



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

THIAGO FERREIRA DE OLIVEIRA

**MODELAGEM MATEMÁTICA E ANÁLISE NUMÉRICA  
DO TEMPO DE RETARDO PARA EQUAÇÃO  
TELEGRÁFICA-REATIVA-DIFUSIVA**

---

Londrina  
2020

**THIAGO FERREIRA DE OLIVEIRA**

**MODELAGEM MATEMÁTICA E ANÁLISE NUMÉRICA  
DO TEMPO DE RETARDO PARA EQUAÇÃO  
TELEGRÁFICA-REATIVA-DIFUSIVA**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Eliandro Rodrigues Cirilo

Londrina

2020

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da  
Universidade Estadual de Londrina**

**Dados Internacionais de Catalogação -na-Publicação (CIP)**

O48m	<p>Oliveira, Thiago Ferreira de. Modelagem matemática e análise numérica do tempo de retardo para equação telegráfica-reativa-difusiva / Thiago Ferreira de Oliveira. – Londrina, 2020. 43 f.</p> <p>Orientador: Eliandro Rodrigues Cirilo. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2020.</p> <p>Inclui Bibliografia.</p> <p>1. Equação telegráfica - Tese. 2. Dinâmica populacional - Tese. 3. Modelagem numérica - Tese. 4. Tempo de retardo - Tese. I. Cirilo, Eliandro Rodrigues. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU 51</p>
------	---

THIAGO FERREIRA DE OLIVEIRA

**MODELAGEM MATEMÁTICA E ANÁLISE NUMÉRICA  
DO TEMPO DE RETARDO PARA EQUAÇÃO  
TELEGRÁFICA-REATIVA-DIFUSIVA**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Eliandro R. Cirilo  
Universidade Estadual de Londrina

---

Prof. Dr. Marcio Augusto Villela Pinto  
Universidade Federal do Paraná

---

Profª. Dra. Neyva Maria Lopes Romeiro  
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 09 de Março de 2020.

*Dedico este trabalho à minha família*

## **AGRADECIMENTOS**

À minha mãe, Andreza Ferreira, à minha irmã Paola Vitória e à minha tia Patricia de Fátima, pelo apoio incondicional e por sempre estarem ao meu lado nas minhas escolhas. À minha namorada, Mayara Mendes, pela paciência e companheirismo, em todo esse tempo.

Ao meu orientador Prof. Dr. Eliandro Rodrigues Cirilo, pelos valiosos conselhos, apoio e compreensão constantes.

Aos professores do Departamento de Matemática da UNICENTRO e do PGMAC pelos ensinamentos.

Aos meus colegas do PGMAC, pelo companheirismo e que fizeram essa jornada parecer menos árdua.

A todos que direta ou indiretamente participaram dessa etapa da minha vida.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

OLIVEIRA, Thiago Ferreira. **Modelagem matemática e análise numérica do tempo de retardo para equação telegráfica-reativa-difusiva**. 2020. 43 páginas. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

## RESUMO

É sabido que a equação telegráfica-reativa-difusiva é mais apropriada para estudar dinâmicas populacionais do que a equação de reação-difusão. Entretanto, dependendo dos valores assumidos pelas constantes presentes no termo reativo, inconsistências podem ser encontradas nas soluções obtidas pelo modelo telegráfico. Essas inconsistências são soluções negativas da densidade populacional. Por outro lado, constatamos que o parâmetro de retardo temporal tem vínculo direto com o surgimento das soluções negativas. Desta forma, neste trabalho propomos um novo modelo matemático para o tempo de retardo, de modo que as constantes do termo reativo assumidas não conduzam ao surgimento das soluções negativas, e que a solução encontrada seja válida e de alta acurácia na perspectiva numérica.

**Palavras-chave:** Equação telegráfica. Dinâmica populacional. Modelagem numérica. Tempo de retardo. Domínio crítico.

OLIVEIRA, Thiago Ferreira. **Mathematical modeling and numeric analysis of relaxation time for reactive-diffusive-telegraphic equation** . 2020. 43 pages. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

### ABSTRACT

It is known that the reactive-diffusive-telegraphic equation is more appropriate for studying population dynamics than the reaction-diffusion equation. However, from constant values of the reactive term perhaps inconsistency can be found at the solution obtained by the telegraphic model. The inconsistency leads to negative population density solution. On the other hand, we found that the time relaxation parameter has a direct link with the arising of the negative solutions as well. Thus, in this work we propose a new mathematical model for the time relaxation, so that the reactive term's constants do not lead to arising of negative solution, and the numerical solution found is validated and accurated.

**Keywords:** Telegraph equation. Population dynamics. Numerical modeling. Relaxation time. Critical domain.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>AS EQUAÇÕES DE REAÇÃO-DIFUSÃO E TELEGRÁFICA-REATIVA-DIFUSIVA</b>	<b>14</b>
<b>3</b>	<b>MATERIAIS E MÉTODOS</b>	<b>19</b>
3.1	MODELO MATEMÁTICO . . . . .	19
3.2	MODELAGEM DO TEMPO DE RETARDO $\tau$ . . . . .	20
<b>4</b>	<b>MODELAGEM NUMÉRICA</b>	<b>24</b>
4.1	DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO TELEGRÁFICA-REATIVA-DIFUSIVA . . . . .	24
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>27</b>
5.1	VALIDAÇÃO DO MÉTODO NUMÉRICO . . . . .	27
5.2	MODELO EXPONENCIAL . . . . .	31
5.3	MODELO LOGÍSTICO . . . . .	37
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>41</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>42</b>

## LISTA DE FIGURAS

2.1	Representação do movimento da densidade de animais dada pelas equações (2.3) e (2.4). . . . .	16
3.1	Representação da condição inicial $S(0, x)$ , do tipo degrau. . . . .	20
3.2	Ilustração de uma ocupação territorial em dois tempos subsequentes. . . . .	22
4.1	Domínio computacional . . . . .	24
5.1	Refinamento da malha com a população em regime permanente, com o modelo exponencial. . . . .	29
5.2	Evolução temporal da cláusula (5.1), com o modelo exponencial. . . . .	30
5.3	Solução numérica para a densidade populacional no instante $t = 2.3$ com $n_i = 900$ , para $\tau = \frac{1}{2\lambda} = 1.6 \times 10^{-1}$ (a) e $\tau = 0.5$ (b). . . . .	31
5.4	Soluções numérica ( $S_N$ ) e analítica ( $S_A$ ) para a densidade populacional em regime permanente, com o modelo exponencial. . . . .	32
5.5	Soluções numérica ( $S_N$ ) e analítica ( $S_A$ ) para a densidade populacional em processo de extinção, com o modelo exponencial. . . . .	33
5.6	Comportamento de $\tau$ e $\lambda$ para as dinâmicas de extinção e persistência populacional, com o modelo exponencial. . . . .	34
5.7	Soluções analítica ( $P_A$ ) e numérica ( $P_N$ ) para a população em regime permanente, para vários valores de $K_1$ . . . . .	35
5.8	Soluções analítica ( $S_A$ ) e numérica ( $S_N$ ) para a densidade populacional em regime permanente para $K_1 = 0.1$ . . . . .	36
5.9	Soluções analítica ( $S_A$ ) e numérica ( $S_N$ ) para a densidade populacional em regime permanente para $K_1 = 0.3$ . . . . .	36
5.10	Soluções analítica ( $S_A$ ) e numérica ( $S_N$ ) para a densidade populacional em regime permanente para $K_1 = 0.7$ . . . . .	36
5.11	Soluções analítica ( $S_A$ ) e numérica ( $S_N$ ) para a densidade populacional em regime permanente para $K_1 = 1.0$ . . . . .	37
5.12	Solução numérica ( $P_N$ ) para a população em regime permanente com o modelo logístico. . . . .	39
5.13	Solução numérica ( $S_N$ ) para a densidade populacional em regime permanente com o modelo logístico. . . . .	39
5.14	Evolução temporal da cláusula (5.1) para o modelo logístico. . . . .	40
5.15	Comportamento de $\tau$ e $\lambda$ com os parâmetros da Tabela 5.7, para o modelo logístico. . . . .	40

## LISTA DE TABELAS

5.1	Parâmetros para estudar o refinamento de malha. . . . .	28
5.2	Tempo de processamento (em segundos) obtido com diferentes valores para o fator de relaxação $\omega$ , com o modelo exponencial. . . . .	28
5.3	Valores da população em regime permanente para o refinamento de malha e erro relativo entre a populações. . . . .	29
5.4	Parâmetros para estudar a persistência da população para o modelo exponencial.	32
5.5	Parâmetros do estudo da persistência populacional para diferentes valores de $K_1$ para o modelo exponencial. . . . .	34
5.6	Comportamento da população no tempo em que atinge o regime permanente, para vários valores de $K_1$ com o modelo exponencial. . . . .	35
5.7	Parâmetros do estudo da persistência populacional para o modelo logístico, com $K_1 = 0.1$ . . . . .	38
5.8	Tabela com valores retirados de [7] da população em regime permanente, com $\tau$ constante. . . . .	38

## 1 INTRODUÇÃO

Compreender as condições que levam à sobrevivência de uma espécie em um determinado ambiente é de grande importância [9]. Apesar de ser um problema fundamentalmente de cunho ecológico, em muitos casos é inviável utilizar apenas as ferramentas desse campo de estudo numa pesquisa, por causa dos altos custos dos experimentos empíricos. A modelagem matemática apresenta-se, então, como uma alternativa muito eficaz para estudar tais problemas, substituindo, quase por completo, os experimentos de campo [17].

Ao longo dos anos, os modelos de reação-difusão têm sido exaustivamente estudados para modelar problemas de natureza ecológica, em particular, o estudo sobre dinâmicas populacionais [1, 11, 22, 24]. Os modelos de reação-difusão ajudaram os pesquisadores a entenderem uma série de fatores ecológicos importantes. Um exemplo é o conceito de domínio crítico, que foi descrito e estudado em [21]. Em [21] os autores mostraram que o domínio crítico diz respeito sobre o tamanho aceitável do domínio de uma região para que uma determinada espécie consiga se proliferar e se estabelecer.

Entretanto, os modelos de reação-difusão têm seus limites e sua relevância às vezes pode se tornar questionável. A principal crítica ao modelo é que a movimentação animal, modelada a partir do movimento Browniano [10], não é muito realista. Esse movimento Browniano faz com que os indivíduos possam desenvolver uma velocidade infinita por caminhos completamente aleatórios [13, 28].

Uma solução para o problema da velocidade infinita é utilizar uma modelagem mais suave para a movimentação animal, fazendo com que o animal continue se movendo o mais próximo da direção que estava anteriormente [28]. Esse padrão de movimento é conhecido como caminhada aleatória correlacionada. Ao modelar a movimentação animal por meio da caminhada aleatória correlacionada, o processo microscópico correspondente é chamado de processo telegráfico, que resulta na conhecida equação telegráfica [28].

A equação telegráfica é obtida também, a partir de manipulações sobre as equações de Maxwell-Cattaneo e da Continuidade [18]. Em termos matemáticos, a equação de Maxwell-Cattaneo é uma aproximação em série de Taylor com expansão até a derivada de primeira ordem a partir da lei de Fick [18], então nestes termos é razoável considerar o valor numérico do tempo de retardo pequeno por razões relacionadas à precisão. Por exemplo, em [14], os autores consideram valores da ordem de  $10^{-13}$  segundos em seus estudos.

Em um contexto biológico, não é realístico admitir o tempo de retardo com essa ordem de grandeza em segundos, uma vez que o mesmo está relacionado à variação da densidade populacional de um animal no domínio. Quando comparamos a equação telegráfica obtida por meio das equações de Maxwell-Cattaneo e da Continuidade com a obtida pela caminhada aleatória correlacionada, observamos que o coeficiente de tempo de retardo está intimamente relacionado com a movimentação animal.

A movimentação por meio da caminhada aleatória correlacionada, em um domínio unidimensional, juntamente com a equação telegráfica correspondente, foram estudadas em todos os seus detalhes nos trabalhos [27], [12] e [15]. Em particular, no estudo realizado em [13], a autora faz uma comparação entre os modelos reativo-difusivo e teleográfico, ilustrando o problema da velocidade infinita do modelo reativo-difusivo.

Recentemente, os trabalhos [2, 7] elaboraram um estudo sobre a equação telegráfica, utilizando técnicas computacionais. Ambos os trabalhos mostraram uma relação entre os modelos reativo-difusivo e teleográfico. Observaram que, sob determinados parâmetros, existe uma conexão entre o domínio crítico dos dois modelos.

Embora a equação telegráfica, em muitos casos, tenha mais precisão na modelagem de invasão biológica, quando comparada a equação de reação-difusão, foi mostrado nos trabalhos [2, 7] a existência de soluções negativas para a densidade populacional, o que não deve ocorrer. Uma alternativa apresentada em ambos os trabalhos para contornar esse problema é a utilização da chamada condição de corte. Tal condição estabelece valor nulo para densidade populacional, toda vez que surge valores negativos para a densidade populacional.

Uma vez que a equação telegráfica é uma equação de onda, um dos motivos que levam ao surgimento de densidade populacional negativa, se deve ao fenômeno de mudança de fase [26]. Além do fenômeno de mudança de fase, foi apresentado em [7] que a existência de soluções negativas também depende dos parâmetros adotados. Em particular, quando se toma o tempo de retardo constante, existe uma grande chance da ocorrência de densidade populacional negativa.

Diante desse cenário, o principal objetivo deste trabalho é propor uma modelagem para o tempo de retardo, e estudar o impacto de tal modelagem na equação telegráfica, com a finalidade de eliminar a ocorrência do surgimento de soluções negativas para a densidade populacional.

Para cumprir esse objetivo, no capítulo 2 exibiremos as equações de reação-difusão e telegráfica-reativa-difusiva, partindo da hipótese de movimentação animal em um domínio unidimensional. No capítulo 3 apresentaremos o modelo matemático estudado, juntamente com a modelagem proposta para o tempo de retardo. O capítulo 4 é dedicado a modelagem numérica. A equação telegráfica é discretizada utilizando o método de diferenças finitas, e o sistema de equações gerado é resolvido pelo esquema quase-não-linear [7].

A partir do capítulo 5, as simulações realizadas já fazem uso da modelagem que propomos para o tempo de retardo. Assim, primeiramente validamos a modelagem numérica a partir do critério de independência de malha. Em seguida estudamos dois casos distintos para o termo reativo da equação telegráfica: termo exponencial e termo logístico. Por fim, no capítulo 6 exibiremos comentários sobre o trabalho desenvolvido, conclusões e apontamentos para trabalhos futuros.

## 2 AS EQUAÇÕES DE REAÇÃO-DIFUSÃO E TELEGRÁFICA-REATIVA- DIFUSIVA

O movimento Browniano refere-se ao movimento aleatório de partículas imersas em um fluido, que é resultado de colisões aleatórias entre as partículas que estão no fluido [10]. Por outro lado, esse movimento também é utilizado para modelar a movimentação animal, como é mostrado em [28].

Desta forma, se considerarmos um espaço com uma grande quantidade de animais se movimentando, em um domínio unidimensional, para cada passagem de tempo os animais se movem, para esquerda ou direita, com igual probabilidade mudar o sentido de sua direção, independentemente da direção em que estava anteriormente [28]. Ou seja, o animal não tem uma tendência de permanecer em uma determinada direção, e isso implica que um animal que executa o movimento Browniano, pode percorrer caminhos completamente aleatórios [4, 28].

As equações resultantes da modelagem de movimentação animal por meio do movimento Browniano, são as equações de difusão, dada por [8, 28]

$$\frac{\partial S}{\partial t} = D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}, \quad (2.1)$$

e a versão generalizada da equação (2.1), conhecida como equação de reação-difusão (ERD), representada por [8, 28]

$$\frac{\partial S}{\partial t} = D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + F(S), \quad (2.2)$$

em que  $S = S(x, t)$  é a densidade populacional ao longo do domínio unidimensional  $x$  e tempo  $t$ ,  $D$  é denominado como coeficiente de difusão e  $F(S)$  é o termo reativo.

Apesar da equação (2.2) ser utilizada para o estudo de dinâmicas populacionais [1, 11, 22, 24], os animais tendem a ter uma velocidade infinita, como mostrado nos trabalhos [4, 13, 28]. Assim uma alternativa mais realista à ERD, é utilizar a equação telegráfica-reativa-difusiva, que apresentaremos nos parágrafos seguintes.

Portanto, quando se utiliza o movimento Browniano para modelar a movimentação de animais, encontramos as equações de difusão e reação-difusão, mas a consequência disso é o surgimento da velocidade infinita [4, 13, 28]. Um argumento para essa velocidade infinita vem do fato de se considerar que cada passo temporal na caminhada aleatória, gerada pelo movimento Browniano, é independente dos passos anteriores. Isto é, o animal tem a mesma probabilidade de se mover para a direita ou para a esquerda, independentemente da direção em que estava se movendo anteriormente.

Uma suposição no problema da caminhada aleatória que possa gerar um movimento mais suave, é que existe uma correlação entre dois passos temporais adjacentes [28]. Esta correlação implica uma tendência para o animal continuar se movendo em uma determi-

nada direção, uma vez que começa a se mover nessa direção. Se, inicialmente, as probabilidades de movimento para a direita ou esquerda forem estabelecidas, o animal manterá sua tendência de se mover em uma direção fixa por um certo tempo a uma velocidade finita [28].

Assim, ao utilizarmos a suposição que o animal continua se movimentando na mesma direção que fez anteriormente, isto é, que existe uma correlação entre dois passos temporais adjacentes, estamos nos referindo ao movimento chamado de caminhada aleatória correlacionada [28]. Esse movimento está relacionado ao que é conhecido como processo de Poisson [6, 23]. Além disso, o movimento aleatório correlacionado dá origem a equação telegráfica, que será deduzida a seguir.

A dedução da equação telegráfica, em uma dimensão espacial, é detalhada no estudo feito em [12], entretanto, aqui será utilizada a adaptação feita no trabalho [13]. Assim, suponha um ambiente com uma grande quantidade de animais se movimentando em um domínio unidimensional. Cada animal faz passos de comprimento  $\delta$ , ou seja, de um ponto  $x_i$  até próximo ponto  $x_{i+1}$  o animal anda uma distância  $\delta$ . Além disso, cada passo tem uma duração  $h$ , isto é, o animal anda uma distância  $\delta$  em um tempo  $h$ . A cada passo, a densidade populacional aumenta ou diminui a uma taxa representada pela função  $F(S)$ . Seja  $p$  a probabilidade de um animal continuar se movimentando na mesma direção que estava anteriormente, e seja  $q$  a probabilidade de um animal inverter a sua direção. Para  $h$  pequeno, tem-se que  $p = 1 - \lambda h$  e  $q = \lambda h$ , onde  $\lambda$  é a taxa de inversão de movimento do animal. Essa probabilidade de inversão de direção em um determinado período de tempo é descrita pelo que é conhecido como processo de Poisson com intensidade  $\lambda$  [6, 23]. Definindo  $\alpha(t, x)$  como a densidade de animais que chegam da esquerda ao ponto  $x$  no tempo  $t$ , e  $\beta(t, x)$  como a densidade de animais que chegam da direita ao ponto  $x$  no tempo  $t$ , podemos escrever as seguintes equações [13, 28]:

$$\alpha(t + h, x) = p\alpha(t, x - \delta) + q\beta(t, x - \delta) + \frac{1}{2}hF(S(t, x - \delta)) \quad (2.3)$$

e

$$\beta(t + h, x) = p\beta(t, x + \delta) + q\alpha(t, x + \delta) + \frac{1}{2}hF(S(t, x + \delta)). \quad (2.4)$$

A movimentação animal descrita pelas equações (2.3) e (2.4) está ilustrada da Figura 2.1. Para cada intervalo de tempo,  $hF(S(t, x))$  representa a quantidade dos animais produzidos no instante  $t$  e no ponto  $x$ . Como premissa admitimos que 50% da quantidade produzida decorre daqueles animais provenientes da esquerda do ponto  $x$ , e os outros 50%, de modo análogo, da direita de  $x$ , levando o aparecimento de  $\frac{1}{2}$  nas equações (2.3) e (2.4).

Admitindo por hipótese que as funções  $\alpha(t, x)$  e  $\beta(t, x)$  são infinitamente diferenciáveis, podemos expandir por série de Taylor os termos das as equações (2.3) e (2.4), exceto nos termos que dependem da função  $F(S)$ , obtendo:

$$\alpha(t, x) + h\alpha_t(t, x) + \frac{h^2}{2}\alpha_{tt}(\varepsilon_1, x) = p \left[ \alpha(t, x) - \delta\alpha_x(t, x) + \frac{\delta^2}{2}\alpha_{xx}(t, \eta_1) \right]$$

$$+q \left[ \beta(t, x) - \delta\beta_x(t, x) + \frac{\delta^2}{2}\beta_{xx}(t, \eta_2) \right] + \frac{1}{2}hF(S) \quad (2.5)$$

e

$$\begin{aligned} \beta(t, x) + h\beta_t(t, x) + \frac{h^2}{2}\beta_{tt}(\varepsilon_2, x) &= p \left[ \beta(t, x) + \delta\beta_x(t, x) + \frac{\delta^2}{2}\beta_{xx}(t, \eta_3) \right] + \\ q \left[ \alpha(t, x) + \delta\alpha_x(t, x) + \frac{\delta^2}{2}\alpha_{xx}(t, \eta_4) \right] &+ \frac{1}{2}hF(S), \end{aligned} \quad (2.6)$$

tal que  $t < \varepsilon_1 < t + h$ ,  $t < \varepsilon_2 < t + h$ ,  $x - \delta < \eta_1 < x$ ,  $x - \delta < \eta_2 < x$ ,  $x < \eta_3 < x + \delta$ ,  $x < \eta_4 < x + \delta$ .

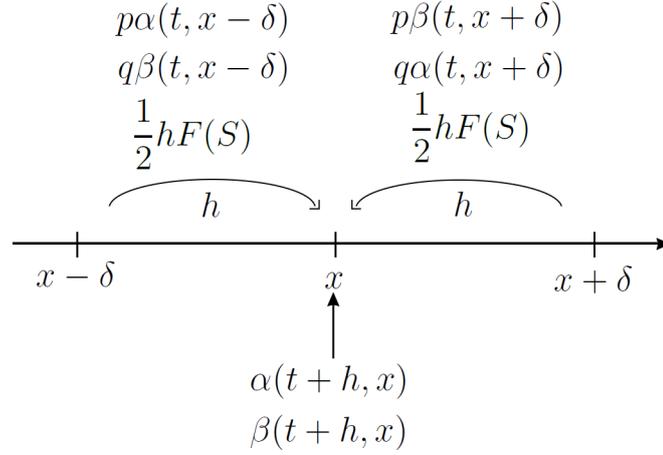


Figura 2.1: Representação do movimento da densidade de animais dada pelas equações (2.3) e (2.4).

Fonte: Autor.

Substituindo  $p = 1 - \lambda h$  e  $q = \lambda h$  nas equações (2.5) e (2.6):

$$\begin{aligned} h\alpha_t(t, x) + \frac{h^2}{2}\alpha_{tt}(\varepsilon_1, x) &= -\delta\alpha_x(t, x) + \frac{\delta^2}{2}\alpha_{xx}(t, \eta_1) - \lambda h\alpha(t, x) + \delta\lambda h\alpha_x(t, x) - \\ \lambda h\frac{\delta^2}{2}\alpha_{xx}(t, \eta_1) + \lambda h\beta(t, x) - \lambda h\delta\beta_x(t, x) &+ \lambda h\frac{\delta^2}{2}\beta_{xx}(t, \eta_2) + \frac{1}{2}hF(S) \end{aligned} \quad (2.7)$$

e

$$\begin{aligned} h\beta_t(t, x) + \frac{h^2}{2}\beta_{tt}(\varepsilon_2, x) &= \delta\beta_x(t, x) + \frac{\delta^2}{2}\beta_{xx}(t, \eta_3) - \lambda h\beta(t, x) - \delta\lambda h\beta_x(t, x) - \\ \lambda h\frac{\delta^2}{2}\beta_{xx}(t, \eta_3) + \lambda h\alpha(t, x) + \lambda h\delta\alpha_x(t, x) &+ \lambda h\frac{\delta^2}{2}\alpha_{xx}(t, \eta_4) + \frac{1}{2}hF(S). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dividindo as equações (2.7) e (2.8) por  $h$ , obtemos, respectivamente

$$\begin{aligned} \alpha_t(t, x) + \frac{h}{2}\alpha_{tt}(\varepsilon_1, x) &= -\frac{\delta}{h}\alpha_x(t, x) + \frac{\delta^2}{2h}\alpha_{xx}(t, \eta_1) - \lambda\alpha(t, x) + \delta\lambda\alpha_x(t, x) - \\ \lambda\frac{\delta^2}{2}\alpha_{xx}(t, \eta_1) + \lambda\beta(t, x) - \lambda\delta\beta_x(t, x) &+ \lambda\frac{\delta^2}{2}\beta_{xx}(t, \eta_2) + \frac{1}{2}F(S) \end{aligned} \quad (2.9)$$

e

$$\begin{aligned} \beta_t(t, x) + \frac{h}{2}\beta_{tt}(\varepsilon_2, x) &= \frac{\delta}{h}\beta_x(t, x) + \frac{\delta^2}{2h}\beta_{xx}(t, \eta_3) - \lambda\beta(t, x) - \delta\lambda\beta_x(t, x) - \\ &\lambda\frac{\delta^2}{2}\beta_{xx}(t, \eta_3) + \lambda\alpha(t, x) + \lambda\delta\alpha_x(t, x) + \lambda\frac{\delta^2}{2}\alpha_{xx}(t, \eta_4) + \frac{1}{2}F(S), \end{aligned} \quad (2.10)$$

tomando o limite quando  $h$  e  $\delta$  vão para zero nas equações (2.9) e (2.10), e definindo  $\gamma = \frac{\delta}{h}$  como a velocidade finita do animal, obtemos, respectivamente

$$\begin{aligned} \alpha_t(t, x) + \lim_{\delta, h \rightarrow 0} \left\{ \frac{h}{2}\alpha_{tt}(\varepsilon_1, x) \right\} &= -\gamma\alpha_x(t, x) + \gamma \lim_{\delta, h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\delta}{2}\alpha_{xx}(t, \eta_1) \right\} - \lambda\alpha(t, x) + \\ \lim_{\delta, h \rightarrow 0} \left\{ \delta\lambda\alpha_x(t, x) - \lambda\frac{\delta^2}{2}\alpha_{xx}(t, \eta_1) \right\} &+ \lambda\beta(t, x) - \lim_{\delta, h \rightarrow 0} \left\{ \lambda\delta\beta_x(t, x) + \right. \\ &\left. \lambda\frac{\delta^2}{2}\beta_{xx}(t, \eta_2) \right\} + \frac{1}{2}F(S) \end{aligned} \quad (2.11)$$

e

$$\begin{aligned} \beta_t(t, x) + \lim_{\delta, h \rightarrow 0} \left\{ \frac{h}{2}\beta_{tt}(\varepsilon_2, x) \right\} &= \gamma\beta_x(t, x) + \gamma \lim_{\delta, h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\delta}{2}\beta_{xx}(t, \eta_3) \right\} - \lambda\beta(t, x) - \\ \lim_{\delta, h \rightarrow 0} \left\{ \delta\lambda\beta_x(t, x) - \lambda\frac{\delta^2}{2}\beta_{xx}(t, \eta_3) \right\} &+ \lambda\alpha(t, x) + \lim_{\delta, h \rightarrow 0} \left\{ \lambda\delta\alpha_x(t, x) + \right. \\ &\left. \lambda\frac{\delta^2}{2}\alpha_{xx}(t, \eta_4) \right\} + \frac{1}{2}F(S), \end{aligned} \quad (2.12)$$

as equações (2.11) e (2.12) ficam, respectivamente

$$\alpha_t(t, x) + \gamma\alpha_x(t, x) = \lambda\beta(t, x) - \lambda\alpha(t, x) + \frac{1}{2}F(S) \quad (2.13)$$

e

$$\beta_t(t, x) - \gamma\beta_x(t, x) = \lambda\alpha(t, x) - \lambda\beta(t, x) + \frac{1}{2}F(S), \quad (2.14)$$

Agora, somando as equações (2.13) e (2.14) e derivando o resultado em relação a  $t$ :

$$(\alpha(t, x) + \beta(t, x))_{tt} + \gamma(\alpha(t, x) - \beta(t, x))_{xt} = F_t(S). \quad (2.15)$$

Subtraindo a equação (2.14) da equação (2.13), multiplicando o resultado por  $\gamma$  e depois derivando em relação a  $x$ :

$$\gamma(\alpha(t, x) - \beta(t, x))_{xt} + \gamma^2(\alpha(t, x) + \beta(t, x))_{xx} = -2\gamma\lambda(\alpha(t, x) - \beta(t, x))_x. \quad (2.16)$$

Subtraindo a equação (2.16) da equação (2.15):

$$(\alpha(t, x) + \beta(t, x))_{tt} - \gamma^2(\alpha + \beta)_{xx} = 2\gamma\lambda(\alpha(t, x) - \beta(t, x))_x + F_t(S). \quad (2.17)$$

Somando as equações (2.13) e (2.14) e multiplicando o resultado por  $2\lambda$ :

$$2\gamma\lambda(\alpha(t, x) - \beta(t, x))_x = 2\lambda F(S) - 2\lambda(\alpha(t, x) + \beta(t, x))_t. \quad (2.18)$$

Substituindo a equação (2.18) na equação (2.17):

$$(\alpha(t, x) + \beta(t, x))_{tt} - \gamma^2(\alpha(t, x) + \beta(t, x))_{xx} = 2\lambda F(S) - 2\lambda(\alpha(t, x) + \beta(t, x))_t + F_t(S). \quad (2.19)$$

Observe que a densidade total de animais  $S(t, x)$  é composta de duas partes, a densidade de animais que chegam da esquerda ou da direita e a densidade de novos animais produzidos a cada passagem de tempo  $h$ . Então

$$S(t, x) = \alpha(t, x) + \beta(t, x) + hF(S), \quad (2.20)$$

como  $h$  tende a zero, a equação (2.20) fica

$$S(t, x) = \alpha(t, x) + \beta(t, x), \quad (2.21)$$

logo, da equação (2.21) podemos reescrever a equação (2.19), obtendo

$$S_{tt} - \gamma^2 S_{xx} = 2\lambda F(S) - 2\lambda S_t + F_t(S). \quad (2.22)$$

Na equação (2.22), usando a regra da cadeia em  $F_t(S)$ , multiplicando por  $\frac{1}{2\lambda}$  e fazendo algumas manipulações, encontramos

$$\frac{1}{2\lambda} S_{tt} + \left(1 - \frac{1}{2\lambda} F'\right) S_t = \frac{\gamma^2}{2\lambda} S_{xx} + F(S), \quad (2.23)$$

na equação (2.23), denotando  $\tau = \frac{1}{2\lambda}$  e  $D = \frac{\gamma^2}{2\lambda}$ , segue que

$$\tau S_{tt} + (1 - \tau F') S_t = D S_{xx} + F(S),$$

ou ainda

$$\tau \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + \left(1 - \tau \frac{dF}{dS}\right) \frac{\partial S}{\partial t} = D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + F(S). \quad (2.24)$$

A equação (2.24) é chamada de equação telegráfica-reativa-difusiva (ETRD). Observe que, quando  $F(S) = 0$ , para valores pequenos de  $t$  se obtém velocidades finitas para o animal, e a medida que  $t$  se torna grande, a equação telegráfica se reduz à equação de difusão (2.1), como apresentado em [28]. Quando  $F(S) \neq 0$ , o comportamento é o mesmo, com a ETRD convergindo para a ERD, quando o tempo fica grande. Essa última afirmação será mostrada no decorrer do texto. Para isto, utilizaremos análise numérica e mostraremos que de fato a ETRD converge para a ERD.

### 3 MATERIAIS E MÉTODOS

Neste capítulo, apresentaremos o modelo matemático estudado. Além disso, exibiremos a modelagem que propomos para o tempo de retardo.

#### 3.1 MODELO MATEMÁTICO

Como mostramos na seção 2, a ETRD pode ser deduzida tomando por premissa a movimentação animal, resultando em

$$\tau \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + \left(1 - \tau \frac{dF(S)}{dS}\right) \frac{\partial S}{\partial t} = D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + F(S), \quad (3.1)$$

onde  $S = S(t, x)$  é a densidade populacional ao longo do espaço unidimensional  $x$ , no tempo  $t$ . O termo  $D = \frac{\gamma^2}{2\lambda}$  é aquele que modula o espalhamento de  $S$ , em que  $\gamma$  é a velocidade do animal. O coeficiente  $\tau = \frac{1}{2\lambda}$  é denominado tempo de retardo, e modela o atraso com que as variações de  $S$  ocorrem no domínio com o passar do tempo. O termo  $F(S)$  é uma função que depende exclusivamente de  $S$ , e no caso em questão, é o termo reativo da equação diferencial parcial.

Neste cenário o parâmetro  $\lambda$  é interpretado como sendo a taxa de inversão do movimento do animal. Essa taxa está relacionada com a inércia que um determinado organismo tem, isto é, a tendência de resistir a mudança de direção. Assim quanto maior for o valor de  $\lambda$ , menor a inércia do organismo [13].

Nestes termos, o valor de  $\tau$  está correlacionado a  $\lambda$ , o que conduz a afirmar que o tempo de retardo está na dependência da intensidade da taxa de inversão do movimento, que para os animais conhecidos pela ciência, não é extremamente pequeno, por exemplo, da ordem de  $10^{-13}$  segundos, como apresentado em [14].

Adicionalmente, partindo por hipótese que no instante inicial a densidade populacional admite configuração similar a uma função tipo degrau, veja a Figura 3.1, com taxa de variação temporal nula, então:

$$S(0, x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < A \\ B, & A \leq x \leq C, \\ 0, & C < x \leq L \end{cases} \quad \frac{\partial S}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (3.2)$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são números reais positivos, e  $L$  é o comprimento do domínio unidimensional tal que  $x \in [0, L]$ .

Para o contorno consideramos a condição de fronteira de Dirichlet, isto é,

assumimos que a densidade populacional nos extremos do domínio seja nula. Logo, não temos como premissa a existência de indivíduos fora do domínio ou a perda/ganho de indivíduos pelas bordas do domínio.

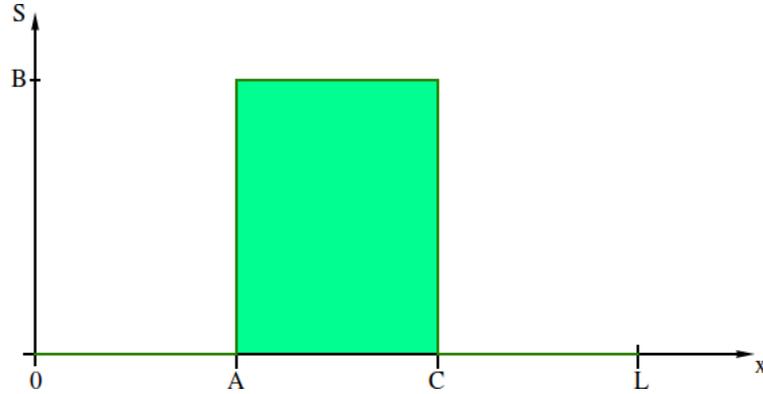


Figura 3.1: Representação da condição inicial  $S(0, x)$ , do tipo degrau.

Fonte: Autor.

Portanto, considerando a equação (3.1), as condições iniciais (3.2) e a condição de fronteira de Dirichlet nula nos extremos do domínio, nosso modelo para o cálculo da variação da densidade populacional de um dado animal no espaço unidimensional é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + \left(1 - \tau \frac{dF(S)}{dS}\right) \frac{\partial S}{\partial t} = D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + F(S) \quad (0, t_f] \times (0, L) \\ S(0, x) \quad ; \quad \frac{\partial S(0, x)}{\partial t} = 0 \quad (0, L) \\ S(t, 0) = S(t, L) = 0, \quad [0, t_f] \end{array} \right. \quad (3.3)$$

onde  $t_f$  é o tempo final máximo de avaliação, e reforçando,  $\tau = \frac{1}{2\lambda}$  é a forma como interpretamos o tempo de retardo associado aos movimentos.

Para que soluções negativas não apareçam a partir do modelo (3.3), o que caracteriza desconexão com a realidade, e que o tempo de retardo  $\tau$  possa ser enriquecido e apuradamente retratado no contexto biológico, apresentamos na seção seguinte uma modelagem deste parâmetro.

### 3.2 MODELAGEM DO TEMPO DE RETARDO $\tau$

Ainda que a ETRD possa modelar com precisão muitos problemas de invasões biológicas, deve-se tomar alguns cuidados sobre a escolha dos parâmetros  $\tau$  e  $D$  associados com o modelo reativo  $F(S)$ . Em [2] e [7] os autores dissertam sobre o surgimento de soluções

negativas para a densidade populacional, a partir de uma escolha dos valores desses parâmetros.

Além disto, ainda em [7], os pesquisadores sugerem que há indícios de que soluções realísticas podem ser obtidas se uma modelagem matemática sobre  $\tau$  for efetuada. Sendo assim, nesta dissertação propomos uma modelagem matemática original para o tempo de retardo  $\tau$ , de modo que as soluções numéricas obtidas com o modelo (3.3) sejam positivas e validadas para o contexto biológico.

Se a taxa de inversão do movimento é  $\lambda = 0.5$ , isto implica que  $\tau = 1.0$ , o que significa dizer que estamos usando por completo o termo de derivada de 2º ordem (e correlatos) da EDP do modelo (3.3). Em outras palavras, não alteramos a amplitude da onda inerente à equação diferencial parcial hiperbólica-parabólica.

Contudo, nessa configuração soluções negativas poderão surgir por conta do princípio de inversão de fase da onda viajante, que acontece nas bordas do domínio. É natural então uma correção de  $\lambda$  para minimizar os efeitos da inversão de fase, permitindo assim a modelagem de problemas biológicos. Como de fato  $\tau$  está na dependência da taxa da inversão de movimento, investigamos os motivos que promoveriam variações nos valores de  $\lambda$ , ou seja, fatores que aumentam ou diminuem a taxa de inversão de movimento. Além disso, procuramos saber se essas variações de  $\lambda$  dariam soluções consistentes.

Partimos da premissa de que as variações de  $\lambda$  são ocasionadas por valores relacionados a população ( $P$ ) e a ocupação territorial ( $L_{ot}$ ). Evidentemente, a população  $P$  calculada em cada tempo  $t$ , pode ser encontrada pela integral

$$P(t) = \int_0^L S(t, x) dx. \quad (3.4)$$

Uma vez que, da Matemática Intervalar [19], temos  $[\underline{x}, \bar{x}] \subset [0, L]$ , tal que

$$[\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in L : \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\},$$

em que o diâmetro de  $[\underline{x}, \bar{x}]$  é definido como  $diam([\underline{x}, \bar{x}]) = \bar{x} - \underline{x}$ , então tomamos a coleção de diâmetros tais que  $S(t, x) > 0$ , ou seja, os diâmetros ocupados pela população. Isso conduz a definição de ocupação territorial para cada tempo  $t$ , dada na forma

$$L_{ot}(t) = \sum_{i=1}^I diam_i \subset [0, L], \quad (3.5)$$

em que  $I$  é um número natural que significa a quantidade finita de diâmetros ocupados no tempo  $t$ . Em outras palavras,  $L_{ot}(t)$  é o comprimento cujas densidades populacionais são positivas. Se temos em um dado tempo uma ocupação territorial como ilustrado na Figura 3.2-esquerda, digamos por exemplo que  $I = 3$  diâmetros ocupados, ocorrida a simulação para o passo temporal subsequente poderíamos ter  $I = 5$ , Figura 3.2-direita. Este exemplo meramente ilustrativo exhibe como a equação (3.5) deve ser interpretada. No entanto, a quantidade  $I$  de elementos

da coleção de diâmetros ocupados é contabilizada por meio da resolução numérica do modelo (3.3).

Com as definições assumidas pelas equações (3.4) e (3.5), partimos da hipótese que o problema da ocorrência de densidade populacional negativa, pode ser corrigida se ajustarmos o valor de  $\lambda$  de acordo com a dinâmica populacional, pois,  $\lambda$  está relacionado com a movimentação do animal. Assim, conjecturamos que  $\lambda$  poderia ser corrigida mediante a presença de três eventos fundamentais, conforme a expressão:

$$\lambda = \lambda_0 \left( 1 + \frac{L}{L_{ot}} + \frac{P_{presente}}{P_{passado}} \right), \quad (3.6)$$

de modo que:

- (I)  $\lambda_0 = 1.0$ ;
- (II)  $\frac{L}{L_{ot}}$ , é a taxa de variação de ocupação;
- (III)  $\frac{P_{presente}}{P_{passado}}$ , é a taxa de variação populacional.

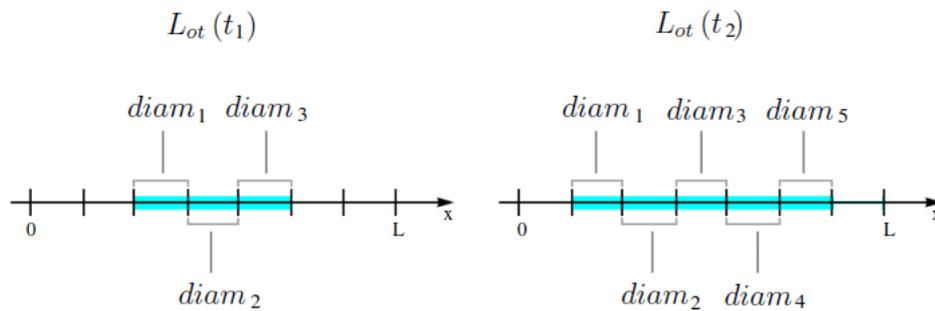


Figura 3.2: Ilustração de uma ocupação territorial em dois tempos subsequentes.

Fonte: Autor.

Quanto a igualdade (I), após muitas simulações, concluímos que a taxa de inversão de movimento, para a primeira passagem temporal, dever ser igual a 1.0, ou seja, para todos os casos estudados nas próximas seções, será mantido  $\lambda_0 = 1.0$ . Além disso, o valor  $\lambda_0$  não tem qualquer vínculo com a natureza de persistência ou extinção de uma população.

A relação (II) é uma contribuição natural para o aumento da taxa de inversão de movimento. O termo (II) procura descrever como uma população ocupa um domínio com o passar do tempo. Note que a presença do termo difusivo na ETRD, que modela o espalhamento, faz com que a relação (II) no limite  $t \rightarrow \infty$  seja exatamente o valor 1. Por exemplo, mesmo num caso em processo de extinção há o espalhamento da população por todo o domínio, este fenômeno acontece por conta do termo difusivo, o que reforça a premissa de aumentar a taxa de inversão do movimento ao longo do tempo. Finalmente, o termo (III), que em sua essência é um evento completamente diferente dos anteriores, é a razão entre o valor populacional atual

e seu antecessor temporal, é uma parcela que também induz o aumento da taxa de inversão do movimento ao longo do tempo. Por exemplo, num caso de persistência, é natural que para algum tempo quanto maior a população mais estimulados são os indivíduos desta população a inverter seu movimento.

Em suma, substituindo a igualdade (3.6) em  $\tau = \frac{1}{2\lambda}$  obtemos

$$\tau = \frac{1}{2 \left[ \lambda_0 + \lambda_0 \left( \frac{L}{L_{ot}} + \frac{P_{presente}}{P_{passado}} \right) \right]}, \quad (3.7)$$

que é nossa conjectura para o tempo de retardo das mudanças dos valores de  $S(t, x)$  com o passar do tempo. A relação matemática apresentada em (3.7) é variável por conta das taxas variáveis de eventos distintos e permite obter soluções para densidade populacional não negativas ao longo do tempo. Isto será exibido nos resultados apresentados neste trabalho. Adicionalmente, quando  $t \rightarrow \infty$  a solução do modelo (3.3), em conjunto com nossa conjectura, converge para a solução do clássico modelo de reação-difusão, exaustivamente explorado por vários pesquisadores [1, 11, 22, 24], e isto também será verificado.

## 4 MODELAGEM NUMÉRICA

Existem várias técnicas computacionais para encontrar uma solução aproximada de equações diferenciais parciais. Neste trabalho será utilizado o método de diferenças finitas [25]. Este método consiste em substituir as derivadas presentes na equação diferencial parcial por aproximações obtidas através da série de Taylor.

### 4.1 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO TELEGRÁFICA-REATIVA-DIFUSIVA

Uma vez que o modelo (3.3) - em conjunto com a equação (3.7) - não possui solução analítica, uma abordagem numérica faz-se necessária para resolução do problema. Esta resolução utilizará a técnica apresentada em [7].

O domínio unidimensional de comprimento  $L$  é discretizado por um conjunto finito de pontos discretos  $ni$  igualmente espaçados, com espaçamento  $\Delta x$ , como mostra a Figura 4.1. Ainda na Figura 4.1, os pontos discretos do domínio são enumerados por  $x_i$  com

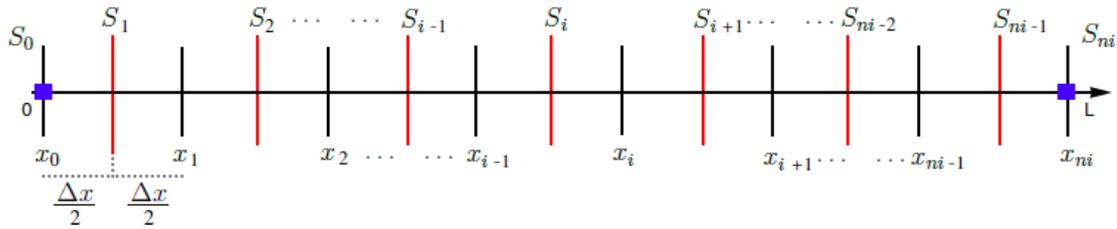


Figura 4.1: Domínio computacional

Fonte: Adaptado de [7].

$i = 0, \dots, ni$ . A densidade populacional é centralizada em cada intervalo discreto como  $S_i$  com  $i = 1, \dots, ni - 1$ . Em particular, nos pontos  $x_0$  e  $x_{ni}$  (quadrados cheios em azul) são aplicadas condições de contorno para  $S_0$  e  $S_{ni}$ . Os demais valores  $S_i$  ( $i = 1, \dots, ni - 1$ ) são calculados pela equação diferencial parcial em cada lapso temporal  $\Delta t$ , após o estado inicial  $t = 0$ .

Considerando que a EDP do modelo (3.3) pode ser genericamente escrita para o ponto de malha  $(k + 1, i)$  como:

$$\tau \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \Big|_i^{k+1} + \left( 1 - \tau \frac{dF(S)}{dS} \right) \Big|_i^{k+1} \frac{\partial S}{\partial t} \Big|_i^{k+1} = D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \Big|_i^{k+1} + F(S) \Big|_i^{k+1}, \quad (4.1)$$

onde o índice superior  $k + 1$  designa momentos temporais. Em particular a expressão discreta da equação (3.7) fica

$$\tau = \frac{1}{2 \left[ \lambda_0 + \lambda_0 \left( \frac{L}{L_{ot}^{k+1}} + \frac{P^{k+1}}{P^k} \right) \right]}.$$

A discretização da equação (4.1) será feita pelo método de diferenças finitas [25], analogamente ao que é mostrado em [7]. Assim, utilizando o esquema de diferenças finitas regressivas para a derivada temporal de primeira e segunda ordem, obtemos:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial t} \right|_i^{k+1} = \frac{1}{\Delta t} (S_i^{k+1} - S_i^k) \quad (4.2)$$

e

$$\left. \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \right|_i^{k+1} = \frac{1}{\Delta t^2} (S_i^{k+1} - 2S_i^k + S_i^{k-1}). \quad (4.3)$$

Para a derivada espacial de segunda ordem, utilizamos o esquema de diferenças finitas centrais:

$$\left. \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right|_i^{k+1} = \frac{1}{\Delta x^2} (S_{i-1}^{k+1} - 2S_i^{k+1} + S_{i+1}^{k+1}). \quad (4.4)$$

Substituindo as discretizações (4.2), (4.3) e (4.4) na equação (4.1):

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{\Delta t^2} (S_i^{k+1} - 2S_i^k + S_i^{k-1}) + \left( 1 - \tau \frac{dF(S)}{dS} \right) \Big|_i^{k+1} \frac{1}{\Delta t} (S_i^{k+1} - S_i^k) = \\ \frac{D}{\Delta x^2} (S_{i-1}^{k+1} - 2S_i^{k+1} + S_{i+1}^{k+1}) + F_i^{k+1}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

o que resulta em

$$S_i^{k+1} = \left( \frac{1}{C_i + \tau \tilde{C}_i} \right) (C_{i-1} S_{i-1}^{k+1} + C_{i+1} S_{i+1}^{k+1} + \tilde{b}_i + \tau \bar{b}_i), \quad (4.6)$$

com

$$C_i = \frac{1}{\Delta t} + \frac{2D}{\Delta x^2}, \quad \tilde{C}_i = \frac{1}{\Delta t^2} - \frac{1}{\Delta t} \left. \frac{dF}{dS} \right|_i^{k+1},$$

$$C_{i-1} = D/\Delta x^2, \quad C_{i+1} = D/\Delta x^2,$$

$$\tilde{b}_i = F_i^{k+1} + \frac{1}{\Delta t} S_i^k, \quad \bar{b}_i = \left[ \frac{2}{\Delta t^2} - \frac{1}{\Delta t} \left. \frac{dF}{dS} \right|_i^{k+1} \right] S_i^k - \frac{1}{\Delta t^2} S_i^{k-1}.$$

Reescrevendo (4.6), utilizando a técnica de relaxações sucessivas [5], resulta que:

$$S_i^{k+1} = \omega S_i^{k+1} + (1 - \omega) S_i^k, \quad (4.7)$$

onde  $\omega$  é o fator de relaxação tomado na faixa  $0 < \omega < 2$ .

Finalmente, o modelo numérico ficou dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_i^{k+1} = \omega S_i^{k+1} + (1 - \omega) S_i^k \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, ni - 1 \\ S(0, x) = S_i^0; \quad S_i^{-1} = S_i^0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, ni - 1 \\ S_0^k = 0; \quad S_{ni}^k = 0 \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (4.8)$$

O modelo numérico descrito em (4.8) é resolvido pelo esquema quase-não-linear [7]. Para dizer que a solução numérica do modelo (4.8) alcançou o regime estacionário utilizaremos a seguinte condição:

$$\frac{\|S^{k+1} - S^k\|_2}{\|S^{k+1}\|_2} < 10^{-7}, \quad (4.9)$$

em que  $\|\bullet\|_2$  é a norma euclidiana.

A integral apresentada em (3.4) é calculada numericamente através do método dos trapézios se o número de pontos da malha  $ni$  for ímpar, e caso contrário, é utilizado a regra 1/3 de Simpson. A derivada  $\frac{dF(S)}{dS}$  é calculada de forma analítica, uma vez que conhecemos a expressão da função  $F(S)$ .

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Apresentaremos alguns resultados partindo do modelo numérico (4.8), juntamente com o modelo proposto para o retardo temporal (3.7). As simulações serão realizadas para dois modelos do termo reativo.

### 5.1 VALIDAÇÃO DO MÉTODO NUMÉRICO

Muitos trabalhos fizeram uso da ERD no estudo da dinâmica populacional computacional [1, 11, 22, 24]. Considerando o termo reativo  $F(S) = K_1 S$ , onde  $K_1$  representa a taxa de crescimento, é mostrado que o valor do comprimento  $L$  do domínio implica em obter a persistência ou a extinção de uma população, independentemente da condição inicial utilizada [21]. Em [21] foi deduzido que existe um comprimento de domínio crítico ( $L_c$ ) dado por  $L_c = \pi \sqrt{\frac{D}{K_1}}$ , onde, se  $L = L_c$ , a população atinge estado estacionário de persistência, mas se  $L < L_c$  a população tende a extinção.

Por outro lado, observe que, tomando o seguinte limite sobre a ETRD

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \tau \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + \left( 1 - \tau \frac{dF(S)}{dS} \right) \frac{\partial S}{\partial t} \right\} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + K_1 S \right\},$$

isto implica em obter a ERD

$$\frac{\partial S}{\partial t} = D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + K_1 S,$$

então as mesmas considerações sobre comprimento crítico mencionadas para a ERD devem valer também para ETRD.

Para corroborar nossa afirmação, em [2] os autores mostraram que o valor de  $L_c$  para dinâmica populacional descrita pela ETRD coincide com o tamanho do domínio crítico obtido pela ERD.

Portanto, a persistência/extinção de uma população, calculadas pelo modelo (3.3) em conjunto com (3.7), devem ser os mesmos obtidos pelo modelo de reação-difusão quando  $t \rightarrow \infty$ . Uma vez que o modelo telegráfico reativo difusivo é resolvido numericamente, no limite as soluções de ambos os modelos mencionados devem diferir de um erro  $\epsilon > 0$  pequeno. Isto valida nosso trabalho de modelagem matemática e numérica computacional.

Para a escolha do fator de relaxação  $\omega$ , consideramos os parâmetros da Tabela 5.1 com  $ni = 1600$ . Após algumas simulações para diferentes valores de  $\omega$ , obtivemos menor tempo computacional de processamento quando  $\omega = 1.0$ . Então todos os resultados neste trabalho foram obtidos com  $\omega$  fixado em 1.0. A Tabela 5.2 apresenta os resultados obtidos para alguns valores do fator de relaxação.

Tabela 5.1: Parâmetros para estudar o refinamento de malha.

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
$t_f$	15.0	$\Delta t$	0.0005
$ni$	variável	$L = L_c$	4.442882938
$D$	1.0	$A; B; C$ para $S(0, x)$	1.2214; 4.4428; 3.2214
$K_1$	0.5		

Fonte: Autor.

Tabela 5.2: Tempo de processamento (em segundos) obtido com diferentes valores para o fator de relaxação  $\omega$ , com o modelo exponencial.

$\omega$	Tempo (s)
0.1	295
0.5	209
1.0	193
1.5	419
1.9	436

Fonte: Autor.

Considerando:

- (a) os parâmetros de entrada apresentados na Tabela 5.1;
- (b) 12 diferentes simulações com os refinamentos de malha  $ni = 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 1100, 1200, 1300, 1400, 1500$  e 1600;
- (c)  $L_c = \pi \sqrt{\frac{1}{0.5}} = 4.442882938$ , que retrata o caso de estado estacionário da persistência da população;
- (d) para a condição inicial definimos  $A = \frac{L}{2} - 1$ ,  $B = L$ , e  $C = \frac{L}{2} + 1$ ,

constatamos que o regime permanente foi alcançado com o valor da população em processo de convergência, como apresentado na Tabela 5.3. Com base nos valores populacionais calculados pelo código desenvolvido, encontramos os erros relativos  $E_R$  entre as malhas, dispostos na terceira e sexta coluna da Tabela 5.3. Assim, à medida que se refina a malha, a população está convergindo para um determinado valor. Este processo de convergência da população está ilustrado na Figura 5.1.

Os valores da Tabela 5.3 mostram que alcançamos pelo menos precisão da  $O(10^{-3})$ . Com malhas mais finas, poderíamos melhorar a precisão dos resultados, contudo, seria necessário refinar a malha temporal, logo, o custo computacional aumentaria. Lembramos que deve haver certa prudência e limitação no uso de malhas sucessivas muito refinadas, uma vez que, como bem conhecido em Análise Numérica Computacional, os erros de máquina sobressaem em relação aos erros de truncamento, que levam a resultados completamente errados.

Tabela 5.3: Valores da população em regime permanente para o refinamento de malha e erro relativo entre a populações.

$ni$	População	$E_R$	$ni$	População	$E_R$
500	10.471294		1100	10.410804	$1.3 \times 10^{-3}$
600*	10.418779	$5.0 \times 10^{-3}$	1200	10.392010	$1.8 \times 10^{-3}$
700	10.437958	$1.8 \times 10^{-3}$	1300	10.406705	$1.4 \times 10^{-3}$
800	10.405394	$3.1 \times 10^{-3}$	1400	10.391738	$1.4 \times 10^{-3}$
900	10.422562	$1.6 \times 10^{-3}$	1500	10.405846	$1.3 \times 10^{-3}$
1000	10.397266	$2.4 \times 10^{-3}$	1600	10.398193	$7.3 \times 10^{-4}$

Fonte: Autor.

\*Ex:  $E_R = \frac{|10.471294 - 10.418779|}{|10.471294|}$

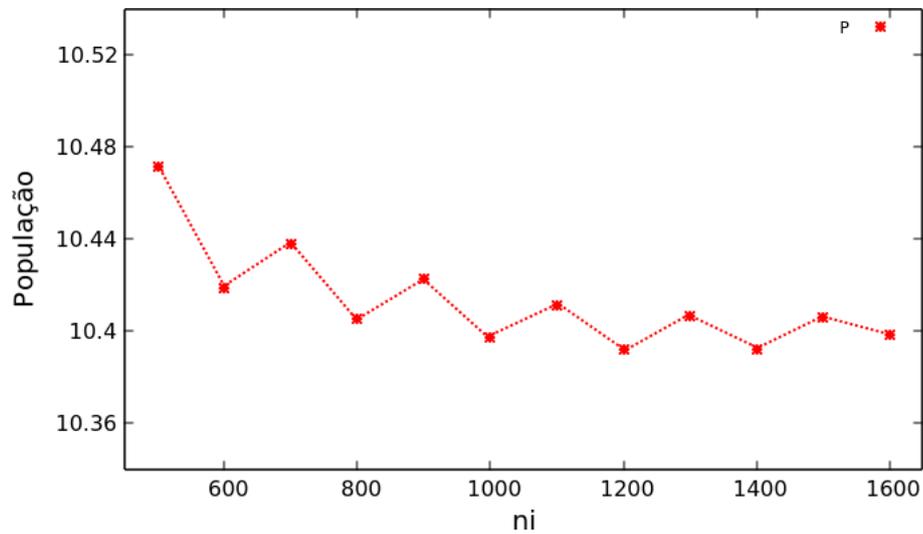


Figura 5.1: Refinamento da malha com a população em regime permanente, com o modelo exponencial.

Fonte: Autor.

Em [7] são definidos os termos temporal ( $Term_t$ ), reativo ( $Term_r$ ) e difusivo ( $Term_d$ ) da equação ETRD conforme:

$$Term_t(t) = \left( \frac{1}{ni - 1} \right) \sum_{i=1}^{ni} \left\{ \tau \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \Big|_i^{k+1} + \left[ 1 - \tau \frac{dF}{dS} \right] \Big|_i^{k+1} \frac{\partial S}{\partial t} \Big|_i^{k+1} \right\},$$

$$Term_r(t) = \left( \frac{1}{ni - 1} \right) \sum_{i=1}^{ni} F(S) \Big|_i^{k+1},$$

$$Term_d(t) = \left( \frac{1}{ni - 1} \right) \sum_{i=1}^{ni} D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \Big|_i^{k+1},$$

para  $t > 0$ . Logo, uma maneira adicional de avaliar se o processo iterativo converge para

solução do modelo proposto neste trabalho é avaliar se a cláusula:

$$Term_t(t) - Term_d(t) - Term_r(t) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty \quad (5.1)$$

é verdadeira.

Com os dados da Tabela 5.1 e fixando  $ni = 900$ , o modelo numérico (4.8) é resolvido e os termos  $Term_t$ ,  $Term_d$  e  $Term_r$  são calculados. O gráfico da Figura 5.2 ilustra o comportamento da cláusula (5.1). Em particular no tempo  $t = 30$  obtivemos

$$|Term_t(t) - Term_d(t) - Term_r(t)| = 1.08 \times 10^{-5},$$

que foi considerado aceitável em nossa análise.

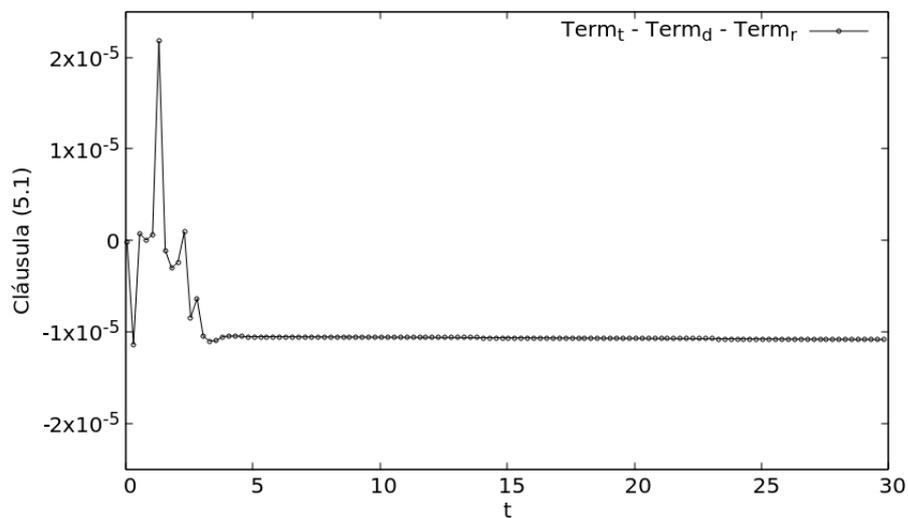


Figura 5.2: Evolução temporal da cláusula (5.1), com o modelo exponencial.

Fonte: Autor.

Salientamos que todos os resultados apresentados até aqui não apresentaram soluções negativas para a densidade populacional. Apenas para chamar atenção sobre o quanto é necessário modelar adequadamente o parâmetro de retardo da equação telegráfica, veja os gráficos da Figura 5.3 no tempo  $t = 2.3$ , por exemplo. Se apenas fixarmos  $\lambda = \lambda_0 = 1.0$  aparecem valores  $S(2.3, x) < 0$ , ilustradas nas bordas da Figura 5.3 (b), (c) e (d). Mas considerando nossa proposta de modelagem para  $\lambda$  apresentada na seção 3.2 contornamos o problema, veja a Figura 5.3 (a). Aqui temos  $\lambda = 3.0$  e conseqüentemente  $\tau = 1.6 \times 10^{-1}$ .

Com as análises apresentadas até aqui, inferimos que uma simples mudança de termo reativo não invalidaria o nosso modelo matemático-numérico-computacional. Apenas exigiria a extensão dos estudos dos cálculos de novos valores do domínio crítico, estados de persistência ou extinção de uma população. Portanto, nas próximas duas seções dissertamos sobre o uso de dois modelos reativos em nosso modelo.

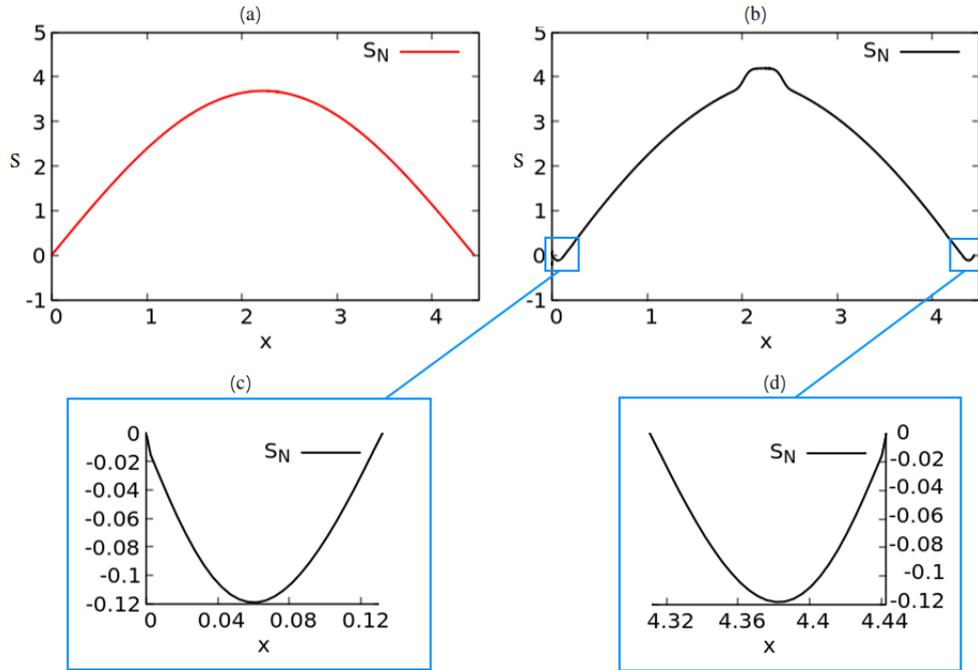


Figura 5.3: Solução numérica para a densidade populacional no instante  $t = 2.3$  com  $ni = 900$ , para  $\tau = \frac{1}{2\lambda} = 1.6 \times 10^{-1}$  (a) e  $\tau = 0.5$  (b).

Fonte: Autor.

## 5.2 MODELO EXPONENCIAL

Quando adotamos o termo reativo  $F(S) = K_1 S$  (isto é, recuperamos o modelo exponencial), e tomamos os limites nas ETRD e ERD como a seguir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \tau \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + \left( 1 - \tau \frac{dF(S)}{dS} \right) \frac{\partial S}{\partial t} \right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + K_1 S \right\}$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\partial S}{\partial t} \right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + K_1 S \right\},$$

as derivadas temporais tendem a nulidade nos casos onde acontecem persistência ou extinção. Ainda mais, ambas as EDP's são simplificadas e escritas igualmente sob a forma  $D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + K_1 S = 0$ . Logo, no estado estacionário, as soluções de ambas as EDP's devem ser as mesmas.

Ocorre que o modelo com a ERD de termo reativo exponencial, amplamente conhecido e estudado, admite solução analítica [16] dada por:

$$S(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{\left(K_1 - \frac{n^2 \pi^2 D}{L^2}\right)t}, \quad (5.2)$$

onde  $B_n = \frac{2B}{n\pi} \left[ \cos\left(\frac{n\pi A}{L}\right) - \cos\left(\frac{n\pi C}{L}\right) \right]$ . Portanto, confrontamos a solução analítica (5.2) com a solução do modelo (4.8), no estado estacionário, para ratificar que nossa modelagem matemá-

tica pode de fato ser usada no contexto biológico.

Tabela 5.4: Parâmetros para estudar a persistência da população para o modelo exponencial.

$K_1$	$\Delta t$	$ni$	$D$	$L$	$t_f$	$A; B; C$ para $S(0, x)$
0.4	0.0005	900	1.0	4.967294133	15.0	1.4836; 4.9672; 3.4836

Fonte: Autor.

Partindo do modelo (4.8) e sob os dados da Tabela 5.4, veja que intencionalmente fizemos  $L = L_c$  para que o estado estacionário de persistência fosse encontrado. A solução numérica estacionária com nosso modelo foi alcançada em aproximadamente  $t = 2.83$ , cujo erro relativo imposto para que o regime permanente fosse alcançado foi fixado em  $1.0 \times 10^{-7}$ . Logo, os valores populacionais analítico ( $P_A$ ) e numérico ( $P_N$ ) foram, respectivamente:

$$P_A(2.83) \approx 11.822156 \quad \text{e} \quad P_N(2.83) \approx 11.814743. \quad (5.3)$$

A Figura 5.4 ilustra, ao longo do tempo, o comportamento das densidades populacionais analítica  $S_A$  e numérica  $S_N$ . Veja que o atraso é evidenciado nos primeiros tempos e vai dissipando, de modo que as soluções convergem para o mesmo lugar geométrico nos tempos finais. No tempo  $t = 2.83$ , obtivemos o erro relativo na norma euclidiana dado por

$$\frac{\|S_A - S_N\|_2}{\|S_A\|_2} = 1.3 \times 10^{-3},$$

que julgamos ser quantitativamente satisfatório, e o detalhe é que não apareceram soluções negativas.

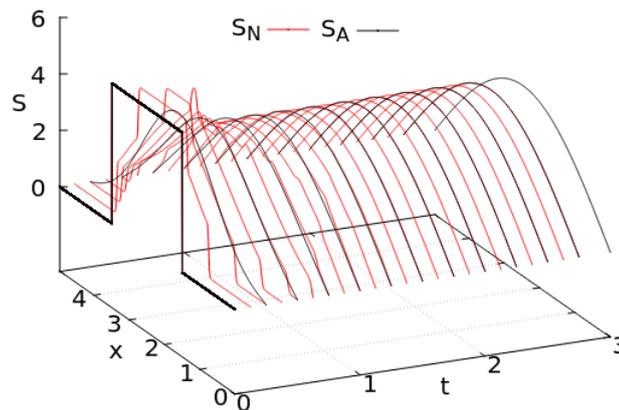


Figura 5.4: Soluções numérica ( $S_N$ ) e analítica ( $S_A$ ) para a densidade populacional em regime permanente, com o modelo exponencial.

Fonte: Autor.

Em uma nova simulação, alteramos os valores  $K_1 = 0.1$  e  $t_f = 60.0$  na Tabela 5.4. O novo valor  $K_1$  induz a  $L < L_c$ , o que implica que a dinâmica de extinção deve ocorrer

uma vez que o termo difusivo da EDP é dominante. No instante  $t_f = 60.0$ , foi encontrada a solução em regime permanente cujo erro foi da ordem de  $1.548 \times 10^{-4}$ , portanto maior que o fixado em  $1.0 \times 10^{-7}$  no código computacional. Não prosseguimos com os cálculos até vencer o valor fixado porquê a convergência era demasiadamente lenta. Os cálculos resultaram nos seguintes valores populacionais analítico e numérico:

$$P_A(60.0) \approx 1.8 \times 10^{-7} \quad \text{e} \quad P_N(60.0) \approx 1.0 \times 10^{-7}. \quad (5.4)$$

Novamente, aqui também há a presença do atraso que vai desaparecendo com o passar do tempo. No tempo  $t = 60.0$ , encontramos o erro relativo

$$\frac{\|S_A - S_N\|_2}{\|S_A\|_2} = 4.1 \times 10^{-1},$$

que também foi considerado quantitativamente satisfatório. Nesta simulação não apareceram soluções negativas, o que mostra a nossa modelagem matemática apta também para o estudo da extinção. Analogamente ao resultado anterior, a Figura 5.5 exhibe o comportamento das variações da densidade populacional. Salientamos que o esboço da Figura 5.5 foi até  $t = 10.0$  para que a visualização não ficasse prejudicada.

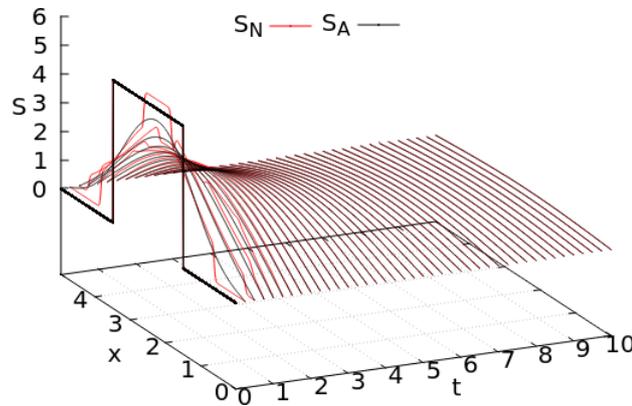


Figura 5.5: Soluções numérica ( $S_N$ ) e analítica ( $S_A$ ) para a densidade populacional em processo de extinção, com o modelo exponencial.

Fonte: Autor.

De forma complementar, chamamos a atenção para o fato de que os valores populacionais  $P_N$  exibidos em (5.3) e (5.4) foram alcançados com o nosso modelo para o tempo de retardo, exibido em (3.7). A Figura 5.6, em que o sub-índice **P** significa persistência e **E** extinção, retrata que o desempenho do tempo de retardo  $\tau$  é justificado pelo comportamento de  $\lambda$  ser do tipo crescente nos tempos iniciais, e ao passar do tempo se estabiliza, independentemente se o fenômeno é persistência ou extinção. Argumentamos que é de se esperar que a taxa de inversão do movimento de fato tenha conduta de crescimento no início, uma vez que o processo natural da uma população é ocupar o território disponível.

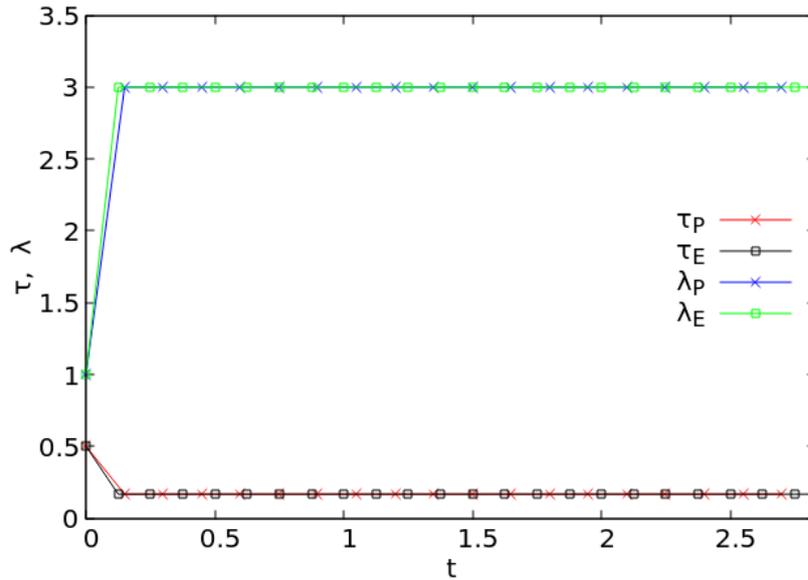


Figura 5.6: Comportamento de  $\tau$  e  $\lambda$  para as dinâmicas de extinção e persistência populacional, com o modelo exponencial.

Fonte: Autor.

Tabela 5.5: Parâmetros do estudo da persistência populacional para diferentes valores de  $K_1$  para o modelo exponencial.

$K_1$	$\Delta t$	$ni$	D	$L$	$t_f$	$A; B; C$ para $S(0, x)$
0.1	0.0005	900	1.0	9.934588266	20.0	3.9672; 9.9345; 5.9672
0.3	0.0005	900	1.0	5.735737210	20.0	1.8678; 5.7357; 3.8678
0.7	0.0005	900	1.0	3.754921418	20.0	0.8774; 3.7549; 2.8774
1.0	0.0005	900	1.0	3.141592654	20.0	0.5707; 3.1415; 2.5707

Fonte: Autor.

Objetivando estender nossa análise, admita os valores da Tabela 5.5, que permite simular novos casos da ocorrência de persistência. Procedendo desta forma, diferentes dinâmicas de persistência de uma população podem ser inferidas.

Com base nos resultados simulados que estão apresentados na Tabela 5.6, há concordância entre os valores populacionais persistentes analítico e numérico, cujas evoluções podem ser vistas na Figura 5.7. Veja que o fenômeno de atraso é mais evidente na medida que  $K_1$  cresce.

Em particular ressaltamos que existe uma relação direta entre  $K_1$  e  $\lambda$ . Observe os mapas dos valores de  $S(t, x)$  nas Figura 5.8 e 5.11, de dois cenários extremos. Da Figura 5.8 podemos dizer que o efeito de retardo vai sendo amortecido, e após uma considerável passagem de tempo, as soluções ficam praticamente em concordância até que o estado estacionário seja alcançado, o que não é visto na Figura 5.11. Além do mais, comparando as Figuras 5.8-5.11 da direita, obtidas por nosso modelo, é visível que o fenômeno de propagação da onda está

simetricamente presente, evidenciando o fenômeno de atraso. Este fenômeno mostra que a nossa proposta apresentada neste trabalho está em acordo com o que é reproduzido na natureza, uma discussão sobre isto pode ser vista também em [20].

Tabela 5.6: Comportamento da população no tempo em que atinge o regime permanente, para vários valores de  $K_1$  com o modelo exponencial.

$K_1$	Tempo	Pop. analítica	Pop. numérica	$E_R$
0.1	12.291	24.878410	24.915646	$1.5 \times 10^{-3}$ *
0.3	3.200	13.886396	13.893448	$5.0 \times 10^{-4}$
0.7	2.453	8.484619	8.513348	$3.3 \times 10^{-3}$
1.0	2.373	6.731557	6.763499	$4.7 \times 10^{-3}$

Fonte: Autor.

\*Ex:  $E_R = \frac{|24.878410 - 24.915646|}{|24.878410|}$

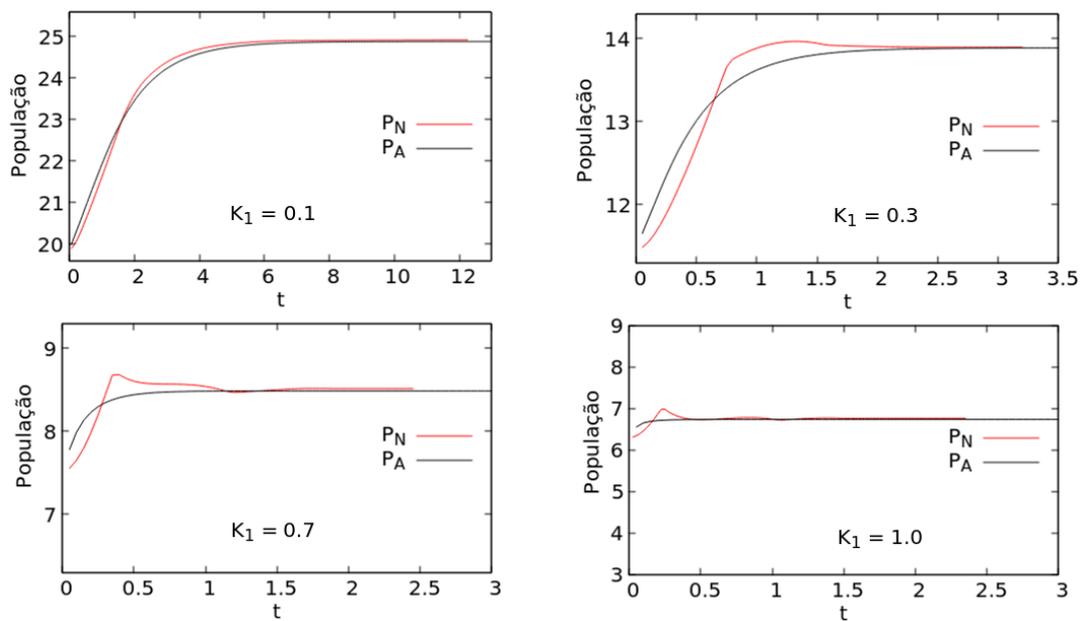


Figura 5.7: Soluções analítica ( $P_A$ ) e numérica ( $P_N$ ) para a população em regime permanente, para vários valores de  $K_1$ .

Fonte: Autor.

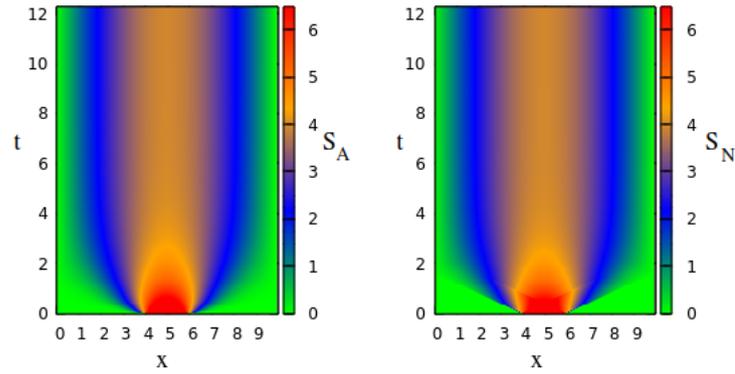


Figura 5.8: Soluções analítica ( $S_A$ ) e numérica ( $S_N$ ) para a densidade populacional em regime permanente para  $K_1 = 0.1$ .

Fonte: Autor.

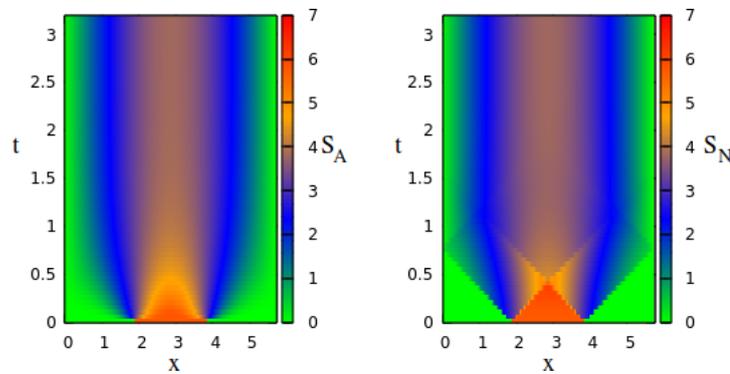


Figura 5.9: Soluções analítica ( $S_A$ ) e numérica ( $S_N$ ) para a densidade populacional em regime permanente para  $K_1 = 0.3$ .

Fonte: Autor.

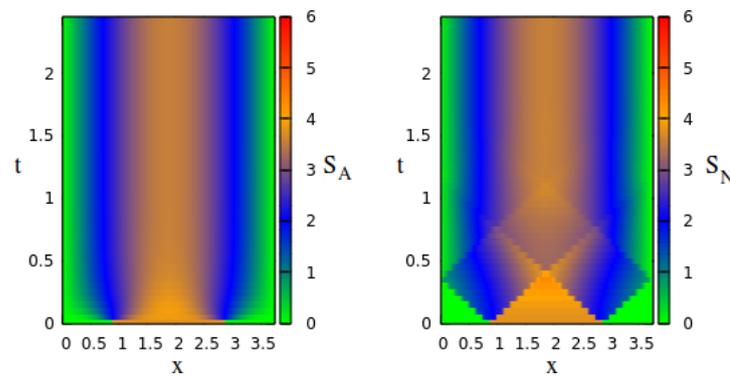


Figura 5.10: Soluções analítica ( $S_A$ ) e numérica ( $S_N$ ) para a densidade populacional em regime permanente para  $K_1 = 0.7$ .

Fonte: Autor.

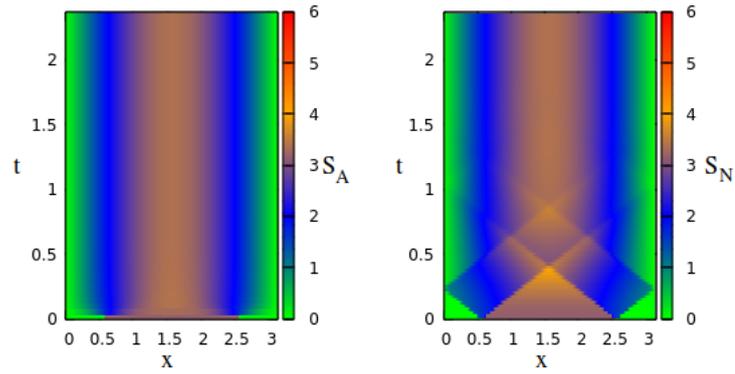


Figura 5.11: Soluções analítica ( $S_A$ ) e numérica ( $S_N$ ) para a densidade populacional em regime permanente para  $K_1 = 1.0$ .

Fonte: Autor.

### 5.3 MODELO LOGÍSTICO

Considere o termo reativo escrito como  $F(S) = K_1 S \left(1 - \frac{S}{K_2}\right)$ , em que  $K_1$  é a taxa de crescimento populacional e  $K_2$  é a capacidade de suporte. O termo reativo apresentado desta maneira é conhecido como termo logístico [3].

Dependendo da escolha do parâmetro  $K_2$ , a dinâmica populacional pode variar. O trabalho realizado em [7] faz um estudo elaborado sobre o comprimento do domínio crítico para o modelo logístico (denotado por  $L_c^l$ ). Os pesquisadores calculam, computacionalmente, o valor de  $L_c^l$  para determinados parâmetros estabelecidos.

Ainda em [7], foi mostrado que, dependendo do valor atribuído ao tempo de retardo, aparecem soluções negativas. Isso implica que, para a não ocorrência de soluções negativas, deve-se primeiramente escolher adequadamente o valor de  $\tau$ , que a priori é desconhecido. O método utilizado em [7] para a escolha do tempo de retardo, foi através de várias simulações, com diferentes valores de  $\tau$ . O problema em fazer isso é o grande custo computacional.

Por outro lado, nossa proposta para o tempo de retardo, apresentada na seção 3.2, contorna esse problema. Como mostrado no estudo com o modelo exponencial, para cada conjunto de parâmetros, o tempo de retardo se adapta à dinâmica populacional, sem a necessidade de atualizar manualmente o valor de  $\tau$ . Assim, com o propósito de verificar se nosso estudo está correto, confrontamos os resultados obtidos em [7] com os resultados obtidos utilizando o modelo para  $\tau$  proposto na equação (3.7).

Para tal comparação, considere os parâmetros da Tabela 5.7 em conjunto com o modelo (4.8) em que  $F$  é o termo logístico. Os dados da Tabela 5.7 são os mesmos utilizados em [7]. Deste modo, a solução numérica foi obtida no tempo  $t = 19.702$ , cujo erro relativo imposto para que o regime permanente fosse alcançado foi fixado em  $1.0 \times 10^{-7}$ . A dinâmica populacional ao decorrer do tempo está ilustrada na Figura 5.12 (a). O valor numérico da

população ( $P_N$ ) encontrado foi

$$P_N(19.702) \approx 24.000554. \quad (5.5)$$

Tabela 5.7: Parâmetros do estudo da persistência populacional para o modelo logístico, com  $K_1 = 0.1$ .

$K_1$	$K_2$	$\Delta t$	$ni$	D	$L$	$t_f$	A; B; C para $S(0, x)$
0.1	10.0	0.0005	1050	1.0	11.59228714	30.0	4.796; 9.9345; 6.796

Fonte: Autor.

A Tabela 5.8 ilustra os valores da população em regime permanente para alguns valores  $\tau$  constante ( $\tau = 0.1; 0.5; 1.0$ ), encontrados na Tabela 8 da página 19 em [7]. As dinâmicas populacionais, com  $\tau$  constante, estão ilustradas nas Figuras 5.12 (b), (c) e (d).

Tabela 5.8: Tabela com valores retirados de [7] da população em regime permanente, com  $\tau$  constante.

$\tau$	População
0.1	23.94952412
0.5	24.26904442
1.0	24.27553462

Fonte: Adaptado de [7].

A Figura 5.13 ilustra o comportamento da densidade populacional ao longo do tempo, até atingir o regime permanente. Observe que o efeito de onda é mais evidente nos tempos iniciais, e vai se dissipando a medida que o tempo avança.

Em particular, o gráfico da Figura 5.14 ilustra o comportamento da cláusula (5.1) para os parâmetros da Tabela 5.7. Para o tempo  $t = 50$  obtivemos

$$|Term_t(t) - Term_d(t) - Term_r(t)| = 2.46 \times 10^{-5}.$$

Ressaltamos que a população numérica obtida em (5.5) utilizou o tempo de retardo proposto em (3.7), e está de acordo com os valores encontrados em [7]. Além disso, a solução numérica convergiu sem o surgimento de valores negativos para a densidade populacional.

A Figura 5.15 ilustra o comportamento de  $\tau$  e  $\lambda$  com os dados da Tabela 5.7. O retardo temporal tem um comportamento decrescente, estabilizando-se rapidamente. O comportamento de  $\tau$  é justificado pois, nos tempos iniciais, a taxa de inversão de movimento tem um comportamento crescente, com um leve decaimento e se estabilizando a medida que o tempo passa. É de se esperar que a taxa de inversão do movimento de fato tenha conduta de crescimento, uma vez que o processo natural de uma população é ocupar o território disponível.

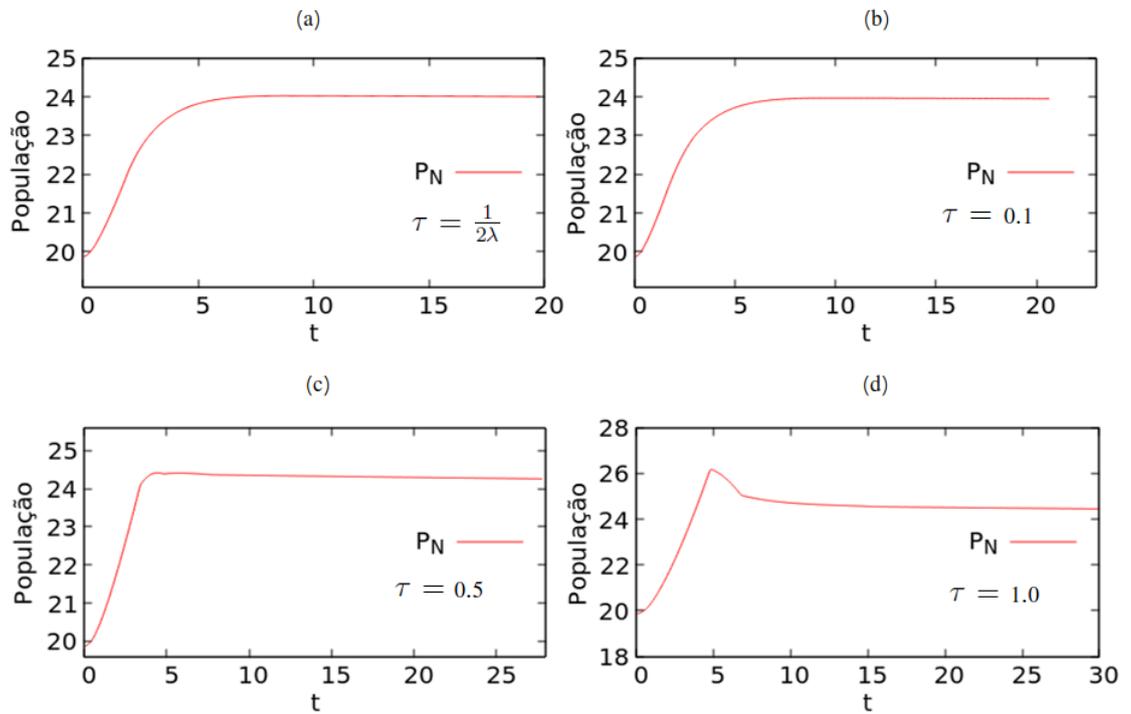


Figura 5.12: Solução numérica ( $P_N$ ) para a população em regime permanente com o modelo logístico.

Fonte: Autor.

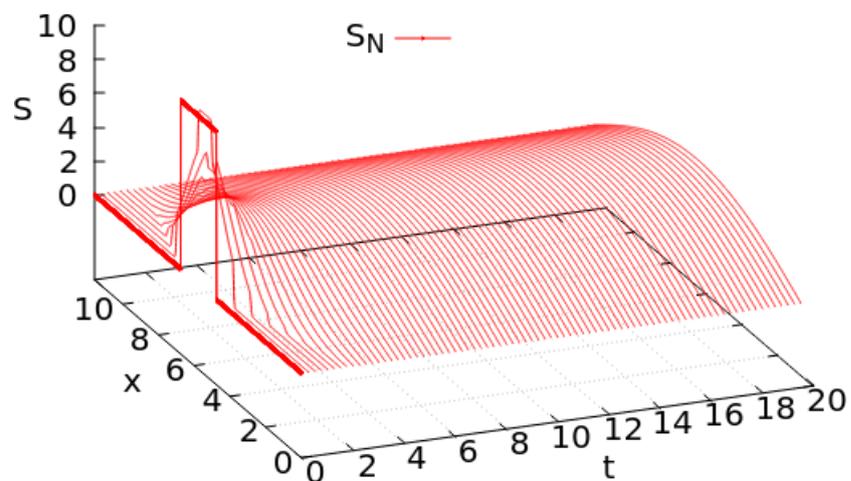


Figura 5.13: Solução numérica ( $S_N$ ) para a densidade populacional em regime permanente com o modelo logístico.

Fonte: Autor.

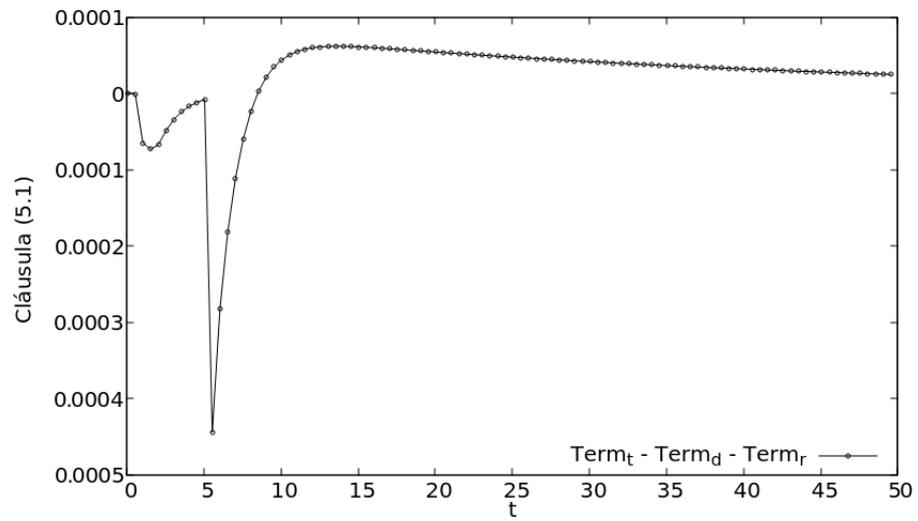


Figura 5.14: Evolução temporal da cláusula (5.1) para o modelo logístico.

Fonte: Autor.

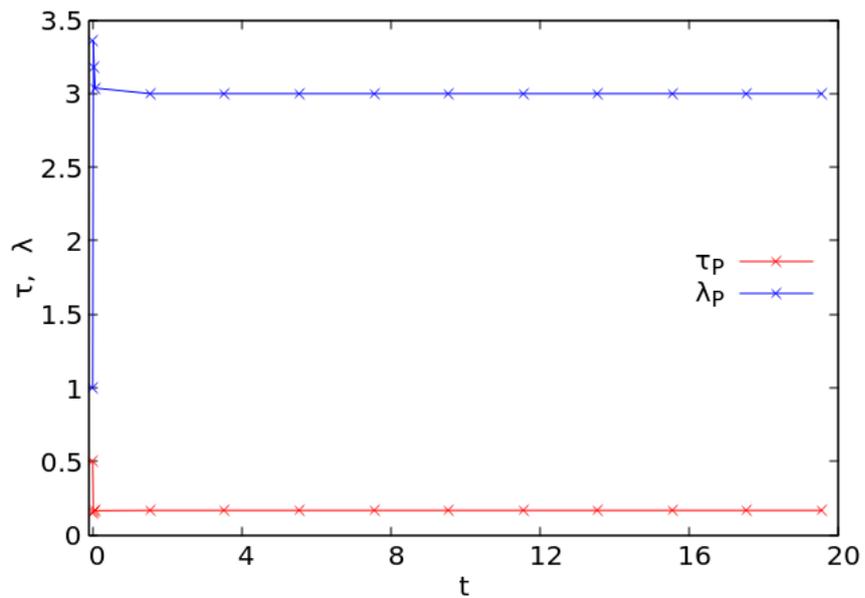


Figura 5.15: Comportamento de  $\tau$  e  $\lambda$  com os parâmetros da Tabela 5.7, para o modelo logístico.

Fonte: Autor.

## 6 CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi apresentar uma modelagem para o tempo de retardo  $\tau$  e estudar o impacto desta modelagem no modelo telegráfico, com a finalidade de eliminar o surgimento de soluções negativas para a densidade populacional.

Como foi mostrado no capítulo 2, exibimos a equação telegráfica-reativa-difusiva a partir da movimentação animal. Os detalhes probabilísticos não foram completamente explorados em todos os detalhes, pois exigiriam muitos conceitos de Teoria da Medida, o que fugiria do propósito do nosso trabalho. Mas, esses detalhes podem ser encontrados em [12, 15, 27]. Entretanto, mostramos que a ETRD pôde, alternativamente, ser deduzida pelo processo de Poisson, que nos deu significância para o parâmetro  $\tau$  em problemas relacionados a movimentos de animais.

No modelo matemático apresentado no capítulo 3, vemos que em termos de invasão biológica, devemos definir o tempo de retardo em função da taxa de inversão de movimento do animal. Como mostrado em [2, 7], ao tomar o tempo retardo constante, existe a chance de surgimento de densidade populacional negativa. Assim, deixamos  $\lambda$  variar com o tempo, e de acordo com a dinâmica populacional que ocorria, o tempo de retardo se ajustava automaticamente, produzindo soluções não negativas.

Os resultados exibidos no capítulo 5 ilustram a eficácia da modelagem numérica. Mostramos a relação entre os domínios críticos dos modelos reativo-difusivo e telegráfico, para o termo reativo do modelo exponencial. Apontamos também o cuidado que se deve ter ao tomar  $\tau$  constante, que dependendo do valor atribuído, soluções negativas aparecem.

Ainda no modelo exponencial, atestamos que nos tempos iniciais as equações reativa-difusiva e telegráfica-reativa-difusiva tem comportamentos diferentes, mas a medida que o tempo avança as duas equações convergem para o mesmo lugar geométrico. Para o modelo de crescimento populacional não-linear, dado pelo modelo logístico, a comparação também apresentou resultados satisfatórios.

Assim, de maneira geral a conjectura que propomos para  $\tau$  juntamente com a modelagem numérica, apresentaram resultados válidos do ponto de vista da análise numérica. Com isso, o problema da densidade populacional negativa foi resolvido, e portanto, o modelo telegráfico estaria adequado para descrever problemas biológicos.

Como sugestões de trabalhos futuros, pode-se elaborar um estudo com o termo reativo do tipo efeito Allee, utilizando o nosso modelo para o tempo de retardo. Além disso, pode-se realizar um estudo estabelecendo que o coeficiente de difusão  $D$  também dependa da dinâmica populacional.

## REFERÊNCIAS

- [1] ALFARO, M., COVILLE, J., AND RAOUL, G. Travelling waves in a nonlocal reaction-diffusion equation as a model for a population structured by a space variable and a phenotypic trait. *Communications in Partial Differential Equations* (2013), 2126–2154.
- [2] ALHARBI, W., AND PETROVSKII, S. Critical domain problem for the reaction–telegraph equation model of population dynamics. *Mathematics* (2018), 6–59.
- [3] ALLEN, L. J. *An Introduction to Mathematical Biology*. Pearson-Prentice Hall, Upper Saddle River, 2007.
- [4] BANASIAK, J., AND MIKA, J. R. Singularly perturbed telegraph equations with applications in the random walk theory. *International Journal of Stochastic Analysis* (1998), 9–28.
- [5] BURDEN, R. L., AND FAIRES, J. D. Numerical analysis (7th). *Prindle Weber and Schmidt, Boston* (2001).
- [6] CHIU, S. N., STOYAN, D., KENDALL, W. S., AND MECKE, J. *Stochastic geometry and its applications*. John Wiley & Sons, 2013.
- [7] CIRILO, E., PETROVSKII, S., ROMEIRO, N., AND NATTI, P. Investigation into the critical domain problem for the reaction-telegraph equation using advanced numerical algorithms. *International Journal of Applied and Computational Mathematics* (2019), 5–54.
- [8] EDELSTEIN-KESHET, L. *Mathematical models in biology*. SIAM, 2005.
- [9] FAHRIG, L. Effects of habitat fragmentation on biodiversity. *Annual review of ecology, evolution, and systematics* (2003), 487–515.
- [10] FREEDMAN, D. *Brownian motion and diffusion*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [11] GIOMETTO, A., RINALDO, A., CARRARA, F., AND ALTERMATT, F. Emerging predictable features of replicated biological invasion fronts. *Proceedings of the National Academy of Sciences* (2014), 297–301.
- [12] GOLDSTEIN, S. On diffusion by discontinuous movements, and on the telegraph equation. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* (1951), 129–156.
- [13] HOLMES, E. E. Are diffusion models too simple? A comparison with telegraph models of invasion. *The American Naturalist* (1993), 779–795.

- [14] JOSEPH, D. D., AND PREZIOSI, L. Heat waves. *Reviews of Modern Physics* (1989), 41–73.
- [15] KAC, M. A stochastic model related to the telegrapher's equation. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics* (1974), 497–509.
- [16] LEWIS, M. A., PETROVSKII, S. V., AND POTTS, J. R. *The mathematics behind biological invasions*. Springer, 2016.
- [17] MAYNARD, S. J. *Models in ecology*. Cambridge UP, Cambridge (1974).
- [18] MENDEZ, V., FEDOTOV, S., AND HORSTHEMKE, W. *Reaction-transport systems: mesoscopic foundations, fronts, and spatial instabilities*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [19] MOORE, R. E., KEARFOTT, R. B., AND CLOUD, M. J. *Introduction to interval analysis*. Siam, 2009.
- [20] ORTEGA-CEJAS, V., FORT, J., AND MÉNDEZ, V. The role of the delay time in the modeling of biological range expansions. *Ecology* (2004), 258–264.
- [21] PETROVSKII, SERGEI V; LI, B.-L. *Exactly solvable models of biological invasion*. p. 217 p. Chapman and Hall/CRC, 2006.
- [22] PETROVSKII, S., AND SHIGESADA, N. Some exact solutions of a generalized fisher equation related to the problem of biological invasion. *Mathematical biosciences* (2001), 73–94.
- [23] ROSS, S. M. *Introduction to probability models*. Academic press, 2014.
- [24] SKELLAM, J. G. Random dispersal in theoretical populations. *Biometrika* (1951), 196–218.
- [25] SMITH, G. D., SMITH, G. D., AND SMITH, G. D. S. *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*. Oxford university press, 1985.
- [26] STRAUSS, W. A. *Partial differential equations: An introduction*. John Wiley & Sons, 2007.
- [27] TAYLOR, G. I. Diffusion by continuous movements. *Proceedings of the london mathematical society* (1922), 196–212.
- [28] ZAUDERER, E. *Partial differential equations of applied mathematics*. John Wiley & Sons, 2011.