



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

ROMÁRIO TOMILHERO FRIAS

**SISTEMA DE BRESSE COM ACOPLAMENTO  
TERMOELÁSTICO NO MOMENTO FLETOR E LEI DE  
FOURIER**

---

Londrina

2020

ROMÁRIO TOMILHERO FRIAS

**SISTEMA DE BRESSE COM ACOPLAMENTO  
TERMOELÁSTICO NO MOMENTO FLETOR E LEI DE  
FOURIER**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Profa. Dra. Michele de Oliveira Alves

Londrina  
2020

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da  
Universidade Estadual de Londrina**

**Dados Internacionais de Catalogação -na-Publicação (CIP)**

Frias, Romário Tomilhero.

Sistema de Bresse com Acoplamento Termoelástico no Momento Fletor e Lei de Fourier / Romário Tomilhero Frias. – Londrina, 2020.

88 f. : il.

Orientador: Michele de Oliveira Alves.

Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2020.

Inclui Bibliografia.

1. Sistema de Bresse - Tese. 2. Lei de Fourier - Tese. 3. Semigrupos de Operadores Lineares - Tese. 4. Comportamento Assintótico. -Tese. I. Alves, Michele de Oliveira. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

CDU 51

ROMÁRIO TOMILHERO FRIAS

**SISTEMA DE BRESSE COM ACOPLAMENTO  
TERMOELÁSTICO NO MOMENTO FLETOR E LEI DE  
FOURIER**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Profa. Dra. Michele de Oliveira Alves  
Universidade Estadual de Londrina

---

Profa. Dra. Valéria Neves Domingos Cavalcanti  
Universidade Estadual de Maringá

---

Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva  
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 30 de julho de 2020.

*Dedico este trabalho em memória de meu avô,  
Sebastião Tomilhero Frias.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à minha família, por sempre me apoiar e acreditar em mim.

À minha orientadora, Prof. Dra. Michele de Oliveira Alves, por todos os ensinamentos, pelo incentivo e pelo apoio.

Aos professores do PGMAC.

À professora Valéria Neves Domingos Cavalcanti, ao professor Márcio Antonio Jorge da Silva e ao professor Adeal Lino Ferreira pelas contribuições nesse trabalho.

Aos colegas do PGMAC, em especial, ao Eduardo, à Jésika, ao Luiz e ao Gabriel, por acompanharem a minha trajetória e por terem me ajudado muito.

Às amigas de fora da universidade, em especial, ao Maurício, ao Maycon, à Tabaty, à Maiara e à Taynara.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

*"...Vai, vai lá, não tenha medo do pior, eu sei que tudo vai mudar, você vai transformar o mundo ao seu redor, mas não vacila, muleque de vila..."*  
*(Projota)*

FRIAS, Romário Tomilhero. **Sistema de Bresse com acoplamento Termoelástico no Momento Fletor e Lei de Fourier** . 2020. 88. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

## RESUMO

Neste trabalho estuda-se um sistema de Bresse com acoplamento termoelástico no momento fletor considerando a lei de Fourier para o fluxo de calor. O principal objetivo é fazer uma apresentação mais detalhada da existência, unicidade e comportamento assintótico do problema descrito em [8]. A teoria de semigrupos de operadores lineares é utilizada para garantir a existência e unicidade de solução. Uma condição necessária e suficiente é dada para a obtenção da estabilidade exponencial do semigrupo e verifica-se que sob certas condições obtém-se decaimento o polinomial da solução.

**Palavras-chave:** Sistema de Bresse. Lei de Fourier. Semigrupos de Operadores Lineares. Comportamento Assintótico.

FRIAS, Romário Tomilhero. **Sistema de Bresse com acoplamento Termoelástico no Momento Fletor e Lei de Fourier** . 2020. 88. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

### ABSTRACT

In this work we study a Bresse system with thermoelastic coupling in the bending moment considering the Fourier law for the heat flux. The main goal is to consider a more detailed presentation of the existence, uniqueness and asymptotic behavior of the problem described in [8]. The theory of semigroups of linear operators is used to guarantee the existence and uniqueness of the solution. A necessary and sufficient condition for the exponential stability of the semigroup is given and, under certain conditions, a polynomial decay of the solution is obtained.

**Keywords:** Bresse System. Fourier's Law. Semigroups of Linear Operators. Asymptotic Behavior.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES</b>	<b>15</b>
2.1	ANÁLISE FUNCIONAL . . . . .	15
2.2	ESPAÇOS $L^p$ E DE SOBOLEV . . . . .	18
2.3	SEMIGRUPOS LINEARES . . . . .	23
2.4	DESIGUALDADE DE OBSERVABILIDADE PARA SISTEMAS DO TIPO BRESSE	26
<b>3</b>	<b>SISTEMA DE BRESSE TERMOELÁSTICO</b>	<b>28</b>
3.1	FORMULAÇÃO ABSTRATA . . . . .	28
3.2	EXISTÊNCIA E UNICIDADE . . . . .	36
<b>4</b>	<b>ESTABILIDADE</b>	<b>50</b>
4.1	ESTABILIDADE EXPONENCIAL . . . . .	73
4.2	ESTABILIDADE POLINOMIAL PARA DADOS MAIS REGULARES . . . . .	84
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>87</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O objetivo do presente trabalho é apresentar resultados descritos em [8] de uma forma didática e detalhada. Além disso, utilizando um resultado obtido em [15], melhoramos resultados estabelecidos em [8], no que concerne as taxas de decaimento polinomial, para o sistema termoelástico de Bresse.

O sistema de Bresse, é um sistema de equações diferenciais parciais que descreve o comportamento de uma viga arqueada fina, denominado com este nome em homenagem ao engenheiro francês Jacques Antoine Charles Bresse (1822-1883).



Figura 1.1: Jacques Antoine Charles Bresse (Fonte: [11], p.719).

Sem levar em consideração qualquer variação na temperatura, isto é, em sua forma isotérmica, o sistema de Bresse leva em consideração três funções que representam o deslocamento vertical, o ângulo de rotação da seção transversal e o deslocamento longitudinal, denotadas respectivamente por  $\varphi(t, x)$ ,  $\psi(t, x)$  e  $w(t, x)$ . Tais funções dependem de uma variável espacial  $x \in [0, L]$  e uma temporal  $t \geq 0$ , onde  $L$  é o comprimento de uma linha de referência que atravessa o centro da viga. Para este caso, de acordo com Bresse em [3], as leis constitutivas do sistema são dadas por

$$\begin{cases} \rho_0 A \varphi_{tt} = Q_x + lN, \\ \rho_0 I \psi_{tt} = M_x - Q, \\ \rho_0 A w_{tt} = N_x - lQ, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde  $\rho_0$  é a densidade,  $l$  é a curvatura inicial,  $A$  a área da seção transversal,  $I$  o momento de inércia da seção transversal (com respeito ao eixo vertical) e as funções  $Q$ ,  $N$  e  $M$  representam a força de cisalhamento, a força axial e o momento fletor, respectivamente. Temos ainda que

$$\begin{cases} Q = GA(\varphi_x + \psi + lw), \\ N = EA(w_x - l\varphi), \\ M = El\psi_x, \end{cases} \quad (1.2)$$

onde  $G$  é o módulo de cisalhamento,  $h$  é o coeficiente de cisalhamento e  $E$  é o módulo da elasticidade.

Na figura 1.2, temos uma representação das funções  $\varphi$ ,  $\psi$  e  $w$  presentes no sistema de Bresse. Após a deformação da viga, uma partícula  $P$  da linha de referência passa a ocupar a posição  $P'$ .

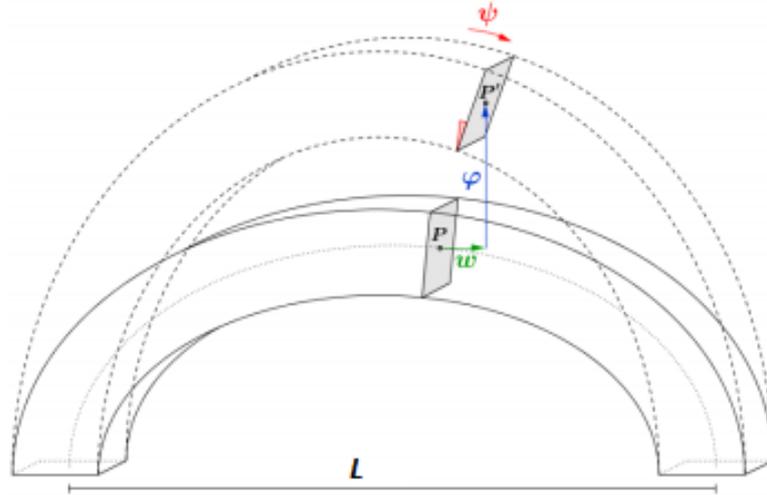


Figura 1.2: Viga arqueada fina (Fonte: [13], p.13).

Substituindo (1.1) em (1.2) obtemos o seguinte sistema conservativo de Bresse

$$\begin{cases} \rho_0 A \varphi_{tt} - GA(\varphi_x + \psi + lw)_x - lEA(w_x - l\varphi) = 0, \\ \rho_0 I \psi_{tt} - El\psi_{xx} + GA(\varphi_x + \psi + lw) = 0, \\ \rho_0 A w_{tt} - EA(w_x - l\varphi)_x + lGA(\varphi_x + \psi + lw) = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Para simplificar as notações consideremos

$$\rho_1 = \rho_0 A, \quad \rho_2 = \rho_0 I, \quad k = GA, \quad b = El, \quad k_0 = EA. \quad (1.4)$$

Assim, usando (1.4) temos que (1.3) pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) = 0, \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Mais recentemente, Lagnese, Leugering e Schmidt em [12] obtiveram um sistema mais geral que rege a movimentação de uma viga arqueada fina considerando mais uma função (ou mais de uma) que representa a variação da temperatura desta viga, tal sistema é denominado

como sistema termoelástico de Bresse.

No caso em que se considera o fluxo de calor agindo somente no ângulo de rotação, o sistema termoelástico é descrito por

$$\begin{cases} \rho_0 A \varphi_{tt} = Q_x + lN, \\ \rho_0 I \psi_{tt} = M_x - Q, \\ \rho_0 A w_{tt} = N_x - lQ, \\ \rho_0 c_v \theta_t = q_x - \gamma T_0 \psi_{tx}, \end{cases} \quad (1.6)$$

com leis termoelásticas constitutivas

$$\begin{cases} Q = GA(\varphi_x + \psi + lw), \\ N = EA(w_x - l\varphi), \\ M = EI\psi_x - \gamma\theta, \end{cases} \quad (1.7)$$

onde  $q$  representa o fluxo de calor,  $c_v$  é a capacidade térmica,  $T_0$  é a temperatura de referência,  $\gamma$  é uma constante de acoplamento e as demais notações permanecem as mesmas de (1.1). Além disso, considerando a Lei de Fourier de condução do calor, a função  $q$  é dada por

$$q = \frac{1}{\rho_0 c_v} \theta_x. \quad (1.8)$$

Assim, substituindo (1.7) e (1.8) em (1.6) e considerando

$$\rho_1 = \rho_0 A, \quad \rho_2 = \rho_0 I, \quad k = GA, \quad b = El, \quad k_0 = EA, \quad m = \frac{\gamma T_0}{\rho_0 c_v}, \quad k_1 = \frac{1}{(\rho_0 c_v)^2}, \quad (1.9)$$

obtemos o sistema termoelástico de Bresse

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) = 0 & \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = 0 & \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = 0 & \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \\ \theta_t - k_1 \theta_{xx} + m\psi_{xt} = 0 & \text{em } (0, \infty) \times (0, L). \end{cases} \quad (1.10)$$

Correspondente ao sistema (1.10), consideremos as seguintes condições iniciais

$$\begin{aligned} \varphi(0, \cdot) = \varphi_0, \quad \varphi_t(0, \cdot) = \varphi_1, \quad \psi(0, \cdot) = \psi_0, \quad \psi_t(0, \cdot) = \psi_1, \\ w(0, \cdot) = w_0, \quad w_t(0, \cdot) = w_1, \quad \theta(0, \cdot) = \theta_0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

E condições de fronteira de Dirichlet

$$\begin{aligned}\varphi(t, 0) &= \varphi(t, L) = \psi(t, 0) = \psi(t, L) = w(t, 0) = w(t, L) = 0, \\ \theta(t, 0) &= \theta(t, L) = 0 \text{ para } t \in (0, \infty),\end{aligned}\tag{1.12}$$

ou condições de fronteira de Dirichlet-Neumann

$$\begin{aligned}\varphi(t, 0) &= \varphi(t, L) = \psi_x(t, 0) = \psi_x(t, L) = w_x(t, 0) = w_x(t, L) = 0, \\ \theta(t, 0) &= \theta(t, L) = 0 \text{ para } t \in (0, \infty).\end{aligned}\tag{1.13}$$

O sistema (1.10) com condições iniciais (1.11) e condições de fronteira (1.12) e (1.13) foi estudado por [8], onde os autores mostraram que a estabilidade da solução do sistema está diretamente ligada as seguintes constantes

$$\chi := \left| 1 - \frac{k}{k_0} \right| e \chi_0 := \left| \frac{b}{k} \rho_1 - \rho_2 \right|.\tag{1.14}$$

Em [8], Fatori e Rivera mostraram que a solução do sistema é exponencialmente estável se, e somente se,  $\chi = \chi_0 = 0$ . Além disso, mostraram que se  $\chi = \chi_0 = 0$  não se satisfaz o semigrupo associado ao sistema (1.10)-(1.11) em geral possui uma taxa de decaimento  $t^{-1/6}$  e que para o caso em que  $\chi = 0$  e  $\chi_0 \neq 0$  a taxa é  $t^{-1/3}$ .

Neste trabalho faremos uma apresentação mais detalhada de alguns resultados obtidos em [8]. No Capítulo 2 apresentaremos alguns resultados de análise funcional, espaços de Sobolev e semigrupos lineares que nos auxiliarão durante todo o estudo. No Capítulo 3 mostraremos a existência e unicidade de solução para o problema (1.10)-(1.11) com condições de fronteira (1.12) e (1.13). Por fim, no Capítulo 4 trazemos a estabilidade exponencial e polinomial do problema dada as devidas hipóteses. Ressaltamos ainda que faremos neste capítulo uma melhora em relação ao artigo apresentado em [8], a saber, mostraremos que para o caso  $\chi_0 \neq 0$  e  $\chi = 0$  a taxa de decaimento da solução do semigrupo associado ao sistema (1.10) com as condições iniciais (1.11) e condições de fronteira (1.12) e (1.13) pode ser melhorada para  $t^{-1/2}$ , e que no caso de  $\chi \neq 0$  e o semigrupo associado ao sistema (1.10)-(1.11) com condições de fronteira (1.13) ser polinomialmente estável, a taxa de decaimento da solução não pode ser melhor que  $t^{-1/2}$ .

## 2 PRELIMINARES

Neste capítulo serão apresentados resultados que vão ser utilizados no decorrer do trabalho, resultados estes de Análise Funcional, espaços  $L^p$ , de Sobolev, e teoria de Semigrupos Lineares.

### 2.1 ANÁLISE FUNCIONAL

**Definição 2.1.** *Uma norma em um espaço vetorial (real ou complexo)  $X$  é uma função a valores reais, cujo valor em um vetor  $x \in X$  é denotado por  $\|x\|_X$  e que satisfaz as propriedades:*

(N1)  $\|x\|_X \geq 0$ ,

(N2)  $\|x\|_X = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,

(N3)  $\|\alpha x\|_X = |\alpha| \|x\|_X$ ,

(N4)  $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$ ,

Onde  $x, y$  são vetores arbitrários em  $X$  e  $\alpha$  qualquer escalar no corpo.

**Definição 2.2.** *Uma norma  $\|\cdot\|_1$  em um espaço vetorial  $X$  é dita equivalente a norma  $\|\cdot\|_2$  em  $X$ , se existirem números reais positivos  $a$  e  $b$  tais que, para todo  $x \in X$*

$$\|x\|_1 \leq a\|x\|_2 \text{ e } \|x\|_2 \leq b\|x\|_1.$$

**Definição 2.3.** *Um espaço de Banach é um espaço vetorial normado completo, isto é, um espaço vetorial normado onde toda sequência de Cauchy é convergente.*

**Teorema 2.4.** *Um subespaço  $Y$  de um espaço de Banach  $X$  é completo se, e somente se,  $Y$  é fechado em  $X$ .*

*Demonstração.* Ver [10], página 67, Teorema 2.3-1. □

**Definição 2.5.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados sobre um corpo  $\mathbb{K}$  e  $T : D(T) \rightarrow Y$  um operador, onde  $D(T) \subset X$ . Diz-se que  $T$  é um operador linear se para quaisquer  $x, y \in D(T)$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,*

- $T(x + y) = T(x) + T(y)$ ,
- $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ .

*Denota-se:  $D(T)$  o domínio de  $T$ ;  $Im(T)$  a imagem de  $T$ ; e  $Nuc(T)$  o núcleo de  $T$ .*

*No caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $T$  é dito um funcional linear.*

**Definição 2.6.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados sobre  $\mathbb{C}$  e  $T : D(T) \rightarrow Y$  um operador.  $T$  é dito um operador antilinear se para quaisquer  $x, y \in D(T)$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,*

- $T(x + y) = T(x) + T(y)$ ,
- $T(\alpha x) = \bar{\alpha}T(x)$ .

**Definição 2.7.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados e  $T : D(T) \rightarrow Y$  um operador, onde  $D(T) \subset X$ . O operador  $T$  é dito limitado se existir um número real positivo  $c$  tal que para todo  $x \in D(T)$ ,*

$$\|T(x)\|_Y \leq c\|x\|_X.$$

*Nestas condições, a norma do operador  $T$  será dada por*

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}.$$

**Observação 2.8.** *Denota-se por  $\mathcal{L}(X, Y)$  o espaço vetorial dos operadores lineares limitados  $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ . Quando  $Y = \mathbb{K}$ , representa-se  $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$  por  $X'$  e diz-se que  $X'$  é o dual topológico de  $X$ . Além disso, escreve-se apenas  $\mathcal{L}(X)$  para o caso  $\mathcal{L}(X, X)$ .*

**Teorema 2.9.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados e  $T : D(T) \rightarrow Y$  um operador linear. Então:*

- (a)  *$T$  é contínuo se, e somente se,  $T$  é limitado.*  
 (b) *Se  $T$  é contínuo em um único ponto, então  $T$  é contínuo.*

*Demonstração.* Ver [10], página 97, Teorema 2.7-9. □

**Definição 2.10.** *(Forma sesquilinear, produto interno). Sejam  $X$  e  $Y$  dois  $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais. Chamamos a aplicação  $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$  de forma sesquilinear em  $X \times Y$  quando  $a(\cdot, \cdot)$  satisfaz as seguintes condições:*

- $a(x + y, z) = a(x, z) + a(y, z)$ ,  $\forall x, y \in X$ ,  $\forall z \in Y$ ;
- $a(x, y + z) = a(x, y) + a(x, z)$ ,  $\forall x \in X$ ,  $\forall y, z \in Y$ ;
- $a(cx, y) = ca(x, y)$ ,  $\forall x \in X$ ,  $\forall y \in Y$ ,  $\forall c \in \mathbb{K}$ ;
- $a(x, cy) = \bar{c}a(x, y)$ ,  $\forall x \in X$ ,  $\forall y \in Y$ ,  $\forall c \in \mathbb{K}$ .

*Quando  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , chamamos  $a(\cdot, \cdot)$  de forma bilinear. No caso em que  $X=Y$  valem as propriedades adicionais*

- $a(x, y) = \overline{a(x, y)}$ ,  $\forall (x, y) \in X \times X$ ,
- $a(x, x) \geq 0$ ,  $\forall x \in X$ ,
- $a(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ,  $\forall x \in X$ .

*A forma sesquilinear  $a(\cdot, \cdot)$  é chamada de produto interno e representada por  $(\cdot, \cdot)_X$ .*

**Definição 2.11.** (Continuidade de uma forma sesquilinear). Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços vetoriais normados e  $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$  uma forma sesquilinear. Dizemos que  $a$  é contínua (limitada) quando existe uma constante  $C > 0$  tal que  $|a(x, y)| \leq C\|x\|_X\|y\|_Y$ , para todo par  $(x, y) \in X \times Y$ .

**Definição 2.12.** (Coercividade de uma forma sesquilinear). Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços vetoriais normados e  $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$  uma forma sesquilinear. Dizemos que  $a$  é coerciva quando existe uma constante  $C > 0$  tal que  $\operatorname{Re}(a(x, x)) \geq C\|x\|_X^2$ , para todo  $x \in X$ .

**Definição 2.13.** (Norma proveniente do produto interno). Sejam  $X$  um espaço vetorial e  $(\cdot, \cdot)_X$  um produto interno em  $X \times X$ . Diz-se que a norma definida por  $\|x\|_X = \sqrt{(x, x)_X}$  provém do (ou é induzida pelo) produto interno  $(\cdot, \cdot)_X$ .

**Definição 2.14.** (Espaço de Hilbert). Um espaço vetorial com produto interno é dito um espaço de Hilbert se for completo em relação à norma induzida pelo produto interno.

**Teorema 2.15.** (Teorema de Lax-Milgram). Sejam  $X$  um espaço de Hilbert real (complexo) e uma forma bilinear (sesquilinear) contínua e coerciva  $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$ . Então para todo funcional linear (antilinear)  $f$  limitado, existe um único  $x \in X$  tal que  $a(x, y) = f(y)$ , para todo  $y \in X$ .

*Demonstração.* Para o caso real, ver [4], página 140, Corolário 5.8. Para o caso complexo, ver [16], página 595, Corolário 6.6.2.  $\square$

**Definição 2.16.** (Resolvente e espectro). Sejam  $X$  um espaço de Banach complexo e um operador linear  $B : D(B) \subset X \rightarrow X$ . O conjunto resolvente de  $B$  é representado por  $\rho(B)$  e é dado por

$$\rho(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - B)^{-1} \text{ existe, é limitado e tem domínio denso em } X\}.$$

O espectro de  $B$  é o conjunto  $\sigma(B) = \mathbb{C} - \rho(B)$ .

**Definição 2.17.** (Operador dissipativo). Seja  $X$  um espaço de Hilbert. Diz-se que um operador linear  $B : D(B) \subset X \rightarrow X$  é dissipativo quando  $\operatorname{Re}(Bx, x)_X \leq 0$ , para todo  $x \in D(B)$ .

**Lema 2.18.** Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $B_1 \in \mathcal{L}(X)$  invertível tal que  $B_1^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ . Se  $B_2 \in \mathcal{L}(X)$  é tal que

$$\|B_2\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\|B_1^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}},$$

então  $B_1 + B_2$  é linear, limitado e invertível.

*Demonstração.* Ver [19], Lema 2.12.1.  $\square$

**Teorema 2.19.** *Sejam  $X$  um espaço de Hilbert e  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  um operador linear dissipativo.*

A) *Se  $\text{Im}(\lambda_0 I - A) = X$  para algum  $\lambda_0 > 0$ , então  $\text{Im}(\lambda I - A) = X$  para todo  $\lambda > 0$ .*

B) *Se  $\text{Im}(I - A) = X$ , então  $\overline{D(A)} = X$ .*

*Demonstração.* Ver [17], páginas 15 e 16, Teoremas 4.5 e 4.6. □

**Definição 2.20.** *(Operador compacto). Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados e  $B : X \rightarrow Y$  um operador linear. Diz-se que  $B$  é compacto quando, para todo conjunto limitado  $X_1 \subset X$ , o conjunto  $B(X_1)$  é relativamente compacto em  $Y$ .*

**Teorema 2.21.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados e  $B : X \rightarrow Y$  um operador linear. Então,  $B$  é compacto se, e somente se, para toda sequência limitada  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  em  $X$  a sequência  $\{Bx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  possui uma subsequência convergente em  $Y$ .*

*Demonstração.* Ver [10], página 407, Teorema 8.1-3. □

**Definição 2.22.** *(Operador com resolvente compacto). Seja  $X$  um espaço de Banach e um operador linear  $B : D(B) \subset X \rightarrow X$ . Diz-se que  $B$  tem resolvente compacto quando existe  $\lambda \in \rho(B)$  tal que  $(\lambda I - B)^{-1}$  é compacto.*

**Proposição 2.23.** *Sejam  $(X, \|\cdot\|_X)$  em espaço de Banach e  $B : D(B) \subset X \rightarrow X$  um operador linear com resolvente não vazio. Então,  $B$  tem resolvente compacto se, e somente se, a aplicação inclusão  $i : (D(B), \|\cdot\|_{D(B)}) \rightarrow (X, \|\cdot\|_X)$  é compacta.*

*Demonstração.* Ver [6], Proposição 5.8. □

**Proposição 2.24.** *Seja  $X$  um espaço de Banach. Se  $B : D(B) \subset X \rightarrow X$  é um operador linear com resolvente compacto, então o espectro de  $B$  é formado por autovalores de  $B$ .*

*Demonstração.* Ver [6], Corolário 1.15. □

## 2.2 ESPAÇOS $L^p$ E DE SOBOLEV

**Definição 2.25.** *(Espaços  $L^p$ ). Seja  $I \subset \mathbb{R}$  aberto e  $0 < p < \infty$ . Seja  $\mathcal{L}^p(I)$  o conjunto de todas as funções mensuráveis  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  tais que  $|f|^p$  é integrável (no sentido Lebesgue) em  $I$ , ou seja,*

$$\mathcal{L}^p(I) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{K}; f \text{ é mensurável e } \int_I |f(x)|^p dx < \infty \right\},$$

onde  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Diremos que duas funções  $f, g \in \mathcal{L}^p(I)$  são equivalentes ( $f \sim g$ ), se  $f = g$  q.s. (quase sempre) em  $I$ . Indicaremos por  $L^p(I)$  o conjunto

$$L^p(I) = \mathcal{L}^p(I) / \sim .$$

Para  $p = \infty$ , definimos

$$L^\infty(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ é limitada q.s. em } I\}.$$

**Observação 2.26.** Pela definição temos que os elementos do conjunto  $L^p$  são classes de equivalência de funções em  $\mathcal{L}^p(I)$ . Porém, nos convém tratar esses elementos como sendo funções. Assim podemos escrever  $f \in L^p$  no lugar de  $[f] \in L^p$ .

**Observação 2.27.** Temos que

(i) Se  $0 < p < \infty$ , então  $L^p(I)$  é um espaço vetorial.

(ii) Seja  $f \in L^p$  e  $0 < p < \infty$ . Denotaremos a norma de  $L^p(I)$  por

$$\|f\|_{L^p(I)} = \left( \int_I |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(iii) Seja  $f \in L^\infty(I)$ . Denotaremos a norma em  $L^\infty(I)$  por

$$\|f\|_{L^\infty(I)} = \sup_{x \in I} \text{ess}|f(x)| = \inf\{C > 0; |f(x)| \leq C \text{ q.s. em } I\}.$$

(iv) Quando  $p=2$ , tem-se que  $L^2(I)$  é equipado com o produto interno

$$(f, g)_{L^2} = \int_I f(x) \overline{g(x)} dx.$$

**Proposição 2.28.** Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  aberto e  $1 \leq p \leq \infty$ . O espaço  $(L^p(I), \|\cdot\|_{L^p})$  é um espaço de Banach.

*Demonstração.* Ver [5], página 150, Exemplo 5.26. □

**Definição 2.29.** Uma função mensurável  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  é dita localmente integrável se

$$\int_K |f(x)| dx < \infty, \forall K \subset I \text{ compacto}.$$

Indicaremos por  $L^p_{loc}(I)$  o conjunto de todas as funções mensuráveis  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  tais que  $|f|^p$  é localmente integrável, isto é,

$$L^p_{loc}(I) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{K}; \int_K |f(x)|^p dx < \infty, \forall K \subset I \text{ compacto} \right\}.$$

**Definição 2.30.** Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo. Denotamos por  $L^2_*(I)$  o espaço das funções de média nula dado por

$$L^2_*(I) = \left\{ u \in L^2; \int_I u(x) dx = 0 \right\}.$$

**Proposição 2.31.** *Se  $I$  for um intervalo limitado, então o espaço  $L_*^2(I)$  é Banach. Consequentemente,  $L_*^2(I)$  é um espaço de Hilbert com o produto interno de  $L^2(I)$ .*

*Demonstração.* Seja  $u \in \overline{L_*^2(I)}$ , existe uma sequência  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L_*^2(I)$ , tal que

$$u_n \rightarrow u, \text{ em } L^2(I). \quad (2.1)$$

Com isso, observe que

$$\int_I u(x) dx = \int_I u(x) dx - \int_I u_n(x) dx = \int_I u(x) - u_n(x) dx,$$

e portanto, usando propriedades para integrais, temos

$$\left| \int_I u(x) dx \right| = \left| \int_I u(x) - u_n(x) dx \right| \leq \int_I |u(x) - u_n(x)| dx \quad (2.2)$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder, temos

$$\int_I |u(x) - u_n(x)| dx \leq \left( \int_I |u(x) - u_n(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_I dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|I|} \|u_n - u\|_{L^2}. \quad (2.3)$$

Substituindo (2.3) em (2.2) e usando (2.1), segue que

$$\left| \int_I u(x) dx \right| \leq \sqrt{|I|} \|u_n - u\|_{L^2} \rightarrow 0,$$

Logo

$$\int_I u(x) dx = 0. \quad (2.4)$$

Provando que  $L_*^2$  é um subespaço fechado de  $L^2(I)$ , consequentemente, pelo Teorema 2.4 tem-se que  $L_*^2(I)$  é Banach.  $\square$

**Proposição 2.32.** *Seja  $0 < p < \infty$  e  $a, b \geq 0$ , então*

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

*Demonstração.* Ver [1], página 23, Lema 2.2.  $\square$

**Definição 2.33.** *(Espaços  $W^{1,p}$ ). Seja  $I = (a, b)$  com  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  e  $p \in \mathbb{R}$  com  $1 \leq p \leq \infty$ . O espaço de Sobolev  $W^{1,p}(I)$  é definido por*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I); \text{ existe } g \in L^p(I) \text{ com } \int_I u \varphi' dx = - \int_I g \varphi dx, \forall \varphi \in C_0^1(I) \right\}.$$

No caso particular  $p=2$ , denotamos  $W^{1,2}(I) = H^1(I)$ .

O espaço  $W^{1,p}(I)$  é munido da norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p},$$

Ou ainda,

$$\|u\|_{W^{1,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}}.$$

As duas normas definidas acima são equivalentes.

**Observação 2.34.** Dada  $u \in W^{1,p}(I)$ , a função  $g$  é chamada de derivada fraca de  $u$  em  $W^{1,p}(I)$  e será denotada por  $u_x$ .

**Teorema 2.35.** Se  $0 \leq p \leq \infty$ , então  $W^{1,p}(I)$  é um espaço de Banach.

*Demonstração.* Ver [4], página 203, Proposição 8.1. □

**Proposição 2.36.** (Desigualdade de Young com  $\varepsilon$ ). Dados  $a, b \geq 0$ ,  $1 < p, q < \infty$  expoentes conjugados, isto é, tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  e  $\varepsilon > 0$ , então existe uma constante  $C_\varepsilon > 0$  tal que

$$ab \leq \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^q.$$

*Demonstração.* Ver [7], página 622, Seção B.2. □

**Proposição 2.37.** (Desigualdade de Hölder). Seja  $I \subset \mathbb{R}$  aberto e sejam  $p, q$  expoentes conjugados,  $1 \leq p \leq \infty$ . Se  $f \in L^p(I)$  e  $g \in L^q(I)$ , então  $fg \in L^1(I)$  e

$$\|fg\|_{L^1(I)} \leq \|f\|_{L^p(I)} \|g\|_{L^q(I)}.$$

*Demonstração.* Ver [4], página 92, Teorema 4.6. □

**Proposição 2.38.** (Lema de Du Bois-Reymond). Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um aberto e  $u \in L^1_{loc}(I)$ . Se

$$\int_I u(x) \phi(x)_x dx = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(I),$$

então existe uma constante  $C$  tal que  $u = C$  q.s. em  $I$ .

*Demonstração.* Ver [4], página 282, Teorema 9.2. □

**Proposição 2.39.** Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo limitado. Então, as seguintes inclusões são compactas (e, conseqüentemente, contínuas):

- $i : (H^2, \|\cdot\|_{H^2}) \rightarrow (H^1, \|\cdot\|_{H^1})$ ,
- $i : (H^1, \|\cdot\|_{H^1}) \rightarrow (C(\bar{I}), \|\cdot\|_{L^\infty})$ .

*Demonstração.* Ver [1], Teorema 6.3. □

**Definição 2.40.** Dado  $1 \leq p < \infty$ , denotamos por  $W_0^{1,p}(I)$  o fecho de  $C_0^1(I)$  em  $W^{1,p}(I)$ , isto é,

$$W_0^{1,p}(I) = \overline{C_0^1}^{W^{1,p}(I)}.$$

Quando  $p=2$ , então

$$H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I).$$

**Observação 2.41.** Segue da própria definição de  $W_0^{1,p}(I)$  que  $(W_0^{1,p}(I), \|\cdot\|_{W^{1,p}})$  é um espaço de Banach.

**Proposição 2.42.** Seja  $u \in W^{1,p}(I)$ . Então  $u \in W_0^{1,p}(I)$  se, e somente se,  $u = 0$  em  $\partial I$ ,

*Demonstração.* Ver [4], página 217, Teorema 8.12. □

**Proposição 2.43.** (Desigualdade de Poincaré). Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo limitado. Então existe uma constante  $C = C(|I|) > 0$  tal que

$$\|u\|_{H^1(I)} \leq C \|u_x\|_{L^2(I)},$$

Para toda função  $u \in H_0^1(I)$  ou  $u \in H_*^1(I)$ , onde

$$H_*^1(I) = \left\{ u \in H^1(I) : \int_I u(x) dx = 0 \right\}.$$

*Demonstração.* Ver [4], página 218, Proposição 8.13. □

**Lema 2.44.** O Espaço  $(H_*^1, \|\cdot\|_{H^1(I)})$  é Banach.

*Demonstração.* Seja  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de Cauchy em  $H_*^1(I)$ . Temos que a sequência  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é de Cauchy em  $H^1(I)$ , que é Banach. Logo, existe  $u \in H^1$  tal que  $\|u_n - u\|_{H^1(I)} \rightarrow 0$  para  $n$  suficientemente grande.

Além disso, usando as desigualdades de Hölder e de Poincaré, temos que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \int_I u_n(x) dx - \int_I u(x) dx \right| &\leq \int_I |u_n(x) - u(x)| dx \\ &\leq \left( \int_I dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_I |u_n(x) - u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{|I|} \|u_n - u\|_2 \\ &\leq \sqrt{|I|} \|u_n - u\|_{H^1(I)}. \end{aligned}$$

Em consequência, para  $n$  suficientemente grande

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I u_n(x) dx = \int_I u(x) dx.$$

O que implica

$$\frac{1}{|I|} \int_I u(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|I|} \int_I u_n(x) dx = 0.$$

Assim,  $u \in H_*^1(I)$ , ou seja,  $u_n$  converge para  $u \in H_*^1(I)$ . Portanto o espaço  $(H_*^1, \|\cdot\|_{H^1(I)})$  é Banach.  $\square$

**Lema 2.45.** *Seja  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  e uma função  $f \in C^1[a, b]$  arbitrária. Então,*

$$\mathbf{Re} \int_a^b f u \overline{u_x} dx = \frac{1}{2} f |u|^2 \Big|_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b f' |u|^2 dx, \quad (2.5)$$

para toda  $u \in H^1(I)$ .

*Demonstração.* Usando integração por partes, temos que

$$\int_a^b f u \overline{u_x} dx = f |u|^2 \Big|_a^b - \int_a^b (f u)_x \overline{u} dx,$$

implicando em

$$\int_a^b f (u \overline{u_x} + u_x \overline{u}) dx = f |u|^2 \Big|_a^b - \int_a^b f' |u|^2 dx. \quad (2.6)$$

Sabendo que para todos  $v, w \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{Re}(v \overline{w}) = \mathbf{Re}(w \overline{v})$ , considerando a parte real em (2.6) obtemos (2.5).  $\square$

### 2.3 SEMIGRUPOS LINEARES

**Definição 2.46.** *Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $A \in \mathcal{L}(X)$ . Definimos o domínio do operador  $A$  como*

$$D(A) = \{u \in X; Au \in X\},$$

equipado com a norma

$$\|u\|_{D(A)} = |u|_X + |Au|_X.$$

Além disso, definimos o domínio do operador  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , como

$$\begin{aligned} D(A^n) &= \{u \in D(A^{n-1}); Au \in D(A^{n-1})\} \\ &= \{u \in X; A^k u \in X, k = 1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

equipado com a norma

$$\|u\|_{D(A^n)} = \sum_{k=0}^n |A^k u|_X,$$

onde  $A^0 u = u$ .

**Teorema 2.47.** *Seja  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  um operador dissipativo com  $\text{Im}(I - A) = X$ . Se  $X$  é reflexivo, então  $\overline{D(A)} = X$ .*

*Demonstração.* Ver [17], página 16, Teorema 4.6. □

**Definição 2.48.** *Uma família  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  de operadores lineares limitados em um espaço de Banach  $X$  é chamado de semigrupo, se satisfaz*

(i)  $S(t + s) = S(t)S(s), \forall t, s \geq 0,$

(ii)  $S(0) = I.$

*Se além dos itens (i) e (ii), tivermos que*

$$\lim_{t \rightarrow 0} S(t)x = x, \forall x \in X,$$

*diz-se que  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é um  $C_0$ -semigrupo (ou fortemente contínuo).*

**Definição 2.49.** *Seja  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  um semigrupo em  $X$ . O operador  $A$  definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in X \mid \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

*e*

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t}, \quad x \in D(A) \tag{2.7}$$

*é o gerador infinitesimal do semigrupo  $S(t)$ . Neste caso, o semigrupo  $S(t)$  pode ser denotado por  $e^{At}$ .*

**Teorema 2.50.** *Seja  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  um  $C_0$ -semigrupo em um espaço de Banach  $X$ . Então, existem constantes  $\omega \geq 0$  e  $M \geq 1$  tais que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

*Demonstração.* Ver [17], página 4, Teorema 2.2. □

Nas condições do Teorema 2.50, se  $\omega = 0$  diz-se que  $S(t)$  é uniformemente limitado. No caso em que  $\omega = 0$  e  $M = 1$ ,  $S(t)$  é chamado de  $C_0$ -semigrupo de contrações.

**Teorema 2.51.** *(Lumner-Phillip's) Seja  $A$  um operador linear com domínio  $D(A)$  denso em  $X$ . 1. Se  $A$  é dissipativo e existe um  $\lambda_0$  tal que  $\text{Im}(\lambda_0 I - A) = X$ , então  $A$  é gerador infinitesimal*

de um  $C_0$ -semigrupo de contrações em  $X$ .

2. Se  $A$  é gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações em  $X$ , então  $\text{Im}(\lambda I - A) = X$  para todo  $\lambda > 0$  e  $A$  é dissipativo.

*Demonstração.* Ver [17], página 16, Teorema 4.6.  $\square$

**Corolário 2.52.** *Seja  $A$  um operador linear dissipativo com  $D(A)$  denso em um espaço de Hilbert  $X$ . Se  $0 \in \rho(A)$ , então  $A$  é gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações em  $X$ .*

*Demonstração.* Ver [19], página 88, Teorema 2.12.3.  $\square$

**Teorema 2.53.** *Se  $A$  é um gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  em um espaço de Banach  $X$ , então para cada  $u_0 \in D(A) \subset X$ , existe uma única função  $u$  na classe*

$$u \in C([0, \infty); D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; X),$$

que é solução clássica regular do PVI

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = A(u(t)), & t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

Dada por  $u(t) = S(t)u_0$ . Se  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  for um  $C_0$ -semigrupo de contrações, temos que

$$\|u(t)\|_X \leq \|u_0\|_X e \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_X \leq \|Au_0\|_X.$$

Além disso, se  $u_0 \in D(A^n)$ ,  $n \geq 2$ , então existe uma única função  $u$  na classe

$$u \in \bigcap_{r=0}^n C^{m-r}([0, +\infty), D(A^r)).$$

*Demonstração.* Ver [4], página Teorema 7.4 e [20], página 36, Teorema 2.3.1.  $\square$

**Definição 2.54.** *Diz-se que um semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  em um espaço de Banach  $X$  é exponencialmente estável, quando existem constantes  $\alpha > 0$  e  $M \geq 1$  satisfazendo*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.8)$$

**Teorema 2.55.** *(Teorema de Prüss) Um  $C_0$ -semigrupo de contrações  $S(t) = e^{At}$  definido em um espaço de Hilbert  $X$  é exponencialmente estável se, e somente se, valem as duas condições a seguir*

(i)  $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$ ;

(ii)  $\limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$ .

*Demonstração.* Ver [9], [14] e [18]. □

**Definição 2.56.** *Escrevemos*

$$f = \mathcal{O}(g), \text{ quando } \lambda \rightarrow \lambda_0,$$

desde que exista uma constante positiva  $C > 0$  tal que

$$|f(\lambda)| \leq C|g(\lambda)|,$$

para todo  $\lambda$  suficientemente perto de  $\lambda_0$

**Teorema 2.57.** (*Teorema de Borichev-Tomilov*). *Suponhamos que  $S(t) = e^{At}$  seja um  $C_0$ -semigrupo limitado definido em um espaço de Hilbert  $X$  tal que  $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $\|S(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \mathcal{O}(t^{-1/\alpha}), t \rightarrow \infty;$
- (ii)  $\|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \mathcal{O}(|\lambda|^{-\alpha}), |\lambda| \rightarrow \infty,$

Para alguma constante fixada  $\alpha > 0$ .

*Demonstração.* Ver [2], Teorema 2.4. □

## 2.4 DESIGUALDADE DE OBSERVABILIDADE PARA SISTEMAS DO TIPO BRESSE

Nesta seção apresentaremos resultados que serão fundamentais para a obtenção de uma estimativa um pouco melhor que a obtida em [8] a respeito do comportamento assintótico da solução do semigrupo associado ao sistema (1.10)-(1.11) independente das condições de fronteira no caso em que  $\chi = 0$  e  $\chi_0 \neq 0$ .

Considere o seguinte sistema de equações:

$$i\beta\varphi - \Phi = g_1, \tag{2.9}$$

$$i\beta\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0l(w_x - l\varphi) = g_2, \tag{2.10}$$

$$i\beta\psi - \Psi = g_3, \tag{2.11}$$

$$i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) = g_4, \tag{2.12}$$

$$i\beta w - W = g_5, \tag{2.13}$$

$$i\beta\rho_1W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = g_6. \tag{2.14}$$

onde  $g_1, g_3, g_5 \in H_0^1$  e  $g_2, g_4, g_6 \in L^2$ , ou  $g_1 \in H_0^1, g_3, g_5 \in H_*^1, g_2 \in L^2, g_4, g_6 \in L_*^2$  e os coeficientes  $\rho_1, \rho_2, k, k_0, b, l$  satisfazem

$$\rho_1, \rho_2, k, k_0, b, l \in C^1[0, L], \quad \rho_1, \rho_2, k, k_0, b, l > 0.$$

Denotando por  $G$  a função vetorial  $G = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6)$  e por  $V$  a função vetorial  $V = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ . Considerando  $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq L$ , a notação  $\|\cdot\|_{a_1, a_2}$  significa

$$\int_{a_1}^{a_2} (|\Phi|^2 + |\Psi|^2 + |W|^2 + |\psi_x|^2 + |\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2) dx.$$

Além disso, para  $j = 1, 2$ , considere também a seguinte notação

$$\begin{aligned} I(a_j) &= |(\varphi_x + \psi + lw)(a_j)|^2 + |\Phi(a_j)|^2 + |\psi_x(a_j)|^2 + |\Phi(a_j)|^2 + |(w_x - l\varphi)(a_j)|^2 \\ &+ |W(a_j)|^2. \end{aligned}$$

**Proposição 2.58.** *Sob as notações anteriores, seja  $V = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$  uma solução regular de (2.9)-(2.14) e sejam  $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq L$  quaisquer. Então, existem constantes  $C_0, C_1 > 0$  tais que, para  $j = 1, 2$*

$$I(a_j) \leq C_0 \|V\|_{a_1, a_2}^2 + C_0 \|G\|_{a_1, a_2}^2, \quad (2.15)$$

$$\|V\|_{a_1, a_2}^2 \leq C_1 I(a_j) + C_1 \|G\|_{a_1, a_2}^2. \quad (2.16)$$

*Demonstração.* Ver [15] página 23. □

**Corolário 2.59.** *Seja  $V = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$  uma solução regular do sistema (2.9)-(2.14). Se para algum subintervalo  $(b_1, b_2) \subset (0, L)$ , tivermos que*

$$\|V\|_{b_1, b_2}^2 \leq \Lambda, \quad (2.17)$$

onde  $\Lambda = \Lambda(V, G, \beta)$ , então existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|V\|_{0, L}^2 \leq C\Lambda + C\|G\|_{0, L}^2. \quad (2.18)$$

*Demonstração.* Ver [15] página 32. □

### 3 SISTEMA DE BRESSE TERMOELÁSTICO

O objetivo deste capítulo é apresentar detalhadamente resultados demonstrados em [8]. Resultados estes acerca da existência, unicidade e comportamento assintótico da solução do problema

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) = 0 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (3.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma \theta_x = 0 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (3.2)$$

$$\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = 0 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (3.3)$$

$$\rho_3 \theta_t - \alpha \theta_{xx} + \gamma \psi_{xt} = 0 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L). \quad (3.4)$$

Considerando as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned} \varphi(0, \cdot) &= \varphi_0, & \varphi_t(0, \cdot) &= \varphi_1, & \psi(0, \cdot) &= \psi_0, & \psi_t(0, \cdot) &= \psi_1, \\ w(0, \cdot) &= w_0, & w_t(0, \cdot) &= w_1, & \theta(0, \cdot) &= \theta_0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

E condições de fronteira de Dirichlet

$$\begin{aligned} \varphi(t, 0) &= \varphi(t, L) = \psi(t, 0) = \psi(t, L) = w(t, 0) = w(t, L) = 0, \\ \theta(t, 0) &= \theta(t, L) = 0 \text{ para } t \in (0, \infty), \end{aligned} \quad (3.6)$$

ou condições de fronteira de Dirichlet-Neumann

$$\begin{aligned} \varphi(t, 0) &= \varphi(t, L) = \psi_x(t, 0) = \psi_x(t, L) = w_x(t, 0) = w_x(t, L) = 0, \\ \theta(t, 0) &= \theta(t, L) = 0 \text{ para } t \in (0, \infty). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Onde os coeficientes  $\rho_1, k, \rho_2, \rho_3 = \frac{\gamma}{m}, \alpha = \frac{k_1 \gamma}{m}, b, \gamma, l, k_0, k_1$  e  $m$  são constantes positivas e as funções  $\varphi, \psi, w$  e  $\theta$  descrevem, respectivamente, a oscilação vertical, o ângulo de rotação da seção transversal, a oscilação longitudinal e a variação de temperatura de uma viga fina, arqueada e com comprimento  $L$ .

#### 3.1 FORMULAÇÃO ABSTRATA

O objetivo desta seção é reformular o problema (3.1)-(3.7) como um problema de Cauchy abstrato homogêneo para que possamos garantir a existência e unicidade da solução do mesmo por meio da teoria de semigrupos lineares. No que segue, para simplificarmos as notações, denotaremos os conjuntos  $H_0^1(0, L), H_*^1(0, L), H^2(0, L), C_0^1(0, L), C_0^\infty(0, L), L^2(0, L)$  e  $L_*^2(0, L)$  por  $H_0^1, H_*^1, H^2, C_0^1, C_0^\infty, L^2$  e  $L_*^2$  respectivamente. Além disso,  $\|\cdot\|_2$  representará a norma  $\|\cdot\|_{L^2(0, L)}$  no espaço  $L^2(0, L)$ .

Considere inicialmente os seguintes espaços:

$$\mathcal{H}_1 := H_0^1 \times L^2 \times H_0^1 \times L^2 \times H_0^1 \times L^2 \times L^2,$$

e

$$\mathcal{H}_2 := H_0^1 \times L^2 \times H_*^1 \times L_*^2 \times H_*^1 \times L_*^2 \times L^2.$$

Utilizaremos o espaço  $\mathcal{H}_1$  para tratar do problema (3.1)-(3.5) com as condições de fronteira dadas em (3.6) e o espaço  $\mathcal{H}_2$  para tratar do problema (3.1)-(3.5) com as condições de fronteira dadas em (3.7).

Quando as condições de fronteira não interferirem nas definições denotaremos  $\mathcal{H}_i$ , com  $i = 1, 2$ , por  $\mathcal{H}$ .

Considere também os subespaços

$$D(\mathcal{A}_1) := \{U \in \mathcal{H}_1 \mid \varphi, \psi, w, \theta \in H^2 \cap H_0^1, \Phi, \Psi, W \in H_0^1\},$$

e

$$D(\mathcal{A}_2) := \{U \in \mathcal{H}_2 \mid \varphi, \theta \in H^2 \cap H_0^1, \Phi, \psi_x, w_x \in H_0^1, \Psi, W \in H_*^1\}.$$

e o operador  $\mathcal{A}_i : D(\mathcal{A}_i) \subset \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_i$  definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i U &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1} \partial_x^2 - \frac{k_0 l^2}{\rho_1} I & 0 & \frac{k}{\rho_1} \partial_x & 0 & \frac{l(k+k_0)}{\rho_1} \partial_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{\rho_2 \partial_x} & 0 & \frac{b}{\rho_2} \partial_x^2 - \frac{k}{\rho_2} I & 0 & -\frac{kl}{\rho_2} I & 0 & -\frac{\gamma}{\rho_2} \partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{l(k_0+k)}{\rho_1} \partial_x & 0 & -\frac{lk}{\rho_1} I & 0 & \frac{k_0}{\rho_1} \partial_x^2 - \frac{l^2 k}{\rho_1} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{\rho_3} \partial_x & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha}{\rho_3} \partial_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \Phi \\ \psi \\ \Psi \\ w \\ W \\ \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1} \varphi_{xx} - \frac{k_0 l^2}{\rho_1} \varphi + \frac{k}{\rho_1} \psi_x + \frac{l(k+k_0)}{\rho_1} w_x \\ \Psi \\ -\frac{k}{\rho_2} \varphi_x + \frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2} \psi - \frac{kl}{\rho_2} w - \frac{\gamma}{\rho_2} \theta_x \\ W \\ -\frac{l(k_0+k)}{\rho_1} \varphi_x - \frac{lk}{\rho_1} \psi + \frac{k_0}{\rho_1} w_{xx} - \frac{l^2 k}{\rho_1} w \\ -\frac{\gamma}{\rho_3} \Psi_x + \frac{\alpha}{\rho_3} \theta_{xx} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

para todo  $U \in D(\mathcal{A}_i), i = 1, 2$ .

Denotando  $\Phi = \varphi_t, \Psi = \psi_t, W = w_t$  e  $U_0 := (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1, \theta_0)$ , podemos reescrever o sistema (3.1)-(3.5) com as condições de fronteira (3.6) ou (3.7), como um problema de Cauchy

abstrato, dado por

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}_i U, t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (3.9)$$

para todo  $U \in D(\mathcal{A}_i)$ .

Portanto, estudar o problema (3.1)-(3.7) é equivalente a estudar o problema de valor inicial (3.9).

O espaço  $\mathcal{H}$  é um espaço de Hilbert com a norma  $|\cdot|_{\mathcal{H}}$  proveniente do produto interno usual (isto decorre da Proposição 2.28, da Proposição 2.31, do Lema 2.44 e da Observação 2.41) definido como:

$$\begin{aligned} (U_1, U_2)_{\mathcal{H}} &= (\varphi_{1x}, \varphi_{2x})_2 + (\Phi_1, \Phi_2)_2 + (\psi_{1x}, \psi_{2x})_2 + (\Psi_1, \Psi_2)_2 + (w_{1x}, w_{2x})_2 \\ &+ (W_1, W_2)_2 + (\theta_1, \theta_2)_2, \end{aligned} \quad (3.10)$$

para todo  $U_1, U_2 \in \mathcal{H}$ .

Podemos também considerar em  $\mathcal{H}_i$  a aplicação:

$$\begin{aligned} ((U_1, U_2))_{\mathcal{H}_i} &= \rho_1(\Phi_1, \Phi_2)_2 + \rho_2(\Psi_1, \Psi_2)_2 + \rho_1(W_1, W_2)_2 + b(\psi_{1x}, \psi_{2x})_2 + \rho_3(\theta_1, \theta_2)_2 \\ &+ k(\varphi_{1x} + \psi_1 + lw_1, \varphi_{2x} + \psi_2 + lw_2)_2 + k_0(w_{1x} - l\varphi_1, w_{2x} - l\varphi_2)_2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Assim, dado  $U \in \mathcal{H}$  tem-se a norma proveniente do produto interno (3.10):

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\varphi_x\|_2^2 + \|\Phi\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|\Psi\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 + \|W\|_2^2 + \|\theta\|_2^2. \quad (3.12)$$

Também podemos considerar a aplicação  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_i} : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathbb{R}$  decorrente da aplicação definida em (3.11):

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}_i}^2 &= \rho_1\|\Phi\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + \rho_1\|W\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 + \rho_3\|\theta\|_2^2 \\ &+ k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

**Lema 3.1.** *A aplicação  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_i} : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathbb{R}$  definida em (3.13) é uma norma para  $i=1,2$ . No caso em que  $i=2$ , a aplicação será norma apenas se satisfizer a condição de que  $lL \neq n\pi \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ .*

*Demonstração.* Tome  $U \in \mathcal{H}_i$  tal que  $\|U\|_{\mathcal{H}_i} = 0$ . Assim, segue que

$$\Phi = \Psi = W = \psi_x = \varphi_x + \psi + lw = w_x - l\varphi = \theta = 0. \quad (3.14)$$

Como  $\psi_x = 0$ , então pra toda função  $\eta \in C_0^\infty$ , integrando por partes,

$$\int_0^L \psi(x)\eta_x(x)dx = \psi(x)\eta(x)\Big|_0^L - \int_0^L \eta(x)\psi_x(x) dx = 0. \quad (3.15)$$

Logo, pelo Lema 2.38 existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $\psi = c$ . Se  $\psi$  pertence a  $H_0^1$ , podemos concluir que  $\psi(L) = \psi(0) = 0$ , mas temos que  $\psi$  é contínua em  $[0, L]$  (Segue da Proposição 2.39), ou seja, como  $\psi$  é constante temos que  $\psi = 0$ . Se  $\psi$  pertence a  $H_*^1$ ,

$$0 = \frac{1}{L} \int_0^L \psi(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^L c dx = c.$$

Assim,  $\psi = 0$  em ambos os casos. Temos ainda que de (3.14)

$$\begin{cases} \varphi_x + lw = 0, \\ w_x - l\varphi = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Sendo  $\varphi \in H_0^1$ , obtemos o problema de contorno indicado a seguir

$$\begin{cases} \varphi_{xx} + l^2\varphi = 0, \\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Consideremos a solução  $\varphi \in C^2(0, L)$  do sistema (3.17). Temos então que tal solução pode ser descrita do seguinte modo

$$\varphi(x) = \alpha \operatorname{sen}(lx) + \beta \operatorname{cos}(lx), \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Como  $\varphi(0) = 0$ , então  $\beta = 0$ . Logo  $\varphi(x) = \alpha \operatorname{sen}(lx)$ .

No caso em que  $w \in H_0^1$ , substituindo  $\varphi(x) = \alpha \operatorname{sen}(lx)$  em (3.16) e sabendo que  $w(L) = 0$ , concluímos que  $\alpha = 0$ , e portanto,  $w = \varphi = 0$ . Por outro lado, no caso em que  $w \in H_*^1$  só podemos garantir que  $\alpha = 0$  se  $lL \neq n\pi$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Assim, desde que  $lL \neq n\pi$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  no caso  $i = 2$  temos que  $\|U\|_{\mathcal{H}_i} = 0$  implica que  $U = 0$ .

Agora, dado  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $U \in \mathcal{H}_i$ , temos que

$$\begin{aligned} \|\lambda U\|_{\mathcal{H}_i} &= \rho_1 \|\lambda \Phi\|_2 + \rho_2 \|\lambda \Psi\|_2 + \rho_1 \|\lambda W\|_2 + b \|\lambda \psi_x\|_2 + k \|\lambda(\varphi_x + \psi + lw)\|_2 \\ &+ k_0 \|\lambda(w_x - l\varphi)\|_2 + \rho_3 \|\lambda \theta\|_2 \\ &= |\lambda| \rho_1 \|\Phi\|_2 + |\lambda| \rho_2 \|\Psi\|_2 + |\lambda| \rho_1 \|W\|_2 + |\lambda| b \|\psi_x\|_2 \\ &+ |\lambda| k \|\varphi_x + \psi + lw\|_2 + |\lambda| k_0 \|w_x - l\varphi\|_2 + |\lambda| \rho_3 \|\theta\|_2 = |\lambda| \rho_3 \|\theta\|_2 \\ &= |\lambda| \|U\|_{\mathcal{H}_i}. \end{aligned}$$

Além disso, dados  $U, U^* \in \mathcal{H}_i$ , usando a Desigualdade Triangular temos

$$\begin{aligned} \|U + U^*\|_{\mathcal{H}_i}^2 &\leq \rho_1 (\|\Phi\|_2 + \|\Phi^*\|_2)^2 + \rho_2 (\|\Psi\|_2 + \|\Psi^*\|_2)^2 + \rho_1 (\|W\|_2 + \|W^*\|_2)^2 \\ &+ b (\|\psi_x\|_2 + \|\psi_x^*\|_2)^2 + k (\|\varphi_x + \psi + lw\|_2 + \|\varphi_x^* + \psi^* lw^*\|_2)^2 \\ &+ k_0 (\|w_x - l\varphi\|_2 + \|w_x^* - l\varphi^*\|_2)^2 + \rho_3 (\|\theta_x\|_2 + \|\theta_x^*\|_2)^2. \end{aligned}$$

Isto é

$$\begin{aligned}
\|U + U^*\|_{\mathcal{H}_i} &\leq \sqrt{\rho_1}(\|\Phi\|_2 + \|\Phi^*\|_2) + \sqrt{\rho_2}(\|\Psi\|_2 + \|\Psi^*\|_2) + \sqrt{\rho_1}(\|W\|_2 + \|W^*\|_2) \\
&+ \sqrt{b}(\|\psi_x\|_2 + \|\psi_x^*\|_2) + \sqrt{k}(\|\varphi_x + \psi + lw\|_2 + \|\varphi_x^* + \psi^*lw^*\|_2) \\
&+ \sqrt{k_0}(\|w_x - l\varphi\|_2 + \|w_x^* - l\varphi^*\|_2) + \sqrt{\rho_3}(\|\theta_x\|_2 + \|\theta_x^*\|_2) \\
&= \sqrt{\rho_1\|\Phi\|_2^2} + \sqrt{\rho_2\|\Psi\|_2^2} + \sqrt{\rho_1\|W\|_2^2} + \sqrt{b\|\psi_x\|_2^2} + \sqrt{k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2} \\
&+ \sqrt{k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2} + \sqrt{\rho_3\|\theta_x\|_2^2} + \sqrt{\rho_1\|\Phi^*\|_2^2} + \sqrt{\rho_2\|\Psi^*\|_2^2} + \sqrt{\rho_1\|W^*\|_2^2} \\
&+ \sqrt{b\|\psi_x^*\|_2^2} + \sqrt{k\|\varphi_x^* + \psi^*lw^*\|_2^2} + \sqrt{k_0\|w_x^* - l\varphi^*\|_2^2} + \sqrt{\rho_3\|\theta_x^*\|_2^2} \\
&\leq \|U\|_{\mathcal{H}_i} + \|U^*\|_{\mathcal{H}_i}.
\end{aligned}$$

Logo, a aplicação definida em (3.13) é de fato uma norma, desde que para  $i = 2$  consideremos  $lL \neq n\pi, \forall n \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Observação 3.2.** Para comprovar a necessidade de que  $lL \neq n\pi, \forall n \in \mathbb{Z}$ , suponha que  $lL = n\pi$ , para algum  $n \in \mathbb{Z}$ , então o vetor

$$U = (\text{sen}(lx), 0, 0, 0, -\text{cos}(lx), 0, 0) \in \mathcal{H}_2$$

é não nulo, mas  $\|U\|_{\mathcal{H}_2} = 0$ .

**Observação 3.3.** A partir de agora, neste trabalho, vamos considerar  $lL \neq n\pi, \forall n \in \mathbb{Z}$  em  $\mathcal{H}_2$  para que (3.11) seja um produto interno em  $\mathcal{H}_2$ , e conseqüentemente, (3.13) seja uma norma em  $\mathcal{H}_2$ .

**Lema 3.4.** Sejam  $\varphi \in H_0^1$  e  $\psi, w \in H_0^1$  (ou  $\psi, w \in H_*^1$ ). Existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 \leq C(\|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2). \quad (3.18)$$

*Demonstração.* Usando as desigualdades Triangular e de Poincaré,

$$\begin{aligned}
k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 &\leq k(\|\varphi_x\|_2 + \|\psi\|_2 + l\|w\|_2)^2 \\
&\leq 4k\|\varphi_x\|_2^2 + 4k\|\psi\|_2^2 + 4kl^2\|w\|_2^2 \\
&\leq 4k\|\varphi_x\|_2^2 + 4kc\|\psi_x\|_2^2 + 4kl^2c\|w_x\|_2^2,
\end{aligned} \quad (3.19)$$

e ainda

$$\begin{aligned}
k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 &\leq 2k_0\|w_x\|_2^2 + 2k_0l^2\|\varphi\|_2^2 \\
&\leq 2k_0\|w_x\|_2^2 + 2k_0l^2c\|\varphi_x\|_2^2.
\end{aligned} \quad (3.20)$$

Somando as desigualdades (3.19) e (3.20) e tomando  $C = \max\{4k + 2k_0l^2c, 4kc + b, 4kl^2c + 2k_0\}$  temos,

$$k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 \leq C(\|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2).$$

□

**Lema 3.5.** *Sejam  $\varphi, \psi, w \in H_0^1$ . Então existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$\|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 \leq C(k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2). \quad (3.21)$$

*Demonstração.* Considere

$$\xi_1 := (\varphi_x + \psi + lw), \quad \xi_2 := (w_x - l\varphi). \quad (3.22)$$

Tomando o produto interno de  $L^2$  de  $\varphi_x + lw$  com  $x\varphi$  e de  $w_x - lw$  com  $xw$  temos,

$$(\varphi_x + lw, x\varphi)_2 = (\xi_1 - \psi, x\varphi)_2, \quad (3.23)$$

$$(w_x - l\varphi, xw)_2 = (\xi_2, xw)_2. \quad (3.24)$$

Somando (3.23) e (3.24), tomando a parte real e integrando em  $(0, L)$ ,

$$\|\varphi\|_2^2 + \|w\|_2^2 = -2\mathbf{Re}(\xi_1 - \psi, x\varphi)_2 - 2\mathbf{Re}(\xi_2, xw)_2.$$

Usando as desigualdades Triangular, de Cauchy e de Young com  $\epsilon = \frac{1}{2}$  obtemos,

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_2^2 + \|w\|_2^2 &\leq 2L\|\xi_1 - \psi\|_2\|\varphi\|_2 + 2L\|\xi_2\|_2\|w\|_2 \\ &\leq 2L^2\|\xi_1 - \psi\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\varphi\|_2^2 + 2L^2\|\xi_2\|_2^2 + \frac{1}{2}\|w\|_2^2 \\ &\leq 4L^2(\|\xi_1 - \psi\|_2^2 + \|\xi_2\|_2^2). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Observe que

$$\|\varphi_x\|_2^2 = \|\xi_1 - \psi - lw\|_2^2 \leq 2\|\xi_1 - \psi\|_2^2 + 2l^2\|w\|_2^2 \quad (3.26)$$

$$\|w_x\|_2^2 = \|\xi_2 + l\varphi\|_2^2 \leq 2\|\xi_2\|_2^2 + 2l^2\|\varphi\|_2^2. \quad (3.27)$$

Somando (3.26) e (3.27) e usando (3.25),

$$\begin{aligned} \|\varphi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 &\leq 2\|\xi_1 - \psi\|_2^2 + 2\|\xi_2\|_2^2 + 2l^2(\|w\|_2^2 + \|\varphi\|_2^2) \\ &\leq (2 + 8l^2L^2)(\|\xi_1 - \psi\|_2^2 + \|\xi_2\|_2^2). \end{aligned}$$

Usando as desigualdades Triangular e de Poincaré,

$$\begin{aligned} \|\varphi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 &\leq 2(2 + 8l^2L^2)\|\xi_1\|_2^2 + 2(2 + 8l^2L^2)c\|\psi_x\|_2^2 \\ &\quad + (2 + 8l^2L^2)\|\xi_2\|_2^2. \end{aligned}$$

Substituindo as funções definidas em (3.22), existe  $C > 0$  tal que

$$\|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 \leq C(k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2).$$

□

**Lema 3.6.** *Sejam  $\varphi \in H_0^1$  e  $\psi, w \in H_*^1$ . Então, existe  $C > 0$  tal que*

$$\|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 \leq C(k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2). \quad (3.28)$$

*Demonstração.* A prova será efetuada por meio de argumentos de contradição. Suponha que para todo  $n \in \mathbb{N}$  exista  $\{(\varphi_n, \psi_n, w_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in H_0^1 \times H_*^1 \times H_*^1$  tal que

$$k\|\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n\|_2^2 + k_0\|w_{n,x} - l\varphi_n\|_2^2 + b\|\psi_{n,x}\|_2^2 < \frac{1}{n} \quad (3.29)$$

e

$$\|\varphi_{n,x}\|_2^2 + \|\psi_{n,x}\|_2^2 + \|w_{n,x}\|_2^2 = 1. \quad (3.30)$$

Observe que de (3.30) temos que a sequência  $\{(\varphi_n, \psi_n, w_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada em  $H_0^1 \times H_*^1 \times H_*^1$ . Como  $H_0^1$  tem inclusão compacta em  $L^2$  e  $H_*^1$  tem inclusão compacta em  $L_*^2$ , temos que existe  $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$  tal que  $\{(\varphi_n, \psi_n, w_n)\}_{n \in \mathbb{N}_1}$  converge forte em  $L^2 \times L_*^2 \times L_*^2$ .

De (3.29), temos

$$\psi_{n,x} \rightarrow 0 \text{ em } L^2,$$

assim

$$\psi_n \rightarrow 0 \text{ em } H_*^1,$$

Agora, considere  $\varphi \in L^2$  e  $w_x \in L_*^2$  tais que  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  e  $w_n \rightarrow w$ .

De (3.29)

$$\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n \rightarrow 0 \text{ forte em } L^2.$$

Mas,

$$\varphi_{n,x} + \psi_n + l(w_n - w) + lw = \varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n.$$

Logo

$$\varphi_{n,x} \rightarrow -lw \text{ forte em } L^2. \quad (3.31)$$

Temos então que  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}_1}$  é de Cauchy em  $H_0^1$ . Logo, existe  $\phi \in H_0^1$  tal que  $\varphi_n \rightarrow \phi$  em  $H_0^1$  o que implica que  $\varphi_n \rightarrow \phi$  em  $L^2$ . Pela unicidade do limite,  $\varphi = \phi$ , isto é,  $\varphi \in H_0^1$ .

Portanto, de (3.31), deduzimos que

$$\varphi_x + lw = 0 \text{ quase sempre em } (0, L). \quad (3.32)$$

Similarmente, de (3.29) temos que

$$w_{n,x} \rightarrow l\varphi_n \text{ forte em } L^2.$$

Mas, como

$$w_{n,x} - l(\varphi_n - \varphi) - l\varphi = w_{n,x} - l\varphi_n,$$

segue que

$$w_{n,x} \rightarrow l\varphi \text{ forte em } L^2. \quad (3.33)$$

Então,  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}_1}$  é de Cauchy em  $H_0^1$ . Logo, existe  $w^* \in H_0^1$  tal que  $w_n \rightarrow w^*$  em  $H_0^1$ , e por consequência  $w_n \rightarrow w^*$  em  $L^2$ . Pela unicidade do limite segue que  $w^* \in H_*^1$ . De (3.33)

$$w_x - l\varphi = 0 \text{ quase sempre em } (0, L). \quad (3.34)$$

Portanto de (3.32) e (3.34), analogamente à solução do sistema (3.16), temos que  $\varphi = w = 0$ , o que contradiz (3.30).

Logo, existe  $C > 0$  que satisfaz (3.28). □

**Lema 3.7.** *As normas  $|\cdot|_{\mathcal{H}_i}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_i}$  são equivalentes.*

*Demonstração.* Segue dos lemas 3.4, 3.5 e 3.6. □

**Observação 3.8.** *Como as normas  $|\cdot|_{\mathcal{H}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  são equivalentes e  $(\mathcal{H}, |\cdot|_{\mathcal{H}})$  é um espaço de Hilbert, então  $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$  é também um espaço de Hilbert.*

### 3.2 EXISTÊNCIA E UNICIDADE

O objetivo desta seção é mostrar que o problema (3.9) admite uma única solução (esta conclusão se estenderá ao problema (3.1)-(3.7)). Primeiramente, vamos demonstrar alguns resultados que serão utilizados para atingirmos tal objetivo.

**Lema 3.9.** *Dada uma função  $f \in L^2$ , a equação*

$$-\theta_{xx} = f \text{ em } L^2, \quad (3.35)$$

*possui uma única solução  $\theta \in H^2 \cap H_0^1$ .*

*Demonstração.* Defina a aplicação  $a(\cdot, \cdot) : H_0^1 \times H_0^1 \rightarrow \mathbb{C}$  colocando

$$a(\theta_1, \theta_2) = \int_0^L \theta_{1,x} \overline{\theta_{2,x}} dx.$$

Da definição de  $a(\cdot, \cdot)$  segue que esta é uma forma sesquilinear. Temos ainda que  $a(\cdot, \cdot)$  é contínua pois da Desigualdade de Hölder temos

$$|a(\theta_1, \theta_2)| \leq \|\theta_{1,x}\|_{L^2} \|\theta_{2,x}\|_{L^2} \leq C \|\theta_1\|_{H_0^1} \|\theta_2\|_{H_0^1},$$

para todo  $\theta_1, \theta_2 \in H_0^1$ .

A aplicação  $a(\cdot, \cdot)$  também é coerciva, pois

$$a(\theta, \theta) = \|\theta_x\|_{L^2}^2 \geq \|\theta_x\|_{H_0^1}^2,$$

para todo  $\theta \in H_0^1$ .

Agora defina  $\Lambda : H_0^1 \rightarrow \mathbb{C}$  da seguinte forma

$$\Lambda(\theta) = - \int_0^L f \overline{\theta} dx,$$

para todo  $\theta \in H_0^1$ .

Temos que  $\Lambda$  é antilinear e além disso limitado, pois usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Poincaré, existe  $C > 0$  tal que

$$|\Lambda(\theta)| \leq C \|\theta\|_{H_0^1}.$$

para todo  $\theta \in H_0^1$ . Assim, como  $H_0^1$  é um espaço de Hilbert, podemos aplicar o teorema de Lax-Milgram e concluir que existe um único  $\theta \in H_0^1$  tal que

$$\int_0^L \theta_x \overline{\theta_{2,x}} dx = - \int_0^L f \overline{\theta_2} dx, \quad \forall \theta_2 \in H_0^1,$$

Segue que

$$\int_0^L \theta_x \phi_x dx = - \int_0^L f \phi dx, \forall \phi \in C_0^\infty.$$

Da definição de derivada fraca resulta que

$$\theta \in H^2 \cap H_0^1.$$

e que

$$-\theta_{xx} = f \text{ em } L^2.$$

□

**Lema 3.10.** Dadas  $g_1, g_2, g_3 \in L^2$ , o sistema

$$\begin{cases} k(\varphi_x + \psi + lw)_x + k_0 l(w_x - l\varphi) = g_1, \\ b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + lw) = g_2, \\ k_0(w_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x + \psi + lw) = g_3. \end{cases} \quad (3.36)$$

possui uma única solução  $(\varphi, \psi, w) \in (H^2 \cap H_0^1)^3$ .

*Demonstração.* Considere  $H = H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1$  e a aplicação  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\begin{aligned} a((\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*)) &= k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\varphi_x^* + \psi^* + lw^*)} dx \\ &+ k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{(w_x^* - l\varphi^*)} dx + b \int_0^L \psi_x \overline{\psi_x^*} dx. \end{aligned}$$

Observe que  $a(\cdot, \cdot)$  é uma forma sesquilinear. Além disso, considerando em  $H$  a norma

$$\|(\varphi, \psi, w)\|_H^2 = \|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2, \quad (3.37)$$

segue da desigualdade (3.21) que  $a(\cdot, \cdot)$  é coerciva.

Dados  $(\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*) \in H$ , usando as desigualdades Triangular e de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |a((\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*))| &\leq k \|\varphi_x + \psi + lw\|_2 \|\varphi_x^* + \psi^* + lw^*\|_2 + b \|\psi_x\|_2 \|\psi_x^*\|_2 \\ &+ k_0 \|w_x - l\varphi\|_2 \|w_x^* - l\varphi_x^*\|_2. \end{aligned}$$

Pela Desigualdade (3.18), existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|a((\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*))| \leq C \|(\varphi, \psi, w)\|_H \|(\varphi^*, \psi^*, w^*)\|_H.$$

Mostrando que  $a(\cdot, \cdot)$  é uma forma sesquilinear, contínua e coerciva.

Defina agora a aplicação  $\lambda : H \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\lambda(\varphi^*, \psi^*, w^*) = - \int_0^L (g_1 \overline{\varphi^*} + g_2 \overline{\psi^*} + g_3 \overline{w^*}) dx. \quad (3.38)$$

Podemos observar que  $\lambda$  é uma aplicação antilinear. Além disso, dado  $(\varphi^*, \psi^*, w^*) \in H$  e usando as desigualdades Triangular e de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |\lambda(\varphi^*, \psi^*, w^*)| &\leq |(g_1, \varphi^*)_2| + |(g_2, \psi^*)_2| + |(g_3, w^*)_2| \\ &\leq \|g_1\|_2 \|\varphi^*\|_2 + \|g_2\|_2 \|\psi^*\|_2 + \|g_3\|_2 \|w^*\|_2. \end{aligned}$$

Portanto, usando a Desigualdade de Poincaré existe  $C > 0$ , tal que

$$|\lambda(\varphi^*, \psi^*, w^*)| \leq C \|(\varphi^*, \psi^*, w^*)\|_H,$$

para todo  $(\varphi^*, \psi^*, w^*) \in H$ . Logo,  $\lambda$  é uma aplicação antilinear e limitada. Pelo teorema de Lax-Milgram, existe um único  $(\varphi, \psi, w) \in H$  que satisfaz

$$\begin{aligned} - \int_0^L (g_1 \overline{\varphi^*} + g_2 \overline{\psi^*} + g_3 \overline{w^*}) dx &= k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\varphi_x^* + \psi^* + lw^*)} dx \\ &+ k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{(w_x^* - l\varphi^*)} dx + b \int_0^L \psi_x \overline{\psi_x^*} dx, \end{aligned} \quad (3.39)$$

para todo  $(\varphi^*, \psi^*, w^*) \in H$ .

Tome  $\phi \in C_0^1$  arbitrária e  $\varphi^* = \phi$ ,  $\psi^* = w^* = 0$ . Assim, substituindo em (3.39),

$$k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\phi_x} dx - lk_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{\phi} dx = - \int_0^L g_1 \overline{\phi} dx, \quad \forall \phi \in C_0^1,$$

ou seja,

$$\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\phi_x} dx = - \frac{1}{k} \int_0^L (g_1 - lk_0(w_x - l\varphi)) \overline{\phi} dx, \quad \forall \phi \in C_0^1.$$

Dado que  $\varphi_x + \psi + lw, g_1 - lk_0(w_x - l\varphi) \in L^2$ , temos que

$$\varphi_x + \psi + lw \in H^1.$$

Mas,  $\psi + lw \in H^1$ , o que implica que  $\varphi_x \in H^1$ , e portanto  $\varphi \in H^2$ . Além disso,

$$k(\varphi_x + \psi + lw)_x + k_0 l(w_x - l\varphi) = g_1. \quad (3.40)$$

Tome agora  $\phi \in C_0^1$  arbitrária e  $\varphi^* = w^* = 0$  e  $\psi^* = \phi$ . Assim, substituindo em (3.39),

$$k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\phi} dx + b \int_0^L \psi_x \bar{\phi}_x dx = - \int_0^L g_2 \bar{\phi} dx, \quad \forall \phi \in C_0^1,$$

ou seja,

$$\int_0^L \psi_x \bar{\phi}_x dx = -\frac{1}{b} \int_0^L (g_2 - k(\varphi_x + \psi + lw)) \bar{\phi} dx, \quad \forall \phi \in C_0^1.$$

Dado que  $\psi_x, g_2 - k(\varphi_x + \psi + lw) \in L^2$ , temos que  $\psi_x \in H^1$ , isto é,  $\psi \in H^2$  e

$$b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) = g_2. \quad (3.41)$$

De modo análogo aos anteriores, tome  $\phi \in C_0^1$  arbitrária e  $\varphi^* = \psi^* = 0$  e  $w^* = \phi$ . Assim, substituindo em (3.39),

$$kl \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\phi} dx + k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) \bar{\phi}_x dx = - \int_0^L g_3 \bar{\phi} dx, \quad \forall \phi \in C_0^1,$$

ou seja,

$$\int_0^L (w_x - l\varphi) \bar{\phi}_x dx = -\frac{1}{k_0} \int_0^L (g_3 - kl(\varphi_x + \psi + lw)) \bar{\phi} dx, \quad \forall \phi \in C_0^1.$$

Tendo em vista que  $w_x - l\varphi, g_3 - kl(\varphi_x + \psi + lw) \in L^2$ , concluímos que

$$w_x - l\varphi \in H^1.$$

Mas como  $\varphi \in H^1$ , temos que  $w_x \in H^1$ , isto é,  $w \in H^2$ . E ainda

$$(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = g_3. \quad (3.42)$$

Por fim, podemos concluir das igualdades (3.40), (3.41) e (3.42) que existe uma única solução  $(\varphi, \psi, w) \in (H_0^1 \cap H^2)^3$  satisfazendo o sistema (3.36).  $\square$

**Lema 3.11.** Dadas  $g_1 \in L^2$  e  $g_2, g_3 \in L_*^2$ , o sistema

$$\begin{cases} k(\varphi_x + \psi + lw)_x + k_0 l(w_x - l\varphi) = g_1, \\ b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + lw) = g_2, \\ k_0(w_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x + \psi + lw) = g_3. \end{cases} \quad (3.43)$$

possui uma única solução  $(\varphi, \psi, w) \in (H^2 \cap H_0^1) \times (H^2 \cap H_*^1)^2$ , com  $w_x, \psi_x \in H_0^1$ .

*Demonstração.* Considere  $H' = H_0^1 \times H_*^1 \times H_*^1$  e a aplicação  $a : H' \times H' \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\begin{aligned} a((\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*)) &= k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\varphi_x^* + \psi^* + lw^*)} dx \\ &+ k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{(w_x^* - l\varphi^*)} dx + b \int_0^L \psi_x \overline{\psi_x^*} dx. \end{aligned}$$

Observe que  $a(\cdot, \cdot)$  é uma forma sesquilinear. Além disso, considerando em  $H'$  a norma

$$\|(\varphi, \psi, w)\|_{H'}^2 = \|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2, \quad (3.44)$$

temos que  $a(\cdot, \cdot)$  é coerciva, esse resultado segue diretamente da desigualdade (3.28). Observe agora que a norma

$$\|(\varphi, \psi, w)\|_{H'} = \|\varphi_x\|_2 + \|\psi_x\|_2 + \|w_x\|_2,$$

é equivalente a norma definida em (3.2). Por um lado, temos

$$\begin{aligned} \|(\varphi, \psi, w)\|_{H'}^2 &= \|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 \\ &\leq (\|\varphi_x\|_2 + \|\psi_x\|_2 + \|w_x\|_2)^2 \\ &= \|(\varphi, \psi, w)\|_{H'}^2. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|(\varphi, \psi, w)\|_{H'}^2 &= (\|\varphi_x\|_2 + \|\psi_x\|_2 + \|w_x\|_2)^2 \\ &\leq 2(\|\varphi_x\|_2 + \|\psi_x\|_2)^2 + 2(\|w_x\|_2)^2 \\ &\leq 4(\|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2) \\ &= 4\|(\varphi, \psi, w)\|_{H'}^2. \end{aligned}$$

Assim, dados  $(\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*) \in H'$ , usando as desigualdades Triangular e de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |a((\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*))| &\leq k|((\varphi_x + \psi + lw), (\varphi_x^* + \psi^* + lw^*))_2| + b|(\psi_x, \psi_x^*)_2| \\ &+ k_0|((w_x - l\varphi), (w_x^* - l\varphi^*))_2| \\ &\leq k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2\|\varphi_x^* + \psi^* + lw^*\|_2 + b\|\psi_x\|_2\|\psi_x^*\|_2 \\ &+ k_0\|w_x - l\varphi\|_2\|w_x^* - l\varphi_x^*\|_2. \end{aligned}$$

Utilizando agora a desigualdade triangular e a desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned}
|a((\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*))| &\leq k(\|\varphi_x\|_2 + \|\psi\|_2 + l\|w\|_2)(\|\varphi_x^*\|_2 + \|\psi^*\|_2 + l\|w^*\|_2) \\
&+ b\|\psi_x\|_2\|\psi_x^*\|_2 + k_0(\|w_x\|_2 + l\|\varphi\|_2)(\|w_x^*\|_2 + l\|\varphi^*\|_2) \\
&\leq k(\|\varphi_x\|_2 + c\|\psi_x\|_2 + lc\|w_x\|_2)(\|\varphi_x^*\|_2 + c\|\psi_x^*\|_2 \\
&+ lc\|w_x^*\|_2) + b\|\psi_x\|_2\|\psi_x^*\|_2 + k_0(\|w_x\|_2 + lc\|\varphi_x\|_2)(\|w_x^*\|_2 \\
&+ lc\|\varphi_x^*\|_2).
\end{aligned}$$

Temos então que existe  $C = \max\{k(\max\{1, c, lc\})^2, k_0(\max\{1, lc\})^2, b\} > 0$  tal que

$$|a((\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*))| \leq C|(\varphi, \psi, w)|_{H'}|(\varphi^*, \psi^*, w^*)|_{H'}.$$

O que mostra eu  $a$  é contínua, e portanto, sequilinear, contínua e coerciva.

Defina agora a aplicação  $\Lambda : H' \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\Lambda(\varphi^*, \psi^*, w^*) = - \int_0^L (g_1 \overline{\varphi^*} + g_2 \overline{\psi^*} + g_3 \overline{w^*}) dx. \quad (3.46)$$

Podemos observar que  $\Lambda$  é uma aplicação antilinear.

Dado  $(\varphi^*, \psi^*, w^*) \in H'$ , usando as desigualdades triangular e de Cauchy-Schwarz temos

$$\begin{aligned}
|\Lambda(\varphi^*, \psi^*, w^*)| &\leq |(g_1, \varphi^*)_2| + |(g_2, \psi^*)_2| + |(g_3, w^*)_2| \\
&\leq \|g_1\|_2 \|\varphi^*\|_2 + \|g_2\|_2 \|\psi^*\|_2 + \|g_3\|_2 \|w^*\|_2.
\end{aligned}$$

E usando a desigualdade de Poincaré, existe  $C = \max\{\|g_1\|_2, \|g_2\|_2, \|g_3\|_2\} > 0$  tal que

$$|\Lambda(\varphi^*, \psi^*, w^*)| \leq C|(\varphi^*, \psi^*, w^*)|_{H'}. \quad (3.47)$$

O que mostra que  $\Lambda$  é uma aplicação antilinear limitada.

Pelo teorema de Lax-Milgram, existe um único  $(\varphi, \psi, w) \in H'$  que satisfaz

$$\begin{aligned}
- \int_0^L (g_1 \overline{\varphi^*} + g_2 \overline{\psi^*} + g_3 \overline{w^*}) dx &= k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\varphi_x^* + \psi^* + lw^*)} dx \\
&+ k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{(w_x^* - l\varphi^*)} dx + b \int_0^L \psi_x \overline{\psi_x^*} dx.
\end{aligned} \quad (3.48)$$

para todo  $(\varphi^*, \psi^*, w^*) \in H'$ .

Tome  $\xi \in C_0^1$  arbitrária e  $\varphi^* = \xi, \psi^* = w^* = 0$ . Assim, substituindo em (3.48),

$$k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\xi_x} dx - lk_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{\xi} dx = - \int_0^L g_1 \overline{\xi} dx, \quad \forall \xi \in C_0^1,$$

Assim,

$$\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\xi_x} dx = -\frac{1}{k} \int_0^L (g_1 - lk_0(w_x - l\varphi)) \overline{\xi} dx, \quad \forall \xi \in C_0^1.$$

Dado que  $\varphi_x + \psi + lw, g_1 - lk_0(w_x - l\varphi) \in L^2$ , temos que

$$\varphi_x + \psi + lw \in H^1.$$

Mas,  $\psi + lw \in H^1$ , o que implica que  $\varphi_x \in H^1$ , e portanto  $\varphi \in H^2$ . Além disso,

$$k(\varphi_x + \psi + lw)_x + k_0l(w_x - l\varphi) = g_1. \quad (3.49)$$

Tomando agora  $\phi \in H^1$  arbitrária,  $\varphi^* = w^* = 0$  e  $\psi^* = \phi - \frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx$ . Substituindo em (3.48)

$$\begin{aligned} - \int_0^L g_2 \left( \overline{\phi - \frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx} \right) dx &= k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \left( \overline{\phi - \frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx} \right) dx \\ &\quad + b \int_0^L \psi_x \left( \overline{\phi - \frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx} \right)_x dx. \end{aligned}$$

Sabemos que  $\left( \overline{-\frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx} \right)_x = 0$ . Então

$$\begin{aligned} \int_0^L \psi_x \overline{\phi_x} dx &= -\frac{1}{b} \int_0^L (g_2 + k(\varphi_x + \psi + lw)) \overline{\phi} dx \\ &\quad - \frac{1}{b} \int_0^L (g_2 + k(\varphi_x + \psi + lw)) \left( \overline{-\frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx} \right) dx. \end{aligned}$$

Como  $g_2 \in L_*^2, \psi, w \in H_*^1$ , integrando por partes temos

$$\int_0^L \psi_x \overline{\phi_x} dx = -\frac{1}{b} \int_0^L (g_2 + k(\varphi_x + \psi + lw)) \overline{\phi} dx, \quad \forall \phi \in H^1. \quad (3.50)$$

Como a igualdade (3.50) vale em particular para toda  $\phi \in C_0^1$  e  $\psi_x, g_2 + k(\varphi_x + \psi + lw) \in L^2$ , segue que  $\psi_x \in H^1$ , o que implica que  $\psi \in H^2$ . Temos também que

$$b\psi_{xx} = g_2 + k(\varphi_x + \psi + lw). \quad (3.51)$$

Integrando (3.51) de 0 a L e sabendo que  $g_2 \in L_*^2, \psi, w \in H_*^1$  e  $\varphi \in H_0^1$ , temos que  $\psi_x \in H_0^1$ .  
E

$$b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + lw) = g_2. \quad (3.52)$$

Analogamente, tomando  $\phi \in H^1$  arbitrária,  $\varphi^* = \psi^* = 0$  e  $w^* = \phi - \frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx$  e substituindo em (3.48),

$$\begin{aligned} - \int_0^L g_3 \left( \overline{\phi - \frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx} \right) dx &= kl \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \left( \overline{\phi - \frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx} \right) dx \\ &+ k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) \left( \overline{\phi - \frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx} \right) dx. \end{aligned}$$

Novamente usando o fato de que  $\left( -\frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx \right)_x = 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{\phi_x} dx &= -\frac{1}{k_0} \int_0^L (g_3 + kl(\varphi_x + \psi + lw)) \overline{\phi} dx \\ &- \frac{1}{k_0} \int_0^L (g_3 + kl(\varphi_x + \psi + lw)) \left( -\frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx \right) dx. \end{aligned}$$

Como  $g_3 \in L_*^2$ ,  $\psi, w \in H_*^1$ , integrando por partes temos

$$\int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{\phi_x} dx = -\frac{1}{k_0} \int_0^L (g_3 + kl(\varphi_x + \psi + lw)) \overline{\phi} dx, \quad \forall \phi \in H^1. \quad (3.53)$$

Sabendo que  $w_x, g_3 + kl(\varphi_x + \psi + lw) \in L^2$  e que a igualdade (3.53) vale, em particular, para toda  $\phi \in C_0^1$ , temos  $w_x - l\varphi \in H^1$ . Como  $\varphi \in H^1$ , temos  $w_x \in H^1$ , o que implica que  $w \in H^2$ . Temos também

$$k_0(w_x - l\varphi)_x = g_3 + kl(\varphi_x + \psi + lw). \quad (3.54)$$

Integrando (3.54) de 0 a L e sabendo que  $g_3 \in L_*^2$ ,  $\psi, w \in H_*^1$  e  $\varphi \in H_0^1$ , temos que  $w_x \in H_0^1$ . E

$$k_0(w_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x + \psi + lw) = g_3. \quad (3.55)$$

Portanto, de (3.49), (3.52) e (3.54), existe uma única solução  $(\varphi, \psi, w) \in (H^2 \cap H_0^1) \times (H^2 \cap H_*^1)^2$ , com  $w_x, \psi_x \in H_0^1$  para o sistema (3.43). □

**Teorema 3.12.** *O operador  $\mathcal{A}_i$  definido em (3.8) é gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações sobre  $\mathcal{H}_i$ .*

*Demonstração.* Concluiremos o desejado utilizando o Teorema de Lummer-Phillip's. Assim, devemos mostrar que o operador  $\mathcal{A}_i$  é dissipativo, que  $0 \in \rho(\mathcal{A}_i)$  e que  $D(\mathcal{A}_i)$  é denso em  $\mathcal{H}_i$ .

- $\mathcal{A}_i$  é dissipativo.

Temos que

$$\mathcal{A}_i U = \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1} \varphi_{xx} - \frac{k_0 l^2}{\rho_1} \varphi + \frac{k}{\rho_1} \psi_x + \frac{l(k+k_0)}{\rho_1} w_x \\ \Psi \\ -\frac{k}{\rho_2} \varphi_x + \frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2} \psi - \frac{kl}{\rho_2} w - \frac{\gamma}{\rho_2} \theta_x \\ W \\ -\frac{l(k_0+k)}{\rho_1} \varphi_x - \frac{lk}{\rho_1} \psi + \frac{k_0}{\rho_1} w_{xx} - \frac{l^2 k}{\rho_1} w \\ -\frac{\gamma}{\rho_3} \Psi_x + \frac{\alpha}{\rho_3} \theta_{xx} \end{pmatrix}.$$

Assim

$$\begin{aligned} ((\mathcal{A}_i U, U))_{\mathcal{H}_i} &= (k(\varphi_x + \psi + lw)_x + k_0 l(w_x - l\varphi), \Phi)_2 + (b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + lw), \Psi)_2 \\ &+ (k_0(w_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x + \psi + lw), W)_2 + k_0(W_x - l\Phi, w_x - l\varphi)_2 \\ &+ b(\Psi_x, \psi_x)_2 + (-\gamma\Psi_x + \alpha\theta_{xx}, \theta)_2 - \gamma(\theta_x, \Psi)_2 \\ &+ k(\Phi_x + \Psi + lW, \varphi_x + \psi + lw)_2. \end{aligned}$$

Rearranjando, usando integração por partes e as condições de fronteira,

$$\begin{aligned} ((\mathcal{A}_i U, U))_{\mathcal{H}_i} &= b(\Psi_x, \psi_x)_2 - b(\psi_x, \Psi_x) + \gamma(\theta, \Psi_x)_2 - \gamma(\Psi_x, \theta)_2 - \alpha\|\theta_x\|_2^2 \\ &+ k(\Phi_x + \Psi + lW, \varphi_x + \psi + lw)_2 - k(\varphi_x + \psi + lw, \Phi_x + \Psi + lW)_2 \\ &+ k_0(W_x - l\Phi, w_x - l\varphi) - k_0(w_x - l\varphi, W_x - l\Phi). \end{aligned}$$

Visto que  $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$ , tomando a parte real de  $((\mathcal{A}_i U, U))_{\mathcal{H}_i}$  obtemos

$$\mathbf{Re}((\mathcal{A}_i U, U))_{\mathcal{H}_i} = -\alpha\|\theta_x\|_2^2 \leq 0. \quad (3.56)$$

Como  $U \in D(\mathcal{A}_i)$  foi escolhido arbitrariamente, temos que  $\mathcal{A}_i$  é dissipativo.

- $0 \in \rho(\mathcal{A}_i)$ .

Mostrar que  $0 \in \rho(\mathcal{A}_i)$  é equivalente a mostrar que o operador linear  $-\mathcal{A}_i : D(\mathcal{A}_i) \subset \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_i$  é invertível e,  $(-\mathcal{A}_i)^{-1}$  é limitado. Escrevendo  $-\mathcal{A}_i U = F$  em termos de suas componentes temos

$$-\Phi = f_1, \quad (3.57)$$

$$-k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0l(w_x - l\varphi) = \rho_1 f_2, \quad (3.58)$$

$$-\Psi = f_3, \quad (3.59)$$

$$-b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = \rho_2 f_4, \quad (3.60)$$

$$-W = f_5, \quad (3.61)$$

$$-k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = \rho_1 f_6, \quad (3.62)$$

$$\gamma\Psi_x - \alpha\theta_{xx} = \rho_3 f_7. \quad (3.63)$$

Para  $i = 1$ , de (3.57), (3.59) e (3.61), segue que

$$\Phi = -f_1 \in H_0^1,$$

$$\Psi = -f_3 \in H_0^1,$$

$$W = -f_5 \in H_0^1.$$

Sabendo que  $\frac{1}{\alpha}(\rho_3 f_7 - \gamma\Psi_x) \in L^2$ , do Lema 3.9 existe um único  $\theta \in H^2 \cap H_0^1$  que satisfaz

$$-\theta_{xx} = \frac{1}{\alpha}(\rho_3 f_7 - \gamma\Psi_x).$$

Considerando as funções  $g_1, g_2, g_3$  dadas no Lema 3.10 da seguinte forma

$$g_1 = -\rho_1 f_2 \in L^2,$$

$$g_2 = -\rho_2 f_4 + \gamma\theta_x \in L^2,$$

$$g_3 = -\rho_1 f_6 \in L^2.$$

Temos que o sistema formado pelas equações (3.58), (3.60) e (3.62) possui uma única solução  $(\varphi, \psi, w) \in (H^2 \cap H_0^1)^3$ . O que mostra que existe um único  $U \in D(\mathcal{A}_1)$  tal que  $-\mathcal{A}_1 U = F$ .

Para  $i = 2$ , de (3.57), (3.59) e (3.61), segue que

$$\Phi = -f_1 \in H_0^1,$$

$$\Psi = -f_3 \in H_*^1,$$

$$W = -f_5 \in H_*^1.$$

Sabendo que  $\frac{1}{\alpha}(\rho_3 f_7 - \gamma\Psi_x) \in L^2$ , do Lema 3.9 existe um único  $\theta \in H^2 \cap H_0^1$  que satisfaz

$$-\theta_{xx} = \frac{1}{\alpha}(\rho_3 f_7 - \gamma\Psi_x).$$

Considerando as funções  $g_1, g_2, g_3$  dadas no Lema 3.11 da seguinte forma

$$\begin{aligned} g_1 &= -\rho_1 f_2 \in L^2, \\ g_2 &= -\rho_2 f_4 + \gamma \theta_x \in L_*^2, \\ g_3 &= -\rho_1 f_6 \in L_*^2. \end{aligned}$$

Temos que o sistema formado pelas equações (3.58), (3.60) e (3.62) possui uma única solução  $(\varphi, \psi, w)$  satisfazendo

$$\varphi \in H^2 \cap H_0^1 \quad \psi, w \in H^2 \cap H_0^* \quad \psi_x w_x \in H_0^1.$$

O que mostra que existe um único  $U \in D(\mathcal{A}_2)$  tal que  $-\mathcal{A}_2 U = F$ .

Portanto, o operador  $-\mathcal{A}_i$  é invertível, vamos mostrar agora que seu inverso é limitado. Para isto, considere  $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7) \in \mathcal{H}_i$ . Existe um  $U \in D(\mathcal{A}_i)$  tal que  $\mathcal{A}_i U = F$ . Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz em (3.56) temos

$$\rho_3 \|\theta_x\|_2^2 \leq \frac{1}{k_1} \|\mathcal{A}U\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Mas  $\mathcal{A}_i U = F$ , então

$$\rho_3 \|\theta_x\|_2^2 \leq \frac{1}{k_1} \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Usando a desigualdade de Poincaré, existe uma constante  $c_1 > 0$  tal que

$$\rho_3 \|\theta\|_2^2 \leq c_1 \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.64)$$

Tomando em (3.58), (3.60) e (3.62) o produto interno de  $L^2$ , com  $\varphi, \psi$  e  $w$ , respectivamente, temos

$$\begin{aligned} k((\varphi_x + \psi + lw)_x, \varphi)_2 + k_0 l((w_x - l\varphi), \varphi)_2 &= (\rho_1 f_2, \varphi)_2, \\ b(\psi_{xx}, \psi)_2 - k((\varphi_x + \psi + lw), \psi)_2 &= (\rho_2 f_4 + \gamma \theta_x, \psi)_2, \\ k_0((w_x - l\varphi)_x, w)_2 - kl((\varphi_x + \psi + lw), w)_2 &= (\rho_1 f_6, w)_2. \end{aligned}$$

Usando integração por partes,

$$\begin{aligned} -k((\varphi_x + \psi + lw), \varphi_x)_2 - k_0((w_x - l\varphi), -l\varphi)_2 &= (\rho_1 f_2, \varphi)_2, \\ -b(\psi_x, \psi_x)_2 - k((\varphi_x + \psi + lw), \psi)_2 &= (\rho_2 f_4 + \gamma \theta_x, \psi)_2, \\ -k_0((w_x - l\varphi), w_x)_2 - k((\varphi_x + \psi + lw), lw)_2 &= (\rho_1 f_6, w)_2. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned} k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 &= -((\rho_1 f_2, \varphi)_2 + (\rho_2 f_4 + \gamma\theta_x, \psi)_2 \\ &+ (\rho_1 f_6, w)_2). \end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e triangular,

$$\begin{aligned} k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 &\leq \rho_1\|f_2\|_2\|\varphi\|_2 + \rho_2\|f_4\|_2\|\psi\|_2 \\ &+ \gamma\|\theta_x\|_2\|\psi\|_2 + \rho_1\|f_6\|_2\|w\|_2. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Usando a equivalência das normas  $|U|_{\mathcal{H}}$  e  $\|U\|_{\mathcal{H}}$  e a desigualdade de Poincaré

$$\begin{aligned} \rho_1\|f_2\|_2\|\varphi\|_2 + \rho_2\|f_4\|_2\|\psi\|_2 + \rho_1\|f_6\|_2\|w\|_2 &\leq c\rho_1\|f_2\|_2\|\varphi_x\|_2 + c\rho_2\|f_4\|_2\|\psi_x\|_2 \\ &+ c\rho_1\|f_6\|_2\|w_x\|_2 \\ &\leq 2c\rho_1|F|_{\mathcal{H}}|U|_{\mathcal{H}} + c\rho_2|F|_{\mathcal{H}}|U|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

assim, existe  $c_2 = c\sigma^2 \max\{2\rho_1, \rho_2\} > 0$ , onde  $\sigma$  é a constante positiva satisfazendo a desigualdade de equivalência das normas, isto é,  $|U|_{\mathcal{H}} \leq \sigma\|U\|_{\mathcal{H}}$ , tal que

$$\rho_1\|f_2\|_2\|\varphi\|_2 + \rho_2\|f_4\|_2\|\psi\|_2 + \rho_1\|f_6\|_2\|w\|_2 \leq c_2|F|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.66)$$

Usando as desigualdades de Poincaré e Young com  $\epsilon = \frac{1}{6\sigma^2}$

$$\begin{aligned} \gamma\|\theta_x\|_2\|\psi\|_2 &\leq c\gamma\|\theta_x\|_2\|\psi_x\|_2 \\ &\leq \frac{3(c\gamma\sigma)^2}{2}\|\theta_x\|_2^2 + \frac{1}{6\sigma^2}\|\psi_x\|_2^2. \end{aligned}$$

De (3.64), existe  $c_3 = \frac{3c^2\sigma^2\gamma m}{2k_1} > 0$  tal que

$$\gamma\|\theta_x\|_2\|\psi\|_2 \leq c_3|F|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{6\sigma^2}|U|_{\mathcal{H}}.$$

Usando a equivalência das normas,

$$\gamma\|\theta_x\|_2\|\psi\|_2 \leq c_3|F|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{6}\|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.67)$$

Substituindo (3.66) e (3.67) em (3.65), segue que existe uma constante positiva dada por  $c_4 = \max\{c_1, c_2, c_3\} > 0$  tal que

$$k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 \leq c_4|F|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{6}\|U\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (3.68)$$

Por outro lado, de (3.57), (3.59) e (3.61) e utilizando a desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned} \rho_1 \|\Phi\|_2^2 + \rho_2 \|\Psi\|_2^2 + \rho_1 \|W\|_2^2 &= \rho_1 \|f_1\|_2^2 + \rho_2 \|f_3\|_2^2 + \rho_1 \|f_5\|_2^2 \\ &\leq c(\rho_1 \|f_{1,x}\|_2^2 + \rho_2 \|f_{3,x}\|_2^2 + \rho_1 \|f_{5,x}\|_2^2) \\ &\leq c \max\{\rho_1, \rho_2\} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

assim, existe  $c_5 = c\sigma^2 \max\{\rho_1, \rho_2\} > 0$  tal que

$$\rho_1 \|\Phi\|_2^2 + \rho_2 \|\Psi\|_2^2 + \rho_1 \|W\|_2^2 \leq c_5 \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.69)$$

Somando (3.64), (3.68) e (3.69),

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq c_5 \|F\|_{\mathcal{H}} + c_4 \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{6} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + c_1 \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Utilizando a desigualdade de Young com  $\epsilon = \frac{1}{6}$ ,

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq c_5 \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{3c_4^2}{2} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{6} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{6} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{6} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{3c_1^2}{2} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Logo, existe  $C = \sqrt{\max\{2c_5, 3c_4^2, 3c_1^2\}} > 0$  tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Como  $F \in \mathcal{H}_i$  é arbitrário, segue que

$$\|(-\mathcal{A}_i)^{-1} F\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall F \in \mathcal{H}_i.$$

Com isso, podemos concluir que  $0 \in \rho(\mathcal{A}_i)$ .

- $\overline{D(\mathcal{A}_i)} = \mathcal{H}_i$

Considere no Lema 2.18  $B_1 = I$ . Sabendo que  $(-\mathcal{A}_i)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_i)$ , tome  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  tal que

$$\lambda_0 < \min\left\{\frac{1}{\|(-\mathcal{A}_i)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_i)}}, 1\right\}.$$

Deste modo,  $\lambda_0(-\mathcal{A}_i)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_i)$ . Portanto, considerando  $B_2 = \lambda_0(-\mathcal{A}_i)^{-1}$  no Lema 2.18 temos

$$\|B_2\|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{1}{\|B_1\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_i)}}. \quad (3.70)$$

Logo,  $I + \lambda_0(-\mathcal{A}_i)^{-1}$  é linear, limitado e invertível. Observe que

$$\lambda_0 I - \mathcal{A}_i = (-\mathcal{A}_i)^{-1}(\lambda_0(-\mathcal{A}_i)^{-1} + I). \quad (3.71)$$

Como  $-\mathcal{A}_i$  e  $I + \lambda_0(-\mathcal{A}_i)^{-1}$  são invertíveis, segue de (3.71) que  $\lambda_0 I - \mathcal{A}_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_i)$ .

Portanto,  $Im(\lambda_0 I - \mathcal{A}_i) = \mathcal{H}_i$  para  $\lambda_0$  tomado em (3.70). Do Teorema 2.19 segue que  $Im(\lambda I - \mathcal{A}_i) = \mathcal{H}_i$  para todo  $\lambda > 0$  e que  $\overline{D(\mathcal{A}_i)} = \mathcal{H}_i$ .

Segue então do Corolário 2.52, que  $\mathcal{A}_i$  é gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações  $e^{\mathcal{A}_i t}$  sobre  $\mathcal{H}_i$ .  $\square$

**Teorema 3.13.** *Para cada vetor  $U_0 \in D(\mathcal{A}_i)$ , o problema (3.9) possui uma única solução*

$$U \in C([0, \infty), D(\mathcal{A}_i)) \cap C^1([0, \infty), \mathcal{H}_i),$$

dada por  $U(t) = e^{\mathcal{A}_i t} U_0$ .

*Demonstração.* Segue do Teorema 3.12 e do Teorema 2.53.  $\square$

#### 4 ESTABILIDADE

O objetivo desta seção é fazer um estudo sobre o comportamento assintótico da solução  $U(t) = e^{\mathcal{A}_i t} U_0$  do problema de Cauchy abstrado (3.9) e, conseqüentemente, para a solução do sistema (3.1)-(3.7). Considere

$$\chi_0 = \left| \frac{b}{k} \rho_1 - \rho_2 \right| e \chi = \left| 1 - \frac{k}{k_0} \right|. \quad (4.1)$$

A seguir enunciaremos e demonstraremos resultados que servirão de base para concluirmos o desejado.

**Lema 4.1.** *Seja  $\mathcal{A}_i : D(\mathcal{A}_i) \rightarrow \mathcal{H}_i$  o operador definido em (3.8). Então, todos os valores espectrais de  $\mathcal{A}_i$  são autovalores de  $\mathcal{A}_i$ .*

*Demonstração.* Considere  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $U_n = (\varphi^{(n)}, \Phi^{(n)}, \psi^{(n)}, \Psi^{(n)}, w^{(n)}, W^{(n)}, \theta^{(n)})$  uma sequência limitada (na norma do gráfico) em  $D(\mathcal{A}_i)$ . Observe que

$$\begin{aligned} \|U_n\|_{D(\mathcal{A}_i)} &= \|U_n\|_{\mathcal{H}_i} + \|\mathcal{A}_i U_n\|_{\mathcal{H}_i} \\ &= \|\varphi_x^{(n)}\|_2^2 + \|\Phi^{(n)}\|_2^2 + \|\psi_x^{(n)}\|_2^2 + \|\Psi^{(n)}\|_2^2 + \|w_x^{(n)}\|_2^2 + \|W^{(n)}\|_2^2 + \|\theta^{(n)}\|_2^2 \\ &+ \|\Phi_x^{(n)}\|_2^2 + \frac{1}{\rho_1} \|k(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)})_x + k_0 l(w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)})\|_2^2 + \|\Psi_x^{(n)}\|_2^2 \\ &+ \frac{1}{\rho_2} \|b\psi_{xx}^{(n)} - k(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)}) - \gamma\theta_x^{(n)}\|_2^2 + \|W_x^{(n)}\|_2^2 \\ &+ \frac{1}{\rho_1} \|k_0(w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)})_x - kl(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)})\|_2^2 \\ &+ \frac{1}{\rho_3} \|\gamma\Psi_x^{(n)} + \alpha\theta_{xx}^{(n)}\|_2^2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Primeiramente mostraremos que as sequências  $\{\varphi_{xx}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{\psi_{xx}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{w_{xx}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\{\theta_x^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  são limitadas em  $L^2$ .

Tomando a norma de  $\varphi_{xx}^{(n)}$  em  $L^2$ , somando e subtraindo termos adequados, usando a Desigualdade Triangular e a Proposição 2.32 temos,

$$\begin{aligned} \|\varphi_{xx}^{(n)}\|_2^2 &= \|(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)})_x - \psi_x^{(n)} - lw_x^{(n)}\|_2^2 \\ &\leq 2\|(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)})_x\|_2^2 + 2\|\psi_x^{(n)} + lw_x^{(n)}\|_2^2 \\ &\leq \frac{4}{k} \|(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)})_x + k_0 l(w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)})\|_2^2 + \frac{4}{k} \|k_0 l(w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)})\|_2^2 \\ &+ 4\|\psi_x^{(n)}\|_2^2 + 4l^2\|w_x^{(n)}\|_2^2. \end{aligned}$$

Usando novamente a Desigualdade Triangular e agora a Desigualdade de Poincaré, segue então

de (4.2) que existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|\varphi_{xx}^{(n)}\|_2^2 \leq C \|U_n\|_{D(\mathcal{A}_i)}. \quad (4.3)$$

Como  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada, segue que a sequência  $\{\varphi_{xx}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada em  $L^2$ .

De modo análogo é possível mostrar que  $\{\psi_{xx}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{w_{xx}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  também são limitadas em  $L^2$ .

Usando (3.56) e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\begin{aligned} \|\theta_x^{(n)}\|_2^2 &= -\frac{1}{\alpha} \operatorname{Re}((\mathcal{A}_i U_n, U_n))_{\mathcal{H}_i} \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \|\mathcal{A}_i U_n\|_{\mathcal{H}_i} \|U_n\|_{\mathcal{H}_i}. \end{aligned}$$

Da equivalência das normas  $|\cdot|_{\mathcal{H}_i}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_i}$ , existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|\theta_x^{(n)}\|_2^2 \leq C |\mathcal{A}_i U_n|_{\mathcal{H}_i} |U_n|_{\mathcal{H}_i}.$$

Agora, usando que  $2ab \leq (a+b)^2$ , existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|\theta_x^{(n)}\|_2^2 \leq C (|U_n|_{\mathcal{H}_i} + |\mathcal{A}_i U_n|_{\mathcal{H}_i})^2.$$

Isto é,

$$\|\theta_x^{(n)}\|_2 \leq C \|U_n\|_{D(\mathcal{A}_i)}.$$

Portanto, a sequência  $\{\theta_x^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada em  $L^2$ .

Mostraremos agora que a sequência  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  possui uma subsequência convergente em  $\mathcal{H}_i$ .

(1) A sequência  $\{\varphi^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada em  $H^2$ . Como a aplicação inclusão

$$i : (H^2, \|\cdot\|_{H^2}) \rightarrow (H^1, \|\cdot\|_{H^1})$$

é compacta (pela Proposição 2.39), existem uma subsequência  $\{\varphi^{(n_k)}\}_{n_k \in \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}}$  e uma função  $\varphi \in H^1$  tais que

$$\|\varphi^{(n_k)} - \varphi\|_{H^1} \rightarrow 0.$$

Como  $\varphi^{(n_k)} \in H_0^1$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  e  $(H_0^1, \|\cdot\|_{H^1})$  é completo, segue que  $\varphi \in H_0^1$ .

(2) A sequência  $\{\Phi^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}_1}$  é limitada em  $H^1$ . A aplicação inclusão

$$i : (H^1, \|\cdot\|_{H^1}) \rightarrow (C([0, L], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$$

é compacta (pela Proposição 2.39). Logo existem uma subsequência  $\{\Phi^{(n_k)}\}_{n_k \in \mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1}$  e uma

função  $\Phi \in C([0, L], \mathbb{R})$  tais que

$$\|\Phi^{(n_k)} - \Phi\|_\infty \rightarrow 0.$$

Mas, como

$$0 \leq \|\Phi^{(n_k)} - \Phi\|_2^2 = \int_0^L |\Phi^{(n_k)} - \Phi|^2 dx \leq L \|\Phi^{(n_k)} - \Phi\|_\infty \rightarrow 0,$$

então  $\Phi \in L^2$  e

$$\|\Phi^{(n_k)} - \Phi\|_2^2 \rightarrow 0.$$

(3) A sequência  $\{\psi^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}_2}$  é limitada em  $H^2$ . Assim como em (1), existem uma subsequência  $\{\psi^{(n_k)}\}_{n_k \in \mathbb{N}_3 \subset \mathbb{N}_2}$  e uma função  $\psi \in H^1$  tais que

$$\|\psi^{(n_k)} - \psi\|_{H^1} \rightarrow 0.$$

Como  $\psi^{(n_k)} \in H_0^1$  e  $(H_0^1, \|\cdot\|_{H^1})$  é completo (ou  $\psi^{(n_k)} \in H_*^1$  e  $(H_*^1, \|\cdot\|_{H^1})$  é completo), segue que  $\psi \in H_0^1$  (ou  $\psi \in H_*^1$ ).

(4) A sequência  $\{\Psi^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}_3}$  é limitada em  $H^1$ . Assim como em (2), existem uma subsequência  $\{\Psi^{(n_k)}\}_{n_k \in \mathbb{N}_4 \subset \mathbb{N}_3}$  e uma função  $\Psi \in L^2$  tais que

$$\|\Psi^{(n_k)} - \Psi\|_2 \rightarrow 0.$$

Como  $\Psi^{(n_k)} \in L^2$  e  $(L^2, \|\cdot\|_2)$  é completo (ou  $\Psi^{(n_k)} \in L_*^2$  e  $(L_*^2, \|\cdot\|_2)$  é completo), segue que  $\Psi \in L^2$  (ou  $\Psi \in L_*^2$ ).

(5) A sequência  $\{w^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}_4}$  é limitada em  $H^2$ . Assim como em (1), existem uma subsequência  $\{w^{(n_k)}\}_{n_k \in \mathbb{N}_5 \subset \mathbb{N}_4}$  e uma função  $w \in H^1$  tais que

$$\|w^{(n_k)} - w\|_{H^1} \rightarrow 0.$$

Como  $w^{(n_k)} \in H_0^1$  e  $(H_0^1, \|\cdot\|_{H^1})$  é completo (ou  $w^{(n_k)} \in H_*^1$  e  $(H_*^1, \|\cdot\|_{H^1})$  é completo), segue que  $w \in H_0^1$  (ou  $w \in H_*^1$ ).

(6) A sequência  $\{W^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}_5}$  é limitada em  $H^1$ . Assim como em (2), existem uma subsequência  $\{W^{(n_k)}\}_{n_k \in \mathbb{N}_6 \subset \mathbb{N}_5}$  e uma função  $W \in L^2$  tais que

$$\|W^{(n_k)} - W\|_2 \rightarrow 0.$$

Como  $W^{(n_k)} \in L^2$  e  $(L^2, \|\cdot\|_2)$  é completo (ou  $W^{(n_k)} \in L_*^2$  e  $(L_*^2, \|\cdot\|_2)$  é completo), segue que  $W \in L^2$  (ou  $W \in L_*^2$ ).

(7) A sequência  $\{\theta^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}_6}$  é limitada em  $H^1$ . Assim como em (2), existem uma subsequência

$\{\theta^{(n_k)}\}_{n_k \in \mathbb{N}_7 \subset \mathbb{N}_6}$  e uma função  $\theta \in L^2$  tais que

$$\|\theta^{(n_k)} - \theta\|_2 \rightarrow 0.$$

Como  $\theta^{(n_k)} \in L^2$  e  $(L^2, \|\cdot\|_2)$  é completo, segue que  $\theta \in L^2$ .

Assim, dos itens (1)-(7), existem  $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \theta) \in \mathcal{H}_i$  e  $\mathbb{N}_7 \subset \mathbb{N}$  tais que a sequência  $\{U_{n_k}\}_{n_k \in \mathbb{N}_7}$  converge para  $U$  no espaço  $(\mathcal{H}_i, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_i})$ .

Com isso mostramos que dada uma sequência  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  limitada em  $D(\mathcal{A}_i)$ , esta possui uma subsequência convergente em  $\mathcal{H}_i$ , isto é, pelo Teorema (2.21) a aplicação

$$i : (D(\mathcal{A}_i), \|\cdot\|_{D(\mathcal{A}_i)}) \rightarrow (\mathcal{H}_i, |\cdot|_{\mathcal{H}_i})$$

é compacta. Portanto, pela Proposição 2.23 e pela Proposição 2.24 segue que todos os valores espectrais de  $\mathcal{A}_i$  são autovalores de  $\mathcal{A}_i$ .  $\square$

**Observação 4.2.** No Lema 4.1, obtemos que o operador  $i : (D(\mathcal{A}_i), \|\cdot\|_{D(\mathcal{A}_i)}) \rightarrow (\mathcal{H}_i, |\cdot|_{\mathcal{H}_i})$  é compacto. Pela equivalência das normas  $|\cdot|_{\mathcal{H}_i}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_i}$ , temos que também é compacto o operador  $i : (D(\mathcal{A}_i), \|\cdot\|_{D(\mathcal{A}_i)}) \rightarrow (\mathcal{H}_i, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_i})$ .

**Lema 4.3.** Seja  $\mathcal{A}_i : D(\mathcal{A}_i) \rightarrow \mathcal{H}_i$  o operador definido em (3.8). Então  $i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A}_i)$ .

*Demonstração.* Suponha que  $i\mathbb{R} \not\subseteq \rho(\mathcal{A}_i)$ . Então existe  $\beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$  (pois  $0 \in \rho(\mathcal{A}_i)$ ) tal que  $i\beta \in \sigma(\mathcal{A}_i)$ . Do Lema 4.1, temos que  $i\beta$  é um autovalor de  $\mathcal{A}_i$ , então existe um autovetor não-nulo  $U \in D(\mathcal{A}_i)$ , satisfazendo a equação resolvente

$$i\beta U - \mathcal{A}_i U = 0. \quad (4.4)$$

Reescrevendo (4.4) em termos de suas componentes, temos

$$i\beta\varphi - \Phi = 0, \quad (4.5)$$

$$i\beta\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0l(w_x - l\varphi) = 0, \quad (4.6)$$

$$i\beta\psi - \Psi = 0, \quad (4.7)$$

$$i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = 0, \quad (4.8)$$

$$i\beta w - W = 0, \quad (4.9)$$

$$i\beta\rho_1 W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = 0, \quad (4.10)$$

$$i\beta\rho_3\theta + \gamma\Psi_x - \alpha\theta_{xx} = 0. \quad (4.11)$$

Tomando o produto interno de (4.4) com  $U$  em  $\mathcal{H}_i$ , tomando a parte real, e usando (3.56), temos

$$\|\theta_x\|_2^2 = 0$$

Usando a desigualdade de Poincaré,

$$0 \leq \|\theta\|_2 \leq C\|\theta_x\|_2 = 0.$$

Portanto,  $\theta = 0$  e por consequência  $\theta_{xx} = 0$ . Substituindo isso em (4.11) temos que  $\Psi_x = 0$ .

Usando a desigualdade de Poincaré

$$0 \leq \|\Psi\|_2 \leq C\|\Psi_x\|_2 = 0.$$

Assim, obtemos que  $\Psi = 0$  e consequentemente de (4.7),  $\psi = 0$ . Deste modo as igualdades (4.6), (4.8) e (4.10) se reduzem a

$$i\beta\rho_1\Phi - k(\varphi_x + lw)_x - k_0l(w_x - l\varphi) = 0, \quad (4.12)$$

$$k(\varphi_x + lw) = 0, \quad (4.13)$$

$$i\beta\rho_1W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + lw) = 0. \quad (4.14)$$

Substituindo (4.13) em (4.12) e usando (4.5) temos

$$(w_x - l\varphi) = \frac{-\beta^2\rho_1}{k_0l}\varphi. \quad (4.15)$$

Substituindo agora (4.13), (4.15) e (4.9) em (4.14) obtemos

$$(\varphi_x - lw) = 0. \quad (4.16)$$

De (4.13) e (4.16) segue que  $\varphi_x = 0$  e consequentemente  $w = 0$ . Usando a desigualdade de Poincaré

$$0 \leq \|\varphi\|_2 \leq C\|\varphi_x\|_2 = 0.$$

Portanto  $\varphi = 0$ . Como  $\varphi = w = 0$  de (4.5) e (4.9) segue que  $\Phi = W = 0$ .

Assim, obtemos que  $U = 0$ , o que contradiz o fato de  $U$  ser um autovetor não-nulo associado ao autovalor  $i\beta$ . Portanto,  $i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A}_i)$ .  $\square$

Como  $i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A}_i)$ , temos que dado  $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7) \in \mathcal{H}$ , existe um  $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \theta) \in D(\mathcal{A}_i)$ , que satisfaz a equação resolvente  $i\beta U - \mathcal{A}_i U = F$ . A

equação resolvente em termos de suas componentes é dada por

$$i\beta\varphi - \Phi = f_1, \quad (4.17)$$

$$i\beta\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0l(w_x - l\varphi) = \rho_1f_2, \quad (4.18)$$

$$i\beta\psi - \Psi = f_3, \quad (4.19)$$

$$i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = \rho_2f_4, \quad (4.20)$$

$$i\beta w - W = f_5, \quad (4.21)$$

$$i\beta\rho_1W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = \rho_1f_6, \quad (4.22)$$

$$i\beta\rho_3\theta + \gamma\Psi_x - \alpha\theta_{xx} = \rho_3f_7. \quad (4.23)$$

**Lema 4.4.** *Sejam  $U \in D(\mathcal{A}_i)$  e  $F \in \mathcal{H}_i$  tais que  $i\beta U - \mathcal{A}_i U = F$  para algum  $\beta \in \mathbb{R}$ . Então, existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$\|\theta_x\|_2^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.24)$$

*Demonstração.* Tomando o produto interno de  $i\beta U - \mathcal{A}_i U = F$  com  $U$ , tomando a parte real, e usando (3.56), obtemos

$$\alpha\|\theta_x\|_2^2 = \mathbf{Re}((F, U))_{\mathcal{H}}.$$

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\|\theta_x\|_2^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Com  $C = \frac{1}{\alpha}$ . O que prova o Lema. □

A seguir vamos obter estimativas locais usando funções de corte. Consideraremos inicialmente  $L_0 \in (0, L)$  e  $\delta > 0$  números arbitrários tais que  $(L_0 - \delta, L_0 + \delta) \subset (0, L)$ , e uma função  $s \in C^2(0, L)$  satisfazendo

$$\text{supp } s \subset (L_0 - \delta, L_0 + \delta), 0 \leq s(x) \leq 1, x \in (0, L) \quad (4.25)$$

e

$$s(x) = 1 \quad \text{para } x \in [L_0 - \delta/2, L_0 + \delta/2] \quad (4.26)$$

Se tivermos os valores de  $L$ ,  $L_0$  e  $\delta$ , uma função desse tipo pode ser determinada por partes, um exemplo genérico para este tipo de função pode ser dado da seguinte forma:

$$s(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L_0 - \delta, \\ e^{\frac{1}{(x-(L_0-\delta/2))^2-1}} e, & L_0 - \delta < x \leq L_0 - \frac{\delta}{2}, \\ 1, & L_0 - \frac{\delta}{2} \leq x \leq L_0 + \frac{\delta}{2}, \\ e^{\frac{1}{(x-(L_0+\delta/2))^2-1}} e, & L_0 + \frac{\delta}{2} \leq x < L_0 + \delta, \\ 0, & L_0 + \delta \leq x \leq L. \end{cases}$$

Vamos atribuir valores a  $L$ ,  $L_0$  e  $\delta$  pra que possamos analisar graficamente o comportamento dessa função  $s$ . Considerando  $L = 8$ ,  $L_0 = 4$  e  $\delta = 2$ , temos

$$s(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 2, \\ e^{\frac{1}{(x-3)^2-1}} e, & 2 < x \leq 3, \\ 1, & 3 \leq x \leq 5, \\ e^{\frac{1}{(x-5)^2-1}} e, & 5 \leq x < 6, \\ 0, & 6 \leq x \leq 8. \end{cases}$$

Podemos observar a representação gráfica de  $s$  na Figura 4.1.

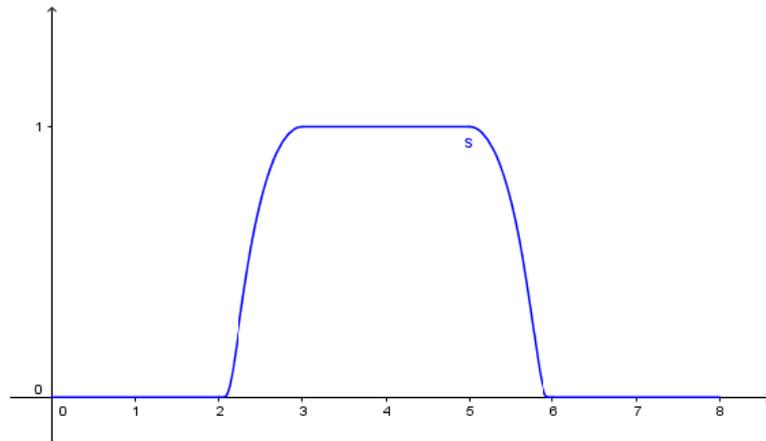


Figura 4.1: Função  $s$ .

**Lema 4.5.** *Sejam  $F \in \mathcal{H}_i$  e  $\beta \in \mathbb{R}$  com  $|\beta| > 1$  tais que  $i\beta U - \mathcal{A}_i U = F$  para algum  $U \in D(\mathcal{A}_i)$ . Então, existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s|\psi_x|^2 dx &\leq C\|\theta_x\|_2 \left( \int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s|\Psi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ \frac{C}{|\beta|} \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

*Demonstração.* Derivando (4.19) com respeito a variável  $x$  e substituindo em (4.23), obtemos

$$i\beta\rho_3\theta + i\beta\gamma\psi_x - \gamma f_{3,x} - \alpha\theta_{xx} = \rho_3 f_7. \quad (4.28)$$

Multiplicando (4.28) por  $s\overline{\psi_x}$  e integrando de 0 até  $L$  temos

$$i\beta\gamma \int_0^L s|\psi_x|^2 dx = -i\beta\rho_3 \int_0^L s\theta\overline{\psi_x} dx + \gamma \int_0^L s f_{3,x}\overline{\psi_x} dx + \alpha \int_0^L s\theta_{xx}\overline{\psi_x} dx + \rho_3 \int_0^L s f_7\overline{\psi_x} dx.$$

Usando (4.19) e integração por partes

$$\begin{aligned} i\beta\gamma \int_0^L s|\psi_x|^2 dx &= \rho_3 \int_0^L s\theta\overline{f_{3,x}} dx + \rho_3 \int_0^L s\theta\overline{\Psi_x} + \gamma \int_0^L s f_{3,x}\overline{\psi_x} - \alpha \int_0^L s'\theta_x\overline{\psi_x} dx \\ &- \alpha \int_0^L s\theta_x\overline{\psi_{xx}} dx + \rho_3 \int_0^L s f_7\overline{\psi_x} dx. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Vamos observar separadamente cada parcela desta soma. Para isto, defina

$$I_1 = -\alpha \int_0^L s\theta_x\overline{\psi_{xx}} dx$$

e

$$I_2 = \rho_3 \int_0^L s\theta\overline{\Psi_x}.$$

Usando (4.20) temos

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{i\beta}{b}\alpha\rho_2 \int_0^L s\theta_x\overline{\Psi} dx - \frac{\alpha}{b}\gamma \int_0^L s|\theta_x|^2 dx - \frac{\alpha}{b}k \int_0^L s\theta_x\overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx \\ &+ \frac{\alpha}{b}\rho_2 \int_0^L s\theta_x\overline{f_4} dx. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Tomando o módulo em (4.30), usando as desigualdades Triangular, de Hölder, de Young e (4.24), existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\begin{aligned} |I_1| &= -\alpha \int_0^L s\theta_x \overline{\left( \frac{i\beta\rho_2}{b}\Psi + \frac{k}{b}(\varphi_x + \psi + lw) + \frac{\gamma}{b}\theta_x - \frac{\rho_2}{b}f_4 \right)} dx \\ &= \frac{i\beta\rho_2\alpha}{b} \int_0^L s\theta_x\overline{\Psi} dx - \frac{\alpha k}{b} \int_0^L s\theta_x\overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx \\ &- \frac{\alpha\gamma}{b} \int_0^L s|\theta_x|^2 dx + \frac{\alpha\rho_2}{b} \int_0^L s\theta_x\overline{f_4} dx \\ &\leq C|\beta|||\theta_x||_2 \left( \int_0^L s|\Psi|^2 dx \right)^{1/2} + C||\theta_x||_2 ||U||_{\mathcal{H}} + C||U||_{\mathcal{H}} ||F||_{\mathcal{H}} + C||F||_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Usando (4.23) e integração por partes, segue que

$$\begin{aligned}
I_2 &= \rho_3 \int_0^L s \overline{\theta \left( -\frac{i\beta\rho_3}{\gamma}\theta + \frac{\alpha}{\gamma}\theta_{xx} + \frac{\rho_3}{\gamma}f_7 \right)} dx \\
&= \frac{\rho_3^2}{\gamma} \int_0^L s \overline{\theta f_7} dx + \frac{i\beta\rho_3^2}{\gamma} \int_0^L s |\theta|^2 dx + \frac{\rho_3\alpha}{\gamma} \int_0^L s \overline{\theta \theta_{xx}} dx \\
&= \frac{\rho_3^2}{\gamma} \int_0^L s \overline{\theta f_7} dx + \frac{i\beta\rho_3^2}{\gamma} \int_0^L s |\theta|^2 dx - \frac{\rho_3\alpha}{\gamma} \int_0^L s' \overline{\theta}_x dx - \frac{\rho_3\alpha}{\gamma} \int_0^L s |\theta_x|^2 dx.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Tomando o módulo em (4.32), usando as desigualdades Triangular, de Hölder, de Young e Poincaré, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|I_2| \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} + C |\beta| \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{4.33}$$

Temos então que tomando o módulo de (4.29), considerando o fato de  $|\beta| > 1$ , usando as desigualdades Triangular, de Hölder, (4.31) e (4.33), existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\begin{aligned}
\int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s |\psi_x|^2 dx &\leq C \|\theta_x\|_2 \left( \int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s |\Psi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\quad + \frac{C}{|\beta|} \|F\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

□

**Lema 4.6.** *Sejam  $F \in \mathcal{H}_i$  e  $\beta \in \mathbb{R}$  com  $|\beta| > 1$  tais que  $i\beta U - \mathcal{A}_i U = F$  para algum  $U \in D(\mathcal{A}_i)$ . Então, existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$\int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s |\Psi|^2 dx \leq \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{\beta^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{4.34}$$

*Demonstração.* Multiplicando (4.20) por  $-s\bar{\psi}$  e integrando de 0 a L temos

$$\begin{aligned}
\rho_2 \int_0^L i\beta s \Psi \bar{\psi} dx &= b \int_0^L s \psi_{xx} \bar{\psi} dx - k \int_0^L s (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\psi} dx - \gamma \int_0^L s \theta_x \bar{\psi} dx \\
&\quad + \rho_2 \int_0^L s f_4 \bar{\psi} dx.
\end{aligned}$$

Usando (4.19) e integrando por partes obtemos

$$\rho_2 \int_0^L s |\Psi|^2 dx = b \int_0^L s |\psi_x|^2 dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) s \bar{\psi} dx + I_3 + I_4 \tag{4.35}$$

onde, usando a equação (4.7)

$$\begin{aligned} I_3 &= \gamma \int_0^L s \theta_x \bar{\psi} dx - \rho_2 \int_0^L s f_4 \bar{\psi} dx - \rho_2 \int_0^L s \Psi \bar{f}_3 dx \\ &= -\frac{\gamma}{i\beta} \int_0^L s \theta_x \overline{[f_3 + \Psi]} dx - \rho_2 \int_0^L s [f_4 \bar{\psi} + \Psi \bar{f}_3] dx, \end{aligned}$$

e

$$I_4 = b \int_0^L s' \psi_x \bar{\psi} dx.$$

Usando (4.19) temos que

$$k \int_0^L s(\varphi_x + \psi + lw) \bar{\psi} dx = -\frac{k}{i\beta} \int_0^L s(\varphi_x + \psi + lw) \bar{\Psi} dx - \frac{k}{i\beta} \int_0^L s(\varphi_x + \psi + lw) \bar{f}_3 dx.$$

Tomando o módulo e usando as desigualdades Triangular, de Hölder e de Poincaré, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\left| k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\psi} dx \right| \leq \frac{k}{|\beta|} \left( \int_0^L s |\Psi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Usando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon = \frac{\rho_1}{2}$ , existe uma constante  $C > 0$  que satisfaz

$$\left| k \int_0^L s(\varphi_x + \psi + lw) \bar{\psi} dx \right| \leq \frac{\rho_1}{2} \int_0^L s |\Psi|^2 dx + \frac{C}{\beta^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.36)$$

Agora, usando (4.19), as desigualdades Triangular, de Hölder, e de Poincaré, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|I_3| \leq \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_{L^2} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.37)$$

Observe que, usando integração por partes temos que

$$I_4 = -b \int_0^L s'' |\psi|^2 dx - b \int_0^L s' \psi \bar{\psi}_x dx,$$

e por (4.19) segue que

$$b \int_0^L s' \psi_x \bar{\psi} + b \int_0^L \overline{s' \psi_x \bar{\psi}} = -\frac{b}{\beta^2} \int_0^L s'' |\Psi + f_3|^2 dx.$$

Tomando a parte real, o módulo, usando a Desigualdade Triangular e a Proposição 2.32, existe

uma constante  $C > 0$  tal que

$$|\mathbf{Re}(I_4)| \leq \frac{C}{\beta^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{\beta^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (4.38)$$

Tomando a parte real e o módulo em (4.35), assumindo que  $|\beta| > 1$ , usando (4.36), (4.37) e (4.38), e usando a definição de  $s$ , existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s |\Psi|^2 dx &\leq C \int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s |\psi_x|^2 dx + \frac{C}{\beta^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_{L^2} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Young e (4.24), temos

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s |\Psi|^2 dx &\leq C \int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s |\psi_x|^2 dx + \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{\beta^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Usando o Lema 4.5

$$\int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s |\Psi|^2 dx \leq \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{\beta^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2.$$

□

**Corolário 4.7.** *Sejam  $U \in D(\mathcal{A}_i)$  e  $F \in \mathcal{H}_i$  tais que  $i\beta U - \mathcal{A}_i U = F$  para algum  $\beta \in \mathbb{R}$  e  $|\beta| > 1$ . Então, existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\psi_x|^2 dx \leq \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

*Demonstração.* Pelos lemas (4.6) e (4.5), e sabendo que existe  $C > 0$  tal que, para quaisquer  $a, b > 0$ ,

$$\sqrt{a+b} \leq C(\sqrt{a} + \sqrt{b}), \quad (4.39)$$

temos que

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s |\psi_x|^2 dx &\leq C \|\theta_x\|_2 \left( \frac{C}{|\beta|^{1/2}} \|\theta_x\|_2^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + C \|F\|_{\mathcal{H}} \right) \\ &+ \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Young, a estimativa do Lema 4.4 e a propriedade pra a função  $s$ ,

existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\psi_x|^2 dx \leq \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

□

Para as próximas estimativas, considere uma função  $s_1 \in C^2(0, L)$  satisfazendo

$$\text{supp } s_1 \subset \left( L_0 - \frac{\delta}{2}, L_0 + \frac{\delta}{2} \right), \quad 0 \leq s_1(x) \leq 1, \quad x \in (0, L) \quad (4.40)$$

e

$$s_1(x) = 1 \quad \text{para } x \in \left[ L_0 - \frac{\delta}{3}, L_0 + \frac{\delta}{3} \right]. \quad (4.41)$$

Se tivermos os valores de  $L$ ,  $L_0$  e  $\delta$ , uma função desse tipo pode ser determinada por partes, um exemplo genérico para este tipo de função pode ser dado da seguinte forma:

$$s_1(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L_0 - \frac{\delta}{2}, \\ e^{\frac{1}{(3(x-(L_0-\delta/3)))^2-1}} e, & L_0 - \frac{\delta}{2} < x \leq L_0 - \frac{\delta}{3}, \\ 1, & L_0 - \frac{\delta}{3} \leq x \leq L_0 + \frac{\delta}{3}, \\ e^{\frac{1}{(3(x-(L_0+\delta/3)))^2-1}} e, & L_0 + \frac{\delta}{3} \leq x < L_0 + \frac{\delta}{2}, \\ 0, & L_0 + \frac{\delta}{2} \leq x \leq L. \end{cases}$$

Vamos atribuir valores a  $L$ ,  $L_0$  e  $\delta$  pra que possamos analisar graficamente o comportamento dessa função  $s_1$ . Considerando  $L = 8$ ,  $L_0 = 4$  e  $\delta = 2$ , temos

$$s_1(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 3, \\ e^{\frac{1}{(3(x-10))^2-1}} e, & 3 < x \leq \frac{10}{3}, \\ 1, & \frac{10}{3} \leq x \leq \frac{14}{3}, \\ e^{\frac{1}{(3(x-14))^2-1}} e, & \frac{14}{3} \leq x < 5, \\ 0, & 5 \leq x \leq 8. \end{cases}$$

Podemos observar a representação gráfica de  $s_1$  na Figura 4.2.

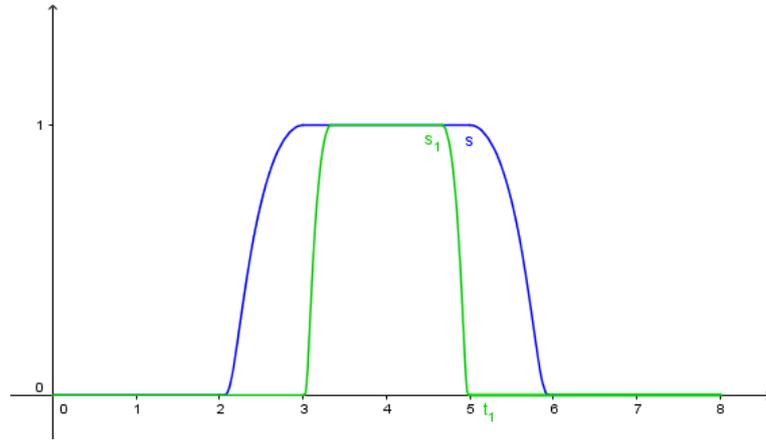


Figura 4.2: Função  $s_1$ .

**Lema 4.8.** *Sejam  $F \in \mathcal{H}_i$  e  $\beta \in \mathbb{R}$  com  $|\beta| > 1$  tais que  $i\beta U - \mathcal{A}_i U = F$  para algum  $U \in D(\mathcal{A}_i)$ . Então, existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\varphi + \psi + lw|^2 dx &\leq \chi_0 |\beta| \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\psi_x| |\Phi| dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \left( \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\psi_x|^2 dx \right)^{1/2} \\ &+ C \|U\|_{\mathcal{H}} \left( \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\Psi|^2 dx \right)^{1/2} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &+ \frac{C}{\beta^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (4.42)$$

*Demonstração.* Multiplicando (4.20) por  $\overline{s_1(\varphi_x + \psi + lw)}$  e integrando de 0 a L, temos

$$\begin{aligned} k \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx &= -i\beta \rho_2 \int_0^L s_1 \overline{\Psi(\varphi_x + \psi + lw)} dx + b \int_0^L s_1 \psi_{xx} \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx \\ &- \gamma \int_0^L s_1 \theta_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx + \rho_2 \int_0^L s_1 f_4 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned} k \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx &= -i\beta \rho_2 \int_0^L s_1 \overline{\Psi(\varphi_x + \psi + lw)} dx - b \int_0^L s_1' \psi_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx \\ &- b \int_0^L s_1 \psi_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)_x} dx - \gamma \int_0^L s_1 \theta_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx \\ &+ \rho_2 \int_0^L s_1 f_4 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx. \end{aligned}$$

Com o auxílio da equação (4.18) obtemos

$$\begin{aligned}
k \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx &= -i\beta\rho_2 \int_0^L s_1 \overline{\Psi(\varphi_x + \psi + lw)} dx - b \int_0^L s_1' \psi_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx \\
&- \frac{b}{k} \int_0^L s_1 \psi_x \overline{[i\beta\rho_1\Phi - k_0l(w_x - l\varphi) - \rho_1 f_2]} dx \\
&- \gamma \int_0^L s_1 \theta_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx + \rho_2 \int_0^L s_1 f_4 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx.
\end{aligned}$$

Assim, usando (4.19) e (4.21) obtemos

$$\begin{aligned}
k \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx &= -i\beta\rho_2 \int_0^L s_1 \overline{\Psi\varphi_x} dx + \rho_2 \int_0^L s_1 |\Psi|^2 dx + \rho_2 \int_0^L s_1 \overline{\Psi f_3} dx \\
&+ \rho_2 l \int_0^L s_1 \overline{\Psi W} dx + \rho_2 l \int_0^L s_1 \overline{\Psi f_5} dx + \frac{b}{k} \rho_1 \int_0^L i\beta s_1 \psi_x \overline{\Phi} dx \\
&- b \int_0^L s_1' \psi_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx + \frac{b}{k} k_0 l \int_0^L s_1 \psi_x \overline{(w_x - l\varphi)} dx \\
&+ \frac{b}{k} \rho_1 \int_0^L s_1 \psi_x \overline{f_2} dx - \gamma \int_0^L s_1 \theta_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx \\
&+ \rho_2 \int_0^L s_1 f_4 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx. \tag{4.43}
\end{aligned}$$

Observaremos separadamente cada parcela da igualdade (4.43). Para isto, defina

$$\begin{aligned}
I_5 &= \rho_2 \int_0^L s_1 \overline{\Psi f_3} dx + \frac{b}{k} \rho_1 \int_0^L s_1 \psi_x \overline{f_2} dx + \rho_2 \int_0^L s_1 + f_4 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx \\
&+ \rho_2 l \int_0^L s_1 \overline{\Psi f_5} dx, \\
I_6 &= \rho_2 l \int_0^L s_1 \overline{\Psi W} dx, \\
I_7 &= -i\beta\rho_2 \int_0^L s_1 \overline{\Psi\varphi_x} dx + \frac{b}{k} \rho_1 \int_0^L i\beta s_1 \psi_x \overline{\Phi} dx, \\
I_8 &= -b \int_0^L s_1' \psi_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx + \frac{b}{k} k_0 l \int_0^L s_1 \psi_x \overline{(w_x - l\varphi)} dx.
\end{aligned}$$

Temos então que

$$\begin{aligned}
k \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx &= \rho_2 \int_0^L s_1 |\Psi|^2 dx + I_5 + I_6 + I_7 + I_8 \\
&- \gamma \int_0^L s_1 \theta_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx. \tag{4.44}
\end{aligned}$$

Usando as desigualdades Triangular, de Hölder e a equivalência das normas  $|\cdot|_{\mathcal{H}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ , segue

que existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|I_5| \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.45)$$

Usando a Desigualdade de Hölder, e o fato de  $s_1$  ser limitada, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|I_6| \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \left( \int_0^L |\Psi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.46)$$

Usando (4.17) e (4.19)

$$\begin{aligned} I_7 &= \rho_2 \int_0^L s_1 \Psi (\overline{\Phi_x + f_{1,x}}) dx + \frac{b}{k} \rho_1 \int_0^L s_1 (\Psi_x + f_{3,x}) \overline{\Phi} dx \\ &= \rho_2 \int_0^L s_1 \Psi \overline{\Phi_x} dx + \rho_2 \int_0^L s_1 \Psi \overline{f_{1,x}} dx + \frac{b}{k} \rho_1 \int_0^L s_1 \Psi_x \overline{\Phi} dx + \frac{b}{k} \rho_1 \int_0^L s_1 f_{3,x} \overline{\Phi} dx. \end{aligned}$$

Usando integração por partes temos

$$I_7 = -\rho_2 \int_0^L s_1' \Psi \overline{\Phi} dx + \left( \frac{b}{k} \rho_1 - \rho_2 \right) \int_0^L s_1 \Psi_x \overline{\Phi} dx + \frac{b}{k} \rho_1 \int_0^L s_1 f_{3,x} \overline{\Phi} dx + \rho_2 \int_0^L s_1 \Psi \overline{f_{1,x}} dx.$$

Novamente utilizando (4.19)

$$\begin{aligned} I_7 &= -\rho_2 \int_0^L s_1' \Psi \overline{\Phi} dx + \left( \frac{b}{k} \rho_1 - \rho_2 \right) i\beta \int_0^L s_1 \psi_x \overline{\Phi} dx + \frac{b}{k} \rho_1 \int_0^L s_1 f_{3,x} \overline{\Phi} dx \\ &\quad + \rho_2 \int_0^L s_1 \Psi \overline{f_{1,x}} dx + \left( \frac{b}{k} \rho_1 - \rho_2 \right) \int_0^L s_1 f_{3,x} \overline{\Phi} dx. \end{aligned}$$

Tomando a parte real, o módulo, usando as desigualdades Triangular e de Hölder e o fato de que  $s_1'$  é limitada, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|I_7| \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \left( \int_0^L |\Psi|^2 dx \right)^{1/2} + C \chi_0 |\beta| \int_0^L s_1 |\psi_x| |\Phi| dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.47)$$

Agora, usando o fato de que  $s_1$  e  $s_1'$  são limitadas e as desigualdades Triangular e de Hölder, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|I_8| \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \left( \int_0^L |\psi_x|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (4.48)$$

Usando as desigualdades Triangular, de Hölder e de Young, (4.45), (4.46), (4.47), (4.48), os

lemas 4.6 e 4.4, e a definição de  $s_1$ , temos em (4.44) que existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\varphi + \psi + lw|^2 dx &\leq \chi_0|\beta| \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\psi_x||\Phi| dx + C\|U\|_{\mathcal{H}} \left( \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\psi_x|^2 dx \right)^{1/2} \\ &+ C\|U\|_{\mathcal{H}} \left( \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\Psi|^2 dx \right)^{1/2} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &+ \frac{C}{\beta^2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

□

**Lema 4.9.** *Sejam  $F \in \mathcal{H}_i$  e  $\beta \in \mathbb{R}$  com  $|\beta| > 1$  tais que  $i\beta U - \mathcal{A}_i U = F$  para algum  $U \in D(\mathcal{A}_i)$ . Então, existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\Phi|^2 dx &\leq C\chi_0|\beta| \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\psi_x||\Phi| dx + C\|U\|_{\mathcal{H}} \left( \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\psi_x|^2 dx \right)^{1/2} \\ &+ C\|U\|_{\mathcal{H}} \left( \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\Psi|^2 dx \right)^{1/2} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &+ \frac{C}{\beta^2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Multiplicando (4.18) por  $s_1\bar{\varphi}$  e integrando de 0 a  $L$  temos

$$i\beta\rho_1 \int_0^L s_1\Phi\bar{\varphi} dx - k \int_0^L s_1(\varphi_x + \psi + lw)_x\bar{\varphi} dx - k_0l \int_0^L s_1(w_x - l\varphi)\bar{\varphi} dx = \rho_1 \int_0^L s_1f_2\bar{\varphi} dx.$$

Usando (4.17) e integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho_1 s_1|\Phi|^2 dx &= -\rho_1 \int_0^L s_1(\Phi\bar{f}_1 + f_2\bar{\varphi}) dx + k \int_0^L s_1'(\varphi_x + \psi + lw)\bar{\varphi} dx \\ &+ k \int_0^L s_1(\varphi_x + \psi + lw)\bar{\varphi}_x dx - k_0l \int_0^L s_1(w_x - l\varphi)\bar{\varphi} dx. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Vamos observar separadamente cada parcela da soma (4.49). Para isto, defina

$$I_9 = k \int_0^L s_1'(\varphi_x + \psi + lw)\bar{\varphi} dx$$

e

$$I_{10} = k \int_0^L s_1(\varphi_x + \psi + lw)\bar{\varphi}_x dx - k_0l \int_0^L s_1(w_x - l\varphi)\bar{\varphi} dx.$$

Logo,

$$\int_0^L \rho_1 s_1|\Phi|^2 dx = -\rho_1 \int_0^L s_1(\Phi\bar{f}_1 + f_2\bar{\varphi}) dx + I_9 + I_{10}. \quad (4.50)$$

Usando (4.17) temos

$$I_9 = -\frac{k}{i\beta} \int_0^L s_1'(\varphi_x + \psi + lw) \overline{f_1} dx - \frac{k}{i\beta} \int_0^L s_1'(\varphi_x + \psi + lw) \overline{\Phi} dx.$$

Usando as desigualdades Triangular, de Hölder, de Poincaré e a equivalência das normas  $|\cdot|_{\mathcal{H}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ , segue que existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|\mathbf{Re}(I_9)| \leq \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.51)$$

Agora, somando e subtraindo

$$k \int_0^L s_1(\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\psi + lw)} dx,$$

a  $I_{10}$  obtemos

$$\begin{aligned} I_{10} &= k \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx - k \int_0^L s_1(\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\psi + lw)} dx \\ &\quad - k_0 l \int_0^L s_1 w_x \overline{\varphi} dx + k_0 l^2 \int_0^L s_1 |\varphi|^2 dx. \end{aligned}$$

Usando integração por partes

$$\begin{aligned} I_{10} &= k \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx - k \int_0^L s_1(\varphi_x + \psi + lw) \overline{\psi} dx - kl \int_0^L s_1(\varphi_x + \psi + lw) \overline{w} dx \\ &\quad + k_0 l \int_0^L s_1' w \overline{\varphi} dx + k_0 l \int_0^L s_1 w \overline{\varphi_x} dx + k_0 l^2 \int_0^L s_1 |\varphi|^2 dx. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Somando e subtraindo

$$k_0 l \int_0^L s_1 w \overline{(\psi + lw)} dx,$$

em (4.52) obtemos

$$\begin{aligned} I_{10} &= k \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx - k \int_0^L s_1(\varphi_x + \psi + lw) \overline{\psi} dx - k_0 l^2 \int_0^L s_1 |w|^2 dx \\ &\quad + k_0 l \int_0^L s_1 w \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx - kl \int_0^L s_1(\varphi_x + \psi + lw) \overline{w} dx + k_0 l \int_0^L s_1' w \overline{\varphi} dx \\ &\quad + k_0 l^2 \int_0^L s_1 |\varphi|^2 dx - k_0 l \int_0^L s_1 w \overline{\psi} dx. \end{aligned}$$

De (4.17), (4.19) e (4.21) segue que

$$\begin{aligned}
I_{10} &= k \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx + \frac{k}{i\beta} \int_0^L s_1 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\Psi} \\
&+ \frac{k}{i\beta} \int_0^L s_1 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{f}_3 dx + \frac{k_0 l}{i\beta} \int_0^L s_1 w \bar{\Psi} dx + \frac{k_0 l}{i\beta} \int_0^L s_1 w \bar{f}_3 \\
&+ k_0 l \int_0^L s_1 w \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx - kl \int_0^L s_1 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{w} dx \\
&- \frac{k_0 l}{i\beta} \int_0^L s_1' w \bar{\Phi} dx - \frac{k_0 l}{i\beta} \int_0^L s_1' w \bar{f}_1 dx + k_0 l^2 \int_0^L s_1 \left| \frac{f_1 + \Phi}{i\beta} \right|^2 dx \\
&- k_0 l^2 \int_0^L s_1 \left| \frac{f_5 + W}{i\beta} \right|^2 dx.
\end{aligned}$$

Usando (4.17) e (4.19), tomando a parte real, módulo, as desigualdades Triangular, de Hölder, de Poincaré e a equivalência das normas  $|\cdot|_{\mathcal{H}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ , segue que existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Re}(I_{10})| &\leq C \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \quad (4.53) \\
&+ \frac{C}{|\beta|^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + |k_0 - k|l \int_0^L s_1 |w| |\varphi_x + \psi + lw| dx \\
&= C \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{C}{|\beta|^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + k_0 l \chi \int_0^L s_1 |w| |\varphi_x + \psi + lw| dx.
\end{aligned}$$

Usando as desigualdades Triangular, de Hölder, de Poincaré, a equivalência das normas  $|\cdot|_{\mathcal{H}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ , (4.51) e (4.53) em (4.50) temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^L s |\Phi|^2 dx &\leq C \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{C}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\
&+ k_0 l \chi \int_0^L s_1 |w| |\varphi_x + \psi + lw| dx.
\end{aligned}$$

Como  $\operatorname{supp} s_1 \subset (L_0 - \delta/2, L_0 + \delta/2)$  e  $|\beta| > 1$  obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{L_0 - \delta/2}^{L_0 + \delta/2} s_1 |\Phi|^2 dx &\leq C \int_{L_0 - \delta/2}^{L_0 + \delta/2} s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{C}{|\beta|^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + k_0 l \chi \int_0^L s_1 |w| |\varphi_x + \psi + lw| dx. \quad (4.54)
\end{aligned}$$

Observe ainda, usando (4.21), que existe  $C > 0$  tal que

$$k_0 l \chi \int_0^L s_1 |w| |\varphi_x + \psi + lw| dx < \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Assim temos em (4.54) que

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\Phi|^2 dx &\leq C \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ \frac{C}{|\beta|^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Usando o Lema 4.8 concluímos que

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\Phi|^2 dx &\leq C \chi_0 |\beta| \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\psi_x| |\Phi| dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \left( \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\psi_x|^2 dx \right)^{1/2} \\ &+ C \|U\|_{\mathcal{H}} \left( \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\Psi|^2 dx \right)^{1/2} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &+ \frac{C}{\beta^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

□

**Corolário 4.10.** *Sejam  $F \in \mathcal{H}_i$  e  $\beta \in \mathbb{R}$  com  $|\beta| > 1$  tais que  $i\beta U - \mathcal{A}_i U = F$  para algum  $U \in D(\mathcal{A}_i)$ . Então, existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta/3}^{L_0+\delta/3} (|\varphi + \psi + lw|^2 + |\Phi|^2) dx &\leq C \chi_0 |\beta| \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\psi_x| |\Phi| dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C \|U\|_{\mathcal{H}} \left( \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\Psi|^2 dx \right)^{1/2} + \frac{C}{\beta^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &+ \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \left( \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\psi_x|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

*Demonstração.* O resultado decorre dos lemas 4.8 e 4.9 e da Propriedade (4.41) para a função  $s_1$ . □

**Lema 4.11.** *Sejam  $F \in \mathcal{H}_i$  e  $\beta \in \mathbb{R}$  com  $|\beta| > 1$  tais que  $i\beta U - \mathcal{A}_i U = F$  para algum*

$U \in D(\mathcal{A}_i)$ . Então, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\begin{aligned}
\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1(|w_x - l\varphi|^2 + |W|^2)dx &\leq C\chi|\beta| \left( \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\Phi|^2 dx \right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} \\
&+ C \left( \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\Phi|^2 dx \right) \\
&+ C \left( \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\Phi|^2 dx \right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} \\
&+ C \left( \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\Psi|^2 dx \right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&+ C \left( \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} \\
&+ C \left( \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right).
\end{aligned}$$

*Demonstração.* Multiplicando (4.18) por  $s_1 \overline{(w_x - l\varphi)}$  e integrando de 0 a L temos

$$\begin{aligned}
k_0 l \int_0^L s_1 |w_x - l\varphi|^2 dx &= i\beta\rho_1 \int_0^L s_1 \Phi \overline{(w_x - l\varphi)} dx - k \int_0^L s_1 (\varphi_x + \psi + lw)_x \overline{(w_x - l\varphi)} dx \\
&- \rho_1 \int_0^L s_1 f_2 \overline{(w_x - l\varphi)} dx.
\end{aligned}$$

Usando (4.17) e integrando por partes

$$\begin{aligned}
k_0 l \int_0^L s_1 |w_x - l\varphi|^2 dx &= i\beta\rho_1 \int_0^L s_1 \Phi \overline{w_x} dx + \rho_1 l \int_0^L s_1 |\Phi|^2 dx + \rho_1 l \int_0^L s_1 \Phi \overline{f_1} dx \\
&+ k \int_0^L s_1' (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(w_x - l\varphi)} dx - \rho_1 \int_0^L s_1 f_2 \overline{(w_x - l\varphi)} dx \\
&+ k \int_0^L s_1 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(w_x - l\varphi)_x} dx.
\end{aligned}$$

Usando (4.22)

$$\begin{aligned}
k_0 l \int_0^L s_1 |w_x - l\varphi|^2 dx &= i\beta\rho_1 \int_0^L s_1 \Phi \overline{w_x} dx + \rho_1 l \int_0^L s_1 |\Phi|^2 dx + \rho_1 l \int_0^L s_1 \Phi \overline{f_1} dx \\
&+ k \int_0^L s_1' (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(w_x - l\varphi)} dx - \rho_1 \int_0^L s_1 f_2 \overline{(w_x - l\varphi)} dx \\
&- \frac{k}{k_0} i\beta\rho_1 \int_0^L s_1 \varphi_x \overline{W} dx - \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{f_6} dx \\
&+ \frac{k^2}{k_0} l \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx - \frac{k}{k_0} i\beta\rho_1 \int_0^L s_1 \psi \overline{W} dx \\
&- \frac{k}{k_0} l i\beta\rho_1 \int_0^L s_1 w \overline{W} dx.
\end{aligned}$$

Usando (4.17), (4.19) e (4.21)

$$\begin{aligned}
k_0 l \int_0^L s_1 |w_x - l\varphi|^2 dx &= i\beta\rho_1 \int_0^L s_1 \Phi \overline{w_x} dx + \rho_1 l \int_0^L s_1 |\Phi|^2 dx + \rho_1 l \int_0^L s_1 \Phi \overline{f_1} dx \\
&+ k \int_0^L s_1' (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(w_x - l\varphi)} dx - \rho_1 \int_0^L s_1 f_2 \overline{(w_x - l\varphi)} dx \\
&- \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 \Phi_x \overline{W} dx - \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{f_6} dx \\
&+ \frac{k^2}{k_0} l \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx - \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 \Psi \overline{W} dx \\
&- \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 f_{1,x} \overline{W} dx - \frac{k}{k_0} l \rho_1 \int_0^L s_1 |W|^2 dx \\
&- \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 f_3 \overline{W} dx - \frac{k}{k_0} l \rho_1 \int_0^L s_1 f_5 \overline{W} dx.
\end{aligned}$$

Para simplificar as notações considere

$$I_{11} = k_0 l \int_0^L s_1 |w_x - l\varphi|^2 dx + \frac{k}{k_0} l \rho_1 \int_0^L s_1 |W|^2 dx.$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned}
I_{11} &= i\beta\rho_1 \int_0^L s_1 \Phi \overline{w_x} dx + \rho_1 l \int_0^L s_1 |\Phi|^2 dx + \rho_1 l \int_0^L s_1 \Phi \overline{f_1} dx - \rho_1 \int_0^L s_1 f_2 \overline{(w_x - l\varphi)} dx \\
&+ k \int_0^L s_1' (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(w_x - l\varphi)} dx + \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1' \Phi \overline{W} dx + \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 \Phi \overline{W_x} dx \\
&- \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 \Psi \overline{W} dx - \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 f_{1,x} \overline{W} dx - \frac{k^2}{k_0} l + \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \\
&- \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 f_3 \overline{W} dx - \frac{k}{k_0} l \rho_1 \int_0^L s_1 f_5 \overline{W} dx - \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{f_6} dx.
\end{aligned}$$

Usando (4.21)

$$\begin{aligned}
I_{11} &= i\beta\rho_1 \left(1 - \frac{k}{k_0}\right) \int_0^L s_1 \Phi \overline{w_x} dx + \rho_1 l \int_0^L s_1 |\Phi|^2 dx + \rho_1 l \int_0^L s_1 \Phi \overline{f_1} dx \\
&+ k \int_0^L s_1' (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(w_x - l\varphi)} dx + \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1' \Phi \overline{W} dx - \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 \Phi \overline{f_{5,x}} dx \\
&- \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 \Psi \overline{W} dx - \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 f_{1,x} \overline{W} dx - \rho_1 \int_0^L s_1 f_2 \overline{(w_x - l\varphi)} dx \\
&- \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 f_3 \overline{W} dx - \frac{k}{k_0} l \rho_1 \int_0^L s_1 f_5 \overline{W} dx - \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{f_6} dx \\
&+ \frac{k^2}{k_0} l \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx.
\end{aligned}$$

Tomando o módulo, a parte real e usando as desigualdades Triangular, de Hölder, de Poincaré

e a equivalência das normas  $|\cdot|_{\mathcal{H}}$  e  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ , segue que existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\begin{aligned} |\mathbf{Re}(I_{11})| &\leq C\chi|\beta|\left(\int_0^L s_1|\Phi|^2 dx\right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C\left(\int_0^L s_1|\Phi|^2 dx\right) + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C\left(\int_0^L s_1|\Phi|^2 dx\right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C\left(\int_0^L s_1|\Psi|^2 dx\right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C\left(\int_0^L s_1|\varphi_x + \psi + lw|^2 dx\right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C\left(\int_0^L s_1|\varphi_x + \psi + lw|^2 dx\right). \end{aligned}$$

Usando a definição de  $s_1$  concluímos que

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1(|w_x - l\varphi|^2 + |W|^2) dx &\leq C\chi|\beta|\left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\Phi|^2 dx\right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C\left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\Phi|^2 dx\right) \\ &+ C\left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\Phi|^2 dx\right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C\left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\Psi|^2 dx\right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C\left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\varphi_x + \psi + lw|^2 dx\right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C\left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\varphi_x + \psi + lw|^2 dx\right). \end{aligned}$$

□

Nos resultados a seguir, para simplificar as notações, consideraremos

$$\mathcal{I}_{\delta/3} = \int_{L_0-\delta/3}^{L_0+\delta/3} (|\Phi|^2 + |\Psi|^2 + |W|^2 + |\psi_x|^2 + |\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2) dx. \quad (4.55)$$

**Corolário 4.12.** *Sejam  $F \in \mathcal{H}_i$  e  $\beta \in \mathbb{R}$  com  $|\beta| \gg 1$  tais que  $i\beta U - \mathcal{A}_i U = F$  para algum  $U \in D(\mathcal{A}_i)$ . Se  $\chi = \chi_0 = 0$ , então dado  $\varepsilon > 0$  existe uma constante  $C_\varepsilon > 0$  tal que*

$$\mathcal{I}_{\delta/3} \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (4.56)$$

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$  arbitrário. A seguir utilizaremos a desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$  muitas vezes.

Sendo  $\chi = \chi_0 = 0$ , utilizando a propriedade de  $s_1$  e que  $|\beta| > 1$ , segue dos lemas 4.6, 4.11,

dos corolários 4.7 e 4.10 que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\delta/3} &\leq \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \left( \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\Psi|^2 dx \right)^{1/2} \\
&+ \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \left( \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\psi_x|^2 dx \right)^{1/2} + C \left( \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\Phi|^2 dx \right) \\
&+ C \left( \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\Phi|^2 dx \right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C \left( \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} \\
&+ C \left( \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right).
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$  e o Corolário 4.10, existe  $C > 0$  tal que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\delta/3} &\leq \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \left( \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\Psi|^2 dx \right)^{1/2} \\
&+ \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \left( \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\psi_x|^2 dx \right)^{1/2} + \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Usando novamente a desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$ , o Lema 4.6 e o Corolário 4.7, existe  $C > 0$  tal que

$$\mathcal{I}_{\delta/3} \leq \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Mais uma vez usando a desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$  e usando agora a estimativa (3.56), existe  $C > 0$  tal que

$$\mathcal{I}_{\delta/3} \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Por fim, usando a desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$  e o fato de que  $|\beta|$  é suficientemente grande, existe  $C_\varepsilon > 0$  tal que

$$\mathcal{I}_{\delta/3} \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

.

□

**Corolário 4.13.** *Sejam  $F \in \mathcal{H}_i$  e  $\beta \in \mathbb{R}$  com  $|\beta| > 1$  tais que  $i\beta U - \mathcal{A}_i U = F$  para algum  $U \in D(\mathcal{A}_i)$ . Se  $\chi = 0$  e  $\chi_0 \neq 0$ , então dado  $\varepsilon > 0$  existe uma constante  $C_\varepsilon > 0$  tal que*

$$\mathcal{I}_{\delta/3} \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{4.57}$$

*Demonstração.* Sendo  $\chi = 0$  e  $\chi_0 \neq 0$  temos que todos os termos presentes em  $\mathcal{I}_{\delta/3}$  já foram

estimados no Corolário 4.13, com exceção do termo

$$C|\beta| \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\psi_x| |\Phi| dx,$$

o qual estimaremos agora. Usando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$  e a definição de  $s_1$ , temos

$$C|\beta| \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\psi_x| |\Phi| dx \leq C_\varepsilon |\beta|^2 \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\psi_x|^2 dx + \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Do Corolário 4.7 segue que

$$C|\beta| \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\psi_x| |\Phi| dx \leq C|\beta| \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} + C|\beta|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C|\beta|^2 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Sendo  $|\beta| > 1$ , usando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$  e a estimativa (3.56), existe uma constante  $C_\varepsilon > 0$  tal que

$$C|\beta| \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\psi_x| |\Phi| dx \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

E assim obtemos

$$\mathcal{I}_{\delta/3} \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

□

Com os resultados obtidos nesta seção vamos analisar o comportamento assintótico da solução do problema na próxima seção.

#### 4.1 ESTABILIDADE EXPONENCIAL

**Teorema 4.14.** *Suponha que  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, b, k, k_0, \alpha, \gamma > 0$  e  $\chi_0 = \chi = 0$ . Então, existem constantes  $C, \eta > 0$ , independentes do dado inicial  $U_0 \in \mathcal{H}$ , tais que*

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} \leq C e^{-\eta t} \|U_0\|_{\mathcal{H}}, t > 0, \quad (4.58)$$

ou seja, o semigrupo associado ao sistema (3.1)-(3.7) é exponencialmente estável.

*Demonstração.* Dado  $\varepsilon > 0$ , segue do Corolário 4.12 que existe uma constante  $C_\varepsilon$  tal que

$$\mathcal{I}_{\delta/3} \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (4.59)$$

Observe que a estimativa (4.59) nos dá uma estimativa local para o vetor  $U \in D(\mathcal{A}_i)$ . Segue de

(4.17)-(4.22) que  $V = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$  é solução de (2.9)-(2.14), considerando

$$g_1 = f_1; g_2 = \rho_2 f_2; g_3 = f_3; g_4 = \rho_2 f_4 - \gamma \theta_x; g_5 = f_5; g_6 = \rho_1 f_6.$$

Observando que  $\mathcal{I}_{\delta/3}$  é uma integral local do tipo  $\|V\|_{b_1, b_2}$  com  $b_1 = L_0 - \delta/3$  e  $b_2 = L_0 + \delta/3$ , de (4.59) a condição (2.17) é satisfeita para  $\Lambda := \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2$ .

Com isso, aplicando o Corolário 2.59, a estimativa (4.24) e usando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$ , existem constantes  $C, C_\varepsilon > 0$  tais que

$$\begin{aligned} \int_0^L (|\Phi|^2 + |\Psi|^2 + |W|^2 + |\psi_x|^2 + |\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2) dx &\leq C\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &+ C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Combinando (4.60) com a estimativa (4.24), usando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$ , e considerando  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, existe  $C > 0$  tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Lembrando que  $U \in D(\mathcal{A}_i)$  é a única solução da equação resolvente, segue que para algum  $C > 0$  temos

$$\|(i\beta I_d - \mathcal{A}_i)^{-1} F\|_{\mathcal{H}} \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (4.61)$$

quando  $|\beta| \rightarrow \infty$ . Assim, do Lema 4.3 e de (4.61) podemos aplicar o Teorema de Prüss (Teorema 2.55), e assim concluímos que o sistema é exponencialmente estável.  $\square$

**Teorema 4.15.** *Suponha que*

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{k}{b} \quad \text{ou} \quad k \neq k_0, \quad (4.62)$$

*então o semigrupo associado ao sistema (3.1)-(3.5) com condições de fronteira (3.7) não é exponencialmente estável.*

*Demonstração.* Usando o Teorema de Prüss temos que o  $C_0$ -semigrupo de contrações  $e^{\mathcal{A}_2 t}$  é exponencialmente estável se, e somente se,

$$i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A}_2),$$

e

$$\limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - \mathcal{A}_2)^{-1}\|_{\mathcal{H}_2} < \infty. \quad (4.63)$$

Observe que se encontrarmos uma sequência  $\{F_n\} \subset \mathcal{H}_2$  limitada, para todo  $n \in \mathbb{N}$  e uma sequência  $\{\beta_n\} \subset \mathbb{R}$  com  $|\beta_n| \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(i\beta_n I - \mathcal{A}_2)^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}_2} = \infty, \quad (4.64)$$

teremos uma contradição envolvendo as afirmações (4.63) e (4.64), mostrando que o  $C_0$ -semigrupo de contrações  $e^{\mathcal{A}_2 t}$  não é exponencialmente estável.

Nosso objetivo, então é mostrar a existência das sequências  $\{F_n\} \subset \mathcal{H}_2$  e  $\{\beta_n\} \subset \mathbb{R}$  satisfazendo (4.64). Podemos considerar, sem perda de generalidade,  $L = \pi$  e tomemos  $F_n \subset \mathcal{H}_2$  da seguinte forma

$$F_n = \left( 0, \frac{1}{\rho_1} \text{sen}(nx), 0, 0, 0, \frac{\xi}{\rho_1} \text{cos}(nx), 0 \right).$$

Como  $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}_2)$ , seja  $U_n \in \mathcal{H}_2$  tal que

$$(i\beta I - \mathcal{A}_2)U_n = F_n. \quad (4.65)$$

Reescrevendo (4.65) em termos de suas componentes e omitindo o índice  $n$  de  $U_n$ , temos

$$\begin{cases} i\beta\varphi - \Phi = 0, \\ i\beta\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0l(w_x - l\varphi) = \text{sen}(nx), \\ i\beta\psi - \Psi = 0, \\ i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = 0, \\ i\beta w - W = 0, \\ i\beta\rho_1 W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = \xi \text{cos}(nx), \\ i\beta\rho_3\theta + \gamma\Psi_x - \alpha\theta_{xx} = 0. \end{cases} \quad (4.66)$$

Assim,  $\Phi = i\beta\varphi, \Psi = i\beta\psi$  e  $W = i\beta w$ . Podemos então reescrever (4.66) da seguinte forma

$$\begin{cases} -\beta^2\rho_1\varphi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0l(w_x - l\varphi) = \text{sen}(nx), \\ -\beta^2\rho_2\psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = 0, \\ -\beta^2\rho_1 w - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = \xi \text{cos}(nx), \\ i\beta\rho_3\theta + \gamma\Psi_x - \alpha\theta_{xx} = 0. \end{cases} \quad (4.67)$$

Para que as condições de fronteira dadas em (3.7) sejam satisfeitas, podemos supor que a solução do sistema (4.67) é da forma

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= A_n \text{sen}(nx), & \psi(x) &= B_n \text{cos}(nx), & w(x) &= C_n \text{cos}(nx), \\ \theta(x) &= D_n \text{sen}(nx). \end{aligned} \quad (4.68)$$

A seguir omitiremos o índice  $n$  de  $A_n, B_n, C_n$  e  $D_n$ . Assim, substituindo (4.68) em (4.67), obtemos um sistema equivalente a (4.67) dado por

$$\begin{cases} (-\rho_1\beta^2 + kn^2 + k_0l^2)A + knB + (k + k_0)lnC = 1, \\ knA + (-\rho_2\beta^2 + bn^2 + k)B + klC + \gamma nD = 0, \\ (k + k_0)lnA + klB + (-\rho_1\beta^2 + k_0n^2 + kl^2)C = \xi, \\ -\gamma i\beta nB + (i\beta\rho_3 + \alpha n^2)D = 0. \end{cases} \quad (4.69)$$

Como queremos avaliar o comportamento de

$$\|(i\beta I - \mathcal{A}_2)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_2}, n \rightarrow \infty, \quad (4.70)$$

note que

$$\|(i\beta_n I - \mathcal{A}_2)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 \geq \rho_1 \|W\|_2^2 = \rho_1 |\beta|^2 \|w\|_2^2 = \frac{\pi}{2} \rho_1 |\beta|^2 |C|^2.$$

Vamos avaliar como a constante  $C$  (que depende de  $n$ ) se comporta quando  $n \rightarrow \infty$ . Assumindo  $\xi = 0$  e

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{k}{b} \quad e \quad k = k_0.$$

Vamos escolher a sequência  $\{\beta_n\} \subset \mathbb{R}$  tal que

$$\beta_n = \sqrt{\frac{1}{\rho_1}(kn^2 + kl^2 - 2kln)}.$$

Para simplificar as notações omitiremos o índice  $n$  da sequência  $\{\beta_n\}$ . Sendo assim, o sistema (4.69) pode ser reescrito como

$$2klnA + knB + 2klnC = 1, \quad (4.71)$$

$$knA + \left[ \left( b - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) n^2 + \frac{\rho_2 2kl}{\rho_1} n + k + \frac{\rho_2 kl^2}{\rho_1} \right] B + klC + \gamma nD = 0, \quad (4.72)$$

$$2klnA + klB + 2klnC = 0, \quad (4.73)$$

$$-\gamma i\beta nB + (i\beta\rho_3 + \alpha n^2)D = 0. \quad (4.74)$$

Subtraindo (4.73) de (4.71), temos

$$knB - klB = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{k(n-l)}. \quad (4.75)$$

De (4.75) podemos concluir que  $B \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Substituindo o valor de  $B$  encontrado

em (4.75) na equação (4.73), obtemos

$$2klnA + \frac{l}{(n-l)} + 2klnC = 0 \Rightarrow A = -C - \frac{1}{2kn(n-l)}. \quad (4.76)$$

Observe que de (4.76) temos que  $A \rightarrow -C$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Substituindo agora (4.75) em (4.74)

$$-\frac{\gamma i \beta n}{k(n-l)} + (i\beta\rho_3 + \alpha n^2)D = 0 \Rightarrow D = \frac{\gamma i \beta n}{k(n-l)(i\beta\rho_3 + \alpha n^2)}. \quad (4.77)$$

Assim, de (4.77) temos que  $D \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Por fim, substituindo (4.75), (4.76) e (4.77) em (4.72), temos

$$\begin{aligned} 0 &= -knC - \frac{1}{2(n-l)} + \left[ \left( b - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) n^2 + \frac{\rho_2 2kl}{\rho_1} n + k + \frac{\rho_2 kl^2}{\rho_1} \right] \frac{1}{k(n-l)} \\ &+ klC + \frac{\gamma^2 i \beta n^2}{k(n-l)(i\beta\rho_3 + \alpha n^2)}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned} k(n-l)C &= -\frac{1}{2(n-l)} + \left[ \left( b - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) n^2 + \frac{\rho_2 2kl}{\rho_1} n + k + \frac{\rho_2 kl^2}{\rho_1} \right] \frac{1}{k(n-l)} \\ &+ \frac{\gamma^2 i \beta n^2}{k(n-l)(i\beta\rho_3 + \alpha n^2)}, \\ C &= -\frac{1}{2k(n-l)^2} + \left[ \left( b - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) n^2 + \frac{\rho_2 2kl}{\rho_1} n + k + \frac{\rho_2 kl^2}{\rho_1} \right] \frac{1}{k^2(n-l)^2} \\ &+ \frac{\gamma^2 i \beta n^2}{k^2(n-l)^2(i\beta\rho_3 + \alpha n^2)}. \end{aligned}$$

Observe que

$$C = J_1 + J_2 + J_3 + J_4, \quad (4.78)$$

onde

$$\begin{aligned} J_1 &= -\frac{1}{2k(n-l)^2}, \\ J_2 &= \frac{\gamma^2 i \beta n^2}{k^2(n-l)^2(i\beta\rho_3 + \alpha n^2)}, \\ J_3 &= \left[ \frac{\rho_2 2kl}{\rho_1} n + k + \frac{\rho_2 kl^2}{\rho_1} \right] \frac{1}{k^2(n-l)^2}, \\ J_4 &= \left( b - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \frac{n^2}{k^2(n-l)^2}. \end{aligned}$$

Assim,

$$J_1 = -\frac{1}{2k(n-l)^2} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.79)$$

Além disso,

$$J_2 = \frac{\gamma^2 i \beta n^2}{k^2(n-l)^2(i\beta\rho_3 + \alpha n^2)} = \frac{\frac{\gamma^2 i \beta n^2}{\beta n^2}}{\frac{k^2(n-l)^2(i\beta\rho_3 + \alpha n^2)}{\beta n^2}} = \frac{\gamma^2 i}{k^2(n-l)^2 \left( \frac{i\rho_3}{n^2} + \alpha\beta \right)}.$$

Então,

$$J_2 \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.80)$$

Temos também que

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\rho_2 2kl}{\rho_1} n + k + \frac{\rho_2 kl^2}{\rho_1} \right] \frac{1}{k^2(n-l)^2} &= \frac{\rho_2 2ln}{\rho_1 k(n-l)^2} + \frac{1}{k(n-l)^2} + \frac{\rho_2 l^2}{\rho_1 k(n-l)^2} \\ &= \frac{\frac{\rho_2 2ln}{n}}{\rho_1 k(n-l)^2} + \frac{1}{k(n-l)^2} + \frac{\rho_2 l^2}{\rho_1 k(n-l)^2} \\ &= \frac{\rho_2 2l}{\rho_1 k(n^{1/2} - ln^{-1/2})^2} + \frac{1}{k(n-l)^2} + \frac{\rho_2 l^2}{\rho_1 k(n-l)^2}. \end{aligned}$$

Mostrando que

$$J_3 \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty, \quad (4.81)$$

E ainda,

$$J_4 = \left( b - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \frac{n^2}{k^2(n-l)^2} = \left( b - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \frac{1}{k^2} \left( \frac{n}{n-l} \right)^2 \rightarrow \left( b - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \frac{1}{k^2}, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.82)$$

Concluimos então de (4.78), (4.79), (4.80), (4.81) e (4.82) que

$$C \rightarrow \left( b - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \frac{1}{k^2}, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.83)$$

Logo,

$$\|(i\beta_n I - \mathcal{A}_2)^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 \geq \frac{\pi}{2} \rho_1 |\beta|^2 |C|^2 \rightarrow \infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

O que mostra a falta de estabilidade exponencial para este caso.

Assumindo agora  $\xi = 1$  e

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b} \quad e \quad k \neq k_0.$$

O sistema (4.69) pode ser reescrito como

$$(-\rho_1\beta^2 + kn^2 + k_0l^2)A + knB + (k + k_0)lnC = 1, \quad (4.84)$$

$$knA + (-\rho_2\beta^2 + bn^2 + k)B + klC + \gamma nD = 0, \quad (4.85)$$

$$(k + k_0)lnA + klB + (-\rho_1\beta^2 + k_0n^2 + kl^2)C = 1, \quad (4.86)$$

$$-\gamma i\beta nB + (i\beta\rho_3 + \alpha n^2)D = 0. \quad (4.87)$$

Que na forma matricial é dado por

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_1 & kn & (k + k_0)ln & 0 \\ kn & P_2 & kl & \gamma n \\ (k + k_0)ln & kl & P_3 & 0 \\ 0 & -\gamma i\beta n & 0 & P_4 \end{bmatrix}}_{:=M} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde

$$P_1 = -\rho_1\beta^2 + kn^2 + k_0l^2,$$

$$P_2 = -\rho_2\beta^2 + bn^2 + k,$$

$$P_3 = -\rho_1\beta^2 + k_0n^2 + kl^2,$$

$$P_4 = i\beta\rho_3 + \alpha n^2.$$

Usando o método de Laplace temos que

$$\begin{aligned} \det M &= P_1P_2P_3P_4 - P_2P_4(k + k_0)^2l^2n^2 + 2P_4k^2l^2n^2(k + k_0) - P_1P_4k^2l^2 - P_3P_4k^2n^2 \\ &\quad - \gamma^2i\beta n^4(k + k_0)^2l^2 + P_1P_3\gamma^2i\beta n^2. \end{aligned}$$

Vamos escolher a sequência  $\{\beta_n\} \subset \mathbb{R}$  tal que

$$\beta_n = \sqrt{\frac{1}{\rho_1}(k_0n^2 + kl^2 - \nu)}, \quad (4.88)$$

onde a constante  $\nu$  será determinada futuramente. Para simplificar as notações omitiremos o índice  $n$  da sequência  $\{\beta_n\}$ . Deste modo, como o grau de  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$  é menor ou igual a 2,

o  $\det M$  se comporta como um polinômio complexo de grau 8, ou seja,

$$\det M \approx P(n^8).$$

Sendo assim, a aplicação  $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\nu(n) = P(n^8)$  tem no máximo 8 raízes, isto é, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\nu(n) \neq 0, \forall n > n_0.$$

O que mostra que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\det M \neq 0, \forall n > n_0.$$

Visto que  $\det M \neq 0$ , podemos calcular  $C$  utilizando a regra de Cramer, da seguinte forma

$$C = \frac{\det M_C}{\det M}, \quad (4.89)$$

onde a matriz  $M_C$  é dada por

$$M_C := \begin{bmatrix} P_1 & kn & 1 & 0 \\ kn & P_2 & 0 & \gamma n \\ (k + k_0)ln & kl & 1 & 0 \\ 0 & -\gamma i \beta n & 0 & P_4 \end{bmatrix}.$$

Observe que

$$\det M_C = P_1 P_2 P_4 + P_4 k^2 n l - P_2 P_4 (k + k_0) l n - P_4 k^2 n^2 - \gamma^2 i \beta (k + k_0) l n^3 + P_1 \gamma^2 i \beta n^2.$$

Observe que o grau do  $\det M$  é menor ou igual a 8, e o grau do  $\det M_C$  é menor ou igual a 6. Nosso objetivo é diminuir o grau de  $\det M$  sem interferir no grau de  $\det M_C$ . Observe que com a escolha de  $\beta$  feita em (4.88) temos que  $P_3 = \nu$ . Com essa escolha, analisaremos os termos de  $\det M$ , que possuem maior grau, isto é,

$$P_1 P_2 P_3 P_4 - P_2 P_4 (k + k_0)^2 l^2 n^2 = P_4 (P_1 P_2 P_3 - P_2 (k + k_0)^2 l^2 n^2). \quad (4.90)$$

Substituindo  $\beta$  tomado em (4.88) em  $P_1$  e  $P_2$ , obtemos

$$\begin{aligned} P_1 &= (k - k_0)n^2 + (k_0 - k)l^2 + \nu, \\ P_2 &= \left(b - \frac{\rho_2}{\rho_1} k_0\right)n^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1}(\nu - kl^2) + k, \\ P_3 &= \nu. \end{aligned}$$

Então,

$$P_1 P_2 P_3 - P_2 (k + k_0)^2 l^2 n^2 = \sigma_1 n^4 + \sigma_2 n^2, n \rightarrow \infty,$$

onde

$$\sigma_1 = (k - k_0) \left( b - \frac{\rho_2}{\rho_1} k_0 \right) \nu - \left( b - \frac{\rho_2}{\rho_1} k_0 \right) (k + k_0)^2 l^2. \quad (4.91)$$

Tome

$$\nu = \frac{(k + k_0)^2 l^2}{k - k_0},$$

que é uma constante independente de  $n$ .

Assim, com a constante  $\nu$  dada em (4.91), obtemos uma sequência  $\{\beta_n\} \subset \mathbb{R}$  dada em (4.88), de modo que  $|\beta_n| \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ . E ainda,

$$\begin{aligned} \det M &\approx \sigma_3 n^5, n \rightarrow +\infty, \\ \det M_C &\approx \sigma_4 n^6, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Com isto, o termo  $C$  tem um comportamento

$$|C| \approx \sigma_5 n, n \rightarrow \infty. \quad (4.92)$$

Logo,

$$\|(i\beta_n I - \mathcal{A}_2)^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 \geq \frac{\pi}{2} \rho_1 |\beta|^2 |C|^2 \rightarrow \infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.93)$$

Mostrando a falta de estabilidade exponencial também para este caso.

Por fim, assumindo  $\xi = 0$  e

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{k}{b} \text{ e } k \neq k_0.$$

O sistema (4.69) pode ser reescrito como

$$(-\rho_1 \beta^2 + kn^2 + k_0 l^2)A + knB + (k + k_0)lnC = 1, \quad (4.94)$$

$$knA + (-\rho_2 \beta^2 + bn^2 + k)B + klC + \gamma nD = 0, \quad (4.95)$$

$$(k + k_0)lnA + klB + (-\rho_1 \beta^2 + k_0 n^2 + kl^2)C = 0, \quad (4.96)$$

$$-\gamma i \beta n B + (i \beta \rho_3 + \alpha n^2) D = 0. \quad (4.97)$$

Que na forma matricial é dado por

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_1 & kn & (k+k_0)ln & 0 \\ kn & P_2 & kl & \gamma n \\ (k+k_0)ln & kl & P_3 & 0 \\ 0 & -\gamma i\beta n & 0 & P_4 \end{bmatrix}}_{:=M} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} P_1 &= -\rho_1\beta^2 + kn^2 + k_0l^2, \\ P_2 &= -\rho_2\beta^2 + bn^2 + k, \\ P_3 &= -\rho_1\beta^2 + k_0n^2 + kl^2, \\ P_4 &= i\beta\rho_3 + \alpha n^2. \end{aligned}$$

Usando o método de Laplace temos que

$$\begin{aligned} \det M &= P_1P_2P_3P_4 - P_2P_4(k+k_0)^2l^2n^2 + 2P_4k^2l^2n^2(k+k_0) - P_1P_4k^2l^2 - P_3P_4k^2n^2 \\ &\quad - \gamma^2i\beta n^4(k+k_0)^2l^2 + P_1P_3\gamma^2i\beta n^2. \end{aligned}$$

Escolheremos a sequência  $\{\beta_n\} \subset \mathbb{R}$  tal que

$$\beta_n = \sqrt{\frac{1}{\rho_1}(kn^2 + k_0l^2 - \eta)}, \quad (4.98)$$

onde a constante  $\eta$  será determinada futuramente. Para simplificar as notações omitiremos o índice  $n$  da sequência  $\{\beta_n\}$ . Já mostramos anteriormente que  $\det M \neq 0$ .

Podemos calcular  $A$  utilizando a regra de Cramer, da seguinte forma

$$A = \frac{\det M_A}{\det M}, \quad (4.99)$$

onde a matriz  $M_A$  é dada por

$$M_A := \begin{bmatrix} 1 & kn & (k+k_0)ln & 0 \\ 0 & P_2 & kl & \gamma n \\ 0 & kl & P_3 & 0 \\ 0 & -\gamma i\beta n & 0 & P_4 \end{bmatrix}$$

Observe que

$$\det M_A = P_2P_3P_4 - P_3\gamma^2i\beta n^2 - P_4k^2l^2.$$

Observe que o grau do  $\det M$  é menor ou igual a 8, e o grau do  $\det M_A$  é menor ou igual a 6. Da mesma forma que fizemos com o caso anterior, nosso objetivo é diminuir o grau de  $\det M$  sem interferir no grau de  $\det M_A$ . Observe que com a escolha de  $\beta$  feita em (4.98) temos que  $P_1 = \eta$ . Com essa escolha, vamos analisar os termos de  $\det M$ , que possuem maior grau, isto é,

$$P_1P_2P_3P_4 - P_2P_4(k + k_0)^2l^2n^2 - P_3P_4k^2n^2 = P_4(P_1P_2P_3 - P_2(k + k_0)^2l^2n^2 - P_3k^2n^2).$$

Substituindo  $\beta$  tomado em (4.98) em  $P_2$  e  $P_3$ , obtemos

$$\begin{aligned} P_1 &= \eta, \\ P_2 &= \left(b - \frac{\rho_2}{\rho_1}k\right)n^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1}(\eta - k_0l^2) + k, \\ P_3 &= (k_0 - k)n^2 + (k - k_0)l^2 + \eta. \end{aligned}$$

Então,

$$P_1P_2P_3 - P_2(k + k_0)^2l^2n^2 - P_3k^2n^2 = \sigma_6n^4 + \sigma_7n^3, n \rightarrow \infty,$$

onde

$$\sigma_1 = (k - k_0) \left(b - \frac{\rho_2}{\rho_1}k\right) \eta - \left(b - \frac{\rho_2}{\rho_1}k\right) (k + k_0)^2l^2 - k^2(k_0 - k). \quad (4.100)$$

Tome

$$\eta = \frac{\left(b - \frac{\rho_2}{\rho_1}k\right) (k + k_0)^2l^2 + k^2(k_0 - k)}{(k - k_0) \left(b - \frac{\rho_2}{\rho_1}k\right)},$$

que é uma constante independente de  $n$ .

Assim, com a constante  $\eta$  dada em (4.100), obtemos uma sequência  $\{\beta_n\} \subset \mathbb{R}$  dada em (4.98), de modo que  $|\beta_n| \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ . E ainda,

$$\begin{aligned} \det M &\approx \sigma_8n^5, n \rightarrow +\infty, \\ \det M_A &\approx \sigma_9n^6, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Com isto, o termo  $A$  tem um comportamento

$$|A| \approx \sigma_{10}n, n \rightarrow \infty. \quad (4.101)$$

Logo,

$$\|(i\beta_n I - \mathcal{A}_2)^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 \geq \frac{\pi}{2} \rho_1 |\beta|^2 |A|^2 \rightarrow \infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.102)$$

Mostrando a falta de estabilidade exponencial para este último caso.  $\square$

Mostramos então que para as condições de fronteira (3.7) o semigrupo associado ao sistema (3.1)-(3.5) é exponencialmente estável se, e somente se,  $\chi = \chi_0 = 0$ .

## 4.2 ESTABILIDADE POLINOMIAL PARA DADOS MAIS REGULARES

**Teorema 4.16.** *Suponha que  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, b, k, k_0, \alpha, \gamma > 0$ ,  $\chi_0 \neq 0$  e  $\chi = 0$ . Então, existe uma constante  $C > 0$ , independentes do dado inicial  $U_0 \in \mathcal{H}$ , tal que*

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{1/2}} \|U_0\|_{D(\mathcal{A}_i)}; \quad t \rightarrow \infty. \quad (4.103)$$

*Demonstração.* Dado  $\varepsilon > 0$ , segue do Corolário 4.13 que existe uma constante  $C_\varepsilon$  tal que

$$\mathcal{I}_{\delta/3} \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (4.104)$$

O que nos dá uma estimativa local para o vetor  $U \in D(\mathcal{A}_i)$ . Segue então de (4.17)-(4.22) que  $V = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$  é solução de (2.9)-(2.14), considerando

$$g_1 = f_1; g_2 = \rho_2 f_2; g_3 = f_3; g_4 = \rho_2 f_4 - \gamma \theta_x; g_5 = f_5; g_6 = \rho_1 f_6.$$

Observando que  $\mathcal{I}_{\delta/3}$  é uma integral local do tipo  $\|V\|_{b_1, b_2}$  com  $b_1 = L_0 - \delta/3$  e  $b_2 = L_0 + \delta/3$ , de (4.104) a condição (2.17) é satisfeita para  $\Lambda := \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2$ .

Com isso, aplicando o Corolário 2.59, a estimativa (4.24) e usando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$ , existem constantes  $C, C_\varepsilon > 0$  tais que

$$\begin{aligned} \int_0^L (|\Phi|^2 + |\Psi|^2 + |W|^2 + |\psi_x|^2 + |\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2) dx &\leq C\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &+ C_\varepsilon |\beta|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Combinando (4.105) com a estimativa (4.24), usando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$ , e considerando  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, existe  $C > 0$  tal que

$$\|(i\beta I - \mathcal{A}_i)^{-1} F\|_{\mathcal{H}} \leq C |\beta|^2 \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad |\beta| \rightarrow \infty. \quad (4.106)$$

Do Lema 4.3 e de (4.106) conseguimos as condições para aplicar o Teorema de Borichev-

Tomilov (Teorema 2.57) e concluir que existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} = \|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} = \|S(t)\mathcal{A}_i^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq Ct^{-1/2}\|U_0(t)\|_{D(\mathcal{A}_i)}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Portanto o sistema (3.1)-(3.7) é polinomialmente estável quando  $\chi_0 \neq 0$  e  $\chi = 0$ .  $\square$

**Teorema 4.17.** *Se  $\chi \neq 0$  e o semigrupo associado ao sistema (3.1)-(3.5) com condições de fronteira (3.7) for polinomialmente estável, então a taxa de decaimento do semigrupo não pode ser melhor que*

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{1/2}}\|U_0\|_{D(\mathcal{A}_2)}; \quad t \rightarrow \infty. \quad (4.107)$$

*Demonstração.* Observe que se  $\chi \neq 0$ , então  $k \neq k_0$ . Com resultados obtidos no Teorema 4.15 e argumentos de contradição vamos mostrar o desejado. Suponha que a taxa de decaimento possa ser melhorada, isto é, existe  $\delta \in (0, 2)$  tal que

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2-\delta}}}\|U_0\|_{D(\mathcal{A}_2)}; \quad t \rightarrow \infty.$$

Então, como  $U(t) = S(t)U_0 = e^{\mathcal{A}_2 t}U_0$ , temos

$$\|e^{\mathcal{A}_2 t}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2-\delta}}}\|U_0\|_{D(\mathcal{A}_2)}; \quad t \rightarrow \infty.$$

Utilizando a norma do domínio e o fato de  $0 \in \rho(\mathcal{A}_2)$ , obtemos

$$\|e^{\mathcal{A}_2 t}(\mathcal{A}_2)^{-1}F\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2-\delta}}}\|F\|_{(\mathcal{H}_2)}; \quad t \rightarrow \infty.$$

Isto é,

$$\|e^{\mathcal{A}_2 t}(\mathcal{A}_2)^{-1}F\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2-\delta}}}; \quad t \rightarrow \infty.$$

Então, pelo Teorema de Borichev e Tomilov (Teorema 2.57), temos que

$$\frac{1}{|\beta|^{2-\delta}}\|(i\beta I - \mathcal{A}_i)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} \leq C, \quad |\beta| \rightarrow \infty. \quad (4.108)$$

Tome  $F_n \subset \mathcal{H}_2$  da seguinte forma

$$F_n = \left(0, \frac{1}{\rho_1} \text{sen}(nx), 0, 0, 0, \frac{\xi}{\rho_1} \text{cos}(nx), 0\right).$$

Se  $\chi_0 = 0$  considere  $\xi = 1$  e a sequência  $\{\beta_n\} \subset \mathbb{R}$  definida em (4.88). Nessas condições, do Teorema 4.15 temos que (4.92) e (4.93) se verificam.

Extraindo a raiz de (4.93), multiplicando por  $|\beta|^{\delta-2}$  e usando (4.92) segue que

$$|\beta|^{\delta-2} \|(i\beta I - \mathcal{A}_i)^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}_2} \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \rho_1 |\beta|^{\delta-1} |C| \approx \sigma_{11} n^\delta \rightarrow \infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.109)$$

Como  $\{F_n\} \subset \mathcal{H}_2$  é limitada, temos que (4.109) contradiz (4.108). Portanto a taxa não pode ser melhorada para este caso.

Se  $\chi_0 \neq 0$  considere  $\xi = 0$  e a sequência  $\{\beta_n\} \subset \mathbb{R}$  definida em (4.98). Nessas condições, do Teorema 4.15 temos que (4.101) e (4.102) se verificam.

Extraindo a raiz de (4.102), multiplicando por  $|\beta|^{\delta-2}$  e usando (4.101) segue que

$$|\beta|^{\delta-2} \|(i\beta I - \mathcal{A}_i)^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}_2} \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \rho_1 |\beta|^{\delta-1} |A| \approx \sigma_{12} n^\delta \rightarrow \infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.110)$$

Como  $\{F_n\} \subset \mathcal{H}_2$  é limitada, temos que (4.110) contradiz (4.108). Portanto a taxa também não pode ser melhorada para este caso.  $\square$

**REFERÊNCIAS**

- [1] ADAMS, R. A., AND FOURNIER, J. J. F. *Sobolev Spaces*, vol. 140. Elsevier, 2003.
- [2] BORICHEV, A., AND TOMILOV, Y. Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups. *Mathematische Annalen* 347, 2 (2010), 455–478.
- [3] BRESSE, J. A. C. *Cours de mécanique appliquée, professé à l'École impériale des ponts et chaussées*. Gauthier-Villars, 1868.
- [4] BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, New York, 2011.
- [5] CAVALHEIRO, A. C. *Introdução à Análise Matemática*. Ciência Moderna Ltda., Rio de Janeiro, 2014.
- [6] ENGEL, K. J., AND NAGEL, R. *A short course on operator semigroups*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [7] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [8] FATORI, L. H., AND RIVERA, J. E. M. Rates of decay to weak thermoelastic bresse system. *IMA Journal of Applied Mathematics* (2010), 1–24.
- [9] GEARHART, L. Spectral theory for contraction semigroups on hilbert space. *Transactions of the American Mathematical Society* 236 (1978), 385–394.
- [10] KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis whit applications*. John Wiley & Sons. Inc, New York, 1978.
- [11] KURRER, K.-E. *The History of the Theory of Structures*. Ernst & Sohs, Berlin, 1978.
- [12] LAGNESE. G. LEUGERING., J., AND SCHIMIDT, E. Modelling of dynamic networks of thin thermoelastic beams. *Mathematical methods in the applied scienses* 16,5 (1993), 327–358.
- [13] LIMA., P. R. D. Sistema de Bresse termoelástico não linear. Dissertação de mestrado, UEL, 2015.
- [14] LIU, Z., AND ZHENG, S. *Semigroups associated with dissipative systems*, vol. 398. CRC Press, 1999.

- [15] MORAES, G. E. B. Sistemas de Bresse com acoplamento termoelástico na força axial e momento fletor. Dissertação de mestrado, UEL, 2020.
- [16] ODEN, J. T., AND DEMKOWICZ, L. *Applied functional analysis*. Chapman and Hall/CRC, 2010.
- [17] PAZY, A. *Semigroups on linear operators and applications to partial differential equations*, vol. 44. Springer Science & Business Media, 2012.
- [18] PRÜSS, J. On the spectrum of  $c_0$ -semigroups. *Transactions of the American Mathematical Society* 284, 2 (1984), 847–857.
- [19] RIVERA, J. E. M. Estabilização de semigrupos e aplicações. *Série de Métodos Matemáticos* (2008).
- [20] ZHENG, S. *Nonlinear evolution equations*. Chapman and Hall/CRC, 2004.