{t \operatorname{Re} \lambda_j}| |(\cos(\operatorname{Im} \lambda_j) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} \lambda_j))| \\ &= e^{t \operatorname{Re} \lambda_j}. \end{aligned}$$

Por outro lado, quanto aos outros blocos, temos que $\operatorname{Re} \lambda_{k+i} < 0$ com $i = 1, \dots, s$. Utilizando (A.17) do Apêndice A, temos que

$$|e^{J_i t}| = e^{t \operatorname{Re}(\lambda_{k+i})} \sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{t^j}{j!}.$$

Além disso, temos que

$$|\Phi(t)| = |P| |e^{J(t-t_0)}| |P^{-1}| = |P| \left(\max_{0 \leq j \leq s} |e^{J_j t}| \right) |P^{-1}|.$$

Em resumo, temos que:

- a) $|e^{J_0 t}| = e^{t \operatorname{Re} \lambda_j}$ para algum $j \in \{1, \dots, k\}$;
- b) $|e^{J_i t}| = e^{t \operatorname{Re}(\lambda_{k+i})} \sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{t^j}{j!}$;
- c) $|\Phi(t)| = |P| \left(\max_{0 \leq j \leq s} |e^{J_j t}| \right) |P^{-1}|.$

De posse dessas informações, provemos o Teorema:

- 1) De a), $|e^{J_0 t}| = e^{t \operatorname{Re}(\lambda_j)}$ e, para $t \geq t_0$, $e^{t \operatorname{Re}(\lambda_j)} \leq e^{t_0 \operatorname{Re}(\lambda_j)} = K_1(t_0)$, ou seja,

$$|e^{J_0 t}| \leq e^{t_0 \operatorname{Re}(\lambda_j)} = K_1(t_0). \quad (3.31)$$

Por outro lado, de b), chame $F(t) = e^{t \operatorname{Re}(\lambda_{k+i})} \sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{t^j}{j!}$ e, como $\operatorname{Re}(\lambda_{k+i}) < 0$, temos que $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe um $A = A(t_0) > t_0 > 0$ tal que se $t > A$,

então $|F(t)| < \varepsilon$. E, ainda, $F(t)$ é contínua no compacto $[t_0, A]$, ou seja, é limitada em $[t_0, A]$. Desta forma, para $t \geq t_0$, temos que

$$|e^{J_i t}| = F(t) \leq \max\{\varepsilon, \max_{t \in [t_0, A]} F(t)\} = K_2(t_0). \quad (3.32)$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} |e^{Jt}| &= \max_{1 \leq j \leq s} (|e^{J_0 t}|, |e^{J_j t}|) \\ &= \max(K_1(t_0), K_2(t_0)) \\ &:= \tilde{K}(t_0). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} |\Phi(t)| &= |P|e^{J(t-t_0)}|P^{-1}| \\ &= |P||e^{J(t-t_0)}|P^{-1}| \\ &\leq |P|\tilde{K}|P^{-1}| \\ &:= K(t_0). \end{aligned}$$

Portanto, segue do Teorema 3.4 que a solução nula é estável.

2) Para algum $j \in \{1, \dots, k\}$, temos que

$$\begin{aligned} |e^{J_0 t}| &= |e^{\lambda_j t}| \\ &= |e^{t \operatorname{Re}(\lambda_j)}| |\cos(\operatorname{Im}(\lambda_j)) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im}(\lambda_j))| \\ &\leq e^{t \operatorname{Re}(\lambda_j)} \longrightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |e^{J_i t}| &= e^{t \operatorname{Re}(\lambda_{k+i})} \sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{t^j}{j!} \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{t^j}{j!}}{e^{t(-\operatorname{Re}(\lambda_{k+i}))}}, \end{aligned}$$

ou seja, $|e^{J_i t}| \longrightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Desta forma,

$$|e^{Jt}| = \max_{1 \leq j \leq s} (|e^{J_0 t}|, |e^{J_j t}|) \longrightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Finalmente

$$|\Phi(t)| = |P||e^{J(t-t_0)}|P^{-1}| \longrightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Portanto, segue do Teorema 3.6 que a solução nula é assintoticamente estável.

3) Note que $|e^{J_0 t}| = e^{t \operatorname{Re}(\lambda_i)} \rightarrow \infty$ se $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$ para $i = 1, \dots, k$. Ou ainda, $|e^{J_i t}| = e^{t \operatorname{Re}(\lambda_{k+i})} \sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{t^j}{j!} \rightarrow \infty$ se $\operatorname{Re}(\lambda_{k+i}) > 0$ para $i = 1, \dots, s$.

Desta forma,

$$|e^{Jt}| = \max_{1 \leq j \leq s} (|e^{J_0 t}|, |e^{J_j t}|) \longrightarrow \infty \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Finalmente,

$$|\Phi(t)| = |P||e^{J(t-t_0)}||P^{-1}| \longrightarrow \infty \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Portanto, segue do Teorema 3.4 que a solução nula é instável.

□

Observação 11. Como (3.29) independe de t , temos que estabilidade implica em estabilidade uniforme e, ainda, estabilidade assintótica implica em estabilidade uniforme assintótica

Além disso, vale a recíproca dos itens 1) e 2) no Teorema 3.9

Observação 12. Se considerarmos a equação diferencial homogênea de ordem n dada por

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{x} + a_0x = 0 \quad (3.33)$$

e definirmos o polinômio característico por

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0, \quad (3.34)$$

teremos que as raízes de $p(\lambda) = 0$ (equação característica de (3.33)) são os autovalores da matriz A do sistema $\dot{x} = Ax$ associado à (3.33). De fato, tomando

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \\ &\vdots \\ x_n &= x^{(n-1)}, \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= x^{(n)} = -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n. \end{aligned}$$

Escrevendo na forma $\dot{x} = Ax$, temos

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Pelo Teorema 3.9, a análise de estabilidade de $\dot{x} = Ax$ é realizada através do estudo dos autovalores de A e como (3.33) e $\dot{x} = Ax$ são equivalentes, é possível mostrar por indução (Miller e Michel 1982, pág. 122) que $\det(\lambda I - A) = p(\lambda)$. Ou seja, os autovalores obtidos com o cálculo de $\det(\lambda I - A) = 0$ são as raízes do polinômio $p(\lambda)$. Vejamos para o caso $n = 3$.

De fato, temos a equação diferencial

$$x^{(3)} + a_2x^{(2)} + a_1\dot{x} + a_0x = 0$$

com seu polinômio característico definido por

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2a_2 + \lambda a_1 + a_0$$

e, tomando $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ e $x_3 = x^{(2)}$, temos

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= x^{(3)} = -a_2x^{(2)} - a_1\dot{x} - a_0x.\end{aligned}$$

Escrevendo na forma $\dot{x} = Ax$, obtemos que

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A) &= \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 + \lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^3 + \lambda^2a_2 + \lambda a_1 + a_0,\end{aligned}$$

Com isso, concluímos que $\det(\lambda I - A) = p(\lambda)$ e, portanto,

$$\lambda \text{ é autovalor de } A \Leftrightarrow \det(\lambda I - A) = 0 \Leftrightarrow p(\lambda) = 0.$$

Desta forma, dado um problema da forma (3.33), não é necessário escrevê-lo como sistema para calcular os autovalores, pois é suficiente determinar as raízes da equação característica $p(\lambda) = 0$ e aplicar o Teorema 3.9 nas raízes.

Agora, considere o sistema

$$\dot{x} = Ax + h(x), \tag{3.35}$$

com A uma matriz $n \times n$ constante, \dot{x} e x vetores colunas e $h(x)$ um vetor coluna em que cada elemento é uma função de x . Assuma que $h(0) = 0$ e que $h(x) \ll x$.

Com $h(0) = 0$, obtemos que $\phi(t) \equiv 0$ é uma solução de equilíbrio de (3.35). Vimos que $\dot{x} = Ax$ é a equação linearizada de (3.35) e o Teorema 3.9 estabelece condições para a estabilidade ou instabilidade de $\dot{x} = Ax$.

Teorema 3.10. *Considere o sistema (3.35) com $\frac{h(x)}{|x|}$ uma função contínua e $\frac{h(x)}{|x|} \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$. Então,*

- (i) *Se a solução nula de $\dot{x} = Ax$ é assintoticamente estável, então a solução nula de equilíbrio de (3.35) é assintoticamente estável.*
- (ii) *Se a solução nula de $\dot{x} = Ax$ é instável, então a solução nula de equilíbrio de (3.35) é instável.*

Demonstração.

- (i) Suponha que Φ é a solução assintoticamente estável de $\dot{x} = Ax$, então pela Observação 11, Φ é uniformemente assintoticamente estável. Além disso, $h(x)$ é contínua e, como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{|x|} = 0$, temos que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{h(x)}{|x|} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Ou seja, $|x| < \delta \Rightarrow |h(x)| < |x|\varepsilon$ e, pelo Teorema 3.8, a solução nula de (3.35) é assintoticamente estável.

- (ii) A demonstração será feita no Capítulo 4, página 96.

□

4 MÉTODOS AVANÇADOS DE ESTABILIDADE

4.1 PRELIMINARES

Dado $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto com $0 \in D$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável tal que $f(0) = 0$, considere a equação diferencial autônoma

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Como f é continuamente diferenciável, então dado qualquer valor inicial, segue dos Teoremas 1.10 e 1.18 que existe uma única solução para o problema com este valor inicial. Assuma que a solução nula é a única solução de equilíbrio em D .

Definição 4.1. *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto contendo a origem. Uma função escalar $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ contínua é:*

- *semi-definida positiva em D se $V(x) \geq 0$, para qualquer $x \in D$;*
- *semi-definida negativa em D se $-V$ for semi-definida positiva;*
- *definida positiva em D se $V(x) > 0$ para $0 \neq x \in D$ e $V(0) = 0$;*
- *definida negativa se $-V$ for definida positiva.*
- *indefinida se $V(0) = 0$ e se V assumir valores positivos e negativos em qualquer vizinhança da origem.*

Lema 4.2. *Se V é definida positiva em D aberto, então existe uma vizinhança U de 0 e uma constante c_0 tal que qualquer curva contínua da origem até a fronteira de U (∂U) intercepta o conjunto $C = \{x : V(x) = c\}$ desde que $0 \leq c \leq c_0$.*

Demonstração. Como D é aberto, existe uma vizinhança U de 0 aberta e limitada tal que $\bar{U} \subset D$. Seja

$$c_0 = \min_{x \in \partial U} V(x).$$

Considere a curva contínua

$$\begin{aligned} x : [a, b] &\rightarrow \bar{U} \\ t &\mapsto x(t) : \begin{cases} x(a) = 0 \\ x(b) \in \partial U \end{cases}, \end{aligned}$$

então a composta $V \circ x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que

$$\begin{aligned} V \circ x(a) &= V(0) = 0 \\ V \circ x(b) &= V(x(b)) \geq c_0 \end{aligned}$$

Dado c tal que

$$V(x(a)) = 0 \leq c \leq c_0 \leq V \circ x(b),$$

segue do Teorema do Valor Médio na reta que existe $t_0 \in (a, b)$ tal que $V(x(t_0)) = c$, o que implica que $x(t_0) \in C$. \square

Observação 13. Assuma que V é definida positiva em D . Supondo que V é continuamente diferenciável, temos que V possui o gradiente

$$\nabla V(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right).$$

Um conceito fundamental no método de Liapunov é a derivada temporal de V ao longo de soluções da equação diferencial autônoma. Dada f como em (4.1), ou seja, para $x \in D$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, defina

$$\begin{aligned} \dot{V} : D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot \dot{x} = \nabla V(x) \cdot f(x) \\ &= \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right) (f_1(x), \dots, f_n(x)) \quad (4.2) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_k} f_k(x). \end{aligned}$$

Lema 4.3. Denotando a solução de (4.1) por $\phi(t, t_0, x_0) = \phi(t) = x(t)$, então

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \dot{V}(x(t))$$

Demonstração. Pela regra da cadeia, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &= \frac{d}{dt} V(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ &= V_{x_1}(x(t))\dot{x}_1(t) + \dots + V_{x_n}(x(t))\dot{x}_n(t) \\ &= (V_{x_1}(t), \dots, V_{x_n}(x(t)))(\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)) \quad (4.3) \\ &= \nabla V(x(t))\dot{x}(t) \\ &= \dot{V}(x(t)) \end{aligned}$$

\square

Definição 4.4. A função $\dot{V}(x(t))$ em (4.3) é chamada derivada de trajetória ou derivada de tempo ao longo de uma solução $x(t)$.

Definição 4.5. Uma função definida positiva V em D com \dot{V} semi-definida negativa é chamada função de Liapunov.

4.2 ESTABILIDADE LOCAL E INSTABILIDADE DE SISTEMAS AUTÔNOMOS

Teorema 4.6 (Estabilidade de Liapunov para sistemas autônomos). *Suponha que exista uma função definida positiva continuamente diferenciável $V : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, em que D é um conjunto aberto contendo a origem e $\dot{V}(x)$ é semi-definida negativa para $x \in D$. Então a solução nula de $\dot{x} = f(x)$ em (4.1) é estável.*

Demonstração. Da definição de estabilidade, temos que provar que, dado $\varepsilon > 0$ e $t_0 \geq 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, se $|x_0| < \delta$, então a solução $x(t)$ do problema $\dot{x} = f(x)$ satisfaz $|x(t)| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$.

Seja $\varepsilon > 0$ dado de tal forma que a bola fechada $B[0, \varepsilon] \subset D$. Defina

$$V_0 = \min_{|x|=\varepsilon} V(x).$$

Da continuidade de V e como $V(0) = 0$ por ser definida positiva, temos que existe $0 < \delta = \delta(V_0) \leq \varepsilon$ tal que $|x - 0| < \delta \Rightarrow |V(x) - V(0)| < V_0$, ou seja, $|x| < \delta \Rightarrow |V(x)| < V_0$. Como V é definida positiva, então $|V(x)| = V(x)$ e segue que

$$|x| < \delta \Rightarrow V(x) < V_0.$$

Suponha $|x_0| < \delta$. Da hipótese, $\dot{V}(x) \leq 0$ por ser semi-definida negativa. Sendo

assim,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{ds}V(x(s)) &\leq 0 \\ \Rightarrow \int_{t_0}^t \frac{d}{ds}V(x(s))ds &\leq 0 \\ \Rightarrow V(x(t)) - V(x(t_0)) &\leq 0 \\ \Rightarrow V(x(t)) &\leq V(x_0) < V_0 \\ \Rightarrow V(x(t)) &< V_0, \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

Por fim, se supormos que $|x(t)| = \varepsilon$, obtemos que $V(x(t)) = V_0$, um absurdo. E se supormos que $|x(t)| > \varepsilon$, então pelo Teorema do Valor Médio, existe t_k com $t_0 < t_k < t$ tal que $|x(t_k)| = \varepsilon$ e $V(x(t_k)) \geq V_0$ com $t_k > t_0$, outro absurdo. Portanto, $|x(t)| < \varepsilon$ para $t \geq t_0$ e a solução nula é estável. \square

Teorema 4.7 (Estabilidade Assintótica de Liapunov para sistemas autônomos). *Suponha que exista uma função definida positiva continuamente diferenciável $V : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, em que D é um conjunto aberto contendo a origem e $\dot{V}(x)$ é definida negativa para $x \in D$. Então a solução nula de $\dot{x} = f(x)$ em (4.1) é assintoticamente estável.*

Demonstração. Da definição de estabilidade assintótica, temos que provar que a solução nula é estável e que $|x(t)| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Por hipótese, sabemos que \dot{V} é definida negativa em D , sendo assim, a estabilidade da solução nula decorre do Teorema (4.6) e temos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x_0| < \delta$, então $|x(t)| < \varepsilon$.

Afirmção 1: $V(x(t)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

De fato, como V é positiva, então é limitada inferiormente e, como \dot{V} é definida negativa, então V é decrescente, logo converge. Por absurdo, suponha que $V(x(t)) \rightarrow V_0 > 0$ quando $t \rightarrow \infty$, logo existe algum $\alpha > 0$ tal que para $|x - 0| < \alpha$, tem-se que $|V(x) - V(0)| < V_0$, ou seja,

$$|x| < \alpha \Rightarrow V(x) < V_0.$$

Considere β definido por

$$\beta = \max_{\alpha \leq |x| \leq \varepsilon} [\dot{V}(x(t))] < 0.$$

Desta forma, para $x(t) \in \{x : \alpha \leq |x| \leq \varepsilon\}$, perceba que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t)) &= \dot{V}(x(t)) \leq \beta \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}V(x(t)) &\leq \beta \\ \Rightarrow \int_{t_0}^t \frac{d}{ds}V(x(s))ds &\leq \beta(t - t_0) \\ \Rightarrow V(x(t)) &\leq V(x_0) + \beta(t - t_0), \end{aligned}$$

para todo $t \geq t_0$. Finalmente, note que $V(x(t_0))$ está fixado e $\beta < 0$, ou seja, tomando limite com $t \rightarrow \infty$, obtemos que $V(x(t)) < 0$, o que contradiz a hipótese de que V é definida positiva. Portanto, $V_0 = 0$ e $V(x(t)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e fica provada a afirmação 1.

Afirmção 2: $V(x(t)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ implica que $|x(t)| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Com efeito, provando pela contra-positiva, suponha que $|x(t)| \rightarrow y \neq 0$, então $V(x(t)) \rightarrow V(y) \neq 0$, o que implica que $V(x(t))$ não converge pra 0, o que prova a afirmação 2. \square

Observação 14. As construções feitas por Liapunov nos dois últimos teoremas também são válidas se assumir que V contínua em D ao invés de continuamente diferenciável, desde que \dot{V} esteja definida em $x_0 \in D$ por

$$\dot{V}(x_0) = \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [V(x(t_0 + h, t_0, x_0)) - V(x(t_0, t_0, x_0))].$$

Teorema 4.8. *Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto conexo contendo a origem e U um conjunto aberto que contém a solução nula de equilíbrio em seu fecho. Suponha que V é continuamente diferenciável em D com V e \dot{V} definidas positivas em $D \cap U$ e, além disso, com $V = 0$ em $\partial U \cap D$, isto é, na fronteira de U que está contida em D . Então a solução nula de $\dot{x} = f(x)$ em (4.1) é instável.*

Demonstração. Escolha um conjunto aberto e limitado D_0 que contém a origem tal que $\overline{D_0} \subset D$. Dado $\delta > 0$, escolha $x_0 \in D_0 \cap U$ com $0 < |x_0| < \delta$. Como V é definida positiva, temos que $V(x_0) > 0$. Defina

$$S = \{x : x \in \overline{D_0 \cap U} \text{ de tal modo que } V(x) \geq V(x_0)\}.$$

Como $V = 0$ em ∂U e $V > 0$ em S , segue que $\partial U \cap S = \emptyset$. Note também que $0 \notin S$, pois $V(0) = 0$ e $V(x_0) > 0 = V(0)$. Além disso, note que S é fechado e limitado, logo compacto. De fato:

S é fechado: Seja $x \in \overline{S}$, então existe uma sequência $(x_n) \subset S$ tal que $x_n \rightarrow x$. Sendo assim, temos que $x_n \in \overline{D_0 \cap U}$ e $V(x_n) \geq V(x_0)$, para qualquer n natural e, desta forma, $x \in \overline{(\overline{D_0 \cap U})} = \overline{D_0 \cap U}$ e $V(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(x_n) \geq V(x_0)$. Portanto, $x \in S$.

S é limitado: Basta notar que $S \subset \overline{D_0 \cap U} \subset \overline{D_0} \subset D_0$ e D_0 é limitado.

Defina

$$\alpha = \min_{x \in S} \dot{V}(x)$$

e note que $\alpha > 0$, pois $\dot{V}(x) > 0$, para todo $x \in D \cap U$ e $S \subset D \cap U$, ou seja, $\dot{V}(x) > 0$ para todo $x \in S$ e como S é compacto e $0 \notin S$, temos que $\min_{x \in S} \dot{V}(x) > 0$.

Seja $x(t)$ a solução do problema, então $\dot{V}(x(t)) \geq \alpha$ para $x(t) \in S$. Integrando, temos

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{dt} V(x(s)) ds \geq \alpha \tag{4.4}$$

$$V(x(t)) \geq V(x_0) + \alpha(t - t_0), \tag{4.5}$$

para $x(t) \in S$. Fazendo $t \rightarrow \infty$ em (4.5), temos que $V(x(t))$ se torna ilimitada, porém V é contínua e S é compacto, o que implica que V é limitada em qualquer $x \in S$. Desta forma, $x(t)$ sai de $\overline{D_0 \cap U}$ em algum instante. Como $\overline{D_0 \cap U}$ é compacto e V é contínua, então existe um t_1 tal que $x(t)$ sai de $\overline{D_0 \cap U}$ no tempo t_1 . Seja $x(t_1) \in \partial(\overline{D_0 \cap U})$. Mas $x(t_1)$ não pode estar na parte da fronteira de U contida em D , pois $V = 0$ em $\partial U \cap D$ por hipótese. Sendo assim, $x(t_1)$ está na fronteira de D_0 contida em U . Como x_0 foi tomado arbitrariamente próximo da origem ($0 < |x_0| < \delta$), temos então que a solução nula é instável, pois independentemente de quão próximo ela inicie da origem, a solução sai de um conjunto limitado D_0 em um tempo finito. \square

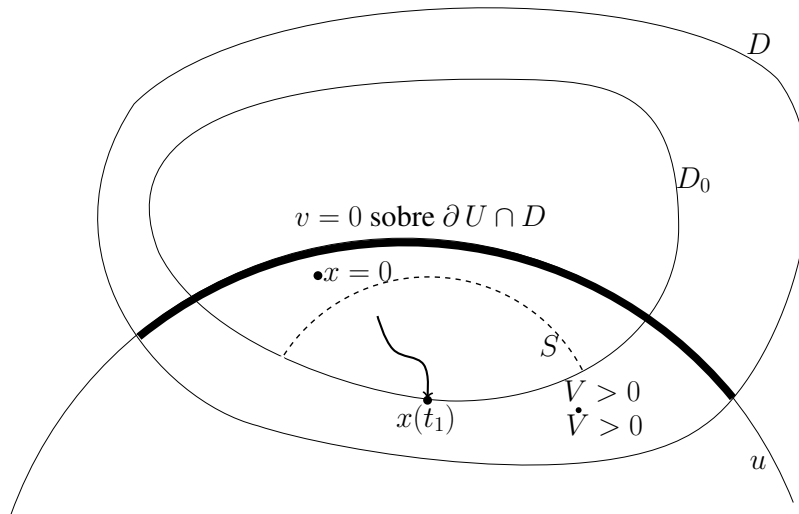


Figura 4.1: **Fonte: Autoria própria (2023).** a solução nula é instável, pois sai de um conjunto limitado D_0 em um tempo finito t_1 .

Observação 15. Veremos a seguir sistemas lineares autônomos com coeficientes constantes com o objetivo de ilustrar um método para construir uma função de Liapunov para este tipo de problema.

Definição 4.9. Dada uma matriz constante A de ordem $n \times n$, considere o problema

$$\dot{x} = Ax. \quad (4.6)$$

Para aplicar os Teoremas 4.6, 4.7 e 4.8, é necessário obter uma função de Liapunov. Seja B alguma matriz constante definida positiva de ordem $n \times n$ e defina

$$V(x) = x^T Bx. \quad (4.7)$$

Calculando a derivada com respeito ao tempo, temos

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}(x^T Bx) = \dot{x}^T Bx + x^T B\dot{x} = x^T (A^T B + BA)x. \quad (4.8)$$

No que segue, para os nossos propósitos, enunciaremos os próximos dois lemas.

Lema 4.10. Seja $\varepsilon > 0$. Então para todo $k > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\varepsilon t} t^k = 0$. Ainda, para qualquer polinômio $p(t)$, segue que $e^{-\varepsilon t} p(t)$ é limitado para $t \geq 0$.

Lema 4.11. Considerando A na forma canônica de Jordan com todos seus autovalores possuindo parte real negativa, então existem constantes K e α tais que $|e^{At}| \leq K e^{-\alpha t}$.

Lema 4.12. *Seja A como em (4.6) com $\det A \neq 0$. A equação matricial $A^T B + BA = -C$ possui uma solução definida positiva B para toda matriz C definida positiva se, e somente se, todos os autovalores de A possuem parte real negativa.*

Demonstração. Seja C uma matriz definida positiva e suponha que B é uma solução definida positiva. Desta forma, $V(x)$ em (4.7) é definida positiva e $\dot{V}(x)$ em (4.8) é definida negativa e, pelo Teorema 4.7, a solução nula de $\dot{x} = Ax$ é assintoticamente estável.

Reciprocamente, suponha que os autovalores de A possuem parte real negativa e seja C uma matriz definida positiva dada. Defina

$$B = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C e^{At} dt. \quad (4.9)$$

Note que esta integral converge, pois os autovalores de A possuem parte real negativa, e pelo Lema 4.11, existem constantes K e α tais que $|e^{At}| \leq K e^{-\alpha t}$, para $t \geq 0$ e, desta forma, B está bem definido e, como C é uma matriz definida positiva, então B também o é, pois para cada vetor $y \in \mathbb{R}^n$ diferente de zero, temos

$$y^T B y = \int_0^{\infty} y^T e^{A^T t} C e^{At} y dt = \int_0^{\infty} (e^{At} y)^T C (e^{At} y) dt > 0. \quad (4.10)$$

Finalmente, temos que $A^T B + BA = -C$, pois

$$\begin{aligned} A^T B + BA &= A^T \int_0^{\infty} e^{A^T t} C e^{At} dt + \int_0^{\infty} e^{A^T t} C e^{At} dt A \\ &= \int_0^{\infty} A^T e^{A^T t} C e^{At} dt + \int_0^{\infty} e^{A^T t} C e^{At} A dt \\ &= \int_0^{\infty} A^T e^{A^T t} C e^{At} + e^{A^T t} C e^{At} A dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} [e^{A^T t} C e^{At}] dt \\ &= e^{A^T t} C e^{At} \Big|_{t=0}^{t=\infty} \\ &= -C. \end{aligned} \quad (4.11)$$

□

Observação 16. Com o Lema 4.12, segue que V definida em (4.7) é definida positiva com \dot{V} em (4.8) semi-definida negativa e, pelo Teorema 4.6, a solução nula de (4.6) é estável. Segue da Observação 11 que os autovalores de A possuem parte real negativa.

Lema 4.13. *Seja $V_p(x)$ um polinômio homogêneo (cada monômio com coeficiente não nulo tem o mesmo grau total) de grau p definido positivo e considere W contínuo tal que $W(x) = o(|x|^p)$ quando $x \rightarrow 0$, isto é, $\lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{W(x)}{|x|^p} = 0$. Desta forma, $V(x) = V_p(x) + W(x)$ é definido positivo em uma vizinhança da origem.*

Demonstração. Seja $k = \min_{|x|=1} V_p(x)$. Note que k existe, pois a esfera é compacta e V_p é contínua. Ainda, $k > 0$ por $V_p(x)$ ser definido positivo e, ainda, como $V_p(x)$ é homogêneo de grau p , segue que

$$V_p(x) = V_p\left(\frac{x|x|}{|x|}\right) = V_p\left(\frac{x}{|x|}\right) |x|^p \geq k|x|^p,$$

para todo $x \neq 0$.

Por outro lado, das hipóteses sobre W , temos que dado $\varepsilon = \frac{k}{2} > 0$, existe $\delta = \delta\left(\frac{k}{2}\right) > 0$ tal que, se $|x| < \delta(\varepsilon)$, então

$$\frac{|W(x)|}{|x|^p} < \frac{k}{2} \Rightarrow |W(x)| < \frac{k}{2}|x|^p.$$

Ainda, tem-se

$$V(x) = V_p(x) + W(x) \geq V_p(x) - |W(x)| \geq k|x|^p - \frac{k}{2}|x|^p = \frac{k}{2}|x|^p = \varepsilon|x|^p.$$

Portanto, $V(x)$ é definida positiva em uma vizinhança da origem. □

Vamos aplicar o método de Liapunov do Lema 4.12 na equação

$$\dot{x} = Ax + h(x) \tag{4.12}$$

e provar o item (ii) do Teorema 3.10

Demonstração do Teorema 3.10, item (ii). Suponha que $h(x)$ em (4.12) continuamente diferenciável em \mathbb{R}^n com $h(0) = 0$ e $\frac{\partial h(0)}{\partial x} = 0$. Seja I a matriz identidade que é definida positiva e suponha que os autovalores de A não possuam parte real nula e que um autovalor de A possui parte real positiva. Assuma que A está na forma canônica de Jordan com dois blocos A_1 e A_2 , de modo que os autovalores com parte real negativa estão em A_1 e os autovalores

com parte real positiva estão em A_2 . Aplicando o Lema 4.12 duas vezes, seja B_1 uma solução definida positiva para $A_1^T B_1 + B_1 A_1 = -I$ e seja B_2 uma solução definida positiva de $(-A_2^T) B_2 + B_2 (-A_2) = -I$. Defina a função de Liapunov

$$V(x) = -x_1^T B_1 x_1 + x_2^T B_2 x_2$$

com $x = (x_1, x_2)$ e x_1 e x_2 possuindo as mesmas dimensões de B_1 e B_2 , respectivamente. Desta forma, segue que

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= -\dot{x}_1^T B_1 x_1 - x_1^T B_1 \dot{x}_1 + \dot{x}_2^T B_2 x_2 + x_2^T B_2 \dot{x}_2 \\ &= -(A_1 x_1 + h_1(x))^T B_1 x_1 - x_1^T B_1 (A_1 x_1 + h_1(x)) + (A_2 x_2 + h_2(x))^T B_2 x_2 \\ &\quad + x_2^T B_2 (A_2 x_2 + h_2(x)) \\ &= -x_1^T (A_1^T B_1 + B_1 A_1) x_1 + x_2^T (A_2^T B_2 + B_2 A_2) x_2 + 2x_2^T B_2 h_2(x) - 2x_1^T B_1 h_1(x) \\ &= x_1^T x_1 + x_2^T x_2 + W(x) \\ &= x^T x + W(x), \end{aligned}$$

com $W(x) = 2x_2^T B_2 h_2(x) - 2x_1^T B_1 h_1(x)$ e note que $\frac{W(x)}{|x|^2} \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$, pois

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{W(x)}{|x|^2} &= \lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{2x_2^T B_2 h_2(x) - 2x_1^T B_1 h_1(x)}{|x|^2} \\ &= \lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{-2x_1^T B_1 h_1(x)}{|x|} + \frac{2x_2^T B_2 h_2(x)}{|x|}. \end{aligned}$$

Das hipóteses sobre h , $\frac{h_1(x)}{|x|}$ e $\frac{h_2(x)}{|x|}$ tendem a zero quando x tende a zero. E o outro termo do produto é limitado, logo

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{W(x)}{|x|^2} = \lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{-2x_1^T B_1 h_1(x)}{|x|} + \frac{2x_2^T B_2 h_2(x)}{|x|} = 0.$$

Pelo Lema 4.13, $\dot{V}(x)$ é definida positiva em uma vizinhança da solução nula de (4.12).

Considerando $U = V^{-1}(0, \infty)$, que é aberto, uma vez que V é contínua, temos V e \dot{V} definidas positivas em U . Seja $x \in \partial U$, então existe uma sequência $(x_n) \subset U$ tal que $x_n \rightarrow x$ e, desta forma, segue da continuidade de V que $V(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(x_n) \geq 0$ e como $x \notin U$, segue que $V(x) = 0$, qualquer que seja $x \in \partial U$. Portanto, são satisfeitas as condições do Teorema

4.8 e concluimos que a solução nula é instável. \square

4.3 ESTABILIDADE LOCAL PARA SISTEMAS NÃO AUTÔNOMOS

Supondo $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável, considere o sistema não autônomo

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t, x) \\ f(t, 0) &= 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

Definição 4.14. *Seja D um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n que contenha a origem e $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$. Temos que:*

- *V é definida positiva se V for contínua, $V(t, 0) = 0$ para todo $t \geq 0$ e existir uma função definida positiva $W : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $V(t, x) \geq W(x)$, para todo $(t, x) \in [0, \infty) \times D$.*
- *V é semi-definida positiva se for contínua, se $V(t, 0) = 0$ para todo $t \geq 0$ e se $V(t, x) \geq 0$, para todo $(t, x) \in [0, \infty) \times D$.*
- *V tem cota superior suficientemente pequena se for contínua e se existir uma função definida positiva $U : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|V(t, x)| \leq U(x)$, para todo $(t, x) \in [0, \infty) \times D$.*
- *Assumindo que V é continuamente diferenciável, definimos a derivada com respeito a t ao longo da trajetória em (4.13) como*

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \nabla V(t, x) f(t, x).$$

Teorema 4.15 (Estabilidade de Liapunov para sistemas não-autônomos). *Seja $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ definida positiva continuamente diferenciável.*

- (i) *Se $\dot{V}(t, x) \leq 0$, então a solução nula de (4.13) é estável.*
- (ii) *Se V possuir uma cota superior suficientemente pequena e $\dot{V}(t, x) \leq 0$, então a solução nula de (4.13) é uniformemente estável.*
- (iii) *Se V possuir uma cota superior suficientemente pequena e $-\dot{V}$ for definido positivo, então a solução nula de (4.13) é uniformemente assintoticamente estável.*

Demonstração.

- (i) Como V é definida positiva, então existe uma função definida positiva W tal que $V(t, x) \geq W(x)$ para todo $(t, x) \in [0, \infty) \times D$. Seja $B = B(0, r)$ a bola de raio r centrada na origem com r suficientemente pequeno de tal modo que $B \subset D$. Considere $0 < \varepsilon < r$ e defina $k = \min_{|x|=\varepsilon} W(x) > 0$.

Como V é contínua e $V(t, 0) = 0$, então para todo $t_0 \geq 0$, existe $0 < \delta < \varepsilon$ tal que, se $|x - 0| \leq \delta$, então $|V(t_0, x) - V(t_0, 0)| < k$, ou seja,

$$|x| < \delta \Rightarrow V(t_0, x) < k.$$

Denotando a solução por $x(t)$, considere $x_0 \in B(0, \delta)$ e, como $\dot{V}(t, x) \leq 0$, então para $t \geq t_0$, segue que

$$\int_{t_0}^t \frac{dV(s, x)}{ds} ds \leq 0$$

$$\Rightarrow V(t, x(t)) \leq V(t_0, x_0) < k.$$

Desta forma, se $|x(t)| = \varepsilon$, temos $V(t, x(t)) \geq W(x(t)) \geq k$, um absurdo. E se $|x(t)| > \varepsilon$, pelo Teorema do valor Médio, existe t_i com $t_0 < t_i < t$ tal que $|x(t_i)| = \varepsilon$ e $V(t_i, x(t_i)) \geq k$ com $t_i > t_0$, um absurdo.

Portanto, $|x(t)| < \varepsilon$.

- (ii) Assumindo que V possui uma cota superior suficientemente pequena, então existe uma função definida positiva $W_1(x)$ tal que $V(t, x) \leq W_1(x)$ para todo $(t, x) \in [0, \infty) \times D$. Com ε e k definidos no item (i) e como W_1 é contínua, existe $\delta > 0$ tal que se $|x| \leq \delta$, então $W_1(x) < k$. Considere $x_0 \in B(0, \delta)$ e, como $\dot{V}(t, x) \leq 0$, então para todo $t \geq t_0 > 0$, segue que

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x_0) \leq W_1(x_0) < k.$$

Desta forma, analogamente ao item (i), temos que $|x(t)| < \varepsilon$ e como δ não depende de t , segue o resultado.

- (iii) Considerando que $-\dot{V}(t, x)$ é definida positiva, então existe $W_2(x)$ definida positiva tal que $-\dot{V}(t, x) \geq W_2(x)$, ou seja, $\dot{V}(t, x) \leq -W_2(x)$, para $(t, x) \in [0, \infty) \times D$. Como a solução nula é uniformemente estável, dado $H > 0$ e $t_0 \geq 0$, existe $r = r(H) > 0$ tal que, se $|x_0| < r$, então $|x(t)| < H$ para todo $t \geq t_0$. H e r são tomados de tal modo que $B[0, H] \subset D$.

Ainda, dado $\eta > 0$, existe $0 < \delta(\eta) < H$ tal que, se $|x_0| < \delta(\eta)$, então $|x(t)| < \eta$ para $t \geq t_0 \geq 0$. Em ambos os casos, r e δ não dependem de t_0 .

Defina:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \Omega : \delta(\eta) \leq |x| \leq H\}; \\ \alpha &= \min_{x \in A} W(x); \\ \beta &= \max_{x \in A} W_1(x); \\ -\gamma &= \max_{x \in A} -W_2(x) < 0; \\ T(\eta) &> \frac{\beta - \alpha}{\gamma}. \end{aligned}$$

Afirmação: Para todo $|x_0| < r$, existe $t \in [t_0, t_0 + T(\eta)] = I(t_0)$ tal que $|x(t)| < \delta(\eta)$.

De fato, suponha por absurdo que existe $|x_0| < r$ com $|x(t)| \geq \delta(\eta)$ para todo $t \in I(t_0)$.

Em particular, teríamos $x(t) \in A$, para todo $t \in I(t_0)$. Desta forma, temos que

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq -W_2(x(t)) \leq -\gamma$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_0+T(\eta)} \dot{V}(s, x(s)) ds \leq \int_{t_0}^{t_0+T(\eta)} -\gamma ds$$

$$\Rightarrow V(t_0 + T(\eta), x(t_0 + T(\eta))) - V(t_0, x_0) \leq -\gamma T(\eta)$$

$$\Rightarrow V(t_0 + T(\eta), x(t_0 + T(\eta))) \leq V(t_0, x_0) - \gamma T(\eta)$$

e note que $V(t_0, x_0) - \gamma T(\eta) \leq -\gamma T(\eta) + W_1(x_0)$, logo

$$V(t_0 + T(\eta), x(t_0 + T(\eta))) \leq \beta - \gamma T(\eta) < \alpha,$$

pois $T(\eta) > \frac{\beta - \alpha}{\gamma}$.

Como $W(x) \leq V(t, x)$ para $(t, x) \in [0, \infty) \times D$, segue que $\alpha \leq W(x) \leq V(t, x)$ para $t \in [0, \infty)$ e $x \in A$, sendo assim, $\alpha \leq V(t_0 + T(\eta), x(t_0 + T(\eta)))$, o que é um absurdo e, desta forma, fica provada a Afirmação.

Logo, para todo $|x_0| < r$, existe $t_1 \in I(t_0)$ tal que $|x(t_1)| < \delta(\eta)$. Ainda, note que se $|x_0| < \delta(\eta)$, então $|x(t, t_0, x_0)| < \eta$ para $t \geq t_0 \geq 0$ e, conseqüentemente, $|x(t, t_1, x(t_1, t_0, x_0))| < \eta$ para $t \geq t_1$. Mas $x(t, t_1, x(t_1, t_0, x_0)) = x(t, t_0, x_0)$, pois satisfazem o mesmo problema de valor inicial. Portanto, $|x(t)| < \eta$ para $t \geq t_0 + T(\eta) \geq t_1$ e a solução nula é uniformemente assintoticamente estável.

□

Teorema 4.16 (Instabilidade para sistemas não-autônomos). *Suponha que exista uma função*

$V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável tal que são satisfeitas as seguintes propriedades:

- (i) Existe uma função definida positiva W tal que $|V(t, x)| \leq W(x)$, $\forall (t, x) \in [0, \infty) \times D$.
- (ii) Para toda vizinhança U da origem, existem pontos $x \in U$ tais que $V(t, x) > 0$.
- (iii) \dot{V} é definido positivo.

Então a solução nula de (4.13) é instável.

Demonstração. Seja $r > 0$ tal que $B[0, r] \subset D$. Dado $0 < \varepsilon < r$, existe $|x_0| < \varepsilon$ com $V(t_0, x_0) > 0$. Como W é contínua, existe $0 < \alpha < r$ tal que, se $|x| < \alpha$, então $W(x) < V(t_0, x_0)$. Denotemos a solução por $x(t)$ e defina

$$A = \{x \in B[0, r]; \alpha \leq |x| \leq r\}.$$

Afirmção: Para todo $t \geq t_0$, $\alpha \leq |x(t)|$.

De fato, suponha por absurdo que exista um $t \geq t_0$ com $|x(t)| < \alpha$. Então

$$V(t, x(t)) \leq |V(t, x(t))| \leq W(x(t)) < V(t_0, x_0),$$

ou seja,

$$V(t, x(t)) < V(t_0, x_0), \text{ para } t > t_0.$$

Mas, $\dot{V}(t, x(t)) > 0$, ou seja,

$$\int_{t_0}^t V(s, x(s)) ds > 0 \Rightarrow V(t, x(t)) > V(t_0, x_0),$$

o que é um absurdo e segue a afirmação.

Suponha por absurdo que $|x(t)| < r$, para todo $t \geq t_0$ ($x(t) \in A$). Como \dot{V} é definido positivo, existe W_1 tal que

$$\dot{V}(t, x) \geq W_1(x) \geq \omega > 0.$$

Sendo assim, $\dot{V}(t, x(t)) \geq \omega$ para todo $t \geq t_0$ e, integrando, temos

$$V(t, x(t)) \geq \omega(t - t_0) + V(t_0, x_0) \rightarrow \infty.$$

Desta forma, temos

$$\max_{x \in A} W(x) \geq W(x(t)) \geq V(t, x(t)) \geq \omega(t - t_0) + V(t_0, x_0) \rightarrow \infty,$$

o que é um absurdo.

Portanto, existe $t_1 > t_0$ tal que $|x(t_1)| \geq r$. \square

4.4 CAMPOS VETORIAIS, FLUXOS E CONJUNTOS LIMITES

Definição 4.17. *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Um campo vetorial de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$, em D é uma aplicação $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k . A esse campo associamos a equação diferencial*

$$\dot{x} = f(x). \quad (4.14)$$

As soluções desta equação são chamadas trajetórias ou curvas integrais de f .

Observação 17. A solução definida no intervalo maximal I_x será denotada por $\phi(t, x)$, para cada $x \in D$. Ainda, note que $\phi(0, x) = x$.

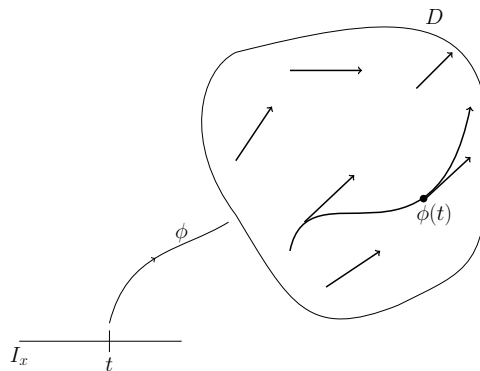


Figura 4.2: As soluções ϕ são curvas integrais de f

Lema 4.18 (Propriedade de grupo). *Se $y = \phi(t, x)$ e $t \in I_x$, então $I_y = I_x - t = \{r - t : r \in I_x\}$ e $\phi(s, y) = \phi(t + s, x)$ para todo $s \in I_y$;*

Definição 4.19. *Dado o conjunto $U = \{(t, x) : x \in D, t \in I_x\}$ aberto em \mathbb{R}^{n+1} , a aplicação $\phi : U \rightarrow D$ chama-se o fluxo gerado por f .*

Corolário 4.20. *Seja f um campo vetorial C^r , $r \geq 1$ em $D \subset \mathbb{R}^n$. Se $x \in D$ e $I_x = (\omega_-(x), \omega_+(x))$ é tal que $-\infty < \omega_-(x) < \omega_+(x) < \infty$, então $\phi(t, x)$ tende a ∂D quando $t \rightarrow \omega_+(x)$ (respectivamente, $t \rightarrow \omega_-(x)$), ou seja, para todo compacto $K \subset D$ existe $\varepsilon = \varepsilon(K) > 0$ tal que se $t \in [\omega_+(x) - \varepsilon, \omega_+(x))$ então $\phi(t, x) \notin K$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que existe um compacto $K \subset D$ e uma sequência $t_n \rightarrow \omega_+(x) < \infty$ tal que $\phi(t_n, x) \in K$ para todo n . Como K é compacto, existe uma subsequência t_{n_k} tal que $\phi(t_{n_k}, x) \rightarrow x_0 \in K$. Como U é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $B(0, \delta) \times B(x_0, \delta) \subset U$. Logo para n_k suficientemente grande temos $\phi(t_{n_k}, x) \in B(x_0, \delta)$ e portanto para $s \in B(0, \delta)$ temos que $\phi(s, \phi(t_{n_k}, x))$ está bem definida e é igual a $\phi(s + t_{n_k}, x)$, um absurdo, pois $t_{n_k} + s \rightarrow \omega_+(x) + s > \omega_+(x)$. \square

Corolário 4.21. Se $D = \mathbb{R}^n$ e $|f(x)| < c$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então $I_x = \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Suponhamos que $\omega_+(x) < \infty$ para algum $x \in \mathbb{R}^n$. Como

$$|x - \phi(t, x)| = \left| \int_0^t f(\phi(s, x)) ds \right| \leq ct \leq c\omega_+(x),$$

resulta que para todo $t \in [0, \omega_+(x))$, $\phi(t, x) \in B[x, c\omega_+(x)]$, absurdo pelo corolário 4.20. \square

Definição 4.22. O conjunto $\gamma(p) = \{\phi(t, p) : t \in I_p\}$ é chamado de órbita de f pelo ponto p .

Definição 4.23. Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^k , $k \geq 1$. Seja $\phi(t) = \phi(t, p)$ a curva integral de f passando por p , definida no seu intervalo máximo $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$.

Se $\omega_+(p) = \infty$ define-se

$$\omega(p) = \{q \in D : \exists(t_n) \text{ com } t_n \rightarrow \infty \text{ e } \phi(t_n, p) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

Analogamente, se $\omega_-(p) = -\infty$ temos

$$\alpha(p) = \{q \in D : \exists(t_n) \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \phi(t_n, p) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

Definição 4.24. O conjunto ω -limite de uma órbita γ é o conjunto $\omega(p)$, para qualquer $p \in \gamma$. A definição de α -limite é análoga.

Observação 18. Sejam $\phi(t) = \phi(t, p)$ a curva integral do campo f pelo ponto p e $\psi(t) = \psi(t, p)$ a curva integral do campo $-f$ pelo ponto p , então $\psi(t, p) = \phi(-t, p)$. Portanto o ω -limite de $\psi(t)$ é igual ao α -limite de $\phi(t)$ e reciprocamente, o ω -limite de $\phi(t)$ é igual ao α -limite de $\psi(t)$. Em outras palavras, se considerarmos $\phi(t, p)$ a solução de

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= p \end{cases}$$

e $\psi(t, p)$ solução de

$$\begin{cases} \dot{x} &= -f(x) \\ x(0) &= p, \end{cases}$$

temos que

$$\begin{aligned} \omega_\psi(p) &= \{q \in D : \exists(t_n) \text{ com } t_n \rightarrow \infty \text{ tal que } \psi(t_n, p) \rightarrow q\} \\ &= \{q \in D : \exists(t_n) \text{ com } -t_n \rightarrow -\infty \text{ tal que } \phi(-t_n, p) \rightarrow q\} = \alpha_\phi(p). \end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned} \omega_\phi(p) &= \{q \in D : \exists(t_n) \text{ com } t_n \rightarrow \infty \text{ tal que } \phi(t_n, p) \rightarrow q\} \\ &= \{q \in D : \exists(t_n) \text{ com } -t_n \rightarrow -\infty \text{ tal que } \psi(-t_n, p) \rightarrow q\} = \alpha_\psi(p). \end{aligned}$$

Logo para estudar as propriedades gerais desses conjuntos não há perda de generalidade em se restringir ao estudo do conjunto ω -limite.

Teorema 4.25. *Sejam $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^k , ($k \geq 1$) com D aberto e $\gamma^+(p) = \{\phi(t, p) : t \geq 0\}$ (respectivamente, $\gamma^-(p) = \{\phi(t, p) : t \leq 0\}$) a semi-órbita positiva (respectivamente, a semi-órbita negativa) do campo f pelo ponto p . Se $\gamma^+(p)$ (respectivamente, $\gamma^-(p)$) está contida num subconjunto compacto $K \subset D$, então:*

- a) $\omega(p) \neq \emptyset$ (respectivamente, $\alpha(p)$);
- b) $\omega(p)$ é compacto (respectivamente, $\alpha(p)$);
- c) $\omega(p)$ é invariante por f (respectivamente, $\alpha(p)$).
- d) $\omega(p)$ é conexo (respectivamente, $\alpha(p)$).

Demonstração. Pela observação 18, não há perda de generalidade demonstrar apenas para $\omega(p)$.

- a) $\omega(p) \neq \emptyset$.

Seja $t_n = n \in \mathbb{N}$. Por hipótese $\{\phi(t_n)\} \subset K$. Logo existe uma subsequência $\{\phi(t_{n_k})\}$ que converge para um ponto $q \in K$. Desse modo $t_{n_k} \rightarrow \infty$ e $\phi(t_{n_k}) \rightarrow q$ quando $k \rightarrow \infty$, ou seja $q \in \omega(p)$ por definição de $\omega(p)$.

- b) $\omega(p)$ é compacto.

Primeiramente, note que $\omega(p) \subset \overline{\gamma^+(p)} \subset K$ e como K é compacto, segue que $\omega(p)$ é limitado.

Vejamos agora que $\omega(p)$ é fechado e, para isto, tome $(q_n) \in \omega(p)$ com $q_n \rightarrow q$ e vamos mostrar que $q \in \omega(p)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, existe $(t_m^{(n)})$ com $t_m^{(n)} \rightarrow \infty$ e $\phi(t_m^{(n)}, p) \rightarrow q_n$ quando $m \rightarrow \infty$. Em particular, definindo $t_n := t_{m_n}^{(n)}$, temos

$$|\phi(t_n, p) - q_n| < \frac{1}{n} \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Sendo assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, p) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\phi(t_n, p) - q_n + q_n] = 0 + q = q.$$

Portanto, $q \in \omega(p)$ e $\omega(p)$ é fechado.

- c) $\omega(p)$ é invariante por f .

Afirmção: $q \in \omega(p) \implies \gamma(q) \subset \omega(p)$.

De fato, seja $q \in \omega(p)$ e defina $\psi : I_q \rightarrow D$ tal que $\psi(t) = \phi(t, q)$. Seja $t_0 \in I_q$ e $q_1 := \phi(t_0, q) \in \gamma(q)$. Ainda, existe (t_n) tal que $t_n \rightarrow \infty$ e $\phi(t_n, p) \rightarrow q$, quando $n \rightarrow \infty$. Assim,

$$\begin{aligned} \phi(t_0, q) &= \phi(t_0, \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, p)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_0, \phi(t_n, p)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_0 + t_n, p). \end{aligned}$$

E com $S_n = t_0 + t_n$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(S_n, p) = \phi(t_0, q) = q_1.$$

Portanto, $q_1 \in \omega(p)$ e $\gamma(q) \subset \omega(p)$.

d) $\omega(p)$ é conexo.

Suponha por absurdo que $\omega(p) = A \cup B$ com A e B não vazios, fechados e disjuntos. Como $A \neq \emptyset$, existe uma sequência (t'_n) tal que $t'_n \rightarrow \infty$ e $\phi(t'_n, p) \rightarrow a$ com $a \in A$. Analogamente, como $B \neq \emptyset$, existe uma sequência (t''_n) tal que $t''_n \rightarrow \infty$ e $\phi(t''_n, p) \rightarrow b$ com $b \in B$.

Defina $d := d(A, B) > 0$ (d está bem definido, pois A e B são compactos e disjuntos) e tome $(t_n) \subset (t'_n) \cup (t''_n)$ e, fixando n ímpar, considere que

$$\begin{aligned} (t_n) &\subset (t'_n); \\ (t_{n+1}) &\subset (t''_n). \end{aligned}$$

Desta forma, fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$\begin{aligned} d(\phi(t_n), A) &< \frac{d}{2}; \\ d(\phi(t_{n+1}), A) &> \frac{d}{2}. \end{aligned}$$

E note que $t_n \neq t_{n+1}$, caso contrário, teríamos um absurdo. Sem perda de generalidade, suponha que $t_n < t_{n+1}$ e, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t_n^* \in (t_n, t_{n+1})$ tal que $d(\phi(t_n^*), A) = \frac{d}{2}$ quando $n \rightarrow \infty$.

Além disso, existe $q \in \omega(p)$ tal que $\phi(t_n^*, p) \rightarrow q$, ou seja, $d(q, A) = \frac{d}{2}$, isto é, $q \notin A$.

Por outro lado,

$$d(q, B) \geq d(A, B) - d(q, A) = d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2},$$

isto é, $q \notin B$.

Ou seja, temos que $q \in \omega(p)$, mas $q \notin A \cup B$, um absurdo.

□

Corolário 4.26. *Nas condições do teorema anterior, se $p \in \omega(q)$ então a curva integral de f , pelo ponto p , está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Como $\omega(q)$ é invariante, então $\phi(t, p) \in \omega(q)$ para todo $p \in \omega(q)$. E como $\omega(q)$ é compacto, segue do Corolário 4.20 que $\omega_- = -\infty$ e $\omega_+ = +\infty$. □

Definição 4.27. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tal que $f(0) = 0$. A solução $0 \in \mathbb{R}^n$ diz-se globalmente estável quando for estável e $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$ para toda solução $\phi(t)$ de*

$$\dot{x} = f(x). \quad (4.15)$$

Teorema 4.28. *Seja $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Liapunov para (4.15) tal que o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$ não contém trajetória inteira além de $x(t) = 0$. Suponha que para cada $c > 0$ dado exista $R > 0$ tal que $|x| > R$, implica $V(x) > c$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Nessas condições a solução nula é globalmente estável.*

Demonstração. Seja $p \in \mathbb{R}^n$ e $c > V(p)$. Por hipótese existe $R > 0$ tal que $|x| > R$ implica $V(x) > c$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Como V é não-crescente segue que $V(\phi(t, p)) \leq V(\phi(0, p)) = V(p)$ para todo $t \geq 0$ em I_p . Logo $\phi(t, p) \in B[0, R]$ para todo $t \geq 0$ em I_p e pelo Corolário 4.20 resulta que $\phi(t, p)$ está definida para todo $t \geq 0$. Desse modo,

$$\{\phi(t, p) : t \geq 0\} = \gamma^+(p) \subset B[0, R]$$

e $B[0, R]$ é compacto. Desta forma, segue do Teorema 4.25 que $\omega(p) \neq \emptyset$ e $\omega(p)$ é invariante por f .

Vejamos que V é constante em $\omega(p)$. De fato, sejam $a, b \in \omega(p)$. Então

$$\begin{aligned} \exists t_n \rightarrow \infty \quad \text{tal que} \quad \phi(t_n, p) \rightarrow a; \\ \exists t'_n \rightarrow \infty \quad \text{tal que} \quad \phi(t'_n, p) \rightarrow b. \end{aligned}$$

Ainda, da continuidade de V , segue que

$$\begin{aligned} V(a) &= \lim_{n \rightarrow \infty} V(\phi(t_n, p)) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(\phi(t, p)); \\ V(b) &= \lim_{n \rightarrow \infty} V(\phi(t'_n, p)) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(\phi(t, p)). \end{aligned}$$

Desta forma, concluímos que $V(a) = V(b)$, para quaisquer $a, b \in \omega(p)$. Sendo assim, $\dot{V} \equiv 0$ em $\omega(p)$ e como $\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$ não contém trajetória inteira além de $x(t) = 0$, segue que $\omega(p) = \{0\}$. □

5 APLICAÇÕES

5.1 O PROBLEMA NEOCLÁSSICO ECONÔMICO

A teoria do crescimento neoclássico foi introduzida em 1956 por Robert Solow¹ e Trevor Swan². Vamos estudar a estabilidade da solução de equilíbrio do modelo neoclássico de crescimento econômico utilizando as notações

$$\begin{aligned}
 t &= \text{Tempo;} \\
 K(t) &= \text{Unidade de estoque de capital;} \\
 L(t) &= \text{Unidade de força de trabalho (mão de obra);} \\
 \dot{K}(t) = \frac{d}{dt}K(t) &= \text{Investimento;} \\
 k(t) = \frac{K(t)}{L(t)} &= \text{Relação capital-trabalho;} \\
 Y(t) = F(K(t), L(t)) &= \text{Função Produção;} \\
 0 < s < 1 &= \text{Coeficiente de Poupança;} \\
 sF(K(t), L(t)) &= \text{Poupança.}
 \end{aligned}$$

Assumiremos por hipótese que, dado uma constante positiva λ , então a função produção satisfaz a seguinte igualdade:

$$\lambda Y(t) = \lambda F(K(t), L(t)) = F(\lambda K(t), \lambda L(t)),$$

e dizemos que chamamos $Y(t)$ possui homogeneidade de grau 1. Assumindo esta homogeneidade e omitindo t , obtemos

$$F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = f\left(\frac{K}{L}\right) = f(k).$$

Assuma que $f(0) = 0$, $f'(k) > 0$, $f''(k) < 0$, $\lim_{k \rightarrow 0^+} f'(k) = \infty$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0$. Pelo Lema B.2, existe uma função f que satisfaz estas propriedades simultaneamente.

Equilíbrio exige que o investimento seja igual à economia, ou seja,

$$\dot{K} = sF(K, L).$$

¹Robert Solow (1924-2019) é um economista americano amplamente reconhecido por suas contribuições para a teoria do crescimento econômico e para a macroeconomia. Ganhou o Prêmio Nobel de Economia em 1987.

²Trevor Swan (1916-1989) foi um economista australiano conhecido por suas contribuições para a teoria macroeconômica e especialmente para a teoria do crescimento econômico.

Suponha que o trabalho cresça exponencialmente conforme a função dada por

$$L(t) = L(0)e^{nt}, \quad L(0) > 0, \quad 0 < n < 1.$$

Aplicando a fórmula da derivada da divisão em k , obtemos que

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{K}{L} \right) = \frac{\dot{K}L - \dot{L}K}{L^2} \\ &= \frac{\dot{K}}{L} - \frac{\dot{L}}{L} \frac{K}{L} \\ &= \frac{sF(K, L)}{L} - \frac{nL(0)e^{nt}}{L(0)e^{nt}} \frac{K}{L} \\ &= sF\left(\frac{K}{L}, 1\right) - nk \\ &= sf(k) - nk, \end{aligned}$$

ou seja, temos a equação

$$\dot{k} = sf(k) - nk. \quad (5.1)$$

Assuma por hipótese que $0 < \frac{n}{s} < \lim_{k \rightarrow 0^+} f'(k)$. Fazendo $\dot{k} = 0$ em (5.1), segue do Lema B.1 que existe uma única solução positiva de equilíbrio de $sf(k) - nk = 0$, a qual será denotada por k^* . Com a função de Liapunov dada por

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2$$

e com $x = k - k^*$, temos

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x\dot{x} \\ &= x\dot{k} \\ &= x[sf(k) - nk] \\ &= x[sf(x + k^*) - n(x + k^*)]. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema B.3, o qual nos fornece $f(y) \leq f(a) + f'(a)(y - a)$ e substituindo y por $x + k^*$ e a por k^* , temos

$$f(x + k^*) \leq f(k^*) + xf'(k^*).$$

Sendo assim, segue que

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= x[sf(x+k^*) - n(x+k^*)] \\
&\leq x[sf(k^*) + xsf'(k^*) - n(x+k^*)] \\
&= x[xf'(k^*) + (sf(k^*) - nk^*) - nx] \\
&= x^2[sf'(k^*) - n] \\
&= x^2 \left[\frac{nk^* f'(k^*)}{f(k^*)} - n \right] \\
&= \frac{x^2 nk^*}{f(k^*)} \left[f'(k^*) - \frac{f(k^*)}{k^*} \right].
\end{aligned}$$

Note que $\frac{x^2 nk^*}{f(k^*)} > 0$ e, pelo Lema B.4, $f'(k^*) - \frac{f(k^*)}{k^*} < 0$, logo

$$\dot{V}(x) \leq \frac{x^2 nk^*}{f(k^*)} \left[f'(k^*) - \frac{f(k^*)}{k^*} \right] < 0.$$

Desta forma, \dot{V} é definida negativa e, pelo Teorema 4.7, a solução de equilíbrio k^* é assintoticamente estável para k em uma vizinhança de k^* . Mais ainda, k^* é assintoticamente estável para $k > 0$. Em outras palavras, a relação capital-trabalho tende a se estabilizar de forma positiva ao longo do tempo.

5.2 A EQUAÇÃO DE LORENTZ

Dentre as diversas aplicações da dinâmica de fluidos, destaca-se um problema meteorológico, o qual investiga o movimento de uma camada de fluido, como por exemplo, a atmosfera terrestre, na qual a camada mais próxima ao solo é mais quente do que a camada mais distante do solo. Caso a diferença de temperatura for baixa, existe uma variação linear da temperatura com a altitude, mas não um movimento significativo do fluido. Por outro lado, se diferença de temperatura for suficientemente grande, o ar quente sobe e desloca o ar frio que está por cima, o que resulta em um movimento. Para estudar este fenômeno, realizaremos uma análise de um sistema autônomo não linear de terceira ordem proposto por E. N. Lorentz³, e utilizaremos as seguintes notações:

- x = Intensidade do movimento do fluido;
- y = Variação da temperatura na direção horizontal;
- z = Variação da temperatura na direção vertical;
- a = Constante positiva que depende do material;
- b = Constante positiva que depende das propriedades geométricas do fluido;
- r = Constante positiva que é proporcional à diferença de temperatura.

³Hendrik Lorentz foi um físico holandês (1853-1928) amplamente reconhecido por suas contribuições à física teórica e experimental, especialmente na teoria da relatividade de Albert Einstein.

Com as variáveis bem esclarecidas, considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(-x + y) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}, \quad (5.2)$$

com $a > b + 1$. Vejamos quais são os pontos de equilíbrio deste sistema e, para isso, basta resolver em x, y e z , o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} ax - ay = 0 \\ rx - y - xz = 0 \\ -bz + xy = 0 \end{cases}.$$

Os três pontos de equilíbrio encontrados que satisfazem o sistema são $P_1 = (0, 0, 0)$, $P_2 = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ e $P_3 = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$.

Vamos analisar os casos em que $r \leq 1$ e $r > 1$. No caso $r \leq 1$, há apenas um ponto de equilíbrio, o P_1 e, para analisá-lo, considere o sistema reescrito no formato

$$\dot{X} = AX + h(X) \quad (5.3)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -xz \\ xy \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

e o funcional de Liapunov dado por

$$\begin{aligned} V: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto V(x, y, z) = x^2 + ay^2 + az^2. \end{aligned}$$

Note que $V \geq 0$, pois $a > 0$. E além disso, temos

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y, z) &= 2x\dot{x} + 2ay\dot{y} + 2az\dot{z} \\ &= 2xa(-x + y) + 2ay(rx - y - xz) + 2az(-bz + xy) \\ &= -2x^2a + 2xya + 2ayrx - 2ay^2 - 2axzy - 2abz^2 + 2axyz \\ &= -2a(x^2 - (1+r)xy + y^2) - 2abz^2. \end{aligned}$$

Ainda, note que

$$\begin{aligned} r &\leq 1 \\ \Rightarrow r + 1 &\leq 2 \\ \Rightarrow (r + 1)^2 &\leq 4 \\ \Rightarrow (r + 1)^2 y^2 &\leq 4y^2 \\ \Rightarrow (r + 1)^2 y^2 - 4y^2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Desta forma, $\dot{V}(x, y, z) = -2a(x^2 - (1+r)xy + y^2) - 2abz^2$ e temos que $-2a < 0$ e $-2abz^2 < 0$. Quanto ao termo $x^2 - (1+r)xy + y^2$, temos uma equação do segundo grau em x com coeficiente do termo x^2 positivo e $\Delta = (r+1)^2y^2 - 4y^2 \leq 0$, ou seja $x^2 - (1+r)xy + y^2 \geq 0$ e, com isso,

$$\dot{V}(x, y, z) < 0.$$

Como $\dot{V}(x, y, z) < 0$, do Teorema 4.7, segue que P_1 é assintoticamente estável para $\dot{X} = AX$.

Ainda, temos

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{h(X)}{|(X)|} = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{(0, -xz, xy)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = (0, 0, 0),$$

e segue do Teorema 3.10 que P_1 é assintoticamente estável para o problema (5.4).

Para analisar o caso em que $r > 1$, iremos verificar a seguinte afirmação: Os pontos P_2 e P_3 são assintoticamente estáveis desde que

$$1 < r < r^* := a \left(\frac{a+b+3}{a-b-1} \right), \quad a > b+1.$$

De fato, vejamos o ponto P_2 , pois P_3 é análogo. Fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} u &= x - \sqrt{b(r-1)} \\ v &= y - \sqrt{b(r-1)} \\ w &= z - (r-1), \end{aligned}$$

temos o seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -uw \\ uv \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

Desta forma, temos que $(0, 0, 0)$ é ponto de equilíbrio de (5.5). Analisando os autovalores do problema linearizado, temos

$$\begin{vmatrix} -a - \lambda & a & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies f_r(\lambda) = \lambda^3 + (a+b+1)\lambda^2 + (a+r)b\lambda + 2ab(r-1) = 0.$$

Para o caso $r = 1$, temos $f_1(\lambda) = \lambda^3 + (a+b+1)\lambda^2 + (a+1)b\lambda = 0$ e as raízes são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -b$ e $\lambda_3 = -a-1$. Ainda, como $a > b+1$, temos que estas raízes são diferentes

entre si, pois $-a-1 < -a+1 < -b$. Desta forma, segue do Teorema 3.9 que $(0, 0, 0)$ é estável.

Vejam agora qual o menor valor de $r^* > 1$ para o qual f_{r^*} possui autovalor com parte real nula. Sendo assim, o autovalor desejado é da forma ωi , com $\omega \neq 0$, pois os autovalores de f_{r^*} são não nulos para qualquer $r > 1$. Resolvendo $f_{r^*}(\omega i) = 0$, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= f_{r^*}(\omega i) \\ \implies 0 &= -i\omega^3 - (a+b+1)\omega^2 + (a+r^*)bi\omega + 2ab(r^*-1) \end{aligned}$$

e esta igualdade vale se, e somente se, valem as seguintes igualdades:

$$0 = -\omega^3 + (a+r^*)b\omega \quad (5.6)$$

$$0 = -(a+b+1)\omega^2 + 2ab(r^*-1). \quad (5.7)$$

De (5.6), temos que

$$\omega(-\omega^2 + (a+r^*)b) = 0 \implies \omega^2 = (a+r^*)b.$$

E de (5.7), temos que

$$\begin{aligned} 0 &= -(a+b+1)\omega^2 + 2ab(r^*-1) \\ \implies 0 &= -(a+b+1)(a+r^*)b + 2ab(r^*-1) \\ \implies 0 &= -a^2b - ar^*b - ab^2 - b^2r^* - ab - r^*b + 2abr^* - 2ab \\ \implies 0 &= ab(-a - r^* - b + 2r^* - 2 - 1) + b(-br^* - r^*) \\ \implies 0 &= -a(a+b+3-r^*) - (br^* + r^*) \\ \implies 0 &= a(a+b+3-r^*) + (br^* + r^*) \\ \implies 0 &= a(a+b+3) - r^*(a-b-1) \end{aligned}$$

$$\implies r^* = \frac{a(a+b+3)}{(a-b-1)}.$$

Desta forma, temos $r^* = \frac{a(a+b+3)}{(a-b-1)}$ é o menor valor para o qual f_{r^*} possui autovalor com parte real nula.

Finalmente, denotando as raízes de $f_r(\lambda)$ por λ_1^r , λ_2^r e λ_3^r , note que $f_1(\lambda)$ e $f_r(\lambda)$ são polinômios mônicos e, além disso, temos que

$$\lim_{r \rightarrow 1} f_r(\lambda) = f_1(\lambda),$$

ou seja, são satisfeitas as hipóteses do Teorema B.6 e, reordenando os índices se necessário,

temos que

$$\begin{aligned}\lambda_1^r &\rightarrow \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2^r &\rightarrow \lambda_2 = -b \\ \lambda_3^r &\rightarrow \lambda_3 = -a - 1,\end{aligned}$$

quando $r \rightarrow 1$.

Portanto, para $1 < r < r^*$, temos que os autovalores de $f_r(\lambda)$ são todos negativos, logo, do Teorema 3.9, o ponto $(0, 0, 0)$ é assintoticamente estável para o problema linearizado, e como

$$\lim_{(u,v,w) \rightarrow (0,0,0)} \frac{(0, -uw, uv)}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = (0, 0, 0),$$

segue do Teorema 3.10 que $(0, 0, 0)$ é assintoticamente estável para o problema dado em (5.5).

Voltando para o problema nas variáveis x, y e z e, como o problema original (5.4) é equivalente ao problema (5.5), segue que o ponto P_2 é assintoticamente estável para (5.4), o que prova a afirmação.

Concluindo, temos que para $r \leq 1$, o único ponto de equilíbrio é P_1 e é assintoticamente estável. E para $1 < r < r^*$, temos três pontos de equilíbrios e são todos assintoticamente estáveis.

5.3 A EQUAÇÃO DE KRASOVSKII

A equação de Krasovskii⁴ tem o formato

$$\ddot{x} + k(x^2 + \dot{x}^2)\dot{x} + x = 0, \quad (5.8)$$

em que k é uma função limitada, localmente lipschitziana e assume-se que existe uma constante $c > 0$ tal que $c < k(r)$, para todo r . A seguir, serão ilustrados dois casos particulares antes de analisarmos o caso geral.

5.3.1 Caso k identicamente nula

Na equação dada em (5.8), consideremos $k \equiv 0$, ou seja, estudaremos a equação

$$\ddot{x} + x = 0.$$

Considerando a mudança $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$, temos que

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{x} = -x = -x_1\end{aligned},$$

⁴Nikolai Mikhaïlovich Krasovskii foi um matemático e engenheiro russo (1912-1989) conhecido por suas contribuições na teoria da estabilidade em dinâmica, incluindo a teoria da estabilidade global e local de sistemas dinâmicos não-lineares. Ele também fez importantes contribuições à teoria do controle e da otimização.

e $(0, 0)$ é o único ponto de equilíbrio do problema.

Façamos uma análise via Liapunov e, para isto, consideremos o funcional dado por $V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} > 0$. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, x_2) &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\ &= x_1x_2 - x_2x_1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ou seja, temos que o funcional V é definido positivo com \dot{V} semidefinido negativo, e segue do Teorema 4.6 que $(0, 0)$ é estável.

Além disso, sabe-se que a solução deste problema com $k \equiv 0$ é da forma $(\cos(t), \sin(t))$, e como $|(\cos(t), \sin(t))| \leq 1$ para todo t , segue da Definição 3.3 que $(0, 0)$ é estável. Mas não vale a estabilidade assintótica, uma vez que não é satisfeita a igualdade

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |(\cos(t), \sin(t))| = 0.$$

5.3.2 Caso k igual a 1

Na equação dada em (5.8), consideremos $k = 1$, ou seja, estudaremos a equação

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = 0.$$

Considerando a mudança $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$, temos que

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{x} = -\dot{x} - x = -x_2 - x_1,\end{aligned}$$

e $(0, 0)$ é o único ponto de equilíbrio do problema.

Façamos uma análise via Liapunov e, para isto, consideremos o funcional dado por $V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} > 0$. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, x_2) &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\ &= x_1x_2 + x_2(-x_1 - x_2) \\ &= -x_2^2 \\ &< 0.\end{aligned}$$

Ou seja, temos que o funcional V é definido positivo com \dot{V} definido negativo, e segue do Teorema 4.7 que $(0, 0)$ é assintoticamente estável.

Além disso, sabe-se que a solução deste problema com $k = 1$ é da forma

$$\phi(t) = \left(e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right), e^{-\frac{t}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \right),$$

e para $t \geq 0$, vale que $|\phi(t)| \leq 1$ e segue da Definição 3.3 que $(0, 0)$ é estável. Mais ainda, como vale que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\phi(t)| = 0,$$

conclui-se também que $(0, 0)$ é assintoticamente estável.

5.3.3 Caso geral

Finalmente, vejamos o caso geral presente na equação (5.8). Para isto, consideremos a mudança de variáveis $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$ e temos

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{x} = -\dot{x} - x = -x_2 - x_1 \end{aligned},$$

e $(0, 0)$ o único ponto de equilíbrio do problema.

Façamos uma análise via Liapunov considerando o funcional dado por

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + vx_1x_2, \quad v > 0.$$

Vejamos que $V > 0$ se $0 < v < 2$. De fato, note que

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 + vx_1x_2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + 2\frac{v}{2}x_1x_2 + \frac{v^2}{4}x_2^2 - \frac{v^2}{4}x_2^2 \\ &= \left(x_1 + \frac{v}{2}x_2\right)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{4}\right)x_2^2 \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned} 1 - \frac{v^2}{4} &> 0 \\ \implies 1 &> \frac{v^2}{4} > 0 \\ \implies 0 &< v^2 < 4 \\ \implies 0 &< v < 2. \end{aligned}$$

Agora, vamos determinar \dot{V} :

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, x_2) &= 2x_1x_2 + 2x_2[-k(x_1^2 + x_2^2)x_2 - x_1] + vx_2^2 + vx_1[-k(x_1^2 + x_2^2)x_2 - x_1] \\ &= x_2^2[v - 2k(x_1^2 + x_2^2)] - vx_1k(x_1^2 + x_2^2)x_2 - vx_1^2\end{aligned}$$

Com a igualdade dada por

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_2^2[v - 2k(x_1^2 + x_2^2)] - vx_1k(x_1^2 + x_2^2)x_2 - vx_1^2, \quad (5.9)$$

e considerando que existe uma constante $c > 0$ tal que $k(r) > c$ para qualquer r , temos que

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, x_2) &= x_2^2[v - 2k(x_1^2 + x_2^2)] - vx_1k(x_1^2 + x_2^2)x_2 - vx_1^2 \\ &< x_2^2(v - 2c) - vx_1x_2c - vx_1^2\end{aligned}$$

e analisando como uma equação do segundo grau em x_1 , temos que

$$\begin{aligned}\Delta &= v^2x_2^2c^2 + 4vx_2^2(v - 2c) \\ &= vx_2^2(vc^2 + 4(v - 2c))\end{aligned}$$

e para concluir que $\dot{V} < 0$, basta que

$$\begin{aligned}vc^2 + 4(v - 2c) &< 0 \\ \Rightarrow v &< \frac{8c}{c^2 + 4}.\end{aligned}$$

Finalmente, temos que $\dot{V}(x_1, x_2) < 0$ para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ com $0 < v < \frac{8c}{c^2 + 4}$ e, pelo Teorema 4.7, a solução nula é assintoticamente estável. A Figura 5.1 apresenta este fato.

5.4 ESPÉCIES EM COMPETIÇÃO

Para esta situação, iremos supor que co-habitam duas espécies similares que competem por comida em um ambiente fechado (neste caso, uma espécie não caça a outra). Denotaremos a quantidade de cada espécie por x e y no instante t . E assumiremos que a população de cada espécie, sem a presença da outra, é dirigida pelas equações

$$\dot{x} = x(\varepsilon_1 - \sigma_1x) \quad (5.10)$$

$$\dot{y} = y(\varepsilon_2 - \sigma_2y), \quad (5.11)$$

em que ε_1 e ε_2 são as taxas de crescimento das duas populações e $\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}$ e $\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}$ são seus níveis de saturação.

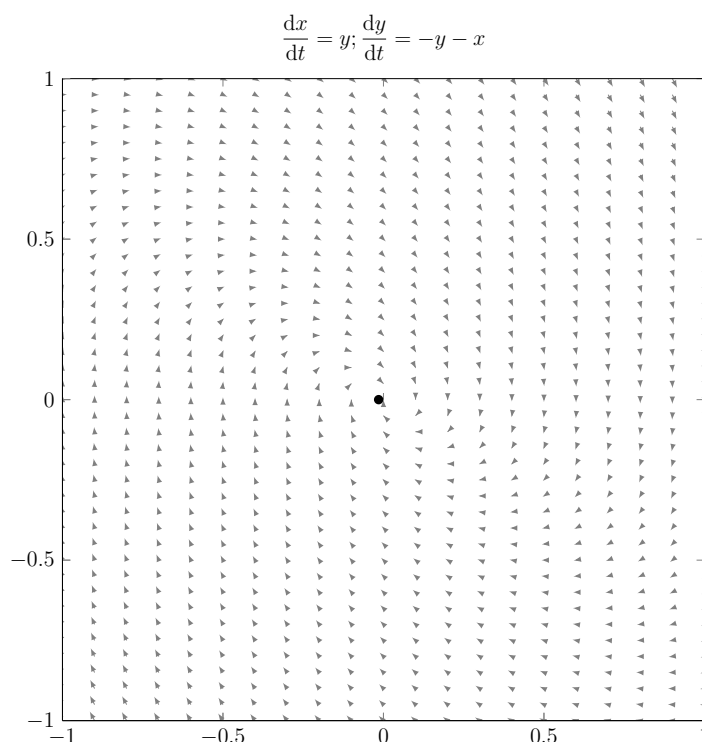


Figura 5.1: **Fonte: Autoria própria (2023).** O campo de direções nos permite dizer que a solução nula é assintoticamente estável

Porém, ao existir a presença das duas espécies simultaneamente e surgir a disputa por comida, uma espécie afetará as taxas de crescimento e os níveis de saturação da outra. Para obter-se a equação que dirige a população destas espécies na presença uma da outra, iremos acrescentar os termos $-\alpha_1 y$ na equação (5.10) e $-\alpha_2 x$ na equação (5.11), em que α_1 é a medida do grau que a espécie y interfere na espécie x e α_2 é a medida do grau em que a espécie x interfere na espécie y .

Desta forma, temos o sistema de equações que modela o problema de espécies em competição dado por

$$\dot{x} = x(\varepsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y) \quad (5.12)$$

$$\dot{y} = y(\varepsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x), \quad (5.13)$$

em que as constantes são positivas e dependem das espécies que estão sendo consideradas no problema e as soluções que focaremos são as quais x e y são não negativos.

Vejamus um exemplo no qual podemos concluir a estabilidade assintótica de um ponto de equilíbrio a partir de um funcional de Liapunov.

Exemplo 21. Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 - x - y) \\ \dot{y} &= y(0.75 - y - 0.5x)\end{aligned}\tag{5.14}$$

do qual $A = (0.5, 0.5)$ é um ponto de equilíbrio. Vejamos que este ponto A é assintoticamente estável.

Para isto, façamos a mudança de variáveis $x = 0.5 + u$ e $y = 0.5 + v$ para transladar este ponto de equilíbrio para a origem. Com esta substituição em (5.14), temos então o novo sistema dado por

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -0.5u - 0.5v - u^2 - uv \\ \dot{v} &= -0.25u - 0.5v - 0.5uv - v^2.\end{aligned}\tag{5.15}$$

Considere o funcional dado por $V(u, v) = u^2 + v^2$, o qual é definido positivo. Vejamos que $\dot{V}(u, v)$ é definido negativo. De fato, temos que

$$\begin{aligned}\dot{V}(u, v) &= 2u(-0.5u - 0.5v - u^2 - uv) + 2v(-0.25u - 0.5v - 0.5uv - v^2) \\ &= -[u^2 + 1.5uv + v^2] + (2u^3 + 2u^2v + uv^2 + 2v^3),\end{aligned}$$

e, para que $\dot{V}(u, v)$ seja definida negativa, precisamos que

$$(u^2 + 1.5uv + v^2) + (2u^3 + 2u^2v + uv^2 + 2v^3)$$

seja definido positivo. Reescrevendo $u^2 + 1.5uv + v^2 = 0.25(u^2 + v^2) + 0.75(u + v)^2$, temos que esta parcela é positiva, ou seja, precisamos que

$$a(u, v) := |2u^3 + 2u^2v + uv^2 + 2v^3| < 0.25(u^2 + v^2) + 0.75(u + v)^2\tag{5.16}$$

em alguma vizinhança de $(u, v) = (0, 0)$. Para verificar que vale a desigualdade em (5.16), utilizaremos as coordenadas polares $u = r \cos(\theta)$ e $v = r \sin(\theta)$. Desta forma, temos que

$$\begin{aligned}a(u, v) &= r^3|2 \cos^3(\theta) + 2 \cos^2(\theta)\sin(\theta) + \cos(\theta)\sin^2(\theta) + 2\sin^3(\theta)| \\ &\leq r^3[2|\cos^3(\theta)| + 2 \cos^2(\theta)|\sin(\theta)| + |\cos(\theta)|\sin^2(\theta) + 2|\sin^3(\theta)|] \\ &\leq 7r^3.\end{aligned}$$

Finalmente, para satisfazer (5.16), basta termos que

$$7r^3 < 0.25(u^2 + v^2) = 0.25r^2 \implies r < \frac{1}{28},$$

ou seja, para $r < \frac{1}{28}$, temos que $\dot{V}(u, v) < 0$ e segue do Teorema 4.7 que a origem é assintoticamente estável para o problema em (5.15).

Voltando para o problema nas variáveis x e y , e como o problema original (5.14) é

equivalente ao problema (5.15), segue que o ponto A é assintoticamente estável para (5.14). A Figura 5.2 ilustra tal situação.

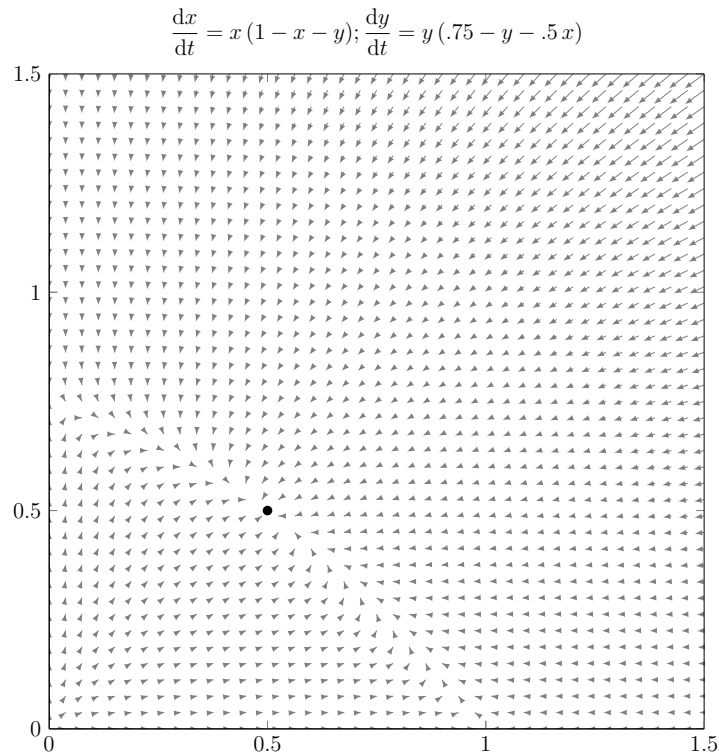


Figura 5.2: **Fonte: Autoria própria (2023).** Baseado no campo de direções, temos que o ponto de equilíbrio $A = (0.5, 0.5)$ atrai outras soluções, portanto, assintoticamente estável

5.5 PÊNDULO

Neste exemplo, consideraremos um pêndulo em que L é o comprimento da haste, g é a aceleração da gravidade e θ é o ângulo formado entre a haste e o eixo vertical. Com as variáveis definidas, temos que o movimento do pêndulo é governado pela equação

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\text{sen}(\theta) = 0,$$

e, considerando $x = \theta$ e $y = \dot{\theta}$, obtemos o sistema correspondente dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{g}{L}\text{sen}(x). \end{cases} \quad (5.17)$$

Para este sistema, temos que todo ponto da forma $A_n = (\pm n\pi, 0)$ é ponto de equilíbrio de (5.17), com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ (note que $x = \pm n\pi$ e $y = \dot{x} = 0$).

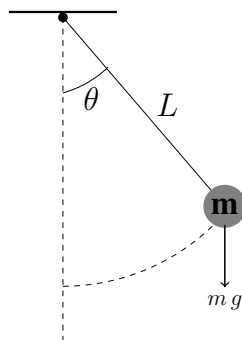


Figura 5.3: Pêndulo oscilando

Para o funcional que verificaremos ser de Liapunov, considere a equação

$$V(x, y) = mgL(1 - \cos(x)) + \frac{1}{2}mL^2y^2 \quad (5.18)$$

e o domínio

$$D = \left\{ (x, y) : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{ e } y \in \mathbb{R} \right\}. \quad (5.19)$$

Desta forma, temos que V é definido positivo em D . Vejamos que o ponto $A_0 = (0, 0)$ é estável

De fato, com o funcional V dado em (5.18), temos que

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= mgL\text{sen}(x)\dot{x} + mL^2y\dot{y} \\ &= mgL\text{sen}(x)y + mL^2y \left[-\frac{g}{L}\text{sen}(x) \right] \\ &= mgL\text{sen}(x)y - mgL\text{sen}(x)y = 0, \end{aligned}$$

ou seja, $\dot{V}(x, y)$ é semi-definido negativo e segue do Teorema 4.6 que a solução nula é estável.

5.6 UM CASO DA EQUAÇÃO DE LIENARD

Na seção 5.5, concluímos a estabilidade do problema, mas será que não há mais o que fazer? Imagine um pêndulo parado e de um toque resultando no movimento deste. É intuitivo que este pêndulo retorne a ficar parado na posição inicial. Esta posição, a qual foi considerada como a origem na seção 5.5, foi verificada ser estável, mas esta ideia intuitiva nos leva a esperar que a origem seja assintoticamente estável. E de fato é. Para verificarmos isto, vejamos um caso da Equação de Lienard e um novo funcional de Liapunov que nos permitirá concluir esta estabilidade assintótica.

A equação geral de Lienard é dada por

$$\ddot{u} + c(u)\dot{u} + g(u) = 0,$$

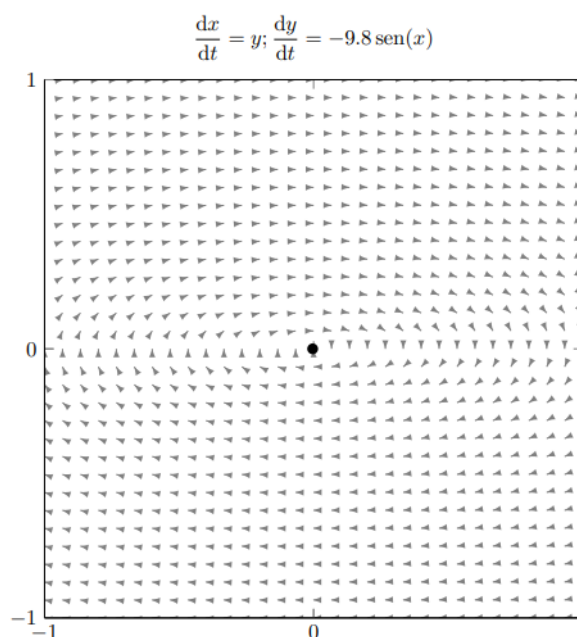


Figura 5.4: **Fonte: Autoria própria (2023).** Baseado no campo de direções, temos que o ponto de equilíbrio $A = (0, 0)$ é estável.

e estudaremos o caso no qual $c(u) = 1$, ou seja,

$$\ddot{u} + \dot{u} + g(u) = 0. \quad (5.20)$$

Ainda, g é uma função contínua que satisfaz as seguintes hipóteses:

- (i) $g(0) = 0$;
- (ii) $g(u) > 0$ se $0 < u < k$;
- (iii) $g(u) < 0$ se $-k < u < 0$.

Vejamos que a origem é ponto de equilíbrio de (5.20) e é estável. Para isso, consideremos $x = u$ e $y = \dot{u}$ e temos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -y - g(x) \end{cases}$$

Considerando $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} = 0$, obtemos que $(0, 0)$ é ponto de equilíbrio. Para verificar a estabilidade vamos considerar

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x g(s) ds,$$

o qual é definido positivo, pois $V(0, 0) = 0$ e, se $x > 0$, então $\int_0^x g(s)ds > 0$ e, se $x < 0$, então

$$\int_0^x g(s)ds = - \int_x^0 g(s)ds > 0.$$

Além disso, \dot{V} é semi-definido negativo, pois

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= V_x \dot{x} + V_y \dot{y} \\ &= g(x)y + y(-y - g(x)) \\ &= -y^2 \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Portanto, segue do Teorema 4.6 que a solução nula é estável.

Para verificar a estabilidade assintótica, o funcional que deve ser utilizado é

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + Ayg(x) + \int_0^x g(s)ds,$$

em que A é uma constante a ser escolhida. Para o caso do pêndulo, $g(x) = \text{sen}(x)$ e consideraremos $A = \frac{1}{2}$, ou seja, temos o funcional

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2}\text{sen}(x) + 1 - \cos(x). \quad (5.21)$$

Para verificar que este funcional é definido positivo, utilizaremos a aproximação por séries de potência com

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \gamma \frac{x^4}{4!}$$

$$\text{sen}(x) = x - \alpha \frac{x^3}{3!},$$

em que α e γ dependem de x e $0 < \alpha, \gamma < 1$. Note que foram utilizados sinais de igualdade nas aproximações pois, como o objetivo é estudar o comportamento do pêndulo próximo à origem $(0, 0)$, os próximos termos da série (com graus maiores) não interferirão no resultado.

Vejamos que o funcional dado em (5.21) é definido positivo. De fato, temos primeiramente que $V(0, 0) = 0$, e além disso, utilizando a mudança de variáveis $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \text{sen}(\theta)$, temos

$$\begin{aligned}
V(x, y) &= \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2}\text{sen}(x) + 1 - \cos(x) \\
&= \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2}\text{sen}(x) + 1 - 1 + \frac{x^2}{2} - \gamma \frac{x^4}{24} \\
&= \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{y}{2}\text{sen}(x) - \gamma \frac{x^4}{24} \\
\Rightarrow V(r, \theta) &= \frac{r^2}{2} + \frac{r\text{sen}(\theta)}{2}\text{sen}(r \cos(\theta)) - \frac{\gamma r^4 \cos^4(\theta)}{24} \\
&= \frac{r^2}{2} + \frac{r\text{sen}(\theta)}{2} \left[r \cos(\theta) - \frac{\alpha r^3 \cos^3(\theta)}{6} \right] - \frac{\gamma r^4 \cos^4(\theta)}{24} \\
&= \frac{r^2}{2} \left[1 + \text{sen}(\theta) \cos(\theta) - \frac{\alpha r^2 \text{sen}(\theta) \cos^3(\theta)}{6} - \frac{\gamma r^2 \cos^4(\theta)}{12} \right].
\end{aligned}$$

Fazendo $B = \frac{\alpha r^2 \text{sen}(\theta) \cos^3(\theta)}{6} + \frac{\gamma r^2 \cos^4(\theta)}{12}$, temos que

$$B < \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4} \implies -B > -\frac{1}{4}.$$

Desta forma, segue que

$$\begin{aligned}
V(r, \theta) &= \frac{r^2}{2} [1 + \text{sen}(\theta) \cos(\theta) - B] \\
&> \frac{r^2}{2} \left[1 + \frac{\text{sen}(2\theta)}{2} - \frac{1}{4} \right] \\
&\geq \frac{r^2}{2} \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right] \\
&= \frac{r^2}{8}.
\end{aligned}$$

Portanto, $V(r, \theta) > \frac{r^2}{8}$ e temos que $V(x, y) > 0$.

Para verificarmos que \dot{V} é definido negativo, utilizaremos a aproximação por séries de potência do $\text{sen}(x)$ já apresentada e com

$$\cos(x) = 1 - \beta \frac{x^2}{2},$$

em que β depende de x e $0 < \beta < 1$. Novamente, o sinal de igualdade é utilizado pois o

foco é estudar o problema próximo à origem. Sendo assim, utilizando a mudança de variáveis $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$, temos

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x, y) &= V_x \dot{x} + V_y \dot{y} \\
 &= \left[\frac{y}{2} \cos(x) + \sin(x) \right] y + \left[y + \frac{\sin(x)}{2} \right] [-y - \sin(x)] \\
 &= \frac{y^2 \cos(x)}{2} - \frac{\sin^2(x)}{2} - \frac{y \sin(x)}{2} - y^2 \\
 &= \frac{y^2}{2} \left[1 - \beta \frac{x^2}{2} \right] - \frac{1}{2} \left[x - \alpha \frac{x^3}{6} \right]^2 - \frac{y}{2} \left[x - \alpha \frac{x^3}{6} \right] - y^2 \\
 &= \frac{-x^2 - y^2}{2} - \frac{xy}{2} - \frac{\beta x^2 y^2}{4} + \frac{\alpha x^3 y}{12} + \frac{\alpha x^4}{6} - \frac{\alpha^2 x^6}{72} \\
 \implies \dot{V}(r, \theta) &= -\frac{r^2}{2} [1 + \sin(\theta) \cos(\theta) + h(r, \theta)],
 \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
 h(r, \theta) &= \frac{\beta}{2} r^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) - \frac{\alpha}{6} r^2 \cos^3(\theta) \sin(\theta) - \frac{\alpha}{3} r^2 \cos^4(\theta) + \frac{\alpha^2}{36} r^4 \cos^6(\theta) \\
 &\leq r^2 \left[\frac{\beta}{2} \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + \frac{\alpha}{6} \cos^3(\theta) \sin(-\theta) + \frac{\alpha^2}{36} r^2 \cos^6(\theta) \right] \\
 \implies |h(r, \theta)| &\leq r^2 \left| \frac{\beta}{2} \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + \frac{\alpha}{6} \cos^3(\theta) \sin(-\theta) + \frac{\alpha^2}{36} r^2 \cos^6(\theta) \right| \\
 &\leq r^2 \left[\left| \frac{\beta}{2} \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \right| + \left| \frac{\alpha}{6} \cos^3(\theta) \sin(-\theta) \right| + \left| \frac{\alpha^2}{36} r^2 \cos^6(\theta) \right| \right] \\
 &\leq r^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{r^2}{36} \right] \\
 &= \frac{2r^2}{3} + \frac{r^4}{36}.
 \end{aligned}$$

Como estamos avaliando o problema próximo à origem, note que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r^2}{3} + \frac{r^4}{36} = 0,$$

ou seja, para r suficientemente pequeno, podemos afirmar que $|h(r, \theta)| < \frac{1}{2}$. Consequentemente, temos que $\left| \frac{\text{sen}(2\theta)}{2} + h(r, \theta) \right| < 1$ e vale o seguinte:

$$\begin{aligned} -1 &< \frac{\text{sen}(2\theta)}{2} + h(r, \theta) < 1 \\ \implies 0 &< 1 + \frac{\text{sen}(2\theta)}{2} + h(r, \theta) < 2 \\ \implies 0 &< 1 + \text{sen}(\theta) \cos(\theta) + h(r, \theta) < 2. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\dot{V}(r, \theta) = -\frac{r^2}{2} [1 + \text{sen}(\theta) \cos(\theta) + h(r, \theta)] < 0$$

e, portanto, $\dot{V}(x, y) < 0$ e segue do Teorema 4.7 que a solução nula é assintoticamente estável.

CONCLUSÃO

Em conclusão, a análise de estabilidade de sistemas dinâmicos é uma tarefa essencial na teoria de equações diferenciais. Nesta dissertação, utilizou-se o método de Liapunov para investigar a estabilidade de sistemas dinâmicos, obtendo resultados teóricos que permitem avaliar a convergência ou divergência das soluções para o equilíbrio do sistema. Ainda, demonstrou-se a aplicabilidade do método em diversos exemplos e em sistemas de uma ou mais equações diferenciais.

Os resultados obtidos nesta dissertação mostram que o método de Liapunov é uma ferramenta poderosa para a análise de estabilidade de sistemas dinâmicos. Os resultados teóricos obtidos podem ser úteis e aplicados em diversas áreas, tais como controle de processos, sistemas biológicos, mecânica, eletrônica, entre outras.

Em suma, esta dissertação reuniu e organizou definições e teoremas, além de formalizar algumas demonstrações, o que contribui para o avanço da teoria de equações diferenciais e da análise de estabilidade de sistemas dinâmicos, e pode servir como ponto de partida para futuras pesquisas nesta área.

A DECOMPOSIÇÃO DE JORDAN

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

com A uma matriz constante $n \times n$ e seja P uma matriz não singular real $n \times n$. Considerando a transformação $x = Py$ ou, similarmente, $y = P^{-1}x$ e derivando, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{y} &= P^{-1}\dot{x} \\ &= P^{-1}Ax \\ &= P^{-1}APy \\ &\equiv Jy \\ y(t_0) &= P^{-1}x_0. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

A solução da equação (A.2) é

$$\psi(t) = e^{J(t-t_0)}y(t_0) = e^{J(t-t_0)}P^{-1}x_0. \quad (\text{A.3})$$

Da transformação $x = Py$ e da equação (A.3), concluímos que a solução de (A.1) é dada por

$$\begin{aligned} \phi(t) &= P\psi(t) \\ &= Pe^{J(t-t_0)}P^{-1}x_0. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Assuma que A possua n autovalores distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e escolha os autovetores p_1, \dots, p_n correspondentes, respectivamente. Denote por P a matriz que possui as colunas como sendo os autovetores, ou seja, $P = [p_1, p_2, \dots, p_n]$. Então a matriz $P^{-1}AP$ tem a forma

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

e da definição de exponencial de matriz, obtemos

$$\begin{aligned}
e^{Jt} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} J^m t^m = \begin{bmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^m t^m}{m!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^m t^m}{m!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^m t^m}{m!} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Substituindo a matriz dada em (A.6) na equação (A.4), obtemos finalmente que a solução de (A.1) é

$$\phi(t) = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t-t_0)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{bmatrix} P^{-1} x_0. \tag{A.7}$$

Quando acontecer de a matriz A em (A.1) possuir autovalores repetidos, não é possível afirmar que sempre se diagonalize A através da transformação P . Porém, podemos obter n vetores linearmente independentes p_1, \dots, p_n e uma matriz $n \times n$ $P = [p_1, \dots, p_n]$ que transforma A na forma canônica de Jordan com $J = P^{-1}AP$ em que

$$J = \begin{bmatrix} J_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_s \end{bmatrix}. \tag{A.8}$$

Em (A.8), J_0 é uma matriz diagonal com os elementos $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ não necessariamente distintos, ou seja,

$$J_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix} \tag{A.9}$$

e, para cada $i = 1, \dots, s$, J_i é uma matriz de ordem $n_i \times n_i$ da forma

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_{k+i} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{k+i} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{k+i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{k+i} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Em (A.10), λ_{k+i} não é necessariamente diferente de λ_{k+j} quando $i \neq j$ e $k + n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$.

Finalmente, note que cada λ_i é autovalor de A , $i = 1, \dots, k + s$. Se λ_i for um autovalor simples, estará no bloco J_0 . Os blocos J_0, \dots, J_s são chamados blocos de Jordan.

De (A.8) e utilizando a representação de série de potências da exponencial de matriz, obtemos que, para $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_0 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{J_s t} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

e concluímos assim que a solução do problema de valor inicial (A.1) é dada por

$$\phi(t) = P \begin{bmatrix} e^{J_0(t-t_0)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_1(t-t_0)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{J_s(t-t_0)} \end{bmatrix} P^{-1} x_0 = P e^{J(t-t_0)} P^{-1} x_0. \quad (\text{A.12})$$

Observação 19. Para cada matriz J_i em (A.10), podemos escrever

$$J_i = \lambda_{k+i} I_i + N_i, \quad (\text{A.13})$$

com I_i matriz identidade de ordem $n_i \times n_i$ e N_i é a matriz nilpotente de ordem $n_i \times n_i$ dada por

$$N_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

Como $\lambda_{k+i} I_i$ e N_i comutam, temos

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_{k+i} t} e^{N_i t}. \quad (\text{A.15})$$

Temos ainda que $N_i^k = 0$ para todo $k \geq n_i$ e, desta forma,

$$e^{N_i t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} N_i^n t^n = \sum_{n=0}^{n_i-1} \frac{1}{n!} N_i^n t^n \quad (\text{A.16})$$

Portanto, da série que define $e^{N_i t}$ e de (A.15), concluímos que

$$e^{tJ_i} = e^{\lambda_{k+i} t} \begin{bmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

para $i = 1, \dots, s$.

Observação 20. Para o caso em que A é uma matriz 2×2 , a transformação $x = Py$ com P matriz constante não singular, transforma o problema $\dot{x} = Ax$ no problema

$$\dot{y} = P^{-1}APy \equiv Jy.$$

Como A é 2×2 , existe uma matriz P não singular 2×2 tal que $P^{-1}AP$ é de uma das formas:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{bmatrix}, \quad (\text{A.18})$$

em que a última corresponde ao caso das raízes complexas $\lambda_1 = \alpha + i\omega$ e $\lambda_2 = \alpha - i\omega$. Uma demonstração é vista em Brauer e Nohel (1969, pp. 284-289).

B RESULTADOS PARA AS APLICAÇÕES

B.1 LEMAS AUXILIARES PARA O PROBLEMA ECONÔMICO

Lema B.1. *Seja $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável tal que $\lim_{k \rightarrow 0^+} f'(k) = \infty$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0$. Então existe uma única solução de equilíbrio positiva k^* da equação $sf(k) - nk = 0$, com $0 < s < 1$ e $0 < n < 1$.*

Demonstração. Defina a função $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(k) = f(k) - \frac{n}{s}k$. Derivando g e calculando o limite quando k tende ao infinito, temos

$$\begin{aligned} g'(k) &= f'(k) - \frac{n}{s} \\ \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} g'(k) &= -\frac{n}{s}. \end{aligned}$$

Desta forma, para qualquer $0 < c < \frac{n}{s}$, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} g'(k) &= -\frac{n}{s} < -\frac{n}{s} + c := \alpha < 0 \\ \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} g'(k) &< \alpha < 0. \end{aligned}$$

Sendo assim, tomando k_0 suficientemente grande de tal modo que $g'(k) < \alpha$ para $k > k_0$, temos

$$\begin{aligned} g'(k) &< \alpha \\ \Rightarrow g(k) - g(k_0) &< \alpha(k - k_0) \\ \Rightarrow g(k) &< \alpha(k - k_0) + g(k_0). \end{aligned}$$

E com isso,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(k) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} [\alpha(k - k_0) + g(k_0)] = -\infty.$$

Por outro lado,

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} g'(k) = \lim_{k \rightarrow 0^+} f'(k) - \frac{n}{s} = \infty,$$

isto é, dado $A > 0$, existe k_1 tal que se $0 < k < k_1$, então $g'(k) > A > 0$ e, integrando, de 0 até k , temos $g(k) > Ak > 0$ para $0 < k < k_1$.

Finalmente, temos $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ com $-\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} g(k) < 0 \leq \lim_{k \rightarrow 0^+} g(k)$. Segue do Teorema do Valor Intermediário que existe $k^* \in (0, \infty)$ tal que $g(k^*) = 0$. \square

Lema B.2. Existe uma função real f que satisfaz as seguintes condições: $f(0) = 0$, $f'(k) > 0$, $f''(k) < 0$, $\lim_{k \rightarrow 0^+} f'(k) = \infty$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0$.

Demonstração. De fato, basta considerar $f(x) = \sqrt{x}$ e notar que:

- $f(0) = 0$;
- $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$;
- $f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} < 0$;
- $\lim_{k \rightarrow 0^+} f'(k) = \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sqrt{k}} = \infty$;
- $\lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sqrt{k}} = 0$.

□

Lema B.3. Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável tal que a derivada $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona não crescente, então para quaisquer $a, x \in I$, vale que $f(x) \leq f(a) + f'(a)(x - a)$.

Demonstração. Suponha $a < x$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $z \in (a, x)$ tal que $f(x) = f(a) + f'(z)(x - a)$. Como f' é monótona não crescente, temos $f'(z) \leq f'(a)$. Sendo assim,

$$f(x) \leq f(a) + f'(a)(x - a).$$

Analogamente, se supormos $x < a$, segue do Teorema do Valor Médio que existe $y \in (x, a)$ tal que $f(a) = f(x) + f'(y)(a - x)$. Como f' é monótona não crescente, temos

$$f'(y) = \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \geq f'(a).$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(a) - f'(a)(a - x) \\ \Rightarrow f(x) &\leq f(a) + f'(a)(x - a) \end{aligned}$$

□

Lema B.4. Seja $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(0) = 0$, $f'(k) > 0$, $f''(k) < 0$, $\lim_{k \rightarrow 0^+} f'(k) = \infty$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0$. Pelo Lema B.1, considere k^* a única solução de $sf(k) - nk = 0$. Então vale a desigualdade $f'(k^*) - \frac{f(k^*)}{k^*} < 0$.

Demonstração. Como $k^* > 0$ e $f(0) = 0$, temos que $\frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{f(k^*) - f(0)}{k^* - 0}$ e, do Teorema do Valor Médio, existe $0 < k^{**} < k^*$ tal que

$$f'(k^{**}) = \frac{f(k^*) - f(0)}{k^* - 0} = \frac{f(k^*)}{k^*}.$$

Ainda, como f' é decrescente, vale $f'(k^*) < f'(k^{**})$. Desta forma, segue que $f'(k^*) - f'(k^{**}) < 0$ e, finalmente, temos

$$f'(k^*) - \frac{f(k^*)}{k^*} < 0.$$

□

B.2 UM RESULTADO DE ÁLGEBRA PARA POLINÔMIOS

O Teorema presente nesta seção não será demonstrado, uma vez que desprende-se do objetivo deste trabalho, porém está enunciado, uma vez que será de extrema importância para a conclusão obtida no exemplo sobre a equação de Lorentz.

Definição B.5. *Dado um polinômio, denominamos de termo dominante aquele com o grau mais alto com coeficiente não nulo. Ainda, se este coeficiente do termo dominante for 1, chamamos o polinômio de mônico.*

Teorema B.6. *Seja $p_k(t)$ uma sequência de polinômios mônicos de grau menor ou igual a n e $p(t)$ outro polinômio mônico de grau n . Sejam $\alpha_{k,1}, \dots, \alpha_{k,n}$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ as raízes desses polinômios. Temos:*

- (i) *Se $\alpha_{k,v} \rightarrow \alpha_v$ para $v = 1, \dots, n$, então $p_k \rightarrow p$.*
- (ii) *Reciprocamente, se $p_k \rightarrow p$, as raízes $\alpha_{k,v}$ de p_k podem ser enumeradas de tal modo que $\alpha_{k,v} \rightarrow \alpha_v$ para cada $v = 1, \dots, n$.*

REFERÊNCIAS

- [1] BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C., AND MEADE, D. B. *Elementary differential equations and boundary value problems*. John Wiley & Sons, 2021.
- [2] BRAUER, F., AND NOHEL, J. A. *The qualitative theory of ordinary differential equations: an introduction*. Courier Corporation, 1989.
- [3] BROCK, W. A., AND MALLIARIS, A. G. *Differential equations, stability and chaos in dynamic economics*. No. 90A16 BROd. 1989.
- [4] CAVALHEIRO, A. A. *Tópicos de Análise Real*. Editora Ciência Moderna Ltda, 2018.
- [5] COELHO, F. U. *Um Curso de Álgebra Linear*, vol. 34. Edusp, 2001.
- [6] DE FIGUEIREDO, D. G., AND NEVES, A. F. *Equações diferenciais aplicadas*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.
- [7] HAHN, W., ET AL. *Stability of motion*, vol. 138. Springer, 1967.
- [8] HALE, J. K. *Ordinary Differential Equations*, vol. 21. Robert E. Krieger Publishing Company, INC. KRIEGER DRIVE MALABAR, FLORIDA 32950, 1980.
- [9] IÓRIO, V. *EDP Um Curso de Graduação*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro, 1991.
- [10] LIMA, E. L. *Espaços métricos*, vol. 4. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro, 1983.
- [11] LIMA, E. L. *Álgebra linear*. 2006.
- [12] LIMA, E. L. *Espaços métricos*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro, 2017.
- [13] LIMA, E. L. *Curso de Análise Volume 2*, vol. 2. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro, 2018.
- [14] LIMA, E. L. *Curso de Análise Volume 1*, vol. 1. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro, 2019.
- [15] SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*, vol. 11. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979.