Universidade Estadual de Londrina

ELVIS FERUTI AVELINO

ESTABILIDADE PARA UM SISTEMA DE BRESSE PARCIALMENTE DISSIPATIVO

Londrina
2022

ELVIS FERUTI AVELINO

ESTABILIDADE PARA UM SISTEMA DE BRESSE PARCIALMENTE DISSIPATIVO

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Michele de Oliveira Alves

Londrina
2022

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

A948e Avelino, Elvis Feruti.
Estabilidade para um sistema de Bresse parcialmente dissipativo / Elvis Feruti Avelino. – Londrina, 2022.
77 f. : il.

Orientador: Michele de Oliveira Alves.
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2022.

Inclui Bibliografia.

1. Equações diferenciais parciais - Tese. 2. Semigrupos lineares - Tese. 3. Sistema de Bresse - Tese. I. Alves, Michele de Oliveira. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

CDU 51

ELVIS FERUTI AVELINO

ESTABILIDADE PARA UM SISTEMA DE BRESSE PARCIALMENTE DISSIPATIVO

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Prof[a]. Dr[a]. Michele de Oliveira Alves
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Adeval Lino Ferreira
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Rodrigo Nunes Monteiro
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 30 de junho de 2022.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, agradeço a Deus por proporcionar essa oportunidade única em minha carreira acadêmica, além de permitir continuar, mesmo com todas as dificuldades que surgiram durante o mestrado.

Agradeço a minha orientadora, Prof. Dra. Michele de Oliveira Alves, por todo suporte fornecido durante essa pesquisa, principalmente pela sua paciência nos momentos mais delicados desse trabalho.

Agradeço o corpo docente do PGMAC, em especial, ao coordenador Prof. Dr. Eliandro Rodrigues Cirilo, por todo auxílio fornecido na realização deste curso e aos professores Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva e Dr. Rodrigo Nunes Monteiro, pelas disciplinas ministradas com qualidade, fornecendo uma sólida base teórica para a realização dessa pesquisa.

Agradecimentos especiais aos meus pais, Reginaldo Leal Avelino e Luciana de Souza Feruti, pela vida, pelo apoio moral e conselhos durante essa caminhada.

Agradeço meus irmãos Raul Cauê Avelino e Elian Feruti Avelino, pelo companheirismo e momentos de lazer proporcionados, sempre que possível.

Agradeço a todos os colegas do PGMAC, em especial, ao colega e amigo Romário Tomilhero Frias, pela recepção e ajuda nos primeiros dias de UEL, que são de adaptação à uma nova rotina.

Agradeço a todos os amigos, pela motivação, torcida e pelos momentos de diversão. Em especial, agradeço Bruna Alves e Eduardo Fornazieri, por todos os momentos em que precisei de apoio, estarem sempre ao meu lado, independente da distância.

Por fim, agradeço a todos que, de algum modo, contribuíram para a conclusão desse mestrado.

"O impossível não é impossível. Sua própria existência é a prova disso." (Fullmetal Alchemist)

AVELINO, Elvis Feruti. **ESTABILIDADE PARA UM SISTEMA DE BRESSE PARCIALMENTE DISSIPATIVO** . 2022. 77. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2022.

RESUMO

Nesse trabalho estuda-se um sistema de Bresse com duas dissipações friccionais. O principal objetivo é analisar, de forma mais detalhada, a existência de solução e estabilidade para o sistema apresentado. Para isso, será feita a formulação abstrata do problema e, utilizando a teoria de semigrupos de operadores lineares, será garantida a existência e estabilidade exponencial da solução do sistema abordado no trabalho. Além disso, será verificada a estabilidade polinomial da solução, com taxa ótima.

Palavras-chave: Equações diferenciais parciais. Semigrupos lineares. Sistema de Bresse.

AVELINO, Elvis Feruti. **STABILITY FOR A PARTIALLY DISSIPATIVE BRESSE SYSTEM**. 2022. 77. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2022.

ABSTRACT

In this work, a Bresse system with two frictional dissipations is studied. The main objective is to analyze, in more detail, the existence of solution and stability for the presented system. For this, the abstract formulation of the problem will be made and, using the theory of semigroups of linear operators, the existence and exponential stability of the solution of the system addressed in the work will be guaranteed. In addition, the polynomial stability of the solution will be verified, with an optimal rate.

Keywords: Partial Differential Equations. Linear semigroups. Bresse system.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS

I	subintervalo aberto de $\mathbb{R}$
$\overline{X}$	fecho do conjunto X
$\mathbb{K}$	corpo $\mathbb{R}$ dos números reais ou o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos
$C(\mathrm{I})$	espaço das funções contínuas $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$
$C^n(\mathrm{I})$	espaço das funções $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ diferenciáveis até a ordem n
$C^\infty(\mathrm{I})$	espaço das funções $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis
$C_0^\infty(\mathrm{I})$	espaço das funções de $C^\infty(\mathrm{I})$ com suporte compacto
$L^p(\mathrm{I})$	espaço usual $L^p(\mathrm{I})$
$L^2_*(\mathrm{I})$	espaço das funções em $L^2(\mathrm{I})$ que possuem média nula
$W^{m,p}(\mathrm{I})$	espaço de Sobolev usual
$H^m(\mathrm{I})$	espaço $W^{m,p}(\mathrm{I})$ para $p = 2$
$H^1_*(\mathrm{I})$	espaço das funções em $H^1(\mathrm{I})$ que possuem média nula
$\mathcal{L}(X)$	espaço dos operadores lineares limitados $A : X \to X$
I	operador identidade
$D(A)$	domínio do operador A
$\rho(A)$	conjunto resolvente do operador A
$\sigma(A)$	espectro do operador A
supp(ϕ)	suporte da função ϕ
$\lVert\cdot\rVert_{L^2(\mathrm{I})}$	norma usual em $L^2(\mathrm{I})$
$\lVert\cdot\rVert_{H^1(\mathrm{I})}$	norma em $H^1(\mathrm{I})$ dada por $\lVert u\rVert^2_{H^1(\mathrm{I})} = \lVert u\rVert^2_{L^2(\mathrm{I})} + \lVert u_x\rVert^2_{L^2(\mathrm{I})}$
$\lVert\cdot\rVert_{H^2(\mathrm{I})}$	norma em $H^2(\mathrm{I})$ dada por $\lVert u\rVert^2_{H^2(\mathrm{I})} = \lVert u\rVert^2_{L^2(\mathrm{I})} + \lVert u_x\rVert^2_{L^2(\mathrm{I})} + \lVert u_{xx}\rVert^2_{L^2(\mathrm{I})}$
$\lVert\cdot\rVert_{\mathcal{L}(X)}$	norma em $\mathcal{L}(X)$ dada por $\lVert A\rVert_{\mathcal{L}(X)} = \sup\left\{\dfrac{\lVert Ax\rVert_X}{\lVert x\rVert_X}; x \in X \text{ e } x \neq 0\right\}$
$\lVert\cdot\rVert_{D(A)}$	norma do gráfico em $D(A) \subset X$ dada por $\lVert U\rVert_{D(A)} = \lVert U\rVert_X + \lVert AU\rVert_X$
$\lVert\cdot\rVert_\infty$	norma em $C([a,b])$ dada por $\lVert f\rVert_\infty = \sup\{\lvert f(x)\rvert; x \in [a,b]\}$
i	unidade imaginária
$\overline{z}$	conjugado de um número complexo z
Re(z)	parte real de um número complexo z
Im(z)	parte imaginária de um número complexo z
$\hookrightarrow$	imersão contínua
$\overset{c}{\hookrightarrow}$	imersão compacta

1 INTRODUÇÃO

No presente trabalho, estudamos a existência de solução e estabilidade de um sistema de Bresse com duas dissipações friccionais. O sistema de Bresse é um modelo matemático hiperbólico para vigas elásticas finas em forma de arco de comprimento L, que é expresso pelas seguintes equações

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - Q_x - lN &= F_1 \text{ em } (0,\infty)\times(0,L), \\ \rho_2\psi_{tt} - M_x + Q &= F_2 \text{ em } (0,\infty)\times(0,L), \\ \rho_1 w_{tt} - N_x + lQ &= F_3 \text{ em } (0,\infty)\times(0,L), \end{aligned}$$

onde as funções $\varphi = \varphi(t,x), \psi = \psi(t,x)$ e $w = w(t,x)$ descrevem, respectivamente, a oscilação vertical, o ângulo de rotação da seção transversal e a oscilação longitudinal. Além disso, considerando

$$N = k_0(w_x - l\varphi),\ Q = k(\varphi_x + \psi + lw) \text{ e } M = b\psi_x, \tag{1.1}$$

onde N denota a força axial, Q a força de atrito e M denota o momento,

$$\rho_1 = \rho A,\ \rho_2 = \rho I,\ k = K'GA,\ k_0 = EA,\ b = EI \text{ e } l = R^{-1}, \tag{1.2}$$

onde ρ denota a densidade, E o módulo de elasticidade, G o módulo de cisalhamento, K' o fator de corte, A a área transversal, I o segundo momento de área da seção transversal e R o raio da curvatura, as equações de movimento do sistema de Bresse são dadas por

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) &= F_1 \quad \text{em} \quad (0,\infty)\times(0,L), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) &= F_2 \quad \text{em} \quad (0,\infty)\times(0,L), \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x + l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) &= F_3 \quad \text{em} \quad (0,\infty)\times(0,L), \end{aligned}$$

onde estamos denotando por F_i as forças externas.

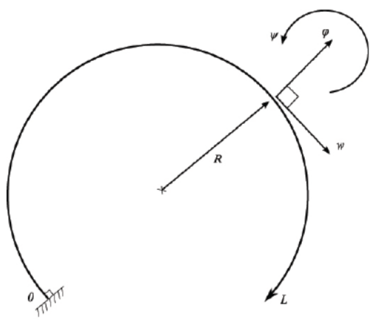

Figura 1.1: Arco circular

Podemos encontrar a dedução completa do modelo em [10]. Além disso, são consideradas as dissipações friccionais $F_1 = -\gamma_1 \varphi_t$, $F_2 = -\gamma_2 \psi_t$ e $F_3 = -\gamma_3 w_t$, com γ_1, γ_2 e γ_3 constantes positivas.

No contexto de dissipação friccional, podemos citar o trabalho de Santos e Almeida Júnior [15], onde é estudado o sistema de Bresse com três dissipações friccionais, ou seja, com dissipações atuando nas oscilações vertical, longitudinal e no ângulo de rotação da seção transversal, e condições de contorno do tipo Dirichlet. Os autores mostraram que a solução do sistema é exponencialmente estável independentemente da relação entre os coeficientes, além de exibir cálculos numéricos que permitem comprovar a teoria desenvolvida no trabalho.

No trabalho de Alves, Fatori, Jorge Silva e Monteiro [2], foi estudado o sistema de Bresse com duas dissipações friccionais atuando no deslocamento vertical e no ângulo de rotação transversal, ou seja, $F_1 = -\gamma_1 \varphi_t$, $F_2 = -\gamma_2 \psi_t$ e $F_3 = 0$. Os autores mostraram que a solução do sistema é exponencialmente estável se, e somente se, $k = k_0$. Além disso, se $k \neq k_0$, foi provado que a solução do sistema é polinomialmente estável, e que a taxa obtida é ótima.

No trabalho de Boussouira, Rivera e Almeida Júnior [4], foi abordado um sistema de Bresse com uma dissipação friccional atuando no ângulo de rotação da seção transversal, isto é, $F_2 = -\gamma_2 \psi_t$ e $F_1 = F_3 = 0$. Os autores mostraram que a solução do sistema é exponencialmente estável, se valem as seguintes relações com os coeficientes:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b} \ \text{ e } \ k = k_0.$$

Quando uma delas não ocorre, o sistema possui estabilidade polinomial.

Além disso, no trabalho de Wehbe e Youssef [16], é apresentado um sistema de Bresse com duas dissipações distribuídas localmente atuando no ângulo de rotação na seção transversal e no deslocamento longitudinal, isto é, $F_1 = 0$, $F_2 = -a_1(x)\psi_t$ e $F_3 = -a_2(x) w_t$, onde a_1 e a_2 são funções contínuas positivas e ainda, satisfazem a seguinte condição

$$a_j(x) \geq a_0 > 0 \ \text{ para todo } \ x \in (0, c) \cup (d, L), 0 < c < d < L \ \text{ e } \ j = 1, 2.$$

Nesse caso, os autores mostraram que o sistema é exponencialmente estável se, e somente se

$$\frac{Gh}{\rho_1} = \frac{EI}{\rho_2}. \tag{1.3}$$

Além disso, para o caso em que

$$\frac{Gh}{\rho_1} \neq \frac{EI}{\rho_2}, \tag{1.4}$$

o sistema possui estabilidade polinomial.

Por fim, no caso onde a oscilação longitudinal não é considerada e $l = 0$, obtemos que o sistema de Bresse se reduz ao sistema de Timoshenko.

O trabalho está organizado da seguinte maneira: No Capítulo 2, são apresentadas as principais definições e resultados necessários para o desenvolvimento deste trabalho. As demonstrações, quando omitidas, podem ser encontradas nas referências citadas. No Capítulo 3, consideramos o sistema de Bresse com duas dissipações friccionais atuando no ângulo de rotação da seção transversal e na oscilação longitudinal. Nesse modelo, estudamos a existência e unicidade de solução e também provamos a estabilidade exponencial, considerando uma relação entre os coeficientes do sistema, além disso, mostramos que a relação é uma condição necessária e suficiente para a estabilidade exponencial. Quando a relação não é válida, mostramos a estabilidade polinomial com uma taxa ótima.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo serão apresentadas as definições e resultados importantes de Análise Funcional, Espaços L^p, Espaços de Sobolev e de Semigrupos Lineares, que foram utilizados nesse trabalho. Como o objetivo desse capítulo é apenas recordar tais resultados, assim, as demonstrações destes podem ser encontradas nas referências citadas.

2.1 ANÁLISE FUNCIONAL

Nessa seção denotaremos por $\mathbb{K}$ o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou dos números complexos $\mathbb{C}$.

Lema 2.1. *(Desigualdade de Young) Sejam a e b constantes não negativas e $1 < p, q < \infty$ tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Ver [11], Lema 2.2.1, página 28. □

Observação 1. Os números p e q que satisfazem $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ são chamados de expoentes conjugados.

Lema 2.2. *(Desigualdade de Young com ϵ) Sejam a e b constantes não negativas. Então, dado $\epsilon > 0$ vale que*

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2.$$

Demonstração. Basta observar que $(2\epsilon a - b)^2 \geq 0$. □

Definição 2.3. *Seja X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Uma norma em X é uma função $\|.\|_X : X \to \mathbb{R}^+$ tal que*

i) $\|x\|_X = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ii) $\|\alpha x\|_X = |\alpha| \|x\|_X, \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

iii) $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X, \forall x, y \in X$.

Chamamos o par $(X, \|.\|_X)$ de espaço vetorial normado.

Definição 2.4. *Sejam X um espaço vetorial normado e $\|.\|_1$ e $\|.\|_2$ duas normas em X. Dizemos que $\|.\|_1$ é equivalente a $\|.\|_2$ quando existem constantes $C_1 > 0, C_2 > 0$ tais que*

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1, \ \forall x \in X.$$

Definição 2.5. *Seja X um espaço vetorial normado. Uma sequência em X é uma função $x : \mathbb{N} \to X$ a qual denotamos por $x(n) = x_n$ e $x(\mathbb{N}) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma restrição $x|_{\mathbb{N}'} \to X$ da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$.*

Definição 2.6. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em um espaço vetorial normado X.*

(i) Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada se existe $M > 0$ tal que

$$\|x_n\|_X \leq M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em X quando existe $x \in X$ satisfazendo:

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \|x_n - x\|_X < \epsilon, \forall n > n_0.$$

(iii) Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em X se

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \|x_m - x_n\|_X < \epsilon, \forall m, n > n_0.$$

Definição 2.7. *Dizemos que o espaço vetorial normado $(X, \|.\|_X)$ é um espaço de Banach quando toda sequência de Cauchy em X é convergente em X com respeito à norma $\|.\|_X$.*

Teorema 2.8. *Um subespaço Y de um espaço de Banach X é completo se, e somente se, Y é fechado em X.*

Demonstração. Ver [12], Teorema 2.3-1, página 67. □

Definição 2.9. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Dizemos que um operador $T : X \to Y$ é linear quando*

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y), \forall x, y \in X, \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

No caso em que $Y = \mathbb{K}$, dizemos que T é um funcional linear.

Definição 2.10. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ um operador linear. Dizemos que T é limitado quando existe $C > 0$ tal que*

$$\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X, \forall x \in X.$$

Notação 1. Denotaremos por $\mathcal{L}(X, Y)$ o conjunto dos operadores $T : X \to Y$ que são lineares e limitados. Quando $Y = X$ denotaremos $\mathcal{L}(X, Y)$ por $\mathcal{L}(X)$. No caso em que $Y = \mathbb{R}$ denotaremos $\mathcal{L}(X, Y)$ por X'.

Observação 2. O espaço $\mathcal{L}(X, Y)$ é um espaço vetorial normado com a norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup \left\{ \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}; x \in X \text{ e } x \neq 0 \right\}.$$

Definição 2.11. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ um operador linear. Dizemos que T é contínuo em $a \in X$ se*

$$\forall \epsilon > 0,\, \exists \delta > 0; \|x - a\|_X \leq \delta \Rightarrow \|T(x) - T(a)\|_Y < \epsilon.$$

Teorema 2.12. *Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ um operador linear. Então, T é limitado se, e somente se, T é contínuo.*

Demonstração. Ver [12], Teorema 2.7-9, página 97. □

Definição 2.13. *Sejam X e Y espaços de Banach. Um operador linear $T : X \longrightarrow Y$ é dito compacto se para toda sequência limitada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ existe uma subsequência $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\{T(x_{n_j})\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge em Y.*

Definição 2.14. *Seja $X \neq \{0\}$ um espaço vetorial normado complexo e $T : D(T) \subseteq X \longrightarrow X$ um operador linear. Um valor regular λ de T é um número complexo tal que*

1. Existe o operador $(T - \lambda I)^{-1}$.

2. $(T - \lambda I)^{-1}$ é um operador linear limitado.

3. O domínio de $(T - \lambda I)^{-1}$ é denso em X.

Definição 2.15. *Definimos o conjunto resolvente de T como sendo o conjunto*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda \text{ é valor regular de } T\}.$$

O conjunto $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ é chamado de espectro de T.

Definição 2.16. *Sejam X e Y dois $\mathbb{C}-$espaços vetoriais. Uma aplicação $a : X \times Y \to \mathbb{C}$ é chamada de forma sesquilinear se satisfaz:*

i) $a(x + y, z) = a(x, z) + a(y, z), \forall x, y \in X, \forall z \in Y,$

ii) $a(x, y + z) = a(x, y) + a(x, z), \forall x \in X, \forall y, z \in Y,$

iii) $a(\alpha x, y) = \alpha a(x, y), \forall x \in X, \forall y \in Y, \forall \alpha \in \mathbb{C},$

iv) $a(x, \alpha y) = \overline{\alpha} a(x, y), \forall x \in X, \forall y \in Y, \forall \alpha \in \mathbb{C}.$

Definição 2.17. *Seja X um $\mathbb{C}$-espaço vetorial. Dizemos que a forma sesquilinear $a : X \times X \to \mathbb{C}$ é um produto interno se*

i) $a(x, y) = \overline{a(y, x)},\ \forall x, y \in X,$

ii) $a(x, x) \in \mathbb{R}$ *e* $a(x, x) \geq 0, \forall x \in X,$

iii) $a(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Notação 2. Denotaremos um produto interno em X por $(\cdot, \cdot)_X$.

Definição 2.18. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Dizemos que a aplicação $a : X \to Y$ é antilinear quando*

$$a(\alpha x + y) = \overline{\alpha} T(x) + T(y), \forall x, y \in X, \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Definição 2.19. *Seja X um espaço vetorial normado. Dizemos que uma forma sesquilinear $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ é*

i) contínua se existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$|a(u, v)| \leq C\|u\|_X \|v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

ii) coerciva se existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$Re\Big(a(v, v)\Big) \geq C_2 \|v\|_X^2, \quad \forall v \in X.$$

Definição 2.20. *Sejam X um espaço vetorial e $(\cdot, \cdot)_X$ um produto interno em $X \times X$. Dizemos que a norma em X definida por $\|x\|_X = \sqrt{(x, x)_X}$ provém do produto interno $(\cdot, \cdot)_X$.*

Definição 2.21. *Seja $(X, \|.\|_X)$ um espaço de Banach. Dizemos que X é um espaço de Hilbert quando a norma $\|.\|_X$ provém do produto interno.*

Teorema 2.22. *(Lax-Milgram caso complexo) Seja $a : H \times H \to \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear contínua e coerciva no espaço de Hilbert H. Então, para cada funcional antilinear contínuo f sobre H, existe um único $z \in H$ tal que*

$$f(x) = a(x, z), \ \forall \ x \in H.$$

Demonstração. Ver [7], Corolário 6.6.2, página 595. □

Teorema 2.23. *Sejam X um espaço de Banach e $S \in \mathcal{L}(X)$ um operador inversível tal que $S^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Se $B \in \mathcal{L}(X)$ é operador tal que*

$$||B||_{\mathcal{L}(X)} < \frac{1}{||S^{-1}||_{\mathcal{L}(X)}},$$

então $S + B$ é um operador linear, limitado e inversível.

Demonstração. Ver [13], Lema 2.12.1, página 90. □

Definição 2.24. *Sejam X e Y espaços de Banach com $Y \subset X$. Dizemos que Y está imerso compactamente em X quando a aplicação inclusão $i : Y \to X$ é compacta em Y. Denotaremos a imersão compacta de Y em X por $Y \overset{c}{\hookrightarrow} X$.*

Definição 2.25. *Um espaço normado X é chamado de reflexivo quando a aplicação canônica*

$$\begin{aligned} C : X &\to X'' \\ x &\mapsto g_x \end{aligned}$$

é sobrejetora, onde $g_x : X' \to \mathbb{K}$ é dada por $g_x(f) = f(x)$.

Teorema 2.26. *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

Demonstração. Ver [12], Teorema 4.6-6, página 242. □

Definição 2.27. *Seja H um espaço de Hilbert. Dizemos que o operador $A : D(A) \subset H \to H$ é dissipativo quando*

$$Re(Ax, x)_H \leq 0, \ \forall x \in D(A).$$

Teorema 2.28. *Seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador dissipativo tal que o operador $I - A$ é sobrejetor. Se H é um espaço reflexivo, então $\overline{D(A)} = H$.*

Demonstração. Ver [14], Teorema 4.6, página 16. □

Definição 2.29. *Sejam X espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. Dizemos que A tem resolvente compacto quando existe $\lambda \in \rho(A)$ tal que $(\lambda I - A)^{-1}$ é compacto.*

Proposição 2.30. *Sejam $(X, \|.\|_X)$ espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear com resolvente não vazio. Então, A tem resolvente compacto se, e somente se, a aplicação inclusão $i : (D(A), \|.\|_{D(A)}) \to (X, \|.\|_X)$ é compacta.*

Demonstração. Ver [8], Proposição 5.8, página 107. □

Definição 2.31. *Sejam X um espaço vetorial e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. Dizemos que $0 \neq x \in D(A)$ é autovetor de A quando existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $Ax = \lambda x$. Nesse caso, dizemos que λ é autovalor de A associado a x.*

Proposição 2.32. *Sejam X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear com resolvente compacto. Então, $\sigma(A)$ é composto apenas por autovalores de A.*

Demonstração. Ver [8], Corolário 1.15. □

2.2 OS ESPAÇOS $L^p(\mathbf{I})$

Nessa seção, I denotará um subintervalo aberto de $\mathbb{R}$ e | I | denotará sua medida de Lebesgue.

Definição 2.33. *Sejam I $\subset \mathbb{R}$ aberto e $0 < p < \infty$. Denotaremos por $L^p(I)$ o espaço vetorial das classes de funções $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ tais que $|f|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em I, isto é,*

$$L^p(I) = \left\{ f : I \longrightarrow \mathbb{C}; f \text{ é mensurável e } \int_I |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Temos que $L^p(I)$ é um espaço normado com a norma

$$\|f\|_{L^p(I)} = \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \forall f \in L^p(I).$$

Definição 2.34. *Seja $f : I \to \mathbb{C}$ uma função. Chamamos de supremo essencial de f em I o número*

$$\sup_{x \in I} ess|f(x)| = \inf\{K; |f(x)| \leq K, q.s. \text{ em } I\}.$$

Definição 2.35. *Dizemos que a função $f : I \to \mathbb{C}$ é essencialmente limitada quando*

$$\sup_{x \in I} ess|f(x)| < \infty.$$

Definição 2.36. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ aberto. Denotaremos por $L^\infty(I)$ o espaço vetorial das classes de funções $f : I \to \mathbb{C}$ mensuráveis à Lebesgue que são essencialmente limitadas em I, ou seja,*

$$L^\infty(I) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{C}; f \text{ é essencialmente limitada q.s. em } I\},$$

o qual é um espaço normado com a norma

$$\|f\|_{L^\infty(I)} = \sup_{x \in I} ess|f(x)|, \forall f \in L^\infty(I).$$

Notação 3. A notação q.s. em I, na Definição 2.36, significa quase sempre em I.

Teorema 2.37. *Se $1 \leq p \leq \infty$ então $L^p(I)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Ver [1], Teorema 2.16, página 29. □

Teorema 2.38. *(Desigualdade de Holder) Seja $I \subset \mathbb{R}$ aberto e sejam p e q expoentes conjugados com $1 \leq p \leq \infty$. Se $f \in L^p(I)$ e $g \in L^q(I)$, então $fg \in L^1(I)$ e*

$$\|fg\|_{L^1(I)} \leq \|f\|_{L^p(I)} \|g\|_{L^q(I)}.$$

Demonstração. Ver [1], Teorema 2.4, página 24. □

Corolário 2.39. *Seja $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Se $f \in L^q(I)$ e $|I| < \infty$, então $f \in L^p(I)$ e*

$$||f||_{L^p(I)} \leq |I|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(I)}.$$

Em particular, temos que $L^q \hookrightarrow L^p$, para todos $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

Demonstração. Ver [1], Teorema 2.14, página 28. □

Teorema 2.40. *O espaço $L^2(I)$ é um espaço de Hilbert, com produto interno dado por:*

$$(u, v) = \int_I u(x)\overline{v}(x)dx,$$

para qualquer $u, v \in L^2(I)$.

Demonstração. Ver [1], Corolário 2.18, página 31. □

Definição 2.41. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ aberto e $\phi : I \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Definimos o suporte de ϕ como sendo o conjunto*

$$supp(\phi) = \overline{\{x \in I;\ \phi(x) \neq 0\}}^{I}.$$

Notação 4. Denotaremos por $C_0(I) = \{\phi \in C(I);\ supp(\phi)$ é compacto$\}$.

Definição 2.42. *Definimos o espaço $C_0^\infty(I)$ como sendo o espaço vetorial*

$$C_0^\infty(I) = \{f : I \to \mathbb{K};\ f \text{ é infinitamente diferenciável e com suporte compacto}\}.$$

Proposição 2.43. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ aberto e $1 \leq p < \infty$, então $C_0^\infty(I)$ é denso em $L^p(I)$.*

Demonstração. Ver [1], Teorema 2.30, página 38. □

Definição 2.44. *Seja $1 \leq p < \infty$. Denotamos por $L^p_{loc}(I)$ o espaço vetorial das classes de funções $f : I \to \mathbb{C}$ mensuráveis à Lebesgue tais que*

$$\int_K |f(x)|^p dx < \infty,$$

para todo $K \subset I$ compacto.

Proposição 2.45. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Então, $L^p(I) \subset L^1_{loc}(I)$.*

Demonstração. Decorre da Definição 2.44 e do Corolário 2.39. □

Teorema 2.46. *(Du Bois Raymond) Seja $u \in L^1_{loc}(I)$ tal que*

$$\int_I u(x)\varphi(x)dx = 0, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(I),$$

então $u = 0$ quase sempre em I.

Demonstração. Ver [6], Proposição 4, página 20. □

Proposição 2.47. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado. Então, as seguintes inclusões são compactas (e, consequentemente, contínuas):*

- $i : (H^2, ||\cdot||_{H^2}) \to (H^1, ||\cdot||_{H^1})$,
- $i : (H^1, ||\cdot||_{H^1}) \to (C(\overline{I}), ||\cdot||_{L^\infty})$.

Demonstração. Ver [1], Teorema 6.3. □

Proposição 2.48. *Seja $u \in L^1_{loc}(I)$ tal que*

$$\int_I u(x)\varphi_x(x)dx = 0, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(I),$$

então existe uma constante $C > 0$ tal que $u = C$ q.s. em I.

Demonstração. Ver [5], Lema 8.1, página 205. □

Lema 2.49. *Seja $u(\cdot, t) \in L^2(0, L)$ para $t > 0$. Então,*

$$Re \int_0^L u_t(x,t)\overline{u(x,t)}\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)}, \forall t > 0.$$

Demonstração. Seja $u \in L^2(0, L)$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |u(x,t)|^2\,dx \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L u(x,t)\overline{u(x,t)}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L \frac{d}{dt}u(x,t)\overline{u(x,t)}\,dx,
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)} &= \frac{1}{2}\int_0^L u_t(x,t)\overline{u(x,t)} + u(x,t)\overline{u(x,t)}_t\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L 2Re(u_t(x,t)\overline{u(x,t)})\,dx \\
&= Re\int_0^L u_t(x,t)\overline{u(x,t)}\,dx.
\end{aligned}$$

□

Definição 2.50. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Denotamos por $L^2_*(I)$ o espaço das funções de média nula dado por*

$$L^2_*(I) = \left\{ u \in L^2(I); \int_I u(x)\,dx = 0 \right\}.$$

Proposição 2.51. *Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo limitado, então o espaço $L^2_*(I)$ é de Banach. Além disso, $L^2_*(I)$ é espaço de Hilbert com o produto interno de $L^2(I)$.*

Demonstração. Seja $u \in \overline{L^2_*(I)}$. Assim, existe uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2_*(I)$, tal que

$$u_n \to u, \text{ em } L^2(I). \tag{2.1}$$

Desse modo, vejamos que

$$\int_I u(x)\,dx = \int_I u(x)\,dx - \int_I u_n(x)\,dx = \int_I u(x) - u_n(x)\,dx,$$

e assim, das propriedades de integração, obtemos

$$\left|\int_I u(x)\,dx\right| = \left|\int_I u(x) - u_n(x)\,dx\right| \leq \int_I |u(x) - u_n(x)|\,dx. \tag{2.2}$$

Utilizando a Desigualdade de Holder, temos que

$$\int_I |u(x) - u_n(x)|\,dx \leq \left(\int_I |u(x) - u_n(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|I|}||u_n - u||_{L^2}. \tag{2.3}$$

Agora, substituindo (2.3) em (2.2) e utilizando (2.1), segue que

$$\left|\int_I u(x)\,dx\right| \leq \sqrt{|I|}||u_n - u||_{L^2} \to 0.$$

Logo, obtemos

$$\int_I u(x)\,dx = 0.$$

Desse modo, L^2_* é um subespaço fechado de $L^2(I)$. Assim, pelo Teorema 2.8 temos que $L^2_*(I)$ é de Banach. □

Proposição 2.52. *Seja $0 < p < \infty$ e $a, b \geq 0$, então*

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Demonstração. Ver [1], Lema 2.2, página 23. □

2.3 Espaços de Sobolev

Definição 2.53. *Sejam $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{Z}^N_+$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_N$ e $u, g \in L^p(I)$. Dizemos que g é a derivada fraca de ordem α de u quando*

$$\int_I u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_I g\varphi dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(I).$$

Definição 2.54. *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{Z}_+$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{m,p}(I)$ como sendo o subespaço vetorial de $L^p(I)$ dado por*

$$W^{m,p}(I) = \Big\{u \in L^p(I);\ \textit{existem as derivadas fracas de ordem } \alpha \textit{ com } |\alpha| \leq m\Big\}.$$

Notação 5. No caso em que $p = 2$, denotamos $W^{m,2}(I) = H^m(I)$.

Notação 6. No caso em que $N = 1$ denotaremos as derivadas fracas de u de ordem um e dois (quando existirem) por u_x e u_{xx}, respectivamente.

Teorema 2.55. *O espaço $W^{m,p}(I), 1 \leq p \leq \infty$ é um espaço de Banach com a norma dada por*

$$\|u\|_{W^{m,p}(I)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(I)}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(I)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(I)}, \quad p = \infty.$$

Demonstração. Ver [9], Teorema 2, página 249. □

Teorema 2.56. *Os espaços $W^{m,2}(I) = H^m(I)$ são espaços de Hilbert com produto interno dado por*

$$(u, v)_{H^m(I)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \big(D^\alpha u, D^\alpha v\big)_{L^2(I)}, \quad \forall u, v \in H^m.$$

Demonstração. Ver [9], Teorema 2, página 249. □

Definição 2.57. *Seja $1 \leq p < \infty$. O espaço $W_0^{m,p}(I)$ é definido como sendo*

$$W_0^{m,p}(I) = \overline{C_0^1(I)}^{W^{m,p}}.$$

Teorema 2.58. *(Desigualdades de Poincaré) Considere $I \subset \mathbb{R}$ aberto.*

a) Se I é limitado, então, para todo $1 \leq p < \infty$, existe uma constante $c_p > 0$, tal que

$$\|u\|_{L^p(I)} \leq c_p \|u'\|_{L^p(I)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

b) Se I é conexo de fronteira de classe C^1, então para todo $1 \leq p < \infty$ existe uma constante $c_p > 0$, tal que

$$\|u - (u)_I\|_{L^p(I)} \leq c_p \|u'\|_{L^p(I)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(I),$$

onde $(u)_I$ é a média de u sobre I, ou seja,

$$(u)_I = \frac{1}{|I|} \int_I u(x)\, dx.$$

Demonstração. Ver [5], Corolário 9.19, página 290 e página 312, respectivamente. □

Definição 2.59. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ intervalo. Denotamos por $H^1_*(I)$ o espaço das funções de média nula dado por*

$$H^1_*(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega); \int_\Omega u(x)dx = 0 \right\}.$$

Proposição 2.60. *O espaço $(H^1_*(I), ||\cdot||_{H^1(I)})$ é de Banach.*

Demonstração. Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de Cauchy em H^1_*. Assim, a sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $H^1(I)$, que é espaço de Banach. Desse modo, existe $u \in H^1$ tal que $||u_n - u||_{H^1(I)} \to 0$ para n suficientemente grande.
Agora, utilizando as desigualdades de Holder e de Poincaré, temos que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \int_I u_n(x)\,dx - \int_I u(x)\,dx \right| &\leq \int_I |u_n(x) - u(x)|\,dx \\ &\leq \left(\int_I dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I |u_n(x) - u(x)|^2\,dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{|I|}||u_n - u||_{L^2} \\ &\leq \sqrt{|I|}||u_n - u||_{H^1(I)}. \end{aligned}$$

Desse modo, para n suficientemente grande

$$\lim_{n\to\infty} \int_I u_n(x)\,dx = \int_I u(x)\,dx.$$

Obtemos então

$$\frac{1}{|I|} \int_I u(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|I|} \int_I u_n(x)\,dx = 0.$$

Logo, $u \in H^1_*(I)$, isto é, u_n converge para $u \in H^1_*(I)$. Portanto, o espaço $(H^1_*(I), ||\cdot||_{H^1(I)})$ é de Banach. □

Observação 3. Como consequência das desigualdades de Poincaré obtemos que tanto no espaço $H^1_0(\Omega)$ como no espaço $H^1_*(\Omega)$, as normas

$$\|u\|_1 = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_x\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \|u\|_2 = \|u_x\|_{L^2(\Omega)},$$

são equivalentes.

Teorema 2.61. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $1 \leq p \leq \infty$. Se $u \in W^{1,p}(I)$, então existe uma função $\tilde{u} \in C(\overline{I})$ tal que $u = \tilde{u}$ q. s. em I. Além disso,*

$$\int_a^b u_x dx = \tilde{u}(b) - \tilde{u}(a),$$

para quaisquer $a, b \in \overline{I}$.

Demonstração. Ver [5], Teorema 8.2, página 204. □

Teorema 2.62. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $1 \leq p \leq \infty$. Se $u, v \in W^{1,p}(I)$, então $uv \in W^{1,p}(I)$ e, além disso, $(uv)_x = u_x v + uv_x$ e*

$$\int_a^b u_x v dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b uv_x dx,$$

para quaisquer $a, b \in \overline{I}$.

Demonstração. Ver [5], Corolário 8.10, página 215. □

Teorema 2.63. *Seja $u \in W^{1,p}(a,b)$. Então, $u \in W_0^{1,p}(a,b)$ se, e somente se, $\tilde{u}(a) = \tilde{u}(b) = 0$, em que $\tilde{u}$ é um representante contínuo de u.*

Demonstração. Ver [5], Teorema 8.12, página 217. □

Teorema 2.64. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado, $m \geq 1, j \geq 0$ inteiros e $1 \leq p, q < \infty$. Então, as seguintes inclusões são compactas:*

$$i : \left(W^{j+m,p}(I), \|.\|_{W^{j+m,p}(I)}\right) \to \left(W^{j,q}(I), \|.\|_{W^{j,q}(I)}\right), \quad \text{se} \quad mp > 1,$$

$$i : \left(W^{j+m,p}(I), \|.\|_{W^{j+m,p}(I)}\right) \to \left(C^j(\overline{I}), \|.\|_{L^\infty}\right), \quad \text{se} \quad p > 1.$$

Demonstração. Ver [1], Teorema 6.3, página 168. □

2.4 Semigrupos lineares

Definição 2.65. *Uma família $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineares e limitados definida sobre um espaço de Banach X é chamada de semigrupo de operadores lineares limitados, ou simplesmente semigrupo, se*

1. *$T(0) = I$ em que $I : X \to X$ é o operador identidade;*
2. *$T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \geq 0$.*

Definição 2.66. *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo sobre um espaço de Banach X. Dizemos que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0, ou simplesmente C_0-semigrupo, se*

$$\lim_{t \to 0} T(t)x = x, \forall x \in X.$$

Definição 2.67. *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo sobre um espaço de Banach X. O gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é o operador*

$$\begin{aligned} A : D(A) \subset X \ &\to \ X \\ x \ &\mapsto \ Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \end{aligned}$$

onde

$$D(A) = \left\{ x \in X;\ \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}.$$

Observação 2.68. *Chamaremos o semigrupo cujo gerador infinitesimal é o operador A de semigrupo gerado por A e o denotaremos por $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$.*

Definição 2.69. *Dizemos que um semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é uniformemente limitado se existe uma constante $M \geq 1$ tal que $\|T(t)\| \leq M$, para todo $t \geq 0$. Quando $M = 1$ dizemos que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de contrações.*

Teorema 2.70. *Sejam $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador linear dissipativo. Se $Im(\lambda_0 I - A) = \mathcal{H}$ para algum $\lambda_0 > 0$, então $Im(\lambda I - A) = \mathcal{H}$ para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração. Ver [14], Teorema 4.5-(a), página 15. □

Teorema 2.71. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador dissipativo onde $Im(I - A) = X$. Se X é reflexivo, então $\overline{D(A)} = X$.*

Demonstração. Ver [14], Teorema 4.6, página 16. □

Teorema 2.72. *(Lummer-Phillips) Seja H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear com $\overline{D(A)} = H$.*

(i) Se A é dissipativo e existe λ tal que $Im(\lambda I - A) = H$, então A é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações.

(ii) Se A é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações sobre o espaço H, então $Im(\lambda I - A) = H$ para todo $\lambda > 0$ e A é um operador dissipativo.

Demonstração. Ver [14], Teorema 4.3, página 14. □

Considere o problema abstrato de Cauchy

$$\begin{cases} U_t = AU,\ t > 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases}, \tag{2.4}$$

onde $A : D(A) \subset H \to H$ é um operador linear definido sobre o espaço de Hilbert H e

$$D(A) = \{U \in H; \quad AU \in H\}.$$

Definição 2.73. *Uma solução do problema* (2.4) *é uma função $U : [0, \infty) \to H$ tal que $U(t)$ é contínua para $t \geq 0$, continuamente diferenciável com $U(t) \in D(A)$ para $t > 0$ e satisfaz* (2.4) *em* $[0, \infty)$ *quase sempre.*

Teorema 2.74. *Seja H um espaço de Banach e A um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $T(t) := e^{At}$ em H. Se $U_0 \in D(A)$, então o problema de Cauchy abstrato* (2.4) *possui uma única solução $U \in D(A)$ dada por*

$$U(t) = T(t)U_0 := e^{At}U_0, \quad \forall t \geq 0,$$

tal que

$$U \in C([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), H).$$

Demonstração. Ver [14], Teorema 1.3, página 102. □

Definição 2.75. *Dizemos que um semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é exponencialmente estável quando existem constantes $\alpha > 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}} \leq Me^{-\alpha t}, \ \forall t \geq 0.$$

Teorema 2.76. *(Teorema de Prüss) Um C_0-semigrupo de contrações $T(t) = e^{At}$ é exponencialmente estável se, e somente se, as condições abaixo se verificam:*

i) $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$,

ii) $\displaystyle\lim_{\beta\to\infty} \sup \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty.$

Demonstração. Ver [13], Teorema 3.6.5, página 122. □

Definição 2.77. *Dizemos que um semigrupo $S(t) := e^{At}$ em um espaço de Hilbert H é polinomialmente estável, quando existem constantes $\alpha > 0$ e $C > 0$ tais que para todo $U \in D(A)$*

$$||S(t)U||_H \leq \frac{C}{t^\alpha}||U||_{D(A)}, \ \forall\, t > 0.$$

Observação 2.78. *Denotamos por*

$$f = o(g), \ \textit{quando } x \to x_0,$$

desde que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

Observação 2.79. *Denotamos por*

$$f = \mathcal{O}(g), \ \textit{quando } \lambda \to \lambda_0,$$

desde que exista uma constante $c > 0$ tal que

$$|f(\lambda)| \leq c|g(\lambda)|$$

para todo λ suficientemente perto de λ_0.

Teorema 2.80. *(Borichev & Tomilov) Seja $\{S(t)\}_{t>0}$ um C_0-semigrupo uniformemente limitado em um espaço de Hilbert H com gerador infinitesimal A tal que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$. Então, para alguma constante fixada $\alpha > 0$ as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $||(i\lambda I - A)^{-1}||_{\mathcal{L}(H)} = \mathcal{O}(|\lambda|^{\alpha}),\ \lambda \to \infty,$

(ii) $||S(t)(-A)^{-\alpha}||_{\mathcal{L}(H)} = \mathcal{O}(t^{-1}),\ t \to \infty,$

(iii) $||S(t)(-A)^{-\alpha}u|| = o(t^{-1}),\ t \to \infty,\ u \in H,$

(iv) $||S(t)A^{-1}||_{\mathcal{L}(H)} = \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{\alpha}}),\ t \to \infty,$

(v) $||S(t)A^{-1}u||_H = o(t^{-\frac{1}{\alpha}}),\ t \to \infty,\ u \in H.$

Demonstração. Ver [3], Teorema 2.4, página 459. $\square$

3 SISTEMA DE BRESSE COM DUAS DISSIPAÇÕES FRICCIONAIS

Neste capítulo vamos estudar a existência e unicidade de solução do seguinte problema:

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) &= 0 \quad \text{em} \quad (0,\infty)\times(0,L), && (3.1)\\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma_2\psi_t &= 0 \quad \text{em} \quad (0,\infty)\times(0,L), && (3.2)\\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x + l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma_3 w_t &= 0 \quad \text{em} \quad (0,\infty)\times(0,L), && (3.3)\end{aligned}$$

onde $\rho_1, \rho 2, k, k_0, l, \gamma_2$ e γ_3 são constantes positivas. Vamos considerar as condições iniciais

$$\begin{aligned} \varphi(0,.) = \varphi_0,\ \varphi_t(0,.) = \varphi_1,\\ \psi(0,.) = \psi_0,\ \psi_t(0,.) = \psi_1,\\ w(0,.) = w_0,\ w_t(0,.) = w_1, \end{aligned} \tag{3.4}$$

e condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann.

$$\varphi(t,0) = \varphi(t,L) = \psi_x(t,0) = \psi_x(t,L) = w_x(t,0) = w_x(t,L) = 0 \quad \text{em} \quad (0,\infty) \tag{3.5}$$

3.1 Existência e Unicidade de Solução

Nosso objetivo inicial é garantir a existência e unicidade de solução do problema (3.1)-(3.4) com as condições de contorno (3.5). Para este fim, usaremos a teoria de semigrupos lineares.

3.1.1 Formulação de Semigrupo

Nesta subseção, será apresentada a formulação do semigrupo associado ao problema. Desse modo, considere $\mathcal{H}$ o espaço vetorial

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,L)\times L^2(0,L)\times H_*^1(0,L)\times L_*^2(0,L)\times H_*^1(0,L)\times L_*^2(0,L),$$

onde $H_*^1(0,L) = H^1(0,L)\cap L_*^2(0,L)$ e $L_*^2(0,L) = \{u\in L^2(0,L) : \int_0^L u(x)dx = 0\}$.

Com o objetivo de facilitar a notação, denotaremos $L^2(0,L)$ por L^2, $L_*^2(0,L)$ por L_*^2, $H_0^1(0,L)$ por H_0^1 e $H_*^1(0,L)$ por H_*^1.

Notemos que $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert com a norma $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ proveniente do produto interno usual, definido por

$$(U,\hat{U})_{\mathcal{H}} = (\varphi_x,\hat{\varphi_x})_{L^2} + (\Phi,\hat{\Phi})_{L^2} + (\psi_x,\hat{\psi_x})_{L^2} + (\Psi,\hat{\Psi})_{L^2} + (w_x,\hat{w_x})_{L^2} + (W,\hat{W})_{L^2}, \tag{3.6}$$

para quaisquer $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W), \hat{U} = (\hat{\varphi}, \hat{\Phi}, \hat{\psi}, \hat{\Psi}, \hat{w}, \hat{W}) \in \mathcal{H}$.

Agora, considere em $\mathcal{H}$, a aplicação:

$$\begin{aligned} ((U, \hat{U}))_{\mathcal{H}} &= \rho_1(\Phi, \hat{\Phi})_{L^2} + \rho_2(\Psi, \hat{\Psi})_{L^2} + \rho_1(W, \hat{W})_{L^2} + b(\psi_x, \hat{\psi}_x)_{L^2} \\ &+ k(\varphi_x + \psi + lw, \hat{\varphi}_x + \hat{\psi} + l\hat{w})_{L^2} + k_0(w_x - l\varphi, \hat{w}_x - l\hat{\varphi})_{L^2}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

para quaisquer $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W), \hat{U} = (\hat{\varphi}, \hat{\Phi}, \hat{\psi}, \hat{\Psi}, \hat{w}, \hat{W}) \in \mathcal{H}$.

Assim, se $U \in \mathcal{H}$, obtemos que a norma proveniente do produto interno (3.6):

$$|U|^2_{\mathcal{H}} = ||\varphi_x||^2_{L^2} + ||\Phi||^2_{L^2} + ||\psi_x||^2_{L^2} + ||\Psi||^2_{L^2} + ||w_x||^2_{L^2} + ||W||^2_{L^2}. \tag{3.8}$$

Agora, vamos considerar a aplicação $||\cdot||_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ proveniente da aplicação definida em (3.7):

$$\begin{aligned} ||U||^2_{\mathcal{H}} &= \rho_1||\Phi||^2_{L^2} + \rho_2||\Psi||^2_{L^2} + \rho_1||W||^2_{L^2} + b||\psi_x||^2_{L^2} \\ &+ k||\varphi_x + \psi + lw||^2_{L^2} + k_0||w_x - l\varphi||^2_{L^2} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Lema 3.1. *A aplicação $|| \cdot ||_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ definida em* (3.9) *é norma em $\mathcal{H}$ desde que satisfaça a condição $lL \neq n\pi$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Considere $U \in \mathcal{H}$ tal que $||U||_{\mathcal{H}} = 0$. Assim, temos que

$$\Phi = \Psi = W = \psi_x = \varphi_x + \psi + lw = w_x - l\varphi = 0. \tag{3.10}$$

Como $\psi_x = 0$, então para toda função $\eta \in C_0^\infty$, se integrarmos por partes, obtemos

$$\int_0^L \psi(x)\eta_x(x)\,dx = \psi(x)\eta(x)\big|_0^L - \int_0^L \eta(x)\psi_x(x)\,dx = 0.$$

Assim, pelo Lema 2.46, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\psi = c$. Se $\psi \in H^1_*$,

$$0 = \frac{1}{L}\int_0^L \psi(x)\,dx = \frac{1}{L}\int_0^L c\,dx = c.$$

Assim, $\psi = 0$. Além disso, temos de (3.10) que

$$\begin{cases} \varphi_x + lw = 0, \\ w_x - l\varphi = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

Como $\varphi \in H^1_0$, obtemos o seguinte problema de contorno

$$\begin{cases} \varphi_{xx} + l^2\varphi = 0, \\ \varphi(0) - \varphi(L) = 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Considere a solução $\varphi \in C^2(0,L)$ do sistema (3.12). Assim, temos que tal solução pode ser escrita como

$$\varphi(x) = \alpha sen(lx) + \beta cos(lx), \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Como $\varphi(0) = 0$, então $\beta = 0$. Assim, $\varphi(x) = \alpha sen(lx)$.

Como $w \in H^1_*$, só podemos garantir que $\alpha = 0$ se $lL \neq n\pi$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Logo, se $lL \neq n\pi$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, obtemos que $||U||_{\mathcal{H}} = 0$ implica em $U = 0$.

Além disso, se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $U \in \mathcal{H}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
||\lambda U||_{\mathcal{H}} &= \rho_1||\lambda\Phi||^2_{L^2} + \rho_2||\lambda\Psi||^2_{L^2} + \rho_1||\lambda W||^2_{L^2} + b||\lambda\psi_x||^2_{L^2} \\
&+ k||\lambda(\varphi_x + \psi + lw)||^2_{L^2} + k_0||\lambda(w_x - l\varphi)||^2_{L^2} \\
&= |\lambda|\rho_1||\Phi||^2_{L^2} + |\lambda|\rho_2||\Psi||^2_{L^2} + |\lambda|\rho_1||W||^2_{L^2} + |\lambda|b||\psi_x||^2_{L^2} \\
&+ |\lambda|k||\varphi_x + \psi + lw||^2_{L^2} + |\lambda|k_0||w_x - l\varphi||^2_{L^2} \\
&= |\lambda|||U||_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Por fim, dados $U, \hat{U} \in \mathcal{H}$, usando a desigualdade Triangular, obtemos

$$\begin{aligned}
||U + \hat{U}||^2_{\mathcal{H}} &\leq \rho_1(||\Phi||_{L^2} + ||\hat{\Phi}||_{L^2})^2 + \rho_2(||\Psi||_{L^2} + ||\hat{\Psi}||_{L^2})^2 + \rho_1(||W||_{L^2} + ||\hat{W}||_{L^2})^2 \\
&+ b(||\psi_x||_{L^2} + ||\hat{\psi}_x||_{L^2})^2 + k(||\varphi_x + \psi + lw||_{L^2} + ||\hat{\varphi}_x + \hat{\psi} + l\hat{w}||_{L^2})^2 \\
&+ k_0(||w_x - l\varphi||_{L^2} + ||\hat{w}_x - l\hat{\varphi}||_{L^2})^2
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
||U + \hat{U}||_{\mathcal{H}} &\leq \sqrt{\rho_1}(||\Phi||_{L^2} + ||\hat{\Phi}||_{L^2}) + \sqrt{\rho_2}(||\Psi||_{L^2} + ||\hat{\Psi}||_{L^2}) + \sqrt{\rho_1}(||W||_{L^2} + ||\hat{W}||_{L^2}) \\
&+ \sqrt{b}(||\psi_x||_{L^2} + ||\hat{\psi}_x||_{L^2}) + \sqrt{k}(||\varphi_x + \psi + lw||_{L^2} + ||\hat{\varphi}_x + \hat{\psi} + l\hat{w}||_{L^2}) \\
&+ \sqrt{k_0}(||w_x - l\varphi||_{L^2} + ||\hat{w}_x - l\hat{\varphi}||_{L^2}) \\
&= \sqrt{\rho_1||\Phi||^2_{L^2}} + \sqrt{\rho_2||\Psi||^2_{L^2}} + \sqrt{\rho_1||W||^2_{L^2}} + \sqrt{b||\psi_x||^2_{L^2}} + \sqrt{k||\varphi_x + \psi + lw||^2_{L^2}} \\
&+ \sqrt{k_0||w_x - l\varphi||^2_{L^2}} + \sqrt{\rho_1||\hat{\Phi}||^2_{L^2}} + \sqrt{\rho_2||\hat{\Psi}||^2_{L^2}} + \sqrt{\rho_1||\hat{W}||^2_{L^2}} \\
&+ \sqrt{b||\hat{\psi}_x||^2_{L^2}} + \sqrt{k||\hat{\varphi}_x + \hat{\psi} + l\hat{w}||^2_{L^2}} + \sqrt{k_0||\hat{w}_x - l\hat{\varphi}||^2_{L^2}} \\
&\leq ||U||_{\mathcal{H}} + ||\hat{U}||_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Portanto, a aplicação definida em (3.9) é norma, desde que $lL \neq n\pi$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$. □

Observação 3.2. *Para mostrar que a necessidade da condição $lL \neq n\pi$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, basta supor $lL = n\pi$, para algum $n \in \mathbb{Z}$, então o vetor*

$$U = (sen(lx), 0, 0, 0, -cos(lx), 0) \in \mathcal{H},$$

é não nulo, entretanto, $||U||_{\mathcal{H}} = 0$.

Observação 3.3. *De agora em diante, neste trabalho, será considerado que* $lL \neq n\pi,\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$ *em* $\mathcal{H}$ *para que* (3.7) *seja um produto interno em* $\mathcal{H}$ *e consequentemente,* (3.9) *seja uma norma em* $\mathcal{H}$.

Vejamos que as normas $||.||_{\mathcal{H}}$ e $|.|_{\mathcal{H}}$ são equivalentes. Para isso, provemos os seguintes lemas:

Lema 3.4. *Sejam* $\varphi \in H_0^1$ *e* $\psi, w \in H_*^1$. *Existe uma constante* $c_1 > 0$ *tal que*

$$k||\varphi_x + \psi + lw||_{L^2}^2 + k_0||w_x - l\varphi||_{L^2}^2 + b||\psi_x||_{L^2}^2 \leq c_1(||\varphi_x||_{L^2}^2 + ||\psi_x||_{L^2}^2 + ||w_x||_{L^2}^2). \quad (3.13)$$

Demonstração. Utilizando as desigualdades Triangular e de Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned} k||\varphi_x + \psi + lw||_{L^2}^2 &\leq k(||\varphi_x||_{L^2} + ||\psi||_{L^2} + l||w||_{L^2})^2 \\ &\leq 4k||\varphi_x||_{L^2}^2 + 4k||\psi||_{L^2}^2 + 4kl^2||w||_{L^2}^2 \\ &\leq 4k||\varphi_x||_{L^2}^2 + 4kc_p||\psi_x||_{L^2}^2 + 4kl^2c_p||w_x||_{L^2}^2, \end{aligned} \quad (3.14)$$

além disso, temos

$$\begin{aligned} k_0||w_x - l\varphi||_{L^2}^2 &\leq 2k_0||w_x||_{L^2}^2 + 2k_0l^2||\varphi||_{L^2}^2 \\ &\leq 2k_0||w_x||_{L^2}^2 + 2k_0l^2c_p||\varphi_x||_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Somando (3.14) e (3.15), além de $b||\psi_x||_{L^2}^2$ em ambos os lados, obtemos:

$$k||\varphi_x + \psi + lw||_{L^2}^2 + k_0||w_x - l\varphi||_{L^2}^2 + b||\psi_x||_{L^2}^2 = (I)$$

onde (I) satisfaz

$$\begin{aligned} (I) &\leq 4k||\varphi_x||_{L^2}^2 + 4kc_p||\psi_x||_{L^2}^2 + 4kl^2c_p||w_x||_{L^2}^2 + 2k_0||w_x||_{L^2}^2 + 2k_0l^2c_p||\varphi_x||_{L^2}^2 + b||\psi_x||_{L^2}^2 \\ &= (4k + 2k_0l^2c_p)||\varphi_x||_{L^2}^2 + (4kc_p + b)||\psi_x||_{L^2}^2 + (4kl^2c_p + 2k_0)||w_x||_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Assim, tomando $c_1 = max\{(4k + 2k_0l^2c_p), (4kc_p + b), (4kl^2c_p + 2k_0)\}$, obtemos o resultado desejado. □

Lema 3.5. *Sejam* $\varphi \in H_0^1$ *e* $\psi, w \in H_*^1$. *Existe uma constante* $c_2 > 0$ *tal que*

$$||\varphi_x||_{L^2}^2 + ||\psi_x||_{L^2}^2 + ||w_x||_{L^2}^2 \leq c_2(k||\varphi_x + \psi + lw||_{L^2}^2 + k_0||w_x - l\varphi||_{L^2}^2 + b||\psi_x||_{L^2}^2). \quad (3.16)$$

Demonstração. A prova será realizada por contradição. Suponha que para todo $n \in \mathbb{N}$ exista $\{(\varphi_n, \psi_n, w_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in H_0^1 \times H_*^1 \times H_*^1$ tal que

$$k||\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n||_{L^2}^2 + k_0||w_{n,x} - l\varphi_n||_{L^2}^2 + b||\psi_{n,x}||_{L^2}^2 < \frac{1}{n} \quad (3.17)$$

e ainda

$$||\varphi_{n,x}||_{L^2}^2 + ||\psi_{n,x}||_{L^2}^2 + ||w_{n,x}||_{L^2}^2 = 1 \tag{3.18}$$

Notemos que de (3.18), obtemos que a sequência $\{(\varphi_n, \psi_n, w_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $H_0^1 \times H_*^1 \times H_*^1$. Como H_0^1 tem inclusão compacta em L^2 e H_*^1 tem inclusão compacta em L_*^2, temos que existe $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ tal que $\{(\varphi_n, \psi_n, w_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortemente em $L^2 \times L_*^2 \times L_*^2$.
Assim, de (3.17), obtemos

$$\psi_{n,x} \to 0 \textit{ em } L^2,$$

assim

$$\psi_n \to 0 \textit{ em } H_*^1.$$

Agora, considere $\varphi \in L^2$ e $w \in L_*^2$ tais que $\varphi_n \to \varphi$ em L^2 e $w_n \to w$ em L_*^2. De (3.17)

$$\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n \to 0 \textit{ forte em } L^2.$$

Mas,

$$\varphi_{n,x} + \psi_n + l(w_n - w) + lw = \varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n.$$

Logo

$$\varphi_{n,x} \to -lw \textit{ forte em } L^2. \tag{3.19}$$

Temos então que $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, é de Cauchy em H_0^1. Assim, existe $\phi \in H_0^1$ tal que $\varphi_n \to \phi$ em H_0^1, e por consequência, $\varphi_n \to \phi$ em L^2. Pela unicidade do limite, segue que $\varphi = \phi$, isto é, $\varphi \in H_0^1$. Logo, de (3.19), obtemos

$$\varphi_x + lw = 0 \textit{ quase sempre em } (0, L) \tag{3.20}$$

Analogamente, de (3.17), temos que

$$w_{n,x} - l\varphi_n \to 0 \textit{ forte em } L^2.$$

Mas como

$$w_{n,x} - l(\varphi_n - \varphi) - l\varphi = w_{n,x} - l\varphi_n,$$

segue que

$$w_{n,x} \to l\varphi \textit{ forte em } L^2. \tag{3.21}$$

Então, $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}_{\mathbb{K}}}$ é de Cauchy em H_0^1. Logo, existe $w^* \in H_0^1$ tal que $w_n \to w^*$ em H_0^1, e desse fato, $w_n \to w^*$ em L^2. Pela unicidade do limite segue que $w^* \in H_*^1$. De (3.21)

$$w_x - l\varphi = 0 \textit{ quase sempre em } (0, L). \tag{3.22}$$

Portanto, de (3.20) e (3.22), de maneira similar à solução do sistema (3.11), obtemos que $\varphi = w = 0$, que contradiz (3.18). Portanto, existe $c_2 > 0$ de modo que

$$||\varphi_x||^2_{L^2} + ||\psi_x||^2_{L^2} + ||w_x||^2_{L^2} \le c_2(k||\varphi_x + \psi + lw||^2_{L^2} + k_0||w_x - l\varphi||^2_{L^2} + b||\psi_x||^2_{L^2}),$$

e assim, vale o Lema 3.5. □

Agora, podemos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3.6. *As normas* $|.|_{\mathcal{H}}$ *e* $||.||_{\mathcal{H}}$ *são equivalentes.*

Demonstração. Segue diretamente dos Lemas 3.4 e 3.5. □

Agora, vamos reescrever o sistema (3.1)-(3.5), como um problema de valor inicial

$$U_t = AU, \quad t > 0, \quad U(0) = U_0, \tag{3.23}$$

onde $U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t)^T$, $U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1)^T$, T denota o transposto do vetor e A é o operador linear $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & Id & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1}\partial_x^2 - \frac{k_0 l}{\rho_1}Id & 0 & \frac{k}{\rho_1}\partial_x & 0 & \frac{(k+k_0)l}{\rho_1}\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id & 0 & 0 \\ -\frac{k}{\rho_2}\partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{k}{\rho_2}Id & -\frac{\gamma_2}{\rho_2}Id & -\frac{kl}{\rho_2}Id & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Id \\ -\frac{(k_0+k)l}{\rho_1}\partial_x & 0 & -\frac{kl}{\rho_1}Id & 0 & \frac{k_0}{\rho_1}\partial_x^2 - \frac{k_0 l^2}{\rho_1}Id & -\frac{\gamma_3}{\rho_1}Id \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

Além disso, o domínio do operador A é dado por

$$\begin{aligned} D(A) = \{(\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)^T \in \mathcal{H} : \varphi \in H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L), \\ \psi, w \in H^2(0,L), \psi_x, w_x \in H_0^1(0,L), \Phi \in H_0^1(0,L), \Psi, W \in H_*^1\}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Os resultados a seguir garantem a existência e unicidade de solução para o problema de valor inicial e, assim, para o sistema (3.1)-(3.4) com condições de contorno (3.5).

Teorema 3.7. *Seja* $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *dado em* (3.24)-(3.25). *Então,* A *é um operador dissipativo.*

Demonstração. Seja $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W) \in D(A)$. Pela definição de A, obtemos

$$AU = \begin{pmatrix} \Phi \\ \dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw)_x + \dfrac{k_0 l}{\rho_1}(w_x - l\varphi) \\ \Psi \\ \dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + lw) - \dfrac{\gamma_2}{\rho_2}\Psi \\ W \\ \dfrac{k_0}{\rho_1}(w_x - l\varphi)_x - \dfrac{kl}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw) - \dfrac{\gamma_3}{\rho_1}W \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

Logo,

$$\begin{aligned} (AU, U)_{\mathcal{H}} &= \int_0^L \Big[k(\varphi_x + \psi + lw)_x\overline{\Phi} + k_0 l(w_x - l\varphi)\overline{\Phi} + b\psi_{xx}\overline{\Psi} - k(\varphi_x + \psi + lw)\overline{\Psi}\Big]\,dx \\ &+ \int_0^L \Big[-\gamma_2\Psi\overline{\Psi} + k_0(w_x - l\varphi)_x\overline{W} - kl(\varphi_x + \psi + lw)\overline{W} - \gamma_3 W\overline{W}\Big]\,dx \\ &+ \int_0^L \Big[b\Psi_x\overline{\psi_x} + k(\Phi_x + \Psi + lW)\overline{(\varphi_x + \psi + lw)} + k_0(W_x - l\Phi)\overline{(w_x - l\varphi)}\Big]\,dx. \end{aligned}$$

Reescrevendo, obtemos

$$\begin{aligned} (AU, U)_{\mathcal{H}} &= \underbrace{k\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)_x\overline{\Phi}\,dx}_{i_1} + k_0 l\int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{\Phi}\,dx - \gamma_2\int_0^L |\Psi|^2\,dx \\ &+ \underbrace{b\int_0^L \psi_{xx}\overline{\Psi}\,dx}_{i_2} - k\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{\Psi}\,dx + \underbrace{k_0\int_0^L (w_x - l\varphi)_x\overline{W}\,dx}_{i_3} \\ &- kl\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{W}\,dx - \gamma_3\int_0^L |W|^2\,dx + b\int_0^L \Psi_x\overline{\psi_x}\,dx \\ &+ k\int_0^L (\Phi_x + \Psi + lW)\overline{(\varphi_x + \psi + lw)}\,dx + k_0\int_0^L (W_x - l\Phi)\overline{(w_x - l\varphi)}\,dx. \end{aligned}$$

Usando integração por partes em i_1, temos que

$$\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)_x\overline{\Phi}\,dx = -\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{\Phi_x}\,dx.$$

Usando integração por partes em i_2, temos que

$$\int_0^L \psi_{xx}\overline{\Psi}\,dx = -\int_0^L \psi_x\overline{\Psi_x}\,dx.$$

E usando integração por partes em i_1, temos que

$$\int_0^L (w_x - l\varphi)_x \overline{W}\, dx = -\int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{W_x}\, dx.$$

Substituindo i_1, i_2 e i_3, obtemos:

$$\begin{aligned}
(AU,U)_{\mathcal{H}} &= -k\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{\Phi_x}\, dx + k_0 l\int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{\Phi}\, dx - \gamma_2\int_0^L |\Psi|^2\, dx \\
&- b\int_0^L \psi_x\overline{\Psi_x}\, dx - k\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{\Psi}\, dx - k_0\int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{W_x}\, dx \\
&- kl\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{W}\, dx - \gamma_3\int_0^L |W|^2\, dx + b\int_0^L \Psi_x\overline{\psi_x}\, dx \\
&+ k\int_0^L (\Phi_x + \Psi + lW)\overline{(\varphi_x + \psi + lw)}\, dx + k_0\int_0^L (W_x - l\Phi)\overline{(w_x - l\varphi)}\, dx.
\end{aligned}$$

Reorganizando e tomando a parte real, obtemos:

$$\begin{aligned}
Re(AU,U)_{\mathcal{H}} &= Re\big[-k\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{(\Phi_x + \Psi + lW)}\, dx\big] \\
&+ Re\big[+k\int_0^L \overline{(\varphi_x + \psi + lw)}(\Phi_x + \Psi + lW)\, dx\big] \\
&+ Re\big[-k_0\int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{(W_x - l\Phi)}\, dx + k_0\int_0^L \overline{(w_x - l\varphi)}(W_x - l\Phi)\, dx\big] \\
&+ Re\big[-b\int_0^L \psi_x\overline{\Psi_x}\, dx + b\int_0^L \overline{\psi_x}\Psi_x\, dx\big] - \gamma_2\int_0^L |\Psi|^2\, dx - \gamma_3\int_0^L |W|^2\, dx,
\end{aligned}$$

e como $Re[z - \overline{z}] = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$, segue que

$$Re(AU,U)_{\mathcal{H}} = -\gamma_2\int_0^L |\Psi|^2\, dx - \gamma_3\int_0^L |W|^2\, dx \leq 0. \tag{3.27}$$

Portanto, A é um operador dissipativo. $\square$

Temos como objetivo mostrar que o operador A é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações e para isso, vamos mostrar um lema técnico que nos auxiliará no próximo resultado.

Lema 3.8. *Dadas $g_1 \in L^2$ e $g_2, g_3 \in L^2_*$, o sistema*

$$k(\varphi_x + \psi + lw)_x + k_0 l(w_x - l\varphi) = g_1, \tag{3.28}$$

$$b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + lw) = g_2, \tag{3.29}$$

$$k_0(w_x + l\varphi)_x - kl(\varphi_x + \psi + lw) = g_3, \tag{3.30}$$

possui uma única solução $(\varphi,\psi,w)\in\left(H_0^1\cap H^2\right)\times\left(H_*^1\cap H^2\right)\times\left(H_*^1\cap H^2\right)$.

Demonstração. Considere o espaço de Hilbert dado por

$$\mathcal{V}=H_0^1\times H_*^1\times H_*^1,$$

com norma dada por

$$|(\varphi,\psi,w)|_{\mathcal{V}}^2=||\varphi||_{H_0^1}^2+||\psi||_{H_*^1}^2+||w||_{H_*^1}^2.$$

Notemos ainda que $\mathcal{V}$ com a norma

$$||(\varphi,\psi,w)||_{\mathcal{V}}^2=k||\varphi_x+\psi+lw||_{L^2}^2+k_0||w_x-l\varphi||_{L^2}^2+b||\psi_x||_{L^2}^2$$

é espaço de Banach. Além disso, as normas $||.||_{\mathcal{V}}$ e $|.|_{\mathcal{V}}$ são equivalentes, pelos Lemas 3.4 e 3.5.

Vamos considerar a aplicação sesquilinear $a:\mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{C}$ definida por:

$$\begin{aligned}a((\varphi,\psi,w),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w})) &= k\int_0^L\left[(\varphi_x+\psi+lw)\overline{(\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}+l\tilde{w})}\right]dx\\ &+ k_0\int_0^L\left[(w_x-l\varphi)\overline{(\tilde{w}_x-l\tilde{\varphi})}\right]dx+b\int_0^L\left[\psi_x\overline{\tilde{\psi}_x}\right]dx. \quad (3.31)\end{aligned}$$

Notemos que a sesquilinearidade da aplicação a segue das propriedades do produto interno em L^2, isto é, das propriedades de integral e de conjugado de um número complexo. Agora, mostremos que a é uma forma sesquilinear contínua e coerciva.

a) a é contínua em $\mathcal{V}$.

De fato, considere $(\varphi,\psi,w),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w})\in\mathcal{V}$. Segue das desigualdades Triangular e de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned}|\ a((\varphi,\psi,w),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w}))\ | &\leq k||\varphi_x+\psi+lw||_{L^2}||\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}+l\tilde{w}||_{L^2}\\ &+ k_0||w_x-l\varphi||_{L^2}||\tilde{w}_x-l\tilde{\varphi}||_{L^2}+b||\psi_x||_{L^2}||\tilde{\psi}_x||_{L^2}\\ &= k||\varphi_x+\psi+lw||_{L^2}\left(\frac{1}{k}\right)k||\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}+l\tilde{w}||_{L^2}\\ &+ k_0||w_x-l\varphi||_{L^2}\left(\frac{1}{k_0}\right)k_0||\tilde{w}_x-l\tilde{\varphi}||_{L^2}\\ &+ b||\psi_x||_{L^2}\left(\frac{1}{b}\right)b||\tilde{\psi}_x||_{L^2}\\ &\leq 3c_1||(\varphi,\psi,w)||_{\mathcal{V}}||(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w})||_{\mathcal{V}},\end{aligned}$$

com $c_1=max\{\frac{1}{k},\frac{1}{k_0},\frac{1}{b}\}$. Como as normas são equivalentes em $\mathcal{V}$, obtemos:

$$|\ a((\varphi,\psi,w),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w}))\ |\leq c_2|(\varphi,\psi,w)|_{\mathcal{V}}|(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w})|_{\mathcal{V}}.$$

Portanto, $a((\varphi,\psi,w),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w}))$ é contínua.

b) a é coerciva.

Com efeito, seja $(\varphi,\psi,w)\in\mathcal{V}$, notemos que

$$a((\varphi,\psi,w),(\varphi,\psi,w)) = k||\varphi_x+\psi+lw||^2+k_0||w_x-l\varphi||^2+b||\psi_x||^2.$$

Como as normas são equivalentes em $\mathcal{V}$, existe um $c_3>0$, tal que

$$a((\varphi,\psi,w),(\varphi,\psi,w)) \geq c_3|(\varphi,\psi,w)|^2_{\mathcal{V}}.$$

Portanto, $a((\varphi,\psi,w),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w}))$ é coerciva.

Considere agora, o funcional antilinear $\lambda:\mathcal{V}\to\mathbb{C}$ dado por

$$\lambda(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w}) \;=\; -\int_0^L\left[g_1\overline{\tilde{\varphi}}+g_2\overline{\tilde{\psi}}+g_3\overline{\tilde{w}}\right]dx. \tag{3.32}$$

Notemos que λ é um funcional contínuo, pois utilizando as desigualdades de Holder e de Poincaré, além da Observação 3, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mid\lambda(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w})\mid &\leq \|g_1\|\|\tilde{\varphi}\|+\|g_2\|\|\tilde{\psi}\|+\|g_3\|\|\tilde{w}\|\\
&\leq A_1c_p\|\tilde{\varphi}_x\|+A_2c_p\|\tilde{\psi}_x\|+A_3c_p\|\tilde{w}_x\|\\
&\leq M\big(\|\tilde{\varphi}_x\|+\|\tilde{\psi}_x\|+\|\tilde{w}_x\|\big)\\
&= M\big(\|\tilde{\varphi}\|_{H_0^1}+\|\tilde{\psi}\|_{H_*^1}+\|\tilde{w}\|_{H_*^1}\big)\\
&= M\|(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w})\|_{\mathcal{V}},
\end{aligned}$$

para todo $(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w})\in\mathcal{V}$, com

$$\begin{aligned}
A_1 &= \|g_1\|,\\
A_2 &= \|g_2\|,\\
A_3 &= \|g_3\|,\\
M &= \max\Big\{A_1c_p,A_2c_p,A_3c_p\Big\}.
\end{aligned}$$

Desse modo, pelo Teorema 2.22, existe um único $(\varphi,\psi,w)\in\mathcal{V}$, tal que

$$a((\varphi,\psi,w),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w})) = \lambda((\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w})),$$

para todo $(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w})\in\mathcal{V}$, isto é, existe uma única $(\varphi,\psi,w)\in\mathcal{V}$ que satisfaz

$$\begin{aligned}
&k\int_0^L\left[(\varphi_x+\psi+lw)\overline{(\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}+l\tilde{w})}\right]dx+k_0\int_0^L\left[(w_x-l\varphi)\overline{(\tilde{w}_x-l\tilde{\varphi})}\right]dx\\
+\;\; &b\int_0^L\left[\psi_x\overline{\tilde{\psi}_x}\right]dx = -\int_0^L\left[g_1\overline{\tilde{\varphi}}+g_2\overline{\tilde{\psi}}+g_3\overline{\tilde{w}}\right]dx,
\end{aligned} \tag{3.33}$$

para todo $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{w}) \in \mathcal{V}$.
Considere em (3.33) os casos particulares $\tilde{\varphi} = \xi \in C_0^1 \subset H_0^1$ e $\tilde{\psi} = \tilde{w} = 0$, e assim, obtemos:

$$\int_0^L \Big[k(\varphi_x + \psi + lw)\overline{\xi}_x - k_0 l(w_x - l\varphi)\overline{\xi}\Big]\,dx = -\int_0^L g_1\overline{\xi}\,dx,$$

ou seja,

$$\int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw)\overline{\xi}_x\,dx = -\int_0^L \big[g_1 - k_0 l(w_x - l\varphi)\big]\overline{\xi}\,dx, \ \forall \xi \in C_0^1.$$

Da definição de derivada fraca, obtemos que

$$\big[k(\varphi_x + \psi + lw)\big]_x = \underbrace{g_1}_{\in L^2} - \underbrace{k_0 l(w_x - l\varphi)}_{\in L^2} \in L^2. \tag{3.34}$$

Assim, obtemos que $k(\varphi_x + \psi + lw) \in H^1$ e desse modo

$$\varphi_x = \frac{k}{k}\underbrace{\Big(\varphi_x + \psi + lw\Big)}_{\in H^1} - \underbrace{(\psi + lw)}_{\in H^1_* \subset H^1}.$$

Portanto, $\varphi \in H^2 \cap H_0^1$ e vale (3.28).
Considere $f \in H^1$ e $\tilde{\psi}$ dada por:

$$\tilde{\psi} = f - \frac{1}{L}\int_0^L f(s)\,ds. \tag{3.35}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^L \tilde{\psi}(x)\,dx &= \int_0^L \Big[f(x) - \frac{1}{L}\int_0^L f(s)\,ds\Big]\,dx \\
&= \int_0^L f(x)\,dx - \frac{1}{L}\int_0^L \Big[\int_0^L f(s)\,ds\Big]\,dx \\
&= \int_0^L f(x)\,dx - \frac{1}{L}\int_0^L f(s)\,ds \underbrace{\int_0^L 1\,dx}_{=L} \\
&= \int_0^L f(x)\,dx - \int_0^L f(s)\,ds \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{\psi} \in H^1_*$. Agora, considere $\tilde{\psi}$ dada em (3.35) e $\tilde{\varphi} = \tilde{w} = 0$. Da equação (3.33), obtemos que:

$$\int_0^L \Big[\underbrace{k(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\Big(f-\frac{1}{L}\int_0^L f(s)\,ds\Big)}}_{I_1}+b\psi_x\overline{f_x}\Big]\,dx=-\int_0^L \underbrace{\Big[g_2\overline{\Big(f-\frac{1}{L}\int_0^L f(s)\,ds\Big)}\Big]}_{I_2}\,dx. \tag{3.36}$$

Desse modo, notemos que (I_1) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \Big[k(\varphi_x+\psi+lw)\overline{f}\Big]\,dx-\int_0^L \Big[k(\varphi_x+\psi+lw)\Big]\overline{\frac{1}{L}\Big(\int_0^L f(s)\,ds\Big)}\,dx\\
=\;&\int_0^L \Big[k(\varphi_x+\psi+lw)\overline{f}\Big]\,dx-\overline{\frac{1}{L}\Big(\int_0^L f(s)\,ds\Big)}\int_0^L \Big[k(\varphi_x+\psi+lw)\Big]\,dx\\
=\;&\int_0^L \Big[k(\varphi_x+\psi+lw)\overline{f}\Big]\,dx-\overline{\frac{1}{L}\Big(\int_0^L f(s)\,ds\Big)}\Big[k\,\underbrace{(\varphi(L)-\varphi(0))}_{=0}+\int_0^L k\,\underbrace{(\psi+lw)}_{\in H^1_*}\,dx\Big]\\
=\;&\int_0^L \Big[k(\varphi_x+\psi+lw)\overline{f}\Big]\,dx
\end{aligned}$$

Da mesma maneira, podemos encontrar (I_2) escrita por

$$-\int_0^L \Big[g_2\overline{\Big(f-\frac{1}{L}\int_0^L f(s)\,ds\Big)}\Big]\,dx=-\int_0^L \underbrace{(g_2)}_{\in L^2_*}\overline{f}\,dx.$$

Assim, substituindo em (3.36), obtemos que

$$\int_0^L b\psi_x\overline{f_x}\,dx=-\int_0^L \Big[k(\varphi_x+\psi+lw)+g_2\Big]\overline{f}\,dx \quad \forall\ f\ \in\ H^1. \tag{3.37}$$

Da definição de derivada fraca, obtemos que

$$\underbrace{\big(b\psi_x\big)_x}_{=b\psi_{xx}}=k\,\underbrace{(\varphi_x+\psi+lw)}_{\in L^2}+\underbrace{g_2}_{\in L^2}\ \in\ L^2. \tag{3.38}$$

Portanto, $\psi\ \in\ H^2\cap H^1_*$ e da equação (3.38), vale (3.29). Além disso, note que $\psi_x\ \in\ H^1_0$. De fato, como $f\in H^1$ em (3.37), em particular, fazendo $f=\xi\in C^1$ em (3.37), obtemos então

$$\int_0^L b\psi_x\overline{\xi_x}\,dx=-\int_0^L \Big[k(\varphi_x+\psi+lw)+g_2\Big]\overline{\xi}\,dx \quad \forall\ \xi\ \in\ C^1,$$

e integrando por partes, obtemos que

$$b\psi_x\overline{\xi}\Big|_0^L-\int_0^L b\psi_{xx}\overline{\xi}\,dx=-\int_0^L \Big[k(\varphi_x+\psi+lw)+g_2\Big]\overline{\xi}\,dx.$$

Assim, temos

$$b\psi_x\overline{\xi}\Big|_0^L = \int_0^L \underbrace{\Big[b\psi_{xx}\overline{\xi} - k(\varphi_x + \psi + lw) - g_2\Big]}_{=0}\overline{\xi}\,dx,$$

onde obtemos

$$b\psi_x\overline{\xi}\Big|_0^L = b\big[\psi_x(L)\overline{\xi}(L) - \psi_x(0)\overline{\xi}(0)\big] = 0 \quad \forall\, \xi \,\in\, C^1. \tag{3.39}$$

Em particular, se $\xi \in C^1$, tal que, $\xi(L) = 0$ e $\xi(0) = 1$, obtemos de (3.39) que

$$\psi_x(0) = 0.$$

Para $\xi \in C^1$, tal que, $\xi(L) = 1$ e $\xi(0) = 0$, obtemos de (3.39) que

$$\psi_x(L) = 0.$$

Portanto, $\psi_x \in H_0^1$.
Por fim, considere $g \in H^1$ e $\tilde{w}$ dada por:

$$\tilde{w} = g - \frac{1}{L}\int_0^L g(s)\,ds. \tag{3.40}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^L \tilde{w}(x)\,dx &= \int_0^L \Big[g(x) - \frac{1}{L}\int_0^L g(s)\,ds\Big]\,dx \\
&= \int_0^L g(x)\,dx - \frac{1}{L}\int_0^L \Big[\int_0^L g(s)\,ds\Big]\,dx \\
&= \int_0^L g(x)\,dx - \frac{1}{L}\int_0^L g(s)\,ds \underbrace{\int_0^L 1\,dx}_{=L} \\
&= \int_0^L g(x)\,dx - \int_0^L g(s)\,ds \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{w} \in H_*^1$. Agora, considere $\tilde{w}$ dada em (3.40) e $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} = 0$. Da equação (3.33), obtemos que:

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \Big[\underbrace{kl(\varphi_x + \psi + lw)\overline{\Big(g - \frac{1}{L}\int_0^L g(s)\,ds\Big)}}_{I_1} + k_0(w_x - l\varphi)\overline{g_x}\Big]\,dx \\
= \;& -\int_0^L \underbrace{\Big[g_3\overline{\Big(g - \frac{1}{L}\int_0^L g(s)\,ds\Big)}\Big]}_{I_2}\,dx.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Dessa forma, note que (I_1) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \Big[kl(\varphi_x+\psi+lw)\overline{g}\Big]\,dx - \int_0^L \Big[kl(\varphi_x+\psi+lw)\Big]\overline{\frac{1}{L}\Big(\int_0^L g(s)\,ds\Big)}\,dx \\
= & \int_0^L \Big[kl(\varphi_x+\psi+lw)\overline{g}\Big]\,dx - \overline{\frac{1}{L}\Big(\int_0^L g(s)\,ds\Big)}\int_0^L \Big[kl(\varphi_x+\psi+lw)\Big]\,dx \\
= & \int_0^L \Big[kl(\varphi_x+\psi+lw)\overline{g}\Big]\,dx - \overline{\frac{1}{L}\Big(\int_0^L g(s)\,ds\Big)}\Big[kl\underbrace{\big(\varphi(L)-\varphi(0)\big)}_{=0} + \int_0^L kl\underbrace{(\psi+lw)}_{\in H^1_*}\,dx\Big] \\
= & \int_0^L \Big[kl(\varphi_x+\psi+lw)\overline{g}\Big]\,dx.
\end{aligned}$$

Do mesmo modo, podemos encontrar (I_2) escrita por

$$-\int_0^L \Big[g_3\overline{\Big(g-\frac{1}{L}\int_0^L g(s)\,ds\Big)}\Big]\,dx = -\int_0^L \underbrace{(g_3)}_{\in L^2_*}\,g\,dx.$$

Assim, substituindo em (3.41), obtemos que

$$\int_0^L k_0(w_x-l\varphi)\overline{g_x}\,dx = -\int_0^L \Big[kl(\varphi_x+\psi+lw)+g_3\Big]\overline{g}\,dx \quad \forall\ g\ \in\ H^1. \tag{3.42}$$

Pela definição de derivada fraca, temos que

$$\underbrace{\big(k_0(w_x-l\varphi)\big)_x}_{=k_0(w_x-l\varphi)_x} = kl\underbrace{(\varphi_x+\psi+lw)}_{\in L^2}+\underbrace{g_3}_{\in L^2}\ \in\ L^2. \tag{3.43}$$

Portanto, $w\ \in\ H^2\cap H^1_*$ e da equação (3.43), vale (3.30). Além disso, note que $w_x\ \in\ H^1_0$. Com efeito, como $g\in H^1$ em (3.42), em particular, fazendo $g=\xi\in C^1$ em (3.42), onde temos então

$$\int_0^L k_0(w_x-l\varphi)\overline{\xi_x}\,dx = -\int_0^L \Big[kl(\varphi_x+\psi+lw)+g_3\Big]\overline{\xi}\,dx \quad \forall\ \xi\ \in\ C^1,$$

e integrando por partes, temos que

$$k_0(w_x-l\varphi)\overline{\xi}\Big|_0^L - \int_0^L k_0(w_x-l\varphi)_x\overline{\xi}\,dx = -\int_0^L \Big[kl(\varphi_x+\psi+lw)+g_3\Big]\overline{\xi}\,dx.$$

Assim, obtemos

$$k_0(w_x-l\varphi)\overline{\xi}\Big|_0^L = \int_0^L \underbrace{\Big[k_0(w_x-l\varphi)_x-kl(\varphi_x+\psi+lw)-g_3\Big]}_{=0}\,\overline{\xi}\,dx,$$

onde temos

$$\begin{aligned}
k_0(w_x - l\varphi)\overline{\xi}\Big|_0^L &= k_0\big[(w_x - l\varphi)(L)\overline{\xi}(L) - (w_x - l\varphi)(0)\overline{\xi}(0)\big] &(3.44)\\
&= k_0\big[w_x(L)\overline{\xi}(L) - l\underbrace{\varphi(L)}_{\in H_0^1}\overline{\xi}(L) - (w_x(0)\overline{\xi}(0) - l\underbrace{\varphi(0)}_{\in H_0^1}\overline{\xi}(0)\big] &(3.45)\\
&= k_0\big[w_x(L)\overline{\xi}(L) - w_x(0)\overline{\xi}(0)\big] &(3.46)\\
&= 0, \quad \forall\, \xi \in C^1. &(3.47)
\end{aligned}$$

Em particular, se $\xi \in C^1$, tal que, $\xi(L) = 0$ e $\xi(0) = 1$, temos de (3.44) que

$$w_x(0) = 0.$$

Para $\xi \in C^1$, tal que, $\xi(L) = 1$ e $\xi(0) = 0$, temos de (3.44) que

$$w_x(L) = 0.$$

Portanto, $w_x \in H_0^1$. $\square$

Teorema 3.9. *Seja* $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *dado em* (3.24)-(3.25). *Então,* $0 \in \rho(A)$.

Demonstração. Para toda $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \in \mathcal{H}$, devemos mostrar que existe uma única

$$U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W) \in D(A),$$

tal que $AU = F$, ou seja, o operador A é invertível e que A^{-1} é um operador limitado.
Em termos de componentes, temos

$$AU = \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw)_x + \frac{k_0 l}{\rho_1}(w_x - l\varphi) \\ \Psi \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + lw) - \frac{\gamma_2}{\rho_2}\Psi \\ W \\ \frac{k_0}{\rho_1}(w_x - l\varphi)_x - \frac{kl}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw) - \frac{\gamma_3}{\rho_1}W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{pmatrix} = F.$$

Assim, o objetivo é encontrar um único $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W) \in D(A)$ que satisfaz

$$\Phi = f_1, \tag{3.48}$$

$$k(\varphi_x + \psi + lw)_x + k_0 l(w_x - l\varphi) = \rho_1 f_2, \tag{3.49}$$

$$\Psi = f_3, \tag{3.50}$$

$$b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + lw) = \rho_2 f_4 + \gamma_2 \Psi, \tag{3.51}$$

$$W = f_5, \tag{3.52}$$

$$k_0(w_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x + \psi + lw) = \rho_1 f_6 + \gamma_3 W. \tag{3.53}$$

Assim, considere

$$\Phi = f_1 \in H_0^1(0,L),\ \Psi = f_3 \in H_*^1(0,L)\ \text{e}\ W = f_5 \in H_*^1(0,L). \tag{3.54}$$

Por outro lado, considere

$$\begin{aligned} g_1 &= \rho_1 f_2, \\ g_2 &= \rho_2 f_4 + \gamma_2 \Psi, \\ g_3 &= \rho_1 f_6 + \gamma_3 W. \end{aligned}$$

Como $g_1 \in L^2$ e $g_2, g_3 \in L_*^2$, pelo Lema 3.8, o sistema

$$k(\varphi_x + \psi + lw)_x + k_0 l(w_x - l\varphi) = \rho_1 f_2, \tag{3.55}$$

$$b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + lw) = \rho_2 f_4 + \gamma_2 \Psi, \tag{3.56}$$

$$k_0(w_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x + \psi + lw) = \rho_1 f_6 + \gamma_3 W, \tag{3.57}$$

possui uma única solução $(\varphi, \psi, w) \in \left(H_0^1 \cap H^2\right) \times \left(H_*^1 \cap H^2\right) \times \left(H_*^1 \cap H^2\right)$.
Portanto, segue das equações (3.54)-(3.57), que para toda $F \in \mathcal{H}$, existe uma única solução $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W) \in D(A)$, tal que $AU = F$. Portanto, o operador A^{-1} existe.

Agora, resta mostrar que o operador A^{-1} é limitado . Multiplicando (3.55), (3.56) e (3.57) por $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$ e $\overline{w}$ respectivamente, e integrando no intervalo $[0, L]$, obtemos

$$\begin{aligned} k||\varphi_x + \psi + lw||_{L^2}^2 + k_0||w_x - l\varphi||_{L^2}^2 + b||\psi_x||_{L^2}^2 = \\ -\int_0^L (\rho_1 f_2 \overline{\varphi})\,dx - \int_0^L (\rho_2 f_4 \overline{\psi} + \gamma_2 \Psi \overline{\psi})\,dx - \int_0^L (\rho_1 f_6 \overline{w} + \gamma_3 W \overline{w})\,dx. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Assim, da equação (3.58), obtemos

$$\begin{aligned} ||U||_{\mathcal{H}}^2 &= \rho_1||\Phi||_{L^2}^2 + \rho_2||\Psi||_{L^2}^2 + \rho_1||W||_{L^2}^2 \\ &- \int_0^L (\rho_1 f_2 \overline{\varphi})\,dx - \int_0^L (\rho_2 f_4 \overline{\psi} + \gamma_2 \Psi \overline{\psi})\,dx - \int_0^L (\rho_1 f_6 \overline{w} + \gamma_3 W \overline{w})\,dx. \end{aligned}$$

Note, de (3.54), que

$$\begin{aligned}||U||_{\mathcal{H}}^2 &\leq \rho_1||f_1||_{L^2}^2+\rho_2||f_3||_{L^2}^2+\rho_1||f_5||_{L^2}^2\\ &+ \Big|-\int_0^L(\rho_1 f_2\overline{\varphi})\,dx-\int_0^L(\rho_2 f_4\overline{\psi}+\gamma_2 f_3\overline{\psi})\,dx-\int_0^L(\rho_1 f_6\overline{w}+\gamma_3 f_5\overline{w})\,dx\Big|.\end{aligned}$$

Utilizando as desigualdades Triangular e de Cauchy-Schwars, obtemos então

$$\begin{aligned}||U||_{\mathcal{H}}^2 &\leq c(||f_1||_{L^2}^2+||f_3||_{L^2}^2+||f_5||_{L^2}^2+||f_2||_{L^2}||\varphi||_{L^2}+||f_4||_{L^2}||\psi||_{L^2})\\ &+ c(||f_3||_{L^2}||\psi||_{L^2}+||f_6||_{L^2}||w||_{L^2}+||f_5||_{L^2}||w||_{L^2}),\end{aligned}\tag{3.59}$$

onde $c = max\{\rho_1,\rho_2,\gamma_2,\gamma_3\}$. Agora, utilizando a equivalência das normas $|U|_{\mathcal{H}}$ e $||U||_{\mathcal{H}}$ e a Desigualdade de Poincaré

$$\begin{aligned}c(||f_2||_{L^2}||\varphi||_{L^2}+||f_4||_{L^2}||\psi||_{L^2}+||f_6||_{L^2}||w||_{L^2}) &\leq c_pc||f_2||_{L^2}||\varphi_x||_{L^2}+c_pc||f_4||_{L^2}||\psi_x||_{L^2}\\ &+ c_pc||f_6||_{L^2}||w_x||_{L^2}\\ &\leq 3c_pc|U|_{\mathcal{H}}|F|_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

Desse modo, existe $c_1 = c_pc\sigma^2 > 0$ onde $\sigma > 0$ é a constante que satisfaz a desigualdade de equivalência das normas, ou seja, $|U|_{\mathcal{H}} \leq \sigma||U||_{\mathcal{H}}$, tal que

$$c(||f_2||_{L^2}||\varphi||_{L^2}+||f_4||_{L^2}||\psi||_{L^2}+||f_6||_{L^2}||w||_{L^2}) \leq 3c_1||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}.\tag{3.60}$$

Agora, utilizando a Desigualdade de Poincaré, obtemos

$$c||f_1||_{L^2}||\varphi||_{L^2} \leq c_{p1}c||f_1||_{L^2}||\varphi_x||_{L^2} \leq c_{p2}c_{p1}c||f_{1,x}||_{L^2}||\varphi_x||_{L^2} \leq c_{p2}c_{p1}c|U|_{\mathcal{H}}|F|_{\mathcal{H}}.$$

Assim, existe $c_2 = c_{p2}c_{p1}c\sigma^2$ de modo que

$$c||f_1||_{L^2}||\varphi||_{L^2} \leq c_2||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}.\tag{3.61}$$

Por outro lado, notemos que da Desigualdade de Poincaré, segue que

$$\begin{aligned}c(||f_1||_{L^2}^2+||f_3||_{L^2}^2+||f_5||_{L^2}^2) &\leq c_{p3}c(||f_{1,x}||_{L^2}^2+||f_{3,x}||_{L^2}^2+||f_{5,x}||_{L^2}^2)\\ &\leq c_{p3}c|F|_{\mathcal{H}}^2.\end{aligned}$$

Assim, existe $c_3 = c_{p3}c\sigma^2 > 0$ de modo que

$$c(||f_1||_{L^2}^2+||f_3||_{L^2}^2+||f_5||_{L^2}^2) \leq c_3||F||_{\mathcal{H}}^2.\tag{3.62}$$

Agora, substituindo as equações (3.60), (3.61) e (3.62) em (3.59), obtemos então

$$||U||^2_{\mathcal{H}} \leq c_3||F||^2_{\mathcal{H}} + (3c_1 + c_2)||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}.$$

Assim, existe $c_4 = max\{c_3, (3c_1 + c_2)\} > 0$ tal que

$$||U||^2_{\mathcal{H}} \leq c_4||F||^2_{\mathcal{H}} + c_4||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}. \tag{3.63}$$

Agora, usando a Desigualdade de Young, obtemos

$$(c_4||F||_{\mathcal{H}})||U||_{\mathcal{H}} \leq \Big(\frac{c_4^2}{2}\Big)||F||^2_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}||U||^2_{\mathcal{H}}. \tag{3.64}$$

Substituindo (3.64) em (3.63), temos

$$||U||^2_{\mathcal{H}} \leq c_4||F||^2_{\mathcal{H}} + \Big(\frac{c_4^2}{2}\Big)||F||^2_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}||U||^2_{\mathcal{H}}.$$

Assim, obtemos que

$$||U||^2_{\mathcal{H}} \leq 2\Big(c_4 + \frac{c_4^2}{2}\Big)||F||^2_{\mathcal{H}}.$$

Assim, fazendo $C = \sqrt{2\Big(c_4 + \frac{c_4^2}{2}\Big)} > 0$, obtemos então

$$||U||_{\mathcal{H}} \leq C||F||_{\mathcal{H}}.$$

Logo, o operador A^{-1} é limitado. Portanto, $0 \in \rho(A)$. □

Teorema 3.10. *Se $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é dado em* (3.24)-(3.25). *Então, A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações sobre $\mathcal{H}$.*

Demonstração. Note que pelo Teorema 2.72 devemos mostrar que A é dissipativo em $\mathcal{H}$, que existe $\lambda_0 > 0$ tal que $Im(\lambda_0 I - A) = \mathcal{H}$ e que $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$. Pelo Teorema 3.7, temos que A é dissipativo em $\mathcal{H}$. Agora, definindo S como o operador identidade de $\mathcal{H}$, temos que S é linear, limitado e inversível com $||S||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = ||S^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = 1$. Ainda, defina $B = \lambda_0(-A)^{-1}$ e notemos que do Teorema 3.9, temos que B é linear e limitado para todo $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Agora, se

$$|\lambda_0| < \frac{1}{||(-A)^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}}, \tag{3.65}$$

então obtemos

$$||B||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = |\lambda_0|||(-A)^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < 1 = \frac{1}{||S^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}}.$$

Logo, do Teorema 2.23, segue que se λ_0 satisfaz (3.65), então $S + B = I + \lambda_0(-A)^{-1}$ é um operador linear, limitado e inversível. Além disso, obtemos que o operador $\lambda_0 I - A$ é bijetor, por poder ser escrito como composição de operadores bijetores, ou seja

$$\lambda_0 I - A = -A(I + \lambda_0(-A)^{-1}).$$

Portanto, existe $\lambda_0 > 0$ de modo que $Im(\lambda_0 I - A) = \mathcal{H}$ e, do Teorema 2.70, obtemos que $\lambda_0 I - A$ é sobrejetor para qualquer real $\lambda_0 > 0$, em particular, se fizermos $\lambda_0 = 1$. Logo, do Teorema 2.71, obtemos que $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$.
Portanto, A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $T(t) = e^{At}$ em $\mathcal{H}$. □

Agora, podemos concluir o resultado de existência e unicidade de solução para o P.V.I (3.23).

Teorema 3.11. *Se $U_0 \in D(A)$, então o problema* (3.23) *admite uma única solução*

$$U \in C([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), \mathcal{H}).$$

Demonstração. A demonstração segue imediatamente dos Teoremas 2.74 e 3.10. □

3.2 Estabilidade Exponencial

Esta seção tem como objetivo mostrar que o problema (3.1)-(3.3) com as condições iniciais e de contorno (3.4) e (3.5), respectivamente, é exponencialmente estável, considerando que:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b}. \tag{3.66}$$

Para tanto, vamos mostrar que que o semigrupo associado ao sistema (3.1)-(3.5) satisfaz as hipóteses do Teorema 2.76, isto é, devemos mostrar que

$$i\mathbb{R} \subset \rho(A)$$

e

$$\lim_{\beta \to \infty} \sup \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty.$$

Para isso, vamos considerar a equação resolvente

$$i\beta U - AU = F, \tag{3.67}$$

com $\beta \in \mathbb{R}$, $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W) \in D(A)$, $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \in \mathcal{H}$ e A é definido em (3.24).

Assim, podemos escrever (3.67) em termos de suas componentes, como a seguir

$$i\beta\varphi - \Phi = f_1, \tag{3.68}$$
$$i\beta\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) = \rho_1 f_2, \tag{3.69}$$
$$i\beta\psi - \Psi = f_3, \tag{3.70}$$
$$i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma_2\Psi = \rho_2 f_4, \tag{3.71}$$
$$i\beta w - W = f_5, \tag{3.72}$$
$$i\beta\rho_1 W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma_3 W = \rho_1 f_6. \tag{3.73}$$

Para mostrar que a solução decai exponencialmente, serão utilizados os seguintes resultados.

Lema 3.12. *Seja $A : D(A) \to \mathcal{H}$ o operador definido em* (3.25)*. Então, todos os valores espectrais de A são autovalores de A.*

Demonstração. Considere $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde $U_n = (\varphi^{(n)}, \Phi^{(n)}, \psi^{(n)}, \Psi^{(n)}, w^{(n)}, W^{(n)})$ é sequência limitada na norma do gráfico em $D(A)$. Vejamos que

$$\begin{aligned}
||U_n||_{D(A)} &= |U_n|_{\mathcal{H}} + |AU|_{\mathcal{H}} \qquad (3.74)\\
&= ||\varphi_x^{(n)}||_{L^2}^2 + ||\Phi^{(n)}||_{L^2}^2 + ||\psi_x^{(n)}||_{L^2}^2 + ||\Psi^{(n)}||_{L^2}^2 + ||w_x^{(n)}||_{L^2}^2 + ||W^{(n)}||_{L^2}^2\\
&+ ||\Phi_x^{(n)}||_{L^2}^2 + \frac{1}{\rho_1}||k(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)})_x + k_0 l(w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)})||_{L^2}^2\\
&+ ||\Psi_x^{(n)}||_{L^2}^2 + \frac{1}{\rho_2}||b\psi_{xx}^{(n)} - k(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)}) - \gamma_2\Psi^{(n)}||_{L^2}^2\\
&+ ||W_x^{(n)}||_{L^2}^2 + \frac{1}{\rho_1}||k_0(w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)})_x - kl(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)}) - \gamma_3 W^{(n)}||_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Primeiro, provemos que as sequências $\{\varphi_{xx}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\psi_{xx}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{w_{xx}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ são limitadas em L^2. Tome a norma de $\varphi_{xx}^{(n)}$ em L^2, somando e subtraindo os termos necessários, utilizando a Desigualdade Triangular e a Proposição 2.52, temos

$$\begin{aligned}
||\varphi_{xx}^{(n)}||_{L^2}^2 &= ||(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)})_x - \psi_x^{(n)} - lw_x^{(n)}||_{L^2}^2\\
&\leq 2||(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)})_x||_{L^2}^2 + 2||\psi_x^{(n)} + lw_x^{(n)}||_{L^2}^2\\
&\leq \frac{4}{k}||(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)})_x + k_0 l(w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)})||_{L^2}^2 + \frac{4}{k}||k_0 l(w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)})||_{L^2}^2\\
&+ 4||\psi_x^{(n)}||_{L^2}^2 + 4l^2||w_x^{(n)}||_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Agora, utilizando as Desigualdades Triangular e de Poincaré, segue de (3.74) que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$||\varphi_{xx}^{(n)}||_{L^2}^2 = C||U_n||_{D(A)}. \tag{3.75}$$

Como $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, segue que a sequência $\{\varphi_{xx}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em L^2.

De modo análogo, é possível mostrar que $\{\psi_{xx}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{w_{xx}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ também são limitadas em L^2.
Agora, vamos mostrar que a sequência $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente em $\mathcal{H}$.
(1) A sequência $\{\varphi^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em H^2. Como a aplicação inclusão

$$i:(H^2,||\cdot||_{H^2})\to(H^1,||\cdot||_{H^1})$$

é compacta, pela Proposição 2.47, existem uma subsequência $\{\varphi^{(n_k)}\}_{n_k\in\mathbb{N}_1\subset\mathbb{N}}$ e uma função $\varphi\in H^1$ tais que

$$||\varphi^{(n_k)}-\varphi||_{H^1}\to 0.$$

Assim, como $\varphi^{(n_k)}\in H_0^1$ para todo $k\in\mathbb{N}$ e $(H_0^1,||\cdot||_{H^1})$ é completo, segue que $\varphi\in H_0^1$.
(2) A sequência $\{\Phi^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}_1}$ é limitada em H^1. A aplicação inclusão

$$i:(H^1,||\cdot||_{H^1})\to(C([0,L]\,,\mathbb{R}),||\cdot||_{\infty})$$

é compacta, pela Proposição 2.47, existem uma subsequência $\{\Phi^{(n_k)}\}_{n_k\in\mathbb{N}_2\subset\mathbb{N}_1}$ e uma função $\Phi\in C([0,L]\,,\mathbb{R})$ tais que

$$||\Phi^{(n_k)}-\Phi||_{\infty}\to 0.$$

Mas como

$$0\le ||\Phi^{(n_k)}-\Phi||_{L^2}^2=\int_0^L|\Phi^{(n_k)}-\Phi|^2\,dx\le L||\Phi^{(n_k)}-\Phi||_{\infty}\to 0,$$

então $\Phi\in L^2$ e

$$||\Phi^{(n_k)}-\Phi||_{L^2}^2\to 0.$$

(3) A sequência $\{\psi^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}_2}$ é limitada em H^2. Assim como em (1), existem uma subsequência $\{\psi^{(n_k)}\}_{n_k\in\mathbb{N}_3\subset\mathbb{N}_2}$ e uma função $\psi\in H^1$ tais que

$$||\psi^{(n_k)}-\psi||_{H^1}\to 0.$$

Como $\psi^{(n_k)}\in H_*^1$ e $(H_*^1,||\cdot||_{H^1})$ é completo, segue que $\psi\in H_*^1$.
(4) A sequência $\{\Psi^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}_3}$ é limitada em H^1. Assim como em (2), existem uma subsequência $\{\Psi^{(n_k)}\}_{n_k\in\mathbb{N}_4\subset\mathbb{N}_3}$ e uma função $\Psi\in L^2$ tais que

$$||\Psi^{(n_k)}-\Psi||_{L^2}^2\to 0.$$

Como $\Psi^{(n_k)}\in L_*^2$ e $(L_*^2,||\cdot||_{L^2})$ é completo, segue que $\Psi\in L_*^2$.
(5) A sequência $\{w^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}_4}$ é limitada em H^2. Assim como em (1), existem uma subsequência $\{w^{(n_k)}\}_{n_k\in\mathbb{N}_5\subset\mathbb{N}_4}$ e uma função $w\in H^1$ tais que

$$||w^{(n_k)}-w||_{H^1}\to 0.$$

Como $w^{(n_k)} \in H^1_*$ e $(H^1_*, ||\cdot||_{H^1})$ é completo, segue que $w \in H^1_*$.
(6) A sequência $\{W^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}_5}$ é limitada em H^1. Assim como em (2), existem uma subsequência $\{W^{(n_k)}\}_{n_k\in\mathbb{N}_6\subset\mathbb{N}_5}$ e uma função $W \in L^2$ tais que

$$||W^{(n_k)} - W||^2_{L^2} \to 0.$$

Como $W^{(n_k)} \in L^2_*$ e $(L^2_*, ||\cdot||_{L^2})$ é completo, segue que $W \in L^2_*$.
Assim, dos itens $(1)-(6)$, existem $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W) \in \mathcal{H}$ e $\mathbb{N}_6 \subset \mathcal{H}$ tais que a sequência $\{U_{n_k}\}_{n_k\in\mathbb{N}_6}$ converge para U no espaço $(\mathcal{H}, ||\cdot||_{\mathcal{H}})$.
Desse modo, dada uma sequência $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitada em $D(A)$, esta possui uma subsequência convergente em $\mathcal{H}$, isto é, pela Definição 2.13 a aplicação

$$i : (D(A), ||\cdot||_{D(A)}) \to (\mathcal{H}, |\cdot|_{\mathcal{H}})$$

é compacta. Portanto, pela Proposição 2.30 e pela Proposição 2.32 segue que todos os valores espectrais de A são autovalores de A. □

Lema 3.13. *Seja A definido em* (3.25)*. Então, $i\beta \subset \rho(A)$.*

Demonstração. Suponha que $i\mathbb{R} \not\subseteq \rho(A)$. Assim, existe $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ (pois $0 \in \rho(A)$) tal que $i\beta \in \sigma(A)$. Pelo Lema 3.12 temos que $i\beta$ é um autovalor de A, então deve existir um autovetor $U \in D(A)$, que satisfaz a equação resolvente $i\beta U - AU = 0$.
Assim, considerando na equação resolvente $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = f_6 = 0$, multiplicando as equações (3.68), (3.70) e (3.72) por $-k\overline{(\varphi_x + \psi + lw)_x}$, $-b\overline{\psi_{xx}}$ e $k_0\overline{(w_x - l\varphi)_x}$ e as equações (3.69), (3.71) e (3.73) por $\overline{\Phi}$, $\overline{\Psi}$ e $\overline{W}$ respectivamente. Além disso, integrando no intervalo $[0, L]$ e considerando a parte real, temos:

$$\begin{aligned}
& Re\big[-i\beta k \underbrace{\int_0^L \varphi\overline{(\varphi_x+\psi+lw)_x}\,dx}_{=i_1} + i\beta\rho_1\int_0^L |\Phi|^2\,dx - k_0 l \underbrace{\int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{\Phi}\,dx}_{=i_2}\big]\\
+ \quad & Re\big[-i\beta b \underbrace{\int_0^L \psi\overline{\psi_{xx}}\,dx}_{=i_3} + i\beta\rho_2\int_0^L |\Psi|^2\,dx + k \underbrace{\int_0^L (\varphi_x+\psi+lw)\overline{\Psi}\,dx}_{=i_4}\big]\\
+ \quad & Re\big[-i\beta k_0 \underbrace{\int_0^L w\overline{(w_x-l\varphi)_x}\,dx}_{=i_5} + i\beta\rho_1\int_0^L |W|^2\,dx + kl \underbrace{\int_0^L (\varphi_x+\psi+lw)\overline{W}\,dx}_{=i_6}\big]\\
+ \quad & \gamma_2\int_0^L |\Psi|^2\,dx + \gamma_3\int_0^L |W|^2\,dx\\
= \quad & 0.
\end{aligned}$$

Desse modo, integrando os termos i_1, i_3 e i_5 por partes e utilizando as equações (3.68), (3.70) e

(3.72) em i_2, i_4 e i_6 respectivamente, obtemos

$$Re\ \left[i\beta||U||_H^2 + \gamma_2||\Psi||_{L^2}^2 + \gamma_3||W||_{L^2}^2\right] = 0.$$

Portanto, $\gamma_2||\Psi||_{L^2}^2 + \gamma_3||W||_{L^2}^2 = 0$. Assim, $\Psi = W = 0$.
Assim, das equações (3.70) e (3.72) obtemos $\psi = w = 0$. Da equação (3.73), obtemos:

$$(k_0 l + kl)\varphi_x = 0 \Rightarrow \varphi_x = 0 \Rightarrow \int_0^L \varphi_x\,dx = 0 \Rightarrow \varphi = 0.$$

Agora, substituindo na equação (3.68), obtemos $\Phi = 0$. Assim, $U = (0,0,0,0,0,0)$, que contradiz o fato de U ser um autovetor associado ao autovalor $i\beta$.
Portanto, $i\beta \subset \rho(A)$. □

Lema 3.14. *Sejam $U \in D(A)$ e $F \in \mathcal{H}$, tais que, $i\beta U - AU = F$ para $\beta \in \mathbb{R}$. Então:*

$$\gamma_2||\Psi||_{L^2}^2 + \gamma_3||W||_{L^2}^2 \leq ||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}.$$

Demonstração. Notemos que

$$(i\beta U - AU, U)_{\mathcal{H}} = (F, U)_{\mathcal{H}} \Rightarrow i\beta||U||_{\mathcal{H}}^2 - (AU, U)_{\mathcal{H}} = (F, U)_{\mathcal{H}}.$$

Considerando a parte real, obtemos então

$$-\underbrace{Re\ [(AU, A)_{\mathcal{H}}]}_{=i_1} = Re\ [(F, U)_{\mathcal{H}}]\,.$$

Utilizando o Teorema 3.7 em i_1, obtemos que

$$\gamma_2||\Psi||_{L^2}^2 + \gamma_3||W||_{L^2}^2 \leq |Re\ [(F, U)_{\mathcal{H}}]\,| \leq ||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}.$$

Portanto, $\gamma_2||\Psi||_{L^2}^2 + \gamma_3||W||_{L^2}^2 \leq ||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}$. □

Lema 3.15. *Sejam $U \in D(A)$ e $F \in \mathcal{H}$, tais que, $i\beta U - AU = F$ para $\beta \in \mathbb{R}$ e $|\beta| \geq 1$. Então existe uma constante $c_1 > 0$, tal que*

$$b||\psi_x||_{L^2}^2 \leq \frac{c_1}{|\beta|}||\Psi||_{L^2}||U||_H + c_1||F||_H||U||_H.$$

Demonstração. Multiplicando a equação (3.71) por $\overline{\psi}$ e integrando em $[0, L]$, temos

$$\underbrace{b\int_0^L \psi_{xx}\overline{\psi}\,dx}_{i_1} = i\beta\rho_2\int_0^L \Psi\overline{\psi}\,dx + k\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{\psi}\,dx + \gamma_2\int_0^L \Psi\overline{\psi}\,dx - \rho_2\int_0^L f_4\overline{\psi}\,dx.$$

Agora, integrando o termo i_1 por partes e utilizando a equação (3.70), obtemos que

$$\begin{aligned}-b\int_0^L |\psi_x|^2\,dx &= -\rho_2\int_0^L \Psi\overline{(\Psi+f_3)}\,dx - \frac{k}{i\beta}\int_0^L(\varphi_x+\psi+lw)\overline{(\Psi+f_3)}\,dx\\ &- \frac{\gamma_2}{i\beta}\int_0^L \Psi\overline{(\Psi+f_3)}\,dx + \rho_2\int_0^L f_4\overline{\psi}\,dx.\end{aligned}$$

Pelas Desigualdades Triangular e de Cauchy-Schawarz, obtemos

$$\begin{aligned}b||\psi_x||^2_{L^2} &\leq \rho_2||\Psi||_{L^2}||\Psi||_{L^2} + \rho_2||\Psi||_{L^2}||f_3||_{L^2} + \frac{k}{|\beta|}||\varphi_x+\psi+lw||_{L^2}||\Psi||_{L^2} \qquad (3.76)\\ &+ \frac{k}{|\beta|}||\varphi_x+\psi+lw||_{L^2}||f_3||_{L^2} + \frac{\gamma_2}{|\beta|}||\Psi||_{L^2}(||\Psi||_{L^2}+||f_3||_{L^2}) + \rho_2||f_4||_{L^2}||\psi||_{L^2}.\end{aligned}$$

Da Desigualdade de Poincaré, existem constantes c_{p1} e c_{p2} positivas de modo que

$$||f_3||_{L^2} \leq c_{p1}||f_{3,x}||_{L^2} \text{ e } ||\psi||_{L^2} \leq c_{p2}||\psi_x||_{L^2}.$$

Desse modo, podemos escrever a desigualdade (3.76) como

$$\begin{aligned}b||\psi_x||^2_{L^2} &\leq \rho_2||\Psi||_{L^2}||\Psi||_{L^2} + c_{p1}\rho_2||\Psi||_{L^2}||f_{3,x}||_{L^2} + \frac{k}{|\beta|}||\varphi_x+\psi+lw||_{L^2}||\Psi||_{L^2}\\ &+c_{p1}\frac{k}{|\beta|}||\varphi_x+\psi+lw||_{L^2}||f_{3,x}||_{L^2} + \frac{\gamma_2}{|\beta|}||\Psi||_{L^2}(||\Psi||_{L^2}+||f_3||_{L^2}) + c_{p2}\rho_2||f_4||_{L^2}||\psi_x||_{L^2}.\end{aligned}$$

Utilizando o Lema 3.14 e a definição de norma em H, obtemos

$$\begin{aligned}b||\psi_x||^2_{L^2} &\leq \frac{\sqrt{k}}{|\beta|}||\Psi||_{L^2}||U||_H\\ &+ \left(\frac{\rho_2}{\gamma_2} + c_{p1}\frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}} + c_{p1}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{b}|\beta|} + \frac{1}{|\beta|} + c_{p1}\frac{\gamma_2}{\sqrt{\rho_2 b}|\beta|} + c_{p2}\frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}}\right)||F||_H||U||_H.\end{aligned}$$

Assim, fazendo c_1 como

$$c_1 = \textit{máx}\left\{\sqrt{k}, \frac{\rho_2}{\gamma_2} + c_{p1}\frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}} + c_{p1}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{b}} + 1 + c_{p1}\frac{\gamma_2}{\sqrt{\rho_2 b}} + c_{p2}\frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}}\right\},$$

e utilizando o fato de $|\beta| \geq 1$, segue o resultado. □

Lema 3.16. *Sejam $U \in D(A)$ e $F \in \mathcal{H}$, tais que, $i\beta U - AU = F$ para $\beta \in \mathbb{R}$ e $|\beta| \geq 1$. Então existe uma constante $c_2 > 0$, tal que*

$$k_0||w_x - l\varphi||^2_{L^2} \leq \frac{c_2}{|\beta|}||\Phi||_{L^2}||U||_H + \frac{c_2}{|\beta|}||W||_{L^2}||U||_H + c_2||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}.$$

Demonstração. Derivando a equação (3.72) com relação a variável x e somando com o produto de l por (3.68), obtemos

$$W_x - l\Phi = i\beta(w_x - l\varphi) - (f_{5,x} - lf_1). \tag{3.77}$$

Além disso, multiplicando a equação (3.73) por $\overline{W}$ e integrando no intervalo $[0, L]$, obtemos

$$i\beta\rho_1 \int_0^L |W|^2\,dx - k_0 \underbrace{\int_0^L (w_x - l\varphi)_x \overline{W}\,dx}_{i_1} + kl \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{W}\,dx$$
$$+\gamma_3 \int_0^L |W|^2\,dx = \rho_1 \int_0^L f_6\overline{W}\,dx.$$

Agora, integrando i_1 por partes, obtemos que

$$i\beta\rho_1 \int_0^L |W|^2\,dx + k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{(W_x - l\Phi)}\,dx + k_0 l \int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{\Phi}\,dx$$
$$+kl \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{W}\,dx + \gamma_3 \int_0^L |W|^2\,dx = \rho_1 \int_0^L f_6\overline{W}\,dx.$$

Utilizando a equação (3.77), podemos escrever a igualdade anterior como

$$k_0 \int_0^L |w_x - l\varphi|^2\,dx = \rho_1 \int_0^L |W|^2\,dx + \frac{k_0}{i\beta} \int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{(f_{5,x} - lf_1)}\,dx$$
$$-\frac{k_0}{i\beta} l \int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{\Phi}\,dx - \frac{k}{i\beta} l \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{W}\,dx - \frac{\gamma_3}{i\beta} \int_0^L |W|^2\,dx + \frac{\rho_1}{i\beta} \int_0^L f_6\overline{W}\,dx.$$

Das Desigualdades Triangular e de Cauchy-Schwarz, obtemos que

$$\begin{aligned} k_0||w_x - l\varphi||_{L^2}^2 \;\leq\;& \rho_1||W||_{L^2}^2 + \frac{k_0}{|\beta|}||w_x - l\varphi||_{L^2}||f_{5,x} - lf_1||_{L^2} + \frac{k_0}{|\beta|} l||w_x - l\varphi||_{L^2}||\Phi||_{L^2} \\ +\;& \frac{k}{|\beta|} l||\varphi_x + \psi + lw||_{L^2}||W||_{L^2} + \frac{\gamma_3}{|\beta|}||W||_{L^2}^2 + \frac{\rho_1}{|\beta|}||f_6||_{L^2}||W||_{L^2}. \end{aligned}$$

Assim, utilizando o Lema 3.14 para estimar a norma de W e da definição de norma de H, obtemos

$$k_0||w_x - l\varphi||_{L^2}^2 \leq \frac{\sqrt{k_0}}{|\beta|}||\Phi||_{L^2}||U||_H + \frac{\sqrt{k}}{|\beta|}||W||_{L^2}||U||_H + \left(\frac{\rho_1}{\gamma_3} + \frac{3}{|\beta|}\right)||F||_H||U||_H.$$

O resultado segue com

$$c_2 = máx\left\{\sqrt{k_0}l, \sqrt{k}l, \frac{\rho_1}{\gamma_3} + \frac{3}{|\beta|}\right\}.$$

□

Lema 3.17. *Sejam $U \in D(A)$ e $F \in \mathcal{H}$, tais que, $i\beta U - AU = F$ para $\beta \in \mathbb{R}$ e $|\beta| \geq 1$. Então* *existe uma constante $c_3 > 0$, tal que*

$$\begin{aligned} k||\varphi_x + \psi + lw||_{L^2}^2 &\leq |\beta| \left| \frac{\rho_1 b}{k} - \rho_2 \right| \int_0^L |\psi_x \Phi| \, dx + c_3 ||U||_{\mathcal{H}} ||F||_{\mathcal{H}} \\ &+ \frac{c_3}{|\beta|} ||\Psi||_{L^2} ||U||_H + \frac{c_3}{|\beta|} ||\Phi||_{L^2} ||U||_{\mathcal{H}} + \frac{c_3}{|\beta|} ||W||_{L^2} ||U||_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Demonstração. Multiplicando a equação (3.71) por $\overline{(\varphi_x + \psi + lw)}$ e integrando no intervalo $[0, L]$, obtemos

$$\begin{aligned} i\beta\rho_2 \int_0^L \Psi \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} \, dx - \underbrace{b \int_0^L \psi_{xx} \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} \, dx}_{i_1} + k||\varphi_x + \psi + lw||_{L^2}^2 \\ + \gamma_2 \int_0^L \Psi \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} \, dx = \rho_2 \int_0^L f_4 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} \, dx. \end{aligned}$$

Agora, integrando i_1 por partes, obtemos

$$\begin{aligned} k||\varphi_x + \psi + lw||_{L^2}^2 = -i\beta\rho_2 \int_0^L \Psi \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} \, dx - b \int_0^L \psi_x \underbrace{\overline{(\varphi_x + \psi + lw)_x}}_{i_2} \, dx \\ - \gamma_2 \int_0^L \Psi \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} \, dx + \rho_2 \int_0^L f_4 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} \, dx. \end{aligned}$$

Utilizando a equação (3.69) em i_2, obtemos então

$$\begin{aligned} k||\varphi_x + \psi + lw||_{L^2}^2 &= -i\beta\rho_2 \int_0^L \Psi \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} \, dx \\ &- b \int_0^L \psi_x \overline{\left[\frac{i\beta\rho_1}{k} \Phi - \frac{k_0 l}{k} (w_x - l\varphi) - \frac{\rho_1}{k} f_2 \right]} \, dx \\ &- \gamma_2 \int_0^L \Psi \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} \, dx + \rho_2 \int_0^L f_4 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} \, dx. \end{aligned}$$

Agora, reorganizando os termos, obtemos então

$$\begin{aligned} k||\varphi_x + \psi + lw||_{L^2}^2 &= \underbrace{-i\beta\rho_2 \int_0^L \Psi \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} \, dx + \frac{bi\beta\rho_1}{k} \int_0^L \psi_x \overline{\Phi} \, dx}_{i_3} \\ &+ \frac{bk_0 l}{k} \int_0^L \psi_x \overline{(w_x - l\varphi)} \, dx + \frac{b\rho_1}{k} \int_0^L \psi_x \overline{f_2} \, dx \\ &- \gamma_2 \int_0^L \Psi \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} \, dx + \rho_2 \int_0^L f_4 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} \, dx. \end{aligned} \tag{3.78}$$

Assim, podemos escrever i_3 como

$$i_3 = -i\beta\rho_2 \underbrace{\int_0^L \Psi\overline{\varphi_x}\,dx}_{i_4} - i\beta\rho_2 \underbrace{\int_0^L \Psi\overline{\psi}\,dx}_{i_5} - i\beta\rho_2 l \underbrace{\int_0^L \Psi\overline{w}\,dx}_{i_6} + \frac{bi\beta\rho_1}{k}\int_0^L \psi_x\overline{\Phi}\,dx.$$

Utilizando as equações (3.68), (3.69) e (3.72) em i_4, i_5 e i_6, respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} i_3 &= -i\beta\rho_2 \int_0^L \Psi\overline{\left[\frac{1}{i\beta}\Phi_x + \frac{1}{i\beta}f_{1,x}\right]}\,dx - i\beta\rho_2 \int_0^L \Psi\overline{\left[\frac{1}{i\beta}\Psi + \frac{1}{i\beta}f_3\right]}\,dx \\ &- i\beta\rho_2 l \int_0^L \Psi\overline{\left[\frac{1}{i\beta}W + \frac{1}{i\beta}f_5\right]}\,dx + \frac{bi\beta\rho_1}{k}\int_0^L \psi_x\overline{\Phi}\,dx. \end{aligned}$$

Agora, simplificando, podemos reescrever do seguinte modo

$$\begin{aligned} i_3 &= \underbrace{\rho_2 \int_0^L \Psi\overline{\Phi_x}\,dx}_{i_7} + \rho_2 \int_0^L \Psi\overline{f_{1,x}}\,dx + \rho_2||\Psi||^2_{L^2} + \rho_2 \int_0^L \Psi\overline{f_3}\,dx \\ &+ \rho_2 l \int_0^L \Psi\overline{W}\,dx + \rho_2 l \int_0^L \Psi\overline{f_5}\,dx + \frac{bi\beta\rho_1}{k}\int_0^L \psi_x\overline{\Phi}\,dx. \end{aligned}$$

Agora, utilizando a equação (3.70) e integrando por partes em i_7 obtemos então

$$\begin{aligned} i_3 &= -\rho_2 \int_0^L (i\beta\psi_x - f_{3,x})\overline{\Phi}\,dx + \rho_2 \int_0^L \Psi\overline{f_{1,x}}\,dx + \rho_2||\Psi||^2_{L^2} + \rho_2 \int_0^L \Psi\overline{f_3}\,dx \\ &+ \rho_2 l \int_0^L \Psi\overline{W}\,dx + \rho_2 l \int_0^L \Psi\overline{f_5}\,dx + \frac{bi\beta\rho_1}{k}\int_0^L \psi_x\overline{\Phi}\,dx. \end{aligned}$$

Organizando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} i_3 &= i\beta\left(\frac{b\rho_1}{k} - \rho_2\right)\int_0^L \psi_x\overline{\Phi}\,dx + \rho_2 \int_0^L f_{3,x}\overline{\Phi}\,dx + \rho_2 \int_0^L \Psi\overline{f_{1,x}}\,dx + \rho_2||\Psi||^2_{L^2} \\ &+ \rho_2 \int_0^L \Psi\overline{f_3}\,dx + \rho_2 l \int_0^L \Psi\overline{W}\,dx + \rho_2 l \int_0^L \Psi\overline{f_5}\,dx. \end{aligned}$$

Agora, substituindo i_3 na equação (3.78), obtemos então

$$\begin{aligned} k||\varphi_x + \psi + lw||^2_{L^2} &= i\beta\left(\frac{b\rho_1}{k} - \rho_2\right)\int_0^L \psi_x\overline{\Phi}\,dx + \rho_2 \int_0^L f_{3,x}\overline{\Phi}\,dx + \rho_2 \int_0^L \Psi\overline{f_{1,x}}\,dx \\ &+ \rho_2||\Psi||^2_{L^2} + \rho_2 \int_0^L \Psi\overline{f_3}\,dx + \rho_2 l \int_0^L \Psi\overline{W}\,dx + \rho_2 l \int_0^L \Psi\overline{f_5}\,dx \\ &+ \frac{bk_0 l}{k}\int_0^L \psi_x\overline{(w_x - l\varphi)}\,dx + \frac{b\rho_1}{k}\int_0^L \psi_x\overline{f_2}\,dx \\ &- \gamma_2 \int_0^L \Psi\overline{(\varphi_x + \psi + lw)}\,dx + \rho_2 \int_0^L f_4\overline{(\varphi_x + \psi + lw)}\,dx. \end{aligned}$$

Aplicando as Desigualdades Triangular e de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}
k||\varphi_x+\psi+lw||_{L^2}^2 &\leq |\beta|\left|\frac{b\rho_1}{k}-\rho_2\right|\int_0^L|\psi_x\overline{\Phi}|\,dx+\frac{\rho_2}{b\rho_1}b||f_{3,x}||_{L^2}\rho_1||\Phi||_{L^2}\\
&+ \frac{1}{k}\rho_2||\Psi||_{L^2}k||f_{1,x}+f_3+lf_5||_{L^2}+\rho_2||\Psi||_{L^2}^2+\rho_2 l||\Psi||_{L^2}||W||_{L^2}\\
&+ \frac{bk_0l}{k}||\psi_x||_{L^2}||w_x-l\varphi||_{L^2}+\frac{1}{k}b||\psi_x||_{L^2}\rho_1||f_2||_{L^2}\\
&+ \gamma_2||\Psi||_{L^2}||\varphi_x+\psi+lw||_{L^2}+\frac{1}{k}\rho_2||f_4||_{L^2}k||\varphi_x+\psi+lw||_{L^2}.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos que

$$\begin{aligned}
k||\varphi_x+\psi+lw||_{L^2}^2 &\leq |\beta|\left|\frac{b\rho_1}{k}-\rho_2\right|\int_0^L|\psi_x\overline{\Phi}|\,dx+\frac{\rho_2}{b\rho_1}||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}+\frac{1}{k}||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}\\
&+ \rho_2||\Psi||_{L^2}^2+\rho_2 l||\Psi||_{L^2}||W||_{L^2}+\frac{bk_0l}{k}||\psi_x||_{L^2}||w_x-l\varphi||_{L^2}\\
&+ \frac{1}{k}||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}+\gamma_2||\Psi||_{L^2}||\varphi_x+\psi+lw||_{L^2}+\frac{1}{k}||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Reorganizando os termos, obtemos que

$$\begin{aligned}
k||\varphi_x+\psi+lw||_{L^2}^2 &\leq |\beta|\left|\frac{b\rho_1}{k}-\rho_2\right|\int_0^L|\psi_x\overline{\Phi}|\,dx+\left(\frac{\rho_2}{b\rho_1}+\frac{3}{k}\right)||U||_H||F||_H\\
&+ \rho_2||\Psi||_{L^2}^2+\rho_2 l||\Psi||_{L^2}||W||_{L^2}+\frac{bk_0l}{k}||\psi_x||_{L^2}||w_x-l\varphi||_{L^2}\\
&+ \underbrace{\gamma_2||\Psi||_{L^2}||\varphi_x+\psi+lw||_{L^2}}_{i_8}.
\end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Young em i_8, obtemos

$$\begin{aligned}
(k-\epsilon)||\varphi_x+\psi+lw||_{L^2}^2 &\leq |\beta|\left|\frac{b\rho_1}{k}-\rho_2\right|\int_0^L|\psi_x\overline{\Phi}|\,dx+\left(\frac{\rho_2}{b\rho_1}+\frac{3}{k}\right)||U||_H||F||_H\\
&+ \underbrace{\rho_2||\Psi||_{L^2}^2}_{i_9}+\underbrace{\rho_2 l||\Psi||_{L^2}||W||_{L^2}}_{i_{10}}+\frac{bk_0l}{k}||\psi_x||_{L^2}||w_x-l\varphi||_{L^2}\\
&+ \underbrace{\gamma_2c_\epsilon||\Psi||_{L^2}^2}_{i_{11}}.
\end{aligned}$$

Agora, utilizando o Lema 3.14 em i_9, i_{10} e i_{11}, obtemos então

$$\begin{aligned}
(k-\epsilon)||\varphi_x+\psi+lw||_{L^2}^2 &\leq |\beta|\left|\frac{b\rho_1}{k}-\rho_2\right|\int_0^L|\psi_x\overline{\Phi}|\,dx\\
&+ \left(\frac{\rho_2}{b\rho_1}+\frac{3}{k}+\frac{\rho_2}{\gamma_2}+\frac{\rho_2 l}{\gamma_2}+\frac{\rho_2 l}{\gamma_3}+c_\epsilon\right)||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}\\
&+ \underbrace{\frac{bk_0l}{k}||\psi_x||_{L^2}||w_x-l\varphi||_{L^2}}_{i_{12}}.
\end{aligned}$$

Agora, fazendo $\epsilon = \frac{k}{2}$ e notando que $i_{12} \leq \dfrac{bk_0 l}{k}||\psi_x||^2_{L^2} + \dfrac{bk_0 l}{k}||w_x - l\varphi||^2_{L^2}$, obtemos

$$\begin{aligned}
k||\varphi_x + \psi + lw||^2_{L^2} &\leq |\beta| \left| \frac{b\rho_1}{k} - \rho_2 \right| \int_0^L |\psi_x \overline{\Phi}| \, dx \\
&+ \left(\frac{\rho_2}{b\rho_1} + \frac{3}{k} + \frac{\rho_2}{\gamma_2} + \frac{\rho_2 l}{\gamma_2} + \frac{\rho_2 l}{\gamma_3} + c_\epsilon \right) ||U||_{\mathcal{H}} ||F||_{\mathcal{H}} \\
&+ \underbrace{\frac{bk_0 l}{k}||\psi_x||^2_{L^2}}_{i_{13}} + \underbrace{\frac{bk_0 l}{k}||w_x - l\varphi||^2_{L^2}}_{i_{14}}.
\end{aligned}$$

Utilizando o Lema 3.15 em i_{13} e o Lema 3.16 em i_{14} obtemos

$$\begin{aligned}
k||\varphi_x + \psi + lw||^2_{L^2} &\leq |\beta| \left| \frac{b\rho_1}{k} - \rho_2 \right| \int_0^L |\psi_x \overline{\Phi}| \, dx \\
&+ \left(\frac{\rho_2}{b\rho_1} + \frac{3}{k} + \frac{\rho_2}{\gamma_2} + \frac{\rho_2 l}{\gamma_2} + \frac{\rho_2 l}{\gamma_3} + c_\epsilon \right) ||U||_{\mathcal{H}} ||F||_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{c_1 k_0 l}{k} \frac{1}{|\beta|} ||\Psi||_{L^2} ||U||_{\mathcal{H}} + \frac{c_1 k_0 l}{k} ||U||_{\mathcal{H}} ||F||_{\mathcal{H}} + \frac{blc_2}{k} \frac{1}{|\beta|} ||\Phi||_{L^2} ||U||_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{blc_2}{k} \frac{1}{|\beta|} ||W||_{L^2} ||U||_{\mathcal{H}} + \frac{blc_2}{k} ||U||_{\mathcal{H}} ||F||_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Reescrevendo, temos então

$$\begin{aligned}
k||\varphi_x + \psi + lw||^2_{L^2} &\leq |\beta| \left| \frac{b\rho_1}{k} - \rho_2 \right| \int_0^L |\psi_x \overline{\Phi}| \, dx \\
&+ \left(\frac{\rho_2}{b\rho_1} + \frac{3}{k} + \frac{\rho_2}{\gamma_2} + \frac{\rho_2 l}{\gamma_2} + \frac{\rho_2 l}{\gamma_3} + c_\epsilon + \frac{c_1 k_0 l}{k} + \frac{blc_2}{k} \right) ||U||_{\mathcal{H}} ||F||_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{c_1 k_0 l}{k} \frac{1}{|\beta|} ||\Psi||_{L^2} ||U||_{\mathcal{H}} + \frac{blc_2}{k} \frac{1}{|\beta|} ||\Phi||_{L^2} ||U||_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{blc_2}{k} \frac{1}{|\beta|} ||W||_{L^2} ||U||_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

O resultado segue com

$$c_3 = \left(\frac{\rho_2}{b\rho_1} + \frac{3}{k} + \frac{\rho_2}{\gamma_2} + \frac{\rho_2 l}{\gamma_2} + \frac{\rho_2 l}{\gamma_3} + c_\epsilon + \frac{c_1 k_0 l}{k} + \frac{blc_2}{k} \right).$$

□

Lema 3.18. *Sejam $U \in D(A)$ e $F \in \mathcal{H}$, tais que, $i\beta U - AU = F$ para $\beta \in \mathbb{R}$ e $|\beta| \geq 1$. Então existe uma constante $c_4 > 0$, tal que*

$$\begin{aligned}
\rho_1 ||\Phi||^2_{L^2} &\leq c_4 ||U||_{\mathcal{H}} ||F||_{\mathcal{H}} + \frac{c_4}{|\beta|} ||\Phi||_{L^2} ||U||_{\mathcal{H}} + c_4 |\beta| \left| \frac{\rho_1 b}{k} - \rho_2 \right| \int_0^L |\psi_x \Phi| \, dx \\
&+ \frac{c_4}{|\beta|} ||\Psi||_{L^2} ||U||_H + \frac{c_4}{|\beta|} ||W||_{L^2} ||U||_{\mathcal{H}} + \frac{c_4}{|\beta|^2} ||U||^2_{\mathcal{H}} + \frac{c_4}{|\beta|^2} ||F||^2_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Demonstração. Multiplicando a equação (3.69) por $\overline{\Phi}$ e integrando no intervalo $[0, L]$, obtemos

$$i\beta\rho_1||\Phi||^2_{L^2} + \underbrace{k\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)_x\overline{\Phi}\,dx}_{i_1} - k_0 l\int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{\Phi}\,dx = \rho_1\int_0^L f_2\overline{\Phi}\,dx.$$

Integrando por partes e utilizando a equação (3.68) em i_1, obtemos

$$i\beta\rho_1||\Phi||^2_{L^2} - k\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\underbrace{\overline{(i\beta\varphi - f_1)_x}}_{i_2}\,dx - k_0 l\int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{\Phi}\,dx = \rho_1\int_0^L f_2\overline{\Phi}\,dx.$$

Agora, somando e subtraindo $i\beta(\psi + lw)$ em i_2, obtemos

$$\begin{aligned} & i\beta\rho_1||\Phi||^2_{L^2} - k\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{[i\beta(\varphi_x + \psi + lw) - i\beta(\psi + lw) - f_{1,x}]}\,dx \\ - \quad & k_0 l\int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{\Phi}\,dx = \rho_1\int_0^L f_2\overline{\Phi}\,dx. \end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever como

$$\begin{aligned} & i\beta\rho_1||\Phi||^2_{L^2} - i\beta k||\varphi_x + \psi + lw||^2_{L^2} + i\beta k\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{(\psi + lw)}\,dx \\ + \quad & k\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{f_{1,x}}\,dx - k_0 l\int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{\Phi}\,dx = \rho_1\int_0^L f_2\overline{\Phi}\,dx. \end{aligned}$$

Dividindo a equação por $i\beta$ e utilizando as Desigualdades Triangular e de Cauchy-Schwarz, obtemos que

$$\begin{aligned} \rho_1||\Phi||^2_{L^2} \quad \leq \quad & k||\varphi_x + \psi + lw||^2_{L^2} + k\underbrace{||\varphi_x + \psi + lw||_{L^2}||\psi + lw||_{L^2}}_{i_3} \\ + \quad & \frac{k}{|\beta|}||\varphi_x + \psi + lw||_{L^2}||f_{1,x}||_{L^2} + \frac{k_0 l}{|\beta|}||w_x - l\varphi||_{L^2}||\Phi||_{L^2} + \frac{\rho_1}{|\beta|}||f_2||_{L^2}||\Phi||_{L^2}. \end{aligned}$$

Agora, utilizando a desigualdade de Young em i_3 e reescrevendo, obtemos

$$\begin{aligned} \rho_1||\Phi||^2_{L^2} \quad \leq \quad & k||\varphi_x + \psi + lw||^2_{L^2} + \frac{k}{2}||\varphi_x + \psi + lw||^2_{L^2} + \frac{k}{2}||\psi + lw||_{L^2} \\ + \quad & \frac{1}{|\beta|}||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} + \frac{l}{|\beta|}||U||_{\mathcal{H}}||\Phi||_{L^2} + \frac{1}{\rho_1|\beta|}||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Assim, reorganizando temos

$$\begin{aligned} \rho_1||\Phi||^2_{L^2} &\leq \left(1+\frac{1}{2}\right)k||\varphi_x+\psi+lw||^2_{L^2}+\frac{k}{2}\underbrace{||\psi+lw||_{L^2}}_{i_4} \\ &+ \left(1+\frac{1}{\rho_1}\right)\frac{1}{|\beta|}||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}+\frac{l}{|\beta|}||U||_{\mathcal{H}}||\Phi||_{L^2}. \end{aligned} \tag{3.79}$$

Utilizando as equações (3.70) e (3.72) em i_4, obtemos então

$$\begin{aligned} i_4 &= \left|\left|\frac{1}{i\beta}(\Psi+f_3)+\frac{l}{i\beta}(W+f_5)\right|\right|^2_{L^2} \\ &= \frac{1}{|\beta|^2}||\psi+f_3+lW+lf_5||^2_{L^2}. \end{aligned}$$

Utilizando as Desigualdades Triangular e de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} i_4 &\leq \frac{1}{|\beta|^2}\left(||\psi||_{L^2}+||f_3||_{L^2}+l||W||_{L^2}+l||f_5||_{L^2}\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{|\beta|^2}\left(||\psi||^2_{L^2}+2||\psi||_{L^2}||f_3||_{L^2}+2l||\psi||_{L^2}||W||_{L^2}+2l||\psi||_{L^2}||f_5||_{L^2}+||f_3||^2_{L^2}\right) \\ &+ \frac{1}{|\beta|^2}\left(2l||f_3||_{L^2}||W||_{L^2}+2l||f_3||_{L^2}||f_5||_{L^2}+l^2||W||^2_{L^2}+2l||W||_{L^2}||f_5||_{L^2}+l^2||f_5||^2_{L^2}\right) \\ &\leq \frac{1}{|\beta|^2}\left[\left(1+2l+l^2\right)||U||^2_{\mathcal{H}}+(2+6l)\,||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}+\left(1+2l+l^2\right)||F||^2_{\mathcal{H}}\right]. \end{aligned}$$

Agora, substituindo i_4 em (3.79), obtemos então

$$\begin{aligned} \rho_1||\Phi||^2_{L^2} &\leq \left(1+\frac{1}{2}\right)k||\varphi_x+\psi+lw||^2_{L^2}+\frac{1}{|\beta|^2}\frac{k}{2}\left(1+2l+l^2\right)||U||^2_{\mathcal{H}} \\ &+ \frac{1}{|\beta|^2}\frac{k}{2}(2+6l)\,||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}+\frac{1}{|\beta|^2}\frac{k}{2}\left(1+2l+l^2\right)||F||^2_{\mathcal{H}} \\ &+ \left(1+\frac{1}{\rho_1}\right)\frac{1}{|\beta|}||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}+\frac{l}{|\beta|}||U||_{\mathcal{H}}||\Phi||_{L^2}. \end{aligned}$$

Reescrevendo, obtemos então

$$\begin{aligned} \rho_1||\Phi||^2_{L^2} &\leq \left(1+\frac{1}{2}\right)\underbrace{k||\varphi_x+\psi+lw||^2_{L^2}}_{i_5}+\left(1+\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{|\beta|^2}\frac{k}{2}(2+6l)\right)\frac{1}{|\beta|}||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} \\ &+ \frac{l}{|\beta|}||U||_{\mathcal{H}}||\Phi||_{L^2}+\frac{1}{|\beta|^2}\frac{k}{2}\left(1+2l+l^2\right)||U||^2_{\mathcal{H}}+\frac{1}{|\beta|^2}\frac{k}{2}\left(1+2l+l^2\right)||F||^2_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Agora, utilizando o Lema 3.17 em i_5, obtemos então

$$\begin{aligned}\rho_1||\Phi||^2_{L^2} \;\; &\leq \;\; \left(1+\frac{1}{2}\right)|\beta|\left|\rho_2-\frac{\rho_1 b}{k}\right|\int_0^L|\psi_x\overline{\Phi}|\,dx+\left(1+\frac{1}{2}\right)c_3||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}\\ &+ \;\; \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{c_3}{|\beta|}||\Psi||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}}+\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{c_3}{|\beta|}||\Phi||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}}\\ &+ \;\; \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{c_3}{|\beta|}||W||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}}+\left(1+\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{|\beta|^2}\frac{k}{2}(2+6l)\right)\frac{1}{|\beta|}||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}\\ &+ \;\; \frac{l}{|\beta|}||U||_{\mathcal{H}}||\Phi||_{L^2}+\frac{1}{|\beta|^2}\frac{k}{2}\left(1+2l+l^2\right)||U||^2_{\mathcal{H}}+\frac{1}{|\beta|^2}\frac{k}{2}\left(1+2l+l^2\right)||F||^2_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Reorganizando os termos, obtemos então

$$\begin{aligned}\rho_1||\Phi||^2_{L^2} \;\; &\leq \;\; \left(1+\frac{1}{2}\right)|\beta|\left|\rho_2-\frac{\rho_1 b}{k}\right|\int_0^L|\psi_x\overline{\Phi}|\,dx\\ &+ \;\; \left[\left(1+\frac{1}{2}\right)c_3+\left(1+\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{|\beta|^2}\frac{k}{2}(2+6l)\right)\frac{1}{|\beta|}\right]||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}\\ &+ \;\; \left[\left(1+\frac{1}{2}\right)c_3\right]\frac{1}{|\beta|}||\Psi||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}}+\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)c_3+l\right]\frac{1}{|\beta|}||\Phi||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}}\\ &+ \;\; \left[\left(1+\frac{1}{2}\right)c_3\right]\frac{1}{|\beta|}||W||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}}+\frac{1}{|\beta|^2}\frac{k}{2}\left(1+2l+l^2\right)||U||^2_{\mathcal{H}}\\ &+ \;\; \frac{1}{|\beta|^2}\frac{k}{2}\left(1+2l+l^2\right)||F||^2_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

O resultado segue com

$$c_4=\left(\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}\right)c_3+\left(1+\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{|\beta|^2}\frac{k}{2}(2+6l)\right)\frac{1}{|\beta|}+l+\frac{k}{2}\left(1+2l+l^2\right)\right).$$

□

Teorema 3.19. *Se* $\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{k}{b}$ *então o semigrupo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *associado ao problema* (3.1)-(3.3) *com as condições iniciais e de contorno* (3.4) *e* (3.5)*, respectivamente, é exponencialmente estável, isto é, existem constantes* $c>0$ *e* $\epsilon>0$*, tais que*

$$||S(t)U_0||_{\mathcal{H}}\leq ce^{-\epsilon t}||U_0||_{\mathcal{H}}.$$

Demonstração. Inicialmente, notemos que $||U||^2_{\mathcal{H}}$ é dada por

$$||U||^2_{\mathcal{H}}=\rho_1||\Phi||^2_{L^2}+\rho_2||\Psi||^2_{L^2}+\rho_1||W||^2_{L^2}+b||\psi_x||^2_{L^2}+k||\varphi_x+\psi+lw||^2_{L^2}+k_0||w_x-l\varphi||^2_{L^2}.$$

Agora, aplicando os Lemas 3.14, 3.15, 3.16, 3.17 e 3.18, obtemos então

$$\begin{aligned}
||U||_{\mathcal{H}}^2 &\leq c_4\rho_1||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} + \frac{c_4}{|\beta|}||\Phi||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}} + c_4|\beta|\left|\frac{\rho_1 b}{k} - \rho_2\right|\int_0^L |\psi_x\Phi|\,dx \\
&+ \frac{c_4}{|\beta|}||\Psi||_{L^2}||U||_H + \frac{c_4}{|\beta|}||W||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}} + \frac{c_4}{|\beta|^2}||U||_{\mathcal{H}}^2 + \frac{c_4}{|\beta|^2}||F||_{\mathcal{H}}^2 \\
&+ \frac{\rho_2}{\gamma_2}||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} + \frac{\rho_1}{\gamma_3}||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} + c_1||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} + \frac{c_1}{|\beta|}||\Psi||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}} \\
&+ |\beta|\left|\frac{\rho_1 b}{k} - \rho_2\right|\int_0^L |\psi_x\Phi|\,dx + c_3||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} + \frac{c_3}{|\beta|}||\Psi||_{L^2}||U||_H \\
&+ \frac{c_3}{|\beta|}||\Phi||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}} + \frac{c_3}{|\beta|}||W||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}} + \frac{c_2}{|\beta|}||\Phi||_{L^2}||U||_H \\
&+ \frac{c_2}{|\beta|}||W||_{L^2}||U||_H + c_2||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

para $\beta \in \mathbb{R}$ com $|\beta| \geq 1$. Agora, reorganizando os termos, obtemos

$$\begin{aligned}
||U||_{\mathcal{H}}^2 &\leq \left(c_4\rho_1 + \frac{\rho_2}{\gamma_2} + \frac{\rho_1}{\gamma_3} + c_1 + c_3 + c_2\right)||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{1}{|\beta|}\left(c_4 + c_3 + c_2\right)||\Phi||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}} + (c_4+1)|\beta|\left|\frac{\rho_1 b}{k} - \rho_2\right|\int_0^L |\psi_x\Phi|\,dx \\
&+ \frac{1}{|\beta|}\left(c_4 + c_1 + c_3\right)||\Psi||_{L^2}||U||_H + \frac{1}{|\beta|}\left(c_4 + c_3 + c_2\right)||W||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{c_4}{|\beta|^2}||U||_{\mathcal{H}}^2 + \frac{c_4}{|\beta|^2}||F||_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Assim, se fazermos c de modo que

$$c = \left(c_4\rho_1 + \frac{\rho_2}{\gamma_2} + \frac{\rho_1}{\gamma_3} + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + 1\right).$$

Substituindo o c, obtemos então

$$\begin{aligned}
||U||_{\mathcal{H}}^2 &\leq c||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} + \frac{1}{|\beta|}c||\Phi||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}} + c|\beta|\left|\frac{\rho_1 b}{k} - \rho_2\right|\int_0^L |\psi_x\Phi|\,dx \\
&+ \frac{1}{|\beta|}c||\Psi||_{L^2}||U||_H + \frac{1}{|\beta|}c||W||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}} + \frac{c}{|\beta|^2}||U||_{\mathcal{H}}^2 + \frac{c}{|\beta|^2}||F||_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Agora, utilizando a relação (3.66), obtemos então

$$\begin{aligned}
||U||_{\mathcal{H}}^2 &\leq c||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} + \frac{1}{|\beta|}c||\Phi||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}} + \frac{1}{|\beta|}c||\Psi||_{L^2}||U||_H \\
&+ \frac{1}{|\beta|}c||W||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}} + \frac{c}{|\beta|^2}||U||_{\mathcal{H}}^2 + \frac{c}{|\beta|^2}||F||_{\mathcal{H}}^2. \qquad (3.80)
\end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Young em (3.80), obtemos

$$\begin{aligned} ||U||_{\mathcal{H}}^2 &\leq \epsilon_1||U||_{\mathcal{H}}^2 + c_{\epsilon_1}c^2||F||_{\mathcal{H}}^2 + \epsilon_2||U||_{\mathcal{H}}^2 + c_{\epsilon_2}\frac{1}{|\beta|^2}c^2||\Phi||_{L^2}^2 + \epsilon_3||U||_{\mathcal{H}}^2 + c_{\epsilon_3}c^2||\Psi||_{L^2}^2 \\ &+ \epsilon_4||U||_{\mathcal{H}}^2 + c_{\epsilon_4}c^2||W||_{L^2}^2 + \frac{c}{|\beta|^2}||U||_{\mathcal{H}}^2 + \frac{c}{|\beta|^2}||F||_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Reorganizando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} (1-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3-\epsilon_4)||U||_{\mathcal{H}}^2 &\leq c_{\epsilon_1}c^2||F||_{\mathcal{H}}^2 + c_{\epsilon_2}\frac{1}{|\beta|^2}c^2||\Phi||_{L^2}^2 + c_{\epsilon_3}c^2||\Psi||_{L^2}^2 \\ &+ c_{\epsilon_4}c^2||W||_{L^2}^2 + \frac{c}{|\beta|^2}||U||_{\mathcal{H}}^2 + \frac{c}{|\beta|^2}||F||_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \tag{3.81}$$

Escolhendo $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = \frac{1}{8}$ e $|\beta| \geq 1$, obtemos em (3.81) que

$$\frac{1}{2}||U||_{\mathcal{H}}^2 \leq c_{\epsilon_1}c^2||F||_{\mathcal{H}}^2 + c_{\epsilon_2}\frac{1}{|\beta|^2}c^2||\Phi||_{L^2}^2 + c_{\epsilon_3}c^2||\Psi||_{L^2}^2 + c_{\epsilon_4}c^2||W||_{L^2}^2 + \frac{c}{|\beta|^2}||U||_{\mathcal{H}}^2.$$

Aplicando o Lema 3.14, segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}||U||_{\mathcal{H}}^2 &\leq c_{\epsilon_1}c^2||F||_{\mathcal{H}}^2 + c_{\epsilon_2}\frac{1}{|\beta|^2}c^2||\Phi||_{L^2}^2 + \frac{c_{\epsilon_3}c^2}{\gamma_2}||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} \\ &+ \frac{c_{\epsilon_4}c^2}{\gamma_3}||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} + \frac{c}{|\beta|^2}||U||_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Utilizando novamente a Desigualdade de Young para $\epsilon_5 = \epsilon_6$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}||U||_{\mathcal{H}}^2 &\leq c_{\epsilon_1}c^2||F||_{\mathcal{H}}^2 + c_{\epsilon_2}\frac{1}{|\beta|^2}c^2||\Phi||_{L^2}^2 + \frac{1}{8}||U||_{\mathcal{H}}^2 + \frac{c_{\epsilon_5}c_{\epsilon_3}^2c^2}{\gamma_2^2}||F||_{\mathcal{H}}^2 \\ &+ \frac{1}{8}||U||_{\mathcal{H}}^2 + \frac{c_{\epsilon_6}c_{\epsilon_4}^2c^2}{\gamma_3^2}||F||_{\mathcal{H}}^2 + \frac{c}{|\beta|^2}||U||_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Assim, reescrevendo temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}||U||_{\mathcal{H}}^2 &\leq \left(c_{\epsilon_1}c^2 + \frac{c_{\epsilon_5}c_{\epsilon_3}^2c^2}{\gamma_2^2} + \frac{c_{\epsilon_6}c_{\epsilon_4}^2c^2}{\gamma_3^2}\right)||F||_{\mathcal{H}}^2 + c_{\epsilon_2}\frac{1}{|\beta|^2}c^2||\Phi||_{L^2}^2 + \frac{c}{|\beta|^2}||U||_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq \tilde{c}||F||_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{|\beta|^2}(c_{\epsilon_2}c^2 + c)||U||_{L^2}^2. \end{aligned}$$

onde $\tilde{c} = \left(c_{\epsilon_1}c^2 + \dfrac{c_{\epsilon_5}c_{\epsilon_3}^2c^2}{\gamma_2^2} + \dfrac{c_{\epsilon_6}c_{\epsilon_4}^2c^2}{\gamma_3^2}\right)$.
Logo, obtemos que

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{(c_{\epsilon_2}c^2 + c)}{|\beta|^2}\right)||U||_{\mathcal{H}}^2 \leq \tilde{c}||F||_{\mathcal{H}}^2. \tag{3.82}$$

Agora, tomando $|\beta|^2 > 4(c_{\epsilon_2}c^2 + c)$ teremos que $\hat{c} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{(c_{\epsilon_2}c^2 + c)}{|\beta|^2} > 0$. Substituindo em

(3.82), segue que

$$||U||^2_{\mathcal{H}} \leq \frac{\tilde{c}}{\hat{c}}||F||^2_{\mathcal{H}} \Rightarrow ||U|| \leq \sqrt{\frac{\tilde{c}}{\hat{c}}}||F||_{\mathcal{H}}, \text{ para } |\beta| \text{ suficientemente grande.} \tag{3.83}$$

Como $i\beta \in \rho(A)$, sabemos que dado $F \in \mathcal{H}$ com $||F|| \neq 0$, existe $U \in D(A)$ tal que

$$(i\beta I - A)U = F \Rightarrow U = (i\beta I - A)^{-1}F.$$

Logo, utilizando (3.83), segue que

$$||(i\beta I - A)^{-1}F||_{\mathcal{H}} = ||U||_{\mathcal{H}} \leq \sqrt{\frac{\tilde{c}}{\hat{c}}}||F||_{\mathcal{H}} \Rightarrow \frac{||(i\beta I - A)^{-1}F||_{\mathcal{H}}}{||F||_{\mathcal{H}}} \leq \sqrt{\frac{\tilde{c}}{\hat{c}}}.$$

E assim, obtemos

$$||(i\beta I - A)^{-1}||_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{F \in H}\left\{\frac{||(i\beta I - A)^{-1}F||_H}{||F||_H} : ||F||_H \neq 0\right\} \leq c_5,$$

onde $c_5 = \sqrt{\frac{\tilde{c}}{\hat{c}}}$.
Portanto, pelo Teorema 2.76, segue o resultado. □

3.3 Falta de Estabilidade Exponencial

Nesta seção vamos provar que a solução do sistema não é exponencialmente estável, se $\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{k}{b}$. Para tanto, mostraremos que o operador resolvente $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ não é limitado se $\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{k}{b}$, não satisfazendo a segunda condição do Teorema de Prüss, que é condição necessária e suficiente para que haja o decaimento exponencial. Para isto, o fato de que a condição de contorno é do tipo mista também é fortemente utilizado.
Para tanto, vamos utilizar o seguinte Lema auxiliar:

Lema 3.20. *Sejam ρ_1, ρ_2, k, b e k_0 constantes positivas dadas em* (1.1) *e* (1.2)*. Então, $\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{k}{b}$ se, e somente se, $k \neq k_0$.*

Demonstração. Considerando as constantes ρ_1, ρ_2, k, b e k_0 definidas em (1.1) e (1.2), temos que

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{k}{b} \Leftrightarrow \frac{\rho A}{\rho I} \neq \frac{K'GA}{EI} \Leftrightarrow 1 \neq \frac{K'GA}{EA} \Leftrightarrow 1 \neq \frac{k}{k_0} \Leftrightarrow k \neq k_0.$$

□

Teorema 3.21. *Suponhamos que $\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{k}{b}$, então o semigrupo associado ao sistema determinado por* (3.1)-(3.3)*, com condições iniciais* (3.4) *e de contorno* (3.5) *não é estável exponencialmente.*

Demonstração. Para isto, é suficiente mostrar a existência de uma sequência de números reais $(\beta_n) \in \mathbb{R}$, com $\lim\limits_{n\to\infty} |\beta_n| = \infty$, tal que

$$||(i\beta_n I - A)^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \to \infty, \tag{3.84}$$

ou seja, provar a existência de uma sequência $(F_n) \in \mathcal{H}$ de funções não nulas, de modo que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{||(i\beta_n I - A)^{-1} F_n||_{\mathcal{H}}}{||F_n||_{\mathcal{H}}} = \infty. \tag{3.85}$$

Desse modo, tome $U_n = (i\beta_n I - A)^{-1} F_n$, ou seja,

$$i\beta_n U_n - AU_n = F_n, \tag{3.86}$$

com $U_n = (\varphi_n, \Phi_n, \psi_n, \Psi_n, w_n, W_n)$ e $F_n = (f_{n,1}, f_{n,2}, f_{n,3}, f_{n,4}, f_{n,5}, f_{n,6})$.
Agora, escrevendo a equação resolvente (3.86) em termos de suas componentes, obtemos

$$i\beta_n \varphi_n - \Phi_n = f_{n,1}, \tag{3.87}$$
$$i\beta_n \rho_1 \Phi_n - k(\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n)_x - k_0 l(w_{n,x} - l\varphi_n) = \rho_1 f_{n,2}, \tag{3.88}$$
$$i\beta_n \psi_n - \Psi_n = f_{n,3}, \tag{3.89}$$
$$i\beta_n \rho_2 \Psi_n - b\psi_{n,xx} + k(\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n) + \gamma_2 \Psi_n = \rho_2 f_{n,4}, \tag{3.90}$$
$$i\beta_n w_n - W_n = f_{n,5}, \tag{3.91}$$
$$i\beta_n \rho_1 W_n - k_0(w_{n,x} - l\varphi_n)_x + kl(\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n) + \gamma_3 W_n = \rho_1 f_{n,6}. \tag{3.92}$$

Utilizando as equações (3.87), (3.89) e (3.91) para eliminarmos as funções Φ_n, Ψ_n e W_n de (3.88), (3.90) e (3.92), obtemos então

$$-\beta_n^2 \rho_1 \varphi_n - k(\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n)_x - k_0 l(w_{n,x} - l\varphi_n) = g_{n,1}, \tag{3.93}$$
$$-\beta_n^2 \rho_2 \psi_n - b\psi_{n,xx} + k(\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n) + \gamma_2 i\beta_n \psi_n = g_{n,2}, \tag{3.94}$$
$$-\beta_n^2 \rho_1 w_n - k_0(w_{n,x} - l\varphi_n)_x + kl(\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n) + \gamma_3 i\beta_n w_n = g_{n,3}. \tag{3.95}$$

onde

$$\begin{aligned}
g_{n,1} &= \rho_1 f_{n,2} + i\beta_n \rho_1 f_{n,1}, \\
g_{n,2} &= \rho_2 f_{n,4} + (i\beta_n \rho_2 + \gamma_2) f_{3,n}, \\
g_{n,3} &= \rho_1 f_{n,6} + (i\beta_n \rho_1 + \gamma_3) f_{5,n}.
\end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, fazendo $L = \pi$, podemos escolher $F_n = \Big(0, \frac{1}{\rho_1} sen(nx), 0, 0, 0, 0\Big)$

e pelas condições de contorno, podemos supor

$$\varphi_n(x) = A_n sen(nx), \psi_n(x) = B_n cos(nx), w_n(x) = C_n cos(nx), \tag{3.96}$$

onde as constantes A_n, B_n e C_n dependem de n. Substituindo as funções (3.96) em (3.93)-(3.95), temos

$$A_n\left[-\rho_1\beta_n^2 + k(n)^2 + k_0 l^2\right] + B_n k(n) + C_n l(n)\left[k + k_0\right] = 1, \tag{3.97}$$

$$A_n k(n) + B_n\left[-\rho_2\beta_n^2 + \gamma_2 i\beta_n + b(n)^2 + k\right] + C_n kl = 0, \tag{3.98}$$

$$A_n l(n)\left[k + k_0\right] + B_n lk + C_n\left[-\rho_1\beta_n^2 + \gamma_3 i\beta_n + k_0(n)^2 + kl^2\right] = 0. \tag{3.99}$$

Reescrevendo o sistema (3.97)-(3.99) na forma matricial, obtemos:

$$M = \begin{bmatrix} P_1 & k(n) & l(n)\left[k+k_0\right] \\ k(n) & P_2 & kl \\ l(n)\left[k+k_0\right] & kl & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3.100}$$

onde denotamos

$$\begin{aligned} P_1 &= -\rho_1\beta_n^2 + k(n)^2 + k_0 l^2, \\ P_2 &= -\rho_2\beta_n^2 + \gamma_2 i\beta_n + b(n)^2 + k, \\ P_3 &= -\rho_1\beta_n^2 + \gamma_3 i\beta_n + k_0(n)^2 + kl^2. \end{aligned}$$

Como nosso objetivo é avaliar o comportamento de

$$||(i\beta_n - A)^{-1}F_n||_{\mathcal{H}}, \text{ para quando } n \to \infty. \tag{3.101}$$

Notemos que

$$||(i\beta_n - A)^{-1}F_n||_{\mathcal{H}}^2 = ||U_n||_{\mathcal{H}}^2 \geq \rho_1||\Phi_n||_{L^2}^2 = \rho_1|\beta_n|^2||\varphi_n||_{L^2}^2 = \frac{\pi}{2}\rho_1|\beta_n|^2|A_n|^2.$$

Para concluir (3.101), basta analisar como A_n se comporta quando $n \to \infty$.
Para tanto, vamos utilizar a regra de Cramer. Assim, obtemos então

$$A_n = \frac{det\,\tilde{M}}{det\,M} \text{ onde } \tilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & k(n) & l(n)\left[k+k_0\right] \\ 0 & P_2 & kl \\ 0 & kl & P_3 \end{bmatrix}.$$

Assim, obtemos que

$$A_n = \frac{P_2P_3 - (kl)^2}{P_1P_2P_3 + 2(kl)^2(k+k_0)(n)^2 - (kl)^2P_1 - l^2(k+k_0)^2(n)^2P_2 - k^2(n)^2P_3}.$$

Primeiramente, notemos que $det\, M \neq 0$, pois o grau de P_1, P_2 e P_3 é menor ou igual a 2 e, dessa forma, o $det\, M$ possui o comportamento de um polinômio complexo de grau 6, isto é

$$det\, M \approx P(n^6).$$

Sendo assim, a aplicação $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dada por $\phi(n) = P(n^6)$ possui no máximo 6 raízes, ou seja, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\phi(n) \neq 0, \, \forall\, n > n_0.$$

Portanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$det\, M \neq 0, \, \forall\, n > n_0.$$

Notemos ainda, do Lema 3.20 que

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} - \frac{k}{b} \neq 0 \Leftrightarrow k - k_0 \neq 0. \tag{3.102}$$

Notemos, até o momento, que $det\, M$ possui grau menor ou igual a 6, enquanto o grau de $det\, \tilde{M}$ é menor ou igual a 4. Para diminuir o grau de $det\, M$ sem alterar o grau de $det\, \tilde{M}$, escolheremos, sem perda de generalidade, a sequência $(\beta_n) \in \mathbb{R}$ tal que $P_1 = \Xi$, onde Ξ é uma constante (a ser determinada) que não depende de n, tal que

$$\beta_n = \sqrt{\frac{1}{\rho_1}(k(n)^2 + k_0 l^2 - \Xi)} \approx c_1 n, \tag{3.103}$$

quando $n \to \infty$ para $c_1 \neq 0$.
Agora, vamos analisar os três termos de maior grau de $det\, M$, isto é

$$S = P_1 P_2 P_3 - l^2(k + k_0)^2 P_2 - k^2(n)^2 P_3. \tag{3.104}$$

Substituindo β_n escolhido em (3.103) em P_2 e P_3, temos

$$\begin{aligned} P_1 &= \Xi, \\ P_2 &= \left(b - \frac{\rho_2}{\rho_1} k\right)(n)^2 + k - \frac{\rho_2}{\rho_1} k_0 l^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1}\Xi + \gamma_2 i \beta_n, \\ P_3 &= (k_0 - k)(n)^2 + (k - k_0) l^2 + \Xi + \gamma_3 i \beta_n. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$
\begin{aligned}
S &= P_2\left[\Xi P_3 - l^2(k+k_0)^2(n)^2\right] - k^2(n)^2P_3\\
&= P_2\left[\Xi(k_0-k)(n)^2 + \Xi(k-k_0)l^2 + \Xi^2 + \gamma_3 i\beta_n\Xi - l^2(k+k_0)^2(n)^2\right]\\
&- \left[k^2(n)^2(k_0-k)(n)^2 + k^2(n)^2(k-k_0)l^2 + k^2(n)^2\Xi + k^2(n)^2\gamma_3 i\beta_n\right]\\
&= \Xi\left(b-\frac{\rho_2}{\rho_1}k\right)(k_0-k)(n)^4 + \Xi\left(b-\frac{\rho_2}{\rho_1}k\right)(k-k_0)l^2(n)^2 + \Xi^2\left(b-\frac{\rho_2}{\rho_1}k\right)(n)^2\\
&+ \Xi\left(b-\frac{\rho_2}{\rho_1}k\right)\gamma_3 i\beta_n(n)^2 - \left(b-\frac{\rho_2}{\rho_1}k\right)l^2(k+k_0)^2(n)^4 + \Xi k(k_0-k)(n)^2\\
&+ \Xi k(k-k_0)l^2 + \Xi^2 k + \Xi k\gamma_3 i\beta_n - kl^2(k+k_0)^2(n)^2 - \Xi\frac{\rho_2}{\rho_1}k_0l^2(k_0-k)(n)^2\\
&- \Xi\frac{\rho_2}{\rho_1}k_0l^2(k-k_0)l^2 - \Xi^2\frac{\rho_2}{\rho_1}k_0l^2 - \Xi\frac{\rho_2}{\rho_1}k_0l^2\gamma_3 i\beta_n + \frac{\rho_2}{\rho_1}k_0l^2l^2(k+k_0)^2(n)^2\\
&+ \Xi^2\frac{\rho_2}{\rho_1}(k_0-k)(n)^2 + \Xi^2\frac{\rho_2}{\rho_1}(k-k_0)l^2 + \Xi^3\frac{\rho_2}{\rho_1} + \Xi^2\frac{\rho_2}{\rho_1}\gamma_3 i\beta_n - \Xi\frac{\rho_2}{\rho_1}l^2(k+k_0)^2(n)^2\\
&+ \Xi\gamma_2 i\beta_n(k_0-k)(n)^2 + \Xi\gamma_2 i\beta_n(k-k_0)l^2 + \Xi^2\gamma_2 i\beta_n - \Xi\gamma_2\gamma_3\beta_n^2\\
&- \gamma_2 i\beta_n l^2(k+k_0)^2(n)^2 - k^2(n)^2(k_0-k)(n)^2 - k^2(n)^2(k-k_0)l^2\\
&- k^2(n)^2\Xi - k^2(n)^2\gamma_3 i\beta_n.
\end{aligned}
$$

Agora, utilizando (3.103) e reorganizando os termos, obtemos

$$
\begin{aligned}
S &\approx \left[\Xi\left(b-\frac{\rho_2}{\rho_1}k\right)(k_0-k) - k^2(k_0-k) - l^2(k+k_0)^2\left(b-\frac{\rho_2}{\rho_1}k\right)\right](n)^4\\
&+ ic_1\left[\gamma_3\Xi\left(b-\frac{\rho_2}{\rho_1}k\right) + \gamma_2\Xi(k_0-k) - k^2\gamma_3 - l^2(k+k_0)^2\gamma_2\right](n)^3\\
&+ \left[\Xi\left(b-\frac{\rho_2}{\rho_1}k\right)(k-k_0)l^2 + \Xi^2\left(b-\frac{\rho_2}{\rho_1}k\right) + \Xi k(k_0-k) - \Xi\frac{\rho_2}{\rho_1}k_0l^2(k_0-k)\right](n)^2\\
&+ \left[\frac{\rho_2}{\rho_1}\Xi^2(k_0-k) - k^2(k-k_0)l^2 - \Xi k^2 - kl^2(k+k_0)^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1}k_0l^2(k+k_0)^2l^2\right](n)^2\\
&+ \left[-\frac{\rho_2}{\rho_1}\Xi l^2(k+k_0)^2 - \Xi\gamma_2\gamma_3\frac{k}{\rho_1}\right](n)^2\\
&+ ic_1\left[\Xi k\gamma_3 - \Xi\gamma_3\frac{\rho_2}{\rho_1}k_0l^2 + \Xi\gamma_2(k-k_0)l^2 + \Xi^2\gamma_2 + \Xi^2\frac{\rho_2}{\rho_1}\gamma_3\right](n)\\
&+ \left[\Xi k(k-k_0)l^2 + \Xi^2 k - \Xi\frac{\rho_2}{\rho_1}k_0l^2(k-k_0)l^2 - \Xi^2\frac{\rho_2}{\rho_1}k_0l^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1}\Xi^2(k-k_0)l^2\right]\\
&+ \left[\Xi^3\frac{\rho_2}{\rho_1} - \Xi\gamma_2\gamma_3\frac{k_0l^2}{\rho_1} + \Xi^2\frac{\gamma_2\gamma_3}{\rho_1}\right]\\
&\approx \sigma_1(n)^4 + i\sigma_2(n)^3 + \sigma_3(n)^2 + i\sigma_4(n) + \sigma_5 \text{ quando } n\to\infty,
\end{aligned}
$$

onde $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5 \in \mathbb{R}$. Agora, para diminuir o grau do termo dado em (3.104), devemos ter $\sigma_1 = 0$. Para isso, tome

$$\Xi = \frac{k^2(k_0-k)+l^2(k_0+k)^2\left(b-\frac{\rho_2}{\rho_1}k\right)}{\left(b-\frac{\rho_2}{\rho_1}k\right)(k_0-k)}, \tag{3.105}$$

que é uma constante não dependente de n.
Além disso, da equação (3.105), obtemos que σ_2 é dado por

$$\sigma_2 = \frac{\gamma_3 l^2(k+k_0)^2\left(b-\frac{\rho_2}{\rho_1}k\right)+\gamma_2 k^2(k_0-k)^2}{(k_0-k)\left(b-\frac{\rho_2}{\rho_1}k\right)} \Rightarrow \sigma_2 \neq 0. \tag{3.106}$$

Assim, com a constante Ξ dada em (3.105), obtemos uma sequência $(\beta_n) \in \mathbb{R}$ onde seus termos são dados em (3.103), tal que $|\beta_n| \to \infty$ quando $n \to \infty$. Utilizando (3.106), obtemos

$$\begin{aligned} det\, M &\approx \sigma_6(n)^3,\ \sigma_6 > 0 \text{ quando } n \to \infty, \\ det\, \tilde{M} &\approx \sigma_7(n)^4,\ \sigma_7 > 0 \text{ quando } n \to \infty. \end{aligned}$$

Logo, o termo A_n possui comportamento

$$|A_n| \approx \sigma_8(n),\ \sigma_8 > 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Logo,

$$\frac{1}{||F_n||^2_{\mathcal{H}}}||U_n||^2_{\mathcal{H}} \geq \frac{\rho_1}{||F_n||^2_{\mathcal{H}}}||\Phi_n||^2_{L^2} = \frac{\rho_1}{||F_n||^2_{\mathcal{H}}}|\beta_n|^2||\varphi_n||^2_{L^2} = C|\beta_n|^2|A_n|^2 \to \infty$$

quando $n \to \infty$. Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} ||(i\beta - A)^{-1})||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \infty$. Assim, segue a conclusão. □

3.4 Decaimento Polinomial e Taxa Ótima

Na seção anterior, mostramos que a solução associada ao sistema (3.1)-(3.3) não possui decaimento exponencial se $\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{k}{b}$. Agora, nosso objetivo é mostrar que existe decaimento polinomial para a solução associada a esse mesmo sistema. Além disso, mostraremos que a taxa de decaimento polinomial é ótima.

Teorema 3.22. *Suponha que os dados iniciais $U_0 = \{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1\} \in D(A)$ e $\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{k}{b}$. Então, a solução do sistema possui decaimento polinomial, ou seja, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$||S(t)U_0||_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{\sqrt{t}}||U_0||_{D(A)},$$

e mais, a taxa $\sqrt{t}$ é ótima.

Demonstração. Inicialmente, considere $U \in D(A)$ e $i\beta \in \rho(A)$ com $|\beta| \geq 1$. Vamos mostrar que $||U||_{\mathcal{H}} \leq C|\beta|^\alpha$ para algum $C > 0$, com α a determinar.

Para isso, utilizando o Lema 3.17, vale que

$$\begin{aligned} k||\varphi_x+\psi+lw||_{L^2}^2 &\le |\beta|\left|\frac{\rho_1 b}{k}-\rho_2\right|\int_0^L |\psi_x\Phi|\,dx + c_3||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} \\ &+ \frac{c_3}{|\beta|}||\Psi||_{L^2}||U||_H + \frac{c_3}{|\beta|}||\Phi||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}} + \frac{c_3}{|\beta|}||W||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Desse modo, podemos reescrever como

$$k||\varphi_x+\psi+lw||_{L^2}^2 \le \underbrace{|\beta|\left|\frac{\rho_1 b}{k}-\rho_2\right|}_{m}\underbrace{||\psi_x||_{L^2}||\Phi||_{L^2}}_{i_1} + c_3||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} + \frac{3c_3}{|\beta|}||U||_{\mathcal{H}}^2.$$

Como $\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{k}{b}$, obtemos que $m>0$. Agora, aplicando a Desigualdade de Young em i_1, temos

$$k||\varphi_x+\psi+lw||_{L^2}^2 \le \epsilon_1||\Phi||_{L^2}^2 + c_{\epsilon_1}|\beta|^2 m^2||\psi_x||_{L^2}^2 + c_3||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} + \frac{3c_3}{|\beta|}||U||_{\mathcal{H}}^2. \quad (3.107)$$

Agora, do Lema 3.18, temos que

$$\begin{aligned} \rho_1||\Phi||_{L^2}^2 &\le c_4||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} + \frac{c_4}{|\beta|}||\Phi||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}} + c_4|\beta|m\int_0^L |\psi_x\Phi|\,dx \\ &+ \frac{c_4}{|\beta|}||\Psi||_{L^2}||U||_H + \frac{c_4}{|\beta|}||W||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}} + \frac{c_4}{|\beta|^2}||U||_{\mathcal{H}}^2 + \frac{c_4}{|\beta|^2}||F||_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Desse modo, podemos reescrever como

$$\rho_1||\Phi||_{L^2}^2 \le c_4||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} + \frac{3c_4}{|\beta|}||U||_{\mathcal{H}}^2 + c_4|\beta|m\underbrace{||\psi_x||_{L^2}||\Phi||_{L^2}}_{i_2} + \frac{c_4}{|\beta|^2}||U||_{\mathcal{H}}^2 + \frac{c_4}{|\beta|^2}||F||_{\mathcal{H}}^2.$$

Aplicando a Desigualdade de Young em i_2, obtemos

$$\begin{aligned} \rho_1||\Phi||_{L^2}^2 &\le c_4||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} + \frac{3c_4}{|\beta|}||U||_{\mathcal{H}}^2 + \epsilon_2||\Phi||_{L^2}^2 + c_{\epsilon_2}c_4^2|\beta|^2m^2||\psi_x||_{L^2}^2 \\ &+ \frac{c_4}{|\beta|^2}||U||_{\mathcal{H}}^2 + \frac{c_4}{|\beta|^2}||F||_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon_2 = \frac{\rho_1}{2}$, obtemos que

$$\begin{aligned} \rho_1||\Phi||_{L^2}^2 &\le 2c_4||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} + \frac{6c_4}{|\beta|}||U||_{\mathcal{H}}^2 + \epsilon_2||\Phi||_{L^2}^2 + 2c_{\epsilon_2}c_4^2|\beta|^2m^2||\psi_x||_{L^2}^2 \\ &+ \frac{2c_4}{|\beta|^2}||U||_{\mathcal{H}}^2 + \frac{2c_4}{|\beta|^2}||F||_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Agora, fazendo $\epsilon_1 = \rho_1$ e substituindo (3.108) em (3.107), obtemos

$$\begin{aligned} k||\varphi_x + \psi + lw||^2_{L^2} &\leq (2c_{\epsilon_2}c_4^2 + c_{\epsilon_1})|\beta|^2 m^2 ||\psi_x||^2_{L^2} + (2c_4 + c_3)||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} \\ &+ \frac{(6c_4 + 3c_3)}{|\beta|}||U||^2_{\mathcal{H}} + \frac{2c_4}{|\beta|^2}||U||^2_{\mathcal{H}} + \frac{2c_4}{|\beta|^2}||F||^2_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \tag{3.109}$$

Utilizando os Lemas 3.14, 3.15 e 3.16, além das desigualdades (3.109) e (3.108), obtemos

$$\begin{aligned} ||U||^2_{\mathcal{H}} &\leq \left(\frac{\rho_2}{\gamma_2} + \frac{\rho_1}{\gamma_3} + c_1 + c_2 + c_3 + 4c_4\right)||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} + \frac{(c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 12c_4)}{|\beta|}||U||^2_{\mathcal{H}} \\ &+ \underbrace{(c_{\epsilon_1} + 4c_{\epsilon_2}c_4^2)|\beta|^2 m^2 ||\psi_x||^2_{L^2}}_{i_3} + \frac{4c_4}{|\beta|^2}||U||^2_{\mathcal{H}} + \frac{4c_4}{|\beta|^2}||F||^2_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \tag{3.110}$$

Agora, aplicando o Lema 3.15 em i_3, temos

$$i_3 \leq (c_{\epsilon_1} + 4c_{\epsilon_2}c_4^2)|\beta| m^2 \left(\frac{c_1}{b}\right) \underbrace{||\Psi||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}}}_{i_4} + (c_{\epsilon_1} + 4c_{\epsilon_2}c_4^2)|\beta|^2 m^2 \left(\frac{c_1}{b}\right) \underbrace{||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}}_{i_5}.$$

Utilizando a Desigualdade de Young em i_4 e i_5, obtemos

$$\begin{aligned} i_3 &\leq \epsilon_3||U||^2_{\mathcal{H}} + c_{\epsilon_3}\left[(c_{\epsilon_1} + 4c_{\epsilon_2}c_4^2)m^2\left(\frac{c_1}{b}\right)\right]^2 |\beta|^2 \underbrace{||\Psi||_{L^2}}_{i_6} \\ &+ \epsilon_4||U||^2_{\mathcal{H}} + c_{\epsilon_4}\left[(c_{\epsilon_1} + 4c_{\epsilon_2}c_4^2)m^2\left(\frac{c_1}{b}\right)\right]^2 |\beta|^4 ||F||^2_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Agora, aplicando o Lema 3.14 em i_6, temos

$$\begin{aligned} i_3 &\leq (\epsilon_3 + \epsilon_4)||U||^2_{\mathcal{H}} + \underbrace{\frac{1}{\gamma_2}c_{\epsilon_3}\left[(c_{\epsilon_1} + 4c_{\epsilon_2}c_4^2)m^2\left(\frac{c_1}{b}\right)\right]^2 |\beta|^2 ||F||_{\mathcal{H}}}_{i_7}||U||_{\mathcal{H}} \\ &+ c_{\epsilon_4}\left[(c_{\epsilon_1} + 4c_{\epsilon_2}c_4^2)m^2\left(\frac{c_1}{b}\right)\right]^2 |\beta|^4 ||F||^2_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Utilizando a Desigualdade de Young em i_7, obtemos

$$\begin{aligned} i_3 &\leq (\epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5)||U||^2_{\mathcal{H}} \\ &+ \left[c_{\epsilon_5}\left(\frac{1}{\gamma_2}c_{\epsilon_3}\left[(c_{\epsilon_1} + 4c_{\epsilon_2}c_4^2)m^2\left(\frac{c_1}{b}\right)\right]^2\right)^2 + c_{\epsilon_4}\left[(c_{\epsilon_1} + 4c_{\epsilon_2}c_4^2)m^2\left(\frac{c_1}{b}\right)\right]^2\right]|\beta|^4||F||^2_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Substituindo i_3 em (3.110), temos

$$
\begin{aligned}
||U||^2_{\mathcal{H}} &\leq \underbrace{\left(\frac{\rho_2}{\gamma_2}+\frac{\rho_1}{\gamma_3}+c_1+c_2+c_3+4c_4\right)||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}}_{i_8} \\
&+ \frac{(c_1+2c_2+3c_3+12c_4)}{|\beta|}||U||^2_{\mathcal{H}}+(\epsilon_3+\epsilon_4+\epsilon_5)||U||^2_{\mathcal{H}} \\
&+ \left[c_{\epsilon_5}\left(\frac{1}{\gamma_2}c_{\epsilon_3}\left[(c_{\epsilon_1}+4c_{\epsilon_2}c_4^2)m^2\left(\frac{c_1}{b}\right)\right]^2\right)^2\right]|\beta|^4||F||^2_{\mathcal{H}} \\
&+ \left[c_{\epsilon_4}\left[(c_{\epsilon_1}+4c_{\epsilon_2}c_4^2)m^2\left(\frac{c_1}{b}\right)\right]^2\right]|\beta|^4||F||^2_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{4c_4}{|\beta|^2}||U||^2_{\mathcal{H}}+\frac{4c_4}{|\beta|^2}||F||^2_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}
$$

Utilizando a Desigualdade de Young em i_8, obtemos

$$
\begin{aligned}
||U||^2_{\mathcal{H}} &\leq c_{\epsilon_6}\left(\frac{\rho_2}{\gamma_2}+\frac{\rho_1}{\gamma_3}+c_1+c_2+c_3+4c_4\right)^2||F||^2_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{(c_1+2c_2+3c_3+12c_4)}{|\beta|}||U||^2_{\mathcal{H}}+(\epsilon_3+\epsilon_4+\epsilon_5+\epsilon_6)||U||^2_{\mathcal{H}} \\
&+ \left[c_{\epsilon_5}\left(\frac{1}{\gamma_2}c_{\epsilon_3}\left[(c_{\epsilon_1}+4c_{\epsilon_2}c_4^2)m^2\left(\frac{c_1}{b}\right)\right]^2\right)^2\right]|\beta|^4||F||^2_{\mathcal{H}} \\
&+ \left[c_{\epsilon_4}\left[(c_{\epsilon_1}+4c_{\epsilon_2}c_4^2)m^2\left(\frac{c_1}{b}\right)\right]^2\right]|\beta|^4||F||^2_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{4c_4}{|\beta|^2}||U||^2_{\mathcal{H}}+\frac{4c_4}{|\beta|^2}||F||^2_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}
$$

Fazendo $\epsilon_3=\epsilon_4=\epsilon_5=\epsilon_6=\frac{1}{8}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
||U||^2_{\mathcal{H}} &\leq 2c_{\epsilon_6}\left(\frac{\rho_2}{\gamma_2}+\frac{\rho_1}{\gamma_3}+c_1+c_2+c_3+4c_4\right)^2||F||^2_{\mathcal{H}}+\frac{2(c_1+2c_2+3c_3+12c_4)}{|\beta|}||U||^2_{\mathcal{H}} \\
&+ 2\left[c_{\epsilon_5}\left(\frac{1}{\gamma_2}c_{\epsilon_3}\left[(c_{\epsilon_1}+4c_{\epsilon_2}c_4^2)m^2\left(\frac{c_1}{b}\right)\right]^2\right)^2\right]|\beta|^4||F||^2_{\mathcal{H}} \\
&+ 2\left[c_{\epsilon_4}\left[(c_{\epsilon_1}+4c_{\epsilon_2}c_4^2)m^2\left(\frac{c_1}{b}\right)\right]^2\right]|\beta|^4||F||^2_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{8c_4}{|\beta|^2}||U||^2_{\mathcal{H}}+\frac{8c_4}{|\beta|^2}||F||^2_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}
$$

Como $|\beta|\geq 1$, temos que para β suficientemente grande, vale que

$$
\hat{c}=\left(1-\frac{2(c_1+2c_2+3c_3+12c_4)}{|\beta|}-\frac{8c_4}{|\beta|^2}\right)>0.
$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}||U||_{\mathcal{H}}^2 &\leq \frac{2}{\hat{c}} c_{\epsilon_6}\left(\frac{\rho_2}{\gamma_2}+\frac{\rho_1}{\gamma_3}+c_1+c_2+c_3+4c_4\right)^2 ||F||_{\mathcal{H}}^2+\frac{8c_4}{|\beta|^2}||F||_{\mathcal{H}}^2\\ &+ \frac{2}{\hat{c}}\left[c_{\epsilon_5}\left(\frac{1}{\gamma_2}c_{\epsilon_3}\left[(c_{\epsilon_1}+4c_{\epsilon_2}c_4^2)m^2\left(\frac{c_1}{b}\right)\right]^2\right)^2\right]|\beta|^4||F||_{\mathcal{H}}^2\\ &+ \frac{2}{\hat{c}}\left[c_{\epsilon_4}\left[(c_{\epsilon_1}+4c_{\epsilon_2}c_4^2)m^2\left(\frac{c_1}{b}\right)\right]^2\right]|\beta|^4||F||_{\mathcal{H}}^2.\end{aligned}$$

Fazendo $\tilde{c}$ como a maior das constantes, obtemos

$$\begin{aligned}||U||_{\mathcal{H}}^2 &\leq \tilde{c}||F||_{\mathcal{H}}^2+\frac{\tilde{c}}{|\beta|^2}||F||_{\mathcal{H}}^2+\tilde{c}|\beta|^4||F||_{\mathcal{H}}^2\\ ||U||_{\mathcal{H}}^2 &\leq 3\tilde{c}|\beta|^4||F||_{\mathcal{H}}^2\\ ||U||_{\mathcal{H}} &\leq \sqrt{3\tilde{c}}|\beta|^2||F||_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Assim, fazendo $C=\sqrt{3\tilde{c}}>0$, obtemos

$$||U||_{\mathcal{H}} \leq C|\beta|^2||F||_{\mathcal{H}}.$$

Assim, como $U \in D(A)$ é solução da equação resolvente $(i\beta I - A)U = F$, temos que

$$||(i\beta I-A)^{-1}F||_{\mathcal{H}} \leq C|\beta|^2||F||_{\mathcal{H}}, \text{ para todo } F \in \mathcal{H},$$

desde que $|\beta| \geq 1$. Desse modo, temos que

$$||(i\beta I-A)^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C|\beta|^2,$$

ou de maneira equivalente,

$$||(i\beta I-A)^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \mathcal{O}(|\beta|^2),\ \beta\to\infty.$$

Agora, pelo Teorema de Borichev & Tomilov (Teorema 2.80), temos que

$$||S(t)A^{-1}u||_{\mathcal{H}} = O(t^{-\frac{1}{2}}),\ t\to\infty,\ u\in\mathcal{H},$$

ou seja,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{||S(t)A^{-1}u||_{\mathcal{H}}}{t^{-\frac{1}{2}}}=0,\ u\in\mathcal{H}.$$

Assim, pela definição de limite no infinito, temos que para $\epsilon=1$, existe $t_0>0$ tal que se $t>t_0$, então

$$\frac{||S(t)A^{-1}u||_{\mathcal{H}}}{t^{-\frac{1}{2}}}<1,\ u\in\mathcal{H},$$

ou ainda,

$$||S(t)A^{-1}u||_{\mathcal{H}} < \frac{1}{\sqrt{t}},\ u \in \mathcal{H}.$$

Agora, para cada $U_0 \in D(A)$, considere

$$u = \frac{AU_0}{||U_0||_{D(A)}} \in \mathcal{H},$$

segue que se $t > t_0$, então

$$||S(t)U_0||_{\mathcal{H}} < \frac{||U_0||_{D(A)}}{\sqrt{t}}.$$

Com isto, tome $M = max\{1, \sqrt{t_0}\}$. Assim, para $t \in (0, t_0]$ temos

$$||S(t)U_0||_{\mathcal{H}} \leq ||U_0||_{D(A)} \leq \frac{M||U_0||_{D(A)}}{\sqrt{t_0}} \leq \frac{M||U_0||_{D(A)}}{\sqrt{t}}.$$

Portanto, como $M \geq 1$, segue que

$$||S(t)U_0||_{\mathcal{H}} \leq \frac{M||U_0||_{D(A)}}{\sqrt{t}},\ t > 0, \tag{3.111}$$

ou seja, o semigrupo decai polinomialmente com taxa $\frac{1}{\sqrt{t}}$.

Agora, vamos mostrar que a taxa de decaimento polinomial é ótima. Para isso, suponha que existe δ de modo que $0 < \delta < 2$ e $C_1 > 0$ tal que, para $|\beta|$ suficientemente grande, temos

$$||(i\beta I - A)^{-1}F||_{\mathcal{H}} \leq C_1|\beta|^{2-\delta}||F||_{\mathcal{H}},\ \forall F \in \mathcal{H}.$$

Assim, obtemos

$$|\beta|^{\delta-2}||(i\beta I - A)^{-1}F||_{\mathcal{H}} \leq C_1||F||_{\mathcal{H}},\ \forall F \in \mathcal{H}. \tag{3.112}$$

No Teorema 3.21, vimos que existe $(\beta_n) \subset \mathbb{R}$ e $(F_n) \subset \mathcal{H}$ tal que

$$\frac{||(i\beta_n I - A)^{-1}F_n||_{\mathcal{H}}}{||F_n||_{\mathcal{H}}} > C_2|\beta_n|^2|A_n|^2 \to \infty$$

quando $n \to \infty$. Como $||F_n||^2_{\mathcal{H}} = \frac{\pi}{2\rho_1}$, segue que

$$||(i\beta_n I - A)^{-1}F_n||_{\mathcal{H}} > C_2|\beta_n|^2|A_n|^2||F_n||_{\mathcal{H}} \to \infty,$$

ou ainda,

$$|\beta_n|^{\delta-2}||(i\beta_n I - A)^{-1}F_n||_{\mathcal{H}} \geq C_2|\beta_n|^{\delta}|A_n|^2||F_n||_{\mathcal{H}} \to \infty. \tag{3.113}$$

Agora, observe que (3.112) vale particularmente para (β_n) e (F_n), ou seja

$$|\beta_n|^{\delta-2}||(i\beta_n I - A)^{-1}F_n||_{\mathcal{H}} \leq C_3||F_n||_{\mathcal{H}}. \tag{3.114}$$

Assim, de (3.113) e (3.114), obtemos

$$C_2|\beta_n|^\delta|A_n|||F_n||_{\mathcal{H}} \leq C_3||F_n||_{\mathcal{H}}.$$

Como $||F_n||_{\mathcal{H}}$ é constante, temos uma contradição, logo, a taxa $\sqrt{t}$ é ótima. $\square$

4 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi abordado o sistema de Bresse com duas dissipações friccionais, com condições de contorno mistas. A existência e unicidade de solução foi encontrada por meio da teoria de semigrupos de operadores. Além disso, foi possível estabelecer uma condição necessária e suficiente para a estabilidade exponencial da solução, onde a condição depende das relações entre os coeficientes do sistema. E ainda, se a condição não é satisfeita, foi possível mostrar que a solução possui estabilidade polinomial com taxa ótima. Para efeito de comparação entre a taxa encontrada no presente trabalho e as outras taxas dos sistemas de Bresse com dissipações friccionais, será apresentada a Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Comparação entre o resultado obtido no trabalho e os encontrados na literatura sobre estabilidade polinomial.

Referência	Condição de contorno	Relação entre coeficientes	Taxa
Trabalho atual	Dirichlet-Neumann	$\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{k}{b}$	$t^{-\frac{1}{2}}$
[2]		$k \neq k_0$	$t^{-\frac{1}{2}}$
[4]	Dirichlet	$k = k_0$ e $\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{k}{b}$	$t^{-(\frac{1}{3}-\epsilon)}$
		$k \neq k_0$ e $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b}$	$t^{-(\frac{1}{6}-\epsilon)}$
		$k \neq k_0$ e $\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{k}{b}$	$t^{-(\frac{1}{6}-\epsilon)}$
[16]		$\frac{Gh}{\rho_1} \neq \frac{EI}{\rho_2}$	$\left(\frac{ln\,t}{t}\right)^{\frac{1}{2}} ln\,t$

Fonte: Elaborado pelo Autor.

REFERÊNCIAS

[1] Adams, R.A, Fournier, J.J.F. *Sobolev Spaces*. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 2003.

[2] Alves, M.O, Fatori, L.H, Jorge Silva, M. A, Monteiro, R.N. Stability and optimality of decay rate for a weakly dissipative Bresse system. *Mathematical Methods in the Applied Sciences 38*, 5 (2014), 898-908.

[3] Borichev, A. Tomilov, Y. Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups. *Mathematische Annalen 347*, 2 (2010), 455-478.

[4] Boussouira, F, Rivera, J.M, Almeida Júnior, D.S. Stability to weak dissipative Bresse system. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 374*, 2 (2011), 481-498.

[5] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Universitext. Springer New York, 2010.

[6] Cavalcanti, M.M, Cavalcanti, V.N.D. *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*.Eduem, Maringá, 2009.

[7] Demkowick, L.F, Oden, J.T. *Applied Functional Analysis*. Crc Press, Boca Raton, 1996.

[8] Engel, K, Nagel, R. *A short Course on Operator Semigroups*. Springer. New York, 2006.

[9] Evans, L. *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 1998.

[10] Lagnese, J.E, Leugering G. and Schmidt E.J.P.G. *Modelling of dynamic networks of thin thermoelastic beams*, Math. Meth. in Appl. Sci. 16 (1993).

[11] Kesavan, S. *Functional Analysis.* Texts and readings in mathematics. Hindustan Book Agency, 2009.

[12] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley Classics Library. Wiley, 1989.

[13] Muñoz Rivera, J.E. *Estabilização de Semigrupos e Aplicações.* EAC. Rio de Janeiro, RJ. 2008.

[14] Pazy, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 1983.

[15] Santos, M.L, Júnior, D.S.A. Numerical exponential decay to dissipative Bresse system. *Journal of Applied Mathematics 2010* (2010), 1-17.

[16] Wehbe, A, Youssef, W. Exponential and polynomial stability of an elastic Bresse system with two locally distributed feedbacks. *Journal of Mathematical Physics 51*, 10 (2010), 1-17.