Universidade Estadual de Londrina

SAMUEL JUNGLES DE CAMARGO

SISTEMAS DE BRESSE COM ACOPLAMENTO TERMOELÁSTICO NA FORÇA DE CISALHAMENTO E MOMENTO FLETOR

Londrina, 28 de fevereiro de 2020.

SAMUEL JUNGLES DE CAMARGO

SISTEMAS DE BRESSE COM ACOPLAMENTO TERMOELÁSTICO NA FORÇA DE CISALHAMENTO E MOMENTO FLETOR

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva

Londrina
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do sistema de Bibliotecas da UEL

SA193 Camargo, Samuel Jungles de.
Sistemas de Bresse com acoplamento termoelástico na força de cisalhamento e momento fletor / Samuel Jungles de Camargo. – Londrina, 2020.
101 f.

Orientador: Marcio Antonio Jorge da Silva.
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2020.
Inclui Bibliografia.

1. Sistema de Bresse - Tese. 2. Desigualdade de Observabilidade - Tese. 3. Estabilidade Exponencial - Tese. 4. Estabilidade Polinomial - Tese. I. Jorge da Silva, Marcio Antonio. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

CDU 51

SAMUEL JUNGLES DE CAMARGO

SISTEMAS DE BRESSE COM ACOPLAMENTO TERMOELÁSTICO NA FORÇA DE CISALHAMENTO E MOMENTO FLETOR

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Arthur Henrique Caixeta
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Higidio Portillo Oquendo
Universidade Federal do Paraná

Londrina, 28 de Fevereiro de 2020.

Dedico este trabalho a minha mãe Joana Teixeira de Camargo

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a Deus pela minha saúde e minha família pelo apoio ao compromisso aqui prestado. Em especial, a minha mãe Joana Teixeira de Camargo e minhas irmãs Andressa e Andreia.

Agradecer a todo corpo docente do PGMAC pelo conhecimento repassado. Em especial, meus professores e amigos José Henrique Rodriguez, Arthur Henrique Caixeta e Michele de Oliveira Alves.

Agradecer também aos meus amigos pela parceria e confiança em todo esse período, em especial Jesika, Tainá, Thiago e meu parceiro de orientação Gabriel Bittencourt.

Além disso, nada mais importante para o desenvolvimento deste trabalho, quero agradecer meu orientador e amigo Marcio Antonio Jorge da Silva pela confiança, dedicação, parceria e todo o conhecimento repassado.

O presente trabalho foi realizado com apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, a qual sou grato.

CAMARGO, Samuel Jungles. **Sistemas de Bresse com acoplamento termoelástico na Força de Cisalhamento e Momento Fletor** . 2020. 101. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

RESUMO

Neste trabalho, estudamos a existência e estabilidade de solução para dois novos sistemas termoelásticos de Bresse, cujas leis constitutivas são motivadas pelo trabalho de Lagnese, Leugering e Schmidt em [10]. Inicialmente, os acoplamentos térmicos estão localizados no momento fletor e na força de cisalhamento, na sequência consideramos o mesmo sistema adicionado de uma dissipação localizada no deslocamento horizontal. Primeiro, provamos a existência e a unicidade de solução para os problemas através da teoria do semigrupos lineares, de acordo com a teoria em Pazy [13]. Em seguida, provamos dois resultados dependendo de uma relação com os coeficientes para o primeiro caso e um resultado de estabilidade que independe de relação entre os coeficientes no segundo caso. Para tal finalidade, usamos os resultados abstratos fornecidos por Prüss [14], Borichev-Tomilov [4] e provamos um resultado de observabilidade para sistemas do tipo Bresse.

Palavras-chave: Sistema de Bresse, desigualdade de observabilidade, estabilidade exponencial, decaimento polinomial.

CAMARGO, Samuel Jungles. **Bresse systems with thermoelastic coupling on the Shear Force and Bending Moment**. 2020. 101. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

ABSTRACT

In this work, we study the existence and stability of solution for two new thermoelastic Bresse systems, whose constitutive laws are motivated by the work of Lagnese, Leugering e Schmidt [10]. Initially, the thermal couplings are located on the bending moment and shear force, then we consider the same system added by a new localized dissipation on the horizontal displacement. We first prove the existence and uniqueness of solution through the linear semigroup theory, according to Pazy [13], for each problem. Then, we prove two stability results depending on a relation among the coefficients in the first case and a stability result independent of such relation in the second case. To this end, we use abstract results provided by Prüss [14], Borichev-Tomilov [4] and prove an observability result for Bresse type systems.

Keywords: Bresse system, observability inequality, exponential stability, polynomial decay.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O sistema de Bresse foi desenvolvido pelo engenheiro francês Jaques Antoine Charles Bresse (1822-1883). Este modelo consiste em descrever o comportamento de uma viga arqueada fina por meio de um sistema de equações diferenciais, ou seja, este modelo rege a movimentação de um corpo elástico.

O sistema de Bresse em sua forma isotérmica, leva em consideração três movimentos sobre o corpo (viga) em questão: o deslocamento vertical $\varphi(x,t)$, ângulo de rotação $\psi(x,t)$ e o deslocamento longitudinal $w(x,t)$, onde cada uma depende do tempo $t \geq 0$ e da sua posição $x \in (0,\ell)$, considerando ℓ como o comprimento da linha de referência que atravessa o centro da viga (ver Figura 1.1).

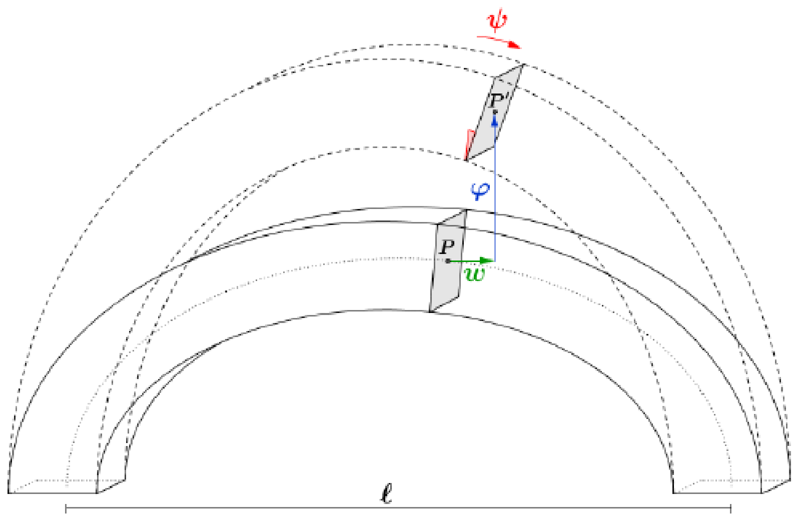

Figura 1.1: Inicialmente uma partícula P se concentra fixada, após uma deformação na viga obtemos um deslocamento da partícula P para uma nova posição P'. (Autor: Ver [7]).

O sistema de Bresse em sua forma elástica, como segue em [5], possui as seguintes equações governantes:

$$\begin{aligned} \rho A\varphi_{tt} &= Q_x + lN, \\ \rho I\psi_{tt} &= M_x - Q, \\ \rho A w_{tt} &= N_x - lQ, \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde as leis constitutivas elásticas são dadas por

$$Q = k'GA(\varphi_x + \psi + lw), \tag{1.2}$$

$$N = EA(w_x - l\varphi), \tag{1.3}$$

$$M = EI\psi_x, \tag{1.4}$$

descrevendo, respectivamente, a força de cisalhamento, força axial e momento fletor, onde A é a área da secção transversal, I é o momento de inércia da secção transversal (com respeito ao eixo vertical), E é o módulo de elasticidade, G é o módulo de cisalhamento, k' é o coeficiente de cisalhamento, ρ é a densidade do material e $l = R^{-1}$ com R sendo o raio de curvatura (Ver [5]).

O sistema (1.1) munido das leis (1.2)-(1.4) está em um estado conservativo, isto é, não existe influência de dissipação. Mais recentemente, Lagnese, Leugering e Schmit em [10] obtiveram novos sistemas que regem o movimento de uma viga arqueada, considerando também a variação de temperatura $\theta(x,t)$. Desta forma, pode-se acoplar em (1.1) uma (ou mais de uma) equação do calor, obtendo assim um Sistema de Bresse Termoelástico. Neste caso, de acordo com [10], se considerarmos o fluxo de calor atuando no momento fletor e na força de cisalhamento, o sistema termoelástico é descrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\rho A\varphi_{tt} = Q_x + lN, \\
&\rho I\psi_{tt} = M_x - Q, \\
&\rho A w_{tt} = N_x - lQ, \\
&\rho c_v\theta_t = q_{1x} - k_1T_0(\varphi_x + \psi + lw)_t, \\
&\rho c_v\vartheta_t = q_{2x} - k_2T_0\psi_{xt},
\end{aligned} \tag{1.5}$$

onde as seguintes leis constitutivas termoelásticas são levadas em consideração

$$Q := k'GA(\varphi_x + \psi + lw) - k_1\theta, \tag{1.6}$$

$$M := EI\psi_x - k_2\vartheta, \tag{1.7}$$

e q_1, q_2 representam o fluxo de calor, T_0 é a temperatura de referência, k_1, k_2 são constantes de acoplamento e c_v é a capacidade térmica do material. Considerando a clássica Lei de Fourier para condução de calor, pode-se escrever o vetor q_j, com $j = 1, 2$, da seguinte maneira:

$$q_1 = \frac{1}{\rho c_v}\theta_x, \;\; q_2 = \frac{1}{\rho c_v}\vartheta_x. \tag{1.8}$$

Para simplificarmos a notação, vamos considerar

$$\rho_1 := \rho A, \;\; \rho_2 := \rho I, \;\; k := k'GA, \;\; k_0 := EA, \;\; b := EI,$$

e ainda,

$$\rho_3, \rho_4 := \frac{\rho c_v}{T_0}, \;\; \alpha, \gamma := \frac{1}{\rho c_v T_0}.$$

Portanto, substituindo (1.4), (1.6), (1.7) e (1.8) em (1.5) obtemos o seguinte sistema termoelástico de Bresse:

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x+\psi+lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + k_1\theta_x &= 0 \quad \text{em} \quad (0,\ell)\times(0,+\infty),\\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x+\psi+lw) - k_1\theta + k_2\vartheta_x &= 0 \quad \text{em} \quad (0,\ell)\times(0,+\infty),\\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x+\psi+lw) - k_1 l\theta &= 0 \quad \text{em} \quad (0,\ell)\times(0,+\infty),\\ \rho_3\theta_t - \alpha\theta_{xx} + k_1(\varphi_x+\psi+lw)_t &= 0 \quad \text{em} \quad (0,\ell)\times(0,+\infty),\\ \rho_4\vartheta_t - \gamma\vartheta_{xx} + k_2\psi_{xt} &= 0 \quad \text{em} \quad (0,\ell)\times(0,+\infty). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Observação 1. Sob estas notações note que $\rho_3 = \rho_4$ e $\alpha = \gamma$, porém vamos considerar matematicamente que pode ocorrer $\rho_3 \neq \rho_4$ e $\alpha \neq \gamma$. Além disso, note também que sempre vale a igualdade $\frac{k_0}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$.

A formulação do sistema (1.5) foi motivado pelas equações de modelagem em [10] e também por uma variação do problema dado por Liu e Rao em [11], onde considera-se um sistema termoelástico do tipo Bresse porém com acoplamento térmico na força axial e no momento fletor, também com a Lei de Fourier para condução de calor e condições de fronteira do tipo Dirichlet e Dirichlet-Neumann. Em Liu e Rao [11], a solução do sistema decai exponencialmente quando a velocidade da onda do deslocamento vertical coincide com a velocidade da onda do deslocamento longitudinal, isto é, quando $G = E$. Caso contrário, apenas uma taxa de decaimento do tipo polinomial pode ser obtida, dependendo das condições de fronteira e da regularidade dos dados iniciais.

No presente trabalho, a proposta é estudar o sistema (1.9), o qual não fora considerado ainda na literatura e pretendemos demonstrar os resultados de estabilidade para este. Sendo assim, vamos considerar (1.9) com condições de fronteira de Dirichlet e Dirichlet-Neumann, respectivamente, dadas por:

$$\varphi(x,t) = \psi(x,t) = w(x,t) = \theta(x,t) = \vartheta(x,t) = 0, \quad \text{para} \quad x \in \{0,\ell\}, \tag{1.10}$$

ou

$$\varphi(x,t) = \psi_x(x,t) = w_x(x,t) = \theta_x(x,t) = \vartheta(x,t) = 0, \quad \text{para} \quad x \in \{0,\ell\}, \tag{1.11}$$

e condições iniciais

$$\begin{aligned} &\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \quad \psi(x,0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x,0) = \psi_1(x),\\ &w(x,0) = w_0(x), \quad w_t(x,0) = w_1(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad \vartheta(x,0) = \vartheta_0(x). \end{aligned}$$

No Capítulo 3, mostraremos no Teorema 3.19 que, independente das condições de fronteira estabelecidas em (1.10) e (1.11) para o sistema (1.9), a solução decai exponencialmente quando as velocidades de propagação de ondas coincidem, isto é, quando $k = k_0$. Caso contrário, para $k \neq k_0$ mostraremos no Teorema 3.20 que a solução decai do tipo polinomial com taxa ótima de $t^{-1/2}$ (ver Teorema 3.34) para dados iniciais regulares e, consequentemente, falta de estabilidade exponencial como mostraremos o Teorema 3.32. Para provar tais resultados a estratégia essencial se concentra em utilizar funções cut-off, assim como Alves et al. [2], onde considera-se um sistema termoelástico de Timoshenko e obtém estabilidade exponencial ou polinomial com taxa $t^{-1/2}$ independente das condições de contorno estabelecidas.

Em seguida, no Capítulo 4 apresentaremos o sistema termoelástico de Bresse (1.9) acrescido de uma dissipação localizada no deslocamento horizontal. Para este caso, vamos garantir no Teorema 4.5 que a solução do problema (conforme está explicitado em (4.1)-(4.4)) decai exponencialmente independente de relação alguma entre os coeficientes do sistema e condições de fronteira estabelecidas, diferenciando-se dos resultados do Capítulo 3.

Finalmente, observamos que a utilização de funções cut-off, auxiliam significativamente nas estimativas evitando problemas com termos de fronteira, mas essa ideia acarreta em estimativas locais e portanto acaba nos gerando uma espécie de estimativas localizadas. Sendo assim, em [2] utiliza-se de um resultado de observabilidade para sistemas do tipo Timoshenko, provado por Rivera et al. [17], a fim de estender estas estimativas locais para todo intervalo em questão. Portanto, como estamos tratando de um sistema termoelástico de Bresse vamos apresentar na Proposição 5.1 do Capítulo 5 uma versão deste resultado de observabilidade, agora para sistemas do tipo Bresse juntamente com um resultado de extensão como segue no Corolário 5.2. Com este importante resultado em mente, podemos concluir os objetivos almejados nos Capítulos 3 e 4.

2 PRELIMINARES

O objetivo principal deste capítulo é fundamentar teoricamente o corpo deste trabalho, mas da maneira mais sutil possível. Os resultados preliminares que serão apresentados não contemplam toda a formulação conceitual, apenas são exibidos os principais resultados utilizados. Basicamente serão apresentados alguns resultados de análise funcional, espaços L^p, espaços de Sobolev unidimensionais e teoria de semigrupos lineares, as demonstrações serão omitidas neste capítulo havendo apenas uma orientação ao leitor.

2.1 ANÁLISE FUNCIONAL

Teorema 2.1. ***(Lax-Milgram).*** *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert sob o corpo $\mathbb{C}$ e uma forma sesquilinear $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ contínua e coerciva. Então, para qualquer funcional antilinear $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, existe um único $x \in \mathcal{H}$ tal que*

$$a(x, y) = (f, y)_{\mathcal{H}}, \, \forall \, y \in \mathcal{H}.$$

Demonstração. Ver [12], Corolário 6.6.2. □

Teorema 2.2. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Banach e $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ um operador invertível de modo que $S^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Se $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é um operador tal que*

$$\|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \frac{1}{\|S^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}},$$

então $S + B$ é um operador linear, limitado e invertível.

Demonstração. Ver [16], Lema 2.12.1. □

2.2 ESPAÇOS L^p

Definição 2.3. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ aberto e $0 < p < +\infty$. Indicaremos por $L^p(I)$ o seguinte conjunto,*

$$L^p(I) = \{f : I \to (-\infty, +\infty); f \text{ é mensurável e } \|f\|_p < +\infty\},$$

onde

$$\|f\|_p = \left(\int_I |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Observação 2. Para o caso $p = 2$ o espaço $L^2(I)$ é um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ munido do seguinte produto interno,

$$(f, g)_2 = \int_I f(x)\overline{g(x)} \, dx, \, \forall \, f, g \in L^2(I).$$

Lema 2.4. *Se $1 \leq p < +\infty$ e $a, b > 0$, então $a^p + b^p \leq (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$.*

Demonstração. Ver [1] , Lema 2.2. □

Teorema 2.5. ***(Desigualdade de Young com ε).*** *Sejam $a, b \geq 0$ e $1 < p, q < +\infty$ conjugados. Então, para todo $\varepsilon > 0$ temos*

$$ab \leq \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^q,$$

onde C_ε é uma constante positiva que depende de ε.

Demonstração. Ver [9], Observação 4.51. □

Teorema 2.6. ***(Desigualdade de Hölder).*** *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um aberto, $f \in L^p(I)$ e $g \in L^q(I)$, com $1 \leq p, q \leq +\infty$ conjugados. Então, o produto $fg \in L^1(I)$ e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

ou seja, se $1 < p < +\infty$ temos

$$\int_I |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_I |g(x)|^q dx \right)^{1/q}.$$

Demonstração. Ver [6], Teorema 4.6. □

2.3 Espaços de Sobolev unidimensionais

Definição 2.7. ***(Espaço de Sobolev).*** *Sejam I um intervalo aberto e $1 \leq p \leq +\infty$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{1,p}(I)$ como o seguinte conjunto*

$$W^{1,p}(I) := \left\{ u \in L^p(I)\,;\, \exists\, g \in L^p(I) \text{ com } \int_I u\overline{\varphi_x}\, dx = -\int_I g\overline{\varphi}\, dx,\ \forall\, \varphi \in C_0^1(I) \right\}.$$

e ainda, para o caso de $p = 2$ denotamos $W^{1,2}(I) := H^1(I)$. Além disso, o espaço $W^{1,p}$ é completo com a seguinte norma:

$$\|u\|_{W^{1,p}} := \left(\|u\|_p^p + \|u_x\|_p^p \right)^{1/p},\ \forall\, u \in W^{1,p}(I),\ 1 \leq p < +\infty.$$

Definição 2.8. ***(Derivada Fraca).*** *Seja $u \in H^1(I)$, com $I \subset \mathbb{R}$ aberto. A função $g \in L^2(I)$ tal que*

$$\int_I u\overline{\varphi_x}\, dx = -\int_I g\overline{\varphi}\, dx,\ \forall\, \varphi \in C_0^1(I),$$

é denominada a derivada fraca de u e denotamos $g := u'$.

Teorema 2.9. *Seja $I \subset \mathbb{R}$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que $\|u\|_\infty \leq C\|u\|_{H^1}$, para todo $u \in H^1(I)$, ou seja, $H^1(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$.*

Demonstração. Ver [6], Teorema 8.8. □

Teorema 2.10. *Se I for limitado, então $H^1(I) \subset C(\overline{I})$, com inclusão compacta.*

Demonstração. Ver [6], Teorema 8.8. □

Teorema 2.11. ***(Integração por Partes).*** *Sejam $u, v \in H^1(I)$, com $I \subset \mathbb{R}$ aberto. Então temos que $uv \in H^1(I)$ e $(uv)' = u'v + uv'$. Além disso, vale que*

$$\int_y^x u'(s)v(s)ds = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x u(s)v'(s)ds.$$

Demonstração. Ver [6] , Corolário 8.10. □

Definição 2.12. *Dado $1 \leq p < \infty$ e $I \subset \mathbb{R}$, denotaremos por $W_0^{1,p}(I)$ o fecho de $C_0^1(I)$ em $W^{1,p}(I)$. Em particular, denotaremos $W_0^{1,2}(I) := H_0^1(I)$.*

Teorema 2.13. *Uma função $u \in H_0^1(I)$ se, e somente se, $u \in H^1(I)$ e $u(x) = 0$, $\forall\, x \in \partial I$.*

Demonstração. Ver [6], Teorema 9.17. □

Teorema 2.14. ***(Desigualdade de Poincaré).*** *Seja I um intervalo limitado. Então, existe uma constante $c_p > 0$ (constante de Poincaré) tal que*

$$\|u\|_{H^1} \leq c_p \|u'\|_2, \forall u \in H_0^1(I).$$

Demonstração. Ver [6], Proposição 8.13. □

2.4 SEMIGRUPOS LINEARES

Definição 2.15. ***(Semigrupo).*** *Dizemos que uma aplicação $S : [0, \infty) \to \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X se*

(i) $S(0) = I_X$;
(ii) $S(s + t) = S(s)S(t)$, $\forall\, s, t \in [0, \infty)$.

Além disso, dizemos que o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0-semigrupo se

$$\lim_{t \to 0} \|S(t)x - x\|_X = 0, \text{ para cada } x \in X.$$

Definição 2.16. ***(Semigrupo de Contrações).*** *Dizemos que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo de contrações quando $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ para todo $t \geq 0$.*

Definição 2.17. ***(Gerador Infinitesimal).*** *Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo sobre um espaço de Banach X. O gerador infinitesimal de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é o operador*

$$A : D(A) \subset X \to X,$$

definido tal que

$$A(x) = \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t}, \text{ para cada } x \in X,$$

onde

$$D(A) = \left\{ x \in X; \exists \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t} \right\}.$$

Definição 2.18. ***(Operador Dissipativo).*** *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Dizemos que o operador linear $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é dissipativo se*

$$Re(AU, U) \leq 0, \, \forall U \in D(A).$$

Teorema 2.19. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador linear dissipativo.*

P1. *Se Im$(\lambda_0 I - A) = \mathcal{H}$ para algum $\lambda_0 > 0$, então Im$(\lambda I - A) = \mathcal{H}$ para todo $\lambda > 0$.*

P2. *Se Im$(I - A) = \mathcal{H}$, então $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$.*

Demonstração. Ver [13], Teoremas 4.5 e 4.6. □

Teorema 2.20. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Banach e $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador linear com conjunto resolvente $\rho(A)$ não vazio. Então,*

P1. *O operador A tem resolvente compacto se, e somente se, a aplicação inclusão*

$$i : (D(A), \| \cdot \|_{D(A)}) \to (\mathcal{H}, \| \cdot \|_{\mathcal{H}}),$$

é compacta, onde $\| \cdot \|_{D(A)}$ é a norma do gráfico.

P2. *Suponhamos que o operador A tem resolvente compacto, então o espectro $\sigma(A)$ de A é composto apenas por autovalores.*

Demonstração. Ver [8] , Proposição 5.8. □

Teorema 2.21. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador linear dissipativo com domínio denso. Se $0 \in \rho(A)$, onde $\rho(A)$ é o conjunto resolvente de A, então o operador A será o gerador infnitesimal de um C_0-semigrupo de contrações.*

Demonstração. Ver [16], Teorema 2.12.3. □

Teorema 2.22. ***(Hille-Yosida).*** *Seja A um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $S(t) := e^{tA}$ em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então, dado $U_0 \in D(A)$ existe uma única função*

$$U \in C^1([0, +\infty); \mathcal{H}) \cap C([0, +\infty); D(A)),$$

satisfazendo o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} AU = U_t, \ t > 0, \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Além disso, a solução é dada por $U(t) = S(t)U_0$.

Demonstração. Ver [6] , Teorema 7.4. □

Definição 2.23. *Seja* $\mathcal{H}$ *um espaço de Banach e* $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *um operador linear. Então, o domínio do operador* A^n *para algum* $n \in \mathbb{N}$ *é dado por*

$$D(A^n) = \left\{U \in D(A^{n-1}) : AU \in D(A^{n-1}), n \in \mathbb{N})\right\}. \tag{2.2}$$

Teorema 2.24. *Sob as hipóteses do Teorema 2.22, se* $U_0 \in D(A^n)$ *para* $n \geq 2$ *natural então a solução* U *de* (2.1) *está na classe*

$$\bigcap_{j=0}^{n} C^{n-j}([0, +\infty), D(A^j)). \tag{2.3}$$

Demonstração. Ver [18], Teorema 2.3.1. □

Teorema 2.25. ***(Prüss).*** *Um* C_0 *- semigrupo de contrações* $S(t) := e^{At}$ *definido em um espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$ *é exponencialmente estável se, e somente se,*

$$(i) \quad i\mathbb{R} \subset \rho(A), \tag{2.4}$$

$$(ii) \quad \lim_{|\lambda|\to\infty} sup\|(i\lambda I_d - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < +\infty. \tag{2.5}$$

Demonstração. Ver [14] . □

Definição 2.26. *Dizemos que*

$$f = O(g) \text{ quando } x \to x_0,$$

se existir uma constante $C > 0$ *tal que*

$$|f(x)| \leq C|g(x)|,$$

para todo x *suficientemente próximo de* x_0.

Teorema 2.27. ***(Borichev e Tomilov).*** *Seja* $S(t) := e^{tA}$ *um* C_0*-semigrupo limitado definido sobre um espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$ *tal que* $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$. *Então, para algum* $\omega > 0$ *são equivalentes* *as seguintes afirmações:*

$$(i) \ \ \|S(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(t^{-1/\omega}), \ \ \textit{para} \ \ t \to +\infty,$$
$$(ii) \ \ \|(i\lambda I_d - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(|\lambda|^{\omega}), \ \ \textit{para} \ \ |\lambda| \to +\infty.$$

Demonstração. Ver [4]. $\square$

3 SISTEMA DE BRESSE TERMOELÁSTICO

Considere inicialmente o sistema de Bresse termoelástico dado por:

$$\begin{aligned}
\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + k_1\theta_x = 0 \quad &\text{em} \quad (0,\ell)\times(0,+\infty),\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) - k_1\theta + k_2\vartheta_x = 0 \quad &\text{em} \quad (0,\ell)\times(0,+\infty),\\
\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) - k_1 l\theta = 0 \quad &\text{em} \quad (0,\ell)\times(0,+\infty),\\
\rho_3\theta_t - \alpha\theta_{xx} + k_1(\varphi_x + \psi + lw)_t = 0 \quad &\text{em} \quad (0,\ell)\times(0,+\infty),\\
\rho_4\vartheta_t - \gamma\vartheta_{xx} + k_2\psi_{xt} = 0 \quad &\text{em} \quad (0,\ell)\times(0,+\infty),
\end{aligned} \tag{3.1}$$

o qual é considerado com condições iniciais

$$\begin{aligned}
&\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \quad \psi(x,0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x,0) = \psi_1(x),\\
&w(x,0) = w_0(x), \quad w_t(x,0) = w_1(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad \vartheta(x,0) = \vartheta_0(x),
\end{aligned} \tag{3.2}$$

e condições de fronteira do tipo Dirichlet

$$\varphi(x,t) = \psi(x,t) = w(x,t) = \theta(x,t) = \vartheta(x,t) = 0, \quad \text{para} \quad x \in \{0,\ell\}, \tag{3.3}$$

ou do tipo Dirichlet-Neumann

$$\varphi(x,t) = \psi_x(x,t) = w_x(x,t) = \theta_x(x,t) = \vartheta(x,t) = 0, \quad \text{para} \quad x \in \{0,\ell\}. \tag{3.4}$$

Neste momento, nosso objetivo é mostrar existência e unicidade de solução para este sistema. Para isso, vamos reescrever (3.1)-(3.4) em um novo problema de evolução e estudá-lo via teoria de semigrupo linear.

3.1 Existência e Unicidade de Solução

3.1.1 Condição de fronteira de Dirichlet

Nesta seção vamos reescrever o sistema (3.1)-(3.4) com condição de fronteira (3.3) em um problema de Cauchy abstrato. Para isso, considere inicialmente o espaço de fase

$$\mathcal{H}_1 := H_0^1(0,\ell)\times L^2(0,\ell)\times H_0^1(0,\ell)\times L^2(0,\ell)\times H_0^1(0,\ell)\times L^2(0,\ell)\times L^2(0,\ell)\times L^2(0,\ell),$$

o qual é um espaço de Hilbert munido do produto interno usual

$$\begin{aligned}
\langle U, U^*\rangle_{\mathcal{H}_1} \;=\;& (\varphi_x,\varphi_x^*)_2 + (\Phi,\Phi^*)_2 + (\psi_x,\psi_x^*)_2 + (\Psi,\Psi^*)_2 + (w_x,w_x^*)_2 + (W,W^*)_2\\
&+ (\theta,\theta^*)_2 + (\vartheta,\vartheta^*)_2,
\end{aligned}$$

cuja a norma proveniente do mesmo é

$$|U|^2_{\mathcal{H}_1} = \|\varphi_x\|_2^2 + \|\Phi\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|\Psi\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 + \|W\|_2^2 + \|\theta\|_2^2 + \|\vartheta\|_2^2 \,,$$

onde $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \theta, \vartheta)$, $U^* = (\varphi^*, \Phi^*, \psi^*, \Psi^*, w^*, W^*, \theta^*, \vartheta^*) \in \mathcal{H}_1$ e a aplicação $\|\cdot\|_2$ é a norma em $L^2(0, \ell)$.

A partir de agora omitiremos a notação $L^2(0, \ell)$ e $H^1_0(0, \ell)$, denotando simplesmente por L^2 e H^1_0, respectivamente. Além disso, consideremos uma nova aplicação definida por

$$\begin{aligned}(U, U^*)_{\mathcal{H}_1} \quad := \quad & \rho_1(\Phi, \Phi^*)_2 + \rho_2(\Psi, \Psi^*)_2 + \rho_1(W, W^*)_2 + b(\psi_x, \psi_x^*)_2 + \rho_3(\theta, \theta^*)_2 \\ & + \rho_4(\vartheta, \vartheta^*)_2 + k(\varphi_x + \psi + lw, \varphi_x^* + \psi^* + lw^*)_2 + k_0(w_x - l\varphi, w_x^* - l\varphi^*)_2,\end{aligned}$$

de onde, definimos também

$$\begin{aligned}\|U\|^2_{\mathcal{H}_1} \quad := \quad & \rho_1\|\Phi\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + \rho_1\|W\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 + k\|(\varphi_x + \psi + lw)\|_2^2 + k_0\|(w_x - l\varphi)\|_2^2 \\ & + \rho_3\|\theta\|_2^2 + \rho_4\|\vartheta\|_2^2,\end{aligned}$$

para quaisquer $U, U^* \in \mathcal{H}_1$.

Afirmação 1. A aplicação $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}_1}$ define um produto interno em $\mathcal{H}_1$, consequentemente $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$ define uma norma no mesmo espaço.

Com efeito, dado $U \in \mathcal{H}_1$ temos que

$$(U, U)_{\mathcal{H}_1} = 0 \;\Rightarrow\; \Phi, \Psi, W, \theta, \vartheta, \psi_x, (\varphi_x + \psi + lw), (w_x - l\varphi) = 0.$$

Note que,

$$\|\psi\|_{H^1_0} = \|\psi_x\|_2 = 0 \Rightarrow \psi = 0,$$

portanto obtemos

$$\|\varphi_x + lw\|_2 = \|w_x - l\varphi\|_2 = 0 \;\Rightarrow\; \varphi_x + lw = 0 \text{ e } w_x - l\varphi = 0.$$

Como $w \in H^1_0$ segue que $\varphi_x \in H^1_0$, então podemos considerar o seguinte sistema

$$\begin{cases} \varphi_{xx} + l^2\varphi = 0 \\ \varphi(0) = \varphi(\ell) = 0\,. \end{cases} \tag{3.5}$$

Sabendo que $0 \in C([0, \ell])$, então o problema de valor inicial (3.5) possui uma solução

$$\varphi \in C^2([0, \ell]) \text{ dada por } \varphi(x) = c\,\mathrm{sen}(lx), \text{ com } c \in \mathbb{R} \text{ um coeficiente a determinar .}$$

Substituindo a solução em $\varphi_x(0) + lw(0) = 0$ temos que $c = 0$. Portanto, $\varphi = 0$, e consequentemente $w = 0$.

Assim,

$$(U,U)_{\mathcal{H}_1}=0 \;\Rightarrow\; U=0.$$

As demais propriedades seguem da definição de produto interno em L^2 e do fato que cada parcela do produto interno $(U,U)_{\mathcal{H}_1}$ é limitado por $(U,U)_{\mathcal{H}_1}+(U^*,U^*)_{\mathcal{H}_1}$, para $U,U^*\in\mathcal{H}_1$.

Lema 3.1. *As normas $|\cdot|_{\mathcal{H}_1}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$ são equivalentes.*

Demonstração. Vamos mostrar que dado $U\in\mathcal{H}_1$ existe uma constante $C>0$ tal que $\|U\|_{\mathcal{H}_1}\leq C|U|_{\mathcal{H}_1}$ e $|U|_{\mathcal{H}_1}\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_1}$.

Observe primeiramente que usando Desigualdade Triangular, o Lema 2.4 e a Desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned} k_0\|w_x-l\varphi\|_2^2 &\leq k_0(\|w_x\|_2+l\|\varphi\|_2)^2\\ &\leq 2k_0\|w_x\|_2^2+2k_0l^2\|\varphi\|_2^2\\ &\leq 2k_0\|w_x\|_2^2+2k_0l^2c_p\|\varphi_x\|_2^2, \end{aligned}$$

analogamente, temos

$$\begin{aligned} k\|(\varphi_x+\psi+lw)\|_2^2 &\leq 2k\|\varphi_x+\psi\|_2^2+2kl^2\|w\|_2^2\\ &\leq 4k\|\varphi_x\|_2^2+4k\|\psi\|_2^2+2kl^2\|w\|_2^2\\ &\leq 4k\|\varphi_x\|_2^2+4kc_p\|\psi_x\|_2^2+2kl^2c_p\|w_x\|_2^2, \end{aligned}$$

onde $c_p>0$ é a constante de Poincaré. Portanto, existe uma constante $C>0$ tal que

$$k\|(\varphi_x+\psi+lw)\|_2^2+k_0\|w_x-l\varphi\|_2^2+b\|\psi_x\|_2^2 \;\leq\; C(\|\varphi_x\|_2^2+\|\psi_x\|_2^2+\|w_x\|_2^2). \tag{3.6}$$

Logo, existe uma outra constante $C>0$ tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_1}\leq C|U|_{\mathcal{H}_1}.$$

Para o segundo caso, isto é, $|U|_{\mathcal{H}_1}\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_1}$ vamos considerar as funções

$$\begin{aligned} J &= \varphi_x+\psi+lw,\\ G &= w_x-l\varphi, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\varphi_x+lw = J-\psi, \tag{3.7}$$

$$w_x-l\varphi = G. \tag{3.8}$$

Tomando o produto interno em L^2 de (3.7) e (3.8) com $x\varphi$ e xw, respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} (\varphi_x + lw, x\varphi)_2 &= (J - \psi, x\varphi)_2, && (3.9)\\ (w_x - l\varphi, xw)_2 &= (G, xw)_2. && (3.10) \end{aligned}$$

Agora, integrando por partes e tomando a parte real de $(\varphi_x, x\varphi)_2$ e $(w_x, xw)_2$, temos

$$\begin{aligned} Re(\varphi_x, x\varphi)_2 &= -Re(\varphi, \varphi)_2 - Re(\varphi, x\varphi_x)_2,\\ Re(w_x, xw)_2 &= -Re(w, w)_2 - Re(w, xw_x)_2. \end{aligned}$$

Sabendo que $Re(z_1, z_2) = Re(z_2, z_1)$, para qualquer $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, concluímos que

$$\begin{aligned} -\|\varphi\|_2^2 &= 2Re(\varphi_x, x\varphi)_2,\\ -\|w\|_2^2 &= 2Re(w_x, xw)_2. \end{aligned}$$

Tomando a parte real de (3.9) e (3.10), obtemos que

$$\begin{aligned} Re(\varphi_x + lw, x\varphi)_2 &= Re(\varphi_x, x\varphi)_2 + Re(lw, x\varphi)_2,\\ Re(w_x - l\varphi, xw)_2 &= Re(w_x, xw)_2 - Re(l\varphi, xw)_2, \end{aligned}$$

somando as equações vem que,

$$-\frac{\|\varphi\|_2^2}{2} - \frac{\|w\|_2^2}{2} = Re(J - \psi, x\varphi)_2 + Re(G, xw)_2.$$

Usando Desigualdade de Hölder e o fato que $|x| \le \ell$, temos

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_2^2 + \|w\|_2^2 &= -2Re(J - \psi, x\varphi)_2 - 2Re(G, xw)_2\\ &\le 2|(J - \psi, x\varphi)_2| + 2|(G, xw)_2|\\ &\le 2\|J - \psi\|_2\|x\varphi\|_2 + 2\|G\|_2\|xw\|_2\\ &\le 2\ell\|J - \psi\|_2\|\varphi\|_2 + 2\ell\|G\|_2\|w\|_2, \end{aligned}$$

e usando a Desigualdade de Young

$$\|\varphi\|_2^2 + \|w\|_2^2 \le 4\ell^2\|J - \psi\|_2^2 + 4\ell^2\|G\|_2^2. \tag{3.11}$$

Além disso, pela Desigualdade Triangular podemos estimar

$$\begin{aligned} \|\varphi_x\|_2^2 &= \|\psi - J + lw\|_2^2\\ &\le \|J - \psi\|_2^2 + 2l\|J - \psi\|_2\|w\|_2 + l^2\|w\|_2^2, && (3.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|w_x\|_2^2 &= \|G + l\varphi\|_2^2 \\ &\leq \|G\|_2^2 + 2l\|G\|_2\|\varphi\|_2 + l^2\|\varphi\|_2^2. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Somando (3.12) e (3.13), obtemos

$$\begin{aligned} \|\varphi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 &\leq \|J - \psi\|_2^2 + 2l\|J - \psi\|_2\|w\|_2 + l^2\|w\|_2^2 \\ &\quad + \|G\|_2^2 + 2l\|G\|_2\|\varphi\|_2 + l^2\|\varphi\|_2^2. \end{aligned}$$

Substituindo (3.11) e usando a Desigualdade de Poincaré, tem-se

$$\begin{aligned} \|\varphi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 &\leq 4l^2\ell^4\|J - \psi\|_2^2 + 4l^2\ell^4\|G\|_2^2 + \|J - \psi\|_2^2 \\ &\quad + 2lc_p\|J - \psi\|_2\|w_x\|_2 + \|G\|_2^2 + 2lc_p\|G\|_2\|\varphi_x\|_2, \end{aligned}$$

e novamente usando a Desigualdade de Young, vem que

$$\begin{aligned} \|\varphi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 &\leq 2\|J - \psi\|_2^2 + 2\|G\|_2^2 + 4c_p^2 l^2\|J - \psi\|_2^2 \\ &\quad + 4l^2 c_p^2\|G\|_2^2 + 8l^2\ell^4\|J - \psi\|_2^2 + 8l^2\ell^4\|G\|_2^2 \\ &\leq C(\|J - \psi\|_2^2 + \|G\|_2^2), \end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva. Portanto, do Lema 2.4 e da Desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned} \|\varphi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 &\leq C(2\|J\|_2^2 + 2\|\psi\|_2^2 + \|G\|_2^2) \\ &\leq 2C\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + 2Cc_p\|\psi_x\|_2^2 + C\|w_x - l\varphi\|_2^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 \leq C(\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|w_x - l\varphi\|_2^2), \tag{3.14}$$

para alguma outra constante $C > 0$. Logo, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|U|_{\mathcal{H}_1} \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_1}.$$

□

Observação 3. Pelo Lema 3.1 concluímos que $(\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1})$ é um espaço de Banach, e portanto um espaço de Hilbert.

Considere agora o operador linear $A_1 : D(A_1) \subset \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$, onde

$$A_1U := \begin{bmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw)_x + \frac{k_0 l}{\rho_1}(w_x - l\varphi) - \frac{k_1}{\rho_1}\theta_x \\ \Psi \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + lw) + \frac{k_1}{\rho_2}\theta - \frac{k_2}{\rho_2}\vartheta_x \\ W \\ \frac{k_0}{\rho_1}(w_x - l\varphi)_x - \frac{kl}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw) + \frac{k_1 l}{\rho_1}\theta \\ \frac{\alpha}{\rho_3}\theta_{xx} - \frac{k_1}{\rho_3}(\Phi_x + \Psi + lW) \\ \frac{\gamma}{\rho_4}\vartheta_{xx} - \frac{k_2}{\rho_4}\Psi_x \end{bmatrix}, \tag{3.15}$$

para todo $U \in D(A_1)$ e

$$D(A_1) := \{U \in \mathcal{H}_1 : \varphi, \psi, w, \theta, \vartheta \in H_0^1 \cap H^2 \,;\, \Phi, \Psi, W \in H_0^1\}.$$

Denotando $\varphi_t := \Phi, \psi_t := \Psi$ e $w_t := W$ podemos reescrever o sistema (3.1)-(3.3) como o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} U_t := A_1U, \quad t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{3.16}$$

onde $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \theta, \vartheta)$ e $U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1, \theta_0, \vartheta_0)$. Desta forma temos um problema de Cauchy abstrato no qual utilizaremos da teoria de semigrupos lineares para buscar existência e unicidade de solução.

Teorema 3.2. *Seja $A_1 : D(A_1) \subset \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ o operador linear definido em (3.15). Então, A_1 é um operador dissipativo em $\mathcal{H}_1$.*

Demonstração. Devemos mostrar que $Re(A_1U, U)_{\mathcal{H}_1} \leq 0,$ para todo $U \in D(A_1)$. Sendo assim, dado $U \in D(A_1)$ temos que,

$$\begin{aligned} (A_1U, U)_{\mathcal{H}_1} &= k((\varphi_x + \psi + lw)_x, \Phi)_2 + k_0 l(w_x - l\varphi, \Phi)_2 \\ &\quad - k_1(\theta_x, \Phi)_2 + b(\psi_{xx}, \Psi)_2 - k(\varphi_x + \psi + lw, \Psi)_2 \\ &\quad + k_1(\theta, \Psi)_2 - k_2(\vartheta_x, \Psi)_2 + k_0((w_x - l\varphi)_x, W)_2 - kl(\varphi_x + \psi + lw, W)_2 \\ &\quad + k_1 l(\theta, W)_2 + b(\Psi_x, \psi_x)_2 + k(\Phi_x + \Psi + lW, \varphi_x + \psi + lw)_2 \\ &\quad + k_0(W_x - l\Phi, w_x - l\varphi)_2 + \alpha(\theta_{xx}, \theta)_2 - k_1(\Phi_x + \Psi + lW, \theta)_2 \\ &\quad + \gamma(\vartheta_{xx}, \vartheta)_2 - k_2(\Psi_x, \vartheta)_2, \end{aligned}$$

integrando por partes, vem que

$$
\begin{aligned}
(A_1U,U)_{\mathcal{H}_1} = & -k(\varphi_x+\psi+lw,\Phi_x)_2+k_0l(w_x-l\varphi,\Phi)_2 \\
& +k_1(\theta,\Phi_x)_2-b(\psi_x,\Psi_x)_2-k(\varphi_x+\psi+lw,\Psi)_2 \\
& +k_1(\theta,\Psi)_2+k_2(\vartheta,\Psi_x)_2-k_0(w_x-l\varphi,W_x)_2-kl(\varphi_x+\psi+lw,W)_2 \\
& +k_1l(\theta,W)_2+b(\Psi_x,\psi_x)_2+k(\Phi_x+\Psi+lW,\varphi_x+\psi+lw)_2 \\
& +k_0(W_x-l\Phi,w_x-l\varphi)_2-\alpha(\theta_x,\theta_x)_2-k(\Phi_x+\Psi+lW,\theta)_2 \\
& -\gamma(\vartheta_x,\vartheta_x)_2-k_2(\Psi,\vartheta_x)_2.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
(A_1U,U)_{\mathcal{H}_1} = & \; k(\Phi_x+\Psi+lW,\varphi_x+\psi+lw)_2-k(\varphi_x+\psi+lw,\Phi_x+\Psi+lW)_2 \\
& +k_0(W_x-l\Phi,w_x-l\varphi)_2-k_0(w_x-l\varphi,W_x-l\Phi)_2-\alpha\|\theta_x\|_2^2 \\
& +b(\Psi_x,\psi_x)_2-b(\psi_x,\Psi_x)_2+k_1(\theta,\Phi_x)_2-k_1(\Phi_x,\theta)_2 \\
& +k_1(\theta,\Psi)_2-k_1(\Psi,\theta)_2+k_1l(\theta,W)_2-k_1l(W,\theta)_2 \\
& -\gamma\|\vartheta_x\|_2^2+k_2(\vartheta,\Psi_x)_2-k_2(\Psi_x,\vartheta)_2.
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

Sabendo que para qualquer $z \in \mathbb{C}$ vale que $z-\overline{z}=2Im(z)$ e tomando a parte real de (3.17), obtemos

$$Re(A_1U,U)_{\mathcal{H}_1}=-\alpha\|\theta_x\|_2^2-\gamma\|\vartheta_x\|_2^2. \tag{3.18}$$

Portanto, como $\alpha,\gamma>0$, segue que

$$Re(A_1U,U)_{\mathcal{H}_1}\leq 0,\ \forall U\in\mathcal{H}_1.$$

□

Lema 3.3. *Dados $g_1,g_2,g_3\in L^2$, o sistema*

$$
\begin{cases}
k(\varphi_x+\psi+lw)_x+k_0l(w_x-l\varphi)=g_1,\\
b\psi_{xx}-k(\varphi_x+\psi+lw)=g_2,\\
k_0(w_x-l\varphi)_x-kl(\varphi_x+\psi+lw)=g_3,
\end{cases} \tag{3.19}
$$

possui uma única solução $(\varphi,\psi,w)\in(H^2\cap H_0^1)^3$.

Demonstração. Primeiramente, considere o espaço de Hilbert $\mathcal{H}:=H_0^1\times H_0^1\times H_0^1$ munido da norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, definida por

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2=\|\varphi_x\|_2^2+\|\psi_x\|_2^2+\|w_x\|_2^2, \tag{3.20}$$

para qualquer $U=(\varphi,\psi,w)\in\mathcal{H}$. De fato o espaço $(\mathcal{H},\|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ é Hilbert uma vez que $(H_0^1,\|\cdot\|_{H_0^1})$ é Hilbert.

Definamos agora a aplicação sesquilinear $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ por

$$\begin{aligned} a(U,U^*) \quad &:= \quad k\int_0^\ell (\varphi_x+\psi+lw)\overline{(\varphi_x^*+\psi^*+lw^*)}\,dx + k_0\int_0^\ell (w_x-l\varphi)\overline{(w_x^*-l\varphi^*)}\,dx \\ &\quad\ + b\int_0^\ell \psi_x\overline{\psi_x^*}\,dx, \end{aligned} \tag{3.21}$$

para todo $U=(\varphi,\psi,w), U^*=(\varphi^*,\psi^*,w^*) \in \mathcal{H}$.

Afirmação 2. A aplicação $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ é uma forma sesquilinear continua e coerciva.

Com efeito, dado $U, U^* \in \mathcal{H}$ temos que

$$\begin{aligned} |a(U,U^*)| \quad &\leq \quad k\int_0^\ell |\varphi_x+\psi+lw||\varphi_x^*+\psi^*+lw^*|\,dx + k_0\int_0^\ell |w_x-l\varphi||w_x^*-l\varphi^*|\,dx \\ &\quad\ + b\int_0^\ell |\psi_x||\psi_x^*|\,dx. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Usando a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} |a(U,U^*)| \quad &\leq \quad k\|\varphi_x+\psi+lw\|_2\|\varphi_x^*+\psi^*+lw^*\|_2 + k_0\|w_x-l\varphi\|_2\|w_x^*-l\varphi^*\|_2 \\ &\quad\ + b\|\psi_x\|_2\|\psi_x^*\|_2, \end{aligned}$$

pelo Lema 3.1 (ver (3.6)), existe uma constante $C>0$ tal que

$$|a(U,U^*)| \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}^2\|U^*\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{3.23}$$

Portanto $a : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ é contínua. Além disso, novamente do Lema 3.1 (ver (3.14)), podemos garantir que existe $C>0$ tal que

$$a(U,U) \geq C\|U\|_{\mathcal{H}}^2\,.$$

Logo,

$$Re(a(U,U)) \geq C\|U\|_{\mathcal{H}}^2\,,$$

e consequentemente $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ é coerciva.

Considere também o funcional antilinear $\Upsilon : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, definido por

$$\Upsilon(U^*) := -\int_0^\ell g_1\overline{\varphi^*}\,dx - \int_0^\ell g_2\overline{\psi^*}\,dx - \int_0^\ell g_3\overline{w^*}\,dx, \tag{3.24}$$

para todo $U^*=(\varphi^*,\psi^*,w^*) \in \mathcal{H}$

Afirmação 3. $\Upsilon : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ é limitado.

Com efeito, dado $U^* \in \mathcal{H}$ e utilizando a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$|\Upsilon(U^*)| \leq \|g_1\|_2\|\varphi^*\|_2 + \|g_2\|_2\|\psi^*\|_2 + \|g_3\|_2\|w^*\|_2.$$

Além disso, pelas Desigualdade de Poincaré

$$\begin{aligned} |\Upsilon(U^*)| &\leq c_p\|g_1\|_2\|\varphi^*_x\|_2 + c_p\|g_2\|_2\|\psi^*_x\|_2 + c_p\|g_3\|_2\|w^*_x\|_2 \\ &\leq C\|\varphi^*_x\|_2 + C\|\psi^*_x\|_2 + C\|w^*_x\|_2 \\ &\leq C\|U^*\|_2, \end{aligned}$$

para uma constante $C > 0$. Logo Υ é limitado.

Portanto, pelo Teorema de Lax - Milgram (ver Teorema 2.1) existe um único $U \in \mathcal{H}$ tal que

$$a(U, U^*) = \Upsilon(U^*),\ \forall U^* \in \mathcal{H}. \tag{3.25}$$

Sendo assim, consideremos particularmente os casos onde $\varphi^* \in C_0^1, \psi^* = 0$ e $w^* = 0$. Daí, de (3.25) temos

$$a((\varphi, \psi, w), (\varphi^*, 0, 0)) = \Upsilon(\varphi^*, 0, 0),$$

isto é, de (3.21) e (3.24) vem que

$$k\int_0^\ell (\varphi_x + \psi + lw)\overline{\varphi^*_x}\, dx - k_0 l\int_0^\ell (w_x - l\varphi)\overline{\varphi^*}\, dx = -\int_0^\ell g_1\overline{\varphi^*}\, dx,$$

e reagrupando os termos e integrando por partes, obtemos

$$\int_0^\ell \varphi_x\overline{\varphi^*_x}\, dx = -\int_0^\ell \left[-(\psi + lw)_x - \frac{k_0 l}{k}(w_x - l\varphi) + \frac{1}{k}g_1\right]\overline{\varphi^*}\, dx, \forall\, \varphi^* \in C_0^1.$$

Portanto $\varphi_x \in H^1$, e ainda pela definição de derivada fraca temos

$$\varphi_{xx} = -(\psi + lw)_x - \frac{k_0 l}{k}(w_x - l\varphi) + \frac{1}{k}g_1,$$

isto é,

$$k(\varphi_x - \psi + lw)_x + k_0(w_x - l\varphi) = g_1,$$

com $\varphi \in H^2 \cap H_0^1$.

Da mesma forma, considere em particular $\psi^* \in C_0^1, \varphi^* = 0$ e $w^* = 0$. Daí, de (3.25) obtemos

$$a((\varphi, \psi, w), (0, \psi^*, 0)) = \Upsilon((0, \psi^*, 0)),$$

isto é,

$$k\int_0^\ell (\varphi_x+\psi+lw)\overline{\psi^*}\,dx + b\int_0^\ell \psi_x\overline{\psi_x^*}\,dx = -\int_0^\ell g_2\overline{\psi^*}\,dx.$$

Reagrupando os termos e integrando por partes, vem que

$$\int_0^\ell \psi_x\overline{\psi_x^*}\,dx = -\int_0^\ell \left[\frac{k}{b}(\varphi_x+\psi+lw)+\frac{1}{b}g_2\right]\overline{\psi^*}\,dx, \forall\,\psi^*\in C_0^1.$$

Portanto $\psi_x\in H^1$, e ainda

$$\psi_{xx} = \frac{k}{b}(\varphi_x+\psi+lw)+\frac{1}{b}g_2,$$

com $\psi\in H^2\cap H_0^1$.

Analogamente, consideramos $w^*\in C_0^1, \varphi^*=0$ e $\psi^*=0$. Daí, de (3.25) temos

$$a((\varphi,\psi,w),(0,0,w^*)) = \Upsilon(0,0,w^*),$$

isto é,

$$kl\int_0^\ell (\varphi_x+\psi+lw)\overline{w^*}\,dx + k_0\int_0^\ell (w_x-l\varphi)\overline{w_x^*}\,dx = -\int_0^\ell g_3\overline{w^*}\,dx,$$

e reagrupando os termos e integrando por partes, temos

$$\int_0^\ell w_x\overline{w_x^*}dx = -\int_0^\ell \left[\frac{kl}{k_0}(\varphi_x+\psi+lw)+l\varphi_x+\frac{1}{k_0}g_3\right]\overline{w^*}dx, \forall w^*\in C_0^1.$$

Portanto $w_x\in H^1$, e ainda

$$w_{xx} = \frac{kl}{k_0}(\varphi_x+\psi+lw)+l\varphi_x+\frac{1}{k_0}g_3,$$

com $w\in H^2\cap H_0^1$.

Feito isso, podemos concluir que o sistema (3.19) possui uma única solução

$$(\varphi,\psi,w)\in(H^2\cap H_0^1)^3.$$

□

Lema 3.4. *Seja $f\in L^2$. Então existe um único $\theta\in H_0^1\cap H^2$ tal que $\theta_{xx}=f$.*

Demonstração. Considere aplicação sesquilinear $a: H_0^1\times H_0^1\to\mathbb{C}$, tal que

$$a(\theta,v) := \int_0^\ell \theta_x\overline{v_x}\,dx,\ \forall\,\theta,v\in H_0^1.$$

Note que, pela Desigualdade de Hölder

$$|a(\theta,v)| \le \|\theta_x\|_2\|v_x\|_2 = \|\theta\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1},$$

e ainda,

$$a(\theta,\theta) = \|\theta_x\|_2^2 = \|\theta\|_{H_0^1}^2.$$

Logo, a é contínua e coerciva.

Além disso, considere o funcional antilinear $\Upsilon_0 : H_0^1 \to \mathbb{C}$, definido por

$$\Upsilon_0(v) := -\int_0^\ell f\overline{v}\,dx, \forall\, v \in H_0^1.$$

Observe que pelas Desigualdades de Hölder e Poincaré é fácil ver que Υ_0 é limitado.

Portanto pelo Teorema de Lax - Milgram (ver Teorema 2.1) existe um único $\theta \in H_0^1$, tal que

$$a(\theta, v) = \Upsilon_0(v), \forall\, v \in H_0^1,$$

isto é,

$$\int_0^\ell \theta_x \overline{v_x} dx = -\int_0^\ell f\overline{v} dx, \forall\, v \in H_0^1.$$

Portanto $\theta_x \in H^1$, e ainda, pela definição de derivada fraca

$$\theta_{xx} = f.$$

Sendo assim, concluímos que existe um único $\theta \in H^2 \cap H_0^1$ tal que $\theta_{xx} = f$. $\square$

Teorema 3.5. *O operador linear $-A_1 : D(A_1) \subset \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ é bijetor.*

Demonstração. Basta mostrar que, dado $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8) \in \mathcal{H}_1$, existe um único $U \in D(A_1)$ tal que $-A_1 U = F$.

Considere o sistema $-A_1 U = F$ em termos de suas componentes

$$\begin{cases} -\Phi = f_1, \\ -\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw)_x - \frac{k_0 l}{\rho_1}(w_x - l\varphi) + \frac{k_1}{\rho_1}\theta_x = f_2, \\ -\Psi = f_3, \\ \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + lw) - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k_1}{\rho_2}\theta + \frac{k_2}{\rho_2}\vartheta_x = f_4, \\ -W = f_5, \\ \frac{kl}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw) - \frac{k_0}{\rho_1}(w_x - l\varphi)_x - \frac{k_1 l}{\rho_1}\theta = f_6, \\ -\frac{\alpha}{\rho_3}\theta_{xx} + \frac{k_1}{\rho_3}(\Phi_x + \Psi + lW) = f_7, \\ -\frac{\gamma}{\rho_4}\vartheta_{xx} + \frac{k_2}{\rho_4}\Psi_x = f_8. \end{cases} \tag{3.26}$$

Como $f_1, f_3, f_5 \in H_0^1$, segue de imediato que $\Phi, \Psi, W \in H_0^1$. Além disso, considerando

$$g_1 := -\rho_1 f_2 + k_1\theta_x,\; g_2 := -\rho_2 f_4 - k_1\theta + k_2\vartheta_x,\; g_3 := -\rho_1 f_6 - k_1 l\theta \in L^2$$

então pelo Lema 3.3, temos que existem únicos $\varphi, \psi, w \in H^2 \cap H_0^1$ satisfazendo (3.26) . Analogamente, pelo Lema 3.4, existem únicos $\theta, \vartheta \in H^2 \cap H_0^1$ satisfazendo (3.26).

Portanto, existe um único $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \theta) \in D(A_1)$ tal que $-A_1 U = F$. Logo $-A_1$ é bijetor. $\square$

Teorema 3.6. *O operador linear $(-A_1)^{-1} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ existe e é limitado.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.5 garantimos a existência do operador inverso $(-A_1)^{-1}$. Restando verificar a sua limitação, isto é, basta mostrar que existe uma constante $C > 0$ tal que $\|U\|_{\mathcal{H}_1} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_1}$ uma vez que $(-A_1)^{-1}F = U$, para todo $F \in \mathcal{H}_1$.

Consideremos novamente a equação resolvente $-A_1 U = F$ em termos de suas componentes,

$$\begin{cases} -\Phi = f_1, \\ -\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw)_x - \frac{k_0 l}{\rho_1}(w_x - l\varphi) + \frac{k_1}{\rho_1}\theta_x = f_2, \\ -\Psi = f_3, \\ \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + lw) - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k_1}{\rho_2}\theta + \frac{k_2}{\rho_2}\vartheta_x = f_4, \\ -W = f_5, \\ \frac{kl}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw) - \frac{k_0}{\rho_1}(w_x - l\varphi)_x - \frac{k_1 l}{\rho_1}\theta = f_6, \\ -\frac{\alpha}{\rho_3}\theta_{xx} + \frac{k_1}{\rho_3}(\Phi_x + \Psi + lW) = f_7, \\ -\frac{\gamma}{\rho_4}\vartheta_{xx} + \frac{k_2}{\rho_3}\Psi_x = f_8, \end{cases} \tag{3.27}$$

para qualquer que seja $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8) \in \mathcal{H}_1$.

Sabendo que $Re(A_1 U, U)_{\mathcal{H}_1} = -\alpha\|\theta_x\|_2^2 - \gamma\|\vartheta_x\|_2^2$, segue da Desigualdade de Hölder que

$$\alpha\|\theta_x\|_2^2 + \gamma\|\vartheta_x\|_2^2 \leq \|A_1 U\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1} = \|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}, \tag{3.28}$$

pela Desigualdade de Poincaré, vem que

$$\rho_3\|\theta\|_2^2 + \rho_4\|\vartheta\|_2^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}, \tag{3.29}$$

para uma constante $C > 0$. Além disso, $\|\Phi\|_2^2 = \|f_1\|_2^2$, $\|\Psi\|_2^2 = \|f_3\|_2^2$, $\|W\|_2^2 = \|f_5\|_2^2$. Logo,

$$\rho_1\|\Phi\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + \rho_1\|W\|_2^2 = \rho_1\|f_1\|_2^2 + \rho_2\|f_3\|_2^2 + \rho_1\|f_5\|_2^2,$$

e usando a Desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\rho_1\|\Phi\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + \rho_1\|W\|_2^2 \leq \rho_1 c_p^2\|f_{1x}\|_2^2 + \rho_2 c_p^2\|f_{3x}\|_2^2 + \rho_1 c_p^2\|f_{5x}\|_2^2,$$

por fim, usando o Lema 3.1 (ver (3.14)), vem que

$$\rho_1\|\Phi\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + \rho_1\|W\|_2^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2, \tag{3.30}$$

para alguma outra constante $C > 0$.

Neste momento, vamos considerar o sistema reduzido de (3.27) dado por

$$\begin{cases} -k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + k_1\theta_x = \rho_1 f_2, \\ k(\varphi_x + \psi + lw) - b\psi_{xx} - k_1\theta + k_2\vartheta_x = \rho_2 f_4, \\ kl(\varphi_x + \psi + lw) - k_0(w_x - l\varphi)_x - k_1 l\theta = \rho_1 f_6. \end{cases}$$

Agora tomando o produto interno de φ, ψ e w com $\rho_1 f_2,\ \rho_2 f_4$ e $\rho_1 f_6$, respectivamente, temos que

$$\begin{aligned} -k((\varphi_x + \psi + lw)_x, \varphi)_2 - k_0 l(w_x - l\varphi, \varphi)_2 + k_1(\theta_x, \varphi)_2 &= \rho_1(f_2, \varphi)_2, \\ k(\varphi_x + \psi + lw, \psi)_2 - b(\psi_{xx}, \psi)_2 - k_1(\theta, \psi)_2 + k_2(\vartheta_x, \psi)_2 &= \rho_2(f_4, \psi)_2, \\ kl(\varphi_x + \psi + lw, w)_2 - k_0((w_x - l\varphi)_x, w)_2 - k_1 l(\theta, w)_2 &= \rho_1(f_6, w)_2 \end{aligned}$$

Integrando por partes, somando as equações e reagrupando alguns termos, obtemos que

$$\begin{aligned} k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 &= \rho_1(f_2, \varphi)_2 + \rho_2(f_4, \psi)_2 + \rho_1(f_6, w)_2 \\ &\quad + k_1(\theta, \varphi_x + \psi + lw)_2 + k_2(\vartheta, \psi_x)_2, \end{aligned}$$

usando a Desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned} k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 &\le \rho_1\|f_2\|_2\|\varphi\|_2 + \rho_2\|f_4\|_2\|\psi\|_2 \\ &\quad + \rho_1\|f_6\|_2\|w\|_2 + k_1\|\theta\|_2\|\varphi_x + \psi + lw\|_2 \\ &\quad + k_2\|\vartheta\|_2\|\psi_x\|_2. \end{aligned}$$

Agora usando a Desigualdade de Poincaré e Young, temos que

$$\begin{aligned} k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 &\le C\|f_2\|_2\|\varphi_x\|_2 + C\|f_4\|_2\|\psi_x\|_2 \\ &+ C\|f_6\|_2\|w_x\|_2 + C\|\theta_x\|_2^2 + C\|\vartheta_x\|_2^2, \end{aligned}$$

ou ainda, usando (3.28) e o Lema 3.1 (ver (3.14)) vem que

$$k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 \le C\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}. \tag{3.31}$$

para alguma constante $C > 0$. Somando (3.29), (3.30) e (3.31), vem que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \le 2C\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1} + C\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2.$$

Finalmente, usando a Desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 \le C\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2,$$

para alguma outra constante $C > 0$.

Portanto, o operador $(-A_1)^{-1}$ existe e é limitado. $\square$

Teorema 3.7. *Seja $A_1 : D(A_1) \subset \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ o operador definido em (3.15). Então,*

(i) $0 \in \rho(A_1)$.

(ii) $\overline{D(A_1)} = \mathcal{H}_1$.

Demonstração. A prova do item (i) segue da combinação dos Teoremas 3.5 e 3.6.

Para a prova do item (ii), vamos considerar no Teorema 2.2 $S = I$ e ainda um $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lambda_0 < \frac{1}{\|(-A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}}.$$

Sabendo que $(-A_1)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$, podemos considerar $B = \lambda_0(-A_1)^{-1}$. Assim,

$$\|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} = \lambda_0\|(-A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} < \frac{1}{\|S\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}}.$$

Logo, pelo Teorema 2.2 $I + \lambda_0(-A_1)^{-1}$ é linear, invertível e limitado. Assim, $\lambda_0 I - A$ é invertível, uma vez que

$$(-A_1)(I + \lambda_0(-A_1)^{-1}) = \lambda_0 I - A_1.$$

Portanto $\mathrm{Im}(\lambda_0 I - A_1) = \mathcal{H}_1$ com $\lambda_0 > 0$. Logo, pelo Teorema 2.19 obtemos que $\mathrm{Im}(\lambda I - A_1) = \mathcal{H}_1$ para todo $\lambda > 0$, particularmente se $\lambda = 1$ temos $\mathrm{Im}(I - A_1) = \mathcal{H}_1$. Consequentemente segue do Teorema 2.19 que $\overline{D(A_1)} = \mathcal{H}_1$. $\square$

Teorema 3.8. *O operador $A_1 : D(A_1) \subset \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ definido em (3.15) é um gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo de contrações $\{S_1(t)\}_{t\geq 0}$ sobre o espaço $\mathcal{H}_1$.*

Demonstração. Segue como consequência imediata do Teorema 3.7 e do Teorema 2.21. $\square$

Observação 4. O semigrupo cujo gerador infinitesimal é o operador A_1 será chamado de semigrupo gerado por A_1, e o denotaremos por $S_1(t) = e^{tA_1}$, para $t \geq 0$.

Teorema 3.9. *Se $U_0 \in \mathcal{H}_1$, então o problema* (3.16) *possui única solução generalizada $U \in C([0,\infty);\mathcal{H}_1)$. Além disso, se $U_0 \in D(A_1)$, então U é solução regular do problema* (3.16)*, com $U \in C([0,\infty);D(A_1)) \cap C^1([0,\infty);\mathcal{H}_1)$. Ou ainda, se $U_0 \in D(A_1^n)$, para $n \geq 2$ natural, então a solução U de* (3.16) *está na classe*

$$\bigcap_{r=0}^{n} C^{n-r}([0,+\infty), D(A_1^r)). \tag{3.32}$$

Em todos os casos, a solução é dada por $U(t) := S_1(t)U_0 = e^{tA_1}U_0$.

Demonstração. Segue como consequência imediata do Teorema 3.8 e dos Teoremas 2.22 e 2.24. $\square$

3.1.2 Condição de fronteira de Dirichlet - Neumann

A fim de reescrever o problema (3.1)-(3.2) com condição de fronteira (3.4), consideremos inicialmente um novo espaço de fase

$$\mathcal{H}_2 = H_0^1(0,\ell)\times L^2(0,\ell)\times H_*^1(0,\ell)\times L_*^2(0,\ell)\times H_*^1(0,\ell)\times L_*^2(0,\ell)\times L_*^2(0,\ell)\times L^2(0,\ell),$$

onde $H_*^1(0,\ell) = \{v \in H^1; \frac{1}{\ell}\int_0^\ell v dx = 0\}$ e $L_*^2(0,\ell) = \{v \in L^2; \frac{1}{\ell}\int_0^\ell v dx = 0\}$. Ambos os espaços $(H_*^1(0,\ell), \|\cdot\|_{H^1})$ e $(L_*^2(0,\ell), \|\cdot\|_2)$ são espaços de Banach e vale a Desigualdade de Poincaré em H_*^1 conforme a Teoria de Espaços de Sobolev.

O espaço de fase $\mathcal{H}_2$ é também um espaço de Hilbert munido do produto interno usual

$$\begin{aligned}\langle U, U^*\rangle_{\mathcal{H}_2} &= (\varphi_x, \varphi_x^*)_2 + (\Phi, \Phi^*)_2 + (\psi_x, \psi_x^*)_2 + (\Psi, \Psi^*)_2 + (w_x, w_x^*)_2 + (W, W^*)_2 \\ &\quad + (\theta, \theta^*)_2 + (\vartheta, \vartheta^*)_2,\end{aligned}$$

cuja a norma proveniente é

$$|U|_{\mathcal{H}_2}^2 = \|\varphi_x\|_2^2 + \|\Phi\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|\Psi\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 + \|W\|_2^2 + \|\theta\|_2^2 + \|\vartheta\|_2^2,$$

onde $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \theta, \vartheta)$, $U^* = (\varphi^*, \Phi^*, \psi^*, \Psi^*, w^*, W^*, \theta^*, \vartheta^*) \in \mathcal{H}_2$ e a aplicação $\|\cdot\|_2$ é a norma em L^2. Novamente substituiremos a notação $H_*^1(0,\ell)$ e $L_*^2(0,\ell)$ por H_*^1 e L_*^2, respectivamente.

Além disso tudo, consideremos também uma nova aplicação $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}_2}$ definida por

$$\begin{aligned}(U, U^*)_{\mathcal{H}_2} &:= \rho_1(\Phi, \Phi^*)_2 + \rho_2(\Psi, \Psi^*)_2 + \rho_1(W, W^*)_2 + b(\psi_x, \psi_x^*)_2 + \rho_3(\theta, \theta^*)_2 + \rho_4(\vartheta, \vartheta^*)_2 \\ &\quad + k(\varphi_x + \psi + lw, \varphi_x^* + \psi^* + lw^*)_2 + k_0(w_x - l\varphi, w_x^* - l\varphi^*)_2,\end{aligned}$$

e induzida pelo mesmo, definimos

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 &:= \rho_1\|\Phi_x\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + \rho_1\|W\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 + k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 \\ &\quad + \rho_3\|\theta\|_2^2 + \rho_4\|\vartheta\|_2^2,\end{aligned}$$

para todo $U, U^* \in \mathcal{H}_2$.

Observação 5. A aplicação $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}_2}$ define um produto interno em $\mathcal{H}_2$ desde que $\ell l \neq n\pi$ com $n \in \mathbb{Z}$. Consequentemente $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_2}$ define uma norma. A justificativa é análoga à feita na Afirmação 1.

Caso contrário podemos ter $U \neq 0$ tal que $(U, U)_{\mathcal{H}_2} = 0$. Basta considerar,

$$U := (\,\mathrm{sen}(lx), 0, 0, 0, -\cos(lx), 0, 0, 0) \in \mathcal{H}_2.$$

Assim sendo, no que segue consideremos $\ell l \neq n\pi, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Lema 3.10. *As normas $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_2}$ e $|\cdot|_{\mathcal{H}_2}$ são equivalentes.*

Demonstração. Analogamente à prova feita no Lema 3.1, é simples mostrar que existe uma contante $C > 0$ tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_2} \leq C|U|_{\mathcal{H}_2}, \ \forall U \in \mathcal{H}_2,$$

visto que vale (3.6) também neste caso. Por outro lado, a prova que $|U|_{\mathcal{H}_2} \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}$ para alguma constante $C > 0$, decorre da afirmação a seguir e será baseada nos argumentos vistos em [3].

Afirmação 4. Existe uma contante $C > 0$ tal que

$$\|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 \leq C(k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2), \tag{3.33}$$

para todo $(\varphi, \psi, w) \in H_0^1 \times H_*^1 \times H_*^1$.

No caso de $(\varphi, \psi, w) = (0, 0, 0)$ (3.33) segue imediatamente. Em caso contrário, a prova segue usando argumentos de contradição, diferindo da prova direta realizada em (3.14).

De fato, suponhamos que (3.33) não se verifica para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para cada n existe $(\varphi^n, \psi^n, w^n) \in H_0^1 \times H_*^1 \times H_*^1$, tal que

$$k\|\varphi_x^n + \psi^n + lw^n\|_2^2 + b\|\psi_x^n\|_2^2 + k_0\|w_x^n - l\varphi^n\|_2^2 < \frac{1}{n} \tag{3.34}$$

e

$$\|\varphi_x^n\|_2^2 + \|\psi_x^n\|_2^2 + \|w_x^n\|_2^2 = 1. \tag{3.35}$$

Note que, de (3.35), a sequência $\{(\varphi^n, \psi^n, w^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $H_0^1 \times H_*^1 \times H_*^1$. Como os espaços $H_0^1 \subset L^2$ e $H_*^1 \subset L_*^2$ com inclusão compacta, segue que existe um subconjunto $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ tal que a sequência $\{(\varphi^n, \psi^n, w^n)\}_{n\in\mathbb{N}_1}$ converge forte em $L^2 \times L_*^2 \times L_*^2$.

Além disso, de (3.34), vem que $\psi_x^n \to 0$ forte em L^2. Consequentemente $\psi^n \to 0$ forte em H_*^1 (pela Desigualdade de Poincaré).

Considere agora $\varphi \in L^2$ e $w \in L_*^2$, tal que $\varphi^n \to \varphi$ forte em L^2 e $w^n \to w$ forte em L_*^2.

Observe de (3.34), que $\varphi_x^n + \psi^n + lw^n \to 0$ forte em L^2. Como

$$\varphi_x^n + lw + l(w^n - w) + \psi^n = \varphi_x^n + \psi^n + lw^n,$$

segue que, $\varphi_x^n \to -lw$ forte em L^2. E assim, $\{\varphi^n\}_{n\in\mathbb{N}_1}$ é uma sequência de Cauchy em H_0^1, e portanto converge para uma $\phi \in H_0^1$. Pela unicidade do limite $\phi = \varphi$. Logo $\varphi \in H_0^1$. Por fim, $\varphi_x + lw = 0$ q.s em $(0, \ell)$.

Analogamente, de (3.34), temos $w_x^n - l\varphi^n \to 0$ forte em L^2. E como

$$w_x^n - l\varphi - l(\varphi^n - \varphi) = w_x^n - l\varphi$$

segue que, $w_x^n \to l\varphi$ forte em L^2_*. E assim, $\{w^n\}_{n\in\mathbb{N}_1}$ é uma sequência de Cauchy em H^1_*, portanto converge para $w^* \in H^1_*$. Pela unicidade do limite $w^* = w$. Logo $w \in H^1_*$. Por fim, $w_x - l\varphi = 0$ q.s em $(0,\ell)$.

Sendo assim, como $w \in H^1$ segue que $\varphi_x \in H^1$ e podemos considerar o sistema

$$\begin{cases} \varphi_{xx} + l^2\varphi = 0, \\ \varphi(0) = \varphi(\ell) = 0, \end{cases}$$

o qual é um problema de contorno com solução $\varphi = 0$ como em (3.5), consequentemente, $w = 0$. Portanto $(\varphi_x^n, \psi_x^n, w_x^n) \to (0,0,0)$ forte em $L^2 \times L^2_* \times L^2_*$, o que contradiz (3.35). Logo, vale (3.33) e fica provado a afirmação.

Portanto, vale que $|U|_{\mathcal{H}_2} \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}$ para alguma constante $C > 0$, de onde concluímos que as normas são equivalentes, provando o Lema 3.10.

□

Observação 6. Do Lema 3.10 o espaço $(\mathcal{H}_2, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_2})$ também é um espaço de Banach, e portanto um espaço de Hilbert.

Agora vamos definir um novo operador linear $A_2 : D(A_2) \subset \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ sobre o espaço $\mathcal{H}_2$ com domínio,

$$D(A_2) := \{U \in \mathcal{H}_2 : \varphi, \vartheta \in H^1_0 \cap H^2\,;\ \Psi, W \in H^1_*\,;\ \Phi \in H^1_0\,;\ \psi_x, w_x, \theta_x \in H^1_0\},$$

dado por:

$$A_2U := \begin{bmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw)_x + \frac{k_0 l}{\rho_1}(w_x - l\varphi) - \frac{k_1}{\rho_1}\theta_x \\ \Psi \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + lw) + \frac{k_1}{\rho_2}\theta - \frac{k_2}{\rho_2}\vartheta_x \\ W \\ \frac{k_0}{\rho_1}(w_x - l\varphi)_x - \frac{kl}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw) + \frac{k_1 l}{\rho_1}\theta \\ \frac{\alpha}{\rho_3}\theta_{xx} - \frac{k_1}{\rho_3}(\Phi_x + \Psi + lW) \\ \frac{\gamma}{\rho_4}\vartheta_{xx} - \frac{k_2}{\rho_4}\Psi_x \end{bmatrix}, \tag{3.36}$$

para todo $U \in D(A_2)$. Denotando $\varphi_t := \Phi, \psi_t := \Psi$ e $w_t := W$ podemos rescrever o sistema (3.1)-(3.2) com condição de fronteira dada em (3.4) como um sistema do tipo

$$\begin{cases} U_t := A_2U, \quad t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{3.37}$$

onde $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \theta, \vartheta)$ e $U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1, \theta_0, \vartheta_0)$. Desta forma temos um novo problema de Cauchy abstrato, o qual também vamos mostrar a existência e unicidade de solução via teoria de semigrupos lineares.

Teorema 3.11. *Seja $A_2 : D(A_2) \subset \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ o operador linear definido em (3.36). Então, A_2 é um operador dissipativo em $\mathcal{H}_2$.*

Demonstração. Análoga ao Teorema 3.2, pois as condições de fronteira estabelecidas sobre o espaço $D(A_2)$ são suficientes para reproduzir os mesmos cálculos e mostrar que

$$Re(A_2U, U)_{\mathcal{H}_2} = -\alpha\|\theta_x\|_2^2 - \gamma\|\vartheta\|_2^2, \; \forall U \in D(A_2). \tag{3.38}$$

□

Lema 3.12. *Dados $g_1 \in L^2$ e $g_2, g_3 \in L^2_*$, o sistema*

$$\begin{cases} k(\varphi_x + \psi + lw)_x + k_0 l(w_x - l\varphi) = g_1, \\ b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + lw) = g_2, \\ k_0(w_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x + \psi + lw) = g_3, \end{cases} \tag{3.39}$$

possui única solução $(\varphi, \psi, w) \in (H^2 \cap H_0^1) \times (H^2 \cap H_*^1)^2$ com $\psi_x, w_x \in H_0^1$.

Demonstração. Primeiramente, considere o espaço de Hilbert $\mathcal{H} = H_0^1 \times H_*^1 \times H_*^1$ munido da norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, definida usualmente por

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2, \tag{3.40}$$

para qualquer $U = (\varphi, \psi, w) \in \mathcal{H}$. De fato, o espaço $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ é Hilbert uma vez que $(H_*^1, \|\cdot\|_{H_*^1})$ é Hilbert. Definindo agora uma aplicação sesquilinear $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, tal que

$$\begin{aligned} a(U, U^*) \; &:= \; k\int_0^\ell (\varphi_x + \psi + lw)\overline{(\varphi_x^* + \psi^* + lw^*)}\, dx + k_0\int_0^\ell (w_x - l\varphi)\overline{(w_x^* - l\varphi^*)}\, dx \\ &\quad + b\int_0^\ell \psi_x\overline{\psi_x^*}\, dx, \end{aligned}$$

para todo $U = (\varphi, \psi, w), U^* = (\varphi^*, \psi^*, w^*) \in \mathcal{H}$.

Pelo mesmo argumento usado no Lema 3.3 é possível mostrar que a é contínua e coerciva.

Considere agora o funcional antilinear $\Upsilon : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ definido por

$$\Upsilon(U^*) := -\int_0^\ell g_1\overline{\varphi^*}\, dx - \int_0^\ell g_2\overline{\psi^*}\, dx - \int_0^\ell g_3\overline{w^*}\, dx,$$

para todo $U^* = (\varphi^*, \psi^*, w^*) \in \mathcal{H}$.

Analogamente ao Lema 3.3 é possível mostrar que Υ é contínuo.

Portanto, novamente pelo Teorema de Lax-Milgram (ver Teorema 2.1) existe um único $U \in \mathcal{H}$ tal que

$$a(U, U^*) = \Upsilon(U^*), \; \forall\, U^* \in \mathcal{H}. \tag{3.41}$$

Sendo assim, considere $\varphi^* = w^* = 0$, $\xi \in H^1$ e defina

$$\psi^* = \xi - \frac{1}{\ell}\int_0^\ell \xi(t)dt. \tag{3.42}$$

Observe que $\psi^* \in H^1_*$. Substituindo as funções em (3.41), vem que

$$k\int_0^\ell (\varphi_x + \psi + lw)\overline{\psi^*}dx + b\int_0^\ell \psi_x\overline{\psi^*_x}dx = -\int_0^\ell g_2\overline{\psi^*}dx,$$

ou ainda, usando (3.42) e o fato de $\psi^*_x = \xi_x$ temos

$$k\int_0^\ell (\varphi_x + \psi + lw)\overline{\left(\xi - \frac{1}{\ell}\int_0^\ell \xi(t)dt\right)}dx + b\int_0^\ell \psi_x\overline{\xi_x}dx = -\int_0^\ell g_2\overline{\left(\xi - \frac{1}{\ell}\int_0^\ell \xi(t)dt\right)}dx.$$

Reagrupando os termos e usando que $\varphi \in H^1_0$, $\psi, w \in H^1_*$ e $g_2 \in L^2_*$, obtemos

$$b\int_0^\ell \psi_x\overline{\xi_x}dx = -\int_0^\ell \left[k(\varphi_x + \psi + lw) + g_2\right]\overline{\xi}dx, \ \forall\, \xi \in H^1. \tag{3.43}$$

Logo, $\psi_x \in H^1$ e ainda pela definição de derivada fraca

$$b\psi_{xx} = k(\varphi_x + \psi + lw) + g_2. \tag{3.44}$$

Integrando (3.44) sobre $(0, \ell)$, usando as condições de fronteira e o fato de $\psi, w \in H^1_*$, concluímos que $\psi_x(\ell) = \psi_x(0)$.

Tomando $\xi \in C([0, \ell])$ tal que $\xi(\ell) = 1$ e $\xi(0) = 0$ e integrando por partes (3.43), vem que

$$b\psi_x(\ell)\xi(\ell) - b\psi_x(0)\xi(0) = \int_0^\ell [b\psi_{xx} - (k(\varphi_x + \psi + lw) + g_2)]\overline{\xi}dx.$$

Daí, $\psi_x(\ell) = 0$ e, consequentemente, $\psi_x(0) = 0$. Portanto, $\psi_x \in H^1_0$.

Analogamente, considere $\varphi^* = \psi^* = 0$, $\xi \in H^1$ e defina

$$w^* = \xi - \frac{1}{\ell}\int_0^\ell \xi(t)dt. \tag{3.45}$$

Observe que $w^* \in H^1_*$.

Substituindo as funções em (3.41) obtemos que

$$kl\int_0^\ell (\varphi_x + \psi + lw)\overline{w^*}dx + k_0\int_0^\ell (w_x - l\varphi)\overline{w^*_x}dx = -\int_0^\ell g_3\overline{w^*}dx,$$

ou ainda, usando (3.45) e o fato de $w_x^* = \xi_x$ temos

$$\begin{aligned} -\int_0^\ell g_3\overline{\left(\xi - \frac{1}{\ell}\int_0^\ell \xi(t)dt\right)}dx &= kl\int_0^\ell (\varphi_x + \psi + lw)\overline{\left(\xi - \frac{1}{\ell}\int_0^\ell \xi(t)dt\right)}dx \\ &\quad + k_0\int_0^\ell (w_x - l\varphi)\overline{\xi_x}dx. \end{aligned}$$

Reagrupando os termos e usando que $\varphi \in H_0^1, g_3 \in L_*^2$ e $\psi, w \in H_*^1$, obtemos

$$k_0\int_0^\ell (w_x - l\varphi)\overline{\xi_x}dx = -\int_0^\ell [kl(\varphi_x + \psi + lw) + g_3]\overline{\xi}dx, \ \forall\, \xi \in H^1. \tag{3.46}$$

Logo, $w_x \in H^1$ e ainda

$$k_0(w_x - l\varphi)_x = kl(\varphi_x + \psi + lw) + g_3. \tag{3.47}$$

Integrando por partes (3.47) sobre $(0, \ell)$, usando as condições de fronteira e que $\psi, w \in H_*^1$, concluímos que $w_x(\ell) = w_x(0)$.

Tomando $\xi \in C([0, \ell])$ tal que $\xi(\ell) = 1$ e $\xi(0) = 0$ e integrando por partes (3.46), vem que

$$k_0(w_x(\ell) - l\varphi(\ell))\xi(\ell) - k_0(w_x(0) - l\varphi(0))\xi(0) = \int_0^\ell [k_0(w_x - l\varphi)_x - (kl(\varphi_x + \psi + lw) + g_3)]\overline{\xi}dx.$$

Daí, $w_x(\ell) = 0$ e, consequentemente, $w_x(0) = 0$. Portanto, $w_x \in H_0^1$.

Desta forma, concluímos que $\psi, w \in H^2 \cap H_*^1$ com $\psi_x, w_x \in H_0^1$ satisfazendo (3.39) e de modo análogo ao Lema 3.3 obtemos $\varphi \in H^2 \cap H_0^1$ satisfazendo (3.39). $\square$

Lema 3.13. *Seja $f \in L_*^2$. Então existe um único $\theta \in H^2 \cap H_*^1$ tal que $\theta_{xx} = f$ e $\theta_x \in H_0^1$.*

Demonstração. Considere aplicação sesquilinear $a : H_*^1 \times H_*^1 \to \mathbb{C}$, tal que

$$a(\theta, v) := \int_0^\ell \theta_x \overline{v_x} dx, \forall\, \theta, v \in H_*^1.$$

Note que, analogamente ao Lema 3.4 podemos mostrar que a é contínua e coerciva. Agora, considere também o funcional antilinear $\Upsilon_1 : H_*^1 \to \mathbb{C}$, definido por

$$\Upsilon_1(v) := -\int_0^\ell f\overline{v}dx, \forall\, v \in H_*^1.$$

Observe novamente que análogo Lema 3.4 obtemos que Υ_1 é limitado. Portanto, pelo Teorema de Lax - Milgram (ver Teorema 2.1) existe um único $\theta \in H_*^1$ tal que

$$a(\theta, v) = \Upsilon_1(\theta), \forall\, v \in H_*^1. \tag{3.48}$$

Considere agora, $\xi \in H^1$ e defina $v = \xi - \frac{1}{\ell}\int_0^\ell \xi(t)dt$. Note que $v \in H^1_*$ e assim substituindo em (3.48), vem que

$$\int_0^\ell \theta_x \overline{\xi_x} dx = -\int_0^\ell f\overline{\left(\xi - \frac{1}{\ell}\int_0^\ell \xi(t)dt\right)}dx, \forall \xi \in H^1.$$

Daí,

$$\int_0^\ell \theta_x \overline{\xi_x} dx = -\int_0^\ell f\overline{\xi} dx, \forall \xi \in H^1. \tag{3.49}$$

Portanto, $\theta_x \in H^1$ e ainda pela definição de derivada fraca $\theta_{xx} = f$, isto é, $\theta \in H^2$.

Tomando $\xi \in C([0,\ell])$ tal que $\xi(\ell) = 1$, $\xi(0) = 0$ e integrando por partes (3.49), obtemos

$$\theta_x(\ell)\xi(\ell) - \theta_x(0)\xi(0) = \int_0^\ell [\theta_{xx} - f]\overline{\xi} dx.$$

Logo $\theta_x(\ell) = 0$. Como $\theta_x(\ell) = \theta_x(0)$ uma vez que $\theta_{xx} = f$, temos que $\theta_x(0) = 0$ e, portanto, $\theta_x \in H^1_0$, o que conclui a prova do Lema 3.13. □

Teorema 3.14. *Seja $-A_2 : D(A_2) \subset \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ o operador linear definido em (3.36). Então, $-A_2$ é bijetor.*

Demonstração. Novamente, basta mostrar que dado $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8) \in \mathcal{H}_2$ existe um único $U \in D(A_2)$ tal que $-A_2U = F$. Considere a equação resolvente $-A_2U = F$, ou ainda,

$$\begin{cases} -\Phi = f_1, \\ -\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw)_x - \frac{k_0 l}{\rho_1}(w_x - l\varphi) + \frac{k_1}{\rho_1}\theta_x = f_2, \\ -\Psi = f_3, \\ \frac{k_0}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + lw) - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k_1}{\rho_2}\theta + \frac{k_2}{\rho_4}\vartheta_x = f_4, \\ -W = f_5, \\ \frac{kl}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw) - \frac{k_0}{\rho_1}(w_x - l\varphi)_x - \frac{k_1 l}{\rho_1}\theta = f_6, \\ -\frac{\alpha}{\rho_3}\theta_{xx} + \frac{k_1}{\rho_3}(\Phi_x + \Psi + lW) = f_7, \\ -\frac{\gamma}{\rho_4}\vartheta_{xx} + \frac{k_2}{\rho_3}\Psi_x = f_8. \end{cases} \tag{3.50}$$

Como $f_1 \in H^1_0$ e $f_3, f_5 \in H^1_*$, segue que $\Phi \in H^1_0$ e $\Psi, W \in H^1_*$.

Além disso, considerando

$$g_1 := -\rho_1 f_2 + k_1\theta_x \in L^2, \;\; g_2 := -\rho_2 f_4 - k_1\theta + k_2\vartheta_x, g_3 := -\rho_1 f_6 - k_1 l\theta \in L^2_*,$$

então pelo Lema 3.12, temos que existem únicos $(\varphi, \psi, w) \in (H^2 \cap H^1_0)\times(H^2 \cap H^1_*)^2$ com $\psi_x, w_x \in H^1_0$ satisfazendo (3.50) . Analogamente, pelos Lemas 3.13 e 3.4, existe um único $\theta \in H^2 \cap H^1_*$ com $\theta_x \in H^1_0$ e um único $\vartheta \in H^2 \cap H^1_0$ satisfazendo (3.50).

Portanto, $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \theta, \vartheta) \in D(A_2)$ é único tal que $-A_2U = F$. Logo, $-A_2$ é bijetor. □

Teorema 3.15. *O operador linear* $(-A_2)^{-1} : D((-A_2)^{-1}) \subset \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ *é limitado.*

Demonstração. A demonstração é análoga ao provado no Teorema 3.6. □

Teorema 3.16. *Seja* $A_2 : D(A_2) \subset \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ *o operador linear definido em (3.36). Então,*

(i) $0 \in \rho(A_2)$,

(ii) $\overline{D(A_2)} = \mathcal{H}_2$.

Demonstração. A demonstração é análoga ao Teorema 3.7. □

Teorema 3.17. *O operador* $A_2 : D(A_2) \subset \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ *definido em (3.36) é um gerador infinitesimal de um* C_0 *- semigrupo de contrações* $\{S_2(t)\}_{t\geq 0}$ *sobre o espaço* $\mathcal{H}_2$.

Demonstração. Segue do Teorema 3.16 e do Teorema 2.21. □

Observação 7. O semigrupo cujo gerador infinitesimal é o operador A_2 será chamado de semigrupo gerado por A_2, e o denotaremos por $S_2(t) = e^{tA_2}$, para $t \geq 0$.

Teorema 3.18. *Se* $U_0 \in \mathcal{H}_2$*, então o problema (3.37) possui única solução generalizada* $U \in C([0,\infty);\mathcal{H}_2)$*. Além disso, se* $U \in D(A_2)$*, então* U *é solução regular do problema (3.37), na classe* $U \in C([0,\infty);D(A_2)) \cap C^1([0,\infty);\mathcal{H}_2)$*. Ou ainda, se* $U_0 \in D(A_2^n)$*, para* $n \geq 2$ *natural, então a solução* U *de* (3.37) *está na classe*

$$\bigcap_{r=0}^{n} C^{n-r}([0,+\infty), D(A_2^r)). \tag{3.51}$$

Em todos os casos, a solução é dada por $U(t) := S_2(t)U_0 = e^{tA_2}U_0$.

Demonstração. Segue do Teorema 3.17 e dos Teoremas 2.22 e 2.24. □

3.2 ESTABILIDADE

Os resultados de estabilidade serão resumidos na prova de dois Teoremas, relativos aos decaimentos do tipo exponencial e do tipo polinomial para a solução $U(t) = S_j(t)U_0$ do sistema (3.16) para o caso de $j = 1$ e (3.37) para $j = 2$, dada pelos Teoremas 3.9 e 3.18, respectivamente e, consequentemente para a solução do sistema (3.1)-(3.4). Para isso vamos considerar a relação de velocidade de propagação de ondas, a qual é dada por

$$\chi := k - k_0. \tag{3.52}$$

Teorema 3.19. *Se* $\chi = 0$*, então o semigrupo* $S_j(t) = e^{A_j t}$ *associado ao problema* (3.16) *para* $j = 1$ *e* (3.37) *para* $j = 2$ *é exponencialmente estável, ou seja, existem constantes* $C, \omega > 0$ *que independem de* $U_0 \in \mathcal{H}_j$ *tais que*

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_j} \leq Ce^{-\omega t}\|U_0\|_{\mathcal{H}_j} \ , \ t > 0. \tag{3.53}$$

Em outras palavras, o sistema (3.1)-(3.4) *é exponencialmente estável.*

A prova deste resultado baseia-se em verificar as duas condições estabelecidas no Teorema 2.25, as quais serão provadas posteriormente como consequência de uma série de lemas técnicos.

Teorema 3.20. *Se $\chi \neq 0$, então o semigrupo $S_j(t) = e^{A_j t}$ associado ao problema* (3.16) *para $j = 1$ e* (3.37) *para $j = 2$ é polinomialmente estável, ou seja, existe uma constante $C > 0$ que independe de $U_0 \in D(A_j)$ tal que*

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_j} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}} \|U_0\|_{D(A_j)}\ ,\ t > 0. \tag{3.54}$$

Em outras palavras, o sistema (3.1)-(3.4) *é polinomialmente estável.*

Analogamente ao caso anterior, para a prova de tal resultado mostraremos uma das condições do Teorema 2.27. Novamente, vamos utilizar alguns resultados preliminares e consequentemente concluir a prova.

3.2.1 Lemas Técnicos

Nesta seção apresentaremos resultados que independem das condições de fronteira estabelecidas em (3.3)-(3.4).

Lema 3.21. *Para $j = 1, 2$, temos que o $D(A_j) \subset \mathcal{H}_j$ com inclusão compacta.*

Demonstração. Inicialmente considere a aplicação inclusão

$$i : (D(A_j), \|\cdot\|_{D(A_j)}) \longrightarrow (\mathcal{H}_j, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_j}),$$

onde $\|U\|_{D(A_j)} = |U|_{\mathcal{H}_j} + |A_j U|_{\mathcal{H}_j}$ para todo $U \in D(A_j)$ e $j = 1, 2$.

Nosso objetivo é mostrar que essa aplicação é compacta, consequentemente, pelo Teorema 2.20 o domínio do operador A_j tem inclusão compacta em $\mathcal{H}_i$, para $j = 1, 2$.

Sendo assim, seja $\{U^n = (\varphi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n, w^n, W^n, \theta^n, \vartheta^n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A_j)$ uma sequência limitada, isto é, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|U^n\|_{D(A_j)} \leq M, \text{ para } j = 1, 2,\ n \in \mathbb{N}.$$

De imediato temos que $\{\varphi^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1$ é limitada. Além disso, somando e subtraindo alguns termos e usando a Desigualdade Triangular podemos obter

$$\begin{aligned}
k\|\varphi^n_{xx}\|_2 &\leq \|k(\varphi^n_x+\psi^n+lw^n)_x\|_2+\|k(\psi^n+lw^n)_x\|_2\\
&\leq \|k(\varphi^n_x+\psi^n+lw^n)_x+lk_0(w^n_x-l\varphi^n)\|_2+\|lk_0(w^n_x-l\varphi^n)\|_2+\|k(\psi^n+lw^n)_x\|_2\\
&\leq \|k(\varphi^n_x+\psi^n+lw^n)_x+lk_0(w^n_x-l\varphi^n)-k_1\theta^n_x\|_2\\
&\quad +\|k_1\theta^n_x\|_2+\|lk_0(w^n_x-l\varphi^n)\|_2+\|k(\psi^n+lw^n)_x\|_2\\
&\leq |A_j(U^n)|_{\mathcal{H}_j}+\|k_1\theta^n_x\|_2+\|lk_0w^n_x\|_2+\|k_0l^2\varphi^n\|_2+\|k\psi^n_x\|_2+\|klw^n_x\|_2\,,
\end{aligned}$$

agora usando a Desigualdade de Poincaré, concluímos que existe uma constante $C>0$ tal que

$$\|\varphi^n_{xx}\|_2\leq C\,.$$

Portanto, $\{\varphi^n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset H^2$ é limitada. Como $H^2\hookrightarrow H^1$ com imersão compacta, segue que existe $\mathbb{N}_1\subset\mathbb{N}$ e $\varphi\in H^1$ tal que

$$\varphi^n\to\varphi \text{ em } H^1 \text{ com } n\in\mathbb{N}_1, n\to+\infty.$$

Sabendo que $\{\varphi^n\}_{n\in\mathbb{N}_1}\subset H^1_0$ o qual é um espaço completo, segue que $\varphi\in H^1_0$.

Analogamente, nos podemos obter $\psi,w\in H^1_0$, para $j=1$, e ainda $\psi,w\in H^1_*$, para $j=2$, tal que

$$(\psi^n,w^n)\to(\psi,w) \text{ em } H^1_0\times H^1_0 \text{ ou } H^1_*\times H^1_* \text{ com } n\in\mathbb{N}_2, n\to+\infty.$$

Para algum outro subconjunto $\mathbb{N}_2\subset\mathbb{N}_1\subset\mathbb{N}$.

Além disso, de imediato temos que $\{\Phi^n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset H^1$ é limitada e sabemos que $H^1\hookrightarrow C(\,\overline{I}\,)$ com imersão compacta. Logo, existe $\mathbb{N}_3\subset\mathbb{N}_2$ e $\Phi\in C(\,\overline{I}\,)$ tal que

$$\Phi^n\to\Phi \quad \text{em } (C(\,\overline{I}\,),\|\cdot\|_\infty) \text{ com } n\in\mathbb{N}_3, n\to+\infty.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|\Phi^n-\Phi\|_2^2 &= \int_0^\ell|\Phi^n(x)-\Phi(x)|\,dx\\
&\leq |I|\|\Phi^n-\Phi\|_\infty \;\to 0 \;\text{ com } n\in\mathbb{N}_3, n\to+\infty.
\end{aligned}$$

Logo, $\Phi^n\to\Phi$ em L^2 e assim $\Phi\in L^2$.

Analogamente, nos obtemos $\Psi,W,\theta,\vartheta\in L^2$, para $j=1$, e ainda $\Psi,W,\theta\in L^2_*$ e $\vartheta\in L^2$, para $j=2$, tal que

$$(\Psi^n,W^n,\theta^n,\vartheta^n)\to(\Psi,W,\theta,\vartheta) \;\text{ em } L^2\times L^2\times L^2\times L^2 \text{ com } n\in\mathbb{N}_4, n\to+\infty,$$

ou ainda

$$(\Psi^n, W^n, \theta^n, \vartheta^n) \to (\Psi, W, \theta, \vartheta) \ \text{ em } L^2_* \times L^2_* \times L^2_* \times L^2 \text{ com } n \in \mathbb{N}_4, n \to +\infty,$$

para algum outro subconjunto $\mathbb{N}_4 \subset \mathbb{N}_3$. Portanto, existe um subconjunto de índices $\mathbb{N}_5 \subset \mathbb{N}_4$ e $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \theta, \vartheta) \in \mathcal{H}_j$ tal que

$$\|U^n - U\|_{\mathcal{H}_j} \ \to 0 \ \text{ com } n \in \mathbb{N}_5, n \to +\infty, \ \text{ e } \ j = 1, 2.$$

Assim, segue que a aplicação inclusão é compacta e fica provado o desejado.

□

Lema 3.22. *Para $j = 1, 2$, temos que $i\mathbb{R} \subset \rho(A_j)$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.21 sabemos que A_j tem domínio imerso compactamente em $\mathcal{H}_j$, para $j = 1, 2$, e pelo Teorema 2.20 o espectro $\sigma(A_j)$ de A_j é formado apenas por autovalores.

Sendo assim, suponha por contradição que exista $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $i\beta = \lambda \in \sigma(A_j)$. Logo, existe $U \neq 0 \in D(A_j)$ tal que $A_j U = \lambda U$, que escrito em termos de suas componentes fica como:

$$\lambda\varphi - \Phi = 0 \tag{3.55}$$

$$\lambda\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + k_1\theta_x = 0 \tag{3.56}$$

$$\lambda\psi - \Psi = 0 \tag{3.57}$$

$$\lambda\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) - k_1\theta + k_2\vartheta_x = 0 \tag{3.58}$$

$$\lambda w - W = 0 \tag{3.59}$$

$$\lambda\rho_1 W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) - k_1 l\theta = 0 \tag{3.60}$$

$$\lambda\rho_3\theta - \alpha\theta_{xx} + k_1(\Phi_x + \Psi + lW) = 0 \tag{3.61}$$

$$\lambda\rho_4\vartheta - \gamma\vartheta_{xx} + k_2\Psi_x = 0 \tag{3.62}$$

Usando as equações (3.55), (3.57) e (3.59) em (3.61), temos que

$$\lambda\rho_3\theta - \alpha\theta_{xx} + k_1\lambda(\varphi_x + \psi + lw) = 0, \tag{3.63}$$

e em (3.62)

$$\lambda\rho_4\vartheta - \gamma\vartheta_{xx} + k_2\lambda\psi_x = 0. \tag{3.64}$$

Note também que,

$$0 = (A_j U - \lambda U, U)_{\mathcal{H}_j} = (A_j U, U)_{\mathcal{H}_j} - \lambda(U, U)_{\mathcal{H}_j}, \tag{3.65}$$

tomando a parte real, notando que $\lambda = i\beta$ e usando (3.18) obtemos

$$0 = Re(A_j U, U)_{\mathcal{H}_j} = -\alpha\|\theta_x\|_2^2 - \gamma\|\vartheta_x\|_2^2. \tag{3.66}$$

Usando a Desigualdade de Poicaré em (3.66) obtemos $\theta, \vartheta = 0$. Daí, de (3.64) temos que $\psi = 0$ e consequentemente $\Psi = 0$.

Restando,

$$\lambda\varphi - \Phi = 0, \tag{3.67}$$

$$\lambda\rho_1\Phi - k_0 l(w_x - l\varphi) = 0, \tag{3.68}$$

$$\lambda w - W = 0, \tag{3.69}$$

$$\lambda\rho_1 W - k_0(w_x - l\varphi)_x = 0. \tag{3.70}$$

Combinando as equações (3.67) e (3.68) segue que

$$w_x = \frac{|\lambda|^2\rho_1}{k_0 l}\varphi + l\varphi. \tag{3.71}$$

E ainda combinando as equações (3.69) e (3.70) temos

$$|\lambda|^2\rho_1 w = k_0(w_x - l\varphi)_x. \tag{3.72}$$

Agora substituindo (3.71) em (3.72), temos que

$$|\lambda|^2\rho_1 w = k_0\left(\frac{|\lambda|^2\rho_1}{k_0 l}\varphi_x\right) \Longrightarrow lw = \varphi_x.$$

Por fim, da equação (3.63) obtemos que $w = 0$ e consequentemente $\varphi_x = 0$. Com isso, pela Desigualdade de Poincaré podemos obter $\varphi, \Phi, W = 0$ e portanto $U = 0$, mas isto contradiz com o fato de $U \neq 0$. Logo, $\lambda = i\beta \in \rho(A_j)$ e portanto $i\mathbb{R} \subset \rho(A_j)$, para $j = 1, 2$. □

Sabendo agora que $i\mathbb{R} \subset \rho(A_j)$, então dados $F \in \mathcal{H}_j$, $\beta \in \mathbb{R}$ temos que a equação resolvente

$$(i\beta I - A_j)^{-1}F = U,$$

esta bem definida, para $j = 1, 2$, isto é,

$$(i\beta I - A_j)U = F, \text{ para } j = 1, 2, \tag{3.73}$$

ou ainda, reescrevendo em termos de suas componentes

$$i\beta\varphi - \Phi = f_1, \tag{3.74}$$

$$i\beta\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + k_1\theta_x = \rho_1 f_2, \tag{3.75}$$

$$i\beta\psi - \Psi = f_3, \tag{3.76}$$

$$i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) - k_1\theta + k_2\vartheta_x = \rho_2 f_4, \tag{3.77}$$

$$i\beta w - W = f_5, \tag{3.78}$$

$$i\beta\rho_1 W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) - k_1 l\theta = \rho_1 f_6, \tag{3.79}$$

$$i\beta\rho_3\theta - \alpha\theta_{xx} + k_1(\Phi_x + \Psi + lW) = \rho_3 f_7, \tag{3.80}$$

$$i\beta\rho_4\vartheta - \gamma\vartheta_{xx} + k_2\Psi_x = \rho_4 f_8, \tag{3.81}$$

onde $U \in D(A_j)$, para $j = 1, 2$. Os resultados adiante serão totalmente concentrados em estudar a equação resolvente acima, afim de obter as estimativas desejadas.

Lema 3.23. *Seja $U \in D(A_j)$, para $j = 1, 2$, uma solução da equação resolvente* (3.73). *Então, sob as condições acima existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|\theta_x\|_2^2, \|\vartheta_x\|_2^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j},\ j = 1, 2. \tag{3.82}$$

Demonstração. Sabendo que, para $j = 1, 2$, A_j é um operador dissipativo com (ver (3.18))

$$Re(A_j U, U)_{\mathcal{H}_j} = -\alpha\|\theta_x\|_2^2 - \gamma\|\vartheta_x\|_2^2,\ \forall U \in D(A_j). \tag{3.83}$$

Então, usando (3.73) em (3.83) e a Desigualdade de Hölder obtemos que

$$\alpha\|\theta_x\|_2^2 + \gamma\|\vartheta_x\|_2^2 = -Re(A_j U, U)_{\mathcal{H}_j} = -Re(i\beta I - F, U)_{\mathcal{H}_j} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_j}\|U\|_{\mathcal{H}_j}.$$

Portanto,

$$\|\theta_x\|_2^2, \|\vartheta_x\|_2^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j},\ j = 1, 2,$$

para alguma constante $C > 0$, concluindo (3.82). □

Note que, até o presente momento os resultados obtidos nesta subseção foram de total independência das condições de fronteira dadas em (3.3) e (3.4). Portanto, vamos utilizar neste momento uma técnica a fim de exibir resultados que continuem a proporcionar essa independência.

A justificativa para utilização dessa ideia, vem do fato de problemas com termos pontuais de fronteira nas estimativas posteriores. Sendo assim, utilizaremos funções cut-off para evitar termos dessa natureza.

Além disso, vale ressaltar que na sequência dos resultados estaremos realizando algumas estimativas para dados iniciais mais regulares. Contudo, devido aos resultados de densidade e unicidade de solução, tal exigência não afeta em momento algum na conclusão do decaimento exponencial e polinomial.

Considere agora $U \in D(A_j)$, para $j = 1, 2$, solução regular de (3.73), uma função $s_0 \in C^2(]0, \ell[)$ e ainda dado um $l_0 \in (0, \ell)$ considere também um $\delta > 0$ tal que

$$\text{supp}\,(s_0) \subset (l_0 - \delta, l_0 + \delta) \subset (0, \ell), \quad 0 \leq s_0(x) \leq 1, \forall\, x \in (0, \ell), \tag{3.84}$$

e ainda,

$$s_0(x) = 1, \forall\, x \in [l_0 - \delta/2, l_0 + \delta/2]. \tag{3.85}$$

A fim de estabelecer um exemplo mais específico de uma função com as propriedades acima, consideremos uma função $s_0 : [0, 6] \to [0, 1]$ definida por:

$$s_0(x) := \begin{cases} 0 & , \text{ se } 0 \leq x \leq 1, \\ \exp\left\{1 + \frac{1}{(x-2)^2 - 1}\right\} & , \text{ se } 1 \leq x \leq 2, \\ 1 & , \text{ se } 2 \leq x \leq 4, \\ \exp\left\{1 + \frac{1}{(x-4)^2 - 1}\right\} & , \text{ se } 4 \leq x \leq 5, \\ 0 & , \text{ se } 5 \leq x \leq 6, \end{cases} \tag{3.86}$$

onde consideramos em particular $\ell := 6$, $l_0 := 3$ e $\delta := 2$. Além disso, consideremos a ideia geométrica da função s_0 na Figura 3.1.

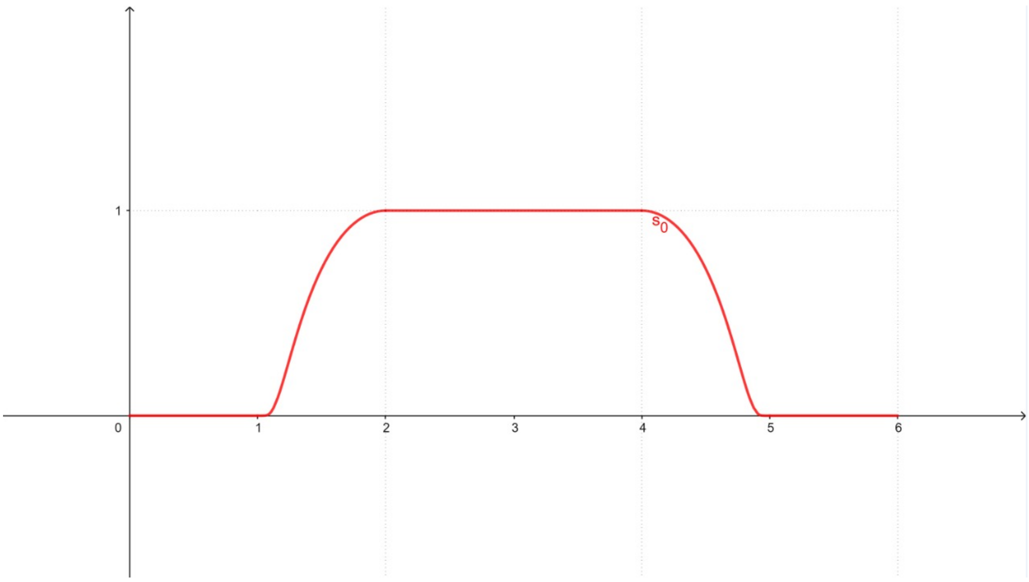

Figura 3.1: Gráfico da função s_0.

Lema 3.24. *Sob as notações acima, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned}\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s_0|\varphi_x+\psi+lw|^2dx &\leq C\|\theta_x\|_2\left(\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s_0|\Phi|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{C}{|\beta|}\|\theta_x\|_2\|U\|_{\mathcal{H}_j}\\ &+\frac{C}{|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j}+\frac{C}{|\beta|}\|F\|^2_{\mathcal{H}_j}.\end{aligned}$$

Demonstração. Pelas equações (3.74), (3.76) e (3.78) temos que

$$\Phi_x+\Psi+lW=i\beta(\varphi_x+\psi+lw)-(f_{1x}+f_3+lf_5),$$

e substituindo em (3.80), obtemos

$$k_1i\beta(\varphi_x+\psi+lw)=\alpha\theta_{xx}-i\beta\rho_3\theta+\rho_3f_7+k_1(f_{1x}+f_3+lf_5),$$

agora multiplicando a igualdade acima por $ks_0\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}$ e integrando em $(0,\ell)$, vem que

$$\begin{aligned}i\beta k_1k\int_0^\ell s_0|\varphi_x+\psi+lw|^2dx &= \alpha k\int_0^\ell s_0\theta_{xx}\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}dx-i\beta\rho_3k\int_0^\ell s_0\theta\overline{\varphi_x}dx\\ &+k\int_0^\ell s_0[k_1(f_{1x}+f_3+lf_5)+\rho_3f_7]\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}dx\\ &-i\beta\rho_3k\int_0^\ell s_0\theta\overline{(\psi+lw)}dx.\end{aligned}$$

Integrando por partes e usando as equações (3.74), (3.76) e (3.78), obtemos que

$$\begin{aligned}i\beta k_1k\int_0^\ell s_0|\varphi_x+\psi+lw|^2dx &= -\alpha k\int_0^\ell s_0\theta_x\overline{(\varphi_x+\psi+lw)_x}dx\\ &-\alpha k\int_0^\ell s_0'\theta_x\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}dx\\ &+k\int_0^\ell s_0[k_1(f_{1x}+f_3+lf_5)+\rho_3f_7]\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}dx\\ &-\rho_3k\int_0^\ell s_0\theta_x\overline{(\Phi+f_1)}dx-\rho_3k\int_0^\ell s_0'\theta\overline{(\Phi+f_1)}dx\\ &+\rho_3k\int_0^\ell s_0\theta\overline{(\Psi+lW+f_3+lf_5)}dx\end{aligned}$$

Usando (3.75) e reagrupando os termos, tem-se

$$\begin{aligned} i\beta k_1 k\int_0^\ell s_0|\varphi_x+\psi+lw|^2dx &= -\alpha\int_0^\ell s_0\theta_x\overline{[i\beta\rho_1\Phi-k_0l(w_x-l\varphi)+k_1\theta_x-f_2]}dx \\ &\quad -\alpha k\int_0^\ell s_0'\theta_x\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}dx \\ &\quad +k\int_0^\ell s_0[k_1(f_{1x}+f_3+lf_5)+\rho_3f_7]\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}dx \\ &\quad -\rho_3k\int_0^\ell s_0\theta_x\overline{(\Phi+f_1)}dx-\rho_3k\int_0^\ell s_0'\theta\overline{(\Phi+f_1)}dx \\ &\quad +\rho_3k\int_0^\ell s_0\theta\overline{(\Psi+lW+f_3+lf_5)}dx. \end{aligned}$$

Novamente, tomando módulo, reagrupando alguns termos, utilizando as hipóteses estabelecidas sobre a função s_0 e as Desigualdades de Hölder e Poincaré,

$$\begin{aligned} \int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s_0|\varphi_x+\psi+lw|^2dx &\leq C\|\theta_x\|_2\bigg(\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s_0|\Phi|^2dx\bigg)^{\frac{1}{2}}+\frac{C}{|\beta|}\|\theta_x\|_2\|U\|_{\mathcal{H}_j} \\ &\quad +\frac{C}{|\beta|}\|\theta_x\|_2\|F\|_{\mathcal{H}_j}+\frac{C}{|\beta|}\|\theta_x\|_2^2+\frac{C}{|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j}. \end{aligned}$$

Agora, usando a Desigualdade de Young e a estimativa do Lema 3.23, temos

$$\begin{aligned} \int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s_0|\varphi_x+\psi+lw|^2dx &= C\|\theta_x\|_2\bigg(\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s_0|\Phi|^2dx\bigg)^{\frac{1}{2}}+\frac{C}{|\beta|}\|\theta_x\|_2\|U\|_{\mathcal{H}_j} \\ &\quad +\frac{C}{|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j}+\frac{C}{|\beta|}\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2, \end{aligned}$$

para alguma constante $C>0$, provando o Lema 3.24. □

Lema 3.25. *Sob as notações acima, existe uma constante $C>0$ tal que*

$$\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s_0|\Phi|^2dx \leq \frac{C}{|\beta|}\|\theta_x\|_2\|U\|_{\mathcal{H}_j}+C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j}+C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2+\frac{C}{|\beta|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2. \tag{3.87}$$

em particular, dado $\varepsilon>0$ e $|\beta|>1$ suficientemente grande existe $C_\varepsilon>0$ tal que

$$\int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}} |\Phi|^2dx \leq \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2+C_\varepsilon\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \tag{3.88}$$

Demonstração. Multiplicando (3.75) por $-s_0\overline{\varphi}$ e integrando em $(0,\ell)$, temos que

$$\begin{aligned} -i\beta\rho_1\int_0^\ell s_0\Phi\overline{\varphi}dx &= -k\int_0^\ell s_0(\varphi_x+\psi+lw)_x\overline{\varphi}dx-k_0l\int_0^\ell s_0(w_x-l\varphi)\overline{\varphi}dx \\ &\quad +\int_0^\ell s_0[k_1\theta_x-f_2]\overline{\varphi}dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes e substituindo (3.74), obtemos que

$$\begin{aligned}\rho_1 \int_0^\ell s_0 \Phi \overline{[\Phi + f_1]} dx &= k \int_0^\ell s_0(\varphi_x + \psi + lw)\overline{\varphi_x} dx + k \int_0^\ell s_0'(\varphi_x + \psi + lw)\overline{\varphi} dx \\ &\quad - k_0 l \int_0^\ell s_0(w_x - l\varphi)\overline{\varphi} dx + \int_0^\ell s_0[k_1\theta_x - f_2]\overline{\varphi} dx,\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\rho_1 \int_0^\ell s_0 |\Phi|^2 dx &= k \int_0^\ell s_0 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx - k \int_0^\ell s_0(\varphi_x + \psi + lw)\overline{(\psi + lw)} dx \\ &\quad + k \int_0^\ell s_0' \varphi_x \overline{\varphi} dx + k \int_0^\ell s_0'(\psi + lw)\overline{\varphi} dx - k_0 l \int_0^\ell s_0 w_x \overline{\varphi} dx \\ &\quad + k_0 l^2 \int_0^\ell s_0 |\varphi|^2 dx + \int_0^\ell s_0[k_1\theta_x - f_2]\overline{\varphi} dx - \rho_1 \int_0^\ell s_0 \Phi \overline{f_1} dx.\end{aligned} \tag{3.89}$$

Note que,

$$k \int_0^\ell s_0' \varphi_x \overline{\varphi} dx = -k \int_0^\ell s_0'' |\varphi|^2 dx - k \int_0^\ell s_0' \varphi \overline{\varphi_x} dx,$$

e tomando a parte real temos

$$Re\left(k \int_0^\ell s_0' \varphi_x \overline{\varphi} dx\right) = -\frac{k}{2} \int_0^\ell s_0'' |\varphi|^2 dx.$$

Novamente, usando as hipóteses sobre s_0 e sabendo que

$$\text{supp } (s_0'') \subset \text{ supp } (s_0') \subset \text{ supp } (s_0),$$

basta tomar a parte real em (3.89), usar as Desigualdades de Hölder e Poincaré e a equação (3.74) para obtermos

$$\begin{aligned}\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s_0 |\Phi|^2 dx &\leq C \int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s_0 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \\ &\quad + C\left(\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s_0 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \|\psi + lw\|_2 \\ &\quad + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \left(\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s_0 |\Phi| dx\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|F\|_{\mathcal{H}_j} \\ &\quad + C\|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2.\end{aligned}$$

Agora, usando a Desigualdade de Young e as equações (3.76)-(3.78) obtemos

$$\begin{aligned}\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s_0|\Phi|^2dx \;&\leq\; C\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s_0|\varphi_x+\psi+lw|^2dx\\ &+\frac{C}{|\beta|}\|\theta_x\|_2\|U\|_{\mathcal{H}_j}+\frac{C}{|\beta|}\|\theta_x\|_2\|F\|_{\mathcal{H}_j}\\ &+C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j}+C\|F\|^2_{\mathcal{H}_j}+\frac{C}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}_j}.\end{aligned}\tag{3.90}$$

Retornando ao Lema 3.24 e substituindo em (3.90), concluímos que

$$\begin{aligned}\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s_0|\Phi|^2dx \;&\leq\; C\|\theta_x\|_2\left(\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s_0|\Phi|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{C}{|\beta|}\|\theta_x\|_2\|F\|_{\mathcal{H}_j}\\ &+\frac{C}{|\beta|}\|\theta_x\|_2\|U\|_{\mathcal{H}_j}+C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j}+C\|F\|^2_{\mathcal{H}_j}+\frac{C}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}_j},\end{aligned}$$

e novamente usando a Desigualdade Young e o Lema 3.23, temos que

$$\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s_0|\Phi|^2dx \;\leq\; \frac{C}{|\beta|}\|\theta_x\|_2\|U\|_{\mathcal{H}_j}+C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j}+C\|F\|^2_{\mathcal{H}_j}+\frac{C}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}_j},$$

para alguma constante $C>0$, mostrando (3.87).

Agora para um caso particular, usando a Desigualdade Young para qualquer $\varepsilon>0$ e o Lema 3.23, temos

$$\int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}} |\Phi|^2dx \;\leq\; \frac{\varepsilon}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}_j}+C_\varepsilon\|F\|^2_{\mathcal{H}_j}+\frac{C}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}_j},$$

tomando $|\beta|>1$ suficientemente grande concluímos que

$$\int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}} |\Phi|^2dx \;\leq\; \varepsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_j}+C_\varepsilon\|F\|^2_{\mathcal{H}_j},$$

para alguma constante $C_\varepsilon>0$, o que prova (3.88) e assim concluindo a prova do Lema 3.25. □

Corolário 3.26. *Sob as notações acima, existe uma constante $C>0$ tal que*

$$\int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}} |\varphi_x+\psi+lw|^2dx \;\leq\; \frac{C}{|\beta|}\|\theta_x\|_2\|U\|_{\mathcal{H}_j}+C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j}+C\|F\|^2_{\mathcal{H}_j}.\tag{3.91}$$

em particular, dado $\varepsilon>0$ existe $C_\varepsilon>0$ tal que

$$\int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}} |\varphi_x+\psi+lw|^2dx \leq \varepsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_j}+C_\varepsilon\|F\|^2_{\mathcal{H}_j}.\tag{3.92}$$

Demonstração. Basta combinar os Lemas 3.24 e 3.25, usar a Desigualdade de Young, além das condições (3.84) e (3.85) sobre a função s_0. Feito isso,

$$\int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}} |\varphi_x+\psi+lw|^2dx \;\; \leq \;\; \frac{\varepsilon}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}_j}+C_\varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j}+C_\varepsilon\|F\|^2_{\mathcal{H}_j},$$

agora usando que $|\beta|>1$ e novamente a Desigualdade de Young obtemos o desejado em (3.92) para alguma constante $C_\varepsilon>0$, concluindo assim o Corolário 3.26.

□

Lema 3.27. *Sob as notações acima, existe uma constante $C>0$ tal que*

$$\begin{aligned}\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s_0|\psi_x|^2dx \;\; &\leq \;\; C\|\vartheta_x\|_2\bigg(\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s_0|\Psi|^2dx\bigg)^{\frac{1}{2}}+\frac{C}{|\beta|}\|\vartheta_x\|_2\|U\|_{\mathcal{H}_j}\\ &\quad+\frac{C}{|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j}+\frac{C}{|\beta|}\|F\|^2_{\mathcal{H}_j}.\end{aligned}$$

Demonstração. Derivando (3.76) e substituindo em (3.81), obtemos

$$i\beta k_2\psi_x=\gamma\vartheta_{xx}-i\beta\rho_4\vartheta+k_2f_{3x}+\rho_4f_8. \tag{3.93}$$

Multiplicando (3.93) por $\frac{b}{k_2}s_0\overline{\psi_x}$ e integrando em $(0,\ell)$, temos

$$\begin{aligned}i\beta b\int_0^\ell s_0|\psi_x|^2dx \;\; &= \;\; \frac{\gamma b}{k_2}\int_0^\ell s_0\vartheta_{xx}\overline{\psi_x}dx-\frac{i\beta\rho_4 b}{k_2}\int_0^\ell s_0\vartheta\overline{\psi_x}dx\\ &\quad+\frac{b}{k_2}\int_0^\ell s_0[k_2f_{3x}+\rho_4f_8]\overline{\psi_x}dx.\end{aligned}$$

Integrando por partes e substituindo (3.77), vem que

$$\begin{aligned}i\beta b\int_0^\ell s_0|\psi_x|^2dx \;\; &= \;\; -\frac{\gamma}{k_2}\int_0^\ell s_0\vartheta_x\overline{[i\beta\rho_2\Psi+k(\varphi_x+\psi+lw)-k_1\theta+k_2\vartheta_x-\rho_2f_4]}dx\\ &\quad-\frac{\rho_4 b}{k_2}\int_0^\ell s_0\vartheta_x\overline{(i\beta\psi)}dx-\frac{\rho_4 b}{k_2}\int_0^\ell s_0'\vartheta\overline{(i\beta\psi)}dx\\ &\quad+\frac{b}{k_2}\int_0^\ell s_0[k_2f_{3x}+\rho_4f_8]\overline{\psi_x}dx-\frac{\gamma b}{k_2}\int_0^\ell s_0'\vartheta_x\overline{\psi_x}dx,\end{aligned}$$

reagrupando alguns termos e usando (3.76), obtemos que

$$\begin{aligned} i\beta b\int_0^\ell s_0|\psi_x|^2dx &= i\beta\gamma\rho_2\int_0^\ell s_0\vartheta_x\overline{\Psi}dx-\frac{\gamma k}{k_2}\int_0^\ell s_0\vartheta_x\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}dx\\ &-\gamma\int_0^\ell s_0|\vartheta_x|^2dx+\frac{\gamma}{k_2}\int_0^\ell s_0\vartheta_x\overline{[k_1\theta+\rho_2f_4]}dx\\ &-\frac{\rho_4 b}{k_2}\int_0^\ell s_0\vartheta_x\overline{(\Psi+f_3)}dx-\frac{\rho_4 b}{k_2}\int_0^\ell s_0'\vartheta\overline{(\Psi+f_3)}dx\\ &+\frac{b}{k_2}\int_0^\ell s_0[k_2f_{3x}+\rho_4f_8]\overline{\psi_x}dx-\frac{\gamma b}{k_2}\int_0^\ell s_0'\vartheta_x\overline{\psi_x}dx, \end{aligned}$$

assim, tomando o módulo e usando as hipóteses sobre a função s_0 e as Desigualdades de Hölder e Poincaré, tem-se

$$\begin{aligned} |\beta|\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta}s_0|\psi_x|^2dx &\leq C|\beta|\|\vartheta_x\|_2\left(\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta}s_0|\Psi|^2dx\right)^{\frac12}+C\|\vartheta_x\|_2\|U\|_{\mathcal{H}_j}+C\|\vartheta_x\|_2^2\\ &+C\|\vartheta_x\|_2\|F\|_{\mathcal{H}_j}+C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j}. \end{aligned}$$

Por fim, usando a desigualdade de Young e o Lema 3.23 concluímos que

$$\begin{aligned} \int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta}s_0|\psi_x|^2dx &\leq C\|\vartheta_x\|_2\left(\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta}s_0|\Psi|^2dx\right)^{\frac12}+\frac{C}{|\beta|}\|\vartheta_x\|_2\|U\|_{\mathcal{H}_j}\\ &+\frac{C}{|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j}+\frac{C}{|\beta|}\|F\|^2_{\mathcal{H}_j}, \end{aligned}$$

como almejado. □

Lema 3.28. *Sob as notações acima, existe uma constante $C>0$ tal que*

$$\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta}s_0|\Psi|^2dx \leq \frac{C}{|\beta|}\|\vartheta_x\|_2\|U\|_{\mathcal{H}_j}+C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j}+C\|F\|^2_{\mathcal{H}_j}+\frac{C}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}_j}. \tag{3.94}$$

em particular, dado $\varepsilon>0$ existe $C_\varepsilon>0$ tal que

$$\int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}}|\Psi|^2dx\leq\varepsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_j}+C_\varepsilon\|F\|^2_{\mathcal{H}_j}. \tag{3.95}$$

Demonstração. Multiplicando a equação (3.77) por $-s_0\overline{\psi}$ e integrando em $(0,\ell)$, temos

$$\begin{aligned} \rho_2\int_0^\ell s_0\Psi\overline{(i\beta\psi)}dx &= -b\int_0^\ell s_0\psi_{xx}\overline{\psi}dx+k\int_0^\ell s_0(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\psi}dx\\ &+k_2\int_0^\ell s_0\vartheta_x\overline{\psi}dx-\int_0^\ell s_0[k_1\theta+\rho_2f_4]\overline{\psi}dx. \end{aligned}$$

Substituindo a equação (3.76), reagrupando alguns termos e integrando por partes temos

$$\begin{aligned}\rho_2\int_0^\ell s_0|\Psi|^2dx &= b\int_0^\ell s_0|\psi_x|^2dx + b\int_0^\ell s_0'\psi_x\overline{\psi}dx + k\int_0^\ell s_0(\psi+lw)\overline{\psi}dx\\ &\quad - k\int_0^\ell s_0\varphi\overline{\psi_x}dx - k\int_0^\ell s_0'\varphi\overline{\psi}dx + k_2\int_0^\ell s_0\vartheta_x\overline{\psi}dx\\ &\quad - \int_0^\ell s_0[k_1\theta+\rho_2 f_4]\overline{\psi}dx - \rho_2\int_0^\ell s_0\Psi\overline{f_3}dx. \end{aligned} \tag{3.96}$$

Note que, integrando por partes

$$b\int_0^\ell s_0'\psi_x\overline{\psi}dx = -\,b\int_0^\ell s_0''|\psi|^2dx - b\int_0^\ell s_0'\psi\overline{\psi_x}dx,$$

e tomando a parte real temos

$$Re\bigg(b\int_0^\ell s_0'\psi_x\overline{\psi}dx\bigg) = -\frac{b}{2}\int_0^\ell s_0''|\psi|^2dx.$$

Logo, tomando a parte real de (3.96), usando as hipóteses sobre s_0, equação (3.76) e as Desigualdades de Hölder e Poincaré obtemos

$$\begin{aligned}\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s_0|\Psi|^2dx &\leq C\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s_0|\psi_x|^2dx + C\|\varphi\|_2\bigg(\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s_0|\psi_x|^2dx\bigg)^{\frac{1}{2}}\\ &\quad + \frac{C}{|\beta|}\|\vartheta_x\|_2\|U\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|}\|\vartheta_x\|_2\|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}_j}\\ &\quad + \frac{C}{|\beta|^2}\|F\|^2_{\mathcal{H}_j} + C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j}, \end{aligned} \tag{3.97}$$

para alguma constante $C > 0$.

Usando a Desigualdade de Young, a equação (3.76) e a estimativa dos Lemas 3.27, 3.23 em (3.97) temos

$$\begin{aligned}\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s_0|\Psi|^2dx &\leq \frac{C}{|\beta|}\|\vartheta_x\|_2\|U\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}_j}\\ &\quad + \frac{C}{|\beta|^2}\|F\|^2_{\mathcal{H}_j} + C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j}, \end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$, provando (3.94).

Por fim, dado $\varepsilon > 0$ temos pela Desigualdade de Young, e pelas hipóteses sobre s_0 e também o Lema 3.23 que

$$\int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}} |\Psi|^2dx \leq \frac{\varepsilon}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}_j} + C_\varepsilon\|F\|^2_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}_j},$$

e para $|\beta| > 1$ suficientemente grande concluímos que

$$\int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}} |\Psi|^2 dx \;\leq\; \varepsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_j} + C_\varepsilon\|F\|^2_{\mathcal{H}_j},$$

para alguma constante $C_\varepsilon > 0$, provando (3.95) como desejado. $\square$

Corolário 3.29. *Sob as notações acima, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}} |\psi_x|^2 dx \;\leq\; \frac{C}{|\beta|}\|\vartheta_x\|_2\|U\|_{\mathcal{H}_j} + C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j} + C\|F\|^2_{\mathcal{H}_j}.$$

Demonstração. Basta combinar os Lemas 3.27 e 3.28. $\square$

Observação 8. Com respeito aos termos de fronteira nas integrações por partes, observe que a utilização da função s_0 foi essencial para evitarmos termos pontuais nas estimativas. E ainda, podemos concluir cada resultado independente das condições de fronteira estabelelidas inicialmente. Com relação as constantes C e C_ε, notemos também que as mesmas são, respectivamente, constantes universais com C_ε dependendo de $\varepsilon > 0$.

Novamente vamos considerar $U \in D(A_j)$, para $j = 1, 2$, solução regular de (3.73) e uma nova função $s_1 \in C^2(]0, \ell[)$ satisfazendo

$$\operatorname{supp}(s_1) \subset (l_0 - \delta/2, l_0 + \delta/2), \quad 0 \leq s_1(x) \leq 1 \;\forall\, x \in (0, \ell),$$

e ainda,

$$s_1(x) = 1, \;\forall\, x \in [l_0 - \delta/3, l_0 + \delta/3].$$

Novamente, vamos exibir um exemplo mais específico de uma função com as propriedades acima, consideremos uma função $s_1 : [0, 6] \to [0, 1]$ definida por:

$$s_1(x) := \begin{cases} 0 & , \quad \text{se } 0 \leq x \leq 2, \\ \exp\left\{1 + \frac{1}{(3x-7)^2-1}\right\} & , \quad \text{se } 2 \leq x \leq \frac{7}{3}, \\ 1 & , \quad \text{se } \frac{7}{3} \leq x \leq \frac{11}{3}, \\ \exp\left\{1 + \frac{1}{(3x-11)^2-1}\right\} & , \quad \text{se } \frac{11}{3} \leq x \leq 4, \\ 0 & , \quad \text{se } 4 \leq x \leq 6, \end{cases} \tag{3.98}$$

onde lembramos que assumimos em particular $\ell := 6, l_0 := 3$ e $\delta := 2$. Além disso, consideremos também a ideia geométrica da função s_1 na Figura 3.2.

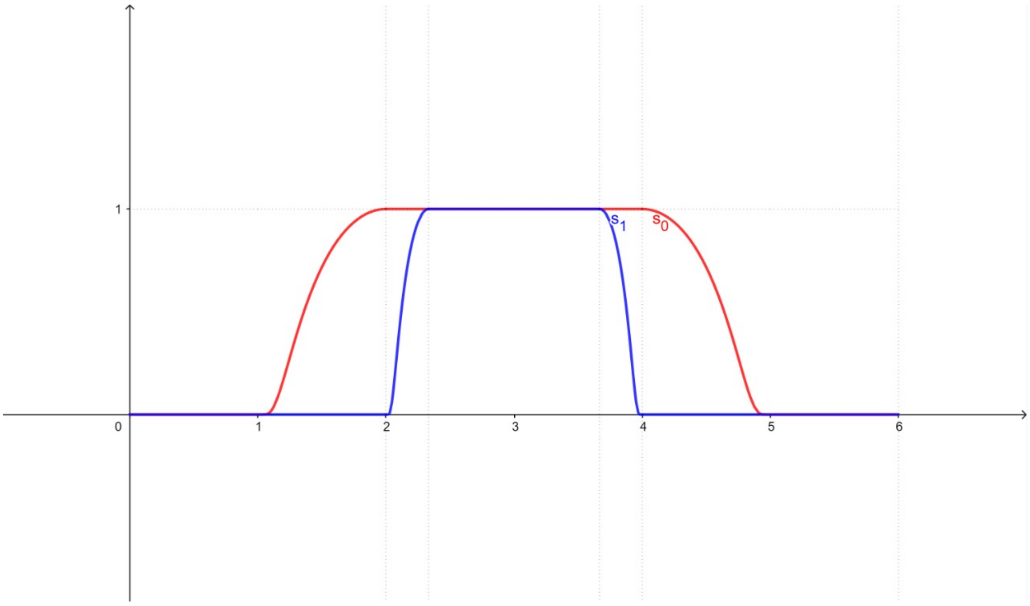

Figura 3.2: Gráfico da função s_1.

Lema 3.30. *Sob as notações acima, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned}\int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s_1|w_x - l\varphi|^2dx + \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s_1|W|^2dx \quad &\leq \quad C|\beta||\chi| \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s_1|\varphi_x + \psi + lw||W|dx \\ &+ C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\left(\int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi + lw|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ C\int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\Psi|^2dx + C\|\theta_x\|_2\|U\|_{\mathcal{H}_j} \qquad (3.99) \\ &+ C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j} + C\|F\|^2_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}_j},\end{aligned}$$

onde lembramos que χ é dado em (3.52).

Demonstração. Multiplicando a equação (3.79) por $\left(\frac{lk_0}{\rho_1}s_1\overline{w}\right)$ e integrando em $(0, \ell)$, temos que

$$\begin{aligned}-\frac{k_0^2 l}{\rho_1}\int_0^\ell s_1(w_x - l\varphi)_x\overline{w}dx \quad &= \quad -i\beta k_0 l\int_0^\ell s_1W\overline{w}dx - \frac{kl^2k_0}{\rho_1}\int_0^\ell s_1(\varphi_x + \psi + lw)\overline{w}dx \\ &+ \frac{k_0 l}{\rho_1}\int_0^\ell s_1[lk_1\theta + \rho_1 f_6]\overline{w}dx.\end{aligned}$$

Integrando por partes e ajustando os termos convenientemente, temos

$$\begin{aligned}\frac{k_0^2 l}{\rho_1}\int_0^\ell s_1|w_x-l\varphi|^2dx &= -i\beta k_0 l\int_0^\ell s_1 W\overline{w}dx-\frac{kl^2k_0}{\rho_1}\int_0^\ell s_1(\varphi_x+\psi+lw)\overline{w}dx\\ &+\frac{k_0 l}{\rho_1}\int_0^\ell s_1[lk_1\theta+\rho_1 f_6]\overline{w}dx-\frac{k_0^2 l}{\rho_1}\int_0^\ell s_1'(w_x-l\varphi)\overline{w}dx\\ &-\frac{k_0^2 l}{\rho_1}\int_0^\ell s_1(w_x-l\varphi)\overline{(l\varphi)}dx,\end{aligned}$$

ou ainda, ajustando alguns termos novamente, segue que

$$\begin{aligned}\frac{k_0^2 l}{\rho_1}\int_0^\ell s_1|w_x-l\varphi|^2dx &= \underbrace{-i\beta k_0 l\int_0^\ell s_1 W\overline{w}dx}_{:=J_2}-\frac{kl^2k_0}{\rho_1}\int_0^\ell s_1(\varphi_x+\psi+lw)\overline{w}dx\\ &+\frac{k_0 l}{\rho_1}\int_0^\ell s_1[lk_1\theta+\rho_1 f_6]\overline{w}dx-\frac{k_0^2 l}{\rho_1}\int_0^\ell s_1' w_x\overline{w}dx\\ &+\frac{k_0^2 l^2}{\rho_1}\int_0^\ell s_1'\varphi\overline{w}dx\underbrace{-\frac{k_0^2 l^2}{\rho_1}\int_0^\ell s_1 w_x\overline{\varphi}dx}_{:=J_1}\\ &+\frac{k_0^2 l^3}{\rho_1}\int_0^\ell s_1|\varphi|^2dx. \qquad (3.100)\end{aligned}$$

Agora, integrando por partes note que

$$J_1=-\frac{k_0^2 l^2}{\rho_1}\int_0^\ell s_1 w_x\overline{\varphi}dx=\frac{k_0^2 l^2}{\rho_1}\int_0^\ell s_1' w\overline{\varphi}dx+\frac{k_0^2 l^2}{\rho_1}\int_0^\ell s_1 w\overline{\varphi_x}dx,$$

de onde, vem que

$$\begin{aligned}J_1 &= \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1}\int_0^\ell s_1' w\overline{\varphi}dx+\frac{k_0^2 l^2}{\rho_1}\int_0^\ell s_1 w\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}dx\\ &-\frac{k_0^2 l^2}{\rho_1}\int_0^\ell s_1 w\overline{(\psi+lw)}dx. \qquad (3.101)\end{aligned}$$

Agora substituindo a equação (3.78) em J_2, obtemos

$$\begin{aligned}J_2 &= k_0 l\int_0^\ell s_1 W\overline{(W+f_5)}dx\\ &= k_0 l\int_0^\ell s_1 W\overline{W}dx+k_0 l\int_0^\ell s_1 W\overline{f_5}dx\\ &= k_0 l\int_0^\ell s_1(i\beta w-f_5)\overline{W}dx+k_0 l\int_0^\ell s_1 W\overline{f_5}dx\\ &= i\beta k_0 l\int_0^\ell s_1 w\overline{W}dx-k_0 l\int_0^\ell s_1 f_5\overline{W}dx+k_0 l\int_0^\ell s_1 W\overline{f_5}dx,\end{aligned}$$

e novamente ajustando alguns termos de maneira conveniente, chegamos a

$$\begin{aligned} J_2 &= i\beta k_0 \int_0^\ell s_1(\varphi_x + \psi + lw)\overline{W}dx - i\beta k_0 \int_0^\ell s_1(\varphi_x + \psi)\overline{W}dx \\ &- k_0 l \int_0^\ell s_1 f_5 \overline{W}dx + k_0 l \int_0^\ell s_1 W \overline{f_5}dx. \end{aligned} \tag{3.102}$$

Além disso, substituindo as equações (3.74) e (3.76) em (3.102), podemos reescrever o mesmo como

$$\begin{aligned} J_2 &= i\beta k_0 \int_0^\ell s_1(\varphi_x + \psi + lw)\overline{W}dx - k_0 \int_0^\ell s_1 \Phi_x \overline{W}dx \\ &- k_0 \int_0^\ell s_1 \Psi \overline{W}dx - k_0 \int_0^\ell s_1(f_{1x} + f_3)\overline{W}dx \\ &- k_0 l \int_0^L s_1 f_5 \overline{W}dx + k_0 l \int_0^\ell s_1 W \overline{f_5}dx. \end{aligned} \tag{3.103}$$

Logo, substituindo (3.101) e (3.103) em (3.100) obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^\ell s_1 |w_x - l\varphi|^2 dx &= i\beta k_0 \int_0^\ell s_1(\varphi_x + \psi + lw)\overline{W}dx - k_0 \int_0^\ell s_1 \Phi_x \overline{W}dx \\ &- k_0 \int_0^\ell s_1 \Psi \overline{W}dx + I_1, \end{aligned} \tag{3.104}$$

onde

$$\begin{aligned} I_1 := &-\frac{kl^2 k_0}{\rho_1} \int_0^\ell s_1(\varphi_x + \psi + lw)\overline{w}dx + \frac{k_0 l}{\rho_1} \int_0^\ell s_1[lk_1\theta + \rho_1 f_6]\overline{w}dx \\ &- \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^\ell s_1' w_x \overline{w}dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^\ell s_1' \varphi \overline{w}dx + \frac{k_0^2 l^3}{\rho_1} \int_0^\ell s_1 |\varphi|^2 dx \\ &+ \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^\ell s_1' w \overline{\varphi}dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^\ell s_1 w \overline{(\varphi_x + \psi + lw)}dx \\ &- \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^\ell s_1 w \overline{(\psi + lw)}dx - k_0 \int_0^\ell s_1(f_{1x} + f_3)\overline{W}dx \\ &- k_0 l \int_0^\ell s_1 f_5 \overline{W}dx + k_0 l \int_0^\ell s_1 W \overline{f_5}dx. \end{aligned} \tag{3.105}$$

Por outro lado, derivando a equação (3.75), multiplicando por $\frac{k_0}{\rho_1} s_1 \overline{w}$ e integrando em $(0, \ell)$, temos

$$\begin{aligned} -\frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^\ell s_1(w_x - l\varphi)_x \overline{w}dx &= -i\beta k_0 \int_0^\ell s_1 \Phi_x \overline{w}dx + \frac{kk_0}{\rho_1} \int_0^\ell s_1(\varphi_x + \psi + lw)_{xx}\overline{w}dx \\ &- \frac{k_1 k_0}{\rho_1} \int_0^\ell s_1 \theta_{xx} \overline{w}dx + k_0 \int_0^\ell s_1 f_{4x} \overline{w}dx. \end{aligned}$$

Substituindo as equações (3.79), (3.78) e integrando por partes, obtemos

$$
\begin{aligned}
-\frac{k_0 l}{\rho_1}\int_0^\ell s_1[i\beta\rho_1 W]\overline{w}dx &= k_0\int_0^\ell s_1\Phi_x\overline{(W+f_5)}dx\\
&- \frac{kk_0}{\rho_1}\int_0^\ell s_1(\varphi_x+\psi+lw)_x\overline{w_x}dx\\
&- \frac{kk_0}{\rho_1}\int_0^\ell s_1'(\varphi_x+\psi+lw)_x\overline{w}dx\\
&+ \frac{k_1k_0}{\rho_1}\int_0^\ell s_1\theta_x\overline{w_x}dx + \frac{k_1k_0}{\rho_1}\int_0^\ell s_1'\theta_x\overline{w}dx\\
&- k_0\int_0^\ell s_1 f_4\overline{w_x}dx - k_0\int_0^\ell s_1' f_4\overline{w}dx\\
&+ \frac{k_0 l}{\rho_1}\int_0^\ell s_1[lk(\varphi_x+\psi+lw) - lk_1\theta - \rho_1 f_6]\overline{w}dx,
\end{aligned}
$$

e novamente substituindo a equação (3.78) e usando integração por partes,

$$
k_0 l\int_0^\ell s_1 W\overline{(W+f_5)}dx = k_0\int_0^\ell s_1\Phi_x\overline{W}dx + \frac{kk_0}{\rho_1}\int_0^\ell s_1(\varphi_x+\psi+lw)\overline{(w_{xx})}dx + I_2,
$$

onde

$$
\begin{aligned}
I_2 := {} & k_0\int_0^\ell s_1\Phi_x\overline{f_5}dx + \frac{kk_0}{\rho_1}\int_0^\ell s_1'(\varphi_x+\psi+lw)\overline{w_x}dx\\
&+ \frac{kk_0}{\rho_1}\int_0^\ell s_1'(\varphi_x+\psi+lw)\overline{w_x}dx + \frac{kk_0}{\rho_1}\int_0^L s_1''(\varphi_x+\psi+lw)\overline{w}dx\\
&+ \frac{k_1k_0}{\rho_1}\int_0^\ell s_1\theta_x\overline{w_x}dx + \frac{k_1k_0}{\rho_1}\int_0^\ell s_1'\theta_x\overline{w}dx - k_0\int_0^\ell s_1 f_4\overline{w_x}dx\\
&- k_0\int_0^\ell s_1' f_4\overline{w}dx + \frac{k_0 l}{\rho_1}\int_0^\ell s_1[lk(\varphi_x+\psi+lw) - lk_1\theta - \rho_1 f_6]\overline{w}dx,
\end{aligned}
\tag{3.106}
$$

ou ainda, ajustando alguns termos vem que

$$
\begin{aligned}
k_0 l\int_0^\ell s_1|W|^2dx &= k_0\int_0^\ell s_1\Phi_x\overline{W}dx + \frac{k}{\rho_1}\int_0^\ell s_1(\varphi_x+\psi+lw)\overline{k_0(w_x-l\varphi)_x}dx\\
&+ \frac{kk_0}{\rho_1}\int_0^\ell s_1(\varphi_x+\psi+lw)\overline{l\varphi_x}dx - k_0 l\int_0^\ell s_1 W\overline{f_5}dx + I_2.
\end{aligned}
$$

Substituindo a equação (3.79) e reagrupando os termos adequadamente temos que

$$
\begin{aligned}
k_0 l \int_0^\ell s_1 |W|^2 dx &= k_0 \int_0^\ell s_1 \Phi_x \overline{W} dx - i\beta k \int_0^\ell s_1 (\varphi_x + \psi + lw)\overline{W} dx \\
&+ \frac{k}{\rho_1} \int_0^\ell s_1 (\varphi_x + \psi + lw)\overline{[lk(\varphi_x + \psi + lw) - lk_1\theta - \rho_1 f_6]} dx \\
&+ \frac{kk_0 l}{\rho_1} \int_0^\ell s_1 (\varphi_x + \psi + lw)\overline{\varphi_x} dx \\
&- k_0 l \int_0^\ell s_1 W \overline{f_5} dx + I_2. \qquad (3.107)
\end{aligned}
$$

Logo, somando (3.104) com (3.107), obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^\ell s_1 |w_x - l\varphi|^2 dx + k_0 l \int_0^\ell s_1 |W|^2 dx &= (i\beta k_0 - i\beta k) \int_0^\ell s_1 (\varphi_x + \psi + lw)\overline{W} dx \\
&- k_0 \int_0^\ell s_1 \Psi \overline{W} dx + I_3, \qquad (3.108)
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
I_3 &:= \frac{k}{\rho_1} \int_0^\ell s_1 (\varphi_x + \psi + lw)\overline{[lk(\varphi_x + \psi + lw) - lk_1\theta - \rho_1 f_6]} dx \\
&+ \frac{kk_0}{\rho_1} \int_0^\ell s_1 (\varphi_x + \psi + lw)\overline{l\varphi_x} dx - k_0 l \int_0^\ell s_1 W \overline{f_5} dx + I_1 + I_2,
\end{aligned}
$$

com I_1 e I_2 dados em (3.105) e (3.106), respectivamente.

Note ainda, que integrando por partes tem-se

$$
-\frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^\ell s_1' w_x \overline{w} dx = \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^\ell s_1'' |w|^2 dx + \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^\ell s_1' w \overline{w_x} dx,
$$

e tomando a parte real temos

$$
Re\left(-\frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^\ell s_1' w_x \overline{w} dx \right) = \frac{k_0^2 l}{2\rho_1} \int_0^\ell s_0'' |w|^2 dx. \qquad (3.109)
$$

Usando a estimativa (3.109), as hipóteses sobre s_1 e as Desigualdades de Hölder e Poincaré, ao tomar a parte real de I_3, obtemos que

$$
\begin{aligned}
|ReI_3| &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_j} \left(\int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
& C\|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C\|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2, \qquad (3.110)
\end{aligned}
$$

para alguma constante $C > 0$. Portanto, tomando a parte real usando a Desigualdade Young, podemos estimar (3.108) como

$$\begin{aligned}\int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s_1|w_x-l\varphi|^2dx+\int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s_1|W|^2dx &\leq C|\beta||k_0-k|\int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s_1|\varphi_x+\psi+lw||W|dx\\ &\quad +C\int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2}|\Psi|^2dx+|ReI_3|,\end{aligned}$$

para alguma outra constante $C>0$ e usando (3.110), concluímos a prova de (3.99). □

Corolário 3.31. *Considere as hipóteses anteriores. Então, dado $\varepsilon>0$ temos que:*

(i) Se $\chi\neq 0$, então existe $C_\varepsilon>0$ tal que

$$\int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3}|w_x-l\varphi|^2dx+\int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3}|W|^2dx \leq \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2+C_\varepsilon|\beta|^4\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (3.111)$$

(ii) Se $\chi=0$, então existe $C_\varepsilon>0$ tal que

$$\int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3}|w_x-l\varphi|^2dx+\int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3}|W|^2dx \leq \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2+C_\varepsilon\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (3.112)$$

Demonstração. Usando a Desigualdade de Young no Lema 3.30 e as hipóteses sobre s_1, temos que

$$\begin{aligned}\int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3}|w_x-l\varphi|^2dx+\int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3}|W|^2dx &\leq C|\beta|^2|\chi|^2\int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3}|\varphi_x+\psi+lw|^2dx\\ &\quad +C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\left(\int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2}|\varphi_x+\psi+lw|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\quad +C\int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2}|\Psi|^2dx+C\|\theta_x\|_2\|U\|_{\mathcal{H}_j}\\ &\quad +C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j}+C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2+\frac{C}{|\beta|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2,\end{aligned}$$

para alguma outra constante $C>0$. Logo, vem que:

(i) Se $\chi\neq 0$ e $|\beta|>1$, usando o Corolário 3.26 inequação (3.91), a Desigualdade de Young com $\varepsilon>0$, Lema 3.28 desigualdade (3.95) e o Lema 3.23 obtemos que

$$\begin{aligned}\int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3}|w_x-l\varphi|^2dx+\int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3}|W|^2dx &\leq \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2+C_\varepsilon\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2\\ &\quad +C|\beta|^2\int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3}|\varphi_x+\psi+lw|^2dx.\end{aligned}$$

Por fim, usando a estimativa do Corolário 3.26 desigualdade (3.91), concluímos que

$$\int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3} |w_x - l\varphi|^2 dx + \int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3} |W|^2 dx \quad \leq \quad \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon |\beta|^4 \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2,$$

para alguma constante $C_\varepsilon > 0$.

(ii) Se $\chi = 0$, tomando $|\beta| > 1$ suficientemente grande, usando a Desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$, Lema 3.28 desigualdade (3.95) e o Lema 3.23 temos que

$$\begin{aligned}\int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3} |w_x - l\varphi|^2 dx + \int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3} |W|^2 dx \quad &\leq \quad \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 \\ &\quad + C_\varepsilon \int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3} |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx,\end{aligned}$$

portanto, usando novamente o Corolário 3.26 desigualdade (3.91) vem que

$$\int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3} |w_x - l\varphi|^2 dx + \int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3} |W|^2 dx \quad \leq \quad \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2,$$

para alguma constante $C_\varepsilon > 0$.

□

Observação 9. Novamente vale ressaltar que a função de corte s_1 foi utilizada com objetivo de evitar termos pontuais a cada integração por partes. E com isso, evitar a dependência dos termos de fronteira.

3.2.2 Conclusão da prova do Teorema 3.19: Decaimento Exponencial

A conclusão se baseia em verificar as condições do Teorema 2.25. Com efeito, pelo Lema 3.22 a condição (2.4) se verifica. Agora, dado $\varepsilon > 0$ e $\chi = 0$, combinando o Corolário 3.26 desigualdade (3.91), Corolário 3.29, Corolário 3.31 item (ii), Lema 3.25 desigualdade (3.88), Lema 3.28 desigualdade (3.95) e ainda a Desigualdade de Young temos que existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\mathcal{V}_0 \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2, \text{ para } j = 1, 2, \tag{3.113}$$

onde

$$\mathcal{V}_0 := \int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3} \left(|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |\Phi|^2 + |\psi_x|^2 + |\Psi|^2 + |w_x - l\varphi|^2 + |W|^2 \right) dx.$$

Neste momento, vamos utilizar o resultado de extensão do Capítulo 5 para concluir o desejado. Desta forma, vamos nos conscientizar das hipóteses a serem contempladas. Primeiramente lembremos que o vetor $(\varphi,\Phi,\psi,\Psi,w,W,\theta,\vartheta)\in D(A_j)$, para $j=1,2$, é solução da equação resolvente (3.73). Agora, consideremos um vetor $G:=(g_1,g_2,g_3,g_4,g_5,g_6)$ tal que

$$
\begin{aligned}
g_1 &:= f_1,\quad g_2 := \rho_1 f_2 - k_1\theta_x,\\
g_3 &:= f_3,\quad g_4 := \rho_2 f_4 + k_1\theta - k_2\vartheta_x,\\
g_5 &:= f_5,\quad g_6 := \rho_1 f_6 + k_1 l\theta.
\end{aligned}
$$

Portanto, sob estas considerações o vetor $(\varphi,\Phi,\psi,\Psi,w,W):=V$ é solução do sistema (3.74)-(3.79), o qual corresponde ao problema (5.1)-(5.6) estabelecido no Capítulo 5.

Além disso, como $(l_0-\delta/3, l_0+\delta/3)\subset(0,\ell)$, basta considerar $b_1:=l_0-\delta/3$ e $b_2:=l_0+\delta/3$, e ainda, considerar o parâmetro Λ em (5.44) tal que

$$\Lambda := \varepsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_j} + C_\varepsilon\|F\|^2_{\mathcal{H}_j},\ \text{para } j=1,2.$$

Agora, basta aplicar o Corolário 5.2 do Capítulo 5, uma vez que vale (3.113). Desta forma, existe uma constante $C>0$ tal que

$$\|V\|^2_{0,\ell} \leq C\varepsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_j} + CC_\varepsilon\|F\|^2_{\mathcal{H}_j} + C\|G\|^2_{0,\ell},\ \text{para } j=1,2, \tag{3.114}$$

com $\|\cdot\|_{0,\ell}$ definido em (5.7).

Usando (3.114), o Lema 3.23 e a Desigualdade de Young temos que

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}_j} \leq C\varepsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_j} + C_\varepsilon\|F\|^2_{\mathcal{H}_j},\ \text{para } j=1,2.$$

Portanto, tomando $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno , concluímos

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j} = \|(i\beta I_d - A)^{-1}F\|_{\mathcal{H}_j} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_j},\ \text{para } j=1,2.$$

Logo, para $|\beta|\to\infty$ vale a condição (2.5) do Teorema 2.25, provando o Teorema 3.19, consequentemente, o sistema (3.1)-(3.4) é exponencialmente estável para $\chi=0$. □

3.2.3 Conclusão da prova do Teorema 3.20: Decaimento Polinomial

Pelo Lema 3.22 temos que $i\mathbb{R}\subset\rho(A_j)$, para $j=1,2$. Sendo assim, dado $\varepsilon>0$ e $\chi\neq 0$ combinando o Corolário 3.26 desigualdade (3.91), Corolário 3.29, Corolário 3.31 item (i), Lema 3.25 desigualdade (3.88), Lema 3.28 desigualdade (3.95) e ainda usando a Desigualdade de Young temos que

$$\mathcal{V}_0 \leq \varepsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_j} + C_\varepsilon|\beta|^4\|F\|^2_{\mathcal{H}_j},$$

onde

$$\mathcal{V}_0 := \int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3} \left(|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |\Phi|^2 + |\psi_x|^2 + |\Psi|^2 + |w_x - l\varphi|^2 + |W|^2\right) dx,$$

para alguma constante $C_\varepsilon > 0$ e $|\beta| > 1$ suficientemente grande. Novamente utilizaremos o resultado de extensão do Capítulo 5, para isso vamos considerar novamente $b_1 = l_0 - \delta/3$ e $b_2 = l_0 + \delta/3$, e ainda, note que $V = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ é solução do sistema (3.74)-(3.79) o qual corresponde ao problema (5.1)-(5.6) estabelecido no Capítulo 5 com $G := (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6)$ tal que

$$\begin{aligned} &g_1 := f_1, \quad g_2 := \rho_1 f_2 - k_1\theta_x, \\ &g_3 := f_3, \quad g_4 := \rho_2 f_4 + k_1\theta - k_2\vartheta_x, \\ &g_5 := f_5, \quad g_6 := \rho_1 f_6 + k_1 l\theta. \end{aligned}$$

Sendo assim, pelo Corolário 5.2 existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|V\|_{0,\ell}^2 \leq C\varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + CC_\varepsilon|\beta|^4\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C\|G\|_{0,\ell}^2, \text{ para } j = 1, 2,$$

com $\|\cdot\|_{0,\ell}$ definido em (5.7).

Agora, usando o Lema 3.23 e a Desigualdade de Young obtemos que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 \leq C\varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon|\beta|^4\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2, \text{ para } j = 1, 2.$$

Tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno temos que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j} = \|(i\beta I_d - A_j)^{-1}F\|_{\mathcal{H}_j} \leq C|\beta|^2\|F\|_{\mathcal{H}_j}, \text{ para } j = 1, 2.$$

Logo,

$$\|(i\beta I_d - A_j)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_j)} = O(|\beta|^2), \text{ para } |\beta| \to \infty, \ j = 1, 2..$$

Pelo Teorema 2.27 temos que

$$\|S_j(t)A_j^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_j)} = O(t^{-1/2}), \text{ para } t \to \infty, \ j = 1, 2.$$

Portanto, usando a definição 2.26 podemos garantir que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|S_j(t)A_j^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_j)} \leq Ct^{-1/2}, \ t \to \infty, \ j = 1, 2.$$

Então,

$$\|S_j(t)A_j^{-1}F\|_{\mathcal{H}_j} \leq Ct^{-1/2}\|F\|_{\mathcal{H}_j},\ \forall F \in \mathcal{H}_j,\ t \to \infty,\ j = 1, 2.$$

Sabendo que, dado $U_0 \in D(A_j)$ temos $A_j^{-1}F = U_0$ e que $\|A_j(U_0)\|_{\mathcal{H}_j} \leq \|U_0\|_{D(A_j)}$, para $j = 1, 2$, concluímos que

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_j} = \|S_j(t)U_0\|_{\mathcal{H}_j} \leq Ct^{-1/2}\|U_0\|_{D(A_j)},\ t \to \infty,\ j = 1, 2,$$

provando o Teorema 3.20. Logo, o sistema (3.1)-(3.4) é polinomialmente estável para $\chi \neq 0$ e $U_0 \in D(A_j)$. □

3.3 Falta de decaimento exponencial

Teorema 3.32. *Seja $U_0 \in D(A_2)$ e suponhamos que $\chi \neq 0$. Então, o semigrupo associado ao sistema* (3.1)-(3.4) *não é exponencialmente estável.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.25 basta mostrar que (2.25) não se verifica. Com efeito, vamos mostrar que dada uma sequência $F_n \in \mathcal{H}_2$, com $\|F_n\|_{\mathcal{H}_2} \leq 1$, existe uma sequência $\beta_n \in \mathbb{R}$ e $U_n \in D(A_2)$ tal que

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = \|(i\beta_n I - A_2)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_2} \longrightarrow +\infty,\ \text{quando } |\beta_n| \longrightarrow +\infty. \tag{3.115}$$

Sendo assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ considere de maneira particular a sequência limitada

$$F_n = \left(0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{\rho_1}\cos(nx), 0, 0\right) \in \mathcal{H}_2,\ \forall x \in (0, \pi),\ \ell := \pi. \tag{3.116}$$

Observação 10. A fim de mostrarmos um contraexemplo para a segunda condição do Teorema 2.25, vamos considerar sem perda de generalidade $\ell = \pi$. Além disso, basta que $\|F_n\|_{\mathcal{H}_2} \leq C$ e daí $\frac{\|F_n\|_{\mathcal{H}_2}}{C} \leq 1$, ou seja, basta que F_n seja uma sequência limitada e consideramos $F_n' := \frac{\|F_n\|_{\mathcal{H}_2}}{C}$.

Para F_n dada acima, como $i\mathbb{R} \subset \rho(A_2)$, consideremos a equação resolvente

$$i\beta_n U_n - A_2 U_n = F_n, \tag{3.117}$$

onde $\beta_n \in \mathbb{R}$ e $U_n = (\varphi_n, \Phi_n, \psi_n, \Psi_n, w_n, W_n, \theta_n, \vartheta_n) \in D(A_2)$ são sequências a determinar. Para facilitar a notação, vamos considerar $\beta = \beta_n$, $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \theta, \vartheta) = U_n$. Logo, reescrevendo (3.117) em termos de suas componentes obtemos

$$i\beta\varphi - \Phi = 0, \tag{3.118}$$

$$i\beta\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + k_1\theta_x = 0, \tag{3.119}$$

$$i\beta\psi - \Psi = 0, \tag{3.120}$$

$$i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) - k_1\theta + k_2\vartheta_x = 0, \tag{3.121}$$

$$i\beta w - W = 0, \tag{3.122}$$

$$i\beta\rho_1 W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) - k_1 l\theta = \cos(nx), \tag{3.123}$$

$$i\beta\rho_3\theta - \alpha\theta_{xx} + k_1(\Phi_x + \Psi + lW) = 0, \tag{3.124}$$

$$i\beta\rho_4\vartheta - \gamma\vartheta_{xx} + k_2\Psi_x = 0. \tag{3.125}$$

De imediato temos que $i\beta\varphi = \Phi$, $i\beta\psi = \Psi$ e $i\beta w = W$, e substituindo em (3.119), (3.121) e (3.123), respectivamente, vem que

$$-\beta^2\rho_1\varphi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + k_1\theta_x = 0, \tag{3.126}$$

$$-\beta^2\rho_2\psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) - k_1\theta + k_2\vartheta_x = 0, \tag{3.127}$$

$$-\beta\rho_1 w - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) - k_1 l\theta = \cos(nx), \tag{3.128}$$

$$i\beta\rho_3\theta - \alpha\theta_{xx} + i\beta k_1\varphi_x + i\beta k_1\psi + i\beta k_1 lw = 0, \tag{3.129}$$

$$i\beta\rho_4\vartheta - \gamma\vartheta_{xx} + i\beta k_2\psi_x = 0. \tag{3.130}$$

O sistema reduzido (3.126)-(3.130) admite uma solução do tipo

$$\varphi = A\,\text{sen}(nx),\ \psi = B\cos(nx),\ w = C\cos(nx),\ \theta = D\cos(nx),\ \vartheta = E\,\text{sen}(nx), \tag{3.131}$$

onde A, B, C, D e E são coeficientes a determinar e que também dependem de $n \in \mathbb{N}$. Substituindo (3.131) em (3.126)-(3.130) podemos reescrever o mesmo no seguinte sistema algébrico

$$(-\beta^2\rho_1 + kn^2 + k_0 l^2)A + knB + (k + k_0)lnC - k_1 nD = 0, \tag{3.132}$$

$$knA + (-\beta^2\rho_2 + bn^2 + k)B + klC - k_1 D + k_2 nE = 0, \tag{3.133}$$

$$(k + k_0)lnA + klB + (-\beta^2\rho_1 + k_0 n^2 + kl^2)C - k_1 lD = 1, \tag{3.134}$$

$$i\beta k_1 nA + i\beta k_1 B + i\beta k_1 l + (i\beta\rho_3 + \alpha n^2)D = 0, \tag{3.135}$$

$$-i\beta k_2 nB + (i\beta\rho_4 + \gamma n^2)E = 0. \tag{3.136}$$

Observação 11. Note que, resolver o sistema (3.118)-(3.125) se resumiu em determinar os coeficientes A, B, C, D e E do sistema (3.132)-(3.136), devido a equivalência dos mesmos.

Reescrevendo o sistema (3.132)-(3.136) em termos matriciais, obtemos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} P_1 & kn & (k+k_0)ln & -k_1 n & 0 \\ kn & P_2 & kl & -k_1 & k_2 n \\ (k+k_0)ln & kl & P_3 & -k_1 l & 0 \\ i\beta k_1 n & i\beta k_1 & i\beta k_1 l & P_4 & 0 \\ 0 & -i\beta k_2 n & 0 & 0 & P_5 \end{pmatrix}}_{:=M} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} P_1 &= -\beta^2\rho_1 + kn^2 + k_0 l^2, \qquad P_2 = -\beta^2\rho_2 + bn^2 + k, \\ P_3 &= -\beta^2\rho_1 + k_0 n^2 + kl^2, \qquad P_4 = i\beta\rho_3 + \alpha n^2, \\ P_5 &= i\beta\rho_4 + \gamma n^2. \end{aligned}$$

Observe que, utilizando a Regra de Cramer podemos determinar o coeficiente C a partir da seguinte expressão

$$C = \frac{det\, M_3}{det\, M},$$

onde

$$M_3 := \begin{pmatrix} P_1 & kn & 0 & -k_1 n & 0 \\ kn & P_2 & 0 & -k_1 & k_2 n \\ (k+k_0)ln & kl & 1 & -k_1 l & 0 \\ i\beta k_1 n & i\beta k_1 & 0 & P_4 & 0 \\ 0 & -i\beta k_2 n & 0 & 0 & P_5 \end{pmatrix}.$$

Usando o Teorema de Laplace note que

$$\begin{aligned} det\, M &= (P_1P_3 - l^2(k+k_0)^2n^2)P_2P_4P_5 + (l^2(k+k_0)^2n^2 - P_1P_3)i\beta k_2^2 n^2 P_4 \\ &\quad - 2i\beta k_1^2 l^2(k+k_0)n^2P_2P_5 + i\beta k_1^2 n^2 P_2P_3P_5 - 2i\beta k_1^2 kn^2 P_3P_5 \\ &\quad + i\beta k_1^2 l^2 P_1P_2P_5 - k^2l^2P_1P_4P_5 - 2k_1^2k_2^2l^2(k+k_0)\beta^2n^4 + k_1^2k_2^2l^2\beta^2n^2P_1 \\ &\quad + 4i\beta k_1^2 kl^2(k+k_0)n^2P_5 - i\beta k_1^2 l^2(k+k_0)^2n^2P_5 + 2k^2l^2(k+k_0)n^2P_4P_5 \\ &\quad + k_1^2k_2^2\beta^2n^4P_3 + i\beta k_1^2P_3P_1P_5 - k^2n^2P_4P_3P_5 - 2i\beta k_1^2 l^2 kP_1P_5, \end{aligned} \tag{3.137}$$

e

$$\begin{aligned} det\, M_3 &= P_1P_2P_4P_5 + i\beta k_2^2n^2P_1P_4 - k_2^2k_1^2\beta^2n^4 - k^2n^2P_4P_5 - i\beta k_1^2kn^2 - i\beta k_1^2kn^2P_5 \\ &\quad + i\beta k_1^2n^2P_2P_5 + i\beta k_1^2P_1P_5. \end{aligned}$$

Afirmação 5. Os determinates de M e M_3 são não nulos para n suficientemente grande.

Com efeito, tomando a parte real dos determinantes temos que

$$
\begin{aligned}
Re(detM) \;\; = \;\; & (P_1P_3 - l^2(k+k_0)^2n^2)P_2P_4P_5 - k^2l^2P_1P_4P_5 \\
& - 2k_1^2k_2^2l^2(k+k_0)\beta^2n^4 + k_1^2k_2^2l^2\beta^2n^2P_1 \\
& + 2k^2l^2(k+k_0)n^2P_4P_5 + k_1^2k_2^2\beta^2n^4P_3 - k^2n^2P_4P_3P_5,
\end{aligned}
$$

e

$$Re(detM_3) \;\; = \;\; P_1P_2P_4P_5 - k_2^2k_1^2\beta^2n^4 - k^2n^2P_4P_5.$$

Portanto, sabendo que o grau dos polinômios P_1, P_2, P_4, P_5 é menor ou igual a dois, pelo Teorema Fundamental da Álgebra existem no máximo dez raízes nas quais os determinantes se anulam Sendo assim, basta considerar um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$detM, detM_3 \neq 0, \, \forall \, n > n_0.$$

Por fim, os determinantes são não nulos para n suficientemente grande.

Observação 12. Nosso objetivo neste momento é estudar o comportamento do $|C|$ a medida que n cresce, isto é, não existe problema em considerar n suficientemente grande.

Finalmente, vamos considerar a sequência $\beta := \beta_n \in \mathbb{R}$ dada por

$$\beta := \sqrt{\frac{k_0n^2 + kl^2}{\rho_1} - \frac{l^2(k+k_0)^2}{\rho_1(k-k_0)}}, \tag{3.138}$$

e desta forma, concluímos que

$$
\begin{aligned}
P_1 &= (k-k_0)n^2 + (k_0-k)l^2 + \frac{l^2(k+k_0)^2}{k-k_0}, \\
P_2 &= \left(b - \frac{k_0\rho_2}{\rho_1}\right)n^2 + k - \frac{kl^2\rho_2}{\rho_1} + \frac{l^2(k+k_0)^2\rho_2}{(k-k_0)\rho_1}, \\
P_3 &= \frac{l^2(k+k_0)^2}{k-k_0},
\end{aligned}
$$

e ainda,

$$P_1P_3 - l^2(k+k_0)^2n^2 = \frac{l^4(k+k_0)^4}{(k-k_0)^2} + l^4(k_0+k)^2. \tag{3.139}$$

Observação 13. Note que estamos no caso $\chi \neq 0$, isto é, $k - k_0 \neq 0$ e portanto (3.138) está bem definida. E ainda pela Observação 1 temos $\rho_1 b = k_0\rho_2$, mas vamos considerar, de forma mais geral, o caso em que possa ocorrer $\rho_1 b \neq k_0\rho_2$.

Primeiramente vamos analisar o comportamento do $|C|$ para o caso em que $\rho_1 b \neq k_0\rho_2$, e desta forma P_2 se comporta como um polinômio de grau dois e consequentemente

$$\frac{|detM_3|}{n^7} \approx C_0 n, \text{ quando } n \to \infty,$$

onde $C_0 > 0$ é uma constante. E além disso, de (3.137) e (3.139) temos que

$$\frac{|detM|}{n^7} \approx C_1, \text{ quando } n \to \infty,$$

onde C_1 também é uma constante estritamente positiva. Logo,

$$|C| = \frac{\frac{|detM_3|}{n^7}}{\frac{|detM|}{n^7}} \approx L_0 n, \text{ quando } n \to \infty,$$

onde $L_0 > 0$ é constante.

Agora para o caso de $\rho_1 b = k_0 \rho_2$, concluímos que P_2 se comporta como uma constante e portanto

$$\frac{|detM_3|}{n^6} \approx C_2 n, \text{ quando } n \to \infty,$$

onde $C_2 > 0$ novamente é constante. E ainda, de (3.137) e (3.139) obtemos

$$\frac{|detM|}{n^6} \approx C_3, \text{ quando } n \to \infty,$$

onde $C_3 > 0$ também é uma constante. Da mesma forma, obtemos que

$$|C| = \frac{\frac{|detM_3|}{n^6}}{\frac{|detM_3|}{n^6}} \approx L_1 n, \text{ quando } n \to \infty.$$

onde $L_1 > 0$ é uma constante.

Portanto, podemos concluir em qualquer caso que existe uma constante $L_3 > 0$ tal que $|C| \approx L_3 n$, quando $n \to +\infty$. Desta forma estamos aptos a concluir a prova do Teorema 3.32. Para isso, observe que

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}_2} \geq \rho_1 \|W\|_2^2 = \rho_1 |i\beta w\|_2^2 = \rho_1 |\beta|^2 \|w\|_2^2,$$

e como $w = C\cos(nx)$, obtemos

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}_2} \geq \rho_1 |\beta|^2 \int_0^\ell |C\cos(nx)|^2 dx = \rho_1 |\beta|^2 |C|^2 C_4, \tag{3.140}$$

onde $C_4 > 0$ é uma constante determinada calculando a integral. Portanto,

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}_2} \to +\infty \quad \text{para } |\beta| \to +\infty,$$

mostrando (3.115), e concluindo a prova do Teorema 3.32.

□

Corolário 3.33. *Sob as condições do Teorema 3.32, dado $\mu \in (0,2)$ temos que*

$$|\beta|^{\mu-2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \to +\infty, \ \textit{quando } |\beta| \to +\infty.$$

Demonstração. Usando (3.140) e a expressão para β dada em (3.138), temos que

$$|\beta|^{\mu-2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \geq \sqrt{\rho_1 C_4}|C||\beta|^{\mu-1} \approx C_5 n^{\mu}, \ \text{quando } n \to +\infty,$$

uma vez que $\frac{|C|}{|\beta|} \approx L_4,$ quando $n \to +\infty$, para alguma constante $L_4 > 0$. Portanto fica provado o Corolário 3.33. □

3.4 Otimalidade do decaimento polinomial

Teorema 3.34. *Seja $U_0 \in D(A_2)$ e suponhamos que $\chi \neq 0$. Então, a taxa $t^{-1/2}$ obtida no Teorema 3.20 é ótima, isto é, não existe $\mu \in (0,2)$ tal que*

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2-\mu}}}\|U_0\|_{D(A_2)}\,, t > 0.$$

Demonstração. Suponhamos por absurdo, que exista $\mu \in (0,2)$ tal que

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2-\mu}}}\|U_0\|_{D(A_2)},\ t > 0. \tag{3.141}$$

Sabendo que $0 \in \rho(A_2)$, então dado $F \in \mathcal{H}_2$ temos $-(A_2)^{-1}F = U_0$ com $U_0 \in D(A_2)$. Portanto, podemos escrever (3.141) de forma que

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2-\mu}}}\|-(A_2)^{-1}F\|_{D(A_2)},\ \forall F \in \mathcal{H}_2,\ t > 0. \tag{3.142}$$

Sabendo que a solução $U(t)$ é dada por $U(t) = S_2(t)U_0$, concluímos de (3.142) que

$$\|S_2(t)(A_2)^{-1}F\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2-\mu}}}\|F\|_{\mathcal{H}_2},\ \forall F \in \mathcal{H}_2,\ t > 0.$$

Logo,

$$\|S_2(t)A_2^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2-\mu}}}\,,\ t > 0,$$

ou ainda,

$$\|S_2(t)A_2^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} = O(t^{\frac{1}{\mu-2}})\,,\ t \to +\infty,$$

para uma constante $C > 0$. Pelo Teorema 2.27 temos que

$$\|(i\beta I_d - A_2)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} = O(|\beta|^{2-\mu})\,,\ |\beta| \to +\infty,$$

ou ainda,

$$\|(i\beta I_d - A_2)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} \leq C|\beta|^{2-\mu}\,,\ |\beta| \to +\infty,$$

para alguma constante $C > 0$. Logo, concluímos que a solução $U = (i\beta I_d - A_2)^{-1}F$ satisfaz

$$\|U\|_{\mathcal{H}_2} \leq C|\beta|^{2-\mu}\|F\|_{\mathcal{H}_2},\ \forall\, F \in \mathcal{H}_2,$$

ou equivalentemente,

$$|\beta|^{\mu-2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_2},\ \forall\, F \in \mathcal{H}_2, \tag{3.143}$$

onde $U \in D(A_2)$ e $|\beta| \to +\infty$. Por outro lado, para F_n dada em (3.116), existe uma sequência $\beta_n \in \mathbb{R}$ e $U_n \in D(A_2)$ tal que pelo Corolário 3.33 ,

$$|\beta_n|^{\mu-2}\|U_n\|_{\mathcal{H}_2} \to +\infty, \text{ quando } |\beta_n| \to +\infty,$$

o que contradiz (3.143). Logo, a taxa $t^{-1/2}$ não pode ser melhorada. $\square$

4 SISTEMA DE BRESSE TERMOELÁSTICO COM DISSIPAÇÃO LOCALIZADA

4.1 O MODELO COM DOIS ACOPLAMENTOS TÉRMICOS E UMA DISSIPAÇÃO LOCALIZADA

Neste capítulo, estudaremos o seguinte problema

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + k_1\theta_x = 0 \quad &\text{em} \quad (0,\ell)\times(0,+\infty), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) - k_1\theta + k_2\vartheta_x = 0 \quad &\text{em} \quad (0,\ell)\times(0,+\infty), \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) - k_1 l\theta + \eta(x)w_t = 0 \quad &\text{em} \quad (0,\ell)\times(0,+\infty), \\ \rho_3\theta_t - \alpha\theta_{xx} + k_1(\varphi_x + \psi + lw)_t = 0 \quad &\text{em} \quad (0,\ell)\times(0,+\infty), \\ \rho_4\vartheta_t - \gamma\vartheta_{xx} + k_2\psi_{xt} = 0 \quad &\text{em} \quad (0,\ell)\times(0,+\infty), \end{aligned} \tag{4.1}$$

com condições iniciais

$$\begin{aligned} &\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \quad \psi(x,0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \\ &w(x,0) = w_0(x), \quad w_t(x,0) = w_1(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad \vartheta(x,0) = \vartheta_0(x), \end{aligned} \tag{4.2}$$

e condições de fronteira do tipo Dirichlet

$$\varphi(x,t) = \psi(x,t) = w(x,t) = \theta(x,t) = \vartheta(x,t) = 0, \quad \text{para} \quad x \in \{0,\ell\}, \tag{4.3}$$

ou do tipo Dirichlet-Neumann

$$\varphi(x,t) = \psi_x(x,t) = w_x(x,t) = \theta_x(x,t) = \vartheta(x,t) = 0, \quad \text{para} \quad x \in \{0,\ell\}, \tag{4.4}$$

onde consideramos as mesmas contantes e funções dos sistema (3.1)-(3.4) do Capítulo 3 e, adicionalmente, $\eta = \eta(x)$ é uma função não negativa.

Aqui, diferentemente do problema (3.1)-(3.4) do Capítulo 3, mostraremos que o problema (4.1)-(4.4) decai exponencialmente independente de qualquer relação entre os coeficientes, conforme a hipótese $\chi := k - k_0 = 0$ usada no Teorema 3.19. Para isso, assumiremos que η é uma função não negativa e localizada definida como segue.

Hipótese 4.1. *Seja $\eta \in W^{1,\infty}(0,\ell)$ uma função não negativa satisfazendo*

$$\eta(x) \geq \eta_0 > 0 \quad \textit{para todo} \quad x \in \omega \subset (0,\ell), \tag{4.5}$$

onde $\omega \neq \emptyset$ é um subintervalo aberto qualquer de $(0,\ell)$.

Observação 14. Note que η pode se anular no complementar de ω, de modo que a dissipação localizada $\eta(x)w_t$ tem efeito apenas no aberto genérico ω. A figura abaixo ilustra um caso onde η é efetivamente positiva apenas em uma vizinhança contida em $(0,\ell)$.

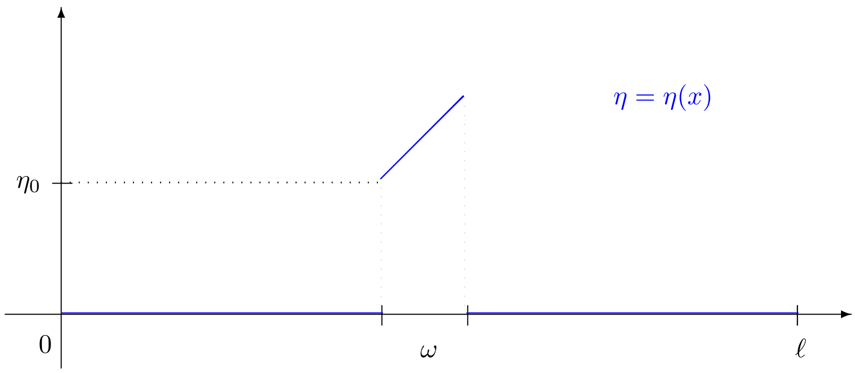

Figura 4.1: Gráfico da função η .

4.2 EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Nesta seção serão apresentados os resultados de existência e unicidade de solução para o problema (4.1)-(4.4), neste momento vamos reformular o mesmo adequando-se as condições de fronteira simultaneamente. Para isto, consideremos os seguintes espaços de fase

$$\mathcal{H}_1 := H_0^1(0,\ell)\times L^2(0,\ell)\times H_0^1(0,\ell)\times L^2(0,\ell)\times H_0^1(0,\ell)\times L^2(0,\ell)\times L^2(0,\ell)\times L^2(0,\ell),$$

para contemplar as condições de fronteira estabelecidas em (4.3), e

$$\mathcal{H}_2 := H_0^1(0,\ell)\times L^2(0,\ell)\times H_*^1(0,\ell)\times L_*^2(0,\ell)\times H_*^1(0,\ell)\times L_*^2(0,\ell)\times L_*^2(0,\ell)\times L^2(0,\ell),$$

para as condições de fronteira em (4.4). Como visto no Capítulo 3 o espaço $\mathcal{H}_j$ é Hilbert, para $j = 1, 2$, munido do produto interno usual

$$\begin{aligned}(U,U^*)_{\mathcal{H}_j} &= (\varphi_x,\varphi_x^*)_2 + (\Phi,\Phi^*)_2 + (\psi_x,\psi_x^*)_2 + (\Psi,\Psi^*)_2 + (w_x,w_x^*)_2 + (W,W^*)_2 \\ &\quad + (\theta,\theta^*)_2 + (\vartheta,\vartheta^*)_2,\end{aligned}$$

cuja a norma proveniente do mesmo é

$$|U|_{\mathcal{H}_j}^2 = \|\varphi_x\|_2^2 + \|\Phi\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|\Psi\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 + \|W\|_2^2 + \|\theta\|_2^2 + \|\vartheta\|_2^2 \,,$$

onde $U = (\varphi,\Phi,\psi,\Psi,w,W,\theta,\vartheta)$, $U^* = (\varphi^*,\Phi^*,\psi^*,\Psi^*,w^*,W^*,\theta^*,\vartheta^*) \in \mathcal{H}_j$, para $j = 1, 2$.

A partir de agora omitiremos a notação $L^2(0,\ell), L_*^2(0,\ell), H_*^1(0,\ell)$ e $H_0^1(0,\ell)$, denotando simplesmente por L^2, L_*^2, H_*^1 e H_0^1, respectivamente. Além disso, consideremos uma nova aplicação definida por

$$\begin{aligned}(U,U^*)_{\mathcal{H}_j} &:= \rho_1(\Phi,\Phi^*)_2 + \rho_2(\Psi,\Psi^*)_2 + \rho_1(W,W^*)_2 + b(\psi_x,\psi_x^*)_2 + \rho_3(\theta,\theta^*)_2 \\ &\quad + \rho_4(\vartheta,\vartheta^*)_2 + k(\varphi_x+\psi+lw,\varphi_x^*+\psi^*+lw^*)_2 + k_0(w_x-l\varphi,w_x^*-l\varphi^*)_2,\end{aligned}$$

a partir do qual, definimos também

$$
\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 \quad := \quad & \rho_1\|\Phi\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + \rho_1\|W\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 + k\|(\varphi_x+\psi+lw)\|_2^2 + k_0\|(w_x-l\varphi)\|_2^2 \\
& + \rho_3\|\theta\|_2^2 + \rho_4\|\vartheta\|_2^2,
\end{aligned}
$$

para quaisquer $U, U^* \in \mathcal{H}_j$, para $j = 1,2$.

Observação 15. A aplicação $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}_j}$, com $j=1,2$, define um produto interno em $\mathcal{H}_j$ desde que $l\ell \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, para o caso $j=2$. Consequentemente, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_j}$ define uma norma no mesmo, conforme a Afirmação 1 e a Observação 5 no Capítulo 3.

Observação 16. Análogamente aos Lemas 3.1 e 3.10 concluímos que as normas $|\cdot|_{\mathcal{H}_j}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_j}$ são equivalentes para $j=1,2$. Logo, $(\mathcal{H}_j, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_j})$ é um espaço de Banach, e portanto um espaço de Hilbert, para $j=1,2$.

Considere agora, para $j=1,2$, o operador linear $A_j : D(A_j) \subset \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_j$, onde

$$
A_jU := \begin{bmatrix}
\Phi \\
\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x+\psi+lw)_x + \frac{k_0 l}{\rho_1}(w_x - l\varphi) - \frac{k_1}{\rho_1}\theta_x \\
\Psi \\
\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x+\psi+lw) + \frac{k_1}{\rho_2}\theta - \frac{k_2}{\rho_2}\vartheta_x \\
W \\
\frac{k_0}{\rho_1}(w_x-l\varphi)_x - \frac{kl}{\rho_1}(\varphi_x+\psi+lw) + \frac{k_1 l}{\rho_1}\theta - \frac{\eta}{\rho_1}W \\
\frac{\alpha}{\rho_3}\theta_{xx} - \frac{k_1}{\rho_3}(\Phi_x + \Psi + lW) \\
\frac{\gamma}{\rho_4}\vartheta_{xx} - \frac{k_2}{\rho_4}\Psi_x
\end{bmatrix}, \tag{4.6}
$$

para $U \in D(A_j)$, cujos domínios são dados por

$$
D(A_1) := \left\{ U \in \mathcal{H}_1 : \varphi, \psi, w, \theta, \vartheta \in H_0^1 \cap H^2 \,;\, \Phi, \Psi, W \in H_0^1 \right\},
$$

e

$$
D(A_2) := \left\{ U \in \mathcal{H}_2 : \varphi, \vartheta \in H_0^1 \cap H^2 \,;\, \Psi, W \in H_*^1 \,;\, \Phi \in H_0^1 \,;\, \psi_x, w_x, \theta_x \in H_0^1 \right\}.
$$

Denotando $\varphi_t := \Phi, \psi_t := \Psi$ e $w_t := W$ podemos reescrever o sistema (4.1)-(4.4) como o seguinte problema de valor inicial

$$
\begin{cases}
U_t := A_jU, \quad t > 0, j = 1,2, \\
U(0) = U_0,
\end{cases} \tag{4.7}
$$

onde $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \theta, \vartheta)$ e $U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1, \theta_0, \vartheta_0)$. Desta forma temos um problema de Cauchy abstrato no qual utilizaremos da teoria de semigrupos lineares para buscar existência e unicidade de solução.

Teorema 4.2. *Seja $A_j : D(A_j) \subset \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_j$ o operador linear definido em (4.6). Então, A_j é um operador dissipativo em $\mathcal{H}_j$, para $j = 1, 2$.*

Demonstração. A prova é análoga ao Teorema 3.2, obtendo agora

$$Re(A_jU, U)_{\mathcal{H}_j} = -\alpha\|\theta_x\|_2^2 - \gamma\|\vartheta_x\|_2^2 - \int_0^\ell \eta(x)|W(x)|^2\, dx. \tag{4.8}$$

Portanto, como $\alpha, \gamma > 0$ e $\eta \geq 0$, segue que

$$Re(A_jU, U)_{\mathcal{H}_j} \leq 0, \text{ para } j = 1, 2.$$

□

Teorema 4.3. *O operdor $(-A_j)^{-1} : \mathcal{H}_j \to D(A_j)$ existe e é limitado, para $j = 1, 2$.*

Demonstração. A existência do operador $(-A_j)^{-1}$ decorre do fato de $-A_j$ ser bijetor para $j = 1, 2$ e a demonstração é análoga à feita nos Teoremas 3.5 e 3.14. Bastando observar que:

$$\int_0^\ell |\eta(x)W(x)|^2\, dx \leq \|\eta\|_\infty^2 \int_0^\ell |W(x)|^2\, dx < +\infty,$$

uma vez que $\eta \in L^\infty$ e $W \in L^2$ para $j = 1, 2$. Portanto, $\eta W \in L^2$ para $j = 1, 2$.

Além disso, note que para o caso $j = 2$ temos $W \in L^2_*$ e consequentemente

$$0 \leq \int_0^\ell \eta(x)W(x)\, dx \leq \|\eta\|_\infty \int_0^\ell W(x)\, dx = 0 \Rightarrow \int_0^\ell \eta(x)W(x)\, dx = 0,$$

e portanto $\eta W \in L^2_*$, para $j = 2$.

A limitação do operador segue usando os mesmos argumentos do Teorema 3.6, para $j = 1, 2$. □

Teorema 4.4. *Se $U_0 \in \mathcal{H}_j$, então o problema* (4.7) *possui uma única solução generalizada $U \in C([0, \infty); \mathcal{H}_j)$, para $j = 1, 2$. Além disso, se $U_0 \in D(A_j)$, então U é solução regular do problema* (4.7) *na classe $U \in C([0, \infty); D(A_j)) \cap C^1([0, \infty); \mathcal{H}_j)$, para $j = 1, 2$. Ou ainda, se $U_0 \in D(A_j^n)$, para $n \geq 2$ natural, então a solução U de* (4.7) *está na classe*

$$\bigcap_{r=0}^{n} C^{n-r}([0, +\infty), D(A_j^r)), \text{ para } j = 1, 2. \tag{4.9}$$

Em todos os casos, a solução é dada por $U(t) = S_j(t)U_0 = e^{tA_j}U_0, j = 1, 2$.

Demonstração. Inicialmente, de maneira análoga aos Teoremas 3.7 e 3.16 mostra-se que $0 \in \rho(A_j)$ e $\overline{D(A_j)} = \mathcal{H}_j$ para $j = 1, 2$. Sendo assim, pelo Teorema 2.21 o operador A_j é um gerador infinitesimal de se um C_0-semigrupo de contrações $S_j(t) = e^{tA_j}$, para $j = 1, 2$. Portanto, a conclusão do Teorema 4.4 segue dos Teoremas 2.22 e 2.24. □

4.3 ESTABILIDADE

A estabilidade do problema (4.1)-(4.4) será resumida na prova de um único resultado, este relativo a decaimento do tipo exponencial para a solução $U(t) = S_j(t)U_0\,, j = 1, 2$.

Teorema 4.5. *O semigrupo $S_j(t) = e^{A_j t}$ associado ao problema* (4.7) *é exponencialmente estável, ou seja, existem constantes $C, \omega > 0$ independente de $U_0 \in \mathcal{H}_j$, tais que*

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_j} \leq Ce^{-\omega t}\|U_0\|_{\mathcal{H}_j}\ ,\ j = 1, 2, t > 0. \tag{4.10}$$

Em outras palavras, o sistema (4.1)-(4.4) *é exponencialmente estável.*

A prova deste resultado consta em verificar as duas condições estabelecidas no Teorema 2.25, e para isso vamos estabelecer alguns resultados preliminares e consequentemente combiná-los ao ponto de concluir a prova desejada.

Lema 4.6. *Para $j = 1, 2$, temos que $i\mathbb{R} \subset \rho(A_j)$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.21 sabemos que A_j tem domínio imerso compactamente em $\mathcal{H}_j$, para $j = 1, 2$, e pelo Teorema 2.20 o espectro de A_j é formado apenas por autovalores.

Sendo assim, suponha por contradição que exista $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $i\beta = \lambda \in \sigma(A_j)$. Logo, existe um vetor $U \neq 0 \in D(A_j)$ tal que $A_jU = \lambda U$, ou seja, $\lambda U - A_jU = 0$, que reescrita em termos de suas componentes fica sob a forma

$$\lambda\varphi - \Phi = 0, \tag{4.11}$$

$$\lambda\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0l(w_x - l\varphi) + k_1\theta_x = 0, \tag{4.12}$$

$$\lambda\psi - \Psi = 0, \tag{4.13}$$

$$\lambda\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) - k_1\theta + k_2\vartheta_x = 0, \tag{4.14}$$

$$\lambda w - W = 0, \tag{4.15}$$

$$\lambda\rho_1W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) - k_1l\theta + \eta W = 0, \tag{4.16}$$

$$\lambda\rho_3\theta - \alpha\theta_{xx} + k_1(\Phi_x + \Psi + lW) = 0, \tag{4.17}$$

$$\lambda\rho_4\vartheta - \gamma\vartheta_{xx} + k_2\Psi_x = 0. \tag{4.18}$$

Pelo Teorema 4.2, sabemos que

$$Re(A_jU, U)_{\mathcal{H}_j} = -\alpha\|\theta_x\|_2^2 - \gamma\|\vartheta_x\|_2^2 - \int_0^\ell \eta(x)|W(x)|^2\,dx.$$

Portanto, seguindo a prova de maneira análoga ao Lema 3.22 obtemos $\theta, \vartheta = 0$, inicialmente. Logo, substituindo em (4.18) obtemos $\Psi_x = 0$ e consequentemente, usando a equação (4.13) e a Desigualdade de Poincaré temos $\psi = 0$.

Sabendo que $\theta, \vartheta = 0$ e $\psi = 0$, obtemos que $\Psi = 0$ e assim reduzimos o sistema (4.11)-(4.18) em

$$\begin{aligned} \lambda\rho_1\Phi - k(\varphi_x + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) &= 0, && (4.19)\\ k(\varphi_x + lw) &= 0, && (4.20)\\ \lambda\rho_1 W - k_0(w_x - l\varphi)_x + k(\varphi_x + lw) + \eta W &= 0, && (4.21)\\ \Phi_x &= -lW, && (4.22) \end{aligned}$$

ou ainda, substituindo (4.20) em (4.19) e (4.21) obtemos

$$\begin{aligned} \lambda\rho_1\Phi - k_0 l(w_x - l\varphi) &= 0, && (4.23)\\ \lambda\rho_1 W - k_0(w_x - l\varphi)_x + \eta W &= 0, && (4.24)\\ \Phi_x &= -lW. && (4.25) \end{aligned}$$

Agora, derivando (4.23) e subtraindo (4.24) temos que

$$\begin{aligned} \lambda\rho_1(\Phi_x - lW) - l\eta W &= 0, && (4.26)\\ \Phi_x &= -lW. && (4.27) \end{aligned}$$

Logo, substituindo (4.27) em (4.26) obtemos a seguinte identidade

$$W(2\lambda\rho_1 + \eta) = 0,$$

e sabendo que η é uma função real em $(0, \ell)$ segue que $\eta \neq -2\lambda\rho_1$. Consequentemente temos que $W = 0$. Portanto, concluímos que $w = 0$ e daí obtemos $\varphi, \Phi = 0$, de onde vem que $U = 0$, o que é um absurdo. $\square$

Sabendo agora que $i\mathbb{R} \subset \rho(A_j)$, então dados $F \in \mathcal{H}_j$, $\beta \in \mathbb{R}$ temos que a equação resolvente $(i\beta I - A_j)^{-1}F = U$ esta bem definida, para $j = 1, 2$, isto é, $(i\beta I - A_j)U = F$, para $j = 1, 2$, ou ainda, reescrevendo em termos de suas componentes

$$\begin{aligned} i\beta\varphi - \Phi &= f_1, && (4.28)\\ i\beta\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + k_1\theta_x &= \rho_1 f_2, && (4.29)\\ i\beta\psi - \Psi &= f_3, && (4.30)\\ i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) - k_1\theta + k_2\vartheta_x &= \rho_2 f_4, && (4.31)\\ i\beta w - W &= f_5, && (4.32)\\ i\beta\rho_1 W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) - k_1 l\theta + \eta W &= \rho_1 f_6, && (4.33)\\ i\beta\rho_3\theta - \alpha\theta_{xx} + k_1(\Phi_x + \Psi + lW) &= \rho_3 f_7, && (4.34)\\ i\beta\rho_4\vartheta - \gamma\vartheta_{xx} + k_2\Psi_x &= \rho_4 f_8, && (4.35) \end{aligned}$$

onde $U \in D(A_j)$, para $j = 1,2$. Os resultados adiante serão totalmente concentrados em estudar a equação resolvente acima, afim de obter as estimativas desejadas.

Lema 4.7. *Seja $U \in D(A_j)$, para $j = 1,2$, uma solução do sistema (4.28)-(4.35), então sob as notações acima existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|\theta_x\|_2^2, \|\vartheta_x\|_2^2, \int_\omega |W|^2\, dx \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j}. \tag{4.36}$$

Em particular, dado $\varepsilon > 0$ existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\|\theta_x\|_2^2, \|\vartheta_x\|_2^2, \int_\omega |W|^2\, dx \leq \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \tag{4.37}$$

Demonstração. Sabendo que, para $j = 1,2$, A_j é um operador dissipativo e que

$$Re(A_jU, U)_{\mathcal{H}_j} = -\alpha\|\theta_x\|_2^2 - \gamma\|\vartheta_x\|_2^2 - \int_0^\ell \eta(x)|W(x)|^2\, dx, \tag{4.38}$$

basta usarmos que $i\beta U - F = A_jU$, a Desigualdade de Hölder e o fato que $\eta(x) \geq \eta_0 > 0$, para todo $x \in \omega$ em (4.38), que obtemos (4.36). Além disso, usando a Desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$ obtemos o caso particular de (4.37). □

Novamente, assim como feito no Capítulo 3 vamos utilizar de funções de cut-off para evitar problemas com termos de fronteira e também exigir um pouco mais de regularidade para os dados inicias.

Portanto, considere $U \in D(A_j)$, para $j = 1,2$, solução do sistema (4.28)-(4.35), uma função $s_0 \in C^2(]0,\ell[)$ e ainda dado um $l_0 \in \omega$ considere também um $\delta > 0$ tal que

$$\text{supp}\,(s_0) \subset (l_0 - \delta, l_0 + \delta) \subset \omega, \quad 0 \leq s_0(x) \leq 1, \forall\, x \in (0,\ell),$$

e ainda,

$$s_0(x) = 1, \forall\, x \in [l_0 - \delta/2, l_0 + \delta/2].$$

Lema 4.8. *Sob as notações acima, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}} |w_x - l\varphi|^2\, dx \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j} + C\|\theta_x\|_2\|U\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2. \tag{4.39}$$

Em particular, dado $\varepsilon > 0$ e $|\beta| > 1$ suficientemente grande existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}} |w_x - l\varphi|^2\, dx \leq \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2, \tag{4.40}$$

para $j = 1,2$.

Demonstração. Multiplicando (4.33) por $s_0\overline{w}$ e integrando em $(0,\ell)$, obtemos que

$$\begin{aligned} -k_0\int_0^\ell s_0(w_x-l\varphi)_x\overline{w}\,dx &= -i\beta\rho_1\int_0^\ell s_0W\overline{w}\,dx - kl\int_0^\ell s_0(\varphi_x+\psi+lw)\overline{w}\,dx \\ &\quad + k_1l\int_0^\ell s_0\theta\overline{w}\,dx - \int_0^\ell s_0\eta W\overline{w}\,dx + \rho_1\int_0^\ell s_0f_6\overline{w}\,dx. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Integrando por partes, reagrupando alguns termos e substituindo a equação (4.32) em (4.41) temos que,

$$\begin{aligned} k_0\int_0^\ell s_0|w_x-l\varphi|^2\,dx &= \rho_1\int_0^\ell s_0W\overline{W}\,dx - kl\int_0^\ell s_0(\varphi_x+\psi+lw)\overline{w}\,dx \\ &\quad + k_1l\int_0^\ell s_0\theta\overline{w}\,dx - \int_0^\ell s_0\eta W\overline{w}\,dx + \rho_1\int_0^\ell s_0f_6\overline{w}\,dx \\ &\quad - k_0l\int_0^\ell s_0(w_x-l\varphi)\overline{\varphi}\,dx + \rho_1\int_0^\ell s_0W\overline{f_5}\,dx. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Por fim, tomando o módulo, usando as Desigualdades de Hölder e Poincaré, as hipóteses sobre as funções s_0 e η, e substituindo as equações (4.28) e (4.32) em (4.42), obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} k_0\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s_0|w_x-l\varphi|^2\,dx &\leq \rho_1\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s_0|W|^2\,dx + C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j} + C\|\theta_x\|_2^2\|U\|_{\mathcal{H}_j} \\ &\quad + \frac{C}{|\beta|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \eta_0\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s_0|W|^2\,dx, \end{aligned} \tag{4.43}$$

para alguma constante $C>0$. Portanto, sabendo que $(l_0-\delta,l_0+\delta)\subset\omega$, podemos voltar ao Lema 4.7 inequação (4.36) e concluir que

$$\begin{aligned} \int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}} |w_x-l\varphi|^2\,dx &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j} + C\|\theta_x\|_2\|U\|_{\mathcal{H}_j} \\ &\quad + \frac{C}{|\beta|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2, \end{aligned}$$

para alguma outra constante $C>0$ e $j=1,2$.

Agora, usando a Desigualdade de Young com $\varepsilon>0$ e o Lema 4.7 inequação (4.36) temos que

$$\int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}} |w_x-l\varphi|^2\,dx \leq \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\beta|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2,$$

para alguma constante $C_\varepsilon>0$. Por fim, basta considerar $|\beta|>1$ suficientemente grande tal que

$\frac{C}{|\beta|^2} \leq \varepsilon$ e concluir que

$$\int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}} |w_x - l\varphi|^2\, dx \quad \leq \quad \varepsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_j} + C_\varepsilon\|F\|^2_{\mathcal{H}_j}, \text{ para } j = 1, 2.$$

$\square$

Lema 4.9. *Sob as notações acima, dado $\varepsilon > 0$ existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$\int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}} \left(|\Phi|^2 + |\varphi_x + \psi + lw|^2 + |\Psi|^2 + |\psi_x|^2\right) dx \leq \varepsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_j} + C_\varepsilon\|F\|^2_{\mathcal{H}_j},$$

para $j = 1, 2$.

Demonstração. Primeiramente observe a prova dos Lemas 3.25 e 3.28 e Corolários 3.26 e 3.29 considerando uma função $s_0 \in C^2(0, \ell)$, l_0 especificamente pertencente ao intervalo ω tal que $(l_0 - \delta, l_0 + \delta) \subset \omega$ para algum $\delta > 0$ e as demais hipóteses sobre s_0. Feito isso, a prova deste resultado segue de maneira análoga devido a similaridade das equações envolvidas na prova dos Lemas 3.25 e 3.28 e dos Corolários 3.26 e 3.29 . $\square$

Corolário 4.10. *Sob as notações acima e considerando $|\beta| > 1$ suficientemente grande, então dado $\varepsilon > 0$ existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$\mathcal{V}_1 \leq \varepsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_j} + C_\varepsilon\|F\|^2_{\mathcal{H}_j}, \text{ para } j = 1, 2, \tag{4.44}$$

onde

$$\mathcal{V}_1 := \int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}} \left(|\Phi|^2 + |\varphi_x + \psi + lw|^2 + |\Psi|^2 + |\psi_x|^2 + |W|^2 + |w_x - l\varphi|^2\right) dx.$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$, então basta combinar o Lema 4.7 estimativa (4.37), Lema 4.8 estimativa (4.39) e o Lema 4.9 que obtemos (4.44). $\square$

4.3.1 Conclusão da prova do Teorema 4.5: Decaimento exponencial

Neste momento estamos aptos a concluir a prova do Teorema 4.5. Para isso vamos utilizar os resultados de extensão estabelecidos no Capítulo 5. Inicialmente, dado $\varepsilon > 0$ considere a estimativa do Corolário 4.10, dada por:

$$\mathcal{V}_1 \leq \varepsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_j} + C_\varepsilon\|F\|^2_{\mathcal{H}_j}, \text{ para } j = 1, 2, \tag{4.45}$$

onde

$$\mathcal{V}_1 := \int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}} \left(|\Phi|^2 + |\varphi_x + \psi + lw|^2 + |\Psi|^2 + |\psi_x|^2 + |W|^2 + |w_x - l\varphi|^2\right) dx.$$

Neste momento, denotando por $V := (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ e por meio de (4.28)-(4.35) note que V é solução do sistema (3.74)-(3.79), o qual corresponde ao problema (5.1)-(5.6) estabelecido no Capítulo 5 com $G = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6)$ dada por

$$\begin{aligned} g_1 &:= f_1, \quad g_2 := \rho_1 f_2 - k_1 \theta_x, \\ g_3 &:= f_3, \quad g_4 := \rho_2 f_4 + k_1 \theta - k_2 \vartheta_x, \\ g_5 &:= f_5, \quad g_6 := \rho_1 f_6 + k_1 l \theta - \eta W, \end{aligned}$$

e ainda, $(l_0 - \delta/2, l_0 + \delta/2) \subset (0, \ell)$. Assim, considerando $b_1 := (l_0 - \delta/2)$ e $b_2 := (l_0 + \delta/2)$ estamos dentro das hipóteses do Corolário 5.2. Logo, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|V\|_{0,\ell}^2 \leq C\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + CC_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C\|G\|_{0,\ell}^2, \text{ para } j = 1, 2, \tag{4.46}$$

onde $\|\cdot\|_{0,\ell}$ é definido em (5.7).

Sendo assim, utilizando a Desigualdade de Poincaré e o Lema 4.7 em (4.46) podemos garantir que

$$\|G\|_{0,\ell}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2$$

e assim,

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 \leq C\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + CC_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2,$$

para alguma constante $C > 0$ e $j = 1, 2$. Portanto, usando a Desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, podemos concluir que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2, \, \forall \, F \in \mathcal{H}_j,$$

e para alguma outra constante $C > 0$, que independe de $\varepsilon > 0$, e $j = 1, 2$. Ou ainda, sabendo que

$$\|(i\beta I_d - A_j)^{-1} F\|_{\mathcal{H}_j} = \|U\|_{\mathcal{H}_j} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_j}, \, \forall \, F \in \mathcal{H}_j,$$

temos que,

$$\|(i\beta I_d - A_j)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_j)} \leq C, \tag{4.47}$$

para $F \neq 0$, $|\beta| > 1$ suficientemente grande e $j = 1, 2$.

Consequentemente, sabendo que $i\mathbb{R} \subset \rho(A_j)$, para $j = 1, 2$, pelo Lema 4.6 e que (4.47) acontece para $j = 1, 2$, podemos garantir pelo Teorema 2.25, que o semigrupo associado ao problema (4.1)-(4.4) é exponencialmente estável, o que conclui a prova do Teorema 4.5.

5 SISTEMA DE BRESSE CONSERVATIVO

Neste capítulo, nos concentramos em mostrar dois resultados gerais para sistemas do tipo Bresse, denominado "Desigualdade de Observabilidade". Este resultado foi provado por Rivera e Ávila em [17] para sistemas do tipo Timoshenko. Baseado nisso e no trabalho de Rifo, Villagran e Rivera em [15] fomos capazes de estender tais resultados para o caso Bresse.

5.1 DESIGUALDADE DE OBSERVABILIDADE PARA SISTEMAS DO TIPO BRESSE

Considere inicialmente o sistema de equações:

$$i\beta\varphi - \Phi = g_1 \text{ em } (0,\ell), \tag{5.1}$$

$$i\beta\rho_1\Phi - (k(\varphi_x + \psi + lw))_x - k_0 l(w_x - l\varphi) = g_2 \text{ em } (0,\ell), \tag{5.2}$$

$$i\beta\psi - \Psi = g_3 \text{ em } (0,\ell), \tag{5.3}$$

$$i\beta\rho_2\Psi - (b\psi_x)_x + k(\varphi_x + \psi + lw) = g_4 \text{ em } (0,\ell), \tag{5.4}$$

$$i\beta w - W = g_5 \text{ em } (0,\ell), \tag{5.5}$$

$$i\beta\rho_1 W - (k_0(w_x - l\varphi))_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = g_6 \text{ em } (0,\ell), \tag{5.6}$$

onde

$$g_1, g_3, g_5 \in H_0^1; \quad g_2, g_4, g_6 \in L^2; \quad \text{ou} \quad g_1 \in H_0^1; \; g_3, g_5 \in H_*^1; \; g_2 \in L^2; \; g_4, g_6 \in L_*^2,$$

e vamos assumir que

$$\rho_1, \rho_2, k, k_0, b \in C^1([0,\ell]) \text{ tais que } \rho_1, \rho_2, k, k_0, b > 0 \text{ em } (0,\ell).$$

Notação:

Considere $V = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ e $G = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6)$. E ainda, dados quaisquer $a_1, a_2 \in [0,\ell]$ com $a_1 < a_2$ a notação $\|\cdot\|_{a_1,a_2}$ é definida por

$$\|V\|_{a_1,a_2}^2 := \int_{a_1}^{a_2} \left(|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |\Phi|^2 + |\psi_x|^2 + |\Psi|^2 + |w_x - l\varphi|^2 + |W|^2\right) dx. \tag{5.7}$$

Proposição 5.1. ***(Desigualdade de Observabilidade).*** *Sob as notações acima, consideremos $V = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ uma solução regular do sistema (5.1)-(5.6) e sejam $0 \le a_1 < a_2 \le \ell$ quaisquer. Então, para $|\beta| > 1$ suficientemente grande, existem constantes $C_0, C_1 > 0$ tais que*

$$|P(a_j)| \le C_0\|V\|_{a_1,a_2}^2 + C_0\|G\|_{0,\ell}^2 \tag{5.8}$$

e

$$\|V\|_{a_1,a_2}^2 \le C_1|P(a_j)| + C_1\|G\|_{0,\ell}^2, \tag{5.9}$$

onde

$$\begin{aligned}|P(a_j)| &:= |(\varphi_x+\psi+lw)(a_j)|^2+|\Phi(a_j)|^2+|\psi_x(a_j)|^2\\ &\quad +|\Psi(a_j)|^2+|(w_x-l\varphi)(a_j)|^2+|W(a_j)|^2, \textit{ para } j=1,2.\end{aligned}$$

Demonstração. No que segue, usaremos constantemente que dados quaisquer números complexos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ temos que $Rez_1\overline{z_2} = Rez_2\overline{z_1}$.

Seja $q_1 \in C^1([a_1, a_2])$ uma função qualquer, multiplicando a equação (5.2) por $kq_1\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}$ e integrando em (a_1, a_2) temos:

$$\begin{aligned}\int_{a_1}^{a_2} kq_1g_2\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}dx &= \underbrace{i\beta\int_{a_1}^{a_2}\rho_1kq_1\Phi\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}dx}_{:=J_1}\\ &\quad \underbrace{-\int_{a_1}^{a_2}kq_1(k(\varphi_x+\psi+lw))_x\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}dx}_{:=J_2}\\ &\quad -\int_{a_1}^{a_2}lk_0kq_1(w_x-l\varphi)\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}dx. \qquad (5.10)\end{aligned}$$

Substituindo as equações (5.1), (5.3) e (5.5) em J_1, podemos reescrevê-lo tal que

$$\begin{aligned}J_1 &= -\int_{a_1}^{a_2}\rho_1kq_1\Phi\overline{[\Phi_x+\Psi+lW+g_{1x}+g_3+lg_5]}dx\\ &= -\int_{a_1}^{a_2}\rho_1kq_1\Phi\overline{\Phi_x}dx-\int_{a_1}^{a_2}\rho_1kq_1\Phi\overline{(\Psi+lW)}dx\\ &\quad -\int_{a_1}^{a_2}\rho_1kq_1\Phi\overline{(g_{1x}+g_3+lg_5)}dx.\end{aligned}$$

Agora, integrando por partes e tomando a parte real de J_1 temos que

$$\begin{aligned}\text{Re}J_1 &= -\frac{1}{2}\rho_1kq_1|\Phi|^2\Big|_{a_1}^{a_2}+\frac{1}{2}\int_{a_1}^{a_2}(\rho_1kq_1)_x|\Phi|^2dx\\ &\quad -\text{Re}\left(\int_{a_1}^{a_2}\rho_1kq_1\Phi\overline{(\Psi+lW)}dx\right)\\ &\quad -\text{Re}\left(\int_{a_1}^{a_2}\rho_1kq_1\Phi\overline{(g_{1x}+g_3+lg_5)}dx\right).\end{aligned}$$

Integrando por partes e tomando a parte real de J_2, obtemos que

$$\text{Re}J_2 = -\frac{1}{2}k^2q_1|\varphi_x+\psi+lw|^2\Big|_{a_1}^{a_2}+\frac{1}{2}\int_{a_1}^{a_2}k^2q_{1x}|\varphi_x+\psi+lw|^2dx.$$

Feito isso, ao tomar a parte real de (5.10) podemos concluir que

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\left(\rho_1 k q_1 |\Phi|^2 + k^2 q_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2\right)\Big|_{a_1}^{a_2}\\
&+\frac{1}{2}\int_{a_1}^{a_2} \left[(\rho_1 k q_1)_x |\Phi|^2 + k^2 q_{1x} |\varphi_x + \psi + lw|^2\right] dx\\
&= \mathrm{Re}\left(\int_{a_1}^{a_2} k q_1 g_2 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx\right) + \mathrm{Re}\left(\int_{a_1}^{a_2} \rho_1 k q_1 \Phi \overline{(\Psi + lW)} dx\right)\\
&+\mathrm{Re}\left(\int_{a_1}^{a_2} l k_0 k q_1 (w_x - l\varphi)\overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx\right) + \mathrm{Re}\left(\int_{a_1}^{a_2} \rho_1 k q_1 \Phi \overline{(g_{1x} + g_3 + l g_5)} dx\right)
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Analogamente ao caso anterior vamos considerar uma outra função $q_2 \in C^1([a_1, a_2])$, multiplicando (5.6) por $k_0 q_2 \overline{(w_x - l\varphi)}$ e integrando em (a_1, a_2) vem que

$$\begin{aligned}
\int_{a_1}^{a_2} k_0 q_2 g_6 \overline{(w_x - l\varphi)} dx &= \underbrace{i\beta \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 k_0 q_2 W \overline{(w_x - l\varphi)} dx}_{:=J_3}\\
&\quad \underbrace{- \int_{a_1}^{a_2} k_0 q_2 (k_0 (w_x - l\varphi))_x \overline{(w_x - l\varphi)} dx}_{:=J_4}\\
&\quad + \int_{a_1}^{a_2} l k_0 k q_2 (\varphi_x + \psi + lw)\overline{(w_x - l\varphi)} dx.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Assim, substituindo as equações (5.1) e (5.5) em J_3, obtemos

$$J_3 = -\int_{a_1}^{a_2} \rho_1 k_0 q_2 W \overline{[W_x - l\Phi + g_{5x} - l g_1]} dx,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
J_3 &= -\int_{a_1}^{a_2} \rho_1 k_0 q_2 W \overline{W_x} dx + \int_{a_1}^{a_2} l \rho_1 k_0 q_2 W \overline{\Phi} dx\\
&\quad - \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 k_0 q_2 W \overline{(g_{5x} - l g_1)} dx.
\end{aligned}$$

Agora, realizando uma integração por partes e tomando a parte real de J_3 vem que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re} J_3 &= -\frac{1}{2}\rho_1 k_0 q_2 |W|^2\Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2}\int_{a_1}^{a_2} (\rho_1 k_0 q_2)_x |W|^2 dx\\
&\quad + \mathrm{Re}\left(\int_{a_1}^{a_2} l \rho_1 k_0 q_2 W \overline{\Phi} dx\right)\\
&\quad - \mathrm{Re}\left(\int_{a_1}^{a_2} \rho_1 k_0 q_2 W \overline{(g_{5x} - l g_1)} dx\right).
\end{aligned}$$

Integrando por partes e tomando a parte real de J_4, obtemos uma nova identidade tal que

$$\mathrm{Re}J_4 \quad = \quad -\frac{1}{2}k_0^2 q_2|w_x - l\varphi|^2\Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2}\int_{a_1}^{a_2} k_0^2 q_{2x}|w_x - l\varphi|^2 dx.$$

Com isso, ao tomar a parte real de (5.12) podemos concluir de modo mais geral que

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\Big(\rho_1 k_0 q_2|W|^2 + k_0^2 q_2|w_x - l\varphi|^2\Big)\Big|_{a_1}^{a_2} \\
&+\frac{1}{2}\int_{a_1}^{a_2} \left[(\rho_1 k_0 q_2)_x|W|^2 + k_0^2 q_{2x}|w_x - l\varphi|^2\right] dx \\
&= \mathrm{Re}\bigg(\int_{a_1}^{a_2} k_0 q_2 g_6 \overline{(w_x - l\varphi)}dx\bigg) - \mathrm{Re}\bigg(l\int_{a_1}^{a_2} \rho_1 k_0 q_2 W\overline{\Phi}dx\bigg) \\
&- \mathrm{Re}\bigg(\int_{a_1}^{a_2} lk_0 k q_2(\varphi_x + \psi + lw)\overline{(w_x - l\varphi)}dx\bigg) + \mathrm{Re}\bigg(\int_{a_1}^{a_2} \rho_1 k_0 q_2 W\overline{(g_{5x} - lg_1)}dx\bigg)
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Agora, consideramos uma função $q_3 \in C^1([a_1, a_2])$ e multiplicando a equação (5.4) por $bq_3\overline{\psi_x}$ e integrando em (a_1, a_2) temos

$$\begin{aligned}
\int_{a_1}^{a_2} bq_3 g_4\overline{\psi_x}dx \quad = \quad & \underbrace{i\beta\int_{a_1}^{a_2} \rho_2 b q_3 \Psi\overline{\psi_x}dx}_{:=J_5} - \underbrace{\int_{a_1}^{a_2} bq_3(b\psi_x)_x\overline{\psi_x}dx}_{:=J_6} \\
& \underbrace{+\int_{a_1}^{a_2} kq_3 b(\varphi_x + \psi + lw)\overline{\psi_x}dx.}_{:=J_7}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Substituindo a equação (5.3) em J_5, vem que

$$\begin{aligned}
J_5 \quad &= \quad -\int_{a_1}^{a_2} \rho_2 b q_3 \Psi\overline{[\Psi_x + g_{3x}]}dx \\
&= \quad -\int_{a_1}^{a_2} \rho_2 b q_3 \Psi\overline{\Psi_x}dx - \int_{a_1}^{a_2} \rho_2 b q_3 \Psi\overline{g_{3x}}dx.
\end{aligned}$$

Logo, integrando por partes e tomando a parte real de J_5 temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}J_5 \quad = \quad & -\frac{1}{2}\rho_2 b q_3|\Psi|^2\Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2}\int_{a_1}^{a_2} (\rho_2 b q_3)_x|\Psi|^2 dx \\
& -\mathrm{Re}\bigg(\int_{a_1}^{a_2} \rho_2 b q_3 \Psi\overline{g_{3x}}dx\bigg).
\end{aligned}$$

Integrando por partes e tomando a parte real de J_6, obtemos que

$$\mathrm{Re}J_6 \;=\; -\frac{1}{2}b^2 q_3|\psi_x|^2\Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2}\int_{a_1}^{a_2} b^2 q_{3x}|\psi_x|^2 dx.$$

Agora, realizando uma integração por partes no termo J_7, podemos reescrevê-lo tal que

$$\begin{aligned} J_7 \;&=\; kbq_3(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\psi}\Big|_{a_1}^{a_2} - \int_{a_1}^{a_2} bq_3(k(\varphi_x+\psi+lw))_x\overline{\psi}dx \\ &\quad - \int_{a_1}^{a_2} k(bq_3)_x(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\psi}dx, \end{aligned}$$

e substituindo a equação (5.2), e obtemos que

$$\begin{aligned} J_7 \;&=\; kbq_3(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\psi}\Big|_{a_1}^{a_2} - \int_{a_1}^{a_2} bq_3[i\beta\rho_1\Phi - k_0 l(w_x - l\varphi) - g_2]\overline{\psi}dx \\ &\quad - \int_{a_1}^{a_2} k(bq_3)_x(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\psi}dx, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} J_7 \;&=\; kbq_3(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\psi}\Big|_{a_1}^{a_2} + \int_{a_1}^{a_2} bq_3\rho_1\Phi\overline{(i\beta\psi)}dx \\ &\quad + \underbrace{\int_{a_1}^{a_2} lbq_3k_0(w_x-l\varphi)\overline{\psi}dx}_{:=J_{7,1}} + \int_{a_1}^{a_2} bq_3 g_2\overline{\psi}dx \\ &\quad \underbrace{-\int_{a_1}^{a_2} k(bq_3)_x(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\psi}dx.}_{:=J_{7,2}} \end{aligned} \tag{5.15}$$

Note que, para os termos $J_{7,1}$, $J_{7,2}$, basta substituir a equação (5.3) para obtermos

$$J_{7,1} = -\frac{1}{i\beta}\int_{a_1}^{a_2} lbq_3k_0(w_x-l\varphi)\overline{\Psi}dx - \frac{1}{i\beta}\int_{a_1}^{a_2} lbq_3k_0(w_x-l\varphi)\overline{g_3}dx,$$

e

$$J_{7,2} = \frac{1}{i\beta}\int_{a_1}^{a_2} k(bq_3)_x(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\Psi}dx + \frac{1}{i\beta}\int_{a_1}^{a_2} k(bq_3)_x(\varphi_x+\psi+lw)\overline{g_3}dx.$$

Substituindo as novas estimativas de $J_{7,1}$ e $J_{7,2}$ em (5.15) e a equação (5.3), chegamos a

$$\begin{aligned} J_7 \;=\;& kbq_3(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\psi}\Big|_{a_1}^{a_2} + \int_{a_1}^{a_2} bq_3\rho_1\Phi\overline{\Psi}dx + \int_{a_1}^{a_2} bq_3[\rho_1\Phi\overline{g_3}+g_2\overline{\psi}]dx \\ & -\frac{1}{i\beta}\int_{a_1}^{a_2} lbq_3k_0(w_x-l\varphi)\overline{\Psi}dx - \frac{1}{i\beta}\int_{a_1}^{a_2} lbq_3k_0(w_x-l\varphi)\overline{g_3}dx \\ & \frac{1}{i\beta}\int_{a_1}^{a_2} k(bq_3)_x(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\Psi}dx + \frac{1}{i\beta}\int_{a_1}^{a_2} k(bq_3)_x(\varphi_x+\psi+lw)\overline{g_3}dx. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Portanto, ao tomar a parte real de (5.16), podemos obter uma nova caracterização tal que

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}J_7 \;=\;& \mathrm{Re}\bigg(kbq_3(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\psi}\Big|_{a_1}^{a_2}\bigg) + \mathrm{Re}\bigg(\int_{a_1}^{a_2} bq_3\rho_1\Phi\overline{\Psi}dx\bigg) \\ & -\frac{1}{\beta}\mathrm{Im}\bigg(\int_{a_1}^{a_2} lbq_3k_0(w_x-l\varphi)\overline{\Psi}dx\bigg) + \frac{1}{\beta}\mathrm{Im}\bigg(\int_{a_1}^{a_2} k(bq_3)_x(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\Psi}dx\bigg) \\ & -\frac{1}{\beta}\mathrm{Im}\bigg(\int_{a_1}^{a_2} lbq_3k_0(w_x-l\varphi)\overline{g_3}dx\bigg) + \frac{1}{\beta}\mathrm{Im}\bigg(\int_{a_1}^{a_2} k(bq_3)_x(\varphi_x+\psi+lw)\overline{g_3}dx\bigg) \\ & +\mathrm{Re}\bigg(\int_{a_1}^{a_2} bq_3[\rho_1\Phi\overline{g_3}+g_2\overline{\psi}]dx\bigg). \end{aligned} \tag{5.17}$$

Por fim, tendo as novas expressões dos termos J_5, J_6 e J_7 podemos retroceder a estimativa (5.14) e tomar sua parte real, feito isso obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\bigg(\rho_2bq_3|\Psi|^2+b^2q_3|\psi_x|^2\bigg)\Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2}\int_{a_1}^{a_2}[(\rho_2bq_3)_x|\Psi|^2+b^2q_{3x}|\psi_x|^2]dx \\ & = \mathrm{Re}\bigg(\int_{a_1}^{a_2} bq_3g_4\overline{\psi_x}dx\bigg) + \mathrm{Re}\bigg(\int_{a_1}^{a_2} \rho_2bq_3\Psi\overline{g_{3x}}dx\bigg) \\ & -\mathrm{Re}\bigg(kbq_3(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\psi}\Big|_{a_1}^{a_2}\bigg) - \mathrm{Re}\bigg(\int_{a_1}^{a_2} bq_3\rho_1\Phi\overline{\Psi}dx\bigg) \\ & +\frac{1}{\beta}\mathrm{Im}\bigg(\int_{a_1}^{a_2} lbq_3k_0(w_x-l\varphi)\overline{\Psi}dx\bigg) - \frac{1}{\beta}\mathrm{Im}\bigg(\int_{a_1}^{a_2} k(bq_3)_x(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\Psi}dx\bigg) \\ & +\frac{1}{\beta}\mathrm{Im}\bigg(\int_{a_1}^{a_2} lbq_3k_0(w_x-l\varphi)\overline{g_3}dx\bigg) - \frac{1}{\beta}\mathrm{Im}\bigg(\int_{a_1}^{a_2} k(bq_3)_x(\varphi_x+\psi+lw)\overline{g_3}dx\bigg) \\ & -\mathrm{Re}\bigg(\int_{a_1}^{a_2} bq_3[\rho_1\Phi\overline{g_3}+g_2\overline{\psi}]dx\bigg). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Finalmente, combinando (5.11), (5.13) e (5.18) obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{a_1}^{a_2}[(\rho_1 kq_1)_x|\Phi|^2+k^2q_{1x}|\varphi_x+\psi+lw|^2+(\rho_1k_0q_2)_x|W|^2+k_0^2q_{2x}|w_x-l\varphi|^2]dx\\
&+\int_{a_1}^{a_2}[(\rho_2bq_3)_x|\Psi|^2+b^2q_{3x}|\psi_x|^2]dx\\
&=\left(\rho_1kq_1|\Phi|^2+k^2q_1|\varphi_x+\psi+lw|^2+\rho_1k_0q_2|W|^2+k_0^2q_2|w_x-l\varphi|^2\right)\Big|_{a_1}^{a_2}\\
&+\left(\rho_2bq_3|\Psi|^2+b^2q_3|\psi_x|^2\right)\Big|_{a_1}^{a_2}+2\text{Re}\bigg(\int_{a_1}^{a_2}(\rho_1kq_1-\rho_1bq_3)\Phi\overline{\Psi}dx\bigg)\\
&+2\text{Re}\bigg(\int_{a_1}^{a_2}(l\rho_1kq_1-l\rho_1k_0q_2)\Phi\overline{W}dx\bigg)+Q(a_j)+J_8+J_9+J_{10},
\end{aligned}\tag{5.19}$$

onde

$$Q(a_j)=-2\text{Re}\bigg(kbq_3(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\psi}\Big|_{a_j}\bigg),\ \text{com } j=1,2;$$

$$J_8=2\text{Re}\bigg(\int_{a_1}^{a_2}lkk_0(q_1-q_2)(\varphi_x+\psi+lw)\overline{(w_x-l\varphi)}dx\bigg);$$

$$J_9=\frac{2}{\beta}\text{Im}\bigg(\int_{a_1}^{a_2}lbq_3k_0(w_x-l\varphi)\overline{\Psi}dx\bigg)-\frac{2}{\beta}\text{Im}\bigg(\int_{a_1}^{a_2}k(bq_3)_x(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\Psi}dx\bigg);$$

$$\begin{aligned}
J_{10}\;=\;&2\text{Re}\bigg(\int_{a_1}^{a_2}bq_3[g_4\overline{\psi_x}+\rho_2\Psi\overline{g_{3x}}-\rho_1\Phi\overline{g_3}-g_2\overline{\psi}]dx\bigg)\\
&+2\text{Re}\bigg(\int_{a_1}^{a_2}k_0q_2\big[g_6\overline{(w_x-l\varphi)}+\rho_1W\overline{(g_{5x}-lg_1)}\big]dx\bigg)\\
&+2\text{Re}\bigg(\int_{a_1}^{a_2}kq_1\big[g_2\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}+\rho_1\Phi\overline{(g_{1x}+f_3+lg_5)}\big]dx\bigg)\\
&+\frac{2}{\beta}\text{Im}\bigg(\int_{a_1}^{a_2}lbq_3k_0(w_x-l\varphi)\overline{g_3}dx\bigg)-\frac{2}{\beta}\text{Im}\bigg(\int_{a_1}^{a_2}k(bq_3)_x(\varphi_x+\psi+lw)\overline{g_3}dx\bigg).
\end{aligned}\tag{5.20}$$

De posse da identidade (5.19) para q_1, q_2 e q_3 funções arbitrarias em $C^1([a_1,a_2])$, vamos mostrar as estimativas (5.8) e (5.9) para $j=1,2$, separadamente.

Caso j=2 : Consideremos q_1, q_2 e q_3 tais que:

$$(kq_1)(x)=(k_0q_2)(x)=(bq_3)(x)=\int_{a_1}^{x}e^{ns}ds,\tag{5.21}$$

para todo $x \in [a_1, a_2]$ e $n \in \mathbb{N}$.

Nosso objetivo agora é estimar cada termo exposto em (5.19), para isso a escolha específica de q_1, q_2 e q_3 nos permitirá realizar esse processo sem maiores complicações, vejamos a seguir. Além disso, vamos utilizar a notação usual para suas derivadas, isto é, "$'$".

Inicialmente vamos estimar o termo $Q(a_2)$, uma vez que estamos no caso $j = 2$, e para isso vamos usar o fato de que $H^1 \subset L^\infty$ com inclusão contínua. Logo, tomando o módulo de $Q(a_2)$ e substituindo a equação (5.3) temos que:

$$|Q(a_2)| \leq \frac{2}{|\beta|}(kbq_3)(a_2)|(\varphi_x + \psi + lw)(a_2)||\Psi(a_2) + g_3(a_2)|.$$

Agora note que:

$$(kbq_3)(a_2) = k(a_2)\int_{a_1}^{a_2} e^{ns}ds \leq \frac{k(a_2)}{n}\left(e^{na_2} - e^{na_1}\right) \leq \frac{k(a_2)e^{na_2}}{n} \leq C_n,$$

para alguma constante $C_n > 0$ dependendo do índice n. Portanto usando a Desigualdade de Hölder e Young, obtemos

$$|Q(a_2)| \leq \frac{C_n}{|\beta|}|(\varphi_x + \psi + lw)(a_2)|^2 + \frac{C_n}{|\beta|}|\Psi(a_2)|^2 + C_n|g_3(a_2)|^2.$$

Como $g_3 \in H^1$ temos que $|g_3(a_2)| \leq \|g_3\|_\infty \leq \|g_3\|_{H^1}$, e assim vem que

$$|Q(a_2)| \leq \frac{C_n}{|\beta|}|(\varphi_x + \psi + lw)(a_2)|^2 + \frac{C_n}{|\beta|}|\Psi(a_2)|^2 + C_n\|G\|_{0,\ell}, \tag{5.22}$$

para alguma outra constante $C_n > 0$.

Partindo agora para a estimativa de J_8, notamos que

$$lkk_0(q_1 - q_2)(x) = l(k_0 - k)(x)\int_{a_1}^{x} e^{ns}ds \leq \frac{l(k_0 - k)(x)e^{nx}}{n} \leq \frac{C}{n}e^{nx}, \tag{5.23}$$

para alguma constante $C > 0$.

Desta forma, tomando o módulo de J_8 e substituindo (5.23) vem que

$$|J_8| \leq \frac{2C}{n}\int_{a_1}^{a_2} e^{nx}|\varphi_x + \psi + lw||w_x - l\varphi|dx,$$

usando a Desigualdade de Young temos que

$$|J_8| \leq \frac{C}{n}\int_{a_1}^{a_2} e^{nx}\left(|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2\right)dx, \tag{5.24}$$

para alguma outra constante $C > 0$.

Para a estimativa do termo J_9 vamos analisar primeiramente que,

$$lk_0bq_3(x) = lk_0(x)\int_{a_1}^{x} e^{ns}ds \leq C_n, \tag{5.25}$$

e ainda,

$$k(bq_3)'(x) = ke^{nx} \leq C_n, \tag{5.26}$$

para alguma constante $C_n > 0$. Logo, tomando o módulo de J_9 e usando a Desigualdades de Hölder, temos a seguinte estimativa

$$|J_9| \leq \frac{C_n}{|\beta|}\|V\|_{a_1,a_2}^2, \tag{5.27}$$

para alguma outra constante $C_n > 0$.

Tomando módulo em J_{10} e usando a Desigualdade de Hölder, temos que

$$|J_{10}| \leq C_n\|V\|_{a_1,a_2}\|G\|_{0,\ell}, \tag{5.28}$$

onde C_n é uma constante positiva.

Observação 17. Essa constante $C_n > 0$ é obtida por argumentos similares as casos anteriores de (5.25) e (5.26), levando em consideração as hipóteses sobre as funções $q_1, q_2, q_3, \rho_1, k, k_0$ e b, nada a nos preocuparmos.

Por fim, retrocedendo à equação (5.19) e substituir (5.21), (5.22), (5.24), (5.27) e (5.28), obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{a_1}^{a_2} [(\rho_1kq_1)'|\Phi|^2 + k^2q_1'|\varphi_x + \psi + lw|^2 + (\rho_1k_0q_2)'|W|^2 + k_0^2q_2'|w_x - l\varphi|^2]dx \\
&+ \int_{a_1}^{a_2} [(\rho_2bq_3)'|\Psi|^2 + b^2q_3'|\psi_x|^2]dx \\
&\leq (\rho_1kq_1)(a_2)|\Phi(a_2)|^2 + (k^2q_1)((a_2))|(\varphi_x + \psi + lw)(a_2)|^2 + (\rho_1k_0q_2)(a_2)|W(a_2)|^2 \\
&+ (k_0^2q_2)(a_2)|(w_x - l\varphi)(a_2)|^2 + (\rho_2bq_3)(a_2)|\Psi(a_2)|^2 + (b^2q_3)(a_2)|\psi_x(a_2)|^2 \\
&+ \frac{C_n}{|\beta|}|(\varphi_x + \psi + lw)(a_2)|^2 + \frac{C_n}{|\beta|}|\Psi(a_2)|^2 + C_n\|G\|_{0,\ell}^2 \\
&+ \frac{C}{n}\int_{a_1}^{a_2} e^{nx}\left(|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2\right)dx + \frac{C_n}{|\beta|}\|V\|_{a_1,a_2}^2 + C_n\|V\|_{a_1,a_2}\|G\|_{0,\ell}.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Note que a constante $C_n > 0$ depende de n, porém este não será um problema relevante, uma vez que tomaremos ele convenientemente. E ainda, tendo em vista que devemos mostrar as estimativas (5.8) e (5.9), vejamos primeiramente que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que (5.9) se verifica, e para isso vamos fazer uso da afirmação seguinte.

Afirmação 6. Considere uma função $q \in C^1([a_1, a_2])$ tal que

$$q(x) = \gamma(x) \int_{a_1}^{x} e^{ns} ds.$$

Se $\gamma \in C^1([a_1, a_2])$ tal que $\gamma(x) \geq \gamma_1 > 0$, para todo $x \in [a_1, a_2]$, então para n suficientemente grande

$$q'(x) \geq \frac{1}{2}\gamma_0 e^{nx}, \tag{5.30}$$

para todo $x \in [a_1, a_2]$.

Com efeito, derivando q temos que

$$q'(x) = \gamma'(x) \left(\frac{e^{nx} - e^{na_1}}{n} \right) + e^{nx}\gamma(x).$$

Sabendo que $\gamma'(x) \geq -\|\gamma'\|_\infty$ e $\gamma(x) > \gamma_0$, temos que

$$q'(x) \geq \|\gamma'\|_\infty \left(\frac{e^{na_1} - e^{nx}}{n} \right) + e^{nx}\gamma_0.$$

ou ainda,

$$q'(x) \geq \frac{1}{n} \left(\|\gamma'\|_\infty e^{na_1} + e^{nx}(n\gamma_0 - \|\gamma'\|_\infty) \right) \geq \frac{1}{n} e^{nx} \left(n\gamma_0 - \|\gamma'\|_\infty \right).$$

Por fim, basta considerar um $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$\frac{n_0\gamma_0}{2} \geq \|\gamma'\|_\infty,$$

e portanto,

$$q'(x) \geq \frac{1}{n} e^{nx} \left(\frac{n\gamma_0}{2} \right) = \frac{\gamma_0}{2} e^{nx}, \, \forall \, n \geq n_0$$

como desejado.

Agora, note que podemos reescrever q_1 dada em (5.21) como:

$$(\rho_1 k q_1)(x) = \gamma_1(x) \int_{a_1}^{x} e^{ns} ds,$$

ou

$$q_1(x) = \gamma_2(x) \int_{a_1}^{x} e^{ns} ds,$$

onde $\gamma_1(x) = \rho_1(x)$ e $\gamma_2(x) = \frac{1}{k(x)}$. Desta forma, pela Afirmação 6 podemos concluir que

$$(\rho_1 k q_1)'(x) \geq \frac{1}{2}\gamma_0 e^{nx}, \tag{5.31}$$

e

$$q_1'(x) \geq \frac{1}{2}\gamma_0 e^{nx},$$

para algum $\gamma_0 > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tendo em vista que $\rho_1, k \in C^1([0,\ell])$. Além disso, como $k(x) \geq c_k, \forall x \in [a_1, a_2]$ temos que

$$k^2(x) q_1'(x) \geq C_k \frac{\gamma_0}{2} e^{nx}, \tag{5.32}$$

onde C_k é uma constante positiva que depende da função k. Analogamente, podemos obter:

$$(\rho_1 k_0 q_2)'(x),\ (\rho_2 b q_3)'(x) \geq \frac{1}{2}\gamma_0 e^{nx}, \tag{5.33}$$

e

$$k_0^2(x) q_2'(x),\ b^2(x) q_3'(x) \geq C_{k_0,b} \frac{\gamma_0}{2} e^{nx}, \tag{5.34}$$

para algum outro $\gamma_0 > 0$, n suficientemente grande e $C_{k_0,b} > 0$ constante dependendo exclusivamente das funções $k_0, b \in C^1([0,\ell])$. Portanto, usando as estimativas (5.31), (5.32), (5.33) e (5.34) temos que

$$\begin{aligned} &\int_{a_1}^{a_2} \left[(\rho_1 k q_1)'|\Phi|^2 + k^2 q_1'|\varphi_x + \psi + lw|^2 + (\rho_1 k_0 q_2)'|W|^2 + k_0^2 q_2'|w_x - l\varphi|^2\right] dx \\ &+ \int_{a_1}^{a_2} [(\rho_2 b q_3)'|\Psi|^2 + b^2 q_3'|\psi_x|^2] dx \\ &\geq \int_{a_1}^{a_2} \frac{M_0 e^{nx}}{2} \left(|\Phi|^2 + |\varphi_x + \psi + lw|^2 + |W|^2 + |w_x - l\varphi|^2 + |\Psi|^2 + |\psi_x|^2\right) dx, \end{aligned} \tag{5.35}$$

para alguma constante $M_0 > 0$ e n suficientemente grande.

Com isso, voltando em (5.29) e usando a estimativa (5.35) podemos reescrevê-la como

$$\begin{aligned} &\frac{M_0}{2} \int_{a_1}^{a_2} e^{nx} \left(|\Phi|^2 + |\varphi_x + \psi + lw|^2 + |W|^2 + |w_x - l\varphi|^2 + |\Psi|^2 + |\psi_x|^2\right) dx \\ &\leq \frac{C}{n} \int_{a_1}^{a_2} e^{nx} \left(|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2\right) dx + C_n |P(a_2)| \\ &+ \frac{C_n}{|\beta|} \|V\|_{a_1,a_2}^2 + C_n \|V\|_{a_1,a_2} \|G\|_{0,\ell} + C_n \|G\|_{0,\ell}^2. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Agora, reagrupando alguns termos em (5.36) concluímos que

$$\left(\frac{M_0}{2}-\frac{C}{n}\right)\int_{a_1}^{a_2} e^{nx}\left(|\Phi|^2+|\varphi_x+\psi+lw|^2+|W|^2+|w_x-l\varphi|^2+|\Psi|^2+|\psi_x|^2\right)dx$$
$$\leq C_n|P(a_2)|+\frac{C_n}{|\beta|}\|V\|^2_{a_1,a_2}+C_n\|V\|_{a_1,a_2}\|G\|_{0,\ell}.$$

Portanto, tomando n suficientemente grande tal que $\left(\frac{M_0}{2}>\frac{C}{n}\right)$, e ainda satisfazer as estimativas obtidas anteriormente, obtemos que

$$\int_{a_1}^{a_2} e^{nx}\left(|\Phi|^2+|\varphi_x+\psi+lw|^2+|W|^2+|w_x-l\varphi|^2+|\Psi|^2+|\psi_x|^2\right)dx$$
$$\leq C|P(a_2)|+\frac{C}{|\beta|}\|V\|^2_{a_1,a_2}+C\|V\|_{a_1,a_2}\|G\|_{0,\ell},$$

para uma nova constante $C>0$. Uma vez fixado o número $n\in\mathbb{N}$ a constante $C>0$ torna-se universal.

Logo, usando o fato que $e^{na_1}\leq e^{nx},\forall a,x\in[a_1,a_2]$ vem que

$$\|V\|^2_{a_1,a_2}\leq C|P(a_2)|+\frac{C}{|\beta|}\|V\|^2_{a_1,a_2}+C\|V\|_{a_1,a_2}\|G\|_{0,\ell},$$

para outra constante $C>0$. E assim, basta tomar $|\beta|>1$ suficientemente grande tal que

$$\|V\|^2_{a_1,a_2}\leq C|P(a_2)|+C\|V\|_{a_1,a_2}\|G\|_{0,\ell},$$

onde $C>0$. Finalmente, usando a Desigualdade de Young com $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno temos

$$\|V\|^2_{a_1,a_2}\leq C_1|P(a_2)|+C_1\|G\|^2_{0,\ell},$$

para uma constante $C_1>0$, provando (5.9) para o caso $j=2$.

Neste momento resta a prova de (5.8) para o caso $j=2$. Sendo assim, observe que uma vez fixado $n\in\mathbb{N}$ retornamos a (5.19) e de maneira similar a (5.29) obtemos

$$(\rho_1kq_1)(a_2)|\Phi(a_2)|^2+(k^2q_1)(a_2)|(\varphi_x+\psi+lw)(a_2)|^2+(\rho_1k_0q_2)(a_2)|W(a_2)|^2$$
$$+(k_0^2q_2)(a_2)|(w_x-l\varphi)(a_2)|^2+(\rho_2bq_3)(a_2)|\Psi(a_2)|^2+(b^2q_3)(a_2)|\psi_x(a_2)|^2$$
$$\leq\int_{a_1}^{a_2}\left[(\rho_1kq_1)'|\Phi|^2+k^2q_1'|\varphi_x+\psi+lw|^2+(\rho_1k_0q_2)'|W|^2+k_0^2q_2'|w_x-l\varphi|^2\right]dx$$
$$+\int_{a_1}^{a_2}\left[(\rho_2bq_3)'|\Psi|^2+b^2q_3'|\psi_x|^2\right]dx$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{C}{|\beta|}|(\varphi_x+\psi+lw)(a_2)|^2+\frac{C}{|\beta|}|\Psi(a_2)|^2+C\|G\|_{0,L}\\
&+C\int_{a_1}^{a_2}e^{nx}\left(|\varphi_x+\psi+lw|^2+|w_x-l\varphi|^2\right)dx+\frac{C}{|\beta|}\|V\|^2_{a_1,a_2}+C\|V\|_{a_1,a_2}\|G\|_{0,\ell},
\end{aligned}
\tag{5.37}
$$

para uma constante $C>0$, ou ainda, de (5.31)-(5.34) existe uma constante $M_1>0$ tal que

$$
\begin{aligned}
&M_1\left(|\Phi(a_2)|^2+|(\varphi_x+\psi+lw)(a_2)|^2+|W(a_2)|^2+|(w_x-l\varphi)(a_2)|^2\right)\\
&+M_1\left(|\Psi(a_2)|^2+|\psi_x(a_2)|^2\right)\\
&\leq C\int_{a_1}^{a_2}\left(|\Phi|^2+|\varphi_x+\psi+lw|^2+|W|^2+|w_x-l\varphi|^2+|\Psi|^2+|\psi_x|^2\right)dx\\
&+Ce^{na_2}\int_{a_1}^{a_2}\left(|\varphi_x+\psi+lw|^2+|w_x-l\varphi|^2\right)dx\\
&+\frac{C}{|\beta|}|(\varphi_x+\psi+lw)(a_2)|^2+\frac{C}{|\beta|}|\Psi(a_2)|^2+C\|G\|^2_{0,\ell}\\
&+\frac{C}{|\beta|}\|V\|^2_{a_1,a_2}+C\|V\|_{a_1,a_2}\|G\|_{0,\ell},
\end{aligned}
\tag{5.38}
$$

Por fim, tomando $|\beta|>1$ suficientemente grande e usando a Desigualdade de Young, concluímos da desigualdade (5.38) que

$$|P(a_2)|\leq C_0\|V\|^2_{a_1,a_2}+C_0\|G\|^2_{0,L},$$

para uma constante $C_0>0$, o que prova (5.8) para o caso $j=2$.

Caso j = 1 : Vamos considerar as funções q_1, q_2 e q_3 tais que:

$$(kq_1)(x)=(k_0q_2)(x)=(bq_3)(x)=-\int_x^{a_2}e^{-ms}ds,$$

para todo $x\in[a_1,a_2]$ e $m\in\mathbb{N}$.

De maneira muito similar ao caso $j=2$, podemos mostrar que

$$|Q(a_1)|\leq\frac{C_m}{|\beta|}|(\varphi_x+\psi+lw)(a_1)|^2+\frac{C_m}{|\beta|}|\Psi(a_1)|^2+C_n\|G\|_{0,\ell},$$

$$lkk_0(q_1-q_2)(x)=l(k-k_0)(x)\int_x^{a_2}e^{-ms}ds\leq\frac{l(k-k_0)(x)e^{-mx}}{m}\leq C_me^{-mx},$$

$$|J_8|\leq\frac{C}{m}\int_{a_1}^{a_2}e^{-mx}\left(|\varphi_x+\psi+lw|^2+|w_x-l\varphi|^2\right)dx,$$

$$|J_9| \leq \frac{C_m}{|\beta|}\|V\|^2_{a_1,a_2},$$

e também,

$$|J_{10}| \leq C_m\|V\|_{a_1,a_2}\|G\|_{0,\ell},$$

para constantes $C_m, C > 0$. Portanto, podemos estimar (5.19) da seguinte forma

$$\begin{aligned}
&\int_{a_1}^{a_2} \left[(\rho_1 k q_1)'|\Phi|^2 + k^2 q_1'|\varphi_x + \psi + lw|^2 + (\rho_1 k_0 q_2)'|W|^2 + k_0^2 q_2'|w_x - l\varphi|^2\right] dx \\
&+ \int_{a_1}^{a_2} [(\rho_2 b q_3)'|\Psi|^2 + b^2 q_3'|\psi_x|^2] dx \\
&\leq (\rho_1 k q_1)(a_1)|\Phi(a_1)|^2 + (k^2 q_1)(a_1)|(\varphi_x + \psi + lw)(a_1)|^2 + (\rho_1 k_0 q_1)(a_2)|W(a_1)|^2 \\
&+ (k_0^2 q_2)(a_1)|(w_x - l\varphi)(a_1)|^2 + (\rho_2 b q_3)(a_1)|\Psi(a_1)|^2 + (b^2 q_3)(a_1)|\psi_x(a_1)|^2 \\
&+ \frac{C_m}{|\beta|}|(\varphi_x + \psi + lw)(a_2)|^2 + \frac{C_m}{|\beta|}|\Psi(a_2)|^2 + C_m\|G\|^2_{0,\ell} \\
&+ \frac{C}{m}\int_{a_1}^{a_2} e^{-mx}\left(|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2\right) dx + \frac{C_m}{|\beta|}\|V\|^2_{a_1,a_2} + C_m\|V\|_{a_1,a_2}\|G\|_{0,\ell}.
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Observação 18. A maneira como consideramos $q_1, q_2, q_3 \in C([a_1, a_2])$ não difere do caso $j = 2$ em termos de estimativas superiormente, e para o caso inferior vamos fazer uso da afirmação abaixo.

Afirmação 7. Considere uma função $q \in C^1([a_1, a_2])$ tal que

$$q(x) = \gamma(x)\int_x^{a_2} e^{-ms} ds, \ \forall\, x \in [a_1, a_2].$$

Se $\gamma \in C^1([a_1, a_2])$ tal que $\gamma(x) \geq \gamma_0 > 0$ para todo $x \in [a_1, a_2]$, então para m suficientemente grande

$$q'(x) \geq \frac{1}{2}\gamma_0 e^{-mx}, \tag{5.40}$$

para todo $x \in [a_1, a_2]$.

Com efeito, derivando q obtemos que

$$\begin{aligned}
q'(x) &= \gamma'(x)\int_x^{a_2} e^{-ms} ds + \gamma(x)e^{-mx} \\
&= \gamma'(x)\left(\frac{e^{-mx} - e^{-ma_2}}{m}\right) + \gamma(x)e^{-mx},
\end{aligned}$$

e como $-\|\gamma'\|_\infty \leq \gamma'(x)$ e $\gamma_0 \leq \gamma(x)$, segue que

$$q'(x) \geq -\|\gamma'\|_\infty\left(\frac{e^{-mx} - e^{-ma_2}}{m}\right) + \gamma_0 e^{-mx},$$

ou ainda,

$$q'(x) \geq \frac{(m\gamma_0 - \|\gamma'\|_\infty)e^{-mx}}{m} + \frac{\|\gamma'\|_\infty e^{-ma_2}}{m} \geq \frac{(m\gamma_0 - \|\gamma'\|_\infty)e^{-mx}}{m}.$$

Portanto, tomando $m_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que $\frac{m_0\gamma_0}{2} \geq \|\gamma'\|_\infty$ obtemos o desejado

$$q'(x) \geq \frac{1}{2}\gamma_0 e^{-mx}, \, \forall \, m \geq m_0.$$

Feito isso, observe que de maneira muito similar ao caso $j = 2$ inequações (5.31) e (5.32), obtemos usando a Afirmação 7 que

$$(\rho_1 k q_1)'(x), \;\; (\rho_1 k_0 q_2)'(x), \;\; (\rho_2 b q_3)'(x) \geq \frac{1}{2}\gamma_0 e^{-mx}, \tag{5.41}$$

e

$$k^2(x)q_1'(x), \;\; k_0^2(x)q_2'(x), \;\; b^2(x)q_3'(x) \geq C_{k,k_0,b}\frac{\gamma_0}{2}e^{-mx}, \tag{5.42}$$

para alguma constante $\gamma_0 > 0$, m suficientemente grande e $C_{k,k_0,b} > 0$ constante que depende exclusivamente das funções $k, k_0, b \in C^1([0,\ell])$. Portanto, usando (5.41) e (5.42) obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{a_1}^{a_2} \left[(\rho_1 k q_1)'|\Phi|^2 + k^2 q_1'|\varphi_x + \psi + lw|^2 + (\rho_1 k_0 q_2)'|W|^2 + k_0^2 q_2'|w_x - l\varphi|^2\right] dx \\
&+ \int_{a_1}^{a_2} [(\rho_2 b q_3)'|\Psi|^2 + b^2 q_3'|\psi_x|^2] dx \\
&\geq \int_{a_1}^{a_2} \frac{M_1 e^{-mx}}{2} \left(|\Phi|^2 + |\varphi_x + \psi + lw|^2 + |W|^2 + |w_x - l\varphi|^2 + |\Psi|^2 + |\psi_x|^2\right) dx,
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Agora, retornando em (5.39) e usando (5.43), temos:

$$\begin{aligned}
&\frac{M_1}{2}\int_{a_1}^{a_2} e^{-mx}\left(|\Phi|^2 + |\varphi_x + \psi + lw|^2 + |W|^2 + |w_x - l\varphi|^2 + |\Psi|^2 + |\psi_x|^2\right) dx \\
&\leq \frac{C}{m}\int_{a_1}^{a_2} e^{-mx}\left(|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2\right) dx + C_n|P(a_1)| \\
&+ \frac{C_m}{|\beta|}\|V\|_{a_1,a_2}^2 + C_m\|V\|_{a_1,a_2}\|G\|_{0,\ell} + C_m\|G\|_{0,\ell}^2,
\end{aligned}$$

Logo, basta considerar m suficientemente grande tal que $\left(\frac{M_1}{2} > \frac{C}{m}\right)$ e que ainda satisfaça as demais afirmações anteriores. Consequentemente, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_{a_1}^{a_2} e^{-mx}\left(|\Phi|^2+|\varphi_x+\psi+lw|^2+|W|^2+|w_x-l\varphi|^2+|\Psi|^2+|\psi_x|^2\right)dx\\&\leq C|P(a_1)|+\frac{C}{|\beta|}\|V\|_{a_1,a_2}^2+C\|V\|_{a_1,a_2}\|G\|_{0,\ell}+C_m\|G\|_{0,\ell}^2,\end{aligned}$$

onde $C>0$ é uma constante universal uma vez fixado $m\in\mathbb{N}$.

Utilizando o fato que $e^{-mx}\geq e^{-ma_2}$, $\forall\, x\in[a_1,a_2]$, tomando $|\beta|>1$ suficientemente grande e usando a Desigualdade de Young com $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno concluímos que

$$\begin{aligned}&\int_{a_1}^{a_2}\left(|\Phi|^2+|\varphi_x+\psi+lw|^2+|W|^2+|w_x-l\varphi|^2+|\Psi|^2+|\psi_x|^2\right)dx\\&\leq C_1|P(a_1)|+C_1\|G\|_{0,\ell}^2,\end{aligned}$$

para alguma outra constante $C_1>0$, ficando provado (5.9) para o caso $j=1$.

Além disso, após fixado $m\in\mathbb{N}$ podemos retornar a (5.19) e de maneira similar a estimativa (5.29), temos

$$\begin{aligned}&M_2\left(|\Phi(a_1)|^2+|(\varphi_x+\psi+lw)(a_1)|^2+|W(a_1)|^2+|(w_x-l\varphi)(a_1)|^2\right)\\&+M_2\left(|\Psi(a_1)|^2+|\psi_x(a_1)|^2\right)\\&\leq C\int_{a_1}^{a_2}\left(|\Phi|^2+|\varphi_x+\psi+lw|^2+|W|^2+|w_x-l\varphi|^2+|\Psi|^2+|\psi_x|^2\right)dx\\&+Ce^{ma_1}\int_{a_1}^{a_2}\left(|\varphi_x+\psi+lw|^2+|w_x-l\varphi|^2\right)dx\\&+\frac{C}{|\beta|}|(\varphi_x+\psi+lw)(a_1)|^2+\frac{C}{|\beta|}|\Psi(a_1)|^2+C\|G\|_{0,\ell}^2\\&+\frac{C}{|\beta|}\|V\|_{a_1,a_2}^2+C\|V\|_{a_1,a_2}\|G\|_{0,\ell},\end{aligned}$$

para alguma contante $C,M_2>0$. Feito isso, basta considerar $|\beta|>1$ suficiente mente grande e a Desigualdade de Young que obtemos

$$\begin{aligned}&|\Phi(a_1)|^2+|(\varphi_x+\psi+lw)(a_1)|^2+|W(a_1)|^2+|(w_x-l\varphi)(a_1)|^2+|\Psi(a_1)|^2+|\psi_x(a_1)|^2\\&\leq\ C_0\|V\|_{a_1,a_2}^2+C_0\|G\|_{0,\ell}^2,\end{aligned}$$

para alguma outra constante $C_0>0$. Logo, fica mostrado (5.8) para o caso $j=1$.

Portanto, feito os casos $j=1,2$ podemos afirmar que existem constantes $C_0,C_1>0$ tais que (5.8) e (5.9) são satisfeitas para $j=1,2$. $\square$

5.2 Resultado de extensão

O resultado de extensão seguirá como um Corolário de Lema 5.1 e sua finalidade tem suma cooperação na conclusão deste trabalho, visto que sua capacidade de estender uma estimativa localizada para todo intervalo em questão foi absolutamente aplicável na conclusão dos resultados dos capítulos 3 e 4.

Corolário 5.2. *Seja $V = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ uma solução regular do sistema (5.1)-(5.6). Se para algum subintervalo $(b_1, b_2) \subset (0, \ell)$, com $b_1 < b_2$, tivermos que*

$$\|V\|^2_{b_1,b_2} \leq \Lambda, \tag{5.44}$$

onde Λ é um parâmetro que pode depender de V, G e β. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|V\|^2_{0,\ell} \leq C\Lambda + C\|G\|^2_{0,\ell}. \tag{5.45}$$

Demonstração. Usando a Proposição 5.1 estimativa (5.8) com b_1, b_2 e (5.44), temos

$$|P(b_j)| \leq C_0\Lambda + C_0\|G\|^2_{0,\ell},\ j = 1, 2. \tag{5.46}$$

Agora, usando a Proposição 5.1 estimativa (5.9) para $a_1 := 0$ e $a_2 := b_2$ e usando ainda (5.46) obtemos

$$\|V\|^2_{0,b_2} \leq C_1C_0\Lambda + C_1C_0\|G\|^2_{0,\ell} + C_1\|G\|^2_{0,\ell}. \tag{5.47}$$

Novamente pela Proposição 5.1 estimativa (5.9), agora com $a_1 := b_2$ e $a_2 := \ell$, e usando (5.46), temos

$$\|V\|^2_{b_2,\ell} \leq C_1C_0\Lambda + C_1C_0\|G\|^2_{0,\ell} + C_1\|G\|^2_{0,\ell}. \tag{5.48}$$

Portanto, somando (5.47) e (5.48) concluímos que

$$\|V\|^2_{0,\ell} \leq 2C_1C_0\Lambda + 2(C_1C_0 + C_1)\|G\|^2_{0,\ell}.$$

Logo, existe $C > 0$ tal que

$$\|V\|^2_{0,\ell} \leq C\Lambda + C\|G\|^2_{0,\ell}.$$

□

6 CONCLUSÃO

No Capítulo 3, consideramos primeiramente um sistema de Bresse termoelástico com acoplamento térmico nas forças de cisalhamento e no momento fletor e, juntamente à Desigualdade de Observabilidade presente no Capítulo 5, fomos capazes de mostrar que a solução do problema (3.1)-(3.4) decai do tipo exponencial para igualdade de velocidades de ondas $\chi = 0$ como se vê no Teorema 3.19. Caso contrário, para $\chi \neq 0$, a solução decai do tipo polinomial com taxa de decaimento de $t^{1/2}$ para dados inicias regulares como segue no Teorema 3.20, com otimalidade de taxa para o caso de condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann, conforme o Teorema 3.34.

Adicionalmente, no Capítulo 4 consideramos o mesmo sistema do Capítulo 3 acrescentado de uma dissipação localizada. E novamente, usando dos resultados do Capítulo 5 mostramos que a solução do problema (4.1)-(4.4) se estabiliza com um comportamento que independe de relação alguma entre velocidades de propagação de ondas. Isto é, provamos que a solução decai do tipo exponencial para qualquer condição de contorno estabelecida e independente de relação entre coeficientes, como segue no Teorema 4.5.

Tais resultados foram considerados inicialmente neste trabalho, não sendo apresentados na literatura, até onde sabemos.

REFERÊNCIAS

[1] ADAMS, R. A., AND FOURNIER, J. J. *Sobolev spaces*, vol. 140. Elsevier, 2003.

[2] ALVES, M., SILVA, M. J., MA, T., AND RIVERA, J. M. Invariance of decay rate with respect to boundary conditions in thermoelastic timoshenko systems. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik 67*, 3 (2016), 70.

[3] BENAISSA, A., MILOUDI, M., AND MOKHTARI, M. Global existence and energy decay of solutions to a bresse system with delay terms. *Comment. Math. Univ. Carolin 56*, 2 (2015), 169–186.

[4] BORICHEV, A., AND TOMILOV, Y. Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups. *Mathematische Annalen 347*, 2 (2010), 455–478.

[5] BRESSE, J. A. C. *Cours de mécanique appliquée, professé à l'École impériale des ponts et chausées*. Gauthier-Villars, 1868.

[6] BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.

[7] DE LIMA, P. R., AND SARE, H. D. F. Stability of thermoelastic bresse systems. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik 70*, 1 (2019), 3.

[8] ENGEL, K.-J., AND NAGEL, R. *A short course on operator semigroups*. Springer Science & Business Media, 2006.

[9] EVANS, L. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[10] LAGNESE, J. E., LEUGERING, G., AND SCHMIDT, E. G. *Modeling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures*. Springer Science & Business Media, 2012.

[11] LIU, Z., AND RAO, B. Energy decay rate of the thermoelastic bresse system. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik 60*, 1 (2009), 54–69.

[12] ODEN, J. T.; DEMKOWICZ, L. *Applied Functional Analysis*, 2 ed. Taylor & Francis, Florida, 2010.

[13] PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer, New York, 1983.

[14] PRÜSS, J. On the spectrum of c_0-semigroups. *Transactions of the American Mathematical Society 284*, 2 (1984), 847–857.

[15] RIFO, S., VILLAGRAN, O. V., AND RIVERA, J. E. M. The lack of exponential stability of the hybrid bresse system. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 436*, 1 (2016), 1–15.

[16] RIVERA, J. E. M. *Estabilização de semigrupos e aplicações*. Série de Métodos Matemáticos, Rio de Janeiro, 2008.

[17] RIVERA, J. E. M., AND ÁVILA, A. I. Rates of decay to non homogeneous Timoshenko model with tip body. *Journal of Differential Equations 258*, 10 (2015), 3468–3490.

[18] ZHENG, S. *Nonlinear evolution equations*. Chapman and Hall/CRC, 2004.