Universidade Estadual de Londrina

VALDECIR DE OLIVEIRA TEIXEIRA

CURVATURAS DE MÉTRICAS INVARIANTES À ESQUERDA EM GRUPOS DE LIE

Londrina
2020

VALDECIR DE OLIVEIRA TEIXEIRA

CURVATURAS DE MÉTRICAS INVARIANTES À ESQUERDA EM GRUPOS DE LIE

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Bruno Mendonça Rey dos Santos

Londrina
2020

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação -na-Publicação (CIP)

S232c Teixeira, Valdecir de Oliveira.

Curvaturas de Métricas Invariantes à Esquerda em Grupos de Lie / Valdecir de Oliveira Teixeira. – Londrina, 2020.
74 f. : il.

Orientador: Bruno Mendonça Rey dos Santos.
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2020.

Inclui Bibliografia.

1. Curvatura Seccional. 2. Curvatura de Ricci. 3. Métricas Bi-invariantes. I. Santos, Bruno Mendonça Rey dos. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Curvaturas de Métricas Invariantes à Esquerda em Grupos de Lie.

519.681-7

VALDECIR DE OLIVEIRA TEIXEIRA

CURVATURAS DE MÉTRICAS INVARIANTES À ESQUERDA EM GRUPOS DE LIE

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Bruno Mendonca Rey dos Santos
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Felippe Soares Guimarães
Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka
Universidade Estadual de Maringá

Londrina, 16 de dezembro de 2020.

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, e aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, sem Ele nada é possível. Agradeço a minha família, amigos e professores pelo apoio. Agradeço sobretudo ao meu orientador, professor Bruno, pela paciência e ajuda inestimável ao longo de todo este percurso. Por fim, agradeço a todos que de alguma forma me ajudaram durante todo esse período da minha vida.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

TEIXEIRA, Valdecir de Oliveira. **Curvaturas de Métricas Invariantes à Esquerda em Grupos de Lie**. 2020. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

RESUMO

Neste trabalho estudamos as curvaturas seccional e de Ricci de métricas Riemannianas invariantes por translação à esquerda em grupos de Lie. Também estudamos as curvaturas de métricas Riemannianas bi-invariantes. Esta dissertação de mestrado é baseada no estudo do artigo *Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups*, de John Willard Milnor (ver ref. [9]).

Palavras-chave: Geometria Diferencial. Grupos de Lie. Métricas Riemannianas. Curvatura Seccional. Curvatura de Ricci.

TEIXEIRA, Valdecir de Oliveira. **Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups**. 2020. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

ABSTRACT

In this work we study the sectional and Ricci curvatures of invariants Riemannian metrics by left translation on Lie groups. We also study the curvatures of bi-invariant Riemannian metrics. This dissertation is based on the study of John Willard Milnor's article *Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups* (see ref. [9]).

Keywords: Differential Geometry. Lie Groups. Riemannian Metrics. Sectional Curvature. Ricci Curvature.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Neste trabalho estudamos as curvaturas seccional e de Ricci de métricas Riemannianas invariantes por translação à esquerda em grupos de Lie. Para isto, dividimos este trabalho em duas partes. Na primeira parte (Capítulo 1) estão os resultados preliminares, onde colocamos de forma resumida todo o necessário para o estudo do artigo do John Milnor (ver ref. [9]). É nesta primeira parte que estão definidos os conceitos de variedade suave, grupo de Lie, álgebra de Lie, métrica Riemanniana, curvatura seccional e de Ricci junto com alguns teoremas.

Na segunda parte (Capítulo 2) é onde estão apresentados de modo detalhado os resultados estudados no artigo do Milnor. Ela é dividida em três seções. Na primeira seção (Seção 2.1), estudamos a curvatura seccional. Começamos definindo o conceito de métrica Riemanniana invariante por translação à esquerda (Definição 2.1), que é uma métrica Riemanniana com respeito ao qual as translações à esquerda em um grupo de Lie G são isometrias, isto é,

$$\langle X_p, Y_p\rangle = \langle d(L_q)_p(X_p), d(L_q)_p(Y_p)\rangle.$$

Do mesmo modo, definimos uma métrica Riemanniana invariante à direita em G, como uma métrica Riemanniana com respeito ao qual as translações à direita de G são isometrias. Uma métrica Riemanniana em G que é invariante à esquerda e invariante à direita, é chamada de métrica Riemanniana bi-invariante.

Na Definição 2.3 são definidas as constantes de estrutura α_{ijk} de uma álgebra de Lie em relação a uma base ortonormal $(E_1, \ldots, E_n)$ para $Lie(G)$, onde

$$[E_i, E_j] = \sum_k \alpha_{ijk} E_k$$

ou equivalentemente

$$\alpha_{ijk} = \langle [E_i, E_j], E_k\rangle$$

e mostramos no Lema 2.7 que a curvatura seccional do plano gerado por (E_1, E_2) pode ser calculada completamente da informação sobre as constantes de estrutura da álgebra de Lie, junto com sua métrica, isto é,

$$\begin{aligned} K(E_1, E_2) = \sum_k \Bigg(& \frac{1}{2}\alpha_{12k}(-\alpha_{12k} + \alpha_{2k1} + \alpha_{k12}) \\ & - \frac{1}{4}(\alpha_{12k} - \alpha_{2k1} + \alpha_{k12})(\alpha_{12k} + \alpha_{2k1} - \alpha_{k12}) - \alpha_{k11}\alpha_{k22}\Bigg). \end{aligned}$$

Concluímos que a curvatura depende das constantes de estrutura e é zero quando elas são zero.

Definimos em 2.8 o endomorfismo adjunto, que é a transformação linear

$$ad(X)\colon Lie(G) \longrightarrow Lie(G)$$

dada por $ad(X)Y = [X,Y]$. Esta transformação tem um papel extremamente importante em toda a teoria desenvolvida, por exemplo, no Lema 2.10 mostramos que dada uma base ortonormal $(E_1,\ldots,E_n)$ para $Lie(G)$, se a transformação linear $ad(E_i)$ é anti-adjunta, então as constantes de estrutura α_{ijk} são antissimétricas nos últimos dois índices, isto é,

$$\alpha_{ijk} = -\alpha_{ikj}.$$

Na Seção 2.2 estudamos a curvatura de Ricci. Começamos mostrando quais são as condições necessárias para que a curvatura de Ricci seja positiva ou negativa.

No Lema 2.22 mostramos que se a transformação linear $ad(X)$ é anti-adjunta, então a curvatura de Ricci na direção do vetor X é $r(X) \geq 0$. O Lema 2.25 nos dá um critério análogo ao Lema 2.22, para obtermos uma curvatura de Ricci negativa. Já o Teorema 2.31 nos diz que existe uma direção em que a curvatura de Ricci é estritamente negativa e uma direção em que a curvatura de Ricci é estritamente positiva.

Por fim, na Seção 2.3 apresentamos alguns resultados sobre métricas bi-invariantes. Começamos definindo em 2.32 a representação adjunta do grupo de Lie G,

$$\text{Ad}\colon G \longrightarrow GL(Lie(G)).$$

Também consideramos na Definição 2.33 a representação adjunta de $Lie(G)$, que é a aplicação

$$ad\colon Lie(G) \longrightarrow \mathfrak{gl}(Lie(G)),$$

definida por $ad(X)Y = [X,Y]$.

O Lema 2.35 permite-nos dizer que uma métrica é bi-invariante se, e somente se, para cada elemento $g \in G$ a transformação linear

$$\text{Ad}(g)\colon Lie(G) \longrightarrow Lie(G)$$

é um isometria, ou seja,

$$\langle \text{Ad}(g)X, \text{Ad}(g)Y\rangle = \langle X, Y\rangle,$$

e o Lema 2.37 mostra que uma métrica em $Lie(G)$ é bi-invariante se cada $ad(X)$ é anti-adjunta.

Entre outros resultados, o Corolário 2.38 mostra que todo grupo de Lie compacto admite uma métrica bi-invariante de modo que todas as curvaturas seccionais satisfazem $K \geq 0$. Mais ainda, se X e Y são ortonormais então é válida a seguinte igualdade:

$$K(X,Y) = \frac{1}{4} \left| [X,Y] \right|^2 .$$

É importante observarmos que ao longo deste trabalho usaremos sistematicamente a **convenção de somatório de Einstein**:

$$E(x) = x^i E_i \quad \text{é uma abreviação para} \quad E(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i E_i.$$

Interpretamos tal expressão de acordo com a seguinte regra: se o mesmo índice (tal como i na expressão acima) aparece pelo menos duas vezes em qualquer termo monomial, uma vez como índice superior e uma vez como índice inferior, o termo é entendido como sendo o somatório de todos os possíveis valores desse índice, geralmente de 1 até a dimensão do espaço em questão. Expressões que violam a convenção de somatório, tais como o produto interno Euclidiano $x \cdot y = \sum_i x^i y^i$, na qual o mesmo índice aparece duas vezes na posição superior serão sempre escritas de modo explícito com os sinais de somatório. Sempre que possível escreveremos (x^i) no lugar de $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, ou (E_i) em vez de $(E_1, E_2, \ldots, E_k)$.

1 RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos definições e resultados que serão usados posteriormente no Capítulo 2. O desenvolvimento do conteúdo deste capítulo pode ser visto com mais detalhes nas referências [1], [2] e [4].

1.1 Variedades Suaves

Definição 1.1. *Seja M um espaço topológico. Dizemos que M é uma* ***variedade topológica de dimensão*** *n ou uma n-**variedade topológica** se as seguintes propriedades são satisfeitas:*
*(a) M é um **espaço de Hausdorff**: para cada par de pontos distintos $p, q \in M$, existem subconjuntos abertos disjuntos $U, V \subseteq M$ tais que $p \in U$ e $q \in V$.*
*(b) M é **segundo enumerável**: existe um base enumerável para a topologia de M.*
*(c) M é **localmente Euclidiano de dimensão** n: cada ponto de M tem uma vizinhança homeomorfa a um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$.*

Definição 1.2. *Seja M uma n-variedade topológica. Uma **carta coordenada** (**carta de coordenadas** ou apenas **carta**) em M é um par (U, φ), onde U é um subconjunto aberto de M e $\varphi \colon U \longrightarrow \hat{U}$ é um homeomorfismo de U em um subconjunto aberto $\hat{U} = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Sejam (U, φ) e (V, ψ) duas cartas tais que $U \cap V \neq \emptyset$, a aplicação composta $\psi \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$ é chamada de **aplicação de transição de** φ **para** ψ (ver Fig. 1.1). Duas cartas (U, φ) e (V, ψ) são ditas **suavemente compatíveis** se $U \cap V = \emptyset$ ou se a aplicação de transição $\psi \circ \varphi^{-1}$ é um difeomorfismo de classe C^∞.*

Definição 1.3. *Um conjunto de cartas cujos domínios cobrem a variedade topológica M é chamado de **atlas para** M. Um atlas é chamado de **atlas suave** se duas cartas arbitrárias neste atlas são suavemente compatíveis. Um atlas em M é **maximal** se não está propriamente contido em um atlas suave maior.*

Definição 1.4. *Se M é uma variedade topológica, uma **estrutura suave em** M é um atlas suave maximal. Uma **variedade suave** é uma variedade topológica dotada com uma estrutura suave em M.*

Proposição 1.5. *Seja M uma variedade topológica.*
(a) Todo atlas suave para M está contido em um único atlas suave maximal.
(b) Dois atlas suaves para M determinam a mesma estrutura suave se, e somente se, sua união é um atlas suave.

Demonstração. (a) Seja $\mathcal{A}$ um atlas suave para M. Mostraremos que existe um único atlas maximal contendo $\mathcal{A}$.

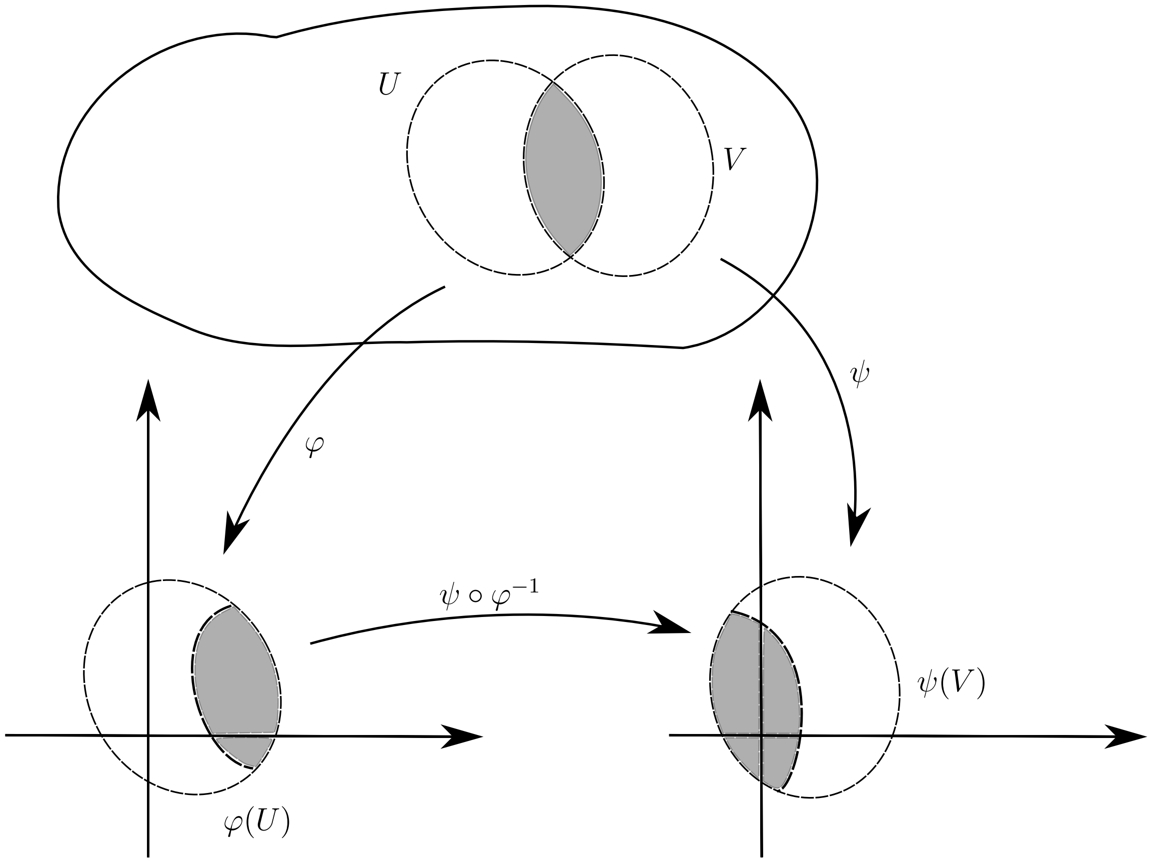

Figura 1.1: Aplicação de transição

Existência: Denotaremos por $\tilde{\mathcal{A}}$ o conjunto de todas as cartas que são suavemente compatíveis com cada carta em $\mathcal{A}$. Para mostrarmos que $\tilde{\mathcal{A}}$ é um atlas suave, mostraremos que qualquer duas cartas de $\tilde{\mathcal{A}}$ são suavemente compatíveis com cada outra, isto é, para qualquer $(U, \varphi), (V, \psi) \in \tilde{\mathcal{A}}$, a aplicação $\psi \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$ é suave.

Observamos que $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$, dessa forma $\tilde{\mathcal{A}}$ cobre M. Seja $x = \varphi(p) \in \varphi(U \cap V)$ qualquer. Como o domínio das cartas em $\mathcal{A}$ cobrem M, então existe uma carta $(W, \theta) \in \mathcal{A}$ tal que $p \in W$ (Fig. 1.2). Desde que cada carta é suavemente compatível com (W, θ), ambas as aplicações $\theta \circ \varphi^{-1}$ e $\psi \circ \theta^{-1}$ são suaves. Como $p \in U \cap V \cap W$, segue que $\psi \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ \theta^{-1}) \circ (\theta \circ \varphi^{-1})$ é suave em uma vizinhança de x, pois é composição de aplicações suaves. Portanto, $\psi \circ \varphi^{-1}$ é suave em uma vizinhança de cada ponto em $\varphi(U \cap V)$, e dessa forma $\tilde{\mathcal{A}}$ é um atlas suave.

Para mostrarmos que é maximal, observamos que qualquer carta que é suavemente compatível com cada carta em $\tilde{\mathcal{A}}$ deve em particular ser suavemente compatível com cada carta em $\mathcal{A}$, de modo que já está em $\tilde{\mathcal{A}}$ e portanto $\tilde{\mathcal{A}}$ é maximal.

Unicidade: Suponhamos que $\mathcal{B}$ é um outro atlas suave maximal contendo $\mathcal{A}$, logo cada uma de suas cartas é suavemente compatível com cada carta de $\mathcal{A}$, assim $\mathcal{B} \subset \tilde{\mathcal{A}}$. Mas como $\mathcal{B}$ é maximal segue que $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{A}}$.

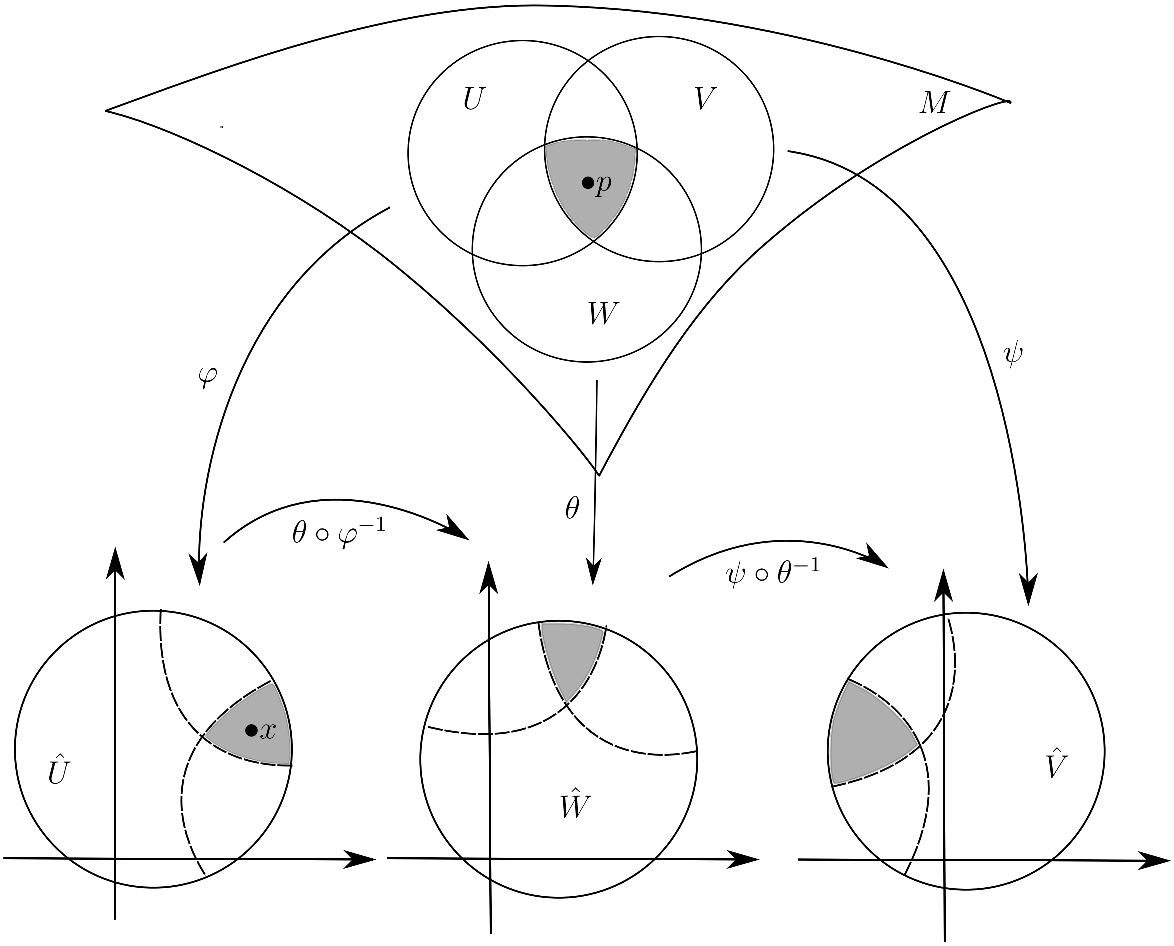

Figura 1.2: Prova da Prop. 1.5(a)

(b) Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dois atlas suaves em M. Suponhamos que ambos determinam a mesma estrutura suave, logo $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ e $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ onde $\mathcal{C}$ é o atlas maximal. Mostraremos que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ é um atlas suave.

Observamos que o domínio das cartas pertencentes a $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ cobrem M, pois o domínio das cartas de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ cobrem M. Tomando (U, φ) e (V, ψ) cartas de $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, temos quatro casos a considerar:

1^o *caso*: $U \cap V = \emptyset$, logo (U, φ) e (V, ψ) são suavemente compatíveis por definição.

2^o *caso*: $U \cap V \neq \emptyset$ e $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ é um atlas suave, temos que (U, φ) e (V, ψ) são suavemente compatíveis.

3^o *caso*: $U \cap V \neq \emptyset$ e $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{B}$. Como $\mathcal{B}$ é um atlas suave, então (U, φ) e (V, ψ) são suavemente compatíveis.

4^o *caso*: $U \cap V \neq \emptyset$ e $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ e $(V, \psi) \in \mathcal{B}$. Observamos que (U, φ) é suavemente compatível com as cartas de $\mathcal{C}$ e como $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$, temos que (U, φ) é suavemente compatível com as cartas de $\mathcal{B}$, assim (U, φ) e (V, ψ) são suavemente compatíveis.

Portanto $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ é um atlas suave.

Para mostrarmos a recíproca, sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ atlas suaves e suponhamos que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ é um atlas suave. Mostraremos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ determinam a mesma estrutura suave.

Seja $\mathcal{C}$ o atlas maximal que contém $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Por um lado $\mathcal{A} \subset (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$, logo $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$. Por outro lado, $\mathcal{B} \subset (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$, logo $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$. Pela unicidade do atlas maximal, temos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ determinam a mesma estrutura suave. $\square$

1.2 Aplicações Suaves e Vetores Tangentes

Ao longo deste artigo, reservamos o termo **função** para uma aplicação cujo contradomínio é $\mathbb{R}$ (**função real**) ou $\mathbb{R}^k$ para algum $k > 1$ (**função vetorial**).

Definição 1.6. *Sejam M e N variedades suaves e seja $F\colon M \longrightarrow N$ uma aplicação qualquer. Dizemos que F é uma* ***aplicação suave*** *se para cada $p \in M$, existem cartas suaves (U, φ) contendo p e (V, ψ) contendo $F(p)$ tal que $F(U) \subseteq V$ e a aplicação composta $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ é suave de $\varphi(U)$ para $\psi(V)$. Chamamos $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ de* ***representação coordenada de*** *F. (Ver Fig. 1.3)*

Por definição, F é suave se, e somente se, sua representação coordenada é suave em alguma carta suave na vizinhança de cada ponto.

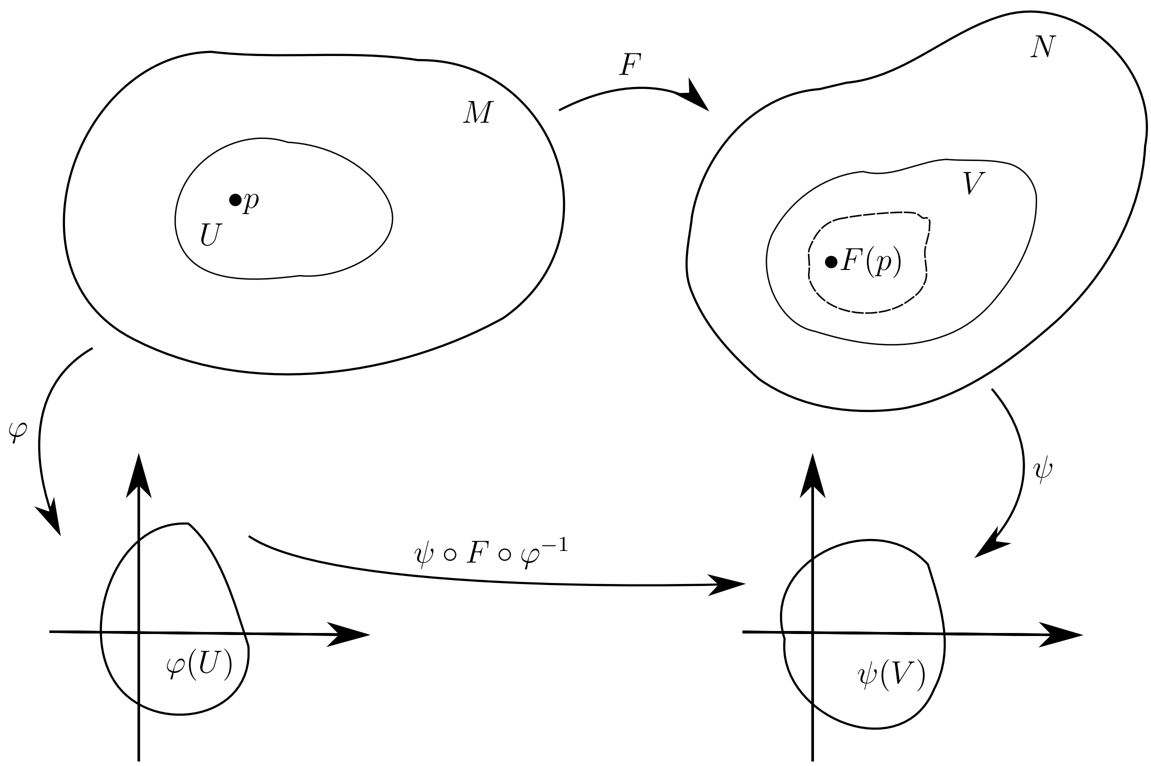

Figura 1.3: Definição de Aplicação Suave

Definição 1.7. *Seja M uma variedade suave. Denotamos por $C^\infty(M)$ o conjunto das funções $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Como a soma e a multiplicação por constante de funções suaves também é suave, $C^\infty(M)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Definição 1.8. *Sejam M uma variedade suave, $A \subseteq M$ um subconjunto fechado e $U \subseteq M$ um subconjunto aberto contendo A. Uma função contínua $\psi\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada de* ***função teste suave para*** *A* ***suportada em*** *U se $0 \leq \psi \leq 1$ em M, $\psi \equiv 1$ em A e supp $\psi \subseteq U$, onde*

$$\textit{supp}\ \psi = \overline{\{p \in M; \psi(p) \neq 0\}}$$

é chamado de ***suporte de*** *ψ.*

Definição 1.9. *Seja M uma variedade suave e $p \in M$. Uma aplicação linear $v\colon C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamado de* ***derivação em*** *p se satisfaz*

$$v(fg) = f(p)vg + g(p)vf \quad \textit{para todo } f, g \in C^\infty(M).$$

O conjunto de todas as derivações de $C^\infty(M)$ em p, denotado por T_pM, é um espaço vetorial chamado de ***espaço tangente para*** *M* ***em*** *p.*

Mostraremos que T_pM é de fato um espaço vetorial. Observamos que $T_pM \neq \emptyset$ pois $0\colon C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $0(f) = 0$ pertence ao T_pM. Sejam $u, v \in T_pM$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f, g \in C^\infty(M)$. Como $\lambda u + v \in \mathcal{L}(C^\infty(M), \mathbb{R})$, o espaço vetorial das transformações lineares de $C^\infty(M)$ em $\mathbb{R}$, basta mostrarmos que $(\lambda u + v)$ é uma derivação em p. Assim,

$$\begin{aligned}(\lambda u + v)(fg) = \lambda u(fg) + v(fg) &= \lambda[f(p)u(g) + g(p)u(f)] + f(p)v(g) + g(p)v(f)\\ &= f(p)[\lambda u(g) + v(g)] + g(p)[\lambda u(f) + v(f)]\\ &= f(p)[(\lambda u + v)(g)] + g(p)[(\lambda u + v)(f)].\end{aligned}$$

Definição 1.10. *Sejam M e N variedades suaves e $F\colon M \longrightarrow N$ uma aplicação suave, então para cada $p \in M$ definimos uma aplicação*

$$dF_p\colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N,$$

chamada de ***diferencial de*** *F* ***em*** *p (Fig. 1.4), por: dado $v \in T_pM$ seja $dF_p(v)$ a derivação em $F(p)$ que age em $f \in C^\infty(N)$ pela regra*

$$dF_p(v)f = v(f \circ F).$$

Definição 1.11. *Sejam M e N variedades suaves. Um* ***difeomorfismo de*** *M* ***para*** *N é uma aplicação suave bijetiva $F\colon M \longrightarrow N$ que tem uma inversa suave. Nós dizemos que M* ***e*** *N* ***são difeomorfos*** *se existe um difeomorfismo entre eles.*

Exemplo 1. Se M é uma variedade suave qualquer e (U, φ) é uma carta coordenada suave em M, então $\varphi\colon U \longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo. Com efeito, sua representação coordenada é uma aplicação identidade.

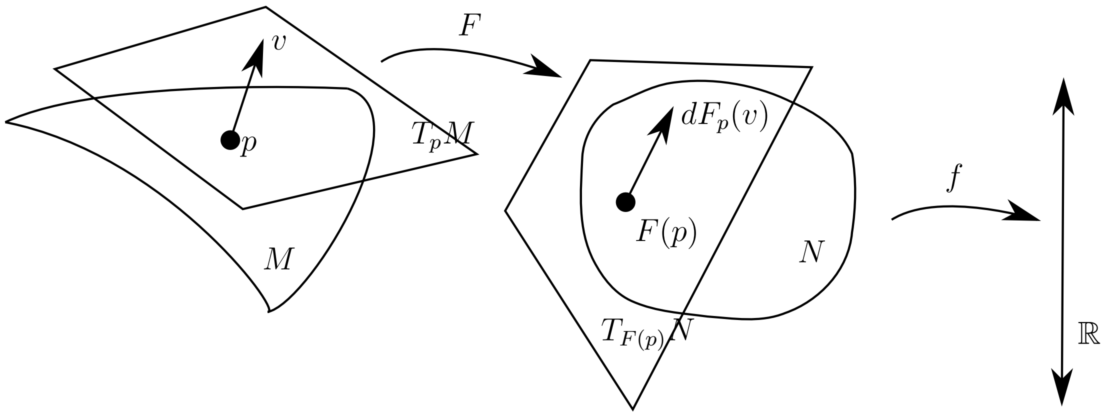

Figura 1.4: A diferencial

Proposição 1.12. *Sejam M, N e P variedades suaves, e sejam $F\colon M \longrightarrow N$ e $G\colon N \longrightarrow P$ aplicações suaves e $p \in M$. Nessas condições, valem as seguintes afirmações:*
(a) $dF_p\colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ é linear.
(b) $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p\colon T_pM \longrightarrow T_{G\circ F(p)}P$.
(c) $d(Id_M)_p = Id_{T_pM}\colon T_pM \longrightarrow T_pM$.
(d) Se F é um difeomorfismo, então $dF_p\colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ é um isomorfismo e $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$.

Demonstração. (a) Sejam $u, v \in T_pM, \lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in C^\infty(N)$. Assim

$$dF_p(\lambda u + v)(f) = (\lambda u + v)(f \circ F) = \lambda u(f \circ F) + v(f \circ F) = \lambda dF_p(u)(f) + dF_p(v)(f).$$

(b) Observamos que

$$\begin{aligned}(dG_{F(p)} \circ dF_p)(v)(f) &= dG_{F(p)}(dF_p(v))(f) = dF_p(v)(f \circ G) = v((f \circ G) \circ F)\\ &= v(f \circ (G \circ F)) = d(G \circ F)_p(v)(f),\ \forall f \in C^\infty(N) \text{ e } \forall v \in T_pM.\end{aligned}$$

(c) Temos que $d(Id_M)_p(v)(f) = v(f \circ Id_M) = v(f)$ e portanto $d(Id_M)_p(v) = v$ para todo $v \in T_pM$.

(d) Suponhamos que F seja um difeomorfismo. Por (a), dF_p é linear. Observamos que

$$d(F^{-1})_{F(p)} \circ dF_p \overset{(b)}{=} d(F^{-1} \circ F)_p = d(Id_M)_p \overset{(c)}{=} Id_{T_pM}.$$

De forma análoga, segue que $dF_p \circ d(F^{-1})_{F(p)} = Id_{T_{F(p)}N}$. Portanto dF_p é um isomorfismo e $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$. □

Proposição 1.13. *Sejam M uma variedade suave, $U \subseteq M$ um subconjunto aberto, e $\iota\colon U \hookrightarrow M$ a aplicação de inclusão. Para cada $p \in U$, a diferencial $d\iota_p\colon T_pU \longrightarrow T_pM$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Ver demonstração na referência [4], p. 56. □

Proposição 1.14. *Se M é uma n-variedade suave, então para cada $p \in M$, o espaço tangente T_pM é um espaço vetorial de dimensão n.*

Demonstração. Mostraremos que $\dim T_pM = n$. Dado $p \in M$, seja (U, φ) uma carta com coordenadas suaves contendo p. Como φ é um difeomorfismo entre U e um subconjunto aberto $\hat{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, segue da Prop. 1.12(d) que $d\varphi_p$ é um isomorfismo de T_pU para $T_{\varphi(p)}\hat{U}$. Desde que a Prop. 1.13 nos garante que $T_pM \cong T_pU$ e $T_{\varphi(p)}\hat{U} \cong T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$, segue que $\dim T_pM = \dim T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n = n$. □

Definição 1.15. *Sejam M uma variedade suave de dimensão n, (U, φ) uma carta de coordenadas suaves em M e $f \in C^\infty(M)$. Para todo $p \in U$, definimos a* ***derivada parcial*** $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ *de f como sendo:*

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}(\varphi(p)) = \left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1}),$$

onde $\varphi = (x^i)$, (r^i) são as componentes do $\mathbb{R}^n$ e $x^i = r^i \circ \varphi$. (ver Fig. 1.5)

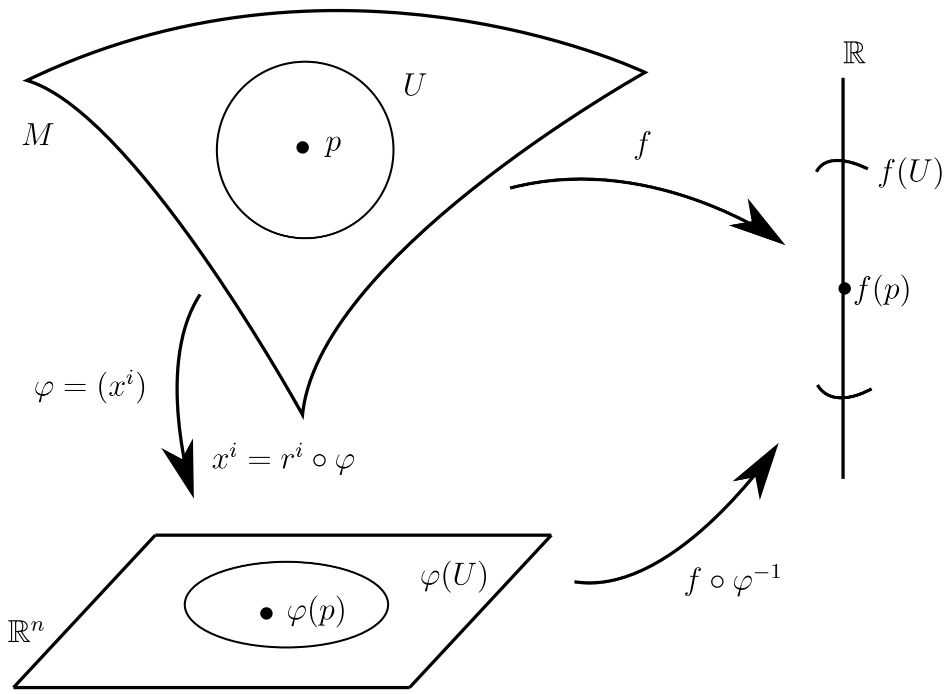

Figura 1.5: A derivada parcial

Observamos que $\dfrac{\partial f}{\partial x^i} \in C^\infty(U)$, pois $\dfrac{\partial f}{\partial x^i} = \dfrac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i} \circ \varphi$, $\varphi \in C^\infty(U)$ e $\varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U))$.

Definição 1.16. *Seja $F\colon M \longrightarrow N$ uma aplicação suave, e sejam $(U, \varphi) = (U, (x^1, \cdots, x^m))$ e $(V, \psi) = (V, (y^1, \cdots, y^n))$ cartas em coordenadas suaves de M e N, respectivamente, tais* *que $F(U) \subset V$. Denotamos por $F^i = y^i \circ F = r^i \circ \psi \circ F \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ a i-ésima componente de F na carta (V, ψ). Então a matriz*

$$\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}_{n \times m}$$

é chamada de ***matriz Jacobiana de*** *F em relação as cartas (U, φ) e (V, ψ). (ver Fig. 1.6)*

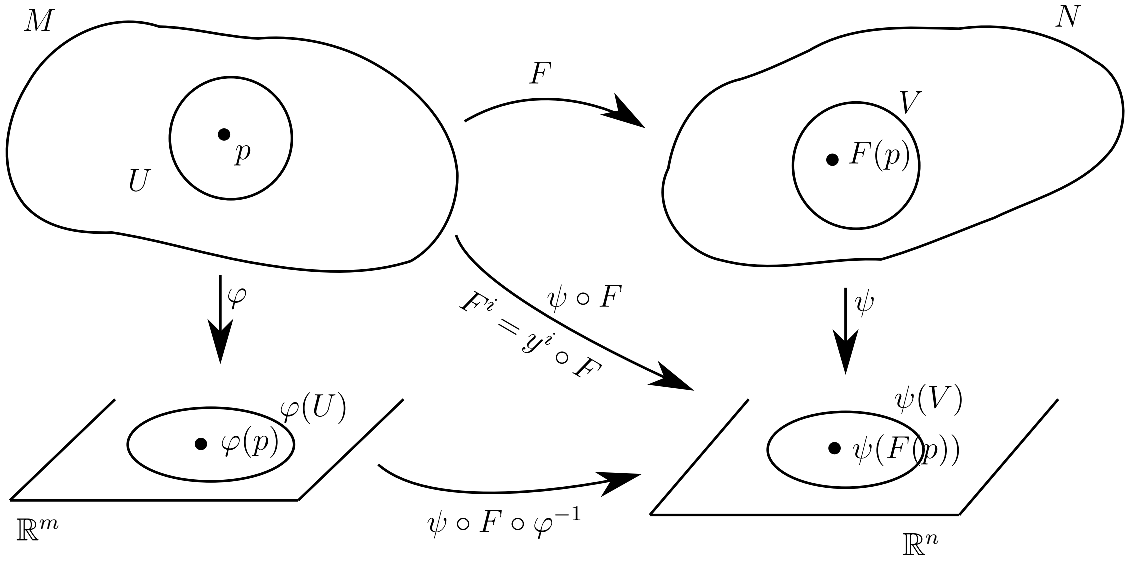

Figura 1.6: A matriz Jacobiana

Definição 1.17. *Sejam M e N variedades suaves. Uma aplicação $F \colon M \longrightarrow N$ é chamada de* ***difeomorfismo local*** *se todo ponto $p \in M$ tem uma vizinhança U tal que $F(U)$ é aberto em N e $F|_U \colon U \longrightarrow F(U)$ é um difeomorfismo.*

Agora provaremos o **Teorema da Função Inversa** para variedades.

Teorema 1.18. *Sejam M e N variedades suaves de mesma dimensão n, $F \colon M \longrightarrow N$ uma aplicação suave e $p \in M$. Nestas condições, F é um difeomorfismo local em uma vizinhança de p se, e somente se,*

$$\det \left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p) \right) \neq 0.$$

Demonstração. Pela Definição 1.16, a matriz Jacobiana de F em relação as cartas $(U, \varphi) = (U, (x^1, \cdots, x^n))$ e $(V, \psi) = (V, (y^1, \cdots, y^n))$ é dada por $\left(\dfrac{\partial F^i}{\partial x^j}(p) \right)$, sendo $F^i = y^i \circ F = r^i \circ \psi \circ F$ e $r^i \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ a projeção no i-ésimo fator. (Ver Fig. 1.7)

Observamos que

$$\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p) = \frac{\partial(r^i \circ \psi \circ F)}{\partial x^j}(p) = \frac{\partial(r^i \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1})}{\partial r^j}(\varphi(p)) = \frac{\partial(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})^i}{\partial r^j}(\varphi(p)).$$

Assim, a matriz Jacobiana de F no ponto p em relação às cartas (U, φ), (V, ψ) é exatamente a matriz Jacobiana da representação coordenada $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ no ponto $\varphi(p)$.

Como ψ e φ são difeomorfismos, então F é um difeomorfismo local em uma vizinhança de p se, e somente se, $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ é um difeomorfismo local em uma vizinhança de $\varphi(p)$. Segue-se do Teorema da Função Inversa para Espaços Euclidianos (ver [6], p. 282) que, $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ é um difeomorfismo local em uma vizinhança de $\varphi(p)$ se, e somente se, o determinante de sua matriz Jacobiana em p é não nulo. Portanto, F é um difeomorfismo local em uma vizinhança de p se, e somente se, $\det\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\right) \neq 0$. $\square$

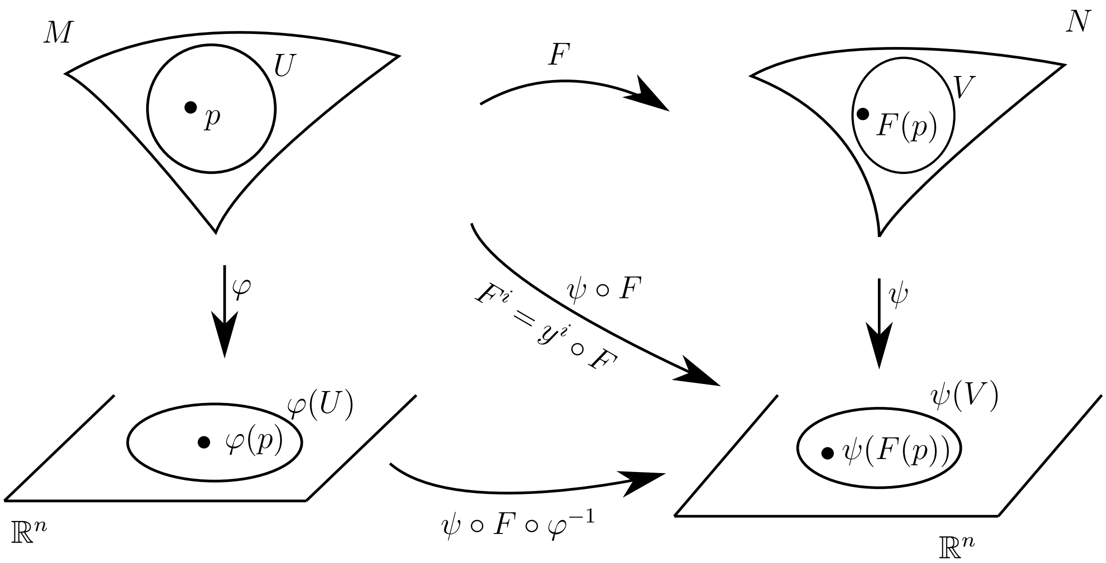

Figura 1.7: Teorema da Função Inversa

Definição 1.19. *Seja M uma variedade suave. O* ***fibrado tangente*** *de M é a união disjunta de todos os espaços tangentes de M:*

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM.$$

Em geral, se $\{A_i\}_{i \in I}$ é uma coleção de subconjuntos de um conjunto S, então sua *união disjunta* é definida para ser o conjunto

$$\bigsqcup_{i \in I} A_i \colon = \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times A_i).$$

Os subconjuntos A_i podem coincidir, mas na união disjunta eles são substituidos por cópias sem sobreposição. Na definição do fibrado tangente, a união $\bigcup_{p\in M} T_pM$ é a união disjunta $\bigsqcup_{p\in M} T_pM$.

Nós usualmente escrevemos um vetor tangente $v \in T_pM$ como um par (p, v), com $p \in M$ e $v \in T_pM$. O fibrado tangente vem equipado com uma **aplicação de projeção** natural $\pi\colon TM \longrightarrow M$ dada por $\pi(p, v) = p$ se $v \in T_pM$. Iremos usar qualquer das notações (p, v), v_p e v para um vetor tangente em T_pM, dependendo da ênfase que queremos dar ao ponto p.

Proposição 1.20. *Para qualquer n-variedade suave M, o fibrado tangente TM tem uma topologia natural e uma estrutura suave que o torna uma variedade suave $2n$-dimensional. Com respeito a essa estrutura, a projeção $\pi\colon TM \longrightarrow M$ é suave.*

Demonstração. Ver demonstração na referência [4], p. 66. □

1.3 Submersões, Imersões, Mergulhos e Subvariedades

O objetivo principal desta seção é somente o de definir o conceito de subvariedade.

Definição 1.21. *Sejam M e N variedades suaves. Dada uma aplicação suave $F\colon M \longrightarrow N$ e $p \in M$, definimos o **posto de** F **em** p como o posto da aplicação linear $dF_p\colon T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$, isto é, a dimensão da imagem de dF_p. Se F tem o mesmo posto r em cada ponto, dizemos que tem **posto constante** e denotamos rank $F = r$.*

Definição 1.22. *Sejam M e N variedades suaves. Uma aplicação suave $F\colon M \longrightarrow N$ é chamada de **submersão suave** se a sua diferencial é sobrejetivo em cada ponto (ou equivalentemente, se rank $F = \dim N$). É chamada de **imersão suave** se a sua diferencial é injetivo em cada ponto (ou equivalentemente, se rank $F = \dim M$).*

Definição 1.23. *Sejam M e N variedades suaves. Um **mergulho de** M **em** N é uma imersão suave $F\colon M \longrightarrow N$ que é também um mergulho topológico, isto é, um homeomorfismo sobre sua imagem $F(M) \subseteq N$ na topologia do subespaço.*

Definição 1.24. *Seja M uma variedade suave. Uma **subvariedade mergulhada de** M é um subconjunto $S \subseteq M$ que é uma variedade na topologia do subespaço, dotada com uma estrutura suave com respeito à qual a aplicação de inclusão $S \hookrightarrow M$ é um mergulho suave. Uma **subvariedade imersa de** M é um subconjunto $S \subseteq M$ dotado com uma topologia (não necessariamente a topologia do subespaço) com respeito à qual é uma variedade topológica, e uma estrutura suave com respeito à qual a aplicação de inclusão $S \hookrightarrow M$ é uma imersão suave. Definimos a **codimensão de** S **em** M como sendo o número $\dim M - \dim S$.*

1.4 Grupos de Lie

Definição 1.25. *Um **grupo de Lie** é uma variedade suave G que é também um grupo no sentido algébrico, satisfazendo as seguintes propriedades:*
(a) a aplicação de multiplicação $m\colon G \times G \longrightarrow G$, $m(g,h) = gh$ é uma aplicação suave e
(b) a aplicação de inversão $i\colon G \longrightarrow G$, $i(g) = g^{-1}$ é suave (e portanto, um difeomorfismo, pois $i^{-1} = i$).

Definição 1.26. *Se G é um grupo de Lie, cada elemento $g \in G$ define as seguintes aplicações:*
*(a) **translação à esquerda** $L_g\colon G \longrightarrow G$, $L_g(h) = gh$,*
*(b) **translação à direita** $R_g\colon G \longrightarrow G$, $R_g(h) = hg$,*
*(c) **conjugação** $C_g\colon G \longrightarrow G$, $C_g(h) = ghg^{-1}$.*

Como L_g pode ser expressada como a composição de aplicações suaves

$$G \xrightarrow{\iota_g} G \times G \xrightarrow{m} G,$$

onde $\iota_g(h) = (g,h)$ é a aplicação de inclusão e m é a aplicação de multiplicação, segue que L_g é suave. Além disso, L_g é um difeomorfismo, pois $L_{g^{-1}}$ é uma inversa suave:

$$(L_g \circ L_{g^{-1}})(h) = L_g(g^{-1}h) = gg^{-1}h = h,$$

$$(L_{g^{-1}} \circ L_g)(h) = L_{g^{-1}}(gh) = g^{-1}gh = h.$$

Logo, $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$. Analogamente, $R_g\colon G \longrightarrow G$ é um difeomorfismo.

Definição 1.27. *Sejam G e H grupos de Lie. Um homomorfismo $F\colon G \longrightarrow H$ suave é chamado de **homomorfismo entre grupos de Lie**. Se F é também um difeomorfismo, o qual implica que ele tem um inversa que é também um homomorfismo, então dizemos que F é um **isomorfismo entre grupos de Lie**. Neste caso dizemos que G e H são **grupos de Lie isomorfos**.*

Exemplo 2. O **grupo linear geral** $GL(n,\mathbb{R})$: Os elementos deste grupo são as matrizes $n \times n$ invertíveis com entradas reais, ou, o que é essencialmente a mesma coisa, as transformações lineares invertíveis de um espaço vetorial real de dimensão finita. Este conjunto é uma subvariedade aberta do espaço vetorial das matrizes $n \times n$, $M(n,\mathbb{R})$, isto é, do $\mathbb{R}^{n^2}$. Ele é formado por duas componentes conexas, determinadas pelo sinal do determinante. Uma delas é

$$GL^+(n,\mathbb{R}) = \{g \in GL(n,\mathbb{R}); \det g > 0\},$$

o qual é um subgrupo do $GL(n,\mathbb{R})$, pois $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ e $\det(A^{-1}) = 1/\det A$. A outra componente conexa é formada pelas matrizes com determinante menor que 0 e não é um subgrupo.

A estrutura de grupo em $GL(n, \mathbb{R})$ é dada pelo produto usual entre matrizes. Se $X = (x_{ij})$ e $Y = (y_{ij})$ são duas matrizes $n \times n$, então $Z = XY = (z_{ij})$ é dado por

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} y_{kj},$$

o qual é uma aplicação polinomial nas variáveis x_{ij} e y_{ij}. Portanto, o produto entre matrizes é uma aplicação suave. Desde que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj} A,$$

as entradas da matriz inversa são apenas funções racionais nas entradas da matriz original e portanto trivialmente suaves. Por esta razão $GL(n, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie.

Exemplo 3. Seja V um espaço vetorial real. $GL(V)$ denota o conjunto das aplicações lineares invertíveis de V em V. É um grupo sob a composição. Se V tem dimensão finita n, qualquer base para V determina um isomorfismo de $GL(V)$ com $GL(n, \mathbb{R})$. O isomorfismo não é canônico; ele depende da escolha da base em V. Dada uma base $(e_1, \ldots, e_n)$ de V e $T \in GL(V)$, para cada elemento da base $e_i \in V$, temos

$$Te_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$$

para constantes $a_{ij} \in \mathbb{R}$. A matriz correspondente a T é a matriz com entradas a_{ij}. Portanto $GL(V)$ é um grupo de Lie. A aplicação de transição entre quaisquer dois isomorfismos é dada pela aplicação da forma $A \mapsto BAB^{-1}$ (B é a matriz de transição entre as duas bases) a qual é suave. A estrutura suave em $GL(V)$ independe da base.

Definição 1.28. *Se G é um grupo e $S \subseteq G$, o* ***subgrupo gerado por*** *S é o menor subgrupo contendo S (isto é, a intersecção de todos os subgrupos contendo S).*

Proposição 1.29. *Seja G um grupo de Lie, e $W \subseteq G$ uma vizinhança qualquer da identidade. Se G é conexo, então W gera G.*

Demonstração. Ver demonstração na referência [4], p. 156. □

Definição 1.30. *Um caso particular de homomorfismo entre grupos de Lie é quando o contradomínio é um grupo linear $GL(V)$. Nesse caso, o homomorfismo é chamado* ***representação*** *de G no espaço vetorial V. O espaço V é chamado de* ***espaço da representação*** *e $\dim V$ sua dimensão.*

1.5 Campos Vetoriais e Álgebras de Lie

Definição 1.31. *Se M é uma variedade suave, um* ***campo vetorial em*** *M é uma aplicação contínua $X\colon M \longrightarrow TM$, geralmente escrita como $p \mapsto X_p$, com a propriedade que*

$$\pi \circ X = Id_M,$$

onde $\pi\colon TM \longrightarrow M$, ou equivalentemente, $X_p \in T_pM$ para cada $p \in M$. Quando a aplicação $X\colon M \longrightarrow TM$ é suave, dizemos que X é um ***campo vetorial suave****.*

Definição 1.32. *Seja M uma n-variedade suave. Se $X\colon M \longrightarrow TM$ é um campo vetorial (não necessariamente contínuo) e $(U, (x^i))$ é qualquer carta de coordenadas suaves para M, podemos escrever o valor de X em qualquer ponto $p \in U$ em termos dos vetores das coordenadas da base:*

$$X_p = X^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p.$$

Isso define n funções $X^i\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$, chamadas de ***funções componentes de*** *X na carta dada.*

Proposição 1.33. *Sejam M uma variedade suave, $X\colon M \longrightarrow TM$ um campo vetorial (não necessariamente contínuo). Se (U, φ) é qualquer carta de coordenadas suaves em M, então a restrição de X em U é suave se, e somente se, suas funções componentes com respeito a essa carta são suaves.*

Demonstração. Dada qualquer carta de coordenadas suaves (U, φ) para M, observamos que $\pi^{-1}(U) \subseteq TM$ é o conjunto de todos os vetores tangentes para M em todos os pontos de U. Seja $(x^1, \cdots, x^n)$ as funções coordenadas de φ, e definamos uma aplicação $\tilde{\varphi}\colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ por

$$\tilde{\varphi}\left(X^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right) = (x^1, \cdots, x^n, X^1(p), \cdots, X^n(p))$$

onde X^i é a i-ésima função componente de X na x^i-coordenada (ver Fig. 1.8).

Portanto a representação em coordenadas de $X\colon M \longrightarrow TM$ em U é dada por

$$\hat{X}(p) = (x^1, \cdots, x^n, X^1(p), \cdots, X^n(p)).$$

Segue que a suavidade de X em U é equivalente a suavidade de suas funções componentes. □

Se M é uma variedade suave, é comum usar a notação $\mathfrak{X}(M)$ para denotar o conjunto de todos os campos vetoriais suaves em M. Ele é um espaço vetorial real sob a adição em cada espaço tangente e multiplicação por escalar:

$$(aX + bY)_p = aX_p + bY_p.$$

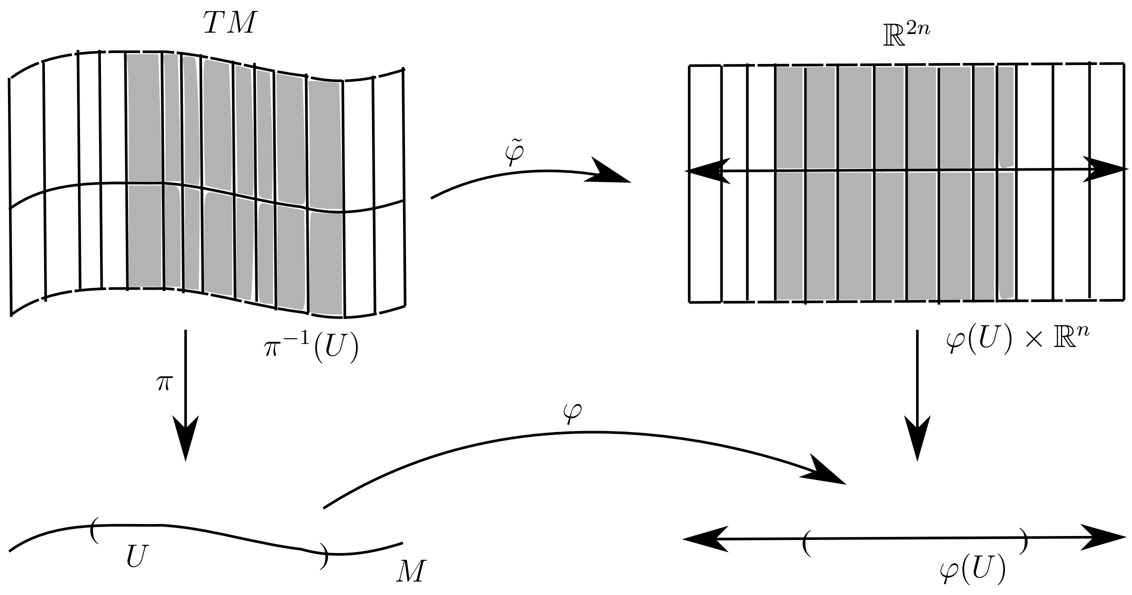

Figura 1.8: Fibrado tangente para as coordenadas

O elemento zero desse espaço vetorial é o campo vetorial nulo, cujo valor em cada $p \in M$ é $0 \in T_pM$.

Além disso, campos vetoriais suaves podem ser multiplicados por funções reais suaves: se $f \in C^\infty(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$, definimos $fX \colon M \longrightarrow TM$ por

$$(fX)_p = f(p)X_p.$$

Definição 1.34. *Seja M uma n-variedade suave. Uma k-tupla ordenada $(X_1, \ldots, X_k)$ de campos vetoriais definidos em algum subconjunto $A \subseteq M$ é dita ser* ***linearmente independente*** *se $(X_1|_p, \ldots, X_k|_p)$ é uma k-tupla linearmente independente em T_pM para cada $p \in A$, e é dita* ***gerar o fibrado tangente*** *se a k-tupla $(X_1|_p, \ldots, X_k|_p)$ gera o T_pM em cada $p \in A$. Um* ***referencial local para*** *M é uma n-tupla ordenada de campos vetoriais $(E_1, \ldots, E_n)$ definida em um subconjunto aberto $U \subseteq M$ que é linearmente independente e gera o espaço tangente; assim os vetores $(E_1|_p, \ldots, E_n|_p)$ formam uma base para o T_pM em cada $p \in U$. Dizemos que é um* ***referencial global*** *se $U = M$, e um* ***referencial suave*** *se cada campo vetorial E_i é suave.*

Uma propriedade essencial de campos vetoriais é que eles definem operadores no espaço das funções reais suaves. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e f é uma função real suave definida em um subconjunto aberto $U \subseteq M$, obtemos uma nova função $Xf \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$(Xf)_p = X_p f.$$

(Não confunda as notações fX e Xf: a primeira é um *campo vetorial suave* em U obtida multiplicando X por f, e a segunda é uma *função real* em U obtida aplicando um campo vetorial X em uma função suave f.)

Definição 1.35. *Seja M uma variedade suave. Uma aplicação $D\colon C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ é chamada de **derivação** (como distinto da derivação em p, definido em 1.9) se é linear sobre $\mathbb{R}$ e satisfaz*

$$D(fg) = fDg + gDf \quad \textit{para todo } f, g \in C^\infty(M).$$

A proposição a seguir mostra que as derivações de $C^\infty(M)$ podem ser identificadas com campos vetoriais suaves.

Proposição 1.36. *Seja M uma variedade suave. Uma aplicação $D\colon C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ é uma derivação se, e somente se, é da forma $Df = Xf$ para algum campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

Demonstração. Seja $D\colon C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ uma derivação. Precisamos construir um campo vetorial X tal que $Df = Xf$ para todo f. Supondo que existe tal campo vetorial, seu valor em $p \in M$ deve ser a derivação em p cuja ação em uma função real suave qualquer f é dada por $X_p f = (Df)(p)$. A linearidade de D garante que esta expressão depende linearmente em f, e o fato de que D é uma derivação mantém a regra do produto.

Portanto, a aplicação $X_p\colon C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ assim definida é um vetor tangente, que é uma derivação de $C^\infty(M)$ em p. Isto define X como um campo vetorial (não necessariamente contínuo). Podemos escolher coordenadas suaves (x^i) em uma vizinhança U de p. Então para $x \in U$, escrevemos

$$Xf(x) = \left(X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x \right) f = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x).$$

Mostraremos que as funções componentes X^i são suaves em U. Dado $X_x f = (Df)(x)$ para todo $x \in U$ e para todo $f \in C^\infty(M)$, temos que

$$X_x f = X^j(x) \frac{\partial f}{\partial x^j}(x).$$

Portanto

$$X_x \varphi_i = X^j(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^j}(x) = X^j(x) \frac{\partial(\varphi_i \circ \varphi^{-1})}{\partial r^j} \varphi(x) = X^j(x) \frac{\partial r_i}{\partial r^j} \varphi(x) = X^j(x)\delta_{ij} = X^i(x),$$

para todo $x \in U$. Conseqüentemente $X^i(x) = X_x \varphi_i = (D\varphi_i)(x)$ para todo $x \in U$, e $X^i = D\varphi_i$ é suave.

Como as funções componentes X^i são suaves em U, segue que Xf é suave em U. Desde que o mesmo é verdadeiro em uma vizinhança de cada ponto, Xf é suave em M. Como $Xf = Df$ é suave sempre que $f \in C^\infty(M)$, este campo vetorial é suave.

Para mostrarmos a recíproca, apenas observe que cada campo vetorial suave induz uma derivação. □

Definição 1.37. *Seja $F\colon M \longrightarrow N$ uma aplicação suave e X um campo vetorial em M, e suponha que exista um campo vetorial Y em N com a propriedade de que para cada $p \in M$,*

$dF_p(X_p) = Y_{F(p)}$. *Neste caso, dizemos que os campos vetoriais* X *e* Y *são* F***-relacionados*** *(Fig. 1.9).*

Proposição 1.38. *Sejam* $F\colon M \longrightarrow N$ *uma aplicação suave entre variedades,* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $Y \in \mathfrak{X}(N)$*. Então* X *e* Y *são* F*-relacionados se, e somente se, para cada função real suave* $f \in C^\infty(N)$*,*

$$X(f \circ F) = (Yf) \circ F. \tag{1.1}$$

Demonstração. Para qualquer $p \in M$ e qualquer função real suave f definida em uma vizinhança de $F(p)$, temos

$$X(f \circ F)(p) = X_p(f \circ F) \overset{\text{Def. 1.10}}{=} dF_p(X_p)f,$$

enquanto que,

$$(Yf) \circ F(p) = (Yf)(F(p)) = Y_{F(p)}f.$$

Assim, a equação (1.1) é verdadeira para todo f se, e somente se, $dF_p(X_p) = Y_{F(p)}$ para todo p, isto é, se, e somente se, X e Y são F-relacionados. $\square$

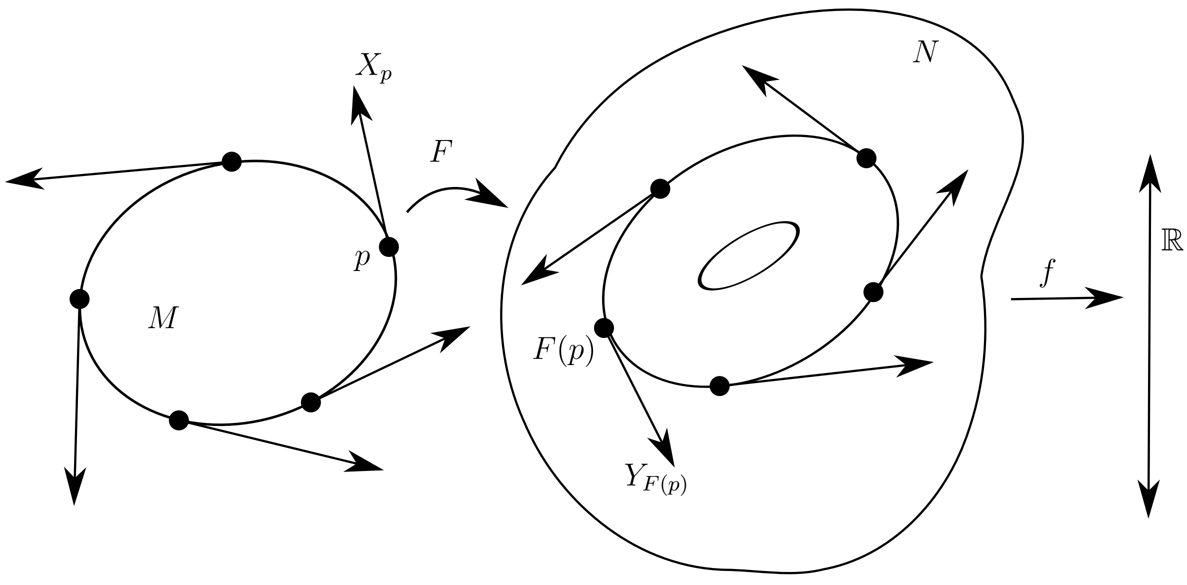

Figura 1.9: Campos vetoriais F-relacionados

Proposição 1.39. *Sejam* M *e* N *variedades suaves e* $F\colon M \longrightarrow N$ *um difeomorfismo. Para cada* $X \in \mathfrak{X}(M)$*, existe um único campo vetorial suave em* N *que é* F*-relacionado a* X*.*

Demonstração. Para $Y \in \mathfrak{X}(N)$ ser F-relacionado a X significa que $dF_p(X_p) = Y_{F(p)}$ para cada $p \in M$. Se F é um difeomorfismo, definimos Y como

$$Y_q = dF_{F^{-1}(q)}(X_{F^{-1}(q)}).$$

Assim, Y é o único campo vetorial (não necessariamente contínuo) que é F-relacionado a X. Observamos que $Y\colon N \longrightarrow TN$ é a composição das seguintes aplicações suaves:

$$N \xrightarrow{F^{-1}} M \xrightarrow{X} TM \xrightarrow{dF} TN.$$

Segue que Y é suave. □

Definição 1.40. *Na situação da Proposição 1.39 denotamos o único campo vetorial que é F-relacionado a X por F_*X, e o chamamos de* ***pushforward de** X **por** F.*

A prova da Proposição 1.39 mostra que F_*X é definido explicitamente pela fórmula

$$(F_*X)_q = dF_{F^{-1}(q)}(X_{F^{-1}(q)}). \tag{1.2}$$

Definição 1.41. *Sejam M uma variedade suave, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$. Definimos um operador $[X,Y]\colon C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$, chamado de* ***colchete de Lie de** X **e** Y, *por*

$$[X,Y]f = XYf - YXf.$$

Lema 1.42. *O colchete de Lie de qualquer par de campos vetoriais suaves é um campo vetorial suave.*

Demonstração. Pela Proposição 1.36 é suficiente mostrarmos que $[X,Y]$ é uma derivação de $C^\infty(M)$. Para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, calculamos

$$\begin{aligned}
[X,Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) = X(fYg + gYf) - Y(fXg + gXf)\\
&= (Xf)(Yg) + fXYg + (Xg)(Yf) + gXYf\\
&- (Yf)(Xg) - fXYg - (Yg)(Xf) - gYXf\\
&= fXYg + gXYf - fYXg - gYXf\\
&= f[X,Y]g + g[X,Y]f.
\end{aligned}$$

Resta mostrarmos que $[X,Y]$ é linear. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
[X,Y](\alpha f + g) &= XY(\alpha f + g) - YX(\alpha f + g) = \alpha XYf + XYg - \alpha YXf - YXg\\
&= \alpha(XYf - YXf) + XYg - YXg = \alpha[X,Y]f + [X,Y]g.
\end{aligned}$$ □

O valor do campo vetorial $[X,Y]$ em um ponto $p \in M$ é o mesmo da derivação em p dada pela fórmula

$$[X,Y]_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf).$$

Proposição 1.43. *O colchete de Lie satisfaz as seguintes identidades para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:*

(a) ***Bilinearidade:*** *Para* $a, b \in \mathbb{R}$,

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$$
$$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y].$$

(b) ***Antissimetria:***

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

(c) ***Identidade de Jacobi:***

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

(d) ***Regra do produto:*** *Para* $f, g \in C^\infty(M)$,

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + (fXg)Y - (gYf)X.$$

Demonstração. Ver demonstração na referência [4], p. 188. □

Proposição 1.44. *Seja* $F\colon M \longrightarrow N$ *uma aplicação suave e* $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ *tais que* X_i *é* F*-relacionado a* Y_i *para* $i = 1, 2$*. Então* $[Y_1, Y_2]$ *é* F*-relacionado a* $[X_1, X_2]$*, isto é,* $F_*[X_1, X_2] = [F_*X_1, F_*X_2]$.

Demonstração. Usando a Proposição 1.38 e o fato de que X_i e Y_i, $i = 1, 2$ são F-relacionados,

$$X_1X_2(f \circ F) \overset{(1.1)}{=} X_1((Y_2f) \circ F) \overset{(1.1)}{=} (Y_1Y_2f) \circ F.$$

Analogamente

$$X_2X_1(f \circ F) \overset{(1.1)}{=} (Y_2Y_1f) \circ F.$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} F_*[X_1, X_2](f)(q) &\overset{(1.2)}{=} dF_{F^{-1}(q)}([X_1, X_2]_{F^{-1}(q)})f \\ &\overset{\text{Def. 1.10}}{=} [X_1, X_2](f \circ F)(p) \\ &\overset{\text{Def. 1.41}}{=} X_1X_2(f \circ F)(p) - X_2X_1(f \circ F)(p) \\ &= (Y_1Y_2f) \circ F(p) - (Y_2Y_1f) \circ F(p) \\ &= ([Y_1, Y_2]f) \circ F(p) \\ &= [F_*X_1, F_*X_2](f)(q). \end{aligned}$$

□

Definição 1.45. *Seja* G *um grupo de Lie. Um campo vetorial* X *em* G *é dito ser* ***invariante à***

esquerda *se é invariante sob todas as translações à esquerda, no sentido que é L_g-relacionado a si mesmo para cada $g \in G$. Mais explicitamente,*

$$d(L_g)_{g'}(X_{g'}) = X_{gg'}, \quad \textit{para todo} \ \ g, g' \in G.$$

Desde que L_g é um difeomorfismo, isso pode ser abreviado escrevendo $(L_g)_*X = X$ para cada $g \in G$.

Como $(L_g)_*(aX + bY) = a(L_g)_*X + b(L_g)_*Y$, o conjunto de todos os campos vetoriais invariantes à esquerda em G é um subespaço vetorial de $\mathfrak{X}(G)$.

Proposição 1.46. *Seja G um grupo de Lie, e sejam X e Y campos vetoriais invariantes à esquerda em G. Então $[X, Y]$ é também invariante à esquerda.*

Demonstração. Seja $g \in G$ arbitrário. Desde que $(L_g)_*X = X$ e $(L_g)_*Y = Y$ pela definição de invariância à esquerda, segue da Proposição 1.44 que

$$(L_g)_*[X, Y] = [(L_g)_*X, (L_g)_*Y] = [X, Y].$$

Portanto, $[X, Y]$ é L_g-relacionado a si mesmo para cada g, ou seja, é invariante à esquerda. $\square$

Definição 1.47. *Uma* ***álgebra de Lie*** *(sobre $\mathbb{R}$) é um espaço vetorial real $\mathfrak{g}$ dotado com uma aplicação chamada de* ***colchete*** *de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$, usualmente denotado por $(X, Y) \mapsto [X, Y]$, que satisfaz as seguintes propriedades para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$:*

(a) ***Bilinearidade:*** *Para $a, b \in \mathbb{R}$,*

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$$
$$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y].$$

(b) ***Antissimetria:***

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

(c) ***Identidade de Jacobi:***

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Observamos que a identidade de Jacobi é um substituto para a associatividade, a qual em geral não é válida para colchetes em uma álgebra de Lie.

Definição 1.48. *Se V é um espaço vetorial, o espaço vetorial de todas as aplicações lineares de V em si mesmo é uma álgebra de Lie, denotada por $\mathfrak{gl}(V)$, com o* ***colchete comutador*** *definido do seguinte modo:*

$$[A, B] = A \circ B - B \circ A.$$

Definição 1.49. *A álgebra de Lie de todos os campos vetoriais invariantes à esquerda suaves em um grupo de Lie G é chamada de* ***álgebra de Lie (associada) de*** *G, e é denotada por $Lie(G)$.*

Proposição 1.50. *Seja G um grupo de Lie. A aplicação $\varepsilon\colon Lie(G) \longrightarrow T_eG$, dada por $\varepsilon(X) = X_e$, é um isomorfismo entre espaços vetoriais. Portanto $Lie(G)$ tem dimensão finita igual a dimensão de G.*

Demonstração. Primeiro mostraremos que ε é linear sobre $\mathbb{R}$. Dados $X, Y \in Lie(G)$ e $a, b \in \mathbb{R}$, temos

$$\varepsilon(aX + bY) = (aX + bY)_e = aX_e + bY_e = a\varepsilon(X) + b\varepsilon(Y).$$

Agora mostraremos que ε é injetivo. Se $\varepsilon(X) = X_e = 0$ para algum $X \in Lie(G)$, então a invariância à esquerda de X implica que $X_g = d(L_g)_e(X_e) = 0$ para cada $g \in G$, de modo que $X = 0$.

Por fim mostraremos que ε é sobrejetivo. Com efeito, seja $v \in T_eG$ arbitrário. Definimos um campo vetorial (não necessariamente contínuo) v^L em G por

$$v^L|_g = d(L_g)_e(v)$$

(ver Fig. 1.10). Se existe um campo vetorial invariante à esquerda em G cujo valor na identidade é v, certamente é dado por esta fórmula. Afirmamos que v^L é suave (uma prova deste fato pode ser encontrada em ref. [4], p. 191). Resta mostrarmos que v^L é invariante à esquerda, isto é,

$$d(L_h)_g(v^L|_g) = v^L|_{hg}$$

para todo $g, h \in G$. Segue-se da definição de v^L e do fato que $L_h \circ L_g = L_{hg}$:

$$d(L_h)_g(v^L|_g) = d(L_h)_g \circ d(L_g)_e(v) = d(L_h \circ L_g)_e(v) = d(L_{hg})_e(v) = v^L|_{hg}.$$

Assim $v^L \in Lie(G)$. Desde que L_e é a aplicação identidade de G, segue que $\varepsilon(v^L) = v^L|_e = v$, e portanto ε é sobrejetivo. $\square$

Todo homomorfismo entre grupos de Lie induz um homomorfismo entre as álgebras de Lie, como mostra o próximo teorema.

Teorema 1.51. *Sejam G e H grupos de Lie, e sejam $Lie(G)$ e $Lie(H)$ suas álgebras de Lie. Suponha que $F\colon G \longrightarrow H$ é um homomorfismo entre grupos de Lie. Para cada $X \in Lie(G)$,*

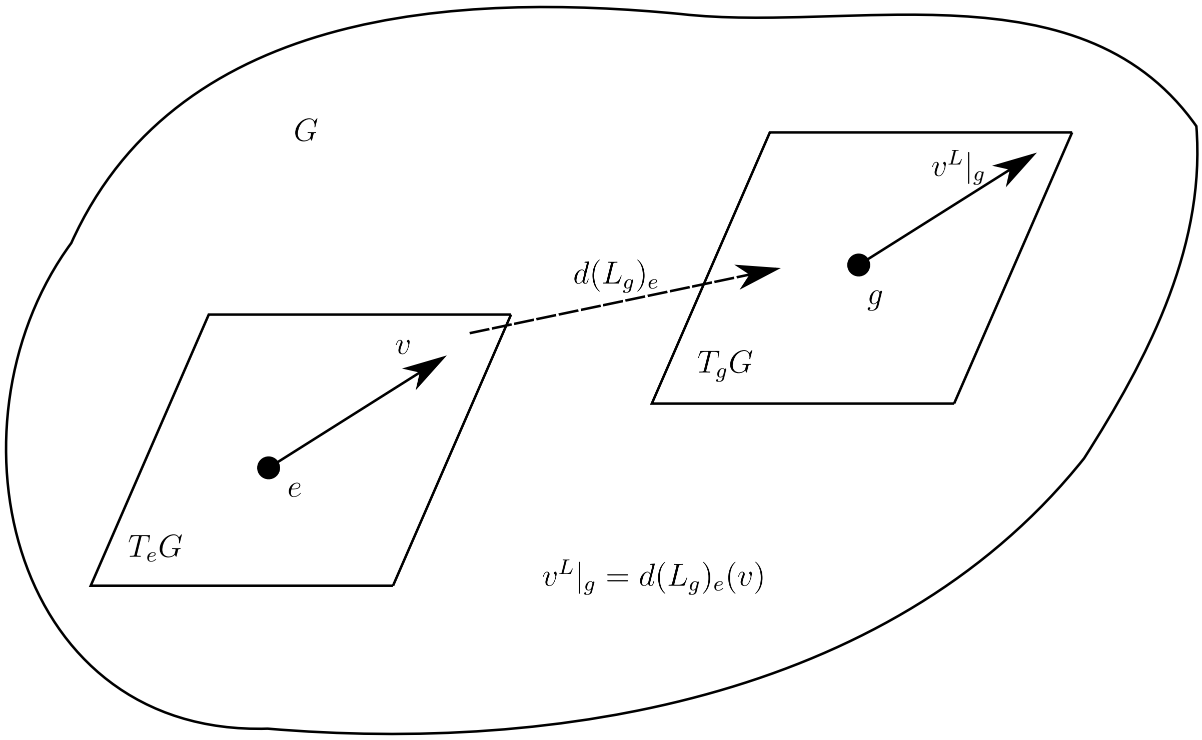

Figura 1.10: Definindo um campo vetorial invariante à esquerda

existe um único campo em $Lie(H)$ que é F-relacionado a X. Com este campo vetorial denotado por F_*X, a aplicação $F_*\colon Lie(G) \longrightarrow Lie(H)$ assim definida é um homomorfismo entre álgebras de Lie.

Demonstração. Se existe algum campo vetorial $Y \in Lie(H)$ que é F-relacionado a X, ele deve satisfazer $Y_e = dF_e(X_e)$, e assim ele deve ser unicamente determinado por $Y = (dF_e(X_e))^L$. Para mostrarmos que Y é F-relacionado a X, observamos que sendo F um homomorfismo, então

$$\begin{aligned} F(gg') = F(g)F(g') &\Longrightarrow F(L_g g') = L_{F(g)}F(g') \\ &\Longrightarrow F \circ L_g = L_{F(g)} \circ F \\ &\Longrightarrow dF_{gp} \circ d(L_g)_p = d(L_{F(g)})_{F(p)} \circ dF_p. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} dF_g(X_g) &= dF_g(d(L_g)_e(X_e)) = (dF_g \circ d(L_g)_e)(X_e) = (d(L_{F(g)})_{F(e)} \circ dF_e)(X_e) \\ &= d(L_{F(g)})_e(dF_e(X_e)) = d(L_{F(g)})_e(Y_e) = Y_{F(g)}. \end{aligned}$$

(ver Fig. 1.11) Portanto X e Y são F-relacionados.

Para cada $X \in Lie(G)$, seja F_*X o único campo vetorial em $Lie(H)$ que é F-relacionado a X. Segue imediatamente da Proposição 1.44 que $F_*[X,Y] = [F_*X, F_*Y]$, e assim F_* é um homomorfismo entre álgebras de Lie. $\square$

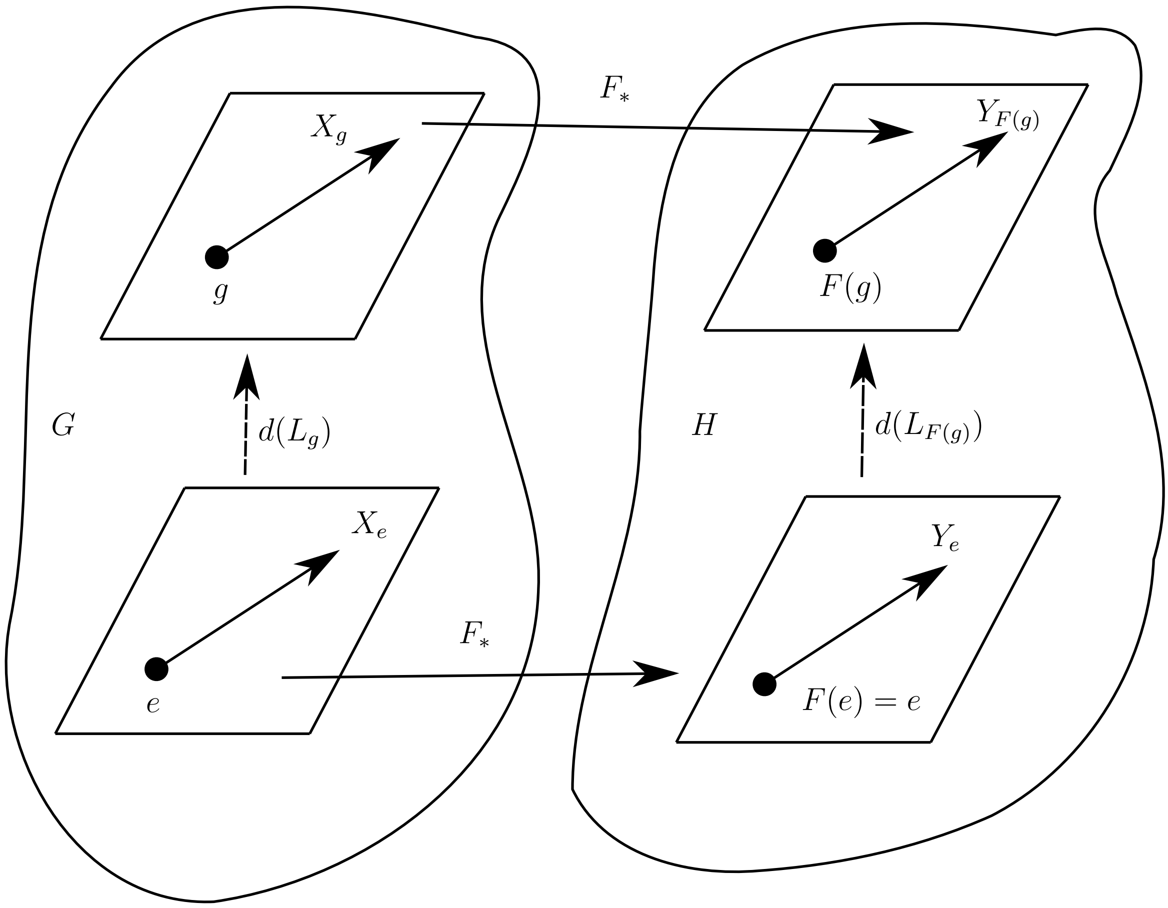

Figura 1.11: Homomorfismo induzido entre álgebras de Lie

Definição 1.52. *A aplicação $F_*\colon Lie(G) \longrightarrow Lie(H)$, cuja existência é assegurada no Teorema 1.51, é chamada de* ***homomorfismo entre álgebras de Lie****.*

Proposição 1.53. *São válidas as seguintes propriedades para homomorfismos induzidos:*
(a) O homomorfismo $(Id_G)_*\colon Lie(G) \longrightarrow Lie(G)$ induzido pela aplicação identidade de G é a identidade de $Lie(G)$.
(b) Se $F_1\colon G \longrightarrow H$ e $F_2\colon H \longrightarrow K$ são homomorfismos entre grupos de Lie, então

$$(F_2 \circ F_1)_* = (F_2)_* \circ (F_1)_*\colon Lie(G) \longrightarrow Lie(K).$$

(c) Grupos de Lie isomorfos têm álgebra de Lie isomorfas.

Demonstração. (a) e (b) Ambas as relações $d(Id_G)_e = Id_{T_eG}$ e $d(F_2 \circ F_1)_e = d(F_2)_{F_1(e)} \circ d(F_1)_e$ são válidas para diferenciais. Desde que o homomorfismo induzido é determinado pelo diferencial na identidade, isto prova (a) e (b).

(c) Se $F\colon G \longrightarrow H$ é um isomorfismo, (a) e (b) juntos implicam que $F_* \circ (F^{-1})_* = (F \circ F^{-1})_* = Id_H$, e $(F^{-1})_* \circ F_* = (F^{-1} \circ F)_* = Id_G$, de modo que $F_*\colon Lie(G) \longrightarrow Lie(H)$ é um isomorfismo. $\square$

Definição 1.54. *Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie, um subespaço vetorial $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ é chamado de* ***subálgebra de Lie de*** $\mathfrak{g}$ *se é fechado sob o colchete. Neste caso, $\mathfrak{h}$ é também uma álgebra de Lie com a restrição do mesmo colchete.*

Definição 1.55. *Seja ρ é uma representação de dimensão finita (suave) de G em V. A álgebra de Lie do grupo $GL(V)$ é denotada por $\mathfrak{gl}(V)$, ela coincide com o espaço vetorial das transformações lineares de V em V com o colchete dado pelo comutador (ver Def. 1.48). A diferencial de ρ na identidade $d\rho_e \colon Lie(G) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é um homomorfismo entre álgebras de Lie, e como tal, uma representação em V da álgebra de Lie $Lie(G)$. Essa representação é denominada* ***representação infinitesimal*** *associada a ρ.*

1.6 Fibrados Vetoriais

Definição 1.56. *Seja M uma variedade suave. Um* ***fibrado vetorial (real) suave de posto*** k ***sobre*** M *é uma variedade suave E junto com uma aplicação suave sobrejetiva $\pi \colon E \longrightarrow M$ satisfazendo as seguintes condições:*
(a) Para cada $p \in M$, a fibra $E_p = \pi^{-1}(p)$ sobre p é dotada com a estrutura de um espaço vetorial real de dimensão k.
(b) Para cada $p \in M$, existe uma vizinhança U de p em M e um difeomorfismo $\phi \colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^k$ (chamado de ***trivialização local suave de*** E ***sobre*** U*), satisfazendo as seguintes condições (Fig. 1.12):*

- *$\pi_U \circ \phi = \pi$ (onde $\pi_U \colon U \times \mathbb{R}^k \longrightarrow U$ é a projeção);*
- *para cada $q \in U$, a restrição de ϕ para E_q é um isomorfismo entre espaços vetoriais de E_q para $\{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$.*

Os exemplos mais importantes de fibrados vetoriais são os fibrados tangentes.

Proposição 1.57. *Seja M uma n-variedade suave, e seja TM seu fibrado tangente. Com a sua aplicação de projeção usual, sua estrutura de espaço vetorial natural em cada fibra, e a topologia e estrutura suave construídas na Proposição 1.20, TM é um fibrado vetorial suave de posto n sobre M.*

Demonstração. Ver demonstração na referência [4], p. 252. □

Definição 1.58. *Seja $\pi \colon E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial. Uma* ***seção de*** E *é uma aplicação contínua $\sigma \colon M \longrightarrow E$ satisfazendo $\pi \circ \sigma = Id_M$. Isto significa que $\sigma(p)$ é um elemento da fibra E_p para cada $p \in M$. Uma* ***seção local de*** E *é uma aplicação contínua $\sigma \colon U \longrightarrow E$ definida num subconjunto aberto $U \subseteq M$ e satisfazendo $\pi \circ \sigma = Id_U$. Uma seção definida em todo M é chamada de* ***seção global****. Se M é uma variedade suave e E é um fibrado vetorial suave, uma* ***seção (local ou global) suave de*** E *é uma aplicação suave de seu domínio em E.*

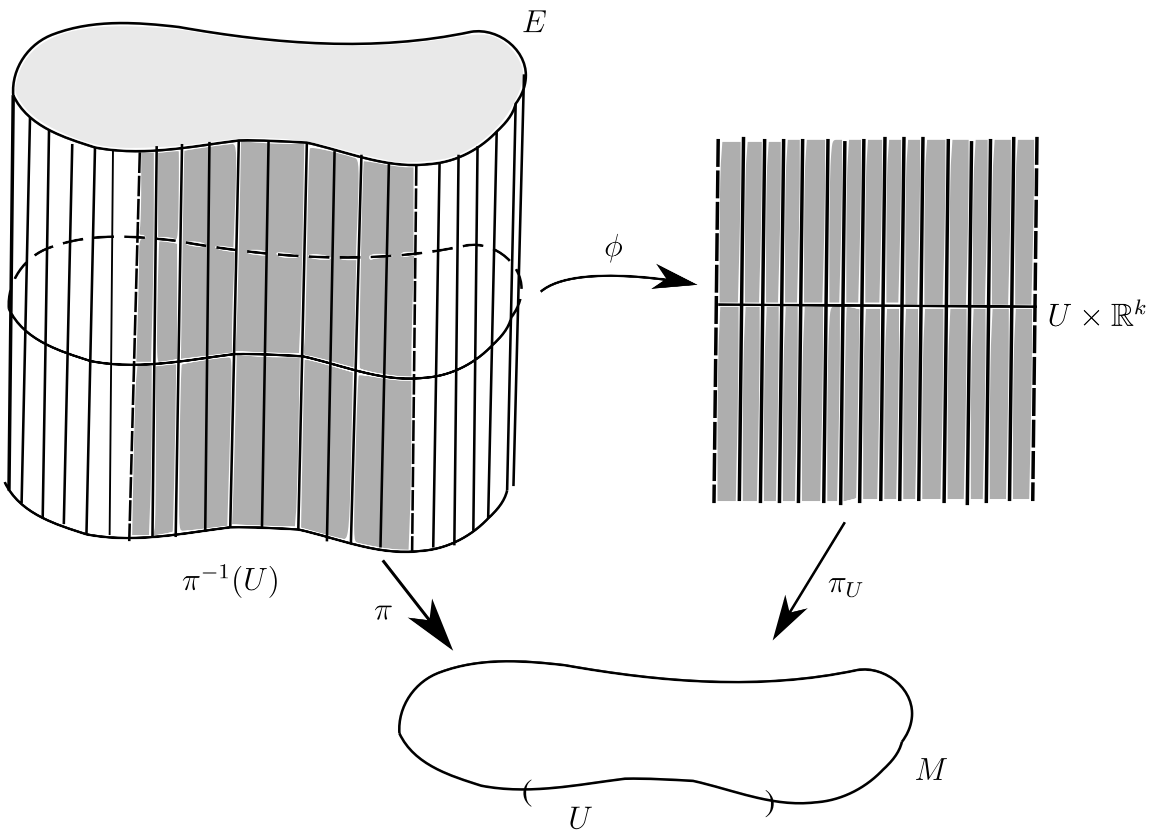

Figura 1.12: Uma trivialização local de um fibrado vetorial

Se $E \longrightarrow M$ é um fibrado vetorial suave, o conjunto de todas as seções globais suaves de E é um espaço vetorial sob a adição ponto a ponto e multiplicação por escalar:

$$(c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2)(p) = c_1\sigma_1(p) + c_2\sigma_2(p).$$

Este espaço vetorial é usualmente denotado por $\Gamma(E)$. Se $f \in C^\infty(M)$ e $\sigma \in \Gamma(E)$, obtemos uma nova seção $f\sigma$ definida por

$$(f\sigma)(p) = f(p)\sigma(p).$$

Definição 1.59. *Se V um espaço vetorial de dimensão finita. Um **covetor em** V é um funcional linear em V, isto é, uma aplicação linear $\omega\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$. O espaço de todos os covetores em V é um espaço vetorial real sob as operações de adição ponto a ponto e multiplicação por escalar, sendo denotado por V^* e chamado de **espaço dual de** V.*

Definição 1.60. *Seja M uma variedade suave. Para cada $p \in M$, definimos o **espaço cotangente em** p, denotado por T_p^*M, como sendo o espaço dual do T_pM:*

$$T_p^*M = (T_pM)^*.$$

*Os elementos de T_p^*M são chamados de **covetores tangentes em** p, ou apenas **covetores em** p.*

Definição 1.61. *Para qualquer variedade suave M, a união disjunta*

$$T^*M = \bigsqcup_{p\in M} T_p^*M$$

é chamada de ***fibrado cotangente de*** *M. Existe uma aplicação de projeção natural $\pi\colon T^*M \longrightarrow M$ enviando $\omega \in T_p^*M$ para $p \in M$. Dadas quaisquer coordenadas locais suaves (x^i) em um subconjunto aberto $U \subseteq M$, para cada $p \in U$ denotamos a base dual para o T_p^*M por $(\lambda^i|_p)$. Isso define n aplicações $\lambda^1, \dots \lambda^n\colon U \longrightarrow T^*M$, chamadas de* ***campos covetoriais coordenados****.*

Proposição 1.62. *Seja M uma n-variedade suave. Com sua aplicação de projeção usual e a estrutura de espaço vetorial natural em cada fibra, o fibrado cotangente T^*M tem uma única topologia e estrutura suave tornando-o num fibrado vetorial suave de posto n sobre M para o qual todos os campos covetoriais coordenados são seções locais suaves.*

Demonstração. Ver demonstração na referência [4], p. 276. □

Definição 1.63. *Uma seção (local ou global) de T^*M é chamada de* ***campo covetorial*** *ou uma* 1***-forma diferencial****.*

Se ω é um campo covetorial e X é um campo vetorial em M, então podemos construir uma função $\omega(X)\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\omega(X)(p) = \omega_p X(p), \quad p \in M.$$

Definição 1.64. *Seja M uma variedade suave, e seja $U \subseteq M$ um subconjunto aberto. Um* ***co-referencial local para*** *M* ***sobre*** *U é uma n-tupla ordenada de campos covetoriais $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ definida em U tal que $(\varepsilon^i|_p)$ forma uma base para o T_p^*M em cada ponto $p \in U$. Se $U = M$, ele é chamado de um* ***co-referencial global****.*

Definição 1.65. *Seja M uma variedade suave, e seja $U \subseteq M$ um subconjunto aberto. Para qualquer carta suave $(U, (x^i))$, os campos covetoriais coordenados (λ^i) dados na Definição 1.61 constituem um co-referencial local sobre U, chamado de* ***co-referencial coordenado****. Todo co-referencial coordenado é suave, pois suas funções componentes na carta dada são constantes.*

Definição 1.66. *Dado um referencial local $(E_1, \dots, E_n)$ para TM sobre um subconjunto aberto U, existe um co-referencial local unicamente determinado $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ sobre U tal que $(\varepsilon^i|_p)$ é a base dual para $(E_i|_p)$ para cada $p \in U$, ou equivalentemente $\varepsilon^i(E_j) = \delta_{ij}$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Esse co-referencial é chamado de* ***co-referencial dual para*** *(E_i). Reciprocamente, se começarmos com um co-referencial local (ε^i) sobre um subconjunto aberto $U \subseteq M$, existe um referencial local (E_i) unicamente determinado, chamado de* ***referencial dual para*** *(ε^i), determinado por $\varepsilon^i(E_j) = \delta_{ij}$.*

Denotamos o espaço vetorial real de todos os campos covetoriais suaves em M por $\mathfrak{X}^*(M)$. Como seções suaves de um fibrado vetorial, os elementos de $\mathfrak{X}^*(M)$ podem ser multiplicados por funções reais: se $f \in C^\infty(M)$ e $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$, o campo covetorial $f\omega$ é definido por

$$(f\omega)_p = f(p)\omega_p.$$

Definição 1.67. *Dados uma variedade suave M e fibrados vetoriais suaves $E' \to M$ e $E'' \to M$ de postos k' e k'', respectivamente, construímos um novo fibrado vetorial sobre M chamado de* ***soma de Whitney de** E' **e** E'', cuja fibra em cada $p \in M$ é a soma direta $E'_p \times E''_p$. O espaço total é definido como*

$$E' \times E'' = \bigsqcup_{p \in M} \left(E'_p \times E''_p \right),$$

cuja projeção é a aplicação usual $\pi \colon E' \times E'' \longrightarrow M$.

1.7 MÉTRICAS RIEMANNIANAS

Definição 1.68. *Seja M uma variedade suave. Uma* ***métrica Riemanniana em** M é uma função suave $g \colon TM \times TM \longrightarrow \mathbb{R}$ em que*
(a) $TM \times TM$ é a soma de Whitney;
(b) a restrição $g|_{T_pM \times T_pM}$ é um produto interno (bilinear e positivo definido) para cada $p \in M$.

Em outras palavras, uma métrica Riemanniana é uma função que associa cada ponto $p \in M$ a um produto interno g_p em T_pM, isto é, uma função bilinear $g_p \colon T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que para cada vizinhança coordenada (U, φ) de M, as funções $g_{ij} = g(E_i, E_j)$ definidas por g e os referenciais coordenados $(E_1, \ldots, E_n)$ são de classe C^∞. Para simplificar a notação escrevemos usualmente $g(X_p, Y_p)$ em vez de $g_p(X_p, Y_p)$.

Lema 1.69. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Definindo $g \colon TM \times TM \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinear em cada T_pM. São equivalentes:*
(a) g é suave.
(b) Para todo $p \in M$, existe um referencial local $(E_1, \ldots, E_n)$ definido em uma vizinhança U de p, tal que as funções $g_{ij} \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $g_{ij}(q) = g_p(E_i|_q, E_j|_q)$ são suaves.
(c) Para todo $p \in M$ e para qualquer referencial local $(E_1, \ldots, E_n)$ definido em uma vizinhança U de p as funções $g_{ij} \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $g_{ij}(q) = g_p(E_i|_q, E_j|_q)$ são suaves.

Exemplo 4. O mais simples exemplo de uma métrica Riemanniana é a **métrica Euclidiana** $\overline{g}$ em $\mathbb{R}^n$, dada em coordenadas usuais por

$$\overline{g} = \delta_{ij} dx^i dx^j,$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. É comum abreviarmos o produto simétrico de um tensor α por si mesmo por α^2, de modo que a métrica Euclidiana também pode ser escrita como

$$\overline{g} = (dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2.$$

Aplicada em vetores $v, w \in T_p\mathbb{R}^n$, temos

$$\overline{g}_p(v, w) = \delta_{ij} v^i w^j = \sum_{i=1}^{n} v^i w^i = v \cdot w.$$

Proposição 1.70. *Toda variedade suave admite uma métrica Riemanniana.*

Demonstração. Ver demonstração na referência [4], p. 329. □

Definição 1.71. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. O **comprimento** ou **norma** de um vetor tangente $v \in T_pM$ é definido como*

$$|v|_g = \langle v, v \rangle_g^{1/2} = g_p(v, v)^{1/2}.$$

*O **ângulo** entre dois vetores tangentes não nulos $v, w \in T_pM$ é o único $\theta \in [0, \pi]$ satisfazendo*

$$\cos\theta = \frac{\langle v, w \rangle_g}{|v|_g |w|_g}.$$

*Os vetores tangentes $v, w \in T_pM$ são chamados de **ortogonais** se $\langle v, w \rangle_g = 0$. Isso significa que, ou um ou ambos os vetores são nulos, ou o ângulo entre eles é $\pi/2$.*

Definição 1.72. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n. Dizemos que um referencial local $(E_1, \ldots, E_n)$ para M em um subconjunto aberto $U \subseteq M$ (como na definição 1.34), é um **referencial ortonormal** se os vetores $(E_1|_p, \ldots, E_n|_p)$ formam uma base ortonormal para T_pM em cada ponto $p \in U$, ou equivalentemente se $\langle E_i, E_j \rangle_g = \delta_{ij}$.*

Proposição 1.73. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e (X_j) um referencial local suave para M sobre um subconjunto aberto $U \subseteq M$. Então existe um referencial ortonormal suave (E_j) sobre U tal que*

$$\mathit{span}(E_1|_p, \ldots, E_j|_p) = \mathit{span}(X_1|_p, \ldots, X_j|_p)$$

para cada $j = 1, \ldots, n$ e cada $p \in U$

Demonstração. Aplicando o algoritmo de Gram-Schmidt aos vetores $(X_j|_p)$ em cada $p \in U$, obtemos uma n-tupla de campos vetoriais $(E_1, \ldots, E_n)$ dada indutivamente por

$$E_1 = \frac{X_1}{|X_1|} \quad \text{e} \quad E_j = \frac{X_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle X_j, E_i \rangle_g E_i}{\left| X_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle X_j, E_i \rangle_g E_i \right|} \quad \forall j > 1.$$

Para cada $j = 1, \dots, n$ e cada $p \in U$, $X_j|_p \notin \operatorname{span}(E_1|_p, \dots, E_{j-1}|_p)$ (o qual é igual ao $\operatorname{span}(X_1|_p, \dots, X_{j-1}|_p)$), de modo que o denominador acima é uma função suave em U que não se anula em parte alguma. Assim sendo, essa fórmula define (E_j) como um referencial ortonormal em U que satisfaz a conclusão da proposição. $\square$

Definição 1.74. *Sejam (M, g) e $(\tilde{M}, \tilde{g})$ variedades Riemannianas. Uma aplicação $F\colon M \longrightarrow \tilde{M}$ é chamada de* ***isometria (Riemanniana)*** *se ela é um difeomorfismo que satisfaz*

$$\langle u, v\rangle_{g_p} = \langle dF_p(u), dF_p(v)\rangle_{\tilde{g}_{F(p)}}, \quad \text{para todo } p \in M \text{ e } u, v \in T_pM.$$

De modo mais geral, F é chamado de ***isometria local*** *se cada ponto $p \in M$ tem uma vizinhança U tal que $F|_U$ é uma isometria de U sobre um subconjunto aberto de $\tilde{M}$.*

Se existe uma isometria Riemanniana entre (M, g) e $(\tilde{M}, \tilde{g})$, dizemos que elas são variedades Riemannianas ***isométricas****. Se cada ponto de M tem uma vizinhança que é isométrica a um subconjunto aberto de $(\tilde{M}, \tilde{g})$, então dizemos que (M, g) é localmente isométrico a $(\tilde{M}, \tilde{g})$. Dizemos que (M, g) é uma* ***variedade Riemanniana plana****, e g é uma* ***métrica plana****, se (M, g) é localmente isométrica ao $(\mathbb{R}^n, \overline{g})$ (ver Exemplo 4).*

Definição 1.75. *Seja M uma variedade suave. Um* ***segmento de curva em*** *M é uma curva contínua $\gamma\colon [a, b] \longrightarrow M$ cujo domínio é um intervalo compacto. Dizemos que é um* ***segmento de curva suave*** *se ele é suave quando consideramos γ como a restrição de uma curva suave e um* ***segmento de curva suave por partes*** *se existe uma partição finita $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$ de $[a, b]$ tal que $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$ é suave para cada i.*

Definição 1.76. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Se $\gamma\colon [a, b] \longrightarrow M$ é um segmento de curva suave por partes, o* ***comprimento de*** *γ é*

$$l_g(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|_g dt.$$

Definição 1.77. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana conexa. Para quaisquer $p, q \in M$, a* ***distância (Riemanniana) de*** *p* ***para*** *q, denotada por $d_g(p, q)$ é definida como o ínfimo de $l_g(\gamma)$ sobre todos os segmentos de curvas suaves por partes γ de p para q.*

Teorema 1.78. *Sejam (M, g) e $(\tilde{M}, \tilde{g})$ variedades Riemannianas e $F\colon M \longrightarrow \tilde{M}$ uma isometria local. Então $l_{\tilde{g}}(F \circ \gamma) = l_g(\gamma)$ para cada segmento de curva suave por partes γ em M.*

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} l_{\tilde{g}}(F \circ \gamma) &= \int_a^b |(F \circ \gamma)'(t)|_{\tilde{g}} dt \\ &= \int_a^b |dF_{\gamma(t)}(\gamma'(t))|_{\tilde{g}} dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^b \sqrt{\tilde{g}_{F\circ\gamma(t)}(dF_{\gamma(t)}(\gamma'(t)), dF_{\gamma(t)}(\gamma'(t)))}dt \\
&\overset{\text{Def. 1.74}}{=} \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}dt \\
&= l_g(\gamma).
\end{aligned}
$$
□

Teorema 1.79. *Sejam (M, g) e $(\tilde{M}, \tilde{g})$ variedades Riemannianas conexas e $F\colon M \longrightarrow \tilde{M}$ uma isometria Riemanniana. Então*

$$d_{\tilde{g}}(F(p), F(q)) = d_g(p, q)$$

para todo $p, q \in M$.

Demonstração. Seja $\gamma\colon [a, b] \longrightarrow M$ um segmento de curva suave por partes tal que $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$, então $F \circ \gamma$ é um segmento de curva suave por partes de $F(p)$ para $F(q)$. Portanto, pelo Teorema 1.78 temos $l_{\tilde{g}}(F \circ \gamma) = l_g(\gamma)$ e conseqüentemente,

$$\mathrm{d}_{\tilde{g}}(F(p), F(q)) = \inf l_{\tilde{g}}(F \circ \gamma) = \inf l_g(\gamma) = \mathrm{d}_g(p, q).$$

Analogamente, se $\tilde{\gamma}$ é um segmento de curva suave por partes de $F(p)$ para $F(q)$ então $F^{-1} \circ \tilde{\gamma}$ é um segmento de curva suave por partes de p para q e $l_{\tilde{g}}(\tilde{\gamma}) = l_g(F^{-1} \circ \tilde{\gamma})$. □

O Teorema 1.79 nos garante a equivalência entre as definições de isometria (Riemanniana) entre variedades como dado na Definição 1.74 e a definição de isometria entre espaços métricos.

Definição 1.80. *O **diâmetro** de uma variedade Riemanniana conexa (M, g) é*

$$\textit{diam}(M)\colon = \sup\{d_g(p, q); p, q \in M\}.$$

Observe que o diâmetro de uma esfera de raio R é πR (não $2R$), desde que a distância Riemanniana (ver Def. 1.77) entre os pontos antipodais é πR.

Definição 1.81. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana conexa. Dado $p_0 \in M$ e um número real $\varepsilon > 0$, chamamos de ε-**bola fechada** o conjunto*

$$B[p_0, \varepsilon] = \{p \in M; d_g(p, p_0) \leq \varepsilon\}.$$

*Neste caso, p_0 é chamado de **centro** e ε de **raio** da bola.*

1.8 CONEXÕES

Definição 1.82. *Seja $\pi\colon E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial sobre uma variedade M, seja $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto de todos os campos vetoriais suaves em M, e $\Gamma(E)$ o espaço de todas as seções* *suaves de E. Uma **conexão** em E é uma aplicação*

$$\nabla\colon \mathfrak{X}(M) \times \varGamma(E) \longrightarrow \varGamma(E),$$

que se indica por $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, satisfazendo as seguintes propriedades:
(a) $\nabla_X Y$ é linear sobre $C^\infty(M)$ em X:

$$\nabla_{fX_1+gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y \quad \text{para } f, g \in C^\infty(M);$$

(b) $\nabla_X Y$ é linear sobre $\mathbb{R}$ em Y:

$$\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2 \quad \text{para } a, b \in \mathbb{R};$$

(c) ∇ satisfaz a seguinte regra do produto:

$$\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y \quad \text{para } f \in C^\infty(M).$$

*O símbolo ∇ é lido "del" ou "nabla", e $\nabla_X Y$ é chamado de **derivada covariante de** Y **na direção de** X.*

Lema 1.83. *Se ∇ é uma conexão em um fibrado E, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \varGamma(E)$, e $p \in M$, então $\nabla_X Y|_p$ depende apenas dos valores de X e Y em uma vizinhança arbitrariamente pequena de p. Mais precisamente, $X = \tilde{X}$ e $Y = \tilde{Y}$ em uma vizinhança de p, então $\nabla_X Y|_p = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_p$.*

Demonstração. Primeiro consideraremos Y. Escrevendo $Z = Y - \tilde{Y}$, é suficiente mostrarmos que $\nabla_X Z|_p = 0$ se $Z = 0$, isto é, $Y = \tilde{Y}$ em uma vizinhança U de p. Escolhemos uma função teste $\varphi \in C^\infty(M)$ com suporte em U tal que $\varphi(p) = 1$ (ver Def. 1.8). A hipótese de que $Y = \tilde{Y}$ em U implica que $\varphi Z = 0$ em todo M, pois

$$\varphi Y = \varphi\tilde{Y} \Longrightarrow \varphi Y - \varphi\tilde{Y} = 0 = \varphi(Y - \tilde{Y}) = \varphi Z,$$

de modo que $\nabla_X(\varphi Z) = \nabla_X(0 \cdot \varphi Z) = 0 \cdot \nabla_X(\varphi Z) = 0$. Assim para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$ a regra do produto nos dá

$$0 = \nabla_X(\varphi Z) = (X\varphi)Z + \varphi(\nabla_X Z). \tag{1.3}$$

Calculando a equação (1.3) em p e observando que $Z = 0$ no suporte de φ, temos

$$0 = (X\varphi)(p)\cancelto{0}{Z_p} + \cancelto{1}{\varphi(p)}(\nabla_X Z|_p) \Longrightarrow \nabla_X Z|_p = 0.$$

Portanto

$$\nabla_X Z|_p = \nabla_X (Y - \tilde{Y})|_p = 0 \Longrightarrow \nabla_X Y|_p = \nabla_X \tilde{Y}|_p.$$

De modo análogo mostra-se que $\nabla_X Y|_p = \nabla_{\tilde{X}} Y|_p$. Logo $\nabla_X Y|_p = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_p$. □

O Lema 1.83 nos diz que podemos calcular $\nabla_X Y$ em p conhecendo somente os valores de X e Y próximos de p. O lema seguinte nos mostra que precisamos conhecer somente o valor de X em p.

Lema 1.84. *Se ∇ é uma conexão em um fibrado E, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \Gamma(E)$, e $p \in M$, então $\nabla_X Y|_p$ depende apenas dos valores de Y em uma vizinhança de p e do valor de X em p.*

Demonstração. Pela linearidade, é suficiente mostrarmos que $\nabla_{X-\tilde{X}} Y|_p = 0$ sempre que $(X - \tilde{X})_p = 0$. Escolhemos uma vizinhança coordenada U de p, e escrevemos $X - \tilde{X} = Z = Z^i \partial_i$ com coordenadas em U e $Z^i(p) = 0$. Então, para qualquer $Y \in \Gamma(E)$,

$$\nabla_Z Y|_p \overset{\text{Lema 1.83}}{=} \nabla_{Z^i \partial_i} Y|_p = \cancelto{0}{Z^i(p)} \nabla_{\partial_i} Y|_p = 0.$$

Na primeira igualdade usamos o Lema 1.83, o qual permite-nos calcular $\nabla_X Y|_p$ localmente em U; na segunda, usamos a linearidade da derivada covariante $\nabla_X Y$ sobre $C^\infty(M)$ em X. Portanto

$$\nabla_X Y|_p = \nabla_{\tilde{X}} Y|_p.$$

□

Definição 1.85. *Uma **conexão linear (ou afim)** em M é uma conexão em TM, isto é, uma aplicação*

$$\nabla \colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

satisfazendo todas as propriedades da Definição 1.82.

Definição 1.86. *Seja ∇ uma conexão em M e (E_i) um referencial local para TM e um subconjunto aberto $U \subset M$. Para quaisquer escolhas de índices i e j, podemos expandir $\nabla_{E_i} E_j$ em termos desse mesmo referencial:*

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k.$$

*Isso define n^3 funções Γ_{ij}^k em U, chamadas de **símbolos de Christoffel** de ∇ com respeito a esse referencial.*

Proposição 1.87. *Toda variedade admite uma conexão linear.*

Demonstração. Ver demonstração na referência [3], Proposição 4.5, p. 52. □

Definição 1.88. *Seja g uma métrica Riemanniana em uma variedade M. Dizemos que uma conexão linear ∇ é **compatível com** g se ela satisfaz a seguinte regra do produto para todos os campos vetoriais X, Y, Z:*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \qquad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \tag{1.4}$$

Definição 1.89. *Uma conexão linear ∇ é dita ser* ***simétrica*** *se satisfaz a seguinte expressão:*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]. \tag{1.5}$$

Teorema 1.90 (Levi-Civita). *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Existe uma única conexão linear ∇ em M que é compatível com g e simétrica.*

Demonstração. Ver demonstração na referência [3], Teorema 5.4, p. 68. □

Definição 1.91. *A conexão dada pelo Teorema 1.90 acima é denominada* ***conexão de Levi-Civita*** *(ou* ***Riemanniana****) de M.*

Observar que usaremos apenas a conexão Riemanniana e que será sempre essa conexão. Também observamos que ∇ é unicamente definida, $\nabla_X Y$ é bilinear como função de X e Y, satisfaz a condição de simetria dada em (1.5), e que a identidade (obtida de (1.4))

$$0 = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \tag{1.6}$$

é satisfeita sempre que Y e Z são campos vetoriais tais que o produto interno Riemanniano $\langle Y, Z\rangle$ é uma função constante.

Lema 1.92. *Sejam M uma variedade Riemanniana e sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ campos vetoriais. Sempre que os produtos internos Riemannianos $\langle Y, Z\rangle, \langle Z, X\rangle$ e $\langle X, Y\rangle$ são funções constantes então vale a seguinte expressão*

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}(\langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle). \tag{1.7}$$

Demonstração. Seja ∇ uma conexão Riemanniana (como na Definição 1.91), e sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ campos vetoriais. Escrevendo três vezes a equação de compatibilidade (1.4) com X, Y, Z permutados ciclicamente, obtemos

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \\ Y\langle Z, X\rangle &= \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle \\ Z\langle X, Y\rangle &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle. \end{aligned}$$

Usando a condição de simetria dada em (1.5) no último termo de cada linha, obtemos

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, [X, Z] + \nabla_Z X\rangle \\ Y\langle Z, X\rangle &= \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, [Y, X] + \nabla_X Y\rangle \\ Z\langle X, Y\rangle &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, [Z, Y] + \nabla_Y Z\rangle, \end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} X\langle Y,Z\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z X\rangle + \langle Y, [X,Z]\rangle \\ Y\langle Z,X\rangle &= \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_X Y\rangle + \langle Z, [Y,X]\rangle \\ Z\langle X,Y\rangle &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Y Z\rangle + \langle X, [Z,Y]\rangle. \end{aligned}$$

Adicionando as duas primeiras equações e subtraindo a terceira, obtemos

$$X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle = 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y,[X,Z]\rangle + \langle Z,[Y,X]\rangle - \langle X,[Z,Y]\rangle.$$

Finalmente, isolando o termo $\langle \nabla_X Y, Z\rangle$ obtemos

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}(X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle - \langle Z,[Y,X]\rangle + \langle X,[Z,Y]\rangle). \quad (1.8)$$

Sempre que os produtos internos Riemannianos $\langle Y,Z\rangle, \langle Z,X\rangle$ e $\langle X,Y\rangle$ são funções constantes, quando aplicamos a identidade em (1.6) obtemos

$$\begin{aligned} X\langle Y,Z\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle = 0 \\ Y\langle Z,X\rangle &= \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle = 0 \\ Z\langle X,Y\rangle &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle = 0. \end{aligned}$$

e substituindo $X\langle Y,Z\rangle, Y\langle Z,X\rangle$ e $Z\langle X,Y\rangle$ em (1.8), conseguimos a seguinte fórmula:

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}(-\langle Y,[X,Z]\rangle - \langle Z,[Y,X]\rangle + \langle X,[Z,Y]\rangle),$$

que pode ser reescrita como

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}(\langle [X,Y],Z\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle + \langle [Z,X],Y\rangle)$$

como queríamos provar. □

1.9 CURVATURAS

Definição 1.93. *Se M é uma variedade Riemanniana qualquer, o* ***endomorfismo de curvatura (Riemanniano)*** *é a aplicação*

$$R\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

definida por

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Lema 1.94. *O endomorfismo de curvatura é uma aplicação* 3*-linear sobre* $C^\infty(M)$.

Demonstração. Mostraremos, primeiramente, que para cada $f \in C^\infty(M)$, R é linear na segunda variável:

$$\begin{aligned} R(X,fY)Z &= \nabla_X \nabla_{fY} Z - \nabla_{fY} \nabla_X Z - \nabla_{[X,fY]} Z \\ &= \nabla_X (f \nabla_Y Z) - f \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{f[X,Y]+(Xf)Y} Z \\ &= (Xf) \nabla_Y Z + f \nabla_X \nabla_Y Z - f \nabla_Y \nabla_X Z \\ &- f \nabla_{[X,Y]} Z - (Xf) \nabla_Y Z \\ &= f R(X,Y)Z. \end{aligned}$$

A mesma prova mostra que R é linear sobre $C^\infty(M)$ na primeira variável, pois $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$ pela definição.

Resta mostrarmos que R é linear sobre $C^\infty(M)$ na terceira variável, isto é:

$$R(X,Y)(fZ) = fR(X,Y)Z.$$

Com efeito

$$R(X,Y)(fZ) = \nabla_X \nabla_Y (fZ) - \nabla_Y \nabla_X (fZ) - \nabla_{[X,Y]}(fZ). \tag{1.9}$$

Podemos usar a Definição 1.82(c) para calcularmos cada termo de (1.9):

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y (fZ) &= \nabla_X (f \nabla_Y Z + (Yf)Z) \\ &= f \nabla_X \nabla_Y Z + (Xf)(\nabla_Y Z) + Yf(\nabla_X Z) + (X(Yf)Z), \end{aligned} \tag{1.10}$$

e

$$\begin{aligned} \nabla_Y \nabla_X (fZ) &= \nabla_Y (f \nabla_X Z + (Xf)Z) \\ &= f \nabla_Y \nabla_X Z + (Yf)(\nabla_X Z) + Xf(\nabla_Y Z) + (Y(Xf)Z), \end{aligned} \tag{1.11}$$

e por fim

$$\nabla_{[X,Y]}(fZ) = f \nabla_{[X,Y]} Z + ([X,Y]f)Z. \tag{1.12}$$

Subtraindo (1.11) de (1.10), obtemos:

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y (fZ) - \nabla_Y \nabla_X (fZ) &= f(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X) Z + ((XY - YX)f)Z \\ &= f \nabla_X \nabla_Y Z - f \nabla_Y \nabla_X Z + ([X,Y]f)Z. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Substituindo (1.12) e (1.13) em (1.9) obtemos:

$$\begin{aligned} R(X,Y)(fZ) &= f\nabla_X\nabla_Y Z - f\nabla_Y\nabla_X Z + \cancel{([X,Y]f)Z} - f\nabla_{[X,Y]}Z - \cancel{([X,Y]f)Z} \\ &= f(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z) \\ &= fR(X,Y)Z. \end{aligned}$$ □

Lema 1.95. *Seja R o endomorfismo de curvatura, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $p \in M$. Então o campo $R(X,Y)Z$ depende somente dos valores de X_p, Y_p e Z_p (os valores dos campos vetoriais em p) e não de seus valores em uma vizinhança arbitrariamente pequena de p ou em M. Mais precisamente, se $X_p = \tilde{X}_p, Y_p = \tilde{Y}_p$ e $Z_p = \tilde{Z}_p$, então $(R(X,Y)Z)_p = (R(\tilde{X},\tilde{Y})\tilde{Z})_p$.*

Demonstração. Suponhamos que (U,φ) é uma vizinhança coordenada de p. Seja $(E_1,\cdots,E_n)$ um referencial local para M. Suponhamos que $X = \sum \alpha^i E_i, Y = \sum \beta^j E_j$ e $Z = \gamma^k E_k$. Pelo Lema 1.94, temos

$$R(X,Y)Z = \sum_{i,j,k} \alpha^i\beta^j\gamma^k R(E_i,E_j)E_k,$$

e isto mostra que no dado ponto $p \in U$, no lado direito da equação temos $R(E_i,E_j)E_k$ que independe dos campos vetoriais, e os valores das funções $\alpha^i, \beta^j, \gamma^k$ dependem somente do ponto p e não dos pontos próximos, como queríamos provar. □

Definição 1.96. *Definimos a aplicação $R'\colon TM \times TM \times TM \longrightarrow TM$ satisfazendo as seguintes propriedades:*
(a) $TM \times TM \times TM$ é a soma de Whitney (Def. 1.67);
(b) $R'(X_p,Y_p,Z_p) = (R(X',Y')Z')_p$ em que X',Y',Z' são campos vetoriais quaisquer tais que $X'_p = X_p, Y'_p = Y_p$ e $Z'_p = Z_p$;
(c) $R(X_p,Y_p)Z_p \in T_pM$.

Podemos identificar o endomorfismo de curvatura R com a aplicação R', de modo que a partir de agora, usaremos a notação R para ambas as funções.

Definição 1.97. *Se M é uma variedade Riemanniana qualquer, definimos o* ***tensor de curvatura (Riemanniano)***

$$Rm\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definido por

$$Rm(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z, W\rangle.$$

Lema 1.98. *O tensor de curvatura é uma aplicação 4-linear sobre $C^\infty(M)$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.94 R é 3-linear sobre $C^\infty(M)$, resta-nos mostrar que para cada $f \in C^\infty(M)$, R é linear sobre W. Assim,

$$Rm(X,Y,Z,fW) = \langle R(X,Y)Z, fW\rangle = f\langle R(X,Y)Z,W\rangle = fRm(X,Y,Z,W).$$ □

Lema 1.99. *Sejam Rm o tensor de curvatura, $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ e $p \in M$, então o campo $Rm(X, Y, Z, W)$ depende somente dos valores de X_p, Y_p, Z_p e W_p (os valores dos campos vetoriais em p) e não de seus valores em uma vizinhança arbitrariamente pequena de p ou em M. Mais precisamente, se $X_p = \tilde{X}_p, Y_p = \tilde{Y}_p, Z_p = \tilde{Z}_p$ e $W_p = \tilde{W}_p$, então $Rm(X, Y, Z, W)_p = (Rm(\tilde{X}_p, \tilde{Y}_p, \tilde{Z}_p, \tilde{W}_p)$.*

Demonstração. A prova é feita de modo análoga ao Lema 1.95. Suponhamos que (U, φ) seja uma vizinhança coordenada de p. Seja $(E_1, \cdots, E_n)$ um referencial local para M. Suponhamos que $X = \sum \alpha^i E_i, Y = \sum \beta^j E_j, Z = \gamma^k E_k$ e $W = \delta^l E_l$. Assim,

$$Rm(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle = \left\langle \sum_{i,j,k} \alpha^i \beta^j \gamma^k R(E_i, E_j)E_k, \delta^l E_l \right\rangle$$

e isso mostra que no dado ponto $p \in U$, no lado direito da equação temos $R(E_i, E_j)E_k$ e E_l independem dos campos vetoriais, e os valores das funções $\alpha^i, \beta^j, \gamma^k$ e δ^l dependem somente do ponto p e não dos pontos próximos, como queríamos provar. $\square$

Definição 1.100. *Definimos a aplicação $R'\colon TM \times TM \times TM \times TM \longrightarrow TM$ satisfazendo as seguintes propriedades:*
(a) $TM \times TM \times TM \times TM$ é a soma de Whitney (Def. 1.67);
(b) $Rm'(X_p, Y_p, Z_p, W_p) = (Rm(X', Y', Z', W'))_p$ em que X', Y', Z', W' são campos vetoriais quaisquer tais que $X'_p = X_p, Y'_p = Y_p, Z'_p = Z_p$ e $W'_p = W_p$;
(c) $Rm(X_p, Y_p, Z_p, W_p) \in \mathbb{R}$.

Podemos identificar o tensor de curvatura Rm com a aplicação Rm', de modo que a partir de agora, usaremos a notação Rm para ambas as funções.

Teorema 1.101. *Uma variedade Riemanniana é plana se, e somente se, o seu tensor de curvatura Riemanniano é identicamente nulo.*

Demonstração. Ver demonstração na referência [3], Teorema 7.3, p. 119. $\square$

Proposição 1.102. *Para campos vetoriais X, Y, Z arbitrários é válida a seguinte igualdade*

$$R(X, Z)Y + R(Z, Y)X + R(Y, X)Z = 0$$

*conhecida como **primeira identidade de Bianchi (algébrica)**.*

Demonstração. Para provarmos a proposição precisamos somente calcular a soma. Assim

$$\begin{aligned} R(X, Z)Y + R(Z, Y)X + R(Y, X)Z &= \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_{[X,Z]} Y \\ &+ \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_{[Z,Y]} X + \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y,X]} Z \\ &= \nabla_X (\nabla_Z Y - \nabla_Y Z) - \nabla_{[Z,Y]} X + \nabla_Z (\nabla_Y X - \nabla_X Y) - \nabla_{[Y,X]} Z \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \nabla_Y(\nabla_X Z - \nabla_Z X) - \nabla_{[X,Z]}Y \\
&\overset{(1.5)}{=} \nabla_X[Z,Y] - \nabla_{[Z,Y]}X + \nabla_Z[Y,X] - \nabla_{[Y,X]}Z + \nabla_Y[X,Z] - \nabla_{[X,Z]}Y \\
&\overset{(1.5)}{=} [X,[Z,Y]] + [Z,[Y,X]] + [Y,[X,Z]] \\
&\overset{\text{Prop. 1.43}}{=} 0.
\end{aligned}
$$

□

Proposição 1.103. *O tensor de curvatura Riemanniano tem as seguintes simetrias para quaisquer campos vetoriais W, X, Y, Z:*
(a) $Rm(W,X,Y,Z) = -Rm(X,W,Y,Z)$;
(b) $Rm(W,X,Y,Z) = -Rm(W,X,Z,Y)$;
(c) $Rm(W,X,Y,Z) = Rm(Y,Z,W,X)$;
(d) $Rm(W,X,Y,Z) + Rm(X,Y,W,Z) + Rm(Y,W,X,Z) = 0$.

Demonstração. (a) Segue-se do fato de que $R(W,X)Y = -R(X,W)Y$.

(b) Pela compatibilidade com a métrica (ver Def. 1.88), temos

$$
\begin{aligned}
WX\langle Y,Y\rangle &= W2(\langle \nabla_X Y, Y\rangle) = 2\langle \nabla_W\nabla_X Y, Y\rangle + 2\langle \nabla_X Y, \nabla_W Y\rangle, \\
XW\langle Y,Y\rangle &= X2(\langle \nabla_W Y, Y\rangle) = 2\langle \nabla_X\nabla_W Y, Y\rangle + 2\langle \nabla_W Y, \nabla_X Y\rangle, \\
[W,X]\langle Y,Y\rangle &= 2(\langle \nabla_{[W,X]}Y, Y\rangle).
\end{aligned}
$$

Subtraímos a segunda e terceira equações da primeira, observando que $[W,X] = WX - XW$ (Def. 1.41), obtemos

$$
\begin{aligned}
0 &= 2\langle \nabla_W\nabla_X Y, Y\rangle - 2\langle \nabla_X\nabla_W Y, Y\rangle - 2(\langle \nabla_{[W,X]}Y, Y\rangle) \\
&= 2\langle R(W,X)Y, Y\rangle = 2Rm(W,X,Y,Y).
\end{aligned}
$$

Portanto, $Rm(W,X,Y,Y) = 0$ e do mesmo modo $Rm(W,X,Y+Z,Y+Z) = 0$. Daí

$$
\begin{aligned}
Rm(W,X,Y+Z,Y+Z) &= Rm(W,X,Y,Y+Z) + Rm(W,X,Z,Y+Z) \\
&= \cancelto{0}{Rm(W,X,Y,Y)} + Rm(W,X,Y,Z) + Rm(W,X,Z,Y) + \cancelto{0}{Rm(W,X,Z,Z)} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Conseqüentemente, $Rm(W,X,Y,Z) = -Rm(W,X,Z,Y)$ como queríamos mostrar.

(d) Segue-se imediatamente da primeira identidade de Bianchi (ver Prop. 1.102):

$$
R(W,X)Y + R(X,Y)W + R(Y,W)X = 0. \tag{1.14}
$$

(c) Escrevendo a identidade (1.14) quatro vezes com as variáveis ciclicamente permutadas, temos

$$\begin{aligned}
Rm(W,X,Y,Z) + Rm(X,Y,W,Z) + Rm(Y,W,X,Z) &= 0\\
Rm(X,Y,Z,W) + Rm(Y,Z,X,W) + Rm(Z,X,Y,W) &= 0\\
Rm(Y,Z,W,X) + Rm(Z,W,Y,X) + Rm(W,Y,Z,X) &= 0\\
Rm(Z,W,X,Y) + Rm(W,X,Z,Y) + Rm(X,Z,W,Y) &= 0.
\end{aligned}$$

Adicionando as quatro equações e aplicando (b) quatro vezes, todos os termos na primeira e segunda coluna se cancelam. Aplicando (a) e (b) na última coluna, obtemos

$$2Rm(Y,W,X,Z) - 2Rm(X,Z,Y,W) = 0,$$

o qual é equivalente a (c), isto é, $Rm(Y,W,X,Z) = Rm(X,Z,Y,W)$. $\square$

Lema 1.104. *Seja M uma variedade Riemanniana, $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bidimensional do espaço tangente T_pM e sejam $X, Y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então o número real*

$$K(X,Y) = \frac{Rm(X,Y,Y,X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2}$$

não depende da escolha dos vetores $X, Y \in \sigma$.

Demonstração. Primeiramente, observamos que é possível transformar a base (X,Y) de σ para qualquer outra base de σ usando a composição das operações:
(a) $(X,Y) \longrightarrow (Y,X)$;
(b) $(X,Y) \longrightarrow (\lambda X, Y)$ para $\lambda \in \mathbb{R}$ não nulo;
(c) $(X,Y) \longrightarrow (X + \lambda Y, Y)$ para $\lambda \in \mathbb{R}$.

Portanto, é suficiente provarmos que $K(X,Y)$ é invariante por tais operações. Assim, sejam $X, Y \in \sigma$ vetores linearmente independentes, então:

(a) Observamos que

$$|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2 = |Y|^2|X|^2 - \langle Y,X\rangle^2,$$

logo é suficiente provarmos que $Rm(X,Y,Y,X) = Rm(Y,X,X,Y)$. Com efeito, pela Proposição 1.103, temos

$$Rm(X,Y,Y,X) \overset{\text{Prop. 1.103(c)}}{=} Rm(Y,X,X,Y),$$

portanto $K(X,Y) = K(Y,X)$.

(b) Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda \neq 0$. Como

$$|\lambda X|^2|Y|^2 - \langle \lambda X, Y\rangle^2 = \lambda^2(|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2),$$

é suficiente mostrarmos que $Rm(\lambda X, Y, Y, \lambda X) = \lambda^2 Rm(X, Y, Y, X)$. De fato, o Lema 1.98 nos garante que Rm é 4-linear em $C^\infty(M)$, logo $K(\lambda X, Y) = K(X, Y)$.

(c) Suponhamos $\lambda \in \mathbb{R}$. Então temos

$$\begin{aligned}
|X + \lambda Y|^2|Y|^2 - \langle X + \lambda Y, Y\rangle^2 &= \langle X + \lambda Y, X + \lambda Y\rangle|Y|^2 - ((\langle X + \lambda Y, Y\rangle\langle X + \lambda Y, Y\rangle)) \\
&= ((\langle X, X\rangle + \langle X, \lambda Y\rangle + \langle \lambda Y, X\rangle + \langle \lambda Y, \lambda Y\rangle)|Y|^2 \\
&- (((\langle X, Y\rangle + \langle \lambda Y, Y\rangle)(\langle X, Y\rangle + \langle \lambda Y, Y\rangle)) \\
&= (|X|^2 + 2\lambda\langle X, Y\rangle + \lambda^2|Y|^2)|Y|^2 \\
&- (\langle X, Y\rangle^2 + \langle X, Y\rangle\langle \lambda Y, Y\rangle + \langle \lambda Y, Y\rangle\langle X, Y\rangle) + \langle \lambda Y, Y\rangle\langle \lambda Y, Y\rangle) \\
&= |X|^2|Y|^2 + \cancel{2\lambda\langle X, Y\rangle|Y|^2} + \cancel{\lambda^2|Y|^4} - (\langle X, Y\rangle^2 + \cancel{2\lambda\langle X, Y\rangle|Y|^2} + \cancel{\lambda^2|Y|^4}) \\
&= |X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2,
\end{aligned}$$

de modo que só resta-nos mostrar que $Rm(X + \lambda Y, Y, Y, X + \lambda Y) = Rm(X, Y, Y, X)$.

Novamente pelo Lema 1.98, Rm é 4-linear em $C^\infty(M)$, logo

$$\begin{aligned}
Rm(X + \lambda Y, Y, Y, X + \lambda Y) &= Rm(X, Y, Y, X + \lambda Y) + Rm(\lambda Y, Y, Y, X + \lambda Y) \\
&= Rm(X, Y, Y, X) + Rm(X, Y, Y, \lambda Y) + Rm(\lambda Y, Y, Y, X) + Rm(\lambda Y, Y, Y, \lambda Y) \\
&= Rm(X, Y, Y, X) + \lambda Rm(X, Y, Y, Y) + \lambda Rm(Y, Y, Y, X) + \lambda^2 Rm(Y, Y, Y, Y).
\end{aligned}$$

Observamos que $Rm(Y, Y, Y, X) \overset{\text{Prop. 1.103(a)}}{=} -Rm(Y, Y, Y, X)$, logo $Rm(Y, Y, Y, X) = 0$. Aplicando a Proposição 1.103, temos

$$Rm(X, Y, Y, Y) \overset{\text{Prop. 1.103(c)}}{=} Rm(Y, Y, X, Y) \overset{\text{Prop. 1.103(b)}}{=} -Rm(Y, Y, Y, X) = 0.$$

Por fim, $Rm(Y, Y, Y, Y) \overset{\text{Prop. 1.103(a)}}{=} -Rm(Y, Y, Y, Y)$ e portanto $Rm(Y, Y, Y, Y) = 0$.

Conseqüentemente, $Rm(X + \lambda Y, Y, Y, X + \lambda Y) = Rm(X, Y, Y, X)$. Portanto $K(X + \lambda Y, Y) = K(X, Y)$. Concluímos por (a), (b) e (c) que $K(X, Y)$ é invariante por mudanças nos vetores da base, logo $K(X, Y)$ não depende da base escolhida. $\square$

Definição 1.105. *Seja M uma variedade Riemanniana n-dimensional. Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_pM$, o número real*

$$K(X, Y) = \frac{Rm(X, Y, Y, X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2},$$

onde (X,Y) é uma base qualquer de σ, é chamado de ***curvatura seccional*** *de σ em p. Também usamos a notação $K(\sigma)$ para $K(X,Y)$.*

Podemos considerar a curvatura seccional como uma função real cujo domínio é um subespaço vetorial bidimensional de um espaço tangente. Se (M,g) é uma variedade Riemanniana bidimensional, então a curvatura seccional coincide com a *curvatura Gaussiana*:

$$K = \frac{\langle (\nabla_{E_1}\nabla_{E_2} - \nabla_{E_2}\nabla_{E_1})E_2, E_1\rangle}{|E_1|^2|E_2|^2 - \langle E_1, E_2\rangle^2} = \frac{\langle (\nabla_{E_1}\nabla_{E_2} - \nabla_{E_2}\nabla_{E_1})E_2, E_1\rangle}{\det g}.$$

Definição 1.106. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma* ***forma bilinear*** *é uma função $Q\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ que é linear em ambas as variáveis, isto é, dados $u, v, w \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos que as seguintes propriedades são satisfeitas:*
(a) $Q(u+v,w) = Q(u,w) + Q(v,w)$;
(b) $Q(u,v+w) = Q(u,v) + Q(u,w)$;
(c) $Q(\lambda u, v) = Q(u, \lambda v) = \lambda Q(u,v)$.

Teorema 1.107. *O tensor de curvatura Riemanniano Rm pode ser reconstruído da forma bilinear $\kappa(X,Y) = Rm(X,Y,Y,X)$ (e portanto, do conhecimento de todas as curvaturas seccionais).*

Demonstração. Primeiramente, temos

$$\langle R(X,Y)Y, Z\rangle = Rm(X,Y,Y,Z) \overset{\text{Lema 1.103}(c)(a)(b)}{=} Rm(Z,Y,Y,X) = \langle R(Z,Y)Y, X\rangle,$$

conseqüentemente $Rm(\cdot, Y, Y, \cdot)$ é para cada Y fixo uma forma bilinear simétrica.

Assim para cada Y fixo temos

$$\begin{aligned}
&\kappa(X+Z,Y) - \kappa(X,Y) - \kappa(Z,Y)\\
&\quad = Rm(X+Z,Y,Y,X+Z) - Rm(X,Y,Y,X) - Rm(Z,Y,Y,Z)\\
&\quad = Rm(X,Y,Y,X+Z) + Rm(Z,Y,Y,X+Z) - Rm(X,Y,Y,X) - Rm(Z,Y,Y,Z)\\
&\quad = \cancel{Rm(X,Y,Y,X)} + Rm(X,Y,Y,Z) + Rm(Z,Y,Y,X)\\
&\quad + \cancel{Rm(Z,Y,Y,Z)} - \cancel{Rm(X,Y,Y,X)} - \cancel{Rm(Z,Y,Y,Z)}\\
&\quad \overset{\text{Lema 1.103}(c),(a),(b)}{=} Rm(X,Y,Y,Z) + Rm(X,Y,Y,Z).
\end{aligned}$$

isto é,

$$2Rm(X,Y,Y,Z) = \kappa(X+Z,Y) - \kappa(X,Y) - \kappa(Z,Y). \tag{1.15}$$

Agora, mostraremos que $R(X,Y)Z$ pode ser expressado em termos do tipo $R(X,Y)Y$.

Com efeito,

$$\begin{aligned}
R(X,Y+Z)(Y+Z) &= R(X,Y)Y + R(X,Y)Z + R(X,Z)Y + R(X,Z)Z,\\
-R(Y,X+Z)(X+Z) &= -R(Y,X)X + R(X,Y)Z + R(Z,Y)X - R(Y,Z)Z,\\
0 &= \qquad\qquad\quad R(X,Y)Z + R(Y,X)Z.
\end{aligned}$$

Adicionando as três equações acima, e observando que

$$R(X,Z)Y + R(Z,Y)X + R(Y,X)Z = 0$$

pois é a primeira identidade de Bianchi (ver Proposição 1.102), então temos

$$\begin{aligned}
3R(X,Y)Z &= R(X,Y+Z)(Y+Z) - R(Y,X+Z)(X+Z)\\
&\quad - R(X,Y)Y - R(X,Z)Z + R(Y,X)X + R(Y,Z)Z. \qquad (1.16)
\end{aligned}$$

Combinando as equações (1.15) e (1.16) obtemos

$$\begin{aligned}
Rm(X,Y,Z,W) &= \langle R(X,Y)Z, W\rangle\\
&\overset{(1.16)}{=} \left\langle \frac{1}{3}(R(X,Y+Z)(Y+Z) - R(Y,X+Z)(X+Z)\right.\\
&\left. - \; R(X,Y)Y - R(X,Z)Z + R(Y,X)X + R(Y,Z)Z), W\right\rangle\\
&= \frac{1}{3}\left(\langle\langle(R(X,Y+Z)(Y+Z), W\rangle - \langle R(Y,X+Z)(X+Z), W\rangle\right.\\
&\left. - \; \langle R(X,Y)Y, W\rangle - \langle R(X,Z)Z, W\rangle + \langle R(Y,X)X, W\rangle + \langle R(Y,Z)Z), W\rangle\right)\\
&\overset{(1.15)}{=} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\left(\kappa(X+W,Y+Z) - \kappa(X,Y+Z) - \kappa(W,Y+Z)\right)\right.\\
&- \; \frac{1}{2}(\kappa(Y+W,X+Z) - \kappa(Y,X+Z) - \kappa(W,X+Z))\\
&- \; \frac{1}{2}(\kappa(X+W,Y) - \kappa(X,Y) - \kappa(W,Y))\\
&- \; \frac{1}{2}(\kappa(X+W,Z) - \kappa(X,Z) - \kappa(W,Z))\\
&+ \; \frac{1}{2}(\kappa(Y+W,X) - \kappa(Y,X) - \kappa(W,X))\\
&\left. + \; \frac{1}{2}(\kappa(Y+W,Z) - \kappa(Y,Z) - \kappa(W,Z))\right).
\end{aligned}$$

Por fim chegamos a uma fórmula explícita para construírmos Rm em termos de κ:

$$\begin{aligned}
Rm(X,Y,Z,W) = \frac{1}{6}\,(&\kappa(X+W,Y+Z) - \kappa(X,Y+Z) - \kappa(W,Y+Z)\\
&- \kappa(Y+W,X+Z) + \kappa(Y,X+Z) + \kappa(W,X+Z)\\
&- \kappa(X+W,Y) + \kappa(X,Y) + \kappa(W,Y)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \kappa(X + W, Z) + \kappa(X, Z) + \kappa(W, Z) \\
&+ \kappa(Y + W, X) - \kappa(Y, X) - \kappa(W, X) \\
&+ \kappa(Y + W, Z) - \kappa(Y, Z) - \kappa(W, Z)) \,.
\end{aligned}
$$
□

Proposição 1.108. *Uma variedade Riemanniana é plana se, e somente se, a sua curvatura seccional é identicamente nula.*

Demonstração. Suponhamos que a variedade Riemanniana é plana. Segue do Teorema 1.101 que uma variedade Riemanniana é plana se, e somente se, o seu tensor de curvatura Riemanniano é identicamente nulo. Portanto, se $Rm(X, Y, Z, W) = 0$ para quaisquer X, Y, Z, W, então em particular

$$K(X, Y) = \frac{Rm(X, Y, Y, X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2} = \frac{0}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2} = 0.$$

Para mostrarmos a recíproca, suponhamos que a curvatura seccional $K(X, Y)$ seja identicamente nula para quaisquer vetores $X, Y \in T_pM$. Portanto,

$$K(X, Y) = \frac{Rm(X, Y, Y, X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2} = 0 \Longrightarrow Rm(X, Y, Y, X) = \kappa(X, Y) = 0, \tag{1.17}$$

para todo $X, Y \in T_pM$. Logo

$$
\begin{aligned}
Rm(X, Y, Z, W) = \frac{1}{6}\Big(&\cancelto{0}{\kappa(X + W, Y + Z)} - \cancelto{0}{\kappa(X, Y + Z)} - \cancelto{0}{\kappa(W, Y + Z)} \\
&- \cancelto{0}{\kappa(Y + W, X + Z)} + \cancelto{0}{\kappa(Y, X + Z)} + \cancelto{0}{\kappa(W, X + Z)} \\
&- \cancelto{0}{\kappa(X + W, Y)} + \cancelto{0}{\kappa(X, Y)} + \cancelto{0}{\kappa(W, Y)} \\
&- \cancelto{0}{\kappa(X + W, Z)} + \cancelto{0}{\kappa(X, Z)} + \cancelto{0}{\kappa(W, Z)} \\
&+ \cancelto{0}{\kappa(Y + W, X)} - \cancelto{0}{\kappa(Y, X)} - \cancelto{0}{\kappa(W, X)} \\
&+ \cancelto{0}{\kappa(Y + W, Z)} - \cancelto{0}{\kappa(Y, Z)} - \cancelto{0}{\kappa(W, Z)}\Big) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Conseqüentemente, como $Rm(X, Y, Z, W) = 0$ para todo X, Y, Z, W, então pelo Teorema 1.101 concluímos que a variedade Riemanniana é plana. □

Observação. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita (sobre o corpo $\mathbb{R}$) e $T\colon V \longrightarrow V$ uma transformação linear. Dada uma base ortonormal $(E_1, \cdots, E_n)$, chamamos de **traço da**

transformação T e denotamos por tr(T), o número

$$\text{tr}(T) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(E_i), E_i \rangle$$

Definição 1.109. *Seja M uma variedade suave. Definimos o* ***tensor de Ricci*** *como uma função suave $Rc\colon TM \times TM \longrightarrow \mathbb{R}$ em que*
(a) $TM \times TM$ é a soma de Whitney;
(b) a restrição $Rc|_{T_pM \times T_pM}$ é o traço do endomorfismo de curvatura em seu primeiro índice, isto é,

$$Rc_p\colon T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

é dado por

$$Rc_p(X_p, Y_p) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(E_i|_p, X_p)Y_p, E_i|_p \rangle,$$

numa base ortonormal $(E_1|_p, \cdots, E_n|_p)$ no espaço tangente T_pM.

Seja Y_p um vetor unitário, tomemos uma base ortonormal $(Y_p, E_2|_p, \cdots, E_n|_p)$, então

$$r(Y_p) = Rc_p(Y_p, Y_p) = \sum_{i=2}^{n} \langle R(E_i|_p, Y_p)Y_p, E_i|_p \rangle$$

é chamada de ***curvatura de Ricci na direção do vetor*** *Y_p.*

Definimos a ***transformação de Ricci*** *$\hat{r}$ por*

$$\hat{r}(X_p) = \sum_{i=2}^{n} R(X_p, E_i|_p)E_i|_p.$$

Ela está relacionada a forma quadrática r pela identidade

$$r(X_p) = \langle \hat{r}(X_p), X_p \rangle.$$

Os autovalores de $\hat{r}$ são chamados de ***curvaturas de Ricci principais****.*

Observamos que a transformação $\hat{r}$ é auto-adjunta, pois

$$\begin{aligned}
\langle \hat{r}(X_p), Y_p \rangle &= \sum_i \langle R(X_p, E_i|_p)E_i|_p, Y_p \rangle \\
&= \sum_i Rm(X_p, E_i|_p, E_i|_p, Y_p) \\
&= \sum_i Rm(E_i|_p, Y_p, X_p, E_i|_p) \\
&= \sum_i Rm(Y_p, E_i|_p, E_i|_p, X_p)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i \langle R(Y_p, E_i|_p)E_i|_p, X_p\rangle \\
&= \sum_i \langle X_p, R(Y_p, E_i|_p)E_i|_p\rangle \\
&= \langle X_p, \hat{r}(Y_p)\rangle.
\end{aligned}
$$

Lema 1.110. *Seja M uma variedade suave e X_p um vetor unitário. Mostraremos que a curvatura de Ricci na direção do vetor X_p não depende da base ortonormal escolhida.*

Demonstração. Seja X_p um vetor unitário qualquer e em seguida completando-o em uma base ortonormal $(X_p, E_2|_p, \cdots, E_n|_p)$ do T_pM. Agora, definiremos uma forma bilinear (ver Def. 1.106) em T_pM como se segue: sejam $Y_p, Z_p \in T_pM$ e escrevamos

$$Q(X_p, Y_p) = \text{ traço da aplicação } Z_p \mapsto R(Z_p, X_p)Y_p.$$

Observamos que Q é bilinear (conseqüencia do Lema 1.94). Deste modo

$$
\begin{aligned}
Q(X_p, Y_p) &= \sum_{i=2}^{n} \langle R(E_i|_p, X_p)Y_p, E_i|_p\rangle \\
&= \sum_{i=2}^{n} Rm(E_i|_p, X_p, Y_p, E_i|_p) \\
&\overset{\text{Lema 1.103 } (c),\ (a),\ (b)}{=} \sum_{i=2}^{n} Rm(E_i|_p, Y_p, X_p, E_i|_p) \\
&= \sum_{i=2}^{n} \langle R(E_i|_p, Y_p)X_p, E_i|_p\rangle \\
&= Q(Y_p, X_p)
\end{aligned}
$$

Portanto Q é simétrica e $Q(X_p, X_p) = r(X_p)$. Como Q está intrinsecamente definida, isto é, não depende da escolha da base ou do sistema de coordenadas, então $r(X_p) = Q(X_p, X_p)$ também está intrinsecamente definida. $\square$

1.10 Curvas integrais e a aplicação exponencial

Definição 1.111. *Seja M uma variedade suave e $\gamma\colon J \longrightarrow M$ uma curva suave, então para cada $t \in J$, o **vetor velocidade** $\gamma'(t)$ é um vetor em $T_{\gamma(t)}M$. Se X é um campo vetorial em M, uma **curva integral de** X é uma curva diferenciável $\gamma\colon J \longrightarrow M$ cuja velocidade em cada ponto é igual ao valor de X naquele ponto:*

$$\gamma'(t) = X_{\gamma(t)} \quad \textit{para todo } t \in J.$$

*Se $0 \in J$, o ponto $\gamma(0)$ é chamado de **ponto inicial de** γ.*

Proposição 1.112. *Seja X um campo vetorial suave em uma variedade suave M. Para cada ponto $p \in M$, existe um $\varepsilon > 0$ e uma curva suave $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ que é uma curva integral de X começando em p.*

Demonstração. Ver demonstração na referência [4], Proposição 9.2, p. 207. □

Definição 1.113. *Uma **curva integral maximal** é uma curva suave que não pode ser estendida a uma curva integral em um intervalo aberto maior.*

Definição 1.114. *Seja G um grupo de Lie. Um **subgrupo de um parâmetro de** G é definido como sendo um homomorfismo entre grupos de Lie $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow G$, com $\mathbb{R}$ considerado como um grupo de Lie sob a adição.*

Observe que por esta definição, um subgrupo de um parâmetro não é um subgrupo de Lie de G, mas apenas um homomorfismo em G. A imagem de um subgrupo de um parâmetro é um subgrupo de Lie quando está dotada com uma estrutura de variedade suave adequada.

Teorema 1.115. *Seja G um grupo de Lie. Os subgrupos de um parâmetro de G são precisamente as curvas integrais maximais de campos vetoriais invariantes à esquerda começando na identidade.*

Demonstração. Ver demonstração na referência [4], Teorema 20.1, p. 516. □

Definição 1.116. *Dado $X \in Lie(G)$, o subgrupo de um parâmetro determinado por X, como no teorema acima, é chamado de **subgrupo de um parâmetro gerado por** X.*

Como os campos vetoriais invariantes à esquerda são determinados de modo único pelos seus valores na identidade, segue que cada subgrupo de um parâmetro é determinado de modo único pela sua velocidade inicial em T_eG, e portanto existem correspondêcias biunívocas entre

$$\{\text{subgrupos de um parâmetro de } G\} \longleftrightarrow Lie(G) \longleftrightarrow T_eG.$$

Definição 1.117. *Dado um grupo de Lie G com uma álgebra de Lie $Lie(G)$, definimos a aplicação $\exp\colon Lie(G) \longrightarrow G$, chamada de **aplicação exponencial de** G, do seguinte modo: para qualquer $X \in Lie(G)$, definimos*

$$\exp(X) = \gamma(1)$$

onde γ é o subgrupo de um parâmetro gerado por X, ou equivalentemente, a curva integral de X começando na identidade, isto é, $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow G$ é um homomorfismo e $\gamma'(0) = X_{\gamma(0)} = X_e$. (ver Fig. 1.13)

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita e $A \in \mathfrak{gl}(V)$ uma aplicação linear de V em si mesmo e

$$A^k = \underbrace{A \circ \cdots \circ A}_{k \text{ vezes}},$$

definimos a ***exponencial de matrizes*** $\exp(A) = e^A$ *do seguinte modo:*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

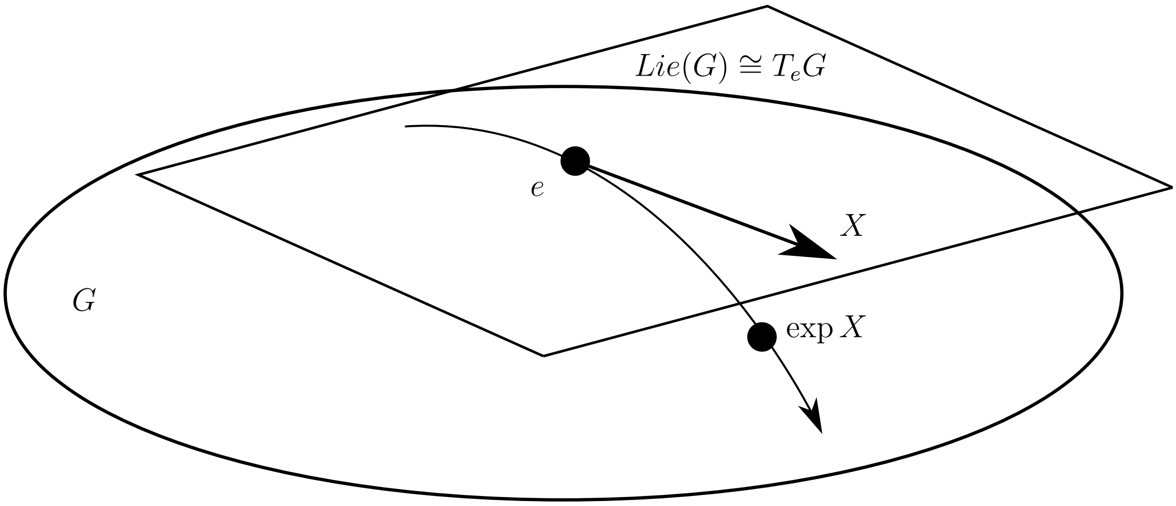

Figura 1.13: A aplicação exponencial

Proposição 1.118. *A aplicação exponencial é uma aplicação suave de* $Lie(G)$ *em* G.

Demonstração. Ver demonstração na referência [4], p. 520. □

Definição 1.119. *Uma variedade Riemanniana é dita ser* ***homogênea*** *se para quaisquer dois pontos* $p, q \in M$ *existe um isometria (ver Def. 1.74)* $f\colon M \longrightarrow M$ *tal que* $f(p) = q$.

A diferencial da aplicação $\exp$ é muito utilizada no desenvolvimento da teoria dos grupos de Lie. Um de seus casos particulares é a expressão enunciada abaixo para a diferencial da exponencial na origem $0 \in Lie(G)$. Deve-se levar em conta que $\exp 0 = e$, assim, $d(\exp)_0$ é uma aplicação linear $Lie(G) \longrightarrow T_eG \cong Lie(G)$.

Proposição 1.120. $d(\exp)_0 = Id_{Lie(G)}$, *onde* $Id_{Lie(G)}$ *é a aplicação identidade em* $Lie(G)$.

Demonstração. Ver demonstração na referência [8], Proposição 5.11, p. 105. □

Corolário 1.121. *Seja* G *um grupo de Lie e seja* $Lie(G)$ *sua álgebra de Lie. A aplicação* $\exp : Lie(G) \longrightarrow G$ *é um difeomorfismo de um aberto que contém* $0 \in Lie(G)$ *sobre um aberto que contém* $e \in G$.

Demonstração. Segue do Teorema da Função Inversa (Teorema 1.18) e do fato que $d(\exp)_0$ é a identidade, ou seja, é inversível. □

Corolário 1.122. *Seja* G *um grupo de Lie conexo e tome* $g \in G$. *Então, existem* $X_1, \ldots, X_s \in Lie(G)$ *tal que*

$$g = \exp X_1 \cdots \exp X_s.$$

Demonstração. Como G é conexo, seja V uma vizinhança da identidade satisfazendo o Corolário 1.121, assim V gera G (ver Prop. 1.29), isto é,

$$G = \bigcup_{n \geq 1} V^n.$$

Um elemento de V^n é da forma $g_1 \cdots g_n$ com $g_i = \exp X_i \in V$. Portanto, um elemento de V^n é um produto de exponenciais, o mesmo ocorrendo com $g \in G$ arbitrário. □

1.11 Recobrimento Universal de Grupos de Lie

O desenvolvimento do conteúdo desta seção pode ser visto com mais detalhes nas referências [5], [10] e [11].

Definição 1.123. *Um espaço topológico X é dito ser **simplesmente conexo** se ele é conexo por caminhos e se $\pi_1(X, x_0)$ é o grupo fundamental trivial (somente um elemento) para algum $x_0 \in X$ (e conseqüentemente para todo $x_0 \in X$). Dizemos que $\pi_1(X, x_0)$ é o grupo trivial escrevendo $\pi_1(X, x_0) = 0$.*

Definição 1.124. *Uma aplicação entre variedades suaves conexas $\pi \colon E \longrightarrow M$ é uma **aplicação de recobrimento suave** se para todo $x \in M$, existe uma vizinhança U de x tal que a restrição de π a cada componente conexa C de $\pi^{-1}(U)$ é um difeomorfismo entre C e U. O espaço M é chamado de **base do recobrimento**, e E é chamado uma **variedade de recobrimento de** M. Se E é simplesmente conexo ele é chamado de **variedade de recobrimento universal de** M.*

Teorema 1.125. *Seja $\tilde{\mathfrak{g}}$ uma álgebra de Lie real com dimensão finita. Então, existe um único (a menos de isomorfismo) grupo de Lie conexo e simplesmente conexo $\tilde{G}$ com álgebra de Lie $\tilde{\mathfrak{g}} \cong Lie(\tilde{G})$.*

Demonstração. Ver demonstração na referência [8], Proposição 7.15, p. 154. □

Pode-se fixar um grupo de Lie conexo G com álgebra de Lie $Lie(G)$ e construir uma estrutura de grupo de Lie no espaço $\tilde{G}$ (o espaço de recobrimento universal simplesmente conexo de G). A existência do espaço $\tilde{G}$ se deve a que G é localmente conexo. Além do mais, $\tilde{G}$ é uma variedade suave tal que a aplicação de recobrimento $\pi \colon \tilde{G} \longrightarrow G$ é um difeomorfismo local.

Teorema 1.126. *Seja G um grupo de Lie compacto e conexo com grupo fundamental finito. Então o espaço de recobrimento universal $\tilde{G}$ é compacto.*

Demonstração. A prova é conseqüencia imediata da Proposição 6.4 seguido do Corolário 7.7 e Observação 6.6 que podem ser encontrados na referência [5]. Uma prova direta pode ser encontrada na referência [11], Teorema 6.22. □

2 CURVATURAS DE MÉTRICAS INVARIANTES À ESQUERDA EM GRUPOS DE LIE

Neste capítulo estudamos as seções 1, 2, 5 e 7 do artigo *Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups*, de John Willard Milnor (ver ref. [9]), a qual tratam-se respectivamente do estudo da curvatura seccional, curvatura de Ricci, calculos e métricas bi-invariante em grupos de Lie.

2.1 CURVATURA SECCIONAL

Começamos estudando a primeira seção do artigo *Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups*, do Milnor (ver ref. [9]), a qual trata-se do estudo da curvatura seccional em grupos de Lie. A definição de curvatura seccional e alguns resultados sobre ela podem ser encontrados no Capítulo 1, Seção 1.9.

Definição 2.1. *Seja G um grupo de Lie. Uma* ***métrica Riemanniana invariante à esquerda*** *em G é uma métrica Riemanniana com respeito ao qual as translações à esquerda de G são isometrias, isto é,*

$$\langle X_p, Y_p \rangle_{g_p} = \langle d(L_q)_p(X_p), d(L_q)_p(Y_p) \rangle_{g_{L_q(p)}}.$$

Do mesmo modo, definimos uma ***métrica Riemanniana invariante à direita*** *em G, como uma métrica Riemanniana com respeito ao qual as translações à direita de G são isometrias, ou seja,*

$$\langle X_p, Y_p \rangle_{g_p} = \langle d(R_q)_p(X_p), d(R_q)_p(Y_p) \rangle_{g_{R_q(p)}}.$$

Uma métrica Riemanniana em G que é invariante à esquerda e invariante à direita, é chamada de ***métrica Riemanniana bi-invariante****.*

Proposição 2.2. *Seja G um grupo de Lie de dimensão n, e seja $Lie(G)$ a álgebra de Lie associada de G. Dada uma base $(E_1, \dots, E_n)$ de campos vetoriais invariantes à esquerda para $Lie(G)$, existe somente uma única métrica Riemanniana invariante à esquerda em G de modo que os campos vetoriais $E_1, \dots, E_n$ são ortonormais em toda parte.*

Demonstração. Primeiramente, mostraremos a existência de tal métrica Riemanniana. Pela Proposição 1.50, podemos identificar $Lie(G)$ com o espaço tangente T_eG. Definimos

$$g_e \colon T_eG \times T_eG \longrightarrow \mathbb{R},$$

por

$$g_e(E_i|_e, E_j|_e) = \delta_{ij},$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, e usamos a translação à esquerda para definir g nos outros espaços tangentes, assim

$$g_p(E_i|_p, E_j|_p) = g_e(d(L_{p^{-1}})_p(E_i|_p), d(L_{p^{-1}})_p(E_j|_p)) = g_e(E_i|_e, E_j|_e) = \delta_{ij},$$

onde $p \in G$ e $E_i|_p, E_j|_p \in T_pG$. Isso define uma métrica Riemanniana suave, desde que $g_p(E_i|_p, E_j|_p) = \delta_{ij}$ é constante (e portanto suave, pelo Lema 1.69) para qualquer par (E_i, E_j) de campos vetoriais invariantes à esquerda suaves.

Agora, mostraremos que essa métrica definida acima é de fato invariante à esquerda, ou equivalentemente, que todas as translações à esquerda são isometrias. Pela própria construção de g, as aplicações $d(L_p)_e$ para cada $p \in G$ são isometrias lineares pois,

$$\begin{aligned} g_p(d(L_p)_e(E_i|_e), d(L_p)_e(E_j|_e)) &= g_p(E_i|_p, E_j|_p) \\ &= g_e(d(L_{p^{-1}})_p(E_i|_p), d(L_{p^{-1}})_p(E_j|_p)) \\ &= g_e(E_i|_e, E_j|_e) \end{aligned}$$

de modo que a composição de isometrias lineares

$$d(L_{pq})_e \circ d(L_q)_e^{-1} = d(L_{pq})_e \circ d(L_{q^{-1}})_{L_q(e)} = d(L_{pq})_e \circ d(L_{q^{-1}})_{qe} = d(L_{pqq^{-1}})_q = d(L_p)_q$$

é também uma isometria linear para $p, q \in G$. Isso mostra que todas as translações à esquerda são isometrias e portanto que g é invariante à esquerda.

Por fim, mostraremos a unicidade. Para isto, sejam g e $\hat{g}$ métricas Riemannianas invariantes à esquerda suaves. Como $g(E_i, E_j) = \delta_{ij}$ e $\hat{g}(E_i, E_j) = \delta_{ij}$ segue-se que $g = \hat{g}$. □

Definição 2.3. *Seja G um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda e $(E_1, \ldots, E_n)$ uma base ortonormal para $Lie(G)$. A **estrutura da àlgebra de Lie associada** pode ser descrita por uma matriz $n \times n \times n$ com **constantes de estrutura** α_{ijk} onde*

$$[E_i, E_j] = \sum_k \alpha_{ijk} E_k$$

ou equivalentemente

$$\alpha_{ijk} = \langle [E_i, E_j], E_k \rangle.$$

Essa matriz é antissimétrica nos primeiros dois índices, pois

$$[E_i, E_j] = -[E_j, E_i] \Longrightarrow \alpha_{ijk} = -\alpha_{jik}.$$

Lema 2.4. *Seja G um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda. Se X e Y são dois campos invariantes à esquerda em G, então $\langle X, Y \rangle_g$ é constante.*

Demonstração. Mostraremos que g é constante. Com efeito,

$$g_p(X|_p, Y|_p) = g_e(d(L_{p^{-1}})_p(X|_p), d(L_{p^{-1}})_p(Y|_p)) = g_e(X|_e, Y|_e),$$

ou seja, $\langle X, Y\rangle_g$ é constante. $\square$

Corolário 2.5. *Seja G um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda e $(E_1, \ldots, E_n)$ uma base ortonormal de campos vetoriais invariantes à esquerda para $Lie(G)$. Então $\alpha_{ijk} = \langle [E_i, E_j], E_k\rangle$ são constantes.*

Demonstração. Com efeito, seja $(E_1, \ldots, E_n)$ uma base ortonormal de campos vetoriais invariantes à esquerda para $Lie(G)$. Pela Proposição 1.46, $[E_i, E_j]$ também é um campo vetorial invariante à esquerda para todo $i, j = 1, \ldots, n$. Portanto, pelo Lema 2.4, $\alpha_{ijk} = \langle [E_i, E_j], E_k\rangle$ são constantes. $\square$

Lema 2.6. *Sejam G um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda e ∇ a conexão Riemanniana associada a uma métrica Riemanniana. Nessas condições, se $X, Y \in Lie(G)$ então $\nabla_X Y \in Lie(G)$. Além disso, se $(E_1, \cdots, E_n)$ é uma base ortonormal de $Lie(G)$, então vale a seguinte fórmula:*

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_X Y, E_i\rangle E_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left(\langle [X, Y], E_i\rangle - \langle [Y, E_i], X\rangle + \langle [E_i, X], Y\rangle \right) E_i.$$

Demonstração. Começaremos mostrando a segunda parte. Observamos que $\nabla_X Y$ pode ser escrita em termos da base $(E_1, \cdots, E_n)$ de $Lie(G)$, isto é, $\nabla_X Y = \alpha^i E_i$. Assim, $\langle \nabla_X Y, E_i\rangle = \alpha^i \langle E_i, E_i\rangle = \alpha^i$ e portanto $\nabla_X Y = \sum \langle \nabla_X Y, E_i\rangle E_i$. Pelo Lema 1.92, podemos substituir $\langle \nabla_X Y, E_i\rangle$ por $\frac{1}{2} \left(\langle [X, Y], E_i\rangle - \langle [Y, E_i], X\rangle + \langle [E_i, X], Y\rangle \right)$ obtendo a fórmula desejada.

Para mostrarmos a primeira parte, observamos que o Lema 2.4 nos garante que $\langle [X, Y], E_i\rangle$, $\langle [Y, E_i], X\rangle$ e $\langle [E_i, X], Y\rangle$ são constantes, portanto $\nabla_X Y$ é uma combinação linear dos E_i, ou seja, $\nabla_X Y \in Lie(G)$. $\square$

O tensor de curvatura Riemanniano Rm pode ser escrito de modo explícito como uma função de α_{ijk}. Tal fato é mostrado no lema abaixo.

Lema 2.7. *Sejam G um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda e $(E_1, \ldots, E_n)$ uma base ortonormal para $Lie(G)$. Com as constantes de estrutura α_{ijk} dadas na Definição 2.3, a curvatura seccional $K(E_1, E_2)$ é dada pela fórmula*

$$\begin{aligned} K(E_1, E_2) = \sum_k \Bigg(&\frac{1}{2}\alpha_{12k}(-\alpha_{12k} + \alpha_{2k1} + \alpha_{k12}) \\ &- \frac{1}{4}(\alpha_{12k} - \alpha_{2k1} + \alpha_{k12})(\alpha_{12k} + \alpha_{2k1} - \alpha_{k12}) - \alpha_{k11}\alpha_{k22} \Bigg). \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $(E_1, \ldots, E_n)$ uma base ortonormal para $Lie(G)$. Pelo Lema 2.4, os produtos internos Riemannianos $\langle E_i, E_j \rangle$ são funções constantes, logo

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_i} E_j, E_k \rangle &\overset{\text{Lema 1.92}}{=} \frac{1}{2}(\langle [E_i, E_j], E_k \rangle - \langle [E_j, E_k], E_i \rangle + \langle [E_k, E_i], E_j \rangle) \\
&\overset{\text{Def. 2.3}}{=} \frac{1}{2}(\alpha_{ijk} - \alpha_{jki} + \alpha_{kij}),
\end{aligned}$$

ou em outras palavras

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_k \frac{1}{2}(\alpha_{ijk} - \alpha_{jki} + \alpha_{kij}) E_k. \tag{2.1}$$

Agora, calcularemos a curvatura seccional

$$K(E_1, E_2) = \frac{Rm(E_1, E_2, E_2, E_1)}{|E_1|^2 |E_2|^2 - \langle E_1, E_2 \rangle^2}.$$

Observamos que $|E_1|^2 = \langle E_1, E_1 \rangle = 1$, $|E_2|^2 = \langle E_2, E_2 \rangle = 1$ e $\langle E_1, E_2 \rangle^2 = 0$ pois a base é ortonormal. Assim

$$\begin{aligned}
K(E_1, E_2) = Rm(E_1, E_2, E_2, E_1) &\overset{\text{Prop. 1.103(a),(b)}}{=} Rm(E_2, E_1, E_1, E_2) = \langle R(E_2, E_1) E_1, E_2 \rangle \\
&= \langle \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_1 - \nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_1 - \nabla_{[E_2, E_1]} E_1, E_2 \rangle \\
&= \langle \nabla_{[E_1, E_2]} E_1 - \nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_1 + \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_1, E_2 \rangle \\
&= \langle \nabla_{[E_1, E_2]} E_1, E_2 \rangle - \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_1, E_2 \rangle + \langle \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_1, E_2 \rangle. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Pela Definição 2.3,

$$[E_1, E_2] = \sum_k \alpha_{12k} E_k,$$

logo

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{[E_1, E_2]} E_1, E_2 \rangle &= \langle \nabla_{\sum_k \alpha_{12k} E_k} E_1, E_2 \rangle \\
&= \sum_k \alpha_{12k} \langle \nabla_{E_k} E_1, E_2 \rangle \\
&= \sum_k \alpha_{12k} \left\langle \sum_j \frac{1}{2}(\alpha_{k1j} - \alpha_{1jk} + \alpha_{jk1}) E_j, E_2 \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_k \alpha_{12k} (\alpha_{k12} - \alpha_{12k} + \alpha_{2k1}). \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Calcularemos agora o segundo termo de (2.2) substituindo (2.1):

$$\langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_1, E_2 \rangle = \left\langle \nabla_{E_1} \left(\sum_k \frac{1}{2}(\alpha_{21k} - \alpha_{1k2} + \alpha_{k21}) E_k \right), E_2 \right\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_k \frac{1}{2}(\alpha_{21k} - \alpha_{1k2} + \alpha_{k21})\langle \nabla_{E_1} E_k, E_2\rangle \\
&= \sum_k \frac{1}{2}(\alpha_{21k} - \alpha_{1k2} + \alpha_{k21}) \left\langle \sum_j \frac{1}{2}(\alpha_{1kj} - \alpha_{kj1} + \alpha_{j1k})E_j, E_2 \right\rangle \\
&= \sum_k \frac{1}{4}(\alpha_{21k} - \alpha_{1k2} + \alpha_{k21})(\alpha_{1k2} - \alpha_{k21} + \alpha_{21k}) \\
&= \sum_k \frac{1}{4}[-(\alpha_{12k} + \alpha_{2k1} - \alpha_{k12})][-(\alpha_{12k} - \alpha_{2k1} + \alpha_{k12})] \\
&= \sum_k \frac{1}{4}(\alpha_{12k} - \alpha_{2k1} + \alpha_{k12})(\alpha_{12k} + \alpha_{2k1} - \alpha_{k12}). \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Observando que as constantes de estrutura são antissimétricas nos primeiros dois índices, temos

$$\alpha_{iik} = -\alpha_{iik} = 0,$$

logo

$$\nabla_{E_1} E_1 = \sum_k \frac{1}{2}(\cancelto{0}{\alpha_{11k}} - \alpha_{1k1} + \alpha_{k11})E_k = \sum_k \alpha_{k11} E_k,$$

assim, podemos calcular o último termo de (2.2) como segue-se:

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_1, E_2\rangle &= \langle \nabla_{E_2} \left(\sum_k \alpha_{k11} E_k \right), E_2 \rangle \\
&= \sum_k \alpha_{k11} \langle \nabla_{E_2} E_k, E_2 \rangle \\
&= \sum_k \alpha_{k11} \left\langle \sum_j \frac{1}{2}(\alpha_{2kj} - \alpha_{kj2} + \alpha_{j2k})E_j, E_2 \right\rangle \\
&= \sum_k \alpha_{k11} \sum_k \frac{1}{2}(\alpha_{2k2} - \alpha_{k22} + \cancelto{0}{\alpha_{22k}}) \\
&= \sum_k \alpha_{k11}(-\alpha_{k22}). \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

Finalmente, substituindo (2.3), (2.4) e (2.5) em (2.2), obtemos:

$$
\begin{aligned}
K(E_1, E_2) = \sum_k \Bigg(&\frac{1}{2}\alpha_{12k}(-\alpha_{12k} + \alpha_{2k1} + \alpha_{k12}) \\
&- \frac{1}{4}(\alpha_{12k} - \alpha_{2k1} + \alpha_{k12})(\alpha_{12k} + \alpha_{2k1} - \alpha_{k12}) - \alpha_{k11}\alpha_{k22} \Bigg)
\end{aligned}
$$

como queríamos demonstrar. □

Concluímos pelo lema acima que a curvatura pode ser calculada completamente usando as constantes de estrutura α_{ijk} e é zero quando elas são zero.

Definição 2.8. *Para qualquer elemento X em uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, definimos a transformação linear $ad(X)\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ por $ad(X)Y = [X, Y]$. Esta transformação linear é conhecida por* ***endomorfismo adjunto****.*

Proposição 2.9. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie qualquer. Então para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ é válida a seguinte igualdade:*

$$ad([X, Y]) = ad(X) \circ ad(Y) - ad(Y) \circ ad(X).$$

Demonstração. Como $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie, então por definição (ver Def. 1.47), para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, é satisfeita a identidade de Jacobi:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Reorganizando os termos, obtemos:

$$\begin{aligned}[Z, [X, Y]] = -[X, [Y, Z]] - [Y, [Z, X]] &\Longrightarrow -[[X, Y], Z] = -[X, [Y, Z]] + [Y, [X, Z]] \\ &\Longrightarrow [[X, Y], Z] = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]].\end{aligned}$$

Observando que $ad(X)Y = [X, Y]$, logo:

$$\begin{aligned}[[X, Y], Z] = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] &\Rightarrow ad([X, Y])Z = ad(X)[Y, Z] - ad(Y)[X, Z] \\ &\Rightarrow ad([X, Y])Z = ad(X)(ad(Y)Z) - ad(Y)(ad(X)Z) \\ &\Rightarrow ad([X, Y]) = ad(X) \circ ad(Y) - ad(Y) \circ ad(X).\end{aligned}$$ □

Lema 2.10. *Seja G um grupo de Lie com uma métrica invariante à esquerda, e seja $(E_1, \ldots, E_n)$ uma base ortonormal para $Lie(G)$. Se a transformação linear $ad(E_i)$ é anti-adjunta, então as constantes de estrutura α_{ijk} são antissimétricas nos últimos dois índices.*

Demonstração. Pela hipótese, $ad(E_i)$ é anti-adjunta, isto é,

$$\langle ad(E_i)E_j, E_k\rangle = \langle E_j, -ad(E_i)E_k\rangle.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\alpha_{ijk} &= \langle [E_i, E_j], E_k\rangle = \langle ad(E_i)E_j, E_k\rangle = \langle E_j, -ad(E_i)E_k\rangle \\ &= -\langle E_j, [E_i, E_k]\rangle = -\langle [E_i, E_k], E_j\rangle = -\alpha_{ikj}.\end{aligned}$$ □

Corolário 2.11. *Seja G um grupo de Lie com uma métrica invariante à esquerda e $(E_1, \ldots, E_n)$ uma base ortonormal para $Lie(G)$. Se a transformação linear $ad(E_i)$ é anti-adjunta, então*

$$\alpha_{ijj} = 0.$$

Demonstração. Observamos que $\alpha_{ijj} = \langle [E_i, E_j], E_j \rangle$ é um número real. Portanto

$$\alpha_{ijj} = -\alpha_{ijj} \Longrightarrow \alpha_{ijj} + \alpha_{ijj} = 0 \Longrightarrow 2\alpha_{ijj} = 0 \Longrightarrow \alpha_{ijj} = 0. \qquad \square$$

Lema 2.12. *Seja G um grupo de Lie com uma métrica invariante à esquerda, e seja X um campo vetorial em $Lie(G)$. Se a transformação linear $ad(X)$ é anti-adjunta, então para todo $t \in \mathbb{R}$, $ad(tX)$ também é anti-adjunta.*

Demonstração. Com efeito, dado $t \in \mathbb{R}$,

$$ad(tX)Y = [tX, Y] = \nabla_{tX}Y - \nabla_Y tX = t(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = tad(X)Y$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \langle ad(tX)Y, Z \rangle &= \langle tad(X)Y, Z \rangle = t\langle ad(X)Y, Z \rangle \\ &= -t\langle Y, ad(X)Z \rangle = -\langle Y, tad(X)Z \rangle = \langle Y, -ad(tX)Z \rangle. \end{aligned}$$

Portanto $ad(tX)$ é anti-adjunta para todo $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Lema 2.13. *Seja G um grupo de Lie com uma métrica invariante à esquerda, e seja X um campo vetorial em $Lie(G)$. Se a transformação linear $ad(X)$ é anti-adjunta, então*

$$K(X, Y) \geq 0$$

para todo Y, e a igualdade é assegurada se, e somente se, X é ortogonal ao conjunto

$$[Y, Lie(G)] = \{W \in Lie(G);\ W = [Y, Z],\ \textit{para algum}\ Z \in Lie(G)\}.$$

Demonstração. Primeiro, mostraremos que $K(X, Y) \geq 0$. Suponhamos que $ad(X)$ seja anti-adjunta para todo $X \in Lie(G)$. Como a curvatura seccional $K(X, Y)$ é invariante por mudanças de base do plano gerado por X e Y (ver Lema 1.104), podemos assumir sem perda de generalidade que X e Y são ortonormais. Seja $(E_1, \ldots, E_n)$ uma base ortonormal para $Lie(G)$, com $E_1 = X$ e $E_2 = Y$. Por hipótese $ad(E_1)$ é anti-adjunta, logo

$$\alpha_{1jk} \overset{\text{Lema 2.10}}{=} -\alpha_{1kj} \overset{\text{Def. 2.3}}{=} \alpha_{k1j}. \tag{2.6}$$

Pelo Lema 2.7, Corolário 2.11 e por (2.6) temos

$$K(E_1, E_2) \overset{\text{Lema 2.7}}{=} \sum_k \left(\frac{1}{2}\alpha_{12k}(\cancel{-\alpha_{12k}} + \alpha_{2k1} + \cancel{\alpha_{k12}}) \right.$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{1}{4}(\alpha_{12k} - \alpha_{2k1} + \alpha_{k12})(\cancel{\alpha_{12k}} + \alpha_{2k1} - \cancel{\alpha_{k12}}) - \underbrace{\cancelto{0}{\alpha_{k11}\alpha_{k22}}}_{\text{Cor. 2.11}} \Bigg) \\
&= \sum_k \left(\frac{1}{2}\alpha_{12k}\alpha_{2k1} - \frac{1}{4}(\alpha_{12k} - \alpha_{2k1} + \alpha_{12k})\alpha_{2k1} \right) \\
&= \sum_k \left(\cancel{\frac{1}{2}\alpha_{12k}\alpha_{2k1}} - \cancel{\frac{1}{2}\alpha_{12k}\alpha_{2k1}} + \frac{1}{4}\alpha_{2k1}\alpha_{2k1} \right) \\
&= \sum_k \frac{1}{4}(\alpha_{2k1})^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, para $X, Y \in Lie(G)$ quaisquer (não necessariamente ortogonais), vale

$$K(X,Y) = K(E_1, E_2) \geq 0$$

como queríamos mostrar.

Para mostrarmos a equivalência consideraremos dois casos:

1^o *caso*: Para $X, Y \in Lie(G)$ ortonormais.

Com efeito, sejam $X, Y \in Lie(G)$ ortonormais. Mostraremos que $K(X,Y) = 0$ se, e somente se, $X \perp [Y, Lie(G)]$. Seja $(E_1, \ldots, E_n)$ uma base ortonormal para $Lie(G)$, com $E_1 = X$ e $E_2 = Y$. Assim

$$
\begin{aligned}
K(E_1, E_2) = \sum_k \frac{1}{4}(\alpha_{2k1})^2 = 0 &\iff \langle E_1, [E_2, E_k] \rangle = 0 \quad \forall k = 1, \ldots, n \\
&\iff \langle X, [Y, E_k] \rangle = 0 \quad \forall k = 1, \ldots, n \\
&\iff \langle X, [Y, Z] \rangle = 0 \quad \forall Z \in Lie(G) \\
&\iff X \perp [Y, Lie(G)].
\end{aligned}
$$

2^o *caso*: Para $X, Y \in Lie(G)$ quaisquer.

Seja $(E_1, \ldots, E_n)$ uma base ortonormal para $Lie(G)$, com $E_1 = \dfrac{X}{|X|}$ e tal que o plano gerado por X e Y seja igual ao plano gerado por E_1 e E_2. Desse modo

$$K(X,Y) = K(E_1, E_2) = 0 \Longrightarrow E_1 \perp [E_2, Lie(G)] \Longrightarrow X \perp [E_2, Lie(G)].$$

Mostraremos que $X \perp [Y, Lie(G)]$, para isso, basta mostrarmos que $X \perp [Y, E_k]$, para todo $k = 1, \ldots, n$.

Observamos que $X = cE_1$ e $Y = aE_1 + bE_2$. Além disso, pelo Lema 2.4, a, b e c são constantes, logo

$$
\begin{aligned}
\langle X,[Y,E_k]\rangle &= \langle X,[aE_1+bE_2,E_k]\rangle = \langle X, a[E_1,E_k]+b[E_2,E_k]\rangle \\
&= a\langle X,[E_1,E_k]\rangle + b\,\cancelto{0}{\langle X,[E_2,E_k]\rangle} = a\langle cE_1,[E_1,E_k]\rangle \\
&= ac\langle E_1,[E_1,E_k]\rangle = ac\alpha_{1k1} = -ac\,\underbrace{\cancelto{0}{\alpha_{k11}}}_{\text{Cor. 2.11}} = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto $X \perp [Y, Lie(G)]$.

Para mostrarmos a recíproca, suponhamos que $X \perp [Y, Lie(G)]$ e seja $(E_1,\ldots,E_n)$ uma base ortonormal para $Lie(G)$ tal que $E_1 = \dfrac{X}{|X|}$ e o plano gerado por X e Y é o mesmo plano gerado por E_1 e E_2.

Mostraremos que $E_1 \perp [E_2, Lie(G)]$. Sabemos que $X = cE_1$ e $Y = aE_1 + bE_2$, assim

$$
\begin{aligned}
\langle X,[Y,E_k]\rangle = 0 &\Longrightarrow \langle cE_1,[aE_1+bE_2,E_k]\rangle = 0 \Longrightarrow ac\langle E_1,[E_1,E_k]\rangle + bc\langle E_1,[E_2,E_k]\rangle = 0 \\
&\Longrightarrow ac\alpha_{1k1} + bc\langle E_1,[E_2,E_k]\rangle = 0 \Longrightarrow -ac\cancelto{0}{\alpha_{k11}} + bc\langle E_1,[E_2,E_k]\rangle = 0 \\
&\Longrightarrow E_1 \perp [E_2, Lie(G)].
\end{aligned}
$$

Logo $K(E_1,E_2) = 0 \Longrightarrow K(X,Y) = 0$, como queríamos mostrar. □

Definição 2.14. *O **centro de uma álgebra de Lie** $\mathfrak{g}$ consiste em todos os elementos $X \in \mathfrak{g}$ tal que $[X,Y] = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$, isto é,*

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g}; [X,Y] = 0 \ \ \forall Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Corolário 2.15. *Seja G um grupo de Lie. Se X pertence ao centro de $Lie(G)$, então para qualquer métrica invariante à esquerda a desigualdade $K(X,Y) \geq 0$ é satisfeita para todo Y.*

Demonstração. Se X pertence ao centro de $Lie(G)$, então $[X,Y] = 0$ para todo $Y \in Lie(G)$ e portanto $ad(X) \equiv 0$, ou seja, $ad(X)$ é a transformação nula, que é anti-adjunta. Aplicando o Lema 2.13, segue que $K(X,Y) \geq 0$ para todo $Y \in Lie(G)$. □

Definição 2.16. *Dizemos que uma álgebra de Lie é **comutativa** ou **abeliana** se todos os colchetes $[X,Y]$ são identicamente nulos.*

Proposição 2.17. *Seja G um grupo de Lie. Se $Lie(G)$ é comutativo, então toda métrica invariante à esquerda é plana.*

Demonstração. Segue do Lema 2.7 que $K(E_1,E_2) = 0$ pois todas as constantes de estruturas são nulas, isto é,

$$\alpha_{1jk} = \langle [E_1,E_j],E_k\rangle = \langle 0,E_k\rangle = 0.$$

A conclusão segue da Proposição 1.108. □

Definição 2.18. *Um subconjunto* $\mathfrak{u}$ *de uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é dito ser um* ***ideal*** *se ele é um subespaço vetorial de* $\mathfrak{g}$ *sob a adição, e* $[X, Y] \in \mathfrak{u}$ *para qualquer* $X \in \mathfrak{u}$ *e* $Y \in \mathfrak{g}$.

Observe que qualquer ideal é, em particular, também uma subálgebra de Lie.

Definição 2.19. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie que contenha um ideal* $\mathfrak{u}$ *de codimensão 1. Escolhendo um vetor unitário* X *ortogonal à* $\mathfrak{u}$*, seja*

$$L\colon \mathfrak{u} \longrightarrow \mathfrak{u}$$

a transformação linear $ad(X)$ *restrita a* $\mathfrak{u}$*, isto é,*

$$L = ad(X)|_{\mathfrak{u}}\colon \mathfrak{u} \longrightarrow \mathfrak{u},$$

de modo que $L(Y) = [X, Y]$*. Seja* L^* *a transformação adjunta, e seja* $S = \frac{1}{2}(L + L^*)$ *a parte* ***auto-adjunta*** *de* L.

Lema 2.20. *A transformação* S *definida em 2.19 é auto-adjunta.*

Demonstração. Com efeito, dados $Y, Z \in \mathfrak{u}$ então

$$\begin{aligned}
\langle SY, Z\rangle &= \left\langle \frac{1}{2}(L + L^*)Y, Z \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle LY, Z\rangle + \frac{1}{2}\langle L^*Y, Z\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle Y, L^*Z\rangle + \frac{1}{2}\langle Y, LZ\rangle \\
&= \left\langle Y, \frac{1}{2}(L + L^*)Z \right\rangle \\
&= \langle Y, SZ\rangle.
\end{aligned}$$

□

Considere um grupo de Lie G com métrica invariante à esquerda e álgebra de Lie $Lie(G)$, e um ideal $\mathfrak{u} \subseteq Lie(G)$ (aqui $\mathfrak{u}$ pode ter qualquer codimensão). Pelo Teorema 1.90, podemos definir uma conexão Riemanniana em G denotada por ∇, isto é, uma aplicação

$$\nabla\colon \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(G) \longrightarrow \mathfrak{X}(G)$$

satisfazendo todas as propriedades da Definição 1.82, compatível com a métrica Riemanniana de G (ver Def. 1.88) e simétrico (ver Def. 1.89).

Agora, pelo Lema 2.6, denotaremos por $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana para esta métrica em $\mathfrak{u}$ do seguinte modo: definimos a aplicação

$$\overline{\nabla}\colon \mathfrak{u} \times \mathfrak{u} \longrightarrow \mathfrak{u}$$

de modo que $(X, Y) \mapsto \overline{\nabla}_X Y = \pi(\nabla_X Y)$, onde $\pi\colon Lie(G) \longrightarrow \mathfrak{u}$ é a projeção ortogonal. A definição aqui é algébrica, pois $\mathfrak{u}$ e $Lie(G)$ são espaços vetoriais com produto interno e todo elemento de $\mathfrak{u}$ é um elemento de $Lie(G)$.

Lema 2.21. *Seja G um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda e álgebra de Lie $Lie(G)$ e seja $\mathfrak{u} \subset Lie(G)$ um ideal de codimensão 1. Dado um campo vetorial suave unitário e invariante à esquerda X ortogonal a $\mathfrak{u}$ e dado*

$$L = ad(X)|_{\mathfrak{u}}\colon \mathfrak{u} \longrightarrow \mathfrak{u},$$

com $L(Y) = [X, Y]$, sejam L^* a transformação adjunta e $S = \frac{1}{2}(L + L^*)$ a parte auto-adjunta de L. Então a derivada covariante ∇_X satisfaz:
(a) $\nabla_X X = 0$.
(b) $\nabla_X Y = \frac{1}{2}(L - L^*)Y$ para cada $Y \in \mathfrak{u}$.
Analogamente o operador ∇_Y satisfaz:
(c) $\nabla_Y X = -SY$ para $Y \in \mathfrak{u}$.
(d) $\nabla_Y Z = \overline{\nabla}_Y Z + \langle SY, Z\rangle X$ para cada $Y, Z \in \mathfrak{u}$.

Demonstração. Seja X um campo vetorial suave invariante à esquerda ortogonal a $\mathfrak{u}$ e $Y, Z \in \mathfrak{u}$. Como $\mathfrak{u} \subset Lie(G)$ é um ideal, então pela Definição 2.18, $[Y, X] \in \mathfrak{u}$ para qualquer $Y \in \mathfrak{u}$ e $X \in Lie(G)$; do mesmo modo $[Z, X] \in \mathfrak{u}$ para qualquer $Z \in \mathfrak{u}$ e $X \in Lie(G)$. Observamos que para qualquer campo vetorial $X \in \mathfrak{g}$, $[X, X] = 0$ (ver Def. 1.41).

(a) Primeiro, calcularemos as componentes de $\nabla_X X$ na direção de X e na direção de Y. Como os produtos internos Riemannianos $\langle X, X\rangle = 1$ e $\langle X, Y\rangle = 0$ são funções constantes (ver Lema 2.4), logo pelo Lema 1.92 temos

$$\langle \nabla_X X, X\rangle = \frac{1}{2}(\langle [X, X], X\rangle - \langle [X, X], X\rangle + \langle [X, X], X\rangle) = 0,$$

e

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X X, Y\rangle &= \frac{1}{2}(\langle \cancelto{0}{[X, X]}, Y\rangle - \langle [X, Y], X\rangle + \cancelto{0}{\langle \underbrace{[Y, X]}_{\in\mathfrak{u}}, X\rangle}) \\ &= \frac{1}{2}\cancelto{0}{\langle \underbrace{[Y, X]}_{\in\mathfrak{u}}, X\rangle} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto $\nabla_X X = 0$.

(b) Seja $Z \in \mathfrak{u}$ qualquer. Calcularemos as componentes de $\nabla_X Y$ na direção de X e na direção de Z. Pelo Lema 2.4 os produtos internos Riemannianos $\langle X, X\rangle = 1$, $\langle X, Y\rangle = 0$,

$\langle X, Z\rangle = 0$ e $\langle Y, Z\rangle$ são funções constantes. Logo pelo Lema 1.92 temos

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X Y, X\rangle &= \frac{1}{2}(\langle [X,Y], X\rangle - \cancelto{0}{\langle \underbrace{[Y,X]}_{\in\mathfrak{u}}, X\rangle} + \langle \cancelto{0}{[X,X]}, Y\rangle) \\
&= -\frac{1}{2}\cancelto{0}{\langle \underbrace{[Y,X]}_{\in\mathfrak{u}}, X\rangle} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X Y, Z\rangle &= \frac{1}{2}(\langle [X,Y], Z\rangle - \cancelto{0}{\langle \underbrace{[Y,Z]}_{\in\mathfrak{u}}, X\rangle} + \langle [Z,X], Y\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\langle L(Y), Z\rangle - \langle [X,Z], Y\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\langle L(Y), Z\rangle - \langle L(Z), Y\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\langle L(Y), Z\rangle - \langle Z, L^*(Y)\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\langle L(Y), Z\rangle - \langle L^*(Y), Z\rangle) \\
&= \left\langle \frac{1}{2}(L(Y) - L^*(Y)), Z\right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{2}(L - L^*)Y, Z\right\rangle.
\end{aligned}$$

Assim temos $\nabla_X Y = \frac{1}{2}(L - L^*)Y$.

(c) Como em (b), calcularemos as componentes de $\nabla_Y X$ na direção de X e na direção de Z:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_Y X, X\rangle &= \frac{1}{2}(\cancelto{0}{\langle \underbrace{[Y,X]}_{\in\mathfrak{u}}, X\rangle} - \langle \cancelto{0}{[X,X]}, Y\rangle + \langle [X,Y], X\rangle) \\
&= -\frac{1}{2}\cancelto{0}{\langle \underbrace{[Y,X]}_{\in\mathfrak{u}}, X\rangle} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_Y X, Z\rangle &= \frac{1}{2}(\langle [Y,X], Z\rangle - \langle [X,Z], Y\rangle + \cancelto{0}{\langle \underbrace{[Z,Y]}_{\in\mathfrak{u}}, X\rangle}) \\
&= \frac{1}{2}(-\langle [X,Y], Z\rangle - \langle [X,Z], Y\rangle)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(-\langle L(Y), Z\rangle - \langle L(Z), Y\rangle) \\
&= -\frac{1}{2}(\langle L(Y), Z\rangle + \langle Z, L^*(Y)\rangle) \\
&= -\frac{1}{2}(\langle L(Y), Z\rangle + \langle L^*(Y), Z\rangle) \\
&= \left\langle -\frac{1}{2}(L(Y) + L^*(Y)), Z \right\rangle \\
&= \left\langle -\frac{1}{2}(L + L^*)Y, Z \right\rangle \\
&= \langle -SY, Z\rangle.
\end{aligned}
$$

Conseqüentemente, $\nabla_Y X = -SY$.

(d) Por fim, calcularemos as componentes de $\nabla_Y Z$ na direção de X e na direção de $W \in \mathfrak{u}$ qualquer. O Lema 2.4 garante que os produtos internos Riemannianos $\langle X, Y\rangle = 0$, $\langle X, Z\rangle = 0$, $\langle Y, Z\rangle$, $\langle Y, W\rangle$ e $\langle Z, W\rangle$ são funções constantes, logo pelo Lema 1.92 temos

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla_Y Z, X\rangle &= \frac{1}{2}(\cancelto{0}{\langle \underbrace{[Y, Z]}_{\in \mathfrak{u}}, X\rangle} - \langle [Z, X], Y\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\langle [X, Z], Y\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\langle L(Z), Y\rangle + \langle L(Y), Z\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\langle Z, L^*(Y)\rangle + \langle L(Y), Z\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\langle L^*(Y), Z\rangle + \langle L(Y), Z\rangle) \\
&= \frac{1}{2}\langle L^*(Y) + L(Y), Z\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{2}(L^* + L)Y, Z \right\rangle \\
&= \langle SY, Z\rangle.
\end{aligned}
$$

Como $\nabla_Y Z = \pi(\nabla_Y Z) + \langle \nabla_Y Z, X\rangle X$, então

$$\nabla_Y Z = \overline{\nabla}_Y Z + \langle SY, Z\rangle X. \qquad \square$$

2.2 Curvatura de Ricci

Aqui estudamos a segunda seção do artigo *Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups*, de John Willard Milnor (ver ref. [9]), a qual trata-se do estudo da curvatura de Ricci em grupos de Lie.

Lema 2.22. *Seja G um grupo de Lie, $Lie(G)$ sua álgebra de Lie e $X \in Lie(G)$ um campo unitário. Se a transformação linear $ad(X)$ é anti-adjunta, então $r(X) \geq 0$. A igualdade é assegurada se, e somente se, X é ortogonal ao* ***ideal dos comutadores*** $[Lie(G), Lie(G)] = \{W \in Lie(G);\ W = [Y, Z],\ \text{para}\ Y, Z \in Lie(G)\}$.

Demonstração. Tomemos X unitário e $(X, E_2, \cdots, E_n)$ uma base ortonormal para o T_pM. Por hipótese $ad(X)$ é anti-adjunta, logo o Lema 2.13 nos garante que $K(E_i, X) \geq 0$ para todo $i = 2, \cdots, n$. Assim

$$r(X) \overset{\text{Def. 1.109}}{=} \sum_{i=2}^{n} \langle R(E_i, X)X, E_i \rangle = \sum_{i=2}^{n} K(E_i, X) \geq 0.$$

Para mostrarmos a segunda parte da prova, primeiro suponha que $ad(X)$ seja anti-adjunta e $r(X) = 0$. Provaremos que $X \perp [Lie(G), Lie(G)]$. Com efeito, dada uma base ortonormal $(X, E_2, \cdots, E_n)$, temos

$$r(X) \overset{\text{Def. 1.109}}{=} \sum_{i=2}^{n} \langle R(E_i, X)X, E_i \rangle = \sum_{i=2}^{n} K(E_i, X) = 0.$$

O Lema 2.13 nos garante que $K(E_i, X) \geq 0$, logo

$$\sum_i \underbrace{K(E_i, X)}_{\geq 0} = 0 \Longrightarrow K(E_i, X) = 0$$

para cada $i = 1 \ldots, n$.

Observamos que

$$K(E_i, X) = K(X, E_i), \tag{2.7}$$

pois a curvatura seccional não depende da ordem dos vetores, mas sim do plano gerado.

Nessas condições podemos aplicar o Lema 2.13, e concluir que para todo $Z \in Lie(G)$ temos que $\langle X, [E_i, Z] \rangle = 0$ para cada $i = 1 \cdots, n$. Assim, dado $Y \in Lie(G)$ qualquer, esse elemento é escrito como combinação linear da base $Y = \alpha^i E_i$. Mostraremos que, se $[Y, Z] \in [Lie(G), Lie(G)]$ então $\langle X, [Y, Z] \rangle = 0$. Com efeito,

$$\langle X, [Y, Z] \rangle = \langle X, [\alpha^i E_i, Z] \rangle = \left\langle X, \sum_i \alpha^i [E_i, Z] \right\rangle = \sum_i \alpha^i \langle X, [E_i, Z] \rangle = 0.$$

Como $Y \in Lie(G)$ é arbitrário, então $X \perp [Lie(G), Lie(G)]$, como queríamos provar.

Agora mostraremos a recíproca. Suponhamos que $ad(X)$ seja anti-adjunta e X seja ortogonal a $[Lie(G), Lie(G)]$. Mostraremos que $r(X) = 0$. Com efeito, dada uma base ortonormal $(E_1, \cdots, E_n)$ para $Lie(G)$, temos que $X \perp [Lie(G), Lie(G)]$, pois $[E_i, Lie(G)] \subset [Lie(G), Lie(G)]$.

Pelo Lema 2.13, como $X \perp [E_i, Lie(G)]\ \forall i = 1, \dots, n$, então $K(X, E_i) = 0$ para cada $i = 1, \dots, n$ e isso nos garante que

$$r(X) = \sum_i K(E_i, X) = 0,$$

como queríamos mostrar. □

Corolário 2.23. *Se X unitário pertence ao centro de $Lie(G)$ então $r(X) \geq 0$.*

Demonstração. Se X pertence ao centro de $Lie(G)$, então $ad(X)Y = [X, Y] = 0$ para todo $Y \in Lie(G)$, e conseqüentemente $ad(X)$ é a transformação nula, a qual é anti-adjunta. Portanto pelo Lema 2.22, segue que $r(X) \geq 0$. □

O teorema seguinte é um resultado clássico que será útil para provarmos o Teorema 2.40, porém sua demonstração escapa do objetivo deste trabalho. Uma prova pode ser encontrada em [3], Teorema 11.8.

Teorema 2.24 (Teorema de Myers)**.** *Seja M uma n-variedade Riemanniana conexa e completa, cuja curvatura de Ricci satisfaz a seguinte desigualdade para todo $X_p \in T_pM$ unitário:*

$$r(X_p) \geq \frac{n-1}{R^2}.$$

Então M é compacto, com grupo fundamental finito e com diâmetro diam$(M) \leq \pi R$. (ver Def. 1.80)

O próximo lema nos dá um critério análogo ao Lema 2.22, para obtermos uma curvatura de Ricci negativa.

Lema 2.25. *Seja G um grupo de Lie e $Lie(G)$ sua álgebra de Lie. Se $X \in Lie(G)$ é unitário e ortogonal ao ideal dos comutadores $[Lie(G), Lie(G)]$, então $r(X) \leq 0$. A igualdade é assegurada se, e somente se, $ad(X)$ é anti-adjunta.*

Demonstração. Suponhamos que $X \in Lie(G)$ seja unitário e ortogonal a $[Lie(G), Lie(G)]$. Mostraremos que $r(X) \leq 0$. Segue que o complemento ortogonal de X, o qual denotaremos por $\mathfrak{u}$, contém $[Lie(G), Lie(G)]$, e portanto é um ideal, pois $[X, Y] \in [Lie(G), Lie(G)]$ para todo $X, Y \in Lie(G)$.

Agora, calcularemos a curvatura de Ricci $r(X)$. Pela definição

$$r(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(Y_i, X)X, Y_i \rangle \overset{\text{Prop. 1.103(a),(b)}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(X, Y_i)Y_i, X \rangle$$

onde $(Y_1, \dots, Y_{n-1})$ é qualquer base ortonormal para $\mathfrak{u}$. Observamos que $\mathfrak{u}$ tem codimensão 1 e portanto podemos aplicar o Lema 2.21.

Com a notação da Definição 2.19, é mais fácil trabalharmos com uma base ortonormal de autovetores de S, isto é,

$$SY_i = \lambda_i Y_i. \tag{2.8}$$

Para qualquer $Y \in \mathfrak{u}$ com $|Y| = 1$ a curvatura seccional pode ser calculada como

$$\begin{aligned}
K(X,Y) &= \frac{Rm(X,Y,Y,X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2} \\
&= Rm(X,Y,Y,X) \\
&\overset{\text{Prop. 1.103(b)}}{=} -Rm(X,Y,X,Y) \\
&= -\langle R(X,Y)X, Y\rangle \\
&= -\langle \nabla_X\nabla_Y X - \nabla_Y\nabla_X X - \nabla_{[X,Y]}X, Y\rangle \\
&= \langle \nabla_{[X,Y]}X, Y\rangle - \langle \nabla_X\nabla_Y X, Y\rangle + \langle \nabla_Y \underbrace{\cancelto{0}{\nabla_X X}}_{\text{Lema } 2.21(a)}, Y\rangle \\
&= \langle \nabla_{LY}X, Y\rangle - \langle \nabla_X(-SY), Y\rangle + 0 \\
&= \langle -SLY, Y\rangle - \left\langle \frac{1}{2}(L - L^*)(-SY), Y\right\rangle \\
&= \langle -SLY, Y\rangle + \left\langle \frac{1}{2}(L - L^*)SY, Y\right\rangle.
\end{aligned}$$

Tomando Y para ser um autovetor como em (2.8) e observando que

$$\langle LY_i, Y_i\rangle = \langle Y_i, L^*Y_i\rangle,$$

então

$$\langle SY_i, Y_i\rangle = \left\langle \frac{1}{2}(L + L^*)Y_i, Y_i\right\rangle = \frac{1}{2}\langle LY_i, Y_i\rangle + \frac{1}{2}\langle L^*Y_i, Y_i\rangle = \langle LY_i, Y_i\rangle = \lambda_i.$$

Assim

$$\begin{aligned}
K(X,Y_i) &= \langle -SLY_i, Y_i\rangle + \left\langle \frac{1}{2}(L - L^*)SY_i, Y_i\right\rangle \\
&= -\langle LY_i, \underbrace{S^*Y_i}_{S^* \equiv S}\rangle + \left\langle \frac{1}{2}(L - L^*)\lambda_i Y_i, Y_i\right\rangle \\
&= -\langle LY_i, \lambda_i Y_i\rangle + \left\langle \frac{1}{2}\lambda_i LY_i, Y_i\right\rangle - \left\langle \frac{1}{2}\lambda_i L^*Y_i, Y_i\right\rangle \\
&= -\lambda_i\langle LY_i, Y_i\rangle + \frac{1}{2}\lambda_i\,\langle LY_i, Y_i\rangle - \frac{1}{2}\lambda_i\,\langle L^*Y_i, Y_i\rangle \\
&= -{\lambda_i}^2 + \cancel{\frac{1}{2}{\lambda_i}^2} - \cancel{\frac{1}{2}{\lambda_i}^2} \\
&= -{\lambda_i}^2.
\end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$r(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(Y_i, X)X, Y_i \rangle = -{\lambda_1}^2 - \cdots - {\lambda_{n-1}}^2 = -\text{traço}\left(S^2\right),$$

ou seja, $r(X) \leq 0$ como queríamos mostrar.

Para mostrarmos a segunda parte, observamos que,

$$r(X) = -\text{traço}\left(S^2\right) = 0 \Longleftrightarrow S \equiv 0$$

e portanto,

$$S = \frac{1}{2}(L + L^*) \equiv 0 \Longleftrightarrow L^* \equiv -L,$$

isto é, L é anti-adjunta.

Logo, para $Y, Z \in \mathfrak{u}$,

$$\langle ad(X)Y, Z \rangle = \langle LY, Z \rangle = \langle Y, L^*Z \rangle = \langle Y, -LZ \rangle = -\langle Y, ad(X)Z \rangle = -\langle ad(X)^*Y, Z \rangle$$

e

$$\begin{aligned} \langle ad(X)Y, X \rangle &= \langle LY, X \rangle = 0 \\ \langle ad(X)^*Y, X \rangle &= \langle Y, ad(X)X \rangle = 0, \end{aligned}$$

conseqüentemente

$$\langle ad(X)Y, W \rangle = -\langle ad(X)^*Y, W \rangle \text{ para todo } W \in Lie(G).$$

Por fim, observamos que $ad(X)X = 0$, assim

$$\begin{aligned} \langle ad(X)^*X, X \rangle &= \langle X, ad(X)X \rangle = 0 \\ \langle ad(X)^*X, Y \rangle &= \langle X, ad(X)Y \rangle = \langle X, LY \rangle = 0. \end{aligned}$$

Logo

$$ad(X)^*X = 0.$$

Concluímos que $r(X) = 0$ se, e somente se, $ad(X)$ é anti-adjunta. □

Definição 2.26. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. A **série central descendente***

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \supset \mathfrak{g}^2 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}^k \supset \ldots$$

da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é definida por $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k]$ para $k \geq 1$, que é o subespaço *gerado pelos colchetes* $[X, Y], X \in \mathfrak{g}$ *e* $Y \in \mathfrak{g}^k$.

Definição 2.27. *Uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é* ***nilpotente*** *se sua série central descendente termina no espaço vetorial nulo, isto é,* $\mathfrak{g}^k = \{0\}$ *para algum* $k \geq 1$.

Lema 2.28. *Seja* V *um espaço vetorial de dimensão finita, munido de um produto interno. Se* $L\colon V \longrightarrow V$ *é uma transformação linear não nula e nilpotente, então* L *não pode ser anti-adjunta.*

Demonstração. De fato, seja $k + 1$ (onde $k \geq 1$) o índice de nilpotência da transformação $L = L^1$, então podemos tomar um $x \in V$ tal que $Lx \neq 0$ e $L^k x \neq 0$. Se L for anti-adjunta, segue que

$$\langle L^{2k}x, x\rangle = \pm\langle L^k x, L^k x\rangle = \pm|L^k x|^2 \neq 0 \Longrightarrow L^{2k}x \neq 0,$$

portanto, L não seria nilpotente, o que contradiz a hipótese. Logo, concluímos que L não pode ser anti-adjunta. □

Lema 2.29. *Seja* G *um grupo de Lie com álgebra de Lie* $Lie(G)$ *nilpotente. Então* $ad(X)$ *é nilpotente para todo* $X \in Lie(G)$.

Demonstração. Suponhamos $Lie(G)$ nilpotente, isto é, $Lie(G)^k = \{0\}$ para algum $k \geq 1$. Mostraremos que

$$ad(X)^l = \underbrace{ad(X) \circ \cdots \circ ad(X)}_{l \text{ vezes}} \equiv 0,$$

para todo $l > k - 1 \geq 0$, é a transformação nula.

Com efeito, a série central descendente de $Lie(G)$ é

$$Lie(G) \supset [Lie(G), Lie(G)] \supset [Lie(G), [Lie(G), Lie(G)]] \supset \cdots \supset Lie(G)^k \supset \ldots$$

onde $Lie(G)^k = [Lie(G), Lie(G)^{k-1}] = \{0\}$.

Assim, para todo $X, Y \in Lie(G)$, temos

$$\begin{aligned}
ad(X)Y &= [X, Y] \in [Lie(G), Lie(G)] = Lie(G)^2\\
ad(X)^2 Y &= [X, ad(X)Y] \in [Lie(G), Lie(G)^2] = Lie(G)^3\\
ad(X)^3 Y &= [X, ad(X)^2 Y] \in [Lie(G), Lie(G)^3] = Lie(G)^4\\
&\vdots\\
ad(X)^{k-1} Y &= [X, ad(X)^{k-2} Y] \in [Lie(G), Lie(G)^{k-1}] = Lie(G)^k = \{0\}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Portanto $ad(X)^{k-1} \equiv 0$, e conseqüentemente, para $l > k-1 \geq 0$, $ad(X)^l \equiv 0$ para todo $X \in Lie(G)$. Logo $ad(X)$ é nilpotente para todo $X \in Lie(G)$ como queríamos mostrar. □

Lema 2.30. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $Lie(G)$ nilpotente. Se X é um campo vetorial não nulo pertencente ao último termo diferente de $\{0\}$ da série central descendente, então X pertence ao centro de $Lie(G)$.*

Demonstração. Suponhamos que $Lie(G)$ seja nilpotente, isto significa que algum termo da série central descendente

$$Lie(G) = Lie(G)^1 \supset Lie(G)^2 \supset \cdots \supset Lie(G)^k \supset \dots$$

deve ser $Lie(G)^{k_0} = \{0\}$ para algum $k_0 \geq 2$. (Se $k_0 = 1$ então $Lie(G)^1 = Lie(G) = \{0\}$ e nesse caso não há nada para demonstrarmos.)

Para mostrarmos que X pertence ao centro $\mathfrak{z}(Lie(G))$ de $Lie(G)$, temos que mostrar que $[X, Y] = 0$ para todo $Y \in Lie(G)$. Com efeito, escolhendo um campo vetorial não nulo X no último termo diferente de $\{0\}$ desta seqüência de ideais, ou seja, $X \in Lie(G)^{k_0-1}$, e seja $Y \in Lie(G)$ um campo qualquer, então

$$[X, Y] \in [Lie(G)^{k_0-1}, Lie(G)] = Lie(G)^{k_0} = \{0\},$$

e portanto $[X, Y] = 0$ para todo $Y \in Lie(G)$, isto é, $X \in \mathfrak{z}(Lie(G))$ como queríamos mostrar.

$\square$

Teorema 2.31. *Seja G um grupo de Lie. Suponha que $Lie(G)$ seja nilpotente e não comutativa. Então existe uma direção em que a curvatura de Ricci é estritamente positiva e uma direção em que a curvatura de Ricci é estritamente negativa.*

Demonstração. Primeiramente mostraremos que $r(X) > 0$ para algum $X \in Lie(G)$ unitário. Se $Lie(G)$ é nilpotente, isto significa que algum termo da série central descendente

$$Lie(G) = Lie(G)^1 \supset Lie(G)^2 \supset \cdots \supset Lie(G)^k \supset \dots$$

deve ser $Lie(G)^{k_0} = \{0\}$.

De fato, se $k_0 = 1$ então $Lie(G)^1 = Lie(G) = \{0\}$ e nesse caso $Lie(G)$ é comutativa, contradizendo a hipótese de ser não comutativa. Se $k_0 = 2$ então $[Lie(G), Lie(G)] = \{0\}$ logo $Lie(G)$ é comutativa. Portanto $k_0 > 2$.

Escolhendo um campo vetorial não nulo e unitário X no último termo diferente de $\{0\}$ desta seqüência de ideais, ou seja, $X \in Lie(G)^{k_0-1}$. Daí

$$X \in [Lie(G), Lie(G)^{k_0-2}] \subseteq [Lie(G), Lie(G)],$$

e portanto X não pode ser ortogonal a $[Lie(G), Lie(G)]$. Novamente pelo Lema 2.30, X pertence ao centro de $Lie(G)$, ou seja, $[X, Y] = 0$ para todo $Y \in Lie(G)$, e portanto $ad(X) \equiv 0$ é anti-adjunta. Pelo Lema 2.22, segue que $r(X) > 0$ como queríamos provar.

Agora mostraremos que existe um $Y \in Lie(G)$ tal que $r(Y) < 0$. Observamos que o espaço vetorial $Lie(G)$ não pode ser gerado por $[Lie(G), Lie(G)]$ e o centro $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(Lie(G))$, pois se

$$Lie(G) = [Lie(G), Lie(G)] + \mathfrak{z}$$

então

$$\begin{aligned} Lie(G)^2 &= [Lie(G), Lie(G)] \\ &= [Lie(G), [Lie(G), Lie(G)] + \mathfrak{z}] \\ &= [Lie(G), [Lie(G), Lie(G)]] + \cancelto{0}{[Lie(G), \mathfrak{z}]} \\ &= [Lie(G), [Lie(G), Lie(G)]] \\ &= Lie(G)^3, \end{aligned}$$

e conseqüentemente a série central descendente estabilizaria prematuramente, ou seja

$$Lie(G) = Lie(G)^1 \supset Lie(G)^2 = Lie(G)^3 = \cdots = Lie(G)^k = \dots.$$

Como $Lie(G)$ é não comutativa, logo $[Lie(G), Lie(G)] \neq 0$, contradizendo a hipótese de $Lie(G)$ ser nilpotente. Portanto existe um vetor unitário Y ortogonal a $[Lie(G), Lie(G)] + \mathfrak{z}$. Pelo Lema 2.28, a transformação linear $ad(Y)$ sendo não nula e nilpotente (pelo Lema 2.29), não pode ser anti-adjunta.

Desde que Y é ortogonal a $[Lie(G), Lie(G)]$ e $ad(Y)$ não é anti-adjunta, então pelo Lema 2.25, segue-se que $r(Y) < 0$. □

2.3 Métricas Bi-invariantes

Recordemos da definição 2.1 que uma métrica Riemanniana em um grupo de Lie G é chamada de *bi-invariante* se é invariante por translações tanto à esquerda quanto à direita.

Observamos que cada elemento $g \in G$ define o automorfismo interno $C_g(x) = gxg^{-1}$. Como $C_g(e) = e$, portanto $d(C_g)_e$ pode ser vista como uma aplicação linear $Lie(G) \longrightarrow Lie(G)$. Dados $g, h \in G$,

$$C_g \circ C_h(x) = g(hxh^{-1})g^{-1} = C_{gh}(x),$$

o que implica que $d(C_g)_e \circ d(C_h)_e = d(C_{gh})_e$. Daí que a aplicação $g \mapsto d(C_g)_e$ é uma representação de G em $Lie(G)$, isto é, um homomorfismo de G em $GL(Lie(G))$. (ver Def. 1.30)

Definição 2.32. *A* ***representação adjunta do grupo de Lie*** G *é a aplicação*

$$Ad\colon G \longrightarrow GL(Lie(G))$$

definida como

$$\begin{aligned} Ad(g) &= d(C_g)_e = d(L_g \circ R_{g^{-1}})_e = d(R_{g^{-1}} \circ L_g)_e \\ &= (dL_g)_{g^{-1}} \circ d(R_{g^{-1}})_e = d(R_{g^{-1}})_g \circ d(L_g)_e. \end{aligned}$$

Como Ad é uma representação suave (pois é composição de aplicações suaves), podemos considerar sua representação infinitesimal (ver Def. 1.55), que é uma representação da álgebra de Lie $Lie(G)$ em si mesma, isto é, um homomorfismo entre álgebras de Lie $Lie(G) \longrightarrow \mathfrak{gl}(Lie(G))$.

A seguir definimos a **representação adjunta da álgebra de Lie** $\mathfrak{g}$.

Definição 2.33. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie. Sua* ***representação adjunta****, é a aplicação*

$$ad\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

dada por $X \mapsto ad(X)$*, onde*

$$ad(X)Y = [X, Y].$$

Proposição 2.34. *Seja* G *um grupo de Lie, com álgebra de Lie* $Lie(G)$*, com o colchete dado pelos campos invariantes à esquerda. Então,* $d(Ad)_e(X) = ad(X)$ *para todo* $X \in Lie(G)$ *e vale a igualdade*

$$Ad(\exp X) = \exp(ad(X)). \tag{2.9}$$

Demonstração. Ver demonstração na referência [8], p. 111. □

Observamos que no lado esquerdo da igualdade (2.9) temos a composição entre a representação adjunta de G e a aplicação exponencial $\exp : Lie(G) \longrightarrow G$, isto é, Ad $\circ \exp$, e no lado direito da igualdade temos a exponencial de matrizes (ver Def. 1.117), onde $ad(X) \in \mathfrak{gl}(Lie(G))$ é visto como uma matriz em $GL(Lie(G))$.

A Proposição 2.34 garante que o diagrama abaixo seja comutativo:

$$\begin{array}{ccc} Lie(G) & \xrightarrow{d(\mathrm{Ad})_e = ad} & \mathfrak{gl}(Lie(G)) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \exp} & & \big\downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow[\mathrm{Ad}]{} & GL(Lie(G)) \end{array}$$

Lema 2.35. *Seja* G *um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda. Essa métrica é invariante à direita se, e somente se, para cada elemento* $g \in G$ *a transformação linear*

$$Ad(g)\colon Lie(G) \longrightarrow Lie(G)$$

é um isometria com respeito a métrica induzida em $Lie(G)$, ou seja,

$$\langle Ad(g)X, Ad(g)Y\rangle = \langle X, Y\rangle.$$

Demonstração. Seja G um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda. Suponhamos que essa métrica é também invariante à direita. Mostraremos que $\mathrm{Ad}(g)$ é de fato uma isometria. Com efeito

$$\begin{aligned}
\langle X, Y\rangle &\overset{\text{Def. 2.1}}{=} \langle d(L_g)_e X, d(L_g)_e Y\rangle \\
&\overset{\text{Def. 2.1}}{=} \langle d(R_{g^{-1}})_g \circ d(L_g)_e X, d(R_{g^{-1}})_g \circ d(L_g)_e Y\rangle \\
&\overset{\text{Prop. 1.12}}{=} \langle d(R_{g^{-1}} \circ L_g)_e X, d(R_{g^{-1}} \circ L_g)_e Y\rangle \\
&\overset{\text{Def. 2.32}}{=} \langle \mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto $\mathrm{Ad}(g)$ é uma isometria como queríamos provar.

Reciprocamente, seja G um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda e suponhamos que para todo $g \in G$, $\mathrm{Ad}(g)$ seja uma isometria com respeito a métrica induzida em $Lie(G)$. Vamos mostrar que essa métrica é invariante à direita. Assim

$$\begin{aligned}
\langle X, Y\rangle &= \langle \mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y\rangle \\
&\overset{\text{Def. 2.32}}{=} \langle d(L_g \circ R_{g^{-1}})_e X, d(L_g \circ R_{g^{-1}})_e Y\rangle \\
&\overset{\text{Prop. 1.12}}{=} \langle (dL_g)_{g^{-1}} \circ d(R_{g^{-1}})_e X, (dL_g)_{g^{-1}} \circ d(R_{g^{-1}})_e Y\rangle \\
&= \langle (dL_g)_{g^{-1}}(d(R_{g^{-1}})_e)X, (dL_g)_{g^{-1}}(d(R_{g^{-1}})_e)Y\rangle \\
&= \langle d(R_{g^{-1}})_e X, d(R_{g^{-1}})_e Y\rangle,
\end{aligned}$$

e conseqüentemente, pela Definição 2.1, essa métrica é de fato invariante à direita. □

Lema 2.36. *Seja V um espaço vetorial com produto interno e dimensão finita e $T \colon V \longrightarrow V$ uma transformação linear. São equivalentes:*
(a) T preserva produtos internos, isto é, dados $v, w \in V$, quaisquer, $\langle Tv, Tw\rangle = \langle v, w\rangle$;
(b) T é um isomorfismo e $T^* = T^{-1}$.

Demonstração. Ver demonstração na referência [7], Teorema 13.6, p. 388. □

Lema 2.37. *Seja G um grupo de Lie conexo. Uma métrica invariante à esquerda em G é bi-invariante se, e somente se, a transformação linear $ad(X)$ é anti-adjunta para todo $X \in Lie(G)$.*

Demonstração. Seja G um grupo de Lie conexo e suponhamos que a métrica é bi-invariante. Mostraremos que $ad(X)$ é anti-adjunta para todo $X \in Lie(G)$. Seja $g = \exp(X)$.

Como a métrica é bi-invariante então (pelo Lema 2.35), $\mathrm{Ad}(g)$ é uma isometria. Logo, pelo Lema 2.36, $\mathrm{Ad}(g)^* = \mathrm{Ad}(g)^{-1}$. Por outro lado

$$\mathrm{Ad}(g) = \mathrm{Ad}(\exp(X)) \overset{\text{Prop. 2.34}}{=} \exp(ad(X)) = e^{ad(X)}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(g)^* = \mathrm{Ad}(g)^{-1} &\Longrightarrow \exp(ad(X))^* = \exp(ad(X))^{-1} \\
&\Longrightarrow e^{ad(X)^*} = e^{-ad(X)} \\
&\Longrightarrow ad(X)^* = -ad(X),
\end{aligned}$$

de modo que $ad(X)$ é anti-adjunta para todo $X \in Lie(G)$.

Reciprocamente, se G é um grupo de Lie conexo e $ad(X)$ é anti-adjunta para todo $X \in Lie(G)$, mostraremos que $\mathrm{Ad}(g)$ é isometria para todo $g \in G$. Com efeito, temos dois casos a considerar:

1^o *caso*: $g = \exp(X)$, para algum $X \in Lie(G)$. Neste caso

$$\mathrm{Ad}(g) = \mathrm{Ad}(\exp(X)) = \exp(ad(X)).$$

Como $ad(X)$ é anti-adjunta, então

$$\begin{aligned}
ad(X)^* = -ad(X) &\Longrightarrow e^{ad(X)^*} = e^{-ad(X)} \\
&\Longrightarrow \exp(ad(X))^* = \exp(ad(X))^{-1} \\
&\Longrightarrow \mathrm{Ad}(g)^* = \mathrm{Ad}(g)^{-1}.
\end{aligned}$$

Portanto $\mathrm{Ad}(g)$ é uma isometria pelo Lema 2.36.

2^o *caso*: $g \neq \exp(X)$, para todo $X \in Lie(G)$. Pelo Corolário 1.121 existem abertos $U \subset Lie(G)$ e $V \subset G$ tais que $0 \in U$, $e \in V$ e $\exp|_U : U \longrightarrow U$ é um difeomorfismo.

Agora, pela Prop. 1.29 um grupo de Lie conexo é gerado por qualquer vizinhança da identidade, então pelo Corolário 1.122, todo elemento de G pode ser escrito como um produto de elementos de uma vizinhança aberta V, isto é, $g = g_1 g_2 \dots g_k$ em que $g_1, \dots, g_k \in V$. Como $g_i \in V$, para todo $i = 1, \cdots, k$, então $g_i = \exp(X_i)$, para algum $X_i \in U$. Assim, pelo 1º caso, $\mathrm{Ad}(g_i)$ é uma isometria. Mas

$$\mathrm{Ad}(g) = \mathrm{Ad}(g_1 \cdots g_k) = \mathrm{Ad}(g_1) \circ \cdots \circ \mathrm{Ad}(g_k).$$

Como $\mathrm{Ad}(g_i)$ é uma isometria, então $\mathrm{Ad}(g)$ também o é.

Portanto, pelos casos 1 e 2, $\mathrm{Ad}(g)$ é uma isometria para todo $g \in G$. Pelo Lema 2.35, segue que G admite métrica bi-invariante. □

Corolário 2.38. *Todo grupo de Lie compacto admite uma métrica bi-invariante de modo que todas as curvaturas seccionais satisfazem $K \geq 0$. Mais ainda, se X e Y são ortonormais então é válida a seguinte igualdade:*

$$K(X,Y) = \frac{1}{4}|[X,Y]|^2.$$

Demonstração. Seja G um grupo de Lie compacto. Todo grupo compacto pode ser munido com uma métrica bi-invariante (ver ref. [11], Prop. 6.8). Logo, pelo Lema 2.37 $ad(X)$ é anti-adjunta para todo $X \in Lie(G)$, e portanto, pelo Lema 2.13 $K(X,Y) \geq 0$ para todo $X, Y \in Lie(G)$.

Para mostrarmos a segunda parte, seja $(E_1, \ldots, E_n)$ uma base ortonormal para $Lie(G)$. Pelo Lema 2.4, os produtos internos Riemannianos $\langle E_i, E_j\rangle$ são funções constantes, logo pelo Lema 1.92 segue-se que

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_i} E_j, E_k\rangle &= \frac{1}{2}(\langle [E_i,E_j],E_k\rangle - \langle [E_j,E_k],E_i\rangle + \langle [E_k,E_i],E_j\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\langle [E_i,E_j],E_k\rangle - \langle ad(E_j)E_k,E_i\rangle - \langle [E_i,E_k],E_j\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\langle [E_i,E_j],E_k\rangle - \langle E_k,-ad(E_j)E_i\rangle - \langle ad(E_i)E_k,E_j\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\langle [E_i,E_j],E_k\rangle + \langle E_k,[E_j,E_i]\rangle - \langle E_k,-ad(E_i)E_j\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\langle [E_i,E_j],E_k\rangle - \cancel{\langle E_k,[E_i,E_j]\rangle} + \cancel{\langle E_k,[E_i,E_j]\rangle}) \\
&= \frac{1}{2}\langle [E_i,E_j],E_k\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\nabla_{E_i} E_j = \frac{1}{2}[E_i,E_j] = \frac{1}{2}ad(E_i)E_j. \tag{2.10}$$

Calcularemos agora a curvatura seccional. Sejam X e Y ortonormais, com $E_1 = X$ e $E_2 = Y$. Observamos que para qualquer campo vetorial $X \in Lie(G)$, $[X,X] = 0$ (ver Def. 1.41), assim

$$\begin{aligned}
K(E_1,E_2) &\overset{(2.2)}{=} \langle \nabla_{[E_1,E_2]}E_1 - \nabla_{E_1}\nabla_{E_2}E_1 + \nabla_{E_2}\nabla_{E_1}E_1, E_2\rangle \\
&\overset{(2.10)}{=} \left\langle \frac{1}{2}[[E_1,E_2],E_1] - \frac{1}{2}\nabla_{E_1}[E_2,E_1] + \frac{1}{2}\nabla_{E_2}\cancelto{0}{[E_1,E_1]}, E_2 \right\rangle \\
&\overset{(2.10)}{=} \left\langle \frac{1}{2}[[E_1,E_2],E_1] - \frac{1}{4}[E_1,[E_2,E_1]], E_2 \right\rangle \\
&= \left\langle -\frac{1}{2}[E_1,[E_1,E_2]] + \frac{1}{4}[E_1,[E_1,E_2]], E_2 \right\rangle \\
&= -\frac{1}{4}\langle [E_1,[E_1,E_2]], E_2\rangle \\
&= -\frac{1}{4}\langle ad(E_1)[E_1,E_2], E_2\rangle
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \langle [E_1, E_2], ad(E_1)E_2 \rangle$$
$$= \frac{1}{4} \langle [E_1, E_2], [E_1, E_2] \rangle$$
$$= \frac{1}{4} |[E_1, E_2]|^2. \qquad \square$$

Lema 2.39. *Todo grupo de Lie G é completo.*

Demonstração. Com efeito, seja g uma métrica invariante à esquerda fixa em G. Mostraremos primeiro que G é homogêneo (ver Def. 1.119). Como g é um métrica invariante à esquerda, logo para todo $p, q \in G$ temos

$$g_p(X_p, Y_p) = g_{L_{qp^{-1}}(p)}(d(L_{qp^{-1}})_p X_p, d(L_{qp^{-1}})_p Y_p),$$

isto é, $L_{qp^{-1}} \colon G \longrightarrow G$ é uma isometria em G tal que $L_{qp^{-1}}(p) = q$, logo G é homogêneo. Trocando p por e e q por p concluímos que L_p é uma isometria.

Escolha um $\varepsilon > 0$ de modo que a ε-bola fechada sobre a identidade $B[e, \varepsilon]$ (ver Def. 1.81) seja compacta. Afirmamos que $L_p(B[e, \varepsilon]) = B[p, \varepsilon]$:

(a) Mostraremos que $L_p(B[e, \varepsilon]) \subset B[p, \varepsilon]$. Com efeito, seja $q \in L_p(B[e, \varepsilon])$ qualquer, de modo que $L_p(a) = q$, para algum $a \in B[e, \varepsilon]$ (ver Fig. 2.1). Assim

$$\mathrm{d}_g(q, p) = \mathrm{d}_g(L_p(a), L_p(e)) \overset{\text{Teo. 1.79}}{=} \mathrm{d}_g(a, e) \leq \varepsilon.$$

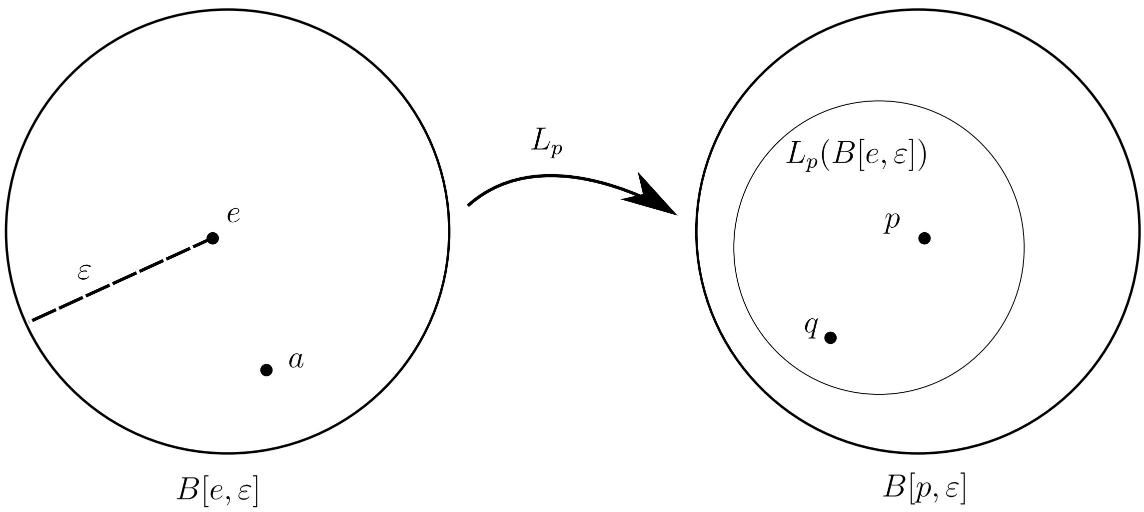

Figura 2.1: Prova do Lema 2.39(a)

(b) Agora mostraremos que $B[p, \varepsilon] \subset L_p(B[e, \varepsilon])$. Dado $r \in B[p, \varepsilon]$ (ver Fig. 2.2), seja

$a = L_{p^{-1}}(r)$, assim

$$\mathrm{d}(a, e) = \mathrm{d}(L_{p^{-1}}(r), e) = \mathrm{d}(L_p(L_{p^{-1}}(r)), L_p(e)) = \mathrm{d}_g(r, p) \leq \varepsilon.$$

Portanto $a \in B[e, \varepsilon]$ e $r = L_p(a)$, ou seja, $B[p, \varepsilon] \subset L_p(B[e, \varepsilon])$. Portanto $L_p(B[e, \varepsilon]) =$

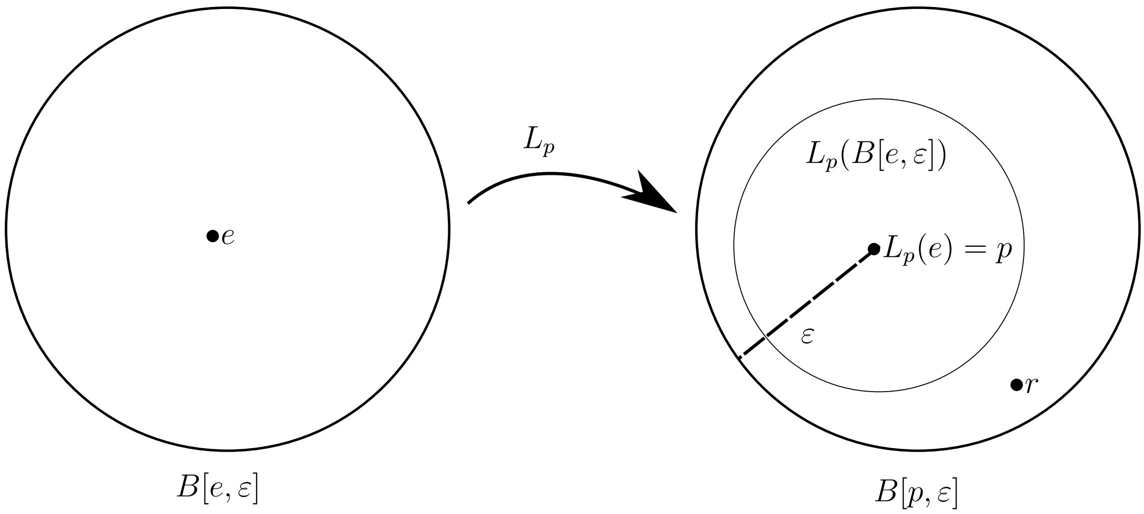

Figura 2.2: Prova do Lema 2.39(b)

$B[p, \varepsilon]$, ou seja, toda bola de raio ε é compacta, e conseqüentemente toda seqüencia de Cauchy encontra-se eventualmente dentro de um conjunto compacto. Portanto G é completo. $\square$

Teorema 2.40. *Um grupo de Lie conexo admite uma métrica invariante à esquerda com todas as curvaturas de Ricci satisfazendo* $r(X) \geq c > 0$ *se, e somente se, ele é compacto com grupo fundamental finito.*

Demonstração. Suponhamos que o grupo de Lie G admita uma métrica invariante à esquerda com todas as curvaturas de Ricci satisfazendo $r(X) \geq c > 0$. Segue do Lema 2.39 que G é completo e, pelo Teorema de Myers (Teorema 2.24), concluímos que G é compacto com grupo fundamental finito.

Reciprocamente, se G é um grupo de Lie conexo e compacto, então G pode ser munido com uma métrica bi-invariante (ver ref. [11], Prop. 6.8), e assim pelo Lema 2.37, segue-se que $ad(X)$ é anti-adjunta para cada $X \in Lie(G)$. Além disso, se G tem grupo fundamental finito, então pelo Teorema 1.126 o espaço de recobrimento universal simplesmente conexo de G, denotado por $\tilde{G}$, é compacto.

Afirmamos que $Lie(G)$ é igual ao ideal dos comutadores $[Lie(G), Lie(G)]$. Se $Lie(G) \neq [Lie(G), Lie(G)]$, então existe um vetor unitário $\xi \in [Lie(G), Lie(G)]^{\perp}$. Tomemos $T\colon Lie(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(X) = \langle X, \xi \rangle$. Logo T é uma transformação linear entre $Lie(G)$ e $\mathbb{R}$. Afirmamos que T é um homomorfismo entre álgebras de Lie, ou seja, $T([X, Y]) = 0$ para todo $X, Y \in Lie(G)$. Tomemos $\mathfrak{u} = \{\xi\}^{\perp}$, logo $\mathfrak{u}$ é um ideal e $[Lie(G), Lie(G)] \subset \mathfrak{u}$. Assim, dados

$X, Y \in Lie(G)$, $X = \tilde{X} + a\xi$ e $Y = \tilde{Y} + b\xi$, para certos $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{u}$ e certos $a, b \in \mathbb{R}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}[X, Y] &= [\tilde{X} + a\xi, \tilde{Y} + b\xi] = [\tilde{X}, \tilde{Y}] + b[\tilde{X}, \xi] + a[\xi, \tilde{Y}] + ab\cancelto{0}{[\xi, \xi]} \\ &= \nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y} - \nabla_{\tilde{Y}}\tilde{X} + b\left(\nabla_{\tilde{X}}\xi - \nabla_{\xi}\tilde{X}\right) + a\left(\nabla_{\xi}\tilde{Y} - \nabla_{\tilde{Y}}\xi\right).\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.21 (com ξ no lugar de X), sabemos que $\nabla_{\tilde{X}}\xi, \nabla_{\tilde{Y}}\xi, \nabla_{\xi}\tilde{X}, \nabla_{\xi}\tilde{Y} \in \mathfrak{u}$, logo

$$\begin{aligned}T([X, Y]) &= \langle [X, Y], \xi\rangle = \langle \nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y} - \nabla_{\tilde{Y}}\tilde{X}, \xi\rangle \overset{\text{Lema 2.21}}{=} \left\langle \langle S\tilde{X}, \tilde{Y}\rangle\xi - \langle S\tilde{Y}, \tilde{X}\rangle\xi, \xi\right\rangle \\ &= \langle S\tilde{X}, \tilde{Y}\rangle - \langle S\tilde{Y}, \tilde{X}\rangle = \cancel{\langle S\tilde{X}, \tilde{Y}\rangle} - \cancel{\langle \tilde{Y}, S\tilde{X}\rangle} = 0.\end{aligned}$$

Portanto T é um homomorfismo entre álgebras de Lie e como $Lie(G) \cong Lie(\tilde{G})$, T dá origem a um homomorfismo entre os grupos de $\tilde{G}$ e $\mathbb{R}$. Além disso, esse homomorfismo entre $\tilde{G}$ e $\mathbb{R}$ não é trivial, pois $T \neq 0$.

Seja $\tilde{T} \colon \tilde{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ esse homomorfismo não trivial entre grupos de Lie. Assim, como $\tilde{G}$ é compacto, $\tilde{T}(\tilde{G}) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$ para algum $\varepsilon > 0$. Tomemos $g \in \tilde{G}$ tal que $\tilde{T}(g) \neq 0$. Assim,

$$\tilde{T}(g \cdot g) = \tilde{T}(g) + \tilde{T}(g) = 2\tilde{T}(g)$$

e

$$\tilde{T}(g^n) = n\tilde{T}(g).$$

Tomando n grande o suficiente $|n\tilde{T}(g)| > \varepsilon$, ou seja, $n\tilde{T}(g) \notin [-\varepsilon, \varepsilon]$. Mas isso é uma contradição. Portanto $Lie(G) = [Lie(G), Lie(G)]$, e conseqüentemente, pelo Lema 2.22, $r(X) > 0$ para todo $X \in Lie(G)$. Como G é compacto então existe um $c > 0$ tal que $r(X) \geq c > 0$. $\square$

Definição 2.41. *Uma álgebra de Lie é dita* ***simples*** *se não contiver ideais além do $\{0\}$ e dela própria.*

Lema 2.42. *Se a métrica em $Lie(G)$ é bi-invariante, então o complemento ortogonal de qualquer ideal é também um ideal. Conseqüentemente $Lie(G)$ pode ser expressado como uma soma direta ortogonal de ideais simples.*

Demonstração. Mostraremos que se $\mathfrak{a}$ é um ideal, então $\mathfrak{a}^{\perp}$ também é um ideal. Com efeito, sejam $X \in \mathfrak{a}^{\perp}, Y \in Lie(G)$ e $Z \in \mathfrak{a}$. Devemos mostrar que $[X, Y]$ é ortogonal a $\mathfrak{a}$. De fato,

$$\begin{aligned}\langle [X, Y], Z\rangle &= -\langle [Y, X], Z\rangle = -\langle ad(Y)X, Z\rangle = -\langle X, ad(Y)^{*}Z\rangle \\ &= -\langle X, -ad(Y)Z\rangle = \langle X, [Y, Z]\rangle = 0\end{aligned}$$

para qualquer $Z \in \mathfrak{a}$, ou seja, $[X, Y] \in \mathfrak{a}^{\perp}$. Assim $Lie(G)$ pode ser escrito como a soma direta $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$ de ideais.

Por indução temos:

(a) Se $Lie(G)$ é simples, então não há nada a se fazer;

(b) Se $Lie(G)$ não é simples, então tomemos $\mathfrak{a}_1$ um ideal diferente de $\{0\}$ e de $Lie(G)$. Logo $Lie(G) = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1^{\perp}$;

(c) Se $\mathfrak{a}_1$ e $\mathfrak{a}_1^{\perp}$ são simples, então o resultado segue-se. $\square$

Lema 2.43. *Seja G um grupo de Lie conexo e simplesmente conexo com álgebra de Lie $Lie(G)$ e métrica bi-invariante. Então G é isomorfo ao produto de subgrupos de Lie*

$$A_1 \times \cdots \times A_k$$

tais que a álgebra de Lie de A_i é $\mathfrak{a}_i$. Se $\mathfrak{a}_i$ é comutativo então $A_i \cong \mathbb{R}$. Caso contrário, A_i é compacto.

Demonstração. Pela Proposição 1.125, dado $\mathfrak{a}_i$, existe um único grupo de Lie conexo e simplesmente conexo A_i com álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{a}_i$. Portanto, $A_1 \times \cdots \times A_k$ é um grupo de Lie conexo e simplesmente conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_k = Lie(G)$. Pela unicidade dada na Proposição 1.125, temos que

$$G \cong A_1 \times \cdots \times A_k.$$

Para cada fator simplesmente conexo A_i existem duas possibilidades:

(a) Suponhamos que $\mathfrak{a}_\mathrm{i}$ seja comutativo. Mostraremos que $A_i \cong \mathbb{R}$. Com efeito, seja $\mathfrak{a}_\mathrm{i}$ simples e comutativo. Consideremos $X \in \mathfrak{a}_\mathrm{i}$, $X \neq 0$ e

$$\mathbb{R}X = \{\alpha X; \alpha \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}.$$

Observamos que $\mathbb{R}X$ é um ideal, pois dados $\alpha X, Y \in \mathfrak{a}_\mathrm{i}$,

$$[\alpha X, Y] = \alpha[X, Y] = 0 \in \mathbb{R}X.$$

Logo $\mathbb{R}X$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{a}_\mathrm{i}$. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $W \in Lie(G)$. Precisamos mostrar que $[\alpha X, W] \in \mathbb{R}X$. Mas $W = aX + Y + Z$ com $a \in \mathbb{R}$, $Y \in \mathfrak{a}_i$, $Z \in \mathfrak{a}_i^{\perp}$ e $X \perp Y$. Dessa forma

$$[\alpha X, W] = \alpha[X, aX + Y + Z] = \alpha a \cancelto{0}{[X, X]} + \alpha[X, Y] + \alpha[X, Z].$$

Sendo $\mathfrak{a}_i$ é comutativo, então $[X, Y] = 0$, logo $\alpha[X, W] = \alpha[X, Z] = 0$, pois $\mathfrak{a}_i^{\perp}$ também é um ideal, logo $[X, Z] \in \mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{a}_i^{\perp} = \{0\}$. Como $[\alpha X, W] = 0 \in \mathbb{R}X$, então $\mathbb{R}X$ é um ideal.

Assim $0 \neq \mathbb{R}X \subseteq \mathfrak{a}_\mathrm{i}$ e como $\mathfrak{a}_\mathrm{i}$ é um ideal simples, segue que $\mathfrak{a}_\mathrm{i} = \mathbb{R}X$. Como A_i é conexo e simplesmente conexo, então pela Proposição 1.125, $A_i \cong \mathbb{R}$.

(b) Suponhamos que $\mathfrak{a}_i$ seja não comutativo. Mostraremos que A_i é compacto. De fato, se $\mathfrak{a}_i$ é não comutativo, então o centro de $\mathfrak{a}_i$ deve ser um ideal trivial, pois $\mathfrak{a}_i$ é simples, e conseqüentemente, $\mathfrak{a}_i = [\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i]$, pois $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i]$ é um ideal: Sejam $Y \in Lie(G)$ e $X \in \mathfrak{a}_i$. Então $Y = Z + W$ com $Z \in \mathfrak{a}_i$ e $W \in \mathfrak{a}_i^{\perp}$. Logo $[X, Y] = [X, Z] + [X, W]$. Como $\mathfrak{a}_i$ e $\mathfrak{a}_i^{\perp}$ são ideais, então $[X, W] \in \mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{a}_i^{\perp} = \{0\}$. Portanto $[X, Y] = [X, Z] \in [\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i]$. Se $X \in [\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i]$ e $Y \in Lie(G)$, então $X \in \mathfrak{a}_i$ e $[X, Y] \in [\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i]$.

Por hipótese G admite métrica bi-invariante e é conexo, então aplicando o Lema 2.37, $ad(X)$ é anti-adjunta para todo $X \in \mathfrak{a}_i$. Logo, pelo Lema 2.22, A_i tem curvatura de Ricci estritamente positiva e, novamente pelo Lema 2.37, a métrica restrita a A_i é bi-invariante.

Como A_i é conexo e admite métrica invariante à esquerda, logo pelo Lema 2.39, A_i é completo. Assim, seja $\varepsilon > 0$ de modo que a ε-bola fechada $B[p, \varepsilon] \subseteq A_i$ seja compacta, então a aplicação $r\colon B[p, \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}$ admite um mínimo $c > 0$, portanto, $r(X) \geq c > 0$. Como L_p é uma isometria para todo $p \in A_i$, então $T_pA_i = d(L_p)_{e_i}T_{e_i}A_i$ e $r(d(L_p)_eX) = r(X) \geq c > 0$ para todo $X \in T_{e_i}A_i$, portanto $r(Y) \geq c > 0$, para todo $Y \in T_pA_i$ e todo $p \in A_i$. Segue do Teorema 2.40 que A_i é compacto. $\square$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] DO CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides, 2015.

[2] KUHNEL, W. *Differential geometry: curves - surfaces - manifolds*. translated by Bruce Hunt - 2nd ed., USA, 2006.

[3] LEE, J. M. *Riemannian Manifolds - An Introduction to Curvature*. Springer - Verlag, New York, 1997.

[4] LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds - Second Edition*. Springer - Verlag, New York, 2013.

[5] LIMA, E. L. *Fundamental Groups and Covering Spaces- first edition*. Translated by Jonas Gomes. A K Peters. Natick, Massachusetts, 2003.

[6] LIMA, E. L. *Curso de analise vol.2*. 11.ed. IMPA (Projeto Euclides), Rio de Janeiro, 2015.

[7] LIPSCHUTZ, S., AND LIPSON, M. L. *Algebra Linear*. traducao: Dr. Claus Ivo Doering. - 4.ed. - Dados eletronicos, Porto Alegre, 2011.

[8] MARTIN, L. A. B. S. *Grupos de Lie*. Editora da UNICAMP, 2014.

[9] MILNOR, J. W. Curvatures of left invariant metrics on lie groups. *USA - Advances in Mathematics 21, 293-329* (1976).

[10] MUNKRES, J. R. *Topology - 2nd Edition*. Prentice Hall, 2000.

[11] POOR, W. A. *Differential geometric structures*. Dover Pub, 2007.