



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

GABRIEL EDUARDO BITTENCOURT MORAES

**SISTEMAS DE BRESSE COM ACOPLAMENTO
TERMOELÁSTICO NA FORÇA AXIAL E MOMENTO
FLETOR**

Londrina
2020

GABRIEL EDUARDO BITTENCOURT MORAES

**SISTEMAS DE BRESSE COM ACOPLAMENTO
TERMOELÁSTICO NA FORÇA AXIAL E MOMENTO
FLETOR**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Marcio A. Jorge da Silva

Londrina

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

G118	<p>Moraes, Gabriel Eduardo Bittencourt. Sistemas de Bresse com Acoplamento Termoelástico na Força Axial e Momento Fletor / Gabriel Eduardo Bittencourt Moraes. - Londrina, 2020. 109 f.</p> <p>Orientador: Marcio Antonio Jorge da Silva. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2020. Inclui Bibliografia.</p> <p>1. Sistemas de Bresse - Tese. 2. Desigualdade de Observabilidade - Tese. 3. Equações Diferenciais - Tese. 4. Estabilidade - Tese. I. Jorge da Silva, Marcio Antonio. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU 51</p>
------	--

GABRIEL EDUARDO BITTENCOURT MORAES

**SISTEMAS DE BRESSE COM ACOPLAMENTO
TERMOELÁSTICO NA FORÇA AXIAL E MOMENTO
FLETOR**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva
Universidade Estadual de Londrina

Prof^a. Dr^a. Michele de Oliveira Alves
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali
Universidade Estadual de Maringá

Londrina, 27 de fevereiro de 2020.

*Dedico este trabalho em memória de minha avó,
dona Laura Cândida Moraes.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço à Deus, pela sua graça diária.

Aos meus pais, irmãos e familiares, por todo o incentivo, pela compreensão nos momentos de ausência e pelo carinho oferecido nos tempos de dificuldade no mestrado.

Ao meu orientador Marcio Jorge, que proporcionou, além de uma relação aluno-professor, uma amizade ao compartilhar sua motivação e paixão como pesquisador e professor da área matemática.

Aos amigos de curso, em especial, Samuel, Jesika, Anderson, Guilherme e Tainá, que tornaram os dias de estudos mais leves durante este período.

Aos professores do departamento, que pude conviver durante a graduação e mestrado, em especial, à professora Michele Alves, que me orientou durante a graduação e é um exemplo de pessoa.

À uma pessoa mais que especial, mesmo que distante, Dayanne.

Às amigas que mantenho fora da universidade, em especial, Bruna e Thacyane.

À Universidade Estadual de Londrina, pela oportunidade de realizar este curso, além do curso de graduação já realizado na instituição. E também, à Capes, pelo apoio financeiro durante o período do mestrado.

MORAES, Gabriel Eduardo Bittencourt. **Sistemas de Bresse com Acoplamento Termoelástico na Força Axial e Momento Fletor**. 2020. 109. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar, via teoria de semigrupos de operadores lineares, a existência e unicidade de solução para determinados sistemas termoelásticos de Bresse com duas diferentes condições de fronteiras. Além disso, estudamos o comportamento assintótico dos mesmos sob uma condição específica para os coeficientes do sistema e exploramos o tipo de decaimento (exponencial ou polinomial) do sistema termoelástico estudado. Com o intuito de obtermos resultados independentes das condições de fronteira consideradas, provamos um resultado denominado *Desigualdade de Observabilidade* para sistemas do tipo Bresse. No capítulo seguinte, estudamos um sistema termoelástico de Bresse com acoplamento térmico na força axial e momento fletor. Mais precisamente, mostramos que, sob certas relações entre os coeficientes do sistema, o mesmo é exponencialmente estável. Caso contrário, concluímos a falta de decaimento exponencial do sistema, além de mostrar que o mesmo possui um decaimento do tipo polinomial e garantir sua otimalidade para dados iniciais regulares. Por fim, com a intenção de obter um decaimento exponencial, adicionamos uma dissipação localizada no deslocamento vertical do sistema inicial e estudamos este novo problema. Novamente, tais estudos estão ligados à existência e unicidade de solução para este sistema, além de garantir sua estabilidade exponencial, independentemente de qualquer relação para os coeficientes do mesmo.

Palavras-chave: Sistemas de Bresse. Desigualdade de Observabilidade. Equações Diferenciais. Estabilidade. Semigrupos de Operadores Lineares.

MORAES, Gabriel Eduardo Bittencourt. **Bresse Systems with Thermoelastic Coupling on the Axial Force and Bending Moment**. 2020. 109. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

ABSTRACT

The aim of this work is to study, via semigroup theory of linear operators, the existence and uniqueness of solution for thermoelastic Bresse systems with two different boundary conditions. Additionally, we study their asymptotic behavior under a specific condition on the coefficients of the system and exploit the decay rate (exponential or polynomial) of the thermoelastic system in turn. In order to obtain results independent of the boundary conditions considered, we prove a result called *Observability Inequality* for Bresse type systems. In the next chapter, we study a thermoelastic Bresse system with thermal coupling on the axial force and bending moment. More precisely, we show that under suitable relations among the coefficients of the system, it is exponentially stable. Otherwise, we can conclude the lack of exponential decay of the system, by showing that it has a polynomial decay and guarantee its optimality for regular initial data. Finally, looking for an exponential decay, we consider an additional dissipation located at the vertical displacement of the previous system and study this new problem. Again, such studies are linked to the existence and uniqueness of solution for this system, besides guaranteeing its exponential stability independently of any relation among the coefficients.

Keywords: Bresse Systems. Observability Inequality. Differential Equations. Stability. Linear Operator Semigroups.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	PRELIMINARES	14
2.1	ANÁLISE FUNCIONAL	14
2.2	ESPAÇOS L^p E ESPAÇOS DE SOBOLEV UNIDIMENSIONAIS	15
2.3	SEMIGRUPOS DE OPERADORES LINEARES	19
2.4	RESULTADOS DE ESTABILIDADE	21
3	SISTEMA DE BRESSE CONSERVATIVO	22
3.1	DESIGUALDADE DE OBSERVABILIDADE PARA SISTEMAS DO TIPO BRESSE	22
4	SISTEMA TERMOELÁSTICO DE BRESSE PARCIALMENTE DISSIPATIVO	34
4.1	RESULTADOS PRELIMINARES	34
4.2	EXISTÊNCIA E UNICIDADE	47
4.3	ESTABILIDADE	55
4.3.1	Lemas Técnicos	56
4.3.2	Estabilidade Exponencial - Conclusão da prova do Teorema 4.14	85
4.3.3	Estabilidade Polinomial - Conclusão da prova do Teorema 4.15	86
4.3.4	Otimidade do decaimento polinomial	87
5	SISTEMA TERMOELÁSTICO DE BRESSE COM DISSIPAÇÃO LOCALIZADA	94
5.1	O MODELO COM DOIS ACOPLAMENTOS TÉRMICOS E UMA DISSIPAÇÃO LOCALIZADA	94
5.2	EXISTÊNCIA E UNICIDADE	95
5.3	ESTABILIDADE	98
5.3.1	Lemas Técnicos	99
5.3.2	Estabilidade Exponencial - Conclusão da prova do Teorema 5.6	105
6	CONCLUSÃO	107
	REFERÊNCIAS	108

1 INTRODUÇÃO

O sistema de Bresse, assim chamado em referência ao engenheiro francês, Jacques Antoine Charles Bresse (1822-1883), é um sistema de equações diferenciais parciais que descreve a vibração de uma viga arqueada fina.

Desprezando qualquer variação de temperatura, o sistema de Bresse (conservativo) possui três variáveis, que representam o deslocamento vertical, o ângulo de rotação da seção transversal e o deslocamento longitudinal, as quais denotamos por $\varphi = \varphi(x, t)$, $\psi = \psi(x, t)$ e $w = w(x, t)$, respectivamente. Ambas variáveis dependem de uma variável espacial $x \in [0, L]$ e uma temporal $t \geq 0$, onde L é o comprimento de uma linha referencial que passa pelo centro da viga.

Na Figura 1.1, apresentamos uma breve noção geométrica das variáveis φ , ψ e w presentes no sistema de Bresse. Uma partícula P presente na linha de referência ocupa a posição P' , após a barra sofrer uma deformação.

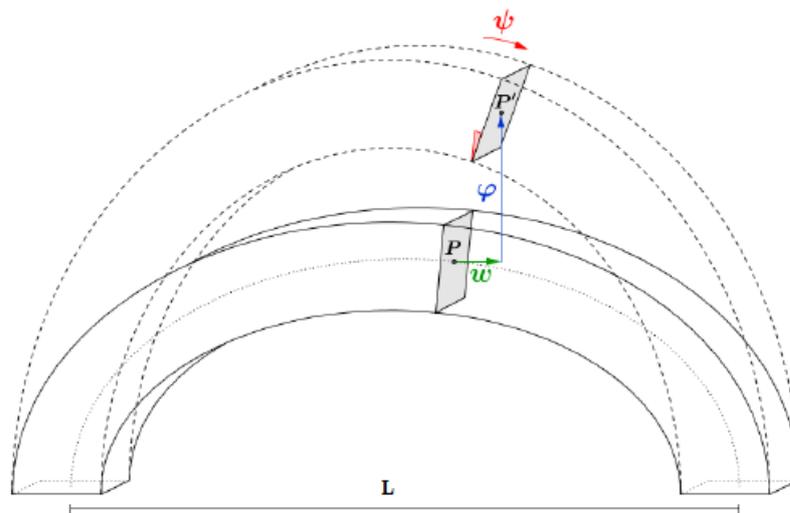


Figura 1.1: Viga arqueada fina. (Fonte: [9])

De acordo com Bresse em [4], as equações de momento para as variáveis φ , ψ e w são

$$\begin{cases} \rho_0 A \varphi_{tt} = Q_x + lN, \\ \rho_0 I \psi_{tt} = M_x - Q, \\ \rho_0 A w_{tt} = N_x - lQ, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde ρ_0 é a densidade de massa do material da viga, l é a curvatura inicial, A e I representam a área e o momento de inércia de uma seção transversal da viga e as variáveis Q , N e M representam, respectivamente, a força de cisalhamento, a força axial e o momento fletor. Além disso, as leis

constitutivas para as forças de cisalhamento e axial e para o momento fletor são

$$\begin{cases} Q = GA(\varphi_x + \psi + lw), \\ N = EA(w_x - l\varphi), \\ M = EI\psi_x, \end{cases} \quad (1.2)$$

onde G e E são os módulos de cisalhamento e da elasticidade de Young, respectivamente.

Substituindo (1.2) em (1.1) e considerando as seguintes notações

$$\rho_1 = \rho_0 A, \quad \rho_2 = \rho_0 I, \quad k = GA, \quad b = EI, \quad k_0 = EA, \quad (1.3)$$

obtemos o seguinte sistema conservativo de Bresse

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, +\infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, +\infty), \\ \rho_1 w_{tt} - k_0 l(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, +\infty). \end{cases} \quad (1.4)$$

Mais recentemente, Lagnese, Leugering e Schmidt em [14] obtiveram um sistema que descreve a vibração de uma viga arqueada fina considerando uma (ou mais de uma) variável representando a variação de temperatura desta viga, o qual é chamado de sistema termoelástico de Bresse.

No caso em que se considera o fluxo de calor agindo no deslocamento longitudinal e no ângulo de rotação, o sistema termoelástico de Bresse é descrito por

$$\begin{cases} \rho_0 A \varphi_{tt} = Q_x + lN, \\ \rho_0 I \psi_{tt} = M_x - Q, \\ \rho_0 A w_{tt} = N_x - lQ, \\ \rho_0 c_v \theta_t = -q_{1,x} - \gamma T_0 (w_{tx} - l\varphi_t), \\ \rho_0 c_v \vartheta_t = -q_{2,x} - \gamma T_0 \psi_{tx}, \end{cases} \quad (1.5)$$

com leis termoelásticas constitutivas

$$\begin{cases} Q = GA(\varphi_x + \psi + lw), \\ N = EA(w_x - l\varphi) - \gamma\theta, \\ M = EI\psi_x - \gamma\vartheta, \end{cases} \quad (1.6)$$

onde q_1 e q_2 representam fluxos de calor, c_v é a capacidade térmica, T_0 é a temperatura referencial e γ é uma constante de acoplamento. Além disso, para os fluxos de calor q_1 e q_2 , é considerada a Lei clássica de Fourier

$$\begin{aligned} q_1 &= -\kappa\theta_x, \\ q_2 &= -\kappa\vartheta_x, \end{aligned} \quad (1.7)$$

onde κ é a condutividade de calor. Assim, substituindo (1.6) e (1.7) em (1.5) e considerando

$$\rho_1 = \rho_0 A, \quad \rho_2 = \rho_0 I, \quad k = GA, \quad b = EI, \quad k_0 = EA, \quad m = \frac{\gamma T_0}{\rho_0 c_v}, \quad k_1 = \frac{\kappa}{\rho_0 c_v}, \quad (1.8)$$

obtemos o seguinte sistema termoelástico de Bresse

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + l\gamma\theta = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, +\infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\vartheta_x = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, +\infty), \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, +\infty), \\ \theta_t - k_1 \theta_{xx} + m(w_x - l\varphi)_t = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, +\infty), \\ \vartheta_t - k_1 \vartheta_{xx} + m\psi_{xt} = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, +\infty). \end{cases} \quad (1.9)$$

Correspondente ao sistema (1.9), consideraremos as seguintes condições iniciais

$$\begin{aligned} \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1, \quad \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \quad \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1, \\ w(\cdot, 0) = w_0, \quad w_t(\cdot, 0) = w_1, \quad \theta(\cdot, 0) = \theta_0, \quad \vartheta(\cdot, 0) = \vartheta_0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

e condições de fronteira do tipo Dirichlet

$$\varphi(x, t) = \psi(x, t) = w(x, t) = \theta(x, t) = \vartheta(x, t) = 0, \quad x \in \{0, L\}, \quad t \geq 0, \quad (1.11)$$

ou condições de fronteira do tipo Dirichlet-Neumann

$$\varphi(x, t) = \psi_x(x, t) = w_x(x, t) = \theta(x, t) = \vartheta(x, t) = 0, \quad x \in \{0, L\}, \quad t \geq 0. \quad (1.12)$$

O sistema (1.9) com condições iniciais (1.10) e condições de fronteira (1.11) e (1.12) foi apresentado em Liu e Rao [16], onde os autores mostraram que a estabilidade da solução do sistema está relacionada com as seguintes constantes

$$\chi := \frac{b}{\rho_2} - \frac{k}{\rho_1} \quad \text{ou} \quad \chi_0 := k - k_0, \quad (1.13)$$

e com as condições de fronteira (1.11) e (1.12). A condição $\chi = 0$ significa que as velocidades de onda dos movimentos vertical e longitudinal são iguais, o que é matematicamente interessante, mas não realista do ponto de vista físico, de acordo com [16]. Além disso, de (1.8) podemos observar que

$$\chi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \chi_0 = 0. \quad (1.14)$$

A maioria dos autores que estudam as possíveis variações do sistema termoelástico de Bresse desconsideram a relação (equivalência) dada em (1.14), apenas se preocupando com o ponto de vista matemático. Neste trabalho, levaremos (1.14) em consideração, principalmente quando $\chi_0 \neq 0$, o que acarretará também $\chi \neq 0$.

Em [16], Liu e Rao mostraram que se $\chi_0 \neq 0$, então a solução do sistema (1.9) possui uma

taxa de decaimento

$$\left(\frac{\ln t}{t}\right)^{1/j} \ln t, \quad (1.15)$$

com j dependendo das condições de fronteira e regularidade dos dados iniciais, por exemplo para dados no domínio do operador associado ao problema, tem-se

$$j = \begin{cases} 4, & \text{para (1.11),} \\ 8, & \text{para (1.12).} \end{cases} \quad (1.16)$$

Neste trabalho, mostraremos que os resultados obtidos por Liu e Rao acerca do sistema (1.9) podem ser melhorados. Com efeito, mostraremos que $\chi_0 = 0$ é uma condição necessária e suficiente para garantir a estabilidade exponencial da solução do sistema (1.9). Além disso, caso $\chi_0 \neq 0$, obteremos uma estabilidade polinomial para a solução do sistema com uma taxa de decaimento polinomial

$$\frac{1}{t^{1/2}}, \quad (1.17)$$

a qual é melhor que (1.15). E mais, para a condição de fronteira (1.12), concluiremos a otimalidade da taxa dada em (1.17), para dados iniciais regulares. Todos os resultados com detalhes precisos serão apresentados no Capítulo 4.

Motivados por [6] e com a intenção de melhorar os resultados já obtidos por Liu e Rao, enunciaremos e demonstraremos, no Capítulo 3, um resultado chamado de Desigualdade de Observabilidade para sistemas do tipo Bresse. Tal resultado será importante para a obtenção da taxa (1.17) e para concluir que a mesma independe das condições de fronteira (1.11) e (1.12). Além disso, este resultado ainda não foi encontrado na literatura da maneira como será exposto no Capítulo 3.

No Capítulo 5, acrescentaremos uma dissipação localizada no sistema termoelástico (1.9). Com isto, realizaremos um estudo acerca da existência e unicidade deste novo sistema e, além disso, avaliaremos o seu comportamento assintótico. Mais precisamente, mostraremos que, ao acrescentar esta dissipação localizada, o sistema obtido (o qual está descrito em (5.1) no Capítulo 5) possui um decaimento exponencial sem nenhuma condição sobre seus coeficientes, diferentemente dos resultados do Capítulo 4.

Para o decorrer desses estudos, no Capítulo 2, apresentaremos alguns resultados fundamentais de Análise Funcional, da teoria de Espaços de Sobolev unidimensionais e de semigrupos de operadores lineares. Dentre estes resultados, destacam-se o Teorema de Lax-Milgram e o Teorema de Lumer-Phillips, que são de extrema importância para garantirmos a existência e unicidade de uma solução para o problema (1.9) com condições iniciais (1.10) e condições de fronteira (1.11) e (1.12). Além disso, outros dois resultados preliminares, que serão utilizados para a obtenção das estabilidades exponencial ou polinomial, são os Teoremas de Prüss e de Borichev-Tomilov, respectivamente.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e os principais resultados que serão úteis para o desenvolvimento deste trabalho. Tais conceitos estão ligados à análise funcional, espaços L^p , espaços de Sobolev unidimensionais e à teoria de semigrupos de operadores lineares. Alguns resultados utilizados no decorrer do trabalho que não estiverem descritos neste capítulo podem ser encontrados em [5, 7, 8, 13, 15, 19].

2.1 ANÁLISE FUNCIONAL

Definição 2.1 (Forma sesquilinear). *Sejam X e Y dois \mathbb{K} -espaços vetoriais. Chamamos a aplicação $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$ de forma sesquilinear em $X \times Y$ quando a satisfaz as seguintes condições:*

$$(i) \quad a(x + y, z) = a(x, z) + a(y, z), \quad \forall x, y \in X, \quad \forall z \in Y;$$

$$(ii) \quad a(x, y + z) = a(x, y) + a(x, z), \quad \forall x \in X, \quad \forall y, z \in Y;$$

$$(iii) \quad a(cx, y) = ca(x, y), \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y, \quad \forall c \in \mathbb{K};$$

$$(iv) \quad a(x, cy) = \bar{c}a(x, y), \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y, \quad \forall c \in \mathbb{K}.$$

No caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, a é chamada de forma bilinear.

Definição 2.2 (Continuidade de uma forma sesquilinear). *Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados e $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear. Dizemos que a é contínua (limitada) quando existe uma constante $C > 0$ tal que $|a(x, y)| \leq C\|x\|_X\|y\|_Y$, para todo par $(x, y) \in X \times Y$.*

Definição 2.3 (Coercividade de uma forma sesquilinear). *Sejam X um espaço vetorial normado e $a : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear. Dizemos que a é coerciva quando existe uma constante $C > 0$ tal que $\operatorname{Re}(a(x, x)) \geq C\|x\|_X^2$, para todo $x \in X$.*

Teorema 2.4 (Teorema de Lax-Milgram). *Sejam X um espaço de Hilbert real (complexo) e uma forma bilinear (sesquilinear) contínua e coerciva $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{C}). Então, para todo funcional linear (antilinear) f limitado, existe um único $x \in X$ tal que $a(x, y) = \langle f, y \rangle$, para todo $y \in X$.*

Demonstração. Para o caso real, ver [5], página 140, Corolário 5.8. Para o caso complexo, ver [18], página 595, Corolário 6.6.2. \square

Definição 2.5 (Resolvente e espectro). *Sejam X um espaço de Banach complexo e um operador linear $B : D(B) \subset X \rightarrow X$. O conjunto resolvente de B é representado por $\rho(B)$ e é dado por*

$$\rho(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - B)^{-1} \text{ existe, é limitado e tem domínio denso em } X\}.$$

O espectro de B é o conjunto $\sigma(B) = \mathbb{C} - \rho(B)$.

Definição 2.6 (Operador dissipativo). *Seja X um espaço de Hilbert. Diz-se que um operador linear $B : D(B) \subset X \rightarrow X$ é dissipativo quando $\operatorname{Re}(Bx, x)_X \leq 0$, para todo $x \in D(B)$.*

Proposição 2.7. *Sejam X um espaço de Banach e $B_1 \in \mathcal{L}(X)$ um operador invertível tal que $B_1^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Se $B_2 \in \mathcal{L}(X)$ é tal que $\|B_2\|_{\mathcal{L}(X)} < \|B_1^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}^{-1}$, então o operador $B_1 + B_2$ é linear, limitado e invertível.*

Demonstração. Ver [22], Lema 2.12.1. □

Teorema 2.8. *Sejam X um espaço de Banach e $B : D(B) \subset X \rightarrow X$ um operador linear dissipativo.*

(a) *Se $\operatorname{Im}(\lambda_0 I - B) = X$ para algum $\lambda_0 > 0$, então $\operatorname{Im}(\lambda I - B) = X$ para todo $\lambda > 0$.*

(b) *Se $\operatorname{Im}(I - B) = X$ então $\overline{D(B)} = X$.*

Demonstração. Ver [19], páginas 15 e 16, Teoremas 4.5 e 4.6. □

Proposição 2.9. *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço de Banach e $B : D(B) \subset X \rightarrow X$ um operador linear com resolvente não vazio. Então, B tem resolvente compacto se, e somente se, a aplicação inclusão $i : (D(B), \|\cdot\|_{D(B)}) \rightarrow (X, \|\cdot\|_X)$ é compacta.*

Demonstração. Ver [10], Proposição 5.8. □

Proposição 2.10. *Seja X um espaço de Banach. Se $B : D(B) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear com resolvente compacto, então o espectro de B é formado apenas por autovalores de B .*

Demonstração. Ver [10], Corolário 1.15. □

2.2 ESPAÇOS L^p E ESPAÇOS DE SOBOLEV UNIDIMENSIONAIS

Definição 2.11 (Espaços L^p). *Seja $I \subset \mathbb{R}$ aberto e $0 < p < \infty$. Seja $\mathcal{L}^p(I)$ o conjunto de todas as funções mensuráveis $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $|f|^p$ é integrável (no sentido de Lebesgue) em I , ou seja,*

$$\mathcal{L}^p(I) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e } \int_I |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Diremos que duas funções $f, g \in \mathcal{L}^p$ são equivalentes ($f \sim g$), se $f = g$ q.s. em I . Indicaremos por $L^p(I)$ o conjunto

$$L^p(I) = \mathcal{L}^p(I) / \sim.$$

Para $p = \infty$, definamos

$$L^\infty(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é limitada q.s. em } I\}.$$

Observação 1. Lembremos que os elementos do conjunto $L^p(I)$ são classes de equivalência de funções em $\mathcal{L}^p(I)$. Entretanto, é conveniente olhar esses elementos como sendo funções. Assim vamos escrever $f \in L^p(I)$ no lugar de $[f] \in L^p(I)$.

Observação 2. Temos que

(i) Se $0 < p \leq \infty$, então $L^p(I)$ é um espaço vetorial.

(ii) Seja $f \in L^p(I)$ e $0 < p < \infty$. Denotaremos a norma em $L^p(I)$ por

$$\|f\|_{L^p(I)} = \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(iii) Seja $f \in L^\infty(I)$. Denotaremos a norma em $L^\infty(I)$ por

$$\|f\|_{L^\infty(I)} = \sup_{x \in I} \text{ess}|f(x)| = \inf\{C > 0 : |f(x)| \leq C \text{ q.s. em } I\}.$$

Definição 2.12. Uma função mensurável $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é dita localmente integrável se

$$\int_K f(x) dx < \infty, \forall K \subset I \text{ compacto}.$$

Indicaremos por $L^p_{loc}(I)$ o conjunto de todas as funções mensuráveis $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $|f|^p$ é localmente integrável, isto é,

$$L^p_{loc}(I) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{R} : \int_K |f(x)|^p dx < \infty, \forall K \subset I \text{ compacto} \right\}.$$

Definição 2.13 (Espaços $W^{1,p}$). Seja $I = (a, b)$ com $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$. O Espaço de Sobolev $W^{1,p}(I)$ é definido por

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I) : \text{existe } g \in L^p(I) \text{ com } \int_I u \varphi' dx = - \int_I g \varphi dx, \forall \varphi \in C_0^1(I) \right\}.$$

No caso particular $p = 2$, denotamos $W^{1,2}(I) = H^1(I)$, ou seja, $W^{1,2}(I)$ é definido por

$$H^1(I) = \left\{ u \in L^2(I) : \text{existe } g \in L^2(I) \text{ com } \int_I u \varphi' dx = - \int_I g \varphi dx, \forall \varphi \in C_0^1(I) \right\}.$$

Observação 3. Dada $u \in W^{1,p}(I)$, a função g é chamada de derivada fraca de u em $W^{1,p}(I)$ e será denotada por u_x .

Proposição 2.14. (i) O espaço $W^{1,p}(I)$ é um espaço vetorial normado, munido da norma usual

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} = \|u\|_{L^p(I)} + \|u_x\|_{L^p(I)}, \forall u \in W^{1,p}(I), 1 \leq p \leq \infty.$$

Além disso, se $1 < p < \infty$, então podemos definir a norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} = \left(\|u\|_{L^p(I)}^p + \|u_x\|_{L^p(I)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

em $W^{1,p}(I)$, a qual é equivalente à norma usual.

(ii) O espaço $H^1(I)$ é um espaço vetorial normado com produto interno e norma definidos, respectivamente, por

$$(u, v)_{H^1(I)} = (u, v)_{L^2(I)} + (u_x, v_x)_{L^2(I)} = \int_I u \bar{v} dx + \int_I u_x \bar{v}_x dx, \forall u, v \in H^1(I),$$

$$\|u\|_{H^1(I)} = \left(\int_I |u|^2 dx + \int_I |u_x|^2 dx \right)^{1/2} = \left(\|u\|_{L^2(I)}^2 + \|u_x\|_{L^2(I)}^2 \right)^{1/2}.$$

Proposição 2.15 (Desigualdade de Young com ε). Dados $a, b \geq 0$, $1 < p, q < \infty$ expoentes conjugados, isto é, tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $\varepsilon > 0$, então existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$ab \leq \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^q.$$

Demonstração. Ver [11], página 622, Seção B.2. □

Proposição 2.16 (Desigualdade de Hölder). Seja $I \subset \mathbb{R}$ aberto e sejam p, q expoentes conjugados, $1 \leq p \leq \infty$. Se $f \in L^p(I)$ e $g \in L^q(I)$, então $fg \in L^1(I)$ e

$$\|fg\|_{L^1(I)} \leq \|f\|_{L^p(I)} \|g\|_{L^q(I)}.$$

Demonstração. Ver [5], página 92, Teorema 4.6. □

Proposição 2.17 (Lema de Du Bois-Reymond). Seja $I \subset \mathbb{R}$ um aberto e $u \in L^1_{loc}(I)$. Se

$$\int_I u(x) \phi_x(x) dx = 0, \forall \phi \in C_0^\infty(I),$$

então existe uma constante C tal que $u = C$ quase sempre em I .

Demonstração. Ver [5], Lema 8.1. □

Proposição 2.18 (Imersão de Sobolev). $H^1(I) \subset L^\infty(I)$, para todo $1 \leq p \leq \infty$, com inclusão contínua, ou seja, existe uma constante $C = C(|I|) > 0$, $|I| \leq \infty$, tal que $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u\|_{H^1(I)}$, para todo $u \in H^1(I)$.

Demonstração. Ver [5], página 282, Teorema 9.2. □

Proposição 2.19. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado. Então, as seguintes inclusões são compactas (e, conseqüentemente, contínuas):

- (i) $i : (H^2, \|\cdot\|_{H^2}) \rightarrow (H^1, \|\cdot\|_{H^1})$,
- (ii) $i : (H^1, \|\cdot\|_{H^1}) \rightarrow (C(\bar{I}), \|\cdot\|_{L^\infty})$.

Demonstração. Ver [1], Teorema 6.3. □

Proposição 2.20 (Desigualdade de Poincaré). *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado. Então, existe uma constante $C = C(|I|) > 0$ tal que*

$$\|u\|_{H^1(I)} \leq C \|u_x\|_{L^2(I)},$$

para toda função $u \in H_0^1(I)$ ou $u \in H_*^1(I)$, onde

$$\begin{aligned} H_0^1(I) &= \{u \in H^1(I) : u = 0 \text{ em } \partial I\}, \\ H_*^1(I) &= \left\{u \in H^1(I) : \frac{1}{|I|} \int_I u(x) dx = 0\right\}. \end{aligned}$$

Demonstração. Ver [5], página 218, Proposição 8.13. □

Lema 2.21. *O Espaço $(H_*^1(I), \|\cdot\|_{H^1(I)})$ é Banach.*

Demonstração. Seja $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $H_*^1(I)$. Deste modo, a sequência $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $H^1(I)$, que é completo. Logo, existe $u \in H^1(I)$ tal que $\|u_n - u\|_{H^1(I)} \rightarrow 0$ para n suficientemente grande.

Além disso, utilizando as desigualdades de Hölder e de Poincaré, tem-se, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \int_I u_n(x) dx - \int_I u(x) dx \right| &\leq \int_I |u_n(x) - u(x)| dx \\ &\leq \left(\int_I dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I |u_n(x) - u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{|I|} \|u_n - u\|_2 \\ &\leq |I|^{\frac{1}{2}} \|u_n - u\|_{H^1(I)}. \end{aligned}$$

Logo, para n suficientemente grande, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I u_n(x) dx = \int_I u(x) dx,$$

o que implica

$$\frac{1}{|I|} \int_I u(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|I|} \int_I u_n(x) dx = 0.$$

Desde modo, $u \in H_*^1(I)$, isto é, u_n converge para u em $H_*^1(I)$. Portanto, o espaço $(H_*^1(I), \|\cdot\|_{H^1(I)})$ é Banach. □

Observação 4. Para mostrar que $(L_*^2(I), \|\cdot\|_{L^2(I)})$ é Banach, onde

$$L_*^2(I) = \left\{ u \in L^2(I) : \frac{1}{|I|} \int_I u(x) dx = 0 \right\},$$

basta mostrar que tal espaço é fechado.

Lema 2.22. *Seja $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ e uma função $f \in C^1[a, b]$ arbitrária. Então,*

$$\operatorname{Re} \int_a^b f u \overline{u_x} dx = \frac{1}{2} f |u|^2 \Big|_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b f' |u|^2 dx, \quad (2.1)$$

para toda $u \in H^1(I)$.

Demonstração. Usando integração por partes, temos que

$$\int_a^b f u \overline{u_x} dx = f |u|^2 \Big|_a^b - \int_a^b (f u)_x \overline{u} dx,$$

implicando em

$$\int_a^b f (u \overline{u_x} + u_x \overline{u}) dx = f |u|^2 \Big|_a^b - \int_a^b f' |u|^2 dx. \quad (2.2)$$

Observando que para todos $v, w \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(v\overline{w}) = \operatorname{Re}(w\overline{v})$, temos que, considerando a parte real em (2.2),

$$\operatorname{Re} \int_a^b f u \overline{u_x} dx = \frac{1}{2} f |u|^2 \Big|_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b f' |u|^2 dx.$$

□

2.3 SEMIGRUPOS DE OPERADORES LINEARES

Definição 2.23. *Sejam X um espaço de Banach e $A \in \mathcal{L}(X)$. Definimos o domínio do operador A como*

$$D(A) = \{u \in X : Au \in X\},$$

equipado com a norma

$$\|u\|_{D(A)} = |u|_X + |Au|_X.$$

Além disso, definimos o domínio do operador A^n , $n \in \mathbb{N}$, como

$$\begin{aligned} D(A^n) &= \{u \in D(A^{n-1}) : Au \in D(A^{n-1})\} \\ &= \{u \in X : A^k u \in X, k = 1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

equipado com a norma

$$\|u\|_{D(A^n)} = \sum_{k=0}^n |A^k u|_X,$$

onde $A^0u = u$.

Teorema 2.24 (Lumer-Phillips). *Se A é um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em um espaço de Banach X , então*

(i) *A é dissipativo, isto é, $\operatorname{Re}(Ax, x)_X \leq 0$, para todo $x \in D(A)$.*

(ii) *$\operatorname{Im}(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$.*

Reciprocamente, se

(iii) *$D(A)$ é denso em X ;*

(iv) *A é dissipativo;*

(v) *$\operatorname{Im}(\lambda_0 I - A) = X$, para algum $\lambda_0 > 0$,*

então A é um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações.

Demonstração. Ver [19], página 16, Teorema 4.6. □

Corolário 2.25. *Seja A um operador linear dissipativo com domínio $D(A)$ denso em um espaço de Hilbert X . Se $0 \in \rho(A)$, então A é um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X .*

Demonstração. Ver [22], página 88, Teorema 2.12.3. □

Teorema 2.26. *Se A é um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ em um espaço de Banach X , então para cada $u_0 \in D(A) \subset X$, existe uma única função u na classe*

$$u \in C([0, \infty); D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; X),$$

que é solução clássica regular do PVI

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = A(u(t)), & t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

dada por $u(t) = S(t)u_0$. Se $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ for um C_0 -semigrupo de contrações, temos que

$$\|u(t)\|_X \leq \|u_0\|_X \text{ e } \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_X \leq \|Au_0\|_X.$$

Além disso, se $u_0 \in D(A^n)$, $n \geq 2$, então existe uma única função u na classe

$$u \in \bigcap_{r=0}^n C^{n-r}([0, +\infty), D(A^r)).$$

Demonstração. Ver [5], página 185, Teorema 7.4 e [23], página 36, Teorema 2.3.1. □

2.4 RESULTADOS DE ESTABILIDADE

Nesta seção enunciaremos dois resultados importantes para a caracterização da estabilidade para um C_0 -semigrupo de contrações. O primeiro resultado é uma versão adaptada para espaços de Hilbert e fornece a caracterização de estabilidade exponencial para um C_0 -semigrupo de contrações e^{At} cujo gerador infinitesimal é o operador A . Para mais informações sobre este resultado, ver [12, 17, 20].

O segundo resultado foi estabelecido recentemente por Borichev e Tomilov em [3] e fornece uma caracterização de decaimento do tipo polinomial para C_0 -semigrupos limitados. Aqui, enunciaremos uma adaptação deste resultado, que será de grande utilidade para os estudos a seguir. A versão completa deste resultado pode ser encontrada em [3], no Teorema 2.4.

Teorema 2.27 (Teorema de Prüss). *Um C_0 -semigrupo de contrações $S(t) = e^{At}$ definido em um espaço de Hilbert X é exponencialmente estável se, e somente se, valem as duas condições a seguir*

- (i) $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$;
- (ii) $\limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$;

Demonstração. Ver [12, 17, 20]. □

Definição 2.28. *Escrevemos*

$$f = \mathcal{O}(g), \text{ quando } \lambda \rightarrow \lambda_0,$$

desde que exista uma constante positiva $C > 0$ tal que

$$|f(\lambda)| \leq C|g(\lambda)|,$$

para todo λ suficientemente perto de λ_0 .

Teorema 2.29 (Teorema de Borichev- Tomilov). *Suponhamos que $S(t) = e^{At}$ seja um C_0 -semigrupo limitado definido em um espaço de Hilbert X tal que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $\|S(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \mathcal{O}(t^{-1/\alpha})$, $t \rightarrow \infty$;
- (ii) $\|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \mathcal{O}(|\lambda|^{-\alpha})$, $|\lambda| \rightarrow \infty$,

para alguma constante fixada $\alpha > 0$.

Demonstração. Ver [3], Teorema 2.4. □

Observação 5. Para simplificar as notações, durante o decorrer dos estudos realizados neste trabalho, denotaremos os conjuntos $H_0^1(0, L)$, $H_*^1(0, L)$, $C_0^1(0, L)$, $C_0^\infty(0, L)$ e $L^2(0, L)$ por H_0^1 , H_*^1 , C_0^1 , C_0^∞ e L^2 respectivamente. Além disso, $\|\cdot\|_2$ representará a norma $\|\cdot\|_{L^2(0, L)}$ no espaço $L^2(0, L)$.

3 SISTEMA DE BRESSE CONSERVATIVO

Neste capítulo, encontra-se uma desigualdade fundamental para o estudo dos problemas que serão abordados nos próximos capítulos. De fato, para estudar alguns problemas de Bresse com coeficientes variáveis ou constantes e diferentes condições de fronteira, vamos lidar com uma condição local onde será possível trabalhar com algumas funções de corte, essenciais na obtenção das estimativas locais. Logo, para estender tal estimativa local à uma estimativa sobre todo domínio $(0, L)$, será fundamental a aplicação dos resultados deste capítulo.

Os resultados deste capítulo ainda não foram encontrados na literatura. Deste modo, motivados por [2], onde os autores enunciaram uma desigualdade de observabilidade para sistemas de Timoshenko e obtiveram bons resultados ao usarem tais funções de corte, enunciamos e demonstramos os resultados deste capítulo. Além disso, em [21], buscamos compreender quais os multiplicadores ideais a serem aplicados, neste caso, para os sistemas de Bresse.

3.1 DESIGUALDADE DE OBSERVABILIDADE PARA SISTEMAS DO TIPO BRESSE

No que segue, vamos mostrar duas desigualdades, as quais são comumente chamadas de “desigualdade de observabilidade”, para uma classe ampla (e abstrata) de sistemas do tipo Bresse.

Iniciamos considerando o seguinte sistema de equações:

$$i\beta\varphi - \Phi = g_1 \quad \text{em } (0, L), \quad (3.1)$$

$$i\beta\rho_1\Phi - (k(\varphi_x + \psi + lw))_x - k_0l(w_x - l\varphi) = g_2 \quad \text{em } (0, L), \quad (3.2)$$

$$i\beta\psi - \Psi = g_3 \quad \text{em } (0, L), \quad (3.3)$$

$$i\beta\rho_2\Psi - (b\psi_x)_x + k(\varphi_x + \psi + lw) = g_4 \quad \text{em } (0, L), \quad (3.4)$$

$$i\beta w - W = g_5 \quad \text{em } (0, L), \quad (3.5)$$

$$i\beta\rho_1W - (k_0(w_x - l\varphi))_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = g_6 \quad \text{em } (0, L), \quad (3.6)$$

onde $g_1, g_3, g_5 \in H_0^1$ e $g_2, g_4, g_6 \in L^2$, ou $g_1 \in H_0^1, g_3, g_5 \in H_*^1, g_2 \in L^2, g_4, g_6 \in L_*^2$ e os coeficientes $\rho_1, \rho_2, k, k_0, b, l$ satisfazem

$$\rho_1, \rho_2, k, k_0, b \in C^1[0, L], \quad \rho_1, \rho_2, k, k_0, b > 0 \quad \text{em } [0, L]. \quad (3.7)$$

Começaremos denotando por V e G as seguintes funções vetoriais $V = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ e $G = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6)$. Além disso, considerando $0 \leq a_1 < a_2 \leq L$, a notação $\|\cdot\|_{a_1, a_2}$ significa

$$\|V\|_{a_1, a_2}^2 = \int_{a_1}^{a_2} (|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |\Phi|^2 + |\psi_x|^2 + |\Psi|^2 + |w_x - l\varphi|^2 + |W|^2) dx.$$

Além disso, para $j = 1, 2$, considere também a seguinte notação

$$I(a_j) = |(\varphi_x + \psi + lw)(a_j)|^2 + |\Phi(a_j)|^2 + |\psi_x(a_j)|^2 + |\Psi(a_j)|^2 + |(w_x - l\varphi)(a_j)|^2 + |W(a_j)|^2.$$

Proposição 3.1. *Sob as notações anteriores, seja $V = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ uma solução regular de (3.1)-(3.6) e sejam $0 \leq a_1 < a_2 \leq L$ quaisquer. Então, existem constantes $C_0, C_1 > 0$ tais que, para $j = 1, 2$,*

$$I(a_j) \leq C_0 \|V\|_{a_1, a_2}^2 + C_0 \|G\|_{0, L}^2, \quad (3.8)$$

$$\|V\|_{a_1, a_2}^2 \leq C_1 I(a_j) + C_1 \|G\|_{0, L}^2. \quad (3.9)$$

Demonstração. Consideremos uma função fixada $q_1 \in C^1[a_1, a_2]$. Multiplicando a equação (3.2) por $q_1 \overline{k(\varphi_x + \psi + lw)}$ e integrando sobre (a_1, a_2) , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{a_2} k q_1 g_2 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx &= - \underbrace{\int_{a_1}^{a_2} \rho_1 q_1 k \Phi \overline{(i\beta(\varphi_x + \psi + lw))} dx}_{:= J_1} \\ &\quad - \underbrace{\int_{a_1}^{a_2} q_1 (k(\varphi_x + \psi + lw))_x \overline{(k(\varphi_x + \psi + lw))} dx}_{:= J_2} \\ &\quad - \int_{a_1}^{a_2} l k_0 k q_1 (w_x - l\varphi) \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Usando as equações (3.1), (3.3) e (3.5), integrando por partes, considerando a parte real de J_1 e o Lema 2.22, segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} J_1 &= - \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 q_1 k \Phi \overline{(i\beta(\varphi_x + \psi + lw))} dx \\ &= - \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 q_1 k \Phi \overline{(g_{1,x} + \Phi_x + g_3 + \Psi + l g_5 + l W)} dx \\ &= - \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 q_1 k \Phi \overline{\Phi_x} dx - \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 q_1 k \Phi \overline{(g_{1,x} + g_3 + l g_5)} dx \\ &\quad - \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 q_1 k \Phi \overline{(\Psi + l W)} dx \\ &= - \frac{1}{2} \rho_1 q_1 k |\Phi|^2 \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} (\rho_1 q_1 k)_x |\Phi|^2 dx \\ &\quad - \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 q_1 k \Phi \overline{(g_{1,x} + g_3 + l g_5)} dx - \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 q_1 k \Phi \overline{(\Psi + l W)} dx. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Além disso, do Lema 2.22,

$$\operatorname{Re} J_2 = - \frac{1}{2} q_1 k^2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} q_{1,x} k^2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx. \quad (3.12)$$

Assim, considerando a parte real de (3.10) e substituindo (3.11) e (3.12), obtemos

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(\rho_1 q_1 k |\Phi|^2 + q_1 k^2 |\varphi_x + \psi + lw|^2) \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} ((\rho_1 q_1 k)_x |\Phi|^2 + q_{1,x} k^2 |\varphi_x + \psi + lw|^2) dx \\
& = \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} k q_1 g_2 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx + \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 q_1 k \Phi \overline{(g_{1,x} + g_3 + l g_5)} dx \\
& \quad + \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 q_1 k \Phi \overline{(\Psi + lW)} dx + \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} l k_0 k q_1 (w_x - l\varphi) \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx. \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Agora fixamos uma outra função $q_2 \in C^1[a_1, a_2]$. Multiplicando (3.4) por $q_2 b \overline{\psi_x}$ e integrando sobre (a_1, a_2) , temos

$$\begin{aligned}
\int_{a_1}^{a_2} b q_2 g_4 \overline{\psi_x} dx & = - \underbrace{\int_{a_1}^{a_2} \rho_2 q_2 b \Psi \overline{(i\beta \psi_x)} dx}_{:=J_3} - \underbrace{\int_{a_1}^{a_2} q_2 (b\psi_x)_x \overline{(b\psi_x)} dx}_{:=J_4} \\
& \quad + \underbrace{\int_{a_1}^{a_2} q_2 b k (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\psi_x} dx}_{:=J_5}. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Usando a equação (3.3), integrando por partes, considerando a parte real de J_3 e utilizando o Lema 2.22, obtemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} J_3 & = - \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} \rho_2 q_2 b \Psi \overline{(i\beta \psi_x)} dx \\
& = - \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} \rho_2 q_2 b \Psi \overline{\Psi_x} dx - \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} \rho_2 q_2 b \Psi \overline{g_{3,x}} dx \\
& = - \frac{1}{2} \rho_2 q_2 b |\Psi|^2 \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} (q_2 \rho_2 b)_x |\Psi|^2 dx - \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} \rho_2 q_2 b \Psi \overline{g_{3,x}} dx. \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Novamente, pelo Lema 2.22, segue que

$$\operatorname{Re} J_4 = - \frac{1}{2} q_2 b^2 |\psi_x|^2 \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} q_{2,x} b^2 |\psi_x|^2 dx. \tag{3.16}$$

Utilizando integração por partes,

$$\begin{aligned}
J_5 & = \int_{a_1}^{a_2} b q_2 k (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\psi_x} dx \\
& = b q_2 k (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\psi} \Big|_{a_1}^{a_2} - \underbrace{\int_{a_1}^{a_2} (b q_2)_x k (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\psi} dx}_{:=J_{5,1}} \\
& \quad - \underbrace{\int_{a_1}^{a_2} b q_2 (k (\varphi_x + \psi + lw)_x) \overline{\psi} dx}_{:=J_{5,2}}.
\end{aligned}$$

Assim, utilizando a equação (3.3),

$$\begin{aligned}
J_{5.1} &= - \int_{a_1}^{a_2} (bq_2)_x k(\varphi_x + \psi + lw) \bar{\psi} dx \\
&= - \int_{a_1}^{a_2} (bq_2)_x k(\varphi_x + \psi + lw) \left(\frac{g_3 + \Psi}{i\beta} \right) dx \\
&= - \frac{i}{\beta} \int_{a_1}^{a_2} (bq_2)_x k(\varphi_x + \psi + lw) \bar{g}_3 dx - \frac{i}{\beta} \int_{a_1}^{a_2} (bq_2)_x k(\varphi_x + \psi + lw) \bar{\Psi} dx.
\end{aligned}$$

Considerando a parte real,

$$\operatorname{Re} J_{5.1} = \frac{1}{\beta} \operatorname{Im} \int_{a_1}^{a_2} (bq_2)_x k(\varphi_x + \psi + lw) \bar{g}_3 dx + \frac{1}{\beta} \operatorname{Im} \int_{a_1}^{a_2} (bq_2)_x k(\varphi_x + \psi + lw) \bar{\Psi} dx.$$

Por outro lado, usando as equações (3.2) e (3.3),

$$\begin{aligned}
J_{5.2} &= - \int_{a_1}^{a_2} bq_2 (k(\varphi_x + \psi + lw))_x \bar{\psi} dx \\
&= \int_{a_1}^{a_2} bq_2 (g_2 + k_0 l(w_x - l\varphi) - i\beta \rho_1 \Phi) \bar{\psi} dx \\
&= \int_{a_1}^{a_2} bq_2 g_2 \bar{\psi} dx + \int_{a_1}^{a_2} bq_2 k_0 l(w_x - l\varphi) \left(\frac{g_3 + \Psi}{i\beta} \right) dx + \int_{a_1}^{a_2} bq_2 \rho_1 \Phi \overline{(i\beta\psi)} dx.
\end{aligned}$$

Considerando sua parte real,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} J_{5.2} &= \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} bq_2 g_2 \bar{\psi} dx - \frac{1}{\beta} \operatorname{Im} \int_{a_1}^{a_2} bq_2 k_0 l(w_x - l\varphi) \bar{g}_3 dx \\
&\quad - \frac{1}{\beta} \operatorname{Im} \int_{a_1}^{a_2} bq_2 k_0 l(w_x - l\varphi) \bar{\Psi} dx + \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} bq_2 \rho_1 \Phi \bar{g}_3 dx + \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} bq_2 \rho_1 \Phi \bar{\Psi} dx.
\end{aligned}$$

Portanto, considerando a parte real de J_5 , temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} J_5 &= \operatorname{Re} \left(bq_2 k(\varphi_x + \psi + lw) \bar{\psi} \Big|_{a_1}^{a_2} \right) + \frac{1}{\beta} \operatorname{Im} \int_{a_1}^{a_2} (bq_2)_x k(\varphi_x + \psi + lw) \bar{g}_3 dx \\
&\quad + \frac{1}{\beta} \operatorname{Im} \int_{a_1}^{a_2} (bq_2)_x k(\varphi_x + \psi + lw) \bar{\Psi} dx + \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} bq_2 g_2 \bar{\psi} dx \\
&\quad - \frac{1}{\beta} \operatorname{Im} \int_{a_1}^{a_2} bq_2 k_0 l(w_x - l\varphi) \bar{g}_3 dx - \frac{1}{\beta} \operatorname{Im} \int_{a_1}^{a_2} bq_2 k_0 l(w_x - l\varphi) \bar{\Psi} dx \\
&\quad + \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} bq_2 \rho_1 \Phi \bar{g}_3 dx + \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} bq_2 \rho_1 \Phi \bar{\Psi} dx. \tag{3.17}
\end{aligned}$$

Retornando a (3.14), considerando sua parte real e substituindo (3.15), (3.16) e (3.17),

obtemos

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \left(\rho_2 q_2 b |\Psi|^2 + q_2 b^2 |\psi_x|^2 \right) \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} \left((\rho_2 q_2 b)_x |\Psi|^2 + q_{2,x} b^2 |\psi_x|^2 \right) dx \\
& = \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} b q_2 g_4 \bar{\psi}_x dx + \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} \rho_2 q_2 b \Psi \bar{g}_{3,x} dx - \operatorname{Re} \left(b q_2 k (\varphi_x + \psi + l w) \bar{\psi} \right) \Big|_{a_1}^{a_2} \\
& \quad - \frac{1}{\beta} \operatorname{Im} \int_{a_1}^{a_2} (b q_2)_x k (\varphi_x + \psi + l w) \bar{g}_3 dx - \frac{1}{\beta} \int_{a_1}^{a_2} (b q_2)_x k (\varphi_x + \psi + l w) \bar{\Psi} dx \\
& \quad - \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} b q_2 g_2 \bar{\psi} dx + \frac{1}{\beta} \operatorname{Im} \int_{a_1}^{a_2} b q_2 k_0 l (w_x - l \varphi) \bar{g}_3 dx + \frac{1}{\beta} \operatorname{Im} \int_{a_1}^{a_2} b q_2 k_0 l (w_x - l \varphi) \bar{\Psi} dx \\
& \quad - \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 q_2 b \Phi \bar{g}_3 dx - \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 q_2 b \Phi \bar{\Psi} dx. \tag{3.18}
\end{aligned}$$

Por fim, fixamos uma função $q_3 \in C^1[a_1, a_2]$. Multiplicando (3.6) por $q_3 k_0 \overline{(w_x - l \varphi)}$ e integrando sobre (a_1, a_2) , obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{a_1}^{a_2} k_0 q_3 g_6 \overline{(w_x - l \varphi)} dx & = - \underbrace{\int_{a_1}^{a_2} \rho_1 q_3 k_0 W \overline{(i \beta (w_x - l \varphi))} dx}_{:= J_6} \\
& \quad - \underbrace{\int_{a_1}^{a_2} q_3 (k_0 (w_x - l \varphi))_x \overline{(k_0 (w_x - l \varphi))} dx}_{:= J_7} \\
& \quad + \int_{a_1}^{a_2} l k k_0 q_3 (\varphi_x + \psi + l w) \overline{(w_x - l \varphi)} dx. \tag{3.19}
\end{aligned}$$

Integrando por partes, usando as equações (3.1) e (3.5), considerando a parte real de J_6 e utilizando o Lema 2.22, obtemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} J_6 & = - \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 k_0 q_3 W \overline{(i \beta (w_x - l \varphi))} dx \\
& = - \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 k_0 q_3 W \overline{(g_{5,x} + W_x - l g_1 - l \Phi)} dx \\
& = - \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 k_0 q_3 W \bar{W}_x dx + \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} l \rho_1 k_0 q_3 W \bar{\Phi} dx - \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 k_0 q_3 W \overline{(g_{5,x} - l g_1)} dx \\
& = - \frac{1}{2} \rho_1 q_3 k_0 |W|^2 \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} (\rho_1 q_3 k_0)_x |W|^2 dx \\
& \quad + \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} l \rho_1 k_0 q_3 W \bar{\Phi} dx - \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 k_0 q_3 W \overline{(g_{5,x} - l g_1)} dx. \tag{3.20}
\end{aligned}$$

Além disso, novamente, pelo Lema 2.22,

$$\operatorname{Re} J_7 = - \frac{1}{2} q_3 k_0^2 |w_x - l \varphi|^2 \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} q_{3,x} k_0^2 |w_x - l \varphi|^2 dx. \tag{3.21}$$

Logo, considerando a parte real de (3.19) e substituindo (3.20) e (3.21), temos que

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \left(\rho_1 q_3 k_0 |W|^2 + q_3 k_0^2 |w_x - l\varphi|^2 \right) \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} \left((\rho_1 q_3 k_0)_x |W|^2 + q_{3,x} k_0^2 |w_x - l\varphi|^2 \right) dx \\
& = \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} k_0 q_3 g_6 \overline{(w_x - l\varphi)} dx - \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} l \rho_1 k_0 q_3 W \bar{\Phi} dx \\
& \quad + \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 k_0 q_3 W \overline{(g_{5,x} - l g_1)} dx - \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} l k k_0 q_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(w_x - l\varphi)} dx. \quad (3.22)
\end{aligned}$$

Combinando as igualdades (3.13), (3.18) e (3.22), chegamos a

$$\begin{aligned}
& \int_{a_1}^{a_2} \left(q_{1,x} k^2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 + (\rho_1 q_1 k)_x |\Phi|^2 + q_{2,x} b^2 |\psi_x|^2 + (\rho_2 q_2 b)_x |\Psi|^2 \right) dx \\
& + \int_{a_1}^{a_2} \left(q_{3,x} k_0^2 |w_x - l\varphi|^2 + (\rho_1 k_0 q_3)_x |W|^2 \right) dx \\
& = \left(q_1 k^2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 + \rho_1 q_1 k |\Phi|^2 + q_2 b^2 |\psi_x|^2 + \rho_2 q_2 b |\Psi|^2 \right) \Big|_{a_1}^{a_2} \\
& \quad + \left(q_3 k_0^2 |w_x - l\varphi|^2 + \rho_1 q_3 k_0 |W|^2 \right) \Big|_{a_1}^{a_2} + P(a_1, a_2) + J_{10} + J_{11} + J_{12} + J_{13}. \quad (3.23)
\end{aligned}$$

para quaisquer $q_1, q_2, q_3 \in C^1[a_1, a_2]$, onde

$$\begin{aligned}
P(a_1, a_2) &= -2 \operatorname{Re} \left(b q_2 k (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\psi} \Big|_{a_1}^{a_2} \right), \\
J_{10} &= 2 \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} (\rho_1 q_1 k - \rho_1 q_2 b) \Phi \bar{\Psi} dx + 2 \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} l (\rho_1 q_1 k - \rho_1 q_3 k_0) W \bar{\Phi} dx, \\
J_{11} &= -\frac{2}{\beta} \operatorname{Im} \int_{a_1}^{a_2} k (q_2 b)_x (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\Psi} dx + \frac{2}{\beta} \operatorname{Im} \int_{a_1}^{a_2} b q_2 k_0 l (w_x - l\varphi) \bar{\Psi} dx, \\
J_{12} &= -\frac{2}{\beta} \operatorname{Im} \int_{a_1}^{a_2} (q_2 b)_x k (\varphi_x + \psi + lw) \bar{g}_3 dx + \frac{2}{\beta} \operatorname{Im} \int_{a_1}^{a_2} b q_2 k_0 l (w_x - l\varphi) \bar{g}_3 dx \\
& \quad + 2 \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} b q_2 (g_4 \bar{\psi}_x + \rho_2 \Psi \bar{g}_{3,x} - \rho_1 \Phi \bar{g}_3 - g_2 \bar{\psi}) dx + 2 \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} k q_1 g_2 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx \\
& \quad + 2 \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 q_1 k \overline{\Phi (g_{1,x} + g_3 + l g_5)} dx + 2 \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} k_0 q_3 g_6 \overline{(w_x - l\varphi)} dx \\
& \quad + 2 \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 q_3 k_0 W \overline{(g_{5,x} - l g_1)} dx, \\
J_{13} &= 2 \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} l k k_0 (q_1 - q_3) (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(w_x - l\varphi)} dx.
\end{aligned}$$

Deste modo, estamos aptos a concluir (3.8) e (3.9) para os casos em que $j = 1, 2$. Separaremos estas conclusões em dois casos:

(i) **Prova de (3.8) e (3.9) para $j=2$.** Neste caso, consideremos $q_1, q_2, q_3 \in C^1[a_1, a_2]$ tais

que

$$(q_1 k)(x) = (q_2 b)(x) = (q_3 k_0)(x) = \int_{a_1}^x e^{ns} ds.$$

para todo $x \in [a_1, a_2]$ e para algum $n \in \mathbb{N}$ a ser determinado posteriormente. Com isto, temos que $J_{10} = 0$.

Além disso, de (3.7) e da Desigualdade de Hölder, existe uma constante $C_n > 0$ tal que

$$|J_{11}| \leq \frac{C_n}{|\beta|} \|V\|_{a_1, a_2}^2 \text{ e } |J_{12}| \leq C_n \|V\|_{a_1, a_2} \|G\|_{0, L}. \quad (3.24)$$

Por outro lado, usando (3.3), as desigualdades de Hölder e Young e a inclusão contínua $H^1(a_1, a_2) \hookrightarrow L^\infty(a_1, a_2)$, temos que existe uma constante $C_n > 0$ tal que

$$|P(a_1, a_2)| \leq \frac{C_n}{|\beta|} |(\varphi_x + \psi + lw)(a_2)|^2 + \frac{C_n}{|\beta|} |\Psi(a_2)|^2 + C_n \|G\|_{0, L}^2. \quad (3.25)$$

Agora, observe que

$$(q_1 - q_3)(x) = \frac{(k_0 - k)(x)}{(k_0 k)(x)} \left(\frac{e^{nx} - e^{na_1}}{n} \right),$$

implicando que

$$[(lk_0 k)(q_1 - q_3)](x) = [l(k_0 - k)](x) \left(\frac{e^{nx} - e^{na_1}}{n} \right).$$

Deste modo, de (3.7) e usando a Desigualdade de Young, existe uma constante $\bar{C} > 0$ tal que

$$|J_{13}| \leq \frac{\bar{C}}{n} \int_{a_1}^{a_2} e^{xn} (|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2) dx. \quad (3.26)$$

A fim de concluir (3.9) para $j = 2$, mostraremos um resultado auxiliar que será de extrema importância no decorrer das limitações.

Afirmção. Seja $q \in C^1[a_1, a_2]$ tal que

$$q(x) = \gamma(x) \int_{a_1}^x e^{ns} ds,$$

onde $\gamma \in C^1[a_1, a_2]$ é tal que $\gamma_0 \leq \gamma(x) \leq \gamma_1$ para todo $x \in [a_1, a_2]$, com $0 < \gamma_0 < \gamma_1$. Então, para n suficientemente grande,

$$q'(x) \geq \frac{1}{2} \gamma_0 e^{xn}, \quad (3.27)$$

para todo $x \in [a_1, a_2]$.

Com efeito,

$$q'(x) = e^{nx} \gamma(x) + \gamma'(x) \left(\frac{e^{nx} - e^{na_1}}{n} \right).$$

Sendo $\gamma'(x) \geq -\|\gamma'\|_\infty$ e $\gamma(x) \geq \gamma_0$ para todo $x \in [a_1, a_2]$, temos que

$$\begin{aligned} q'(x) &\geq e^{nx}\gamma(x) + \|\gamma'\|_\infty \left(\frac{e^{na_1} - e^{nx}}{n} \right) \\ &\geq \frac{1}{n} \left[e^{nx}(\gamma_0 n - \|\gamma'\|_\infty) + \|\gamma'\|_\infty e^{na_1} \right] \\ &\geq \frac{1}{n} (e^{nx}(\gamma_0 n - \|\gamma'\|_\infty)). \end{aligned}$$

Logo, considerando n suficientemente grande tal que

$$\frac{\gamma_0 n}{2} \geq \|\gamma'\|_\infty, \quad (3.28)$$

temos que

$$q'(x) \geq \frac{1}{2} \gamma_0 e^{nx},$$

para todo $x \in [a_1, a_2]$, provando (3.27).

Agora, em (3.23), substituindo as estimativas (3.24), (3.25) e (3.26), utilizando (3.7) e (3.27), considerando $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande satisfazendo (3.28) para todas as funções γ específicas presentes em (3.23), existem constantes $C, \alpha_0 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \alpha_0 \int_{a_1}^{a_2} e^{nx} (|\varphi_x + \psi_x + lw|^2 + |\Phi|^2 + |\psi_x|^2 + |\Psi|^2 + |w_x - l\varphi|^2 + |W|^2) dx \\ &\leq CI(a_2) + \frac{C}{|\beta|} \|V\|_{a_1, a_2}^2 + C \|G\|_{0, L}^2 + C \|V\|_{a_1, a_2} \|G\|_{0, L} \\ &\quad + \frac{\bar{C}}{n} \int_{a_1}^{a_2} e^{nx} (|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2) dx. \end{aligned}$$

Observe que, neste momento a constante $C > 0$ deixa de depender de um $n \in \mathbb{N}$ arbitrário, pois já consideramos um $n \in \mathbb{N}$ fixo que satisfaça (3.28). Porém, considerando $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande satisfazendo (3.28) e tal que

$$\frac{1}{2} \alpha_0 - \frac{\bar{C}}{n_0} > 0,$$

temos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$C e^{n_0 a_1} \|V\|_{a_1, a_2}^2 \leq CI(a_2) + \frac{C}{|\beta|} \|V\|_{a_1, a_2}^2 + C \|V\|_{a_1, a_2} \|G\|_{0, L} + C \|G\|_{0, L}^2.$$

Considerando $|\beta| > 1$ suficientemente grande e usando a Desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|V\|_{a_1, a_2}^2 \leq C_1 I(a_2) + C_1 \|G\|_{0, L}^2,$$

de onde concluímos (3.9) para $j = 2$.

Para concluir (3.8) para o caso em que $j = 2$, na equação (3.23) seja $n_0 \in \mathbb{N}$ considerando anteriormente e utilizando (3.7) juntamente com as limitações (3.24), (3.25) e (3.26), existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} I(a_2) \leq & C\|V\|_{a_1, a_2}^2 + \frac{C}{|\beta|} |(\varphi_x + \psi + lw)(a_2)|^2 + \frac{C}{|\beta|} |\Psi(a_2)|^2 + C\|G\|_{0, L}^2 \\ & + \frac{C}{|\beta|} \|V\|_{a_1, a_2}^2 + C\|V\|_{a_1, a_2} \|G\|_{0, L} + Ce^{n_0 a_2} \|V\|_{a_1, a_2}^2. \end{aligned}$$

Sendo $|\beta| > 1$ suficientemente grande e usando a Desigualdade de Young, existe $C_0 > 0$ tal que

$$I(a_2) \leq C_0 \|V\|_{a_1, a_2}^2 + C_0 \|G\|_{0, L}^2.$$

Portanto, mostramos as desigualdades (3.8) e (3.9) para o caso em que $j = 2$.

(ii) Prova de (3.8) e (3.9) para $j=1$. Considere $q_1, q_2, q_3 \in C^1[a_1, a_2]$ tais que

$$(q_1 k)(x) = (q_2 b)(x) = (q_3 k_0) = - \int_x^{a_2} e^{-ms} ds,$$

para todo $x \in [a_1, a_2]$ e $m \in \mathbb{N}$ a ser determinado. Prosseguindo de maneira análoga ao caso $j = 2$, as estimativas (3.8) e (3.9) podem ser concluídas para o caso $j = 1$.

De fato, inicialmente obtemos $J_{10} = 0$. Analogamente ao caso (i), de (3.7) e usando a Desigualdade de Hölder, existe uma constante $C_m > 0$ tal que

$$|J_{11}| \leq \frac{C_m}{|\beta|} \|V\|_{a_1, a_2}^2 \quad \text{e} \quad |J_{12}| \leq C_m \|V\|_{a_1, a_2} \|G\|_{0, L}. \quad (3.29)$$

Utilizando a equação (3.3), as desigualdades de Hölder e Young e a inclusão contínua $H^1(a_1, a_2) \hookrightarrow L^\infty(a_1, a_2)$, existe uma constante $C_m > 0$ tal que

$$|P(a_1)| \leq \frac{C_m}{|\beta|} |(\varphi_x + \psi + lw)(a_1)|^2 + \frac{C_m}{|\beta|} |\Psi(a_1)|^2 + C_m \|G\|_{0, L}^2. \quad (3.30)$$

Além disso, de (3.7) e da Desigualdade de Young, existe uma constante $\bar{C} > 0$ tal que

$$|J_{13}| \leq \bar{C} \int_{a_1}^{a_2} e^{-mx} (|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2) dx. \quad (3.31)$$

Novamente, com a intenção de mostrarmos a Desigualdade (3.9) para $j = 1$, enunciaremos e mostraremos o seguinte resultado:

Afirmção. Seja $q \in C^1[a_1, a_2]$ tal que

$$q(x) = -\gamma(x) \int_x^{a_2} e^{-ms} ds,$$

onde $\gamma \in C^1[a_1, a_2]$ é tal que $\gamma_0 \leq \gamma(x) \leq \gamma_1$ para todo $x \in [a_1, a_2]$, com $0 < \gamma_0 < \gamma_1$. Então, para m suficientemente grande,

$$q'(x) \geq \frac{1}{2}\gamma_0 e^{-mx}, \quad (3.32)$$

para todo $x \in [a_1, a_2]$.

Com efeito,

$$q'(x) = e^{-mx}\gamma(x) - \gamma'(x) \left(\frac{e^{-ma_2} - e^{-mx}}{-m} \right).$$

Sendo $-\gamma'(x) \geq -\|\gamma'\|_\infty$ e $\gamma(x) \geq \gamma_0$ para todo $x \in [a_1, a_2]$, temos que

$$q'(x) \geq \frac{1}{m}(e^{-mx}(\gamma_0 m - \|\gamma'\|_\infty)).$$

Portanto, considerando m suficientemente grande tal que

$$\frac{\gamma_0 m}{2} \geq \|\gamma'\|_\infty, \quad (3.33)$$

temos que

$$q'(x) \geq \frac{1}{2}\gamma_0 e^{-mx}$$

para todo $x \in [a_1, a_2]$, concluindo (3.32).

Neste momento, em (3.23), substituindo as estimativas (3.29), (3.30) e (3.31), utilizando (3.7) e (3.32), considerando $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande satisfazendo (3.33) para todas as funções γ específicas presentes em (3.23), existem constantes $C, \alpha_1 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\alpha_1 \int_{a_1}^{a_2} e^{-mx} (|\varphi_x + \psi_x + lw|^2 + |\Phi|^2 + |\psi_x|^2 + |\Psi|^2 + |w_x - l\varphi|^2 + |W|^2) dx \\ & \leq CI(a_1) + \frac{C}{|\beta|} \|V\|_{a_1, a_2}^2 + C\|G\|_{0, L}^2 + C\|V\|_{a_1, a_2} \|G\|_{0, L} \\ & \quad + \frac{\bar{C}}{m} \int_{a_1}^{a_2} e^{-mx} (|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2) dx. \end{aligned}$$

Observemos, mais uma vez, que a constante $C > 0$ não depende de um $m \in \mathbb{N}$ arbitrário, pois tomamos $m \in \mathbb{N}$ fixo satisfazendo (3.33). Agora, considerando $m_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande satisfazendo (3.33) e tal que

$$\frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{\bar{C}}{m_0} > 0,$$

temos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$C e^{m_0 a_2} \|V\|_{a_1, a_2}^2 \leq CI(a_1) + \frac{C}{|\beta|} \|V\|_{a_1, a_2}^2 + C\|V\|_{a_1, a_2} \|G\|_{0, L} + C\|G\|_{0, L}^2.$$

Considerando $|\beta| > 1$ suficientemente grande e usando a Desigualdade de Young com

$\varepsilon > 0$, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|V\|_{a_1, a_2}^2 \leq C_1 I(a_1) + C_1 \|G\|_{0, L}^2,$$

provando (3.9) para o caso $j = 1$.

Por fim, vamos concluir (3.8) no caso em que $j = 1$. De fato, na equação (3.23), seja $m_0 \in \mathbb{N}$ tomado anteriormente e utilizando (3.7) juntamente com (3.29), (3.30) e (3.31), existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} I(a_1) \leq & C \|V\|_{a_1, a_2}^2 + \frac{C}{|\beta|} |(\varphi_x + \psi + lw)(a_1)|^2 + \frac{C}{|\beta|} |\Psi(a_1)|^2 + C \|G\|_{0, L}^2 \\ & + \frac{C}{|\beta|} \|V\|_{a_1, a_2}^2 + C \|V\|_{a_1, a_2} \|G\|_{0, L} + C e^{m_0 a_1} \|V\|_{a_1, a_2}^2. \end{aligned}$$

Considerando $|\beta| > 1$ suficientemente grande e usando a Desigualdade de Young, existe $C_0 > 0$ tal que

$$I(a_2) \leq C_0 \|V\|_{a_1, a_2}^2 + C_0 \|G\|_{0, L}^2.$$

Portanto, mostramos as desigualdades (3.8) e (3.9) para todo $j = 1, 2$ e todo $|\beta| > 1$ suficientemente grande. \square

Corolário 3.2. *Seja $V = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ uma solução regular do sistema (3.1)-(3.6). Se, para algum subintervalo $(b_1, b_2) \subset (0, L)$, tivermos que*

$$\|V\|_{b_1, b_2}^2 \leq \Lambda, \tag{3.34}$$

onde $\Lambda = \Lambda(U, V, \beta)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|V\|_{0, L}^2 \leq C\Lambda + C \|G\|_{0, L}^2. \tag{3.35}$$

Demonstração. De (3.8) e (3.34), em particular para (b_1, b_2) , temos que

$$I(b_j) \leq C_0 \Lambda + C_0 \|G\|_{0, L}^2, \quad j = 1, 2. \tag{3.36}$$

Usando (3.9) com $a_1 = 0$ e $a_2 = b_2$ e (3.36) com $j = 2$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{b_2} (|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |\Phi|^2 + |w_x - l\varphi|^2 + |W|^2 + |\psi_x|^2 + |\Psi|^2) dx & \leq C_1 I(a_2) + C_1 \|G\|_{0, L}^2 \\ & \leq C_1 C_0 \Lambda + C_1 \|G\|_{0, L}^2 \\ & \leq C_2 \Lambda + C_2 \|G\|_{0, L}^2, \end{aligned} \tag{3.37}$$

onde $C_2 = C_1 C_0 + C_1 > 0$.

Analogamente, usando (3.9) com $a_1 = b_2$, $a_2 = L$ e (3.36) com $j = 2$,

$$\int_{b_2}^L (|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |\Phi|^2 + |w_x - l\varphi|^2 + |W|^2 + |\psi_x|^2 + |\Psi|^2) dx \leq C_2\Lambda + C_2\|G\|_{0,L}^2. \quad (3.38)$$

Portanto, somando (3.37) e (3.38), existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|V\|_{0,L}^2 \leq C\Lambda + C\|G\|_{0,L}^2.$$

□

Observação 6. O resultado do Corolário 3.2, como comentado anteriormente, será utilizado para prolongar estimativas locais, a serem obtidas nos próximos capítulos. De fato, uma vez obtida a estimativa num intervalo $(b_1, b_2) \subset (0, L)$, utilizando o resultado do Corolário 3.2, poderemos prolongar esta estimativa para todo o intervalo $(0, L)$ e, com isto, obteremos os resultados de estabilidade da solução do problema (1.9) independentes das condições de fronteira consideradas.

4 SISTEMA TERMOELÁSTICO DE BRESSE PARCIALMENTE DISSIPATIVO

O objetivo deste capítulo é apresentar um estudo acerca da existência e unicidade e, posteriormente, avaliar o comportamento assintótico da solução do problema

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + l\gamma\theta = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, +\infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\vartheta_x = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, +\infty), \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, +\infty), \\ \theta_t - k_1 \theta_{xx} + m(w_x - l\varphi)_t = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, +\infty), \\ \vartheta_t - k_1 \vartheta_{xx} + m\psi_{xt} = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, +\infty), \end{cases} \quad (4.1)$$

com condições de iniciais

$$\begin{aligned} \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1, \quad \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \quad \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1, \\ w(\cdot, 0) = w_0, \quad w_t(\cdot, 0) = w_1, \quad \theta(\cdot, 0) = \theta_0, \quad \vartheta(\cdot, 0) = \vartheta_0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

com condições de fronteira do tipo Dirichlet

$$\varphi(x, t) = \psi(x, t) = w(x, t) = \theta(x, t) = \vartheta(x, t) = 0, \quad x \in \{0, L\}, \quad t \geq 0, \quad (4.3)$$

ou com condições de fronteira do tipo Dirichlet-Neumann

$$\varphi(x, t) = \psi_x(x, t) = w_x(x, t) = \theta(x, t) = \vartheta(x, t) = 0, \quad x \in \{0, L\}, \quad t \geq 0, \quad (4.4)$$

onde os coeficientes $\rho_1, \rho_2, k, k_0, k_1, l, b, \gamma$ e m são constantes positivas e as funções φ, ψ, w, θ e ϑ descrevem, respectivamente, a oscilação vertical, o ângulo de rotação da seção transversal, a oscilação longitudinal e as variações da temperatura de uma viga num formato de arco, fina e com comprimento L , como apresentado no Capítulo 1.

4.1 RESULTADOS PRELIMINARES

Inicialmente, nosso objetivo é reescrever o sistema (4.1)-(4.4) num problema de Cauchy abstrato e, conseqüentemente, utilizar a teoria de semigrupos de operadores lineares para garantir a existência e unicidade da solução deste problema. Para tal objetivo, enunciaremos e demonstraremos alguns resultados preliminares relacionados aos espaços definidos para a utilização da teoria de semigrupos, bem como resultados que serão usados para o resultado de existência e unicidade de solução do problema (4.1)-(4.4).

Primeiramente, considere o espaço

$$\mathcal{H}_1 = H_0^1 \times L^2 \times H_0^1 \times L^2 \times H_0^1 \times L^2 \times L^2 \times L^2,$$

o qual usaremos para abordar o problema (4.1) com as condições de fronteira dadas em (4.3) e considere também o espaço

$$\mathcal{H}_2 = H_0^1 \times L^2 \times H_*^1 \times L_*^2 \times H_*^1 \times L_*^2 \times L^2 \times L^2,$$

que será utilizado para abordar o problema (4.1) com as condições de fronteira dadas em (4.4).

Consideremos seus elementos da forma $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \theta, \vartheta) \in \mathcal{H}_j$, para $j = 1, 2$. Primeiramente, é possível observar que o espaço \mathcal{H}_j , com $j = 1, 2$, é um espaço de Hilbert com a norma $|\cdot|_{\mathcal{H}_j}$ proveniente do produto interno usual

$$\begin{aligned} (U, U^*)_{\mathcal{H}_j} &= (\varphi_x, \varphi_x^*)_2 + (\Phi, \Phi^*)_2 + (\psi_x, \psi_x^*)_2 + (\Psi, \Psi^*)_2 \\ &\quad + (w_x, w_x^*)_2 + (W, W^*)_2 + (\theta, \theta^*)_2 + (\vartheta, \vartheta^*)_2, \end{aligned} \quad (4.5)$$

para todo $U, U^* \in \mathcal{H}_j$. Porém, podemos considerar em \mathcal{H}_j a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} ((U, U^*))_{\mathcal{H}_j} &= \rho_1(\Phi, \Phi^*)_2 + \rho_2(\Psi, \Psi^*)_2 + \rho_1(W, W^*)_2 \\ &\quad + b(\psi_x, \psi_x^*) + k(\varphi_x + \psi + lw, \varphi_x^* + \psi^* + lw^*)_2 \\ &\quad + k_0(w_x - l\varphi, w_x^* - l\varphi^*)_2 + \frac{\gamma}{m}(\theta, \theta^*)_2 + \frac{\gamma}{m}(\vartheta, \vartheta^*)_2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Assim, para todo $U \in \mathcal{H}_j$, tem-se a norma proveniente do produto interno (4.5):

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 = \|\varphi_x\|_2^2 + \|\Phi\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|\Psi\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 + \|W\|_2^2 + \|\theta\|_2^2 + \|\vartheta\|_2^2. \quad (4.7)$$

Além disso, podemos considerar uma aplicação $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_j} : \mathcal{H}_j \rightarrow \mathbb{K}$ proveniente da aplicação definida em (4.6):

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 &= \rho_1\|\Phi\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + \rho_1\|W\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 \\ &\quad + k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + \frac{\gamma}{m}\|\theta\|_2^2 + \frac{\gamma}{m}\|\vartheta\|_2^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Lema 4.1. *A aplicação $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_j} : \mathcal{H}_j \rightarrow \mathbb{K}$ definida em (4.8) é uma norma para $j = 1, 2$. No caso em que $j = 2$, tal aplicação é uma norma se a condição $lL \neq n\pi$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ for satisfeita.*

Demonstração. Seja $U \in \mathcal{H}_j$ tal que $\|U\|_{\mathcal{H}_j} = 0$. Assim, segue que

$$\Phi = \Psi = W = \varphi_x + \psi + lw = w_x - l\varphi = \psi_x = \theta = \vartheta = 0. \quad (4.9)$$

Sendo $\psi_x = 0$, então para toda função $\phi \in C_0^\infty$, usando integração por partes,

$$\int_0^L \psi(x)\phi_x(x)dx = \psi(x)\phi(x)\Big|_0^L - \int_0^L \phi(x)\psi_x(x)dx = 0.$$

Logo, segue da Proposição 2.17 que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\psi = c$. Para o caso em que

$\psi \in H_0^1$, temos que $\psi(L) = \psi(0) = 0$. Utilizando a Proposição 2.19, temos que ψ é contínua em $[0, L]$, ou seja, como ψ é constante, temos que $\psi = 0$. No caso em que $\psi \in H_*^1$,

$$0 = \frac{1}{L} \int_0^L \psi(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^L c dx = c.$$

Portanto, $\psi = 0$ em ambos os casos. Além disso, de (4.9), segue que

$$\begin{cases} \varphi_x + lw = 0, \\ w_x - l\varphi = 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Sendo $\varphi \in H_0^1$, obtemos o seguinte problema de valor de contorno

$$\begin{cases} \varphi_{xx} + l^2\varphi = 0, \\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Considerando a solução $\varphi \in C^2(0, L)$ do sistema (4.11), segue que tal solução pode ser descrita da seguinte forma

$$\varphi(x) = \eta \sin(lx) + \beta \cos(lx),$$

para algum $\eta \in \mathbb{R}$ e algum $\beta \in \mathbb{R}$. Como $\varphi(0) = 0$, segue que $\beta = 0$ e, portanto,

$$\varphi(x) = \eta \sin(lx).$$

No caso em que $w \in H_0^1$, substituindo $\varphi(x) = \eta \sin(lx)$ em (4.10) e usando o fato de que $\varphi(L) = 0$, segue que $\eta = 0$ e, deste modo, $\varphi = w = 0$. Portanto, $U = 0$.

Porém, no caso em que $w \in H_*^1$, só é possível garantir que $\eta = 0$ e, conseqüentemente, $\varphi = w = 0$, quando $lL \neq n\pi$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, a condição de que $lL \neq n\pi$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é necessária para garantir $U = 0$ no caso $j = 2$.

Agora, dado $\beta \in \mathbb{R}$ e $U \in \mathcal{H}_j$, é fácil ver que

$$\|\beta U\|_{\mathcal{H}_j} = |\beta| \|U\|_{\mathcal{H}_j}.$$

Além disso, dados $U, U^* \in \mathcal{H}_j$, usando a Desigualdade Triangular,

$$\begin{aligned} \|U + U^*\|_{\mathcal{H}_i}^2 &\leq \rho_1(\|\Phi\|_2 + \|\Phi^*\|_2)^2 + \rho_2(\|\Psi\|_2 + \|\Psi^*\|_2)^2 + \rho_1(\|W\|_2 + \|W^*\|_2)^2 \\ &\quad + b(\|\psi_x\|_2 + \|\psi_x^*\|_2)^2 + k(\|\varphi_x + \psi + lw\|_2 + \|\varphi_x^* + \psi^* + lw^*\|_2)^2 \\ &\quad + k_0(\|w_x - l\varphi\|_2 + \|w_x^* - l\varphi^*\|_2)^2 + \frac{\gamma}{m}(\|\theta\|_2 + \|\theta^*\|_2)^2 \\ &\quad + \frac{\gamma}{m}(\|\vartheta\|_2 + \|\vartheta^*\|_2)^2 \end{aligned}$$

e, usando o fato de que

$$\sqrt{\rho_1} \|\Phi\|_2 = \sqrt{\rho_1 \|\Phi\|_2^2} \leq \|U\|_{\mathcal{H}_j},$$

e notando que tal fato é válido para todas as componentes da aplicação $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_j}$ em $U \in \mathcal{H}_j$ e para todas suas respectivas constantes, temos

$$\|U + U^*\|_{\mathcal{H}_j} \leq \|U\|_{\mathcal{H}_j} + \|U^*\|_{\mathcal{H}_j}.$$

Portanto, a aplicação $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_j}$ definida em (4.8) é, de fato, uma norma. \square

Observação 7. Suponha que $lL = n\pi$, para algum $n \in \mathbb{Z}$, então o vetor

$$U = (\sin(lx), 0, 0, 0, -\cos(lx), 0, 0, 0) \in \mathcal{H}_2$$

é não nulo, porém $\|U\|_{\mathcal{H}_2} = 0$. O que comprova a necessidade de usar a condição $lL \neq n\pi$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ quando consideramos o espaço \mathcal{H}_2 .

Observação 8. A partir deste momento, nos estudos realizados nesta e nas demais seções, será considerada a condição $lL \neq n\pi$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, para que, de fato, a aplicação $((\cdot, \cdot))_{\mathcal{H}_2}$ definida em (4.6) seja tratada como um produto interno no espaço \mathcal{H}_2 e, conseqüentemente, a aplicação $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_2}$ seja uma norma em \mathcal{H}_2 . Quando tratarmos do espaço \mathcal{H}_1 , tal condição não será necessária, e portanto, não considerada.

Lema 4.2. *Sejam $\varphi \in H_0^1$ e $\psi, w \in H_0^1$ (ou $\psi, w \in H_*^1$). Então, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 \leq C(\|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2). \quad (4.12)$$

Demonstração. Utilizando as desigualdades Triangular e de Poincaré,

$$\begin{aligned} k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 &\leq k(\|\varphi_x\|_2 + \|\psi\|_2 + l\|w\|_2)^2 \\ &\leq 4k\|\varphi_x\|_2^2 + 4k\|\psi\|_2^2 + 4kl^2\|w\|_2^2 \\ &\leq 4k\|\varphi_x\|_2^2 + 4kL^2\|\psi_x\|_2^2 + 4kl^2L^2\|w_x\|_2^2, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 &\leq 2k_0\|w_x\|_2^2 + 2k_0l^2\|\varphi\|_2^2 \\ &\leq 2k_0\|w_x\|_2^2 + 2k_0l^2L^2\|\varphi_x\|_2^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Somando (4.13) e (4.14),

$$\begin{aligned} k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 &\leq (4k + 2k_0l^2L^2)\|\varphi_x\|_2^2 + (4kL^2 + b)\|\psi_x\|_2^2 \\ &\quad + (4kl^2L^2 + 2k_0)\|w_x\|_2^2. \end{aligned}$$

Portanto, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 \leq C(\|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2).$$

□

Lema 4.3. *Sejam $\varphi, \psi, w \in H_0^1$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 \leq C(k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2), \quad (4.15)$$

Demonstração. Considere

$$h_1 := \varphi_x + \psi + lw, \quad h_2 := w_x - l\varphi,$$

assim, obtemos

$$\varphi_x + lw = h_1 - \psi, \quad (4.16)$$

$$w_x - l\varphi = h_2. \quad (4.17)$$

Considerando em (4.16) e (4.17), o produto interno definido em L^2 com $x\varphi$ e xw , respectivamente,

$$(\varphi_x + lw, x\varphi)_2 = (h_1 - \psi, x\varphi)_2, \quad (4.18)$$

$$(w_x - l\varphi, xw)_2 = (h_2, xw)_2. \quad (4.19)$$

Somando (4.18) e (4.19) e considerando sua parte real,

$$\|\varphi\|_2^2 + \|w\|_2^2 = -2\operatorname{Re}(h_1 - \psi, x\varphi)_2 - 2\operatorname{Re}(h_2, xw)_2,$$

o que implica, usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young com $\varepsilon = \frac{1}{2}$, em

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_2^2 + \|w\|_2^2 &\leq 2L\|h_1 - \psi\|_2\|\varphi\|_2 + 2L\|h_2\|_2\|w\|_2 \\ &\leq 2L^2\|h_1 - \psi\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\varphi\|_2^2 + 2L^2\|h_2\|_2^2 + \frac{1}{2}\|w\|_2^2. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\|\varphi\|_2^2 + \|w\|_2^2 \leq 4L^2(\|h_1 - \psi\|_2^2 + \|h_2\|_2^2). \quad (4.20)$$

Utilizando a Desigualdade Triangular em (4.16) e (4.17),

$$\|\varphi_x\|_2^2 = \|h_1 - \psi - lw\|_2^2 \leq 2\|h_1 - \psi\|_2^2 + 2l^2\|w\|_2^2, \quad (4.21)$$

$$\|w_x\|_2^2 = \|h_2 + l\varphi\|_2^2 \leq 2\|h_2\|_2^2 + 2l^2\|\varphi\|_2^2. \quad (4.22)$$

Somando (4.21) e (4.22) e usando a Desigualdade (4.20),

$$\begin{aligned} \|\varphi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 &\leq 2\|h_1 - \psi\|_2^2 + 2\|h_2\|_2^2 + 2l^2(\|\varphi\|_2^2 + \|w\|_2^2) \\ &\leq 2\|h_1 - \psi\|_2^2 + 2\|h_2\|_2^2 + 8L^2l^2\|h_1 - \psi\|_2^2 + 8L^2l^2\|h_2\|_2^2. \end{aligned}$$

Assim, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\varphi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 \leq C(\|h_1 - \psi\|_2^2 + \|h_2\|_2^2).$$

Utilizando as desigualdades Triangular e de Poincaré,

$$\|\varphi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 \leq 2C\|h_1\|_2^2 + 2L^2C\|\psi_x\|_2^2 + C\|h_2\|_2^2.$$

Substituindo as funções definidas em (4.16) e (4.17), existe $C > 0$, tal que

$$\|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 \leq C(k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2).$$

□

Lema 4.4. *Sejam $\varphi \in H_0^1$ e $\psi, w \in H_*^1$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 \leq C(k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2), \quad (4.23)$$

Demonstração. Mostraremos tal resultado usando argumentos de contradição. Com efeito, suponha que (4.23) não ocorra, assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\{(\varphi_n, \psi_n, w_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in H_0^1 \times H_*^1 \times H_*^1$ tal que

$$\|\varphi_{n,x}\|_2^2 + \|\psi_{n,x}\|_2^2 + \|w_{n,x}\|_2^2 > n(k\|\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n\|_2^2 + \|w_{n,x} - l\varphi_n\|_2^2 + b\|\psi_{n,x}\|_2^2). \quad (4.24)$$

Normalizando, sem perda de generalidade, a sequência $\{(\varphi_n, \psi_n, w_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, obtemos

$$\|\varphi_{n,x}\|_2^2 + \|\psi_{n,x}\|_2^2 + \|w_{n,x}\|_2^2 = 1. \quad (4.25)$$

Deste modo, substituindo (4.25) em (4.24), segue que

$$k\|\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n\|_2^2 + \|w_{n,x} - l\varphi_n\|_2^2 + b\|\psi_{n,x}\|_2^2 < \frac{1}{n}. \quad (4.26)$$

Observe que, da equação (4.25), temos que a sequência $\{(\varphi_n, \psi_n, w_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $H_0^1 \times H_*^1 \times H_*^1$. Das inclusões compactas $H_0^1 \hookrightarrow L^2$ e $H_*^1 \hookrightarrow L_*^2$, temos que existe $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ tal que $\{(\varphi_n, \psi_n, w_n)\}_{n \in \mathbb{N}_1}$ converge forte em $L^2 \times L_*^2 \times L_*^2$.

Da equação (4.26), temos que

$$\psi_{n,x} \rightarrow 0 \text{ forte em } L^2, \quad (4.27)$$

o que implica

$$\psi_n \rightarrow 0 \text{ forte em } H_*^1.$$

Agora, considere $\varphi \in L^2$ e $w \in L_*^2$ tais que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ e $w_n \rightarrow w$. Da equação (4.26), segue

que

$$\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n \rightarrow 0 \text{ forte em } L^2.$$

Porém, como

$$\varphi_{n,x} + \psi_n + l(w_n - w) + lw = \varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n,$$

então segue que

$$\varphi_{n,x} \rightarrow -lw \text{ forte em } L^2. \quad (4.28)$$

Deste modo, $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}_1}$ é de Cauchy em H_0^1 . Assim, existe $\phi \in H_0^1$ tal que $\varphi_n \rightarrow \phi$ em H_0^1 , conseqüentemente $\varphi_n \rightarrow \phi$ em L^2 . Pela unicidade do limite, $\varphi = \phi$, isto é, $\varphi \in H_0^1$.

Logo, de (4.28), deduzimos que

$$\varphi_x + lw = 0 \text{ quase sempre em } (0, L). \quad (4.29)$$

Analogamente, de (4.26), temos que

$$w_{n,x} - l\varphi_n \rightarrow 0 \text{ forte em } L^2.$$

Mas, como

$$w_{n,x} - l(\varphi_n - \varphi) - l\varphi = w_{n,x} - l\varphi_n,$$

segue que

$$w_{n,x} \rightarrow l\varphi \text{ forte em } L^2. \quad (4.30)$$

Então, $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}_1}$ é de Cauchy em H_*^1 e assim existe uma função $w^* \in H_*^1$ tal que $w_n \rightarrow w^*$ em H_*^1 , conseqüentemente, $w_n \rightarrow w^*$ em L^2 . Novamente usando a unicidade do limite, $w = w^*$, e portanto, $w \in H_*^1$. Logo, de (4.30),

$$w_x - l\varphi = 0 \text{ quase sempre em } (0, L). \quad (4.31)$$

Logo, das equações (4.29) e (4.31), analogamente à resolução do sistema (4.10), temos que $\varphi = w = 0$. Assim, de (4.27), (4.28) e (4.30) concluímos que $(\varphi_{n,x}, \psi_{n,x}, w_{n,x}) \rightarrow (0, 0, 0)$ o que contradiz (4.25).

Portanto, existe uma constante $C > 0$ satisfazendo a equação (4.23). □

Corolário 4.5. *São equivalentes as normas $|\cdot|_{\mathcal{H}_j}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_j}$, respectivamente definidas em (4.7) e (4.8), para $j = 1, 2$.*

Demonstração. Para o caso em que $j = 1$, segue diretamente dos lemas 4.2 e 4.3. Por outro lado, para o caso em que $j = 2$, o resultado segue dos lemas 4.2 e 4.4. □

Observação 9. Pelo Corolário 4.5 e sabendo que $(\mathcal{H}_j, |\cdot|_{\mathcal{H}_j})$ é um espaço de Hilbert, segue que $(\mathcal{H}_j, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_j})$ é um espaço de Hilbert, para $j = 1, 2$.

A seguir, enunciaremos e demonstraremos alguns resultados que serão usados no resultado de existência e unicidade do problema (4.1)-(4.4).

Lema 4.6. *Dada uma função $f \in L^2$, a equação*

$$-u_{xx} = f \text{ em } L^2, \quad (4.32)$$

possui uma única solução $u \in H^2 \cap H_0^1$.

Demonstração. Primeiramente, mostremos que existe uma única solução $u \in H_0^1$ satisfazendo a seguinte equação variacional

$$\int_0^L u_x \overline{v_x} dx = \int_0^L f \overline{v} dx, \quad (4.33)$$

para toda função $v \in H_0^1$.

Com efeito, seja a aplicação $a : H_0^1 \times H_0^1 \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$a(u, v) = \int_0^L u_x \overline{v_x} dx,$$

para todo $u, v \in H_0^1$. Note que a é uma forma sesquilinear. Além disso, contínua, pois utilizando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|a(u, v)| = |(u_x, v_x)_2| \leq \|u_x\|_2 \|v_x\|_2 = \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1},$$

para todo $u, v \in H_0^1$. E mais, a é coerciva, pois

$$|a(u, u)| = |(u_x, u_x)_2| = \|u_x\|_2^2 = \|u\|_{H_0^1}^2,$$

para todo $u \in H_0^1$.

Por outro lado, sendo $\xi : H_0^1 \rightarrow \mathbb{C}$ a aplicação dada por

$$\xi(v) = \int_0^L f \overline{v} dx,$$

para todo $v \in H_0^1$, segue que ξ é antilinear e limitada, pois usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Poincaré, existe $c > 0$ tal que

$$|\xi(v)| = |(f, v)_2| \leq \|f\|_2 \|v\|_2 \leq c \|f\|_2 \|v\|_{H_0^1},$$

para todo $v \in H_0^1$. Pelo Teorema de Lax-Milgram, existe um único $u \in H_0^1$ tal que

$$a(u, v) = \xi(v), \forall v \in H_0^1,$$

isto é, existe único $u \in H_0^1$ satisfazendo (4.33) para todo $v \in H_0^1$.

Em particular, a equação (4.33) é satisfeita para toda função $\phi \in C_0^1$, isto é,

$$\int_0^L u_x \overline{\phi_x} dx = \int_0^L f \overline{\phi} dx, \forall \phi \in C_0^1.$$

Como $f, u_x \in L^2$, então

$$-u_{xx} = f \in L^2.$$

Portanto, $u \in H^2 \cap H_0^1$ é a única solução de (4.32). \square

Lema 4.7. Dadas $g_1, g_2, g_3 \in L^2$, o sistema

$$\begin{cases} -k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0l(w_x - l\varphi) = g_1 & \text{em } L^2, \\ -b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) = g_2 & \text{em } L^2, \\ -k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = g_3 & \text{em } L^2, \end{cases} \quad (4.34)$$

possui uma única solução $(\varphi, \psi, w) \in (H^2 \cap H_0^1) \times (H^2 \cap H_0^1) \times (H^2 \cap H_0^1)$.

Demonstração. Primeiramente, utilizando o Teorema de Lax-Milgram, será mostrado que existe uma única solução $(\varphi, \psi, w) \in H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1$ satisfazendo o seguinte problema variacional

$$\begin{aligned} \int_0^L (g_1 \overline{\varphi^*} + g_2 \overline{\psi^*} + g_3 \overline{w^*}) dx &= k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\varphi_x^* + \psi^* + lw^*)} dx \\ &+ k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{(w_x^* - l\varphi^*)} dx + b \int_0^L \psi_x \overline{\psi_x^*} dx, \end{aligned}$$

para todo $(\varphi^*, \psi^*, w^*) \in H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1$.

Com efeito, considere a aplicação $a : (H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1) \times (H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\begin{aligned} a((\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*)) &= k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\varphi_x^* + \psi^* + lw^*)} dx \\ &+ k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{(w_x^* - l\varphi^*)} dx + b \int_0^L \psi_x \overline{\psi_x^*} dx. \end{aligned}$$

Note, que a é uma forma sesquilinear. Além disso, considerando em $H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1$ a norma

$$\|(\varphi, \psi, w)\|_{H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1}^2 = \|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2, \quad (4.35)$$

é possível mostrar que a é contínua e coerciva.

De fato, a coercividade de a segue diretamente da Desigualdade (4.15). Para verificar que a é contínua, mostremos que existe $c > 0$ tal que

$$|a((\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*))| \leq c \|(\varphi, \psi, w)\|_{H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1} \|(\varphi^*, \psi^*, w^*)\|_{H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1},$$

para todos $(\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*) \in H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1$.

De fato, dados $(\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*) \in H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1$, usando as desigualdades Triangular e de Cauchy-Schwarz,

$$|a((\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*))| \leq k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2\|\varphi_x^* + \psi^* + lw^*\|_2 + b\|\psi_x\|_2\|\psi_x^*\|_2 \\ + k_0\|w_x - l\varphi\|_2\|w_x^* - l\varphi^*\|_2.$$

Pela Desigualdade (4.12), segue que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$|a((\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*))| \leq c\|(\varphi, \psi, w)\|_{H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1}\|(\varphi^*, \psi^*, w^*)\|_{H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1}.$$

Portanto, a é uma forma sesquilinear contínua e coerciva. Por outro lado, defina também a aplicação $\lambda : H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1 \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\lambda(\varphi^*, \psi^*, w^*) = \int_0^L (g_1\overline{\varphi^*} + g_2\overline{\psi^*} + g_3\overline{w^*})dx.$$

É possível notar que λ é uma aplicação antilinear. Além disso, dado $(\varphi^*, \psi^*, w^*) \in H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1$ e usando as desigualdades Triangular e de Cauchy-Schwarz,

$$|\lambda(\varphi^*, \psi^*, w^*)|^2 \leq (|(g_1, \varphi^*)_2| + |(g_2, \psi^*)_2| + |(g_3, w^*)_2|)^2 \\ \leq (\|g_1\|_2\|\varphi^*\|_2 + \|g_2\|_2\|\psi^*\|_2 + \|g_3\|_2\|w^*\|_2)^2 \\ \leq 4L^2(\|g_1\|_2^2\|\varphi_x^*\|_2^2 + \|g_2\|_2^2\|\psi_x^*\|_2^2 + \|g_3\|_2^2\|w_x^*\|_2^2).$$

Deste modo, existe uma constante $C > 0$, tal que

$$|\lambda(\varphi^*, \psi^*, w^*)| \leq C\|(\varphi^*, \psi^*, w^*)\|_{H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1},$$

para todo $(\varphi^*, \psi^*, w^*) \in H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1$. Logo, λ é uma aplicação antilinear e limitada.

Portanto, pelo Teorema de Lax-Milgram, existe um único $(\varphi, \psi, w) \in H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1$ satisfazendo

$$\int_0^L (g_1\overline{\varphi^*} + g_2\overline{\psi^*} + g_3\overline{w^*})dx = k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{(\varphi_x^* + \psi^* + lw^*)}dx \\ + k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{(w_x^* - l\varphi^*)}dx + b \int_0^L \psi_x \overline{\psi_x^*} dx, \quad (4.36)$$

para todo $(\varphi^*, \psi^*, w^*) \in H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1$.

Agora, dada $\xi \in C_0^1$ arbitrária, considere $\varphi^* = \xi$ e $\psi^* = w^* = 0$. Assim, substituindo em (4.36),

$$k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{\xi_x} dx - k_0l \int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{\xi} dx = \int_0^L g_1 \overline{\xi} dx, \forall \xi \in C_0^1,$$

o que implica em

$$\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\xi}_x dx = -\frac{1}{k} \int_0^L (-g_1 - k_0 l(w_x - l\varphi)) \bar{\xi} dx, \forall \xi \in C_0^1.$$

Como $\varphi_x + \psi + lw, -g_1 - k_0 l(w_x - l\varphi) \in L^2$, segue que

$$\varphi_x + \psi + lw \in H^1.$$

Mas, sabendo que $\psi + lw \in H^1$, então $\varphi_x \in H^1$, o que implica $\varphi \in H^2$. Além disso,

$$k(\varphi_x + \psi + lw)_x = -g_1 - k_0 l(w_x - l\varphi),$$

isto é,

$$-k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) = g_1. \quad (4.37)$$

Por outro lado, dada $\phi \in C_0^1$ arbitrária, considere em particular $\varphi^* = w^* = 0$ e $\psi^* = \phi$. Deste modo, substituindo em (4.36),

$$\int_0^L g_2 \bar{\phi} dx = k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\phi} dx + b \int_0^L \psi_x \bar{\phi}_x dx, \forall \phi \in C_0^1,$$

o que implica em

$$\int_0^L \psi_x \bar{\phi}_x dx = -\frac{1}{b} \int_0^L (-g_2 + k(\varphi_x + \psi + lw)) \bar{\phi} dx, \forall \phi \in C_0^1. \quad (4.38)$$

Assim, como $\psi_x, -g_2 + k(\varphi_x + \psi + lw) \in L^2$, segue que $\psi_x \in H^1$, isto é, $\psi \in H^2$. Além disso,

$$b\psi_{xx} = -g_2 + k(\varphi_x + \psi + lw). \quad (4.39)$$

Logo,

$$-b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) = g_2. \quad (4.40)$$

De modo análogo, dada $\phi \in C_0^1$ arbitrária, considerando $\varphi^* = \psi^* = 0$, $w^* = \phi$ e substituindo em (4.36),

$$\int_0^L g_3 \bar{\phi} dx = kl \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\phi} dx + k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) \bar{\phi}_x dx,$$

o que implica em

$$\int_0^L (w_x - l\varphi) \bar{\phi}_x dx = -\frac{1}{k_0} \int_0^L (-g_3 + kl(\varphi_x + \psi + lw)) \bar{\phi} dx, \forall \phi \in C_0^1. \quad (4.41)$$

Tendo em vista que $w_x - l\varphi, -g_3 + kl(\varphi_x + \psi + lw) \in L^2$, segue que

$$w_x - l\varphi \in H^1.$$

Porém, como $\varphi \in H^1$, então $w_x \in H^1$, isto é, $w \in H^2$. Além disso,

$$k_0(w_x - l\varphi)_x = -g_3 + kl(\varphi_x + \psi + lw). \quad (4.42)$$

Logo,

$$-k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = g_3. \quad (4.43)$$

Portanto, segue das igualdades (4.37), (4.40) e (4.43) que existe uma única solução

$$(\varphi, \psi, w) \in (H^2 \cap H_0^1) \times (H^2 \cap H_0^1) \times (H^2 \cap H_0^1),$$

satisfazendo o sistema (4.34). □

Lema 4.8. Dadas $g_1 \in L^2$ e $g_2, g_3 \in L_*^2$, o sistema

$$\begin{cases} -k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0l(w_x - l\varphi) = g_1 & \text{em } L^2, \\ -b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) = g_2 & \text{em } L_*^2, \\ -k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = g_3 & \text{em } L_*^2, \end{cases} \quad (4.44)$$

possui uma única solução $(\varphi, \psi, w) \in (H^2 \cap H_0^1) \times (H^2 \cap H_*^1) \times (H^2 \cap H_*^1)$, com $w_x, \psi_x \in H_0^1$.

Demonstração. Analogamente à demonstração do Lema 4.7, é possível mostrar, utilizando o Teorema de Lax-Milgram, que existe uma única solução $(\varphi, \psi, w) \in H_0^1 \times H_*^1 \times H_*^1$ satisfazendo o seguinte problema variacional

$$\begin{aligned} \int_0^L (g_1 \overline{\varphi^*} + g_2 \overline{\psi^*} + g_3 \overline{w^*}) dx &= k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\varphi_x^* + \psi^* + lw^*)} dx \\ &+ k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{(w_x^* - l\varphi^*)} dx + b \int_0^L \psi_x \overline{\psi_x^*} dx, \end{aligned} \quad (4.45)$$

para todo $(\varphi^*, \psi^*, w^*) \in H_0^1 \times H_*^1 \times H_*^1$.

Ainda de forma análoga à demonstração do Lema 4.7, existe $\varphi \in H^2 \cap H_0^1$, satisfazendo a igualdade

$$-k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0l(w_x - l\varphi) = g_1. \quad (4.46)$$

Por outro lado, dada $\phi \in H^1$ arbitrária, considere $\psi^* = \phi - \frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx \in H_*^1$ e $\varphi^* = w^* = 0$. Deste modo, substituindo em (4.45),

$$\int_0^L g_2 \left(\overline{\phi - \frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx} \right) dx = k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \left(\overline{\phi - \frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx} \right) dx \\ + b \int_0^L \psi_x \left(\overline{\phi - \frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx} \right)_x dx.$$

Como $\left(\overline{-\frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx} \right)_x = 0$, então

$$\int_0^L \psi_x \overline{\phi_x} dx = -\frac{1}{b} \int_0^L (-g_2 + k(\varphi_x + \psi + lw)) \overline{\phi} dx \\ - \frac{1}{b} \int_0^L (-g_2 + k(\varphi_x + \psi + lw)) \left(\overline{-\frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx} \right) dx.$$

Sabendo que $g_2 \in L_*^2$, $\psi, w \in H_*^1$, $\varphi \in H_0^1$ e usando integração por partes, segue que

$$\int_0^L \psi_x \overline{\phi_x} dx = -\frac{1}{b} \int_0^L (-g_2 + k(\varphi_x + \psi + lw)) \overline{\phi} dx, \forall \phi \in H^1. \quad (4.47)$$

Observe que a igualdade (4.47) é válida, em particular, para toda $\phi \in C_0^1$. Assim, como $\psi_x, -g_2 + k(\varphi_x + \psi + lw) \in L^2$, segue que $\psi_x \in H^1$, isto é, $\psi \in H^2$. Além disso,

$$b\psi_{xx} = -g_2 + k(\varphi_x + \psi + lw). \quad (4.48)$$

Na igualdade (4.47), considerando em particular $\phi \in C[0, L]$ tal que $\phi(L) = 1$ e $\phi(0) = 0$, utilizando integração por partes, segue que $\psi_x(L) = 0$. Porém, integrando a igualdade (4.48) no intervalo $(0, L)$ e utilizando o fato de $g_2 \in L_*^2$, $\psi, w \in H_*^1$ e $\varphi \in H_0^1$, segue que $\psi_x(L) = \psi_x(0)$. Logo, $\psi_x \in H_0^1$. Além disso,

$$-b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) = g_2. \quad (4.49)$$

De modo análogo, seja $\phi \in H^1$ arbitrária, considerando $w^* = \phi - \frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx \in H_*^1$, $\varphi^* = \psi^* = 0$ e substituindo em (4.45), obtemos

$$\int_0^L g_3 \left(\overline{\phi - \frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx} \right) dx = kl \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \left(\overline{\phi - \frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx} \right) dx \\ + k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) \left(\overline{\phi - \frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx} \right)_x dx.$$

Como $\left(-\frac{1}{L}\int_0^L \phi(x)dx\right)_x = 0$, então

$$\begin{aligned} \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{\phi}_x dx &= -\frac{1}{k_0} \int_0^L (-g_3 + kl(\varphi_x + \psi + lw)) \overline{\phi} dx \\ &\quad -\frac{1}{k_0} \int_0^L (-g_3 + kl(\varphi_x + \psi + lw)) \left(-\frac{1}{L}\int_0^L \phi(x)dx\right) dx. \end{aligned}$$

Usando o fato de $-g_3 \in L_*^2$, $\psi, w \in H_*^1$ e usando integração por partes,

$$\int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{\phi}_x dx = -\frac{1}{k_0} \int_0^L (-g_3 + kl(\varphi_x + \psi + lw)) \overline{\phi} dx, \quad \forall \phi \in H^1. \quad (4.50)$$

Tendo em vista que $w_x - l\varphi, -g_3 + kl(\varphi_x + \psi + lw) \in L^2$ e a igualdade (4.50) é satisfeita, em particular, para toda $\phi \in C_0^1$, segue que

$$w_x - l\varphi \in H^1.$$

Porém, como $\varphi \in H^1$, então $w_x \in H^1$, isto é, $w \in H^2$. Além disso,

$$k_0(w_x - l\varphi)_x = -g_3 + kl(\varphi_x + \psi + lw). \quad (4.51)$$

Considerando em particular, na igualdade (4.50), $\phi \in C[0, L]$ tal que $\phi(L) = 1$ e $\phi(0) = 0$, integrando (4.50) por partes e usando o fato de que $\varphi \in H_0^1$, segue que $w_x(L) = 0$. Porém, integrando a igualdade (4.51) no intervalo de 0 a L e utilizando o fato de $g_3 \in L_*^2$, $\psi, w \in H_*^1$ e $\varphi \in H_0^1$, segue que $w_x(L) = w_x(0)$. Portanto, $w_x \in H_0^1$. E mais,

$$-k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = g_3. \quad (4.52)$$

Portanto, das igualdades (4.46), (4.48) e (4.52), existe uma única solução

$$(\varphi, \psi, w) \in (H^2 \cap H_0^1) \times (H^2 \cap H_*^1)^2,$$

com $\psi_x, w_x \in H_0^1$, satisfazendo o sistema (4.44).

□

4.2 EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Com as notações e os resultados da Seção 4.1, vamos mostrar a existência e unicidade da solução do problema (4.1)-(4.4), utilizando a teoria de semigrupos de operadores lineares. Para isto, vamos reescrever o sistema (4.1)-(4.4) na forma de um problema de Cauchy abstrato e apresentaremos alguns resultados que serão utilizados no principal resultado desta seção, o qual garante

a existência e unicidade da solução do problema de Cauchy abstrato e, conseqüentemente, do sistema (4.1)-(4.4).

De fato, considerando os espaços de Hilbert

$$\mathcal{H}_1 = H_0^1 \times L^2 \times H_0^1 \times L^2 \times H_0^1 \times L^2 \times L^2 \times L^2,$$

$$\mathcal{H}_2 = H_0^1 \times L^2 \times H_*^1 \times L_*^2 \times H_*^1 \times L_*^2 \times L^2 \times L^2,$$

e, além disso, denotando $\Phi = \varphi_t, \Psi = \psi_t, W = w_t$, o vetor $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \theta, \vartheta)$ e $U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1, \theta_0, \vartheta_0)$, reescrevemos o sistema (4.1)-(4.4) como um problema de Cauchy abstrato, dado por

$$\begin{cases} U_t = A_j U, & t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (4.53)$$

para todo $U \in D(A_j)$, onde

$$D(A_1) = \{U \in \mathcal{H}_1 : \varphi, \psi, w, \theta, \vartheta \in H^2 \cap H_0^1; \Phi, \Psi, W \in H_0^1\}, \quad j = 1, \quad (4.54)$$

$$D(A_2) = \{U \in \mathcal{H}_2 : \varphi, \theta, \vartheta \in H^2; \Phi, \psi_x, w_x, \theta, \vartheta \in H_0^1; \Psi, W \in H_*^1\}, \quad j = 2, \quad (4.55)$$

e o operador $A_j : D(A_j) \subset \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_j$ é dado por

$$A_j U = \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw)_x + \frac{k_0 l}{\rho_1}(w_x - l\varphi) - \frac{l\gamma}{\rho_1}\theta \\ \Psi \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + lw) - \frac{\gamma}{\rho_2}\vartheta_x \\ W \\ \frac{k_0}{\rho_1}(w_x - l\varphi)_x - \frac{kl}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw) - \frac{\gamma}{\rho_1}\theta_x \\ k_1\theta_{xx} - m(W_x - l\Phi) \\ k_1\vartheta_{xx} - m\Psi_x \end{pmatrix}, \quad (4.56)$$

para todo $U \in D(A_j), j = 1, 2$.

Portanto, estudar o problema (4.1)-(4.4) é equivalente a realizar um estudo do problema de valor inicial (4.53), por meio da teoria de semigrupos de operadores lineares.

Lema 4.9. *Sob as notações anteriores, o operador A_j definido em (4.56) é dissipativo em \mathcal{H}_j , para $j = 1, 2$.*

Demonstração. Para mostrar que o operador $A_j : D(A_j) \subset \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_j$ é dissipativo, basta verificar que $\text{Re}((A_j U, U))_{\mathcal{H}_j} \leq 0$. Com efeito, dado $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \theta, \vartheta) \in D(A_j)$, segue de (4.6)

e (4.56) que

$$\begin{aligned}
((A_j U, U))_{\mathcal{H}_j} &= (k(\varphi_x + \psi + lw)_x + k_0 l(w_x - l\varphi) - l\gamma\theta, \Phi)_2 + b(\Psi_x, \psi_x)_2 \\
&+ (b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + lw) - \gamma\vartheta_x, \Psi)_2 + k(\Phi_x + \Psi + lW, \varphi_x + \psi + lw)_2 \\
&+ (k_0(w_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x + \psi + lw) - \gamma\theta_x, W)_2 + k_0(W_x - l\Phi, w_x - l\varphi)_2 \\
&+ \frac{k_1\gamma}{m}(\theta_{xx}, \theta)_2 - \gamma(W_x - l\Phi, \theta)_2 + \frac{k_1\gamma}{m}(\vartheta_{xx}, \vartheta)_2 - \gamma(\Psi_x, \vartheta)_2.
\end{aligned}$$

Integrando por partes e utilizando as condições de fronteira,

$$\begin{aligned}
((A_j U, U))_{\mathcal{H}_j} &= -k(\varphi_x + \psi + lw, \Phi_x)_2 - k_0(w_x - l\varphi, -l\Phi)_2 + \gamma(\theta, -l\Phi)_2 \\
&- b(\psi_x, \Psi_x)_2 - k(\varphi_x + \psi + lw, \Psi)_2 + \gamma(\vartheta, \Psi_x)_2 + b(\Psi_x, \psi_x)_2 \\
&- k_0(w_x - l\varphi, W_x)_2 - k(\varphi_x + \psi + lw, lW)_2 + \gamma(\theta, W_x)_2 \\
&+ k(\Phi_x + \Psi + lW, \varphi_x + \psi + lw)_2 + k_0(W_x - l\Phi, w_x - l\varphi)_2 \\
&- \frac{k_1\gamma}{m}(\theta_x, \theta_x)_2 - \gamma(W_x - l\Phi, \theta)_2 - \frac{k_1\gamma}{m}(\vartheta_x, \vartheta_x)_2 - \gamma(\Psi_x, \vartheta)_2.
\end{aligned}$$

Assim, considerando a parte real de $((A_j U, U))_{\mathcal{H}_j}$ e notando que $\operatorname{Re}(z - \bar{z}) = 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$, segue que

$$\operatorname{Re}((A_j U, U))_{\mathcal{H}_j} = -\frac{k_1\gamma}{m}(\|\theta_x\|_2^2 + \|\vartheta_x\|_2^2) \leq 0, \quad \forall U \in D(A_j). \quad (4.57)$$

Como as constantes k_1, γ e m são positivas, o operador A_j é dissipativo, para $j = 1, 2$. \square

Lema 4.10. *Sob as notações anteriores,*

$$0 \in \rho(A_j), \text{ para } j = 1, 2,$$

onde $\rho(A_j)$ designa o conjunto resolvente de A_j .

Demonstração. Basta mostrarmos que o operador linear $-A_j : D(A_j) \subset \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_j$ é invertível e, além disso, $(-A_j)^{-1}$ é limitado.

Com efeito, primeiramente vejamos que o operador $(-A_j)^{-1}$ existe, ou seja, dada uma função $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8) \in \mathcal{H}_j$, existe um único $U \in D(A_j)$ tal que $-A_j U = F$.

Reescrevendo a expressão $-A_j U = F$ em termos de suas componentes, com $F \in \mathcal{H}_j$,

obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} -\Phi &= f_1, & (4.58) \\ -\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw)_x - \frac{k_0 l}{\rho_1}(w_x - l\varphi) + \frac{l\gamma}{\rho_1}\theta &= f_2, & (4.59) \end{aligned}$$

$$-\Psi = f_3, \quad (4.60)$$

$$-\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + lw) + \frac{\gamma}{\rho_2}\vartheta_x = f_4, \quad (4.61)$$

$$-W = f_5, \quad (4.62)$$

$$-\frac{k_0}{\rho_1}(w_x - l\varphi)_x + \frac{kl}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw) + \frac{\gamma}{\rho_1}\theta_x = f_6, \quad (4.63)$$

$$-k_1\theta_{xx} + m(W_x - l\Phi) = f_7, \quad (4.64)$$

$$-k_1\vartheta_{xx} + m\Psi_x = f_8. \quad (4.65)$$

Primeiramente, para o caso em que $j = 1$, de (4.58), (4.60) e (4.62), é possível concluir que

$$\Phi = -f_1 \in H_0^1,$$

$$\Psi = -f_3 \in H_0^1,$$

$$W = -f_5 \in H_0^1.$$

Além disso, por (4.64) e sabendo que $W_x - l\Phi \in L^2$, segue que

$$-\theta_{xx} = f_9 \in L^2, \quad (4.66)$$

com $f_9 = \frac{1}{k_1}(f_7 - m(W_x - l\Phi))$. Portanto, pelo Lema 4.6 existe uma única solução $\theta \in H^2 \cap H_0^1$ satisfazendo (4.66).

Do mesmo modo, de (4.65) e sabendo que $\Psi_x \in L^2$, segue que

$$-\vartheta_{xx} = f_{10} \in L^2, \quad (4.67)$$

com $f_{10} = \frac{1}{k_1}(f_8 - m\Psi_x)$. Portanto, pelo Lema 4.6 existe uma única solução $\vartheta \in H^2 \cap H_0^1$ satisfazendo (4.67). Deste modo, do sistema (4.58)-(4.65), obtemos

$$\begin{aligned} -k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) &= \rho_1 f_2 - l\gamma\theta, \\ -b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) &= \rho_2 f_4 - \gamma\vartheta_x, \\ -k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) &= \rho_1 f_6 - \gamma\theta_x. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Considerando as funções g_1, g_2, g_3 dadas no Lema 4.7 da seguinte maneira

$$\begin{aligned} g_1 &= \rho_1 f_2 - l\gamma\theta \in L^2, \\ g_2 &= \rho_2 f_4 - \gamma\vartheta_x \in L^2, \\ g_3 &= \rho_1 f_6 - \gamma\theta_x \in L^2, \end{aligned} \tag{4.69}$$

segue que o sistema (4.68) possui uma única solução $(\varphi, \psi, w) \in (H^2 \cap H_0^1)^3$. Portanto, existe um único $U \in D(A_1)$ tal que $-A_1 U = F$.

Por outro lado, para o caso em que $j = 2$, de (4.58), (4.60) e (4.62), é possível concluir que

$$\begin{aligned} \Phi &= -f_1 \in H_0^1, \\ \Psi &= -f_3 \in H_*^1, \\ W &= -f_5 \in H_*^1. \end{aligned}$$

Além disso, de (4.64) e sabendo que $W_x - l\Phi \in L^2$, segue que

$$\theta_{xx} = -f_{11} \in L^2, \tag{4.70}$$

com $f_{11} = \frac{1}{k}(f_7 - m(W_x - l\Phi))$. Portanto, pelo Lema 4.6 existe uma única solução $\theta \in H^2 \cap H_0^1$ satisfazendo (4.70).

De modo análogo, de (4.65) e sabendo que $\Psi_x \in L^2$, segue que

$$-\vartheta_{xx} = f_{12} \in L^2, \tag{4.71}$$

com $f_{12} = \frac{1}{k_1}(f_8 - m\Psi_x)$. Portanto, pelo Lema 4.6 existe uma única solução $\vartheta \in H^2 \cap H_0^1$ satisfazendo (4.71). Deste modo, do sistema (4.58)-(4.65), obtemos

$$\begin{aligned} -k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0l(w_x - l\varphi) &= \rho_1 f_2 - l\gamma\theta, \\ -b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) &= \rho_2 f_4 - \gamma\vartheta_x, \\ -k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) &= \rho_1 f_6 - \gamma\theta_x. \end{aligned} \tag{4.72}$$

Considerando $g_1 = \rho_1 f_2 - l\gamma\theta \in L^2$, $g_2 = \rho_2 f_4 - \gamma\vartheta_x \in L_*^2$ e $g_3 = \rho_1 f_6 - \gamma\theta_x \in L_*^2$ no Lema 4.8, segue que o sistema (4.72) possui uma única solução (φ, ψ, w) satisfazendo

$$\varphi \in H^2 \cap H_0^1 \quad \psi, w \in H^2 \cap H_*^1 \quad \psi_x, w_x \in H_0^1.$$

Portanto, existe um único $U \in D(A_2)$ tal que $-A_2 U = F$.

Deste modo, para verificar que $0 \in \rho(A_j)$, resta mostrar que o operador $(-A_j)^{-1}$ é limitado para $j = 1, 2$, isto é, que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|(-A_j)^{-1}F\|_{\mathcal{H}_j} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_j},$$

para toda $F \in \mathcal{H}_j$.

Com efeito, dada $F \in \mathcal{H}_j$ arbitrária, considere $U \in D(A_j)$ a única solução de $-A_j U = F$. Assim, $(-A_j)^{-1} F = U$. Portanto, basta mostrar que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j} \leq C \|F\|_{\mathcal{H}_j}.$$

Seja $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8) \in \mathcal{H}_j$ e $U \in D(A_j)$ satisfazendo o sistema (4.58)-(4.65), segue de (4.57) que

$$\operatorname{Re}((A_j U, U))_{\mathcal{H}_j} = -\frac{\gamma k_1}{m} (\|\theta_x\|_2^2 + \|\vartheta_x\|_2^2).$$

Utilizando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{m} (\|\theta_x\|_2^2 + \|\vartheta_x\|_2^2) &= -\frac{1}{k_1} \operatorname{Re}((A_j U, U))_{\mathcal{H}_j} \\ &\leq \frac{1}{k_1} \|A_j U\|_{\mathcal{H}_j} \|U\|_{\mathcal{H}_j}, \end{aligned}$$

sendo $-A_j U = F$,

$$\frac{\gamma}{m} (\|\theta_x\|_2^2 + \|\vartheta_x\|_2^2) \leq \frac{1}{k_1} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j}, \quad (4.73)$$

e usando a Desigualdade de Poincaré, existe $C > 0$ tal que

$$\frac{\gamma}{m} (\|\theta\|_2^2 + \|\vartheta\|_2^2) \leq C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j}. \quad (4.74)$$

Considerando em (4.59), (4.61) e (4.63), respectivamente, o produto interno com φ , ψ e w em L^2 ,

$$\begin{aligned} -k((\varphi_x + \psi + lw)_x, \varphi)_2 - k_0 l(w_x - l\varphi, \varphi)_2 &= (\rho_1 f_2 - l\gamma\theta, \varphi)_2, \\ -b(\psi_{xx}, \psi)_2 + k(\varphi_x + \psi + lw, \psi)_2 &= (\rho_2 f_4 - \gamma\vartheta_x, \psi)_2, \\ -k_0((w_x - l\varphi)_x, w)_2 + kl(\varphi_x + \psi + lw, w)_2 &= (\rho_1 f_6 - \gamma\theta_x, w)_2, \end{aligned}$$

e usando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned} k(\varphi_x + \psi + lw, \varphi_x)_2 + k_0(w_x - l\varphi, -l\varphi)_2 &= (\rho_1 f_2, \varphi)_2 + \gamma(\theta, -l\varphi)_2, \\ b(\psi_x, \psi_x)_2 + k(\varphi_x + \psi + lw, \psi)_2 &= (\rho_2 f_4, \psi)_2 + \gamma(\vartheta, \psi_x)_2, \\ k_0(w_x - l\varphi, w_x)_2 + k(\varphi_x + \psi + lw, lw)_2 &= (\rho_1 f_6, w)_2 + \gamma(\theta, w_x)_2. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Logo, somando as equações em (4.75),

$$\begin{aligned} k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 &= (\rho_1 f_2, \varphi)_2 + \gamma(\theta, w_x - l\varphi)_2 \\ &\quad + (\rho_2 f_4, \psi)_2 + (\rho_1 f_6, w)_2 + \gamma(\vartheta, \psi_x)_2. \end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Triangular,

$$\begin{aligned}
k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 &\leq \rho_1\|f_2\|_2\|\varphi\|_2 + \rho_2\|f_4\|_2\|\psi\|_2 \\
&\quad + \rho_1\|f_6\|_2\|w\|_2 + \gamma\|\theta\|_2\|w_x - l\varphi\|_2 \\
&\quad + \gamma\|\vartheta\|_2\|\psi_x\|_2.
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Agora, usando as desigualdades de Poincaré e de Young com $\varepsilon = \frac{k_0}{2}$ e $\varepsilon = \frac{b}{2}$, obtemos

$$\begin{aligned}
k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 &\leq L\rho_1\|f_2\|_2\|\varphi_x\|_2 + L\rho_2\|f_4\|_2\|\psi_x\|_2 \\
&\quad + L\rho_1\|f_6\|_2\|w_x\|_2 + \frac{1}{2k_0}\gamma^2\|\theta\|_2^2 \\
&\quad + \frac{k_0}{2}\|w_x - l\varphi\|_2^2 + \frac{1}{2b}\gamma^2\|\vartheta\|_2^2 + \frac{b}{2}\|\psi_x\|_2^2
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade (4.74), existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 &\leq 2L\rho_1|F|_{\mathcal{H}_j}|U|_{\mathcal{H}_j} + L\rho_2|F|_{\mathcal{H}_j}|U|_{\mathcal{H}_j} \\
&\quad + C\|F\|_{\mathcal{H}_j}\|U\|_{\mathcal{H}_j}
\end{aligned}$$

Portanto, usando a equivalência das normas $|\cdot|_{\mathcal{H}_j}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_j}$ e a Desigualdade de Young, existe $C > 0$ tal que

$$k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_j}\|U\|_{\mathcal{H}_j}. \tag{4.77}$$

Por outro lado, de (4.58), (4.60) e (4.62) e utilizando a Desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned}
\rho_1\|\Phi\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + \rho_1\|W\|_2^2 &\leq \rho_1\|f_1\|_2^2 + \rho_2\|f_3\|_2^2 + \rho_1\|f_5\|_2^2 \\
&\leq L^2(\rho_1\|f_{1,x}\|_2^2 + \rho_2\|f_{3,x}\|_2^2 + \rho_1\|f_{5,x}\|_2^2) \\
&\leq L^2 \max\{\rho_1, \rho_2\}|F|_{\mathcal{H}_j}^2,
\end{aligned}$$

assim, utilizando novamente a equivalência das normas $|\cdot|_{\mathcal{H}_j}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_j}$, existe $C > 0$ tal que

$$\rho_1\|\Phi\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + \rho_1\|W\|_2^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \tag{4.78}$$

Portanto, somando (4.74), (4.77) e (4.78), chegamos a

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}_j}\|U\|_{\mathcal{H}_j} + C\|F\|_{\mathcal{H}_j}\|U\|_{\mathcal{H}_j},$$

e utilizando a Desigualdade de Young com $\varepsilon = \frac{1}{4}$, existe $C > 0$ tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_j}.$$

Como $F \in \mathcal{H}_j$ é tomada arbitrariamente, segue que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|(-A_j)^{-1}F\|_{\mathcal{H}_j} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_j},$$

para toda $F \in \mathcal{H}_j$. Portanto, existe o operador $(-A_j)^{-1}$ e, além disso, $(-A_j)^{-1}$ é limitado, para $j = 1, 2$. Deste modo, conclui-se que $0 \in \rho(A_j)$, para $j = 1, 2$. \square

Lema 4.11. *Sob as notações anteriores, o domínio $D(A_j)$ do operador A_j é denso em \mathcal{H}_j , para $j = 1, 2$.*

Demonstração. Como o operador $(-A_j)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_j)$, tome $\lambda_0 > 0$ tal que

$$0 < \lambda_0 < \frac{1}{\|(-A_j)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_j)}}. \quad (4.79)$$

Deste modo, $\lambda_0(-A_j)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_j)$. Portanto, considerando $B_1 = I$ e $B_2 = \lambda_0(-A_j)^{-1}$ na Proposição 2.7, segue que

$$\|B_2\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_j)} < \frac{1}{\|B_1\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_j)}}.$$

Assim, decorre da Proposição 2.7 que $I + \lambda_0(-A_j)^{-1}$ é linear, limitado e invertível. Porém, observe que

$$\lambda_0 I - A_j = (-A_j)(\lambda_0(-A_j)^{-1} + I). \quad (4.80)$$

Como $(-A_j)$ e $I + \lambda_0(-A_j)^{-1}$ são invertíveis, segue de (4.80) que $\lambda_0 I - A_j \in \mathcal{L}(X)$ é linear, limitado e invertível. Portanto, $Im(\lambda_0 I - A_j) = \mathcal{H}_j$ para $\lambda_0 > 0$ tomado em (4.79).

Do Teorema 2.8, segue que $Im(\lambda I - A_j) = \mathcal{H}_j$ para todo $\lambda > 0$. Em particular, para $\lambda = 1$, isto é, $Im(I - A_j) = \mathcal{H}_j$. Sendo \mathcal{H}_j um espaço de Hilbert, segue do Teorema 2.8 que $\overline{D(A_j)} = \mathcal{H}_j$, com $j = 1, 2$. \square

Teorema 4.12. *O operador $A_j : D(A_j) \subset \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_j$ definido em (4.56) é um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $e^{A_j t}$ sobre \mathcal{H}_j , para $j = 1, 2$.*

Demonstração. De acordo com o Corolário 2.25 e com os lemas 4.9, 4.10 e 4.11, segue que o operador A_j definido em (4.56) é um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $e^{A_j t}$ sobre \mathcal{H}_j , para $j = 1, 2$. \square

Teorema 4.13. *Para cada $U_0 \in D(A_j)$, o problema (4.53) possui uma única solução*

$$U \in C([0, \infty), D(A_j)) \cap C^1([0, \infty), \mathcal{H}_j),$$

dada por $U(t) = e^{A_j t} U_0$, para $j = 1, 2$.

Além disso, se $U_0 \in D(A^n)$, $n \geq 2$, então existe uma única função U na classe

$$U \in \bigcap_{j=0}^n C^{n-j}([0, +\infty), D(A^j)).$$

Demonstração. Sendo $A_j : D(A_j) \subset \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_j$ o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $e^{A_j t}$ sobre \mathcal{H}_j , segue do Teorema 2.26 que para cada $U_0 \in D(A_j)$, o sistema (4.53) possui uma única solução

$$U \in C([0, \infty), D(A_j)) \cap C^1([0, \infty), \mathcal{H}_j),$$

a qual é dada por $U(t) = e^{A_j t} U_0$, para $j = 1, 2$.

E mais, se $U_0 \in D(A_j^n)$, $n \geq 2$, então segue do Teorema (2.26) que existe uma única função U na classe

$$U \in \bigcap_{r=0}^n C^{n-r}([0, +\infty), D(A_j^r)).$$

□

4.3 ESTABILIDADE

Nesta seção, estudaremos o comportamento da solução $U(t) = e^{A_j t} U_0$, para $j = 1, 2$, do problema de Cauchy abstrato (4.53) e, conseqüentemente, para a solução do sistema (4.1)-(4.4). Para isso, consideremos a seguinte relação

$$\chi_0 = k - k_0. \quad (4.81)$$

Segue de (1.8), que do ponto de vista físico, $\chi_0 = 0$ se, e somente se, a seguinte relação é válida

$$\chi = \frac{b}{\rho_2} - \frac{k}{\rho_1} = 0. \quad (4.82)$$

Como citado anteriormente, veremos que tal relação afeta a estabilidade do sistema (4.1)-(4.4). Vejamos:

Teorema 4.14. *Suponha que $\rho_1, \rho_2, b, k, k_0, k_1, \gamma, l > 0$ e $\chi_0 = 0$. Então, existem constantes $C, \eta > 0$, independentes do dado inicial $U_0 \in \mathcal{H}_j$, tais que*

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_j} \leq C e^{-\eta t} \|U_0\|_{\mathcal{H}_j}, \quad t > 0, \quad j = 1, 2, \quad (4.83)$$

ou seja, o semigrupo $e^{A_j t}$ é exponencialmente estável. Em outras palavras, o sistema (4.1)-(4.4) é exponencialmente estável quando $\chi_0 = 0$.

Para demonstrarmos o Teorema 4.14, é suficiente mostrar que as duas condições do Teorema de Prüss (ver Teorema 2.27) são verificadas, isto é,

- (i) $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A_j)$;
- (ii) $\limsup_{\beta \rightarrow \infty} \|(i\beta Id - A_j)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_j)} < \infty$.

Para concluirmos estas duas condições, enunciaremos e demonstraremos alguns resultados nas seguintes seções deste capítulo e, por fim, na Subseção 4.3.2 faremos a conclusão da demonstração do Teorema 4.14. Deste modo, mostraremos que o sistema (4.1)-(4.4) é exponencialmente estável, desde que as constantes satisfaçam (4.81), isto é, $\chi_0 = 0$.

No caso em que $\chi_0 \neq 0$, um segundo resultado acerca da solução do problema (4.53), e consequentemente, do sistema (4.1)-(4.4) é obtido. Mais precisamente, obteremos que tal solução é polinomialmente estável para dados iniciais regulares. Mais precisamente, temos:

Teorema 4.15. *Suponha que $\rho_1, \rho_2, b, k, k_0, k_1, \gamma, l > 0$ e $\chi_0 \neq 0$. Então, existe uma constante $C > 0$, independente do dado inicial $U_0 \in D(A_j)$, tal que*

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_j} \leq \frac{C}{t^{1/2}} \|U_0\|_{D(A_j)}, \quad t \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2. \quad (4.84)$$

Em outras palavras, o sistema (4.1)-(4.4) é polinomialmente estável.

A demonstração do Teorema 4.15 será feita via o Teorema de Borichev-Tomilov (ver Teorema 2.29), utilizando alguns resultados que serão descritos na sequência deste capítulo e concluído nas próximas seções. Deste modo, será mostrado que a solução do sistema (4.1)-(4.4) possui uma estabilidade polinomial no caso em que a relação de velocidades de onda é não nula.

No que segue vamos mostrar alguns resultados técnicos que serão úteis para concluirmos a demonstração dos teoremas 4.14 e 4.15. Mais especificamente, vamos mostrar a veracidade das hipóteses do Teorema de Prüss e do Teorema de Borichev e Tomilov, para obtermos as estabilidades exponencial e polinomial, respectivamente, da solução do sistema (4.1)-(4.4).

4.3.1 Lemas Técnicos

Lema 4.16. *O operador inclusão $i : (D(A_j), \|\cdot\|_{D(A_j)}) \rightarrow (\mathcal{H}_j, |\cdot|_{\mathcal{H}_j})$ é compacto.*

Demonstração. Primeiramente, consideremos, a norma do gráfico

$$\|U\|_{D(A_j)} = |U|_{\mathcal{H}_j} + |A_j U|_{\mathcal{H}_j}, \quad U \in D(A_j). \quad (4.85)$$

Sendo assim, seja $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A_j)$, $U_n = (\varphi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n, w^n, W^n, \theta^n, \vartheta^n)$ uma sequência limitada em $D(A_j)$, isto é, tal que existe uma constante $M > 0$ satisfazendo

$$\|U_n\|_{D(A_j)} \leq M, \quad (4.86)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas, de (4.85),

$$\begin{aligned}
\|U_n\|_{D(A_j)} &= |U_n|_{\mathcal{H}_j} + |A_j U_n|_{\mathcal{H}_j} \\
&= \|\varphi_x^n\|_2^2 + \|\Phi^n\|_2^2 + \|\psi_x^n\|_2^2 + \|\Psi^n\|_2^2 + \|w_x^n\|_2^2 + \|W^n\|_2^2 + \|\theta^n\|_2^2 + \|\vartheta^n\|_2^2 \\
&\quad + \|\Phi_x^n\|_2^2 + \frac{1}{\rho_1} \|k(\varphi_x^n + \psi^n + lw^n)_x + k_0l(w_x^n - l\varphi^n) - l\gamma\theta^n\|_2^2 \\
&\quad + \|\Psi_x^n\|_2^2 + \frac{1}{\rho_2} \|b\psi_{xx}^n - k(\varphi_x^n + \psi^n + lw^n) - \gamma\vartheta_x^n\|_2^2 \\
&\quad + \|W_x^n\|_2^2 + \frac{1}{\rho_1} \|k_0(w_x^n - l\varphi^n)_x - kl(\varphi_x^n + \psi^n + lw^n) - \gamma\theta_x^n\|_2^2 \\
&\quad + \|k_1\theta_{xx}^n - m(W_x^n - l\Phi^n)\|_2^2 + \|k_1\vartheta_{xx}^n - m\Psi_x^n\|_2^2.
\end{aligned} \tag{4.87}$$

Com isto em mente, vamos mostrar que as sequências $(\varphi_{xx}^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\psi_{xx}^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_{xx}^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\theta_x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\vartheta_x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ são limitadas em $L^2(0, L)$.

De fato, usando que

$$\operatorname{Re}((A_j U, U))_{\mathcal{H}_j} = -\frac{\gamma k_1}{m} (\|\theta_x\|_2^2 + \|\vartheta_x\|_2^2) \leq 0,$$

para todo $U \in D(A_j)$, e também utilizando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\begin{aligned}
\|\theta_x^n\|_2^2 + \|\vartheta_x^n\|_2^2 &= -\frac{m}{\gamma k_1} \operatorname{Re}((A_j U_n, U_n))_{\mathcal{H}_j} \\
&\leq \frac{m}{\gamma k_1} \|A_j U_n\|_{\mathcal{H}_j} \|U_n\|_{\mathcal{H}_j}.
\end{aligned}$$

Do Corolário 4.5, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\theta_x^n\|_2^2 + \|\vartheta_x^n\|_2^2 \leq C |A_j U_n|_{\mathcal{H}_j} |U_n|_{\mathcal{H}_j}.$$

Agora, usando o fato de que $2ab \leq (a + b)^2$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\theta_x^n\|_2^2 + \|\vartheta_x^n\|_2^2 \leq C (|A_j U_n|_{\mathcal{H}_j} + |U_n|_{\mathcal{H}_j})^2.$$

Assim,

$$\|\theta_x^n\|_2 \leq C \|U_n\|_{D(A_j)}. \tag{4.88}$$

$$\|\vartheta_x^n\|_2 \leq C \|U_n\|_{D(A_j)}. \tag{4.89}$$

Portanto, de (4.86), (4.88) e (4.89), as sequências $(\theta_x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\vartheta_x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ são limitadas em $L^2(0, L)$.

Por outro lado, somando termos apropriadamente e usando a Desigualdade Triangular,

$$\begin{aligned} \|\varphi_{xx}^n\|_2^2 &\leq 2\|(\varphi_x^n + \psi^n + lw^n)_x\|_2^2 + 2\|\psi_x^n + lw_x^n\|_2^2 \\ &\leq \frac{4}{k}\|k(\varphi_x^n + \psi^n + lw^n)_x + k_0l(w_x^n - l\varphi^n) - l\gamma\theta^n\|_2^2 + \frac{4}{k}\|k_0l(w_x^n - l\varphi^n) - l\gamma\theta^n\|_2^2 \\ &\quad + 4\|\psi_x^n\|_2^2 + 4l^2\|w_x^n\|_2^2. \end{aligned}$$

Novamente usando as desigualdades Triangular e de Poincaré, segue de (4.87) que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\varphi_{xx}^n\|_2^2 \leq C\|U_n\|_{D(A_j)}. \quad (4.90)$$

Deste modo, de (4.86) e (4.90), segue que a sequência $(\varphi_{xx}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0, L)$.

Analogamente, usando o método de somar e subtrair termos apropriados juntamente com as desigualdades triangular, de Poincaré e (4.87), podemos concluir que as sequências $(\psi_{xx}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(w_{xx}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ são limitadas em $L^2(0, L)$.

Visto todas essas sequências limitadas, vamos concluir o desejado. De fato,

- (1) A sequência $(\varphi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em H^2 . Pela Proposição 2.19, a aplicação

$$i : (H^2, \|\cdot\|_{H^2}) \rightarrow (H^1, \|\cdot\|_{H^1})$$

é compacta, então existem $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$, $(\varphi^n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ e $\varphi \in H^1$ tal que

$$\|\varphi^n - \varphi\|_{H^1} \rightarrow 0.$$

Como $\varphi^n \in H_0^1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $(H_0^1, \|\cdot\|_{H^1})$ é completo, segue que $\varphi \in H_0^1$.

- (2) A sequência $(\Phi^n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ é limitada em H^1 . Segue da Proposição 2.19 que a aplicação

$$i : (H^1, \|\cdot\|_{H^1}) \rightarrow (C([0, L], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$$

é compacta. Logo, existem $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$, $(\Phi^n)_{n \in \mathbb{N}_2}$ e $\Phi \in C([0, L], \mathbb{R})$ tal que

$$\|\Phi^n - \Phi\|_\infty \rightarrow 0.$$

Mas, como

$$0 \leq \|\Phi^n - \Phi\|_2^2 = \int_0^L |\Phi^n - \Phi|^2 dx \leq L\|\Phi^n - \Phi\|_\infty \rightarrow 0,$$

então $\Phi \in L^2(0, L)$ e

$$\|\Phi^n - \Phi\|_2 \rightarrow 0.$$

- (3) A sequência $(\psi^n)_{n \in \mathbb{N}_2}$ é limitada em H^2 . De modo análogo ao item (1), existem $\mathbb{N}_3 \subset \mathbb{N}_2$,

$(\psi^n)_{n \in \mathbb{N}_3}$ e $\psi \in H^1$ tal que

$$\|\psi^n - \psi\|_{H^1} \rightarrow 0.$$

Como $\psi^n \in H_0^1$ e $(H_0^1, \|\cdot\|_{H^1})$ é completo (ou $\psi^n \in H_*^1$ e $(H_*^1, \|\cdot\|_{H^1})$ é completo), segue que $\psi \in H_0^1$ (ou $\psi \in H_*^1$).

- (4) A sequência $(\Psi^n)_{n \in \mathbb{N}_3}$ é limitada em H^1 . Analogamente ao item (2), existem $\mathbb{N}_4 \subset \mathbb{N}_3$, $(\Psi^n)_{n \in \mathbb{N}_4}$ e $\Psi \in L^2$ tal que

$$\|\Psi^n - \Psi\|_2 \rightarrow 0.$$

Sendo $\Psi^n \in L^2$ e $(L^2, \|\cdot\|_2)$ completo (ou $\Psi^n \in L_*^2$ e $(L_*^2, \|\cdot\|_2)$ completo), segue que $\Psi \in L^2$ (ou $\Psi \in L_*^2$).

- (5) A sequência $(w^n)_{n \in \mathbb{N}_4}$ é limitada em H^2 . De modo análogo ao item (1), existem $\mathbb{N}_5 \subset \mathbb{N}_4$, $(w^n)_{n \in \mathbb{N}_5}$ e $w \in H^1$ tal que

$$\|w^n - w\|_{H^1} \rightarrow 0.$$

Como $w^n \in H_0^1$ e $(H_0^1, \|\cdot\|_{H^1})$ é completo (ou $w^n \in H_*^1$ e $(H_*^1, \|\cdot\|_{H^1})$ é completo), segue que $w \in H_0^1$ (ou $w \in H_*^1$).

- (6) A sequência $(W^n)_{n \in \mathbb{N}_5}$ é limitada em H^1 . Analogamente ao item (2), existem $\mathbb{N}_6 \subset \mathbb{N}_5$, $(W^n)_{n \in \mathbb{N}_6}$ e $W \in L^2$ tal que

$$\|W^n - W\|_2 \rightarrow 0.$$

Sendo $W^n \in L^2$ e $(L^2, \|\cdot\|_2)$ completo (ou $W^n \in L_*^2$ e $(L_*^2, \|\cdot\|_2)$ completo), segue que $W \in L^2$ (ou $W \in L_*^2$).

- (7) A sequência $(\theta^n)_{n \in \mathbb{N}_6}$ é limitada em H^1 . Analogamente ao item (2), existem $\mathbb{N}_7 \subset \mathbb{N}_6$, $(\theta^n)_{n \in \mathbb{N}_7}$ e $\theta \in L^2$ tal que

$$\|\theta^n - \theta\|_2 \rightarrow 0.$$

Sendo $\theta^n \in L^2$ e $(L^2, \|\cdot\|_2)$ completo, segue que $\theta \in L^2$.

- (8) A sequência $(\vartheta^n)_{n \in \mathbb{N}_7}$ é limitada em H^1 . Analogamente ao item (2), existem $\mathbb{N}_8 \subset \mathbb{N}_7$, $(\vartheta^n)_{n \in \mathbb{N}_8}$ e $\vartheta \in L^2$ tal que

$$\|\vartheta^n - \vartheta\|_2 \rightarrow 0.$$

Sendo $\vartheta^n \in L^2$ e $(L^2, \|\cdot\|_2)$ completo, segue que $\vartheta \in L^2$.

Assim, dos itens (1)-(8), existem $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \theta, \vartheta) \in \mathcal{H}_j$ e $\mathbb{N}_8 \subset \mathbb{N}$ tais que a sequência $(U_n)_{n \in \mathbb{N}_8}$ converge para U no espaço $(\mathcal{H}_j, |\cdot|_{\mathcal{H}_j})$.

Logo, mostramos que dada uma sequência (U_n) limitada em $D(A_j)$, esta possui uma subsequência convergente em \mathcal{H}_j . Portanto, a aplicação $i : (D(A_j), \|\cdot\|_{D(A_j)}) \rightarrow (\mathcal{H}_j, |\cdot|_{\mathcal{H}_j})$ é compacta. \square

Observação 10. No Lema 4.16, obtemos que o operador $i : (D(A_j), \|\cdot\|_{D(A_j)}) \rightarrow (\mathcal{H}_j, |\cdot|_{\mathcal{H}_j})$ é compacto. Porém, sendo equivalente as normas $|\cdot|_{\mathcal{H}_j}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_j}$, é possível mostrar que o operador $i : (D(A_j), \|\cdot\|_{D(A_j)}) \rightarrow (\mathcal{H}_j, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_j})$ é também compacto.

Lema 4.17. Todos os valores espectrais de A_j são autovalores de A_j , para $j = 1, 2$.

Demonstração. Face às proposições 2.9 e 2.10, segue do Lema 4.16 que todos os valores espectrais do operador A_j são autovalores de A_j , para $j = 1, 2$. \square

Lema 4.18. $i\mathbb{R} \subset \rho(A_j)$, para $j = 1, 2$.

Demonstração. Seja $j = 1, 2$. Suponhamos que $i\mathbb{R} \not\subset \rho(A_j)$, assim existe $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ (pois já vimos que $0 \in \rho(A_j)$) tal que $i\beta \in \sigma(A_j)$. Do Lema 4.17, segue que $i\beta$ é um autovalor de A_j , portanto existe um autovetor não-nulo $U \in D(A_j)$, satisfazendo a equação

$$i\beta U - A_j U = 0. \quad (4.91)$$

Reescrevendo a equação (4.91) em termos de suas componentes, temos

$$i\beta\varphi - \Phi = 0, \quad (4.92)$$

$$i\beta\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0l(w_x - l\varphi) + l\gamma\theta = 0, \quad (4.93)$$

$$i\beta\psi - \Psi = 0, \quad (4.94)$$

$$i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\vartheta_x = 0, \quad (4.95)$$

$$i\beta w - W = 0, \quad (4.96)$$

$$i\beta\rho_1 W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = 0, \quad (4.97)$$

$$i\beta\theta - k_1\theta_{xx} + m(W_x - l\Phi) = 0, \quad (4.98)$$

$$i\beta\vartheta - k_1\vartheta_{xx} + m\Psi_x = 0. \quad (4.99)$$

Considerando o produto interno de (4.91) com U em \mathcal{H}_j , obtemos

$$i\beta\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 - ((A_j U, U))_{\mathcal{H}_j} = 0. \quad (4.100)$$

Considerando a parte real em (4.100) e utilizando (4.57), segue que

$$\|\theta_x\|_2^2 = \|\vartheta_x\|_2^2 = 0.$$

Assim, obtemos que $\theta_x = \vartheta_x = 0$. Usando a desigualdade de Poincaré,

$$0 \leq \|\theta\|_2 \leq C\|\theta_x\|_2 = 0.$$

Assim, $\theta = 0$. Analogamente, temos que $\vartheta = 0$. Deste modo, substituindo em (4.98), temos que

$$W_x - l\Phi = 0$$

e usando as equações (4.92) e (4.96),

$$w_x - l\varphi = \frac{1}{i\beta}(W_x - l\Phi) = 0 \quad (4.101)$$

Substituindo (4.92) em (4.93), segue que

$$-\beta^2 \rho_1 \varphi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x = 0. \quad (4.102)$$

Por outro lado, substituindo (4.96) em (4.97),

$$-\beta^2 \rho_1 w + kl(\varphi_x + \psi + lw) = 0. \quad (4.103)$$

Derivando a equação (4.103) e somando com (4.102), temos

$$-\beta^2 \rho_1 (w_x + l\varphi) = 0 \Rightarrow w_x + l\varphi = 0. \quad (4.104)$$

De (4.101) e (4.104), segue que $w_x = \varphi = 0$ e, usando a Desigualdade de Poincaré, do mesmo modo que foi feito para as funções θ e ϑ , obtemos que $w = 0$. Além disso, de (4.103), segue que $\psi = 0$. Voltando em (4.92), (4.94) e (4.96), temos que $\Phi = \Psi = W = 0$.

Assim, obtemos que $U = 0$, o que contradiz o fato de U ser um autovetor não-nulo associado ao autovalor $i\beta$. Portanto, $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A_j)$, para $j = 1, 2$.

□

De acordo com o Lema 4.18, temos que $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A_j)$, para $j = 1, 2$. Deste modo, dado $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8) \in \mathcal{H}_j$, existe $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \theta, \vartheta) \in D(A_j)$ satisfazendo a equação resolvente

$$i\beta U - A_j U = F. \quad (4.105)$$

Reescrevendo (4.105) em termos de suas componentes, obtemos o seguinte sistema de

equações:

$$i\beta\varphi - \Phi = f_1, \quad (4.106)$$

$$i\beta\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0l(w_x - l\varphi) + l\gamma\theta = \rho_1f_2, \quad (4.107)$$

$$i\beta\psi - \Psi = f_3, \quad (4.108)$$

$$i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\vartheta_x = \rho_2f_4, \quad (4.109)$$

$$i\beta w - W = f_5, \quad (4.110)$$

$$i\beta\rho_1W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = \rho_1f_6, \quad (4.111)$$

$$i\beta\theta - k_1\theta_{xx} + m(W_x - l\Phi) = f_7, \quad (4.112)$$

$$i\beta\vartheta - k_1\vartheta_{xx} + m\Psi_x = f_8. \quad (4.113)$$

Lema 4.19. *Seja $U \in D(A_j)$ satisfazendo a equação resolvente (4.105) para algum $\beta \in \mathbb{R}$ e algum $F \in \mathcal{H}_j$. Então, as funções θ e ϑ satisfazem*

$$\|\theta_x\|_2^2 + \|\vartheta_x\|_2^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j} \quad (4.114)$$

para alguma constante $C > 0$.

Demonstração. Considerando o produto interno da equação resolvente com $U \in D(A_j)$, temos

$$i\beta\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + ((-A_jU, U))_{\mathcal{H}_j} = ((F, U))_{\mathcal{H}_j}.$$

Considerando sua parte real, segue de (4.57), que

$$\frac{k_1\gamma}{m}(\|\theta_x\|_2^2 + \|\vartheta_x\|_2^2) = \mathbf{Re}((F, U))_{\mathcal{H}_j}.$$

Utilizando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\frac{k_1\gamma}{m}(\|\theta_x\|_2^2 + \|\vartheta_x\|_2^2) \leq \|F\|_{\mathcal{H}_j}\|U\|_{\mathcal{H}_j}. \quad (4.115)$$

Portanto, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\theta_x\|_2^2 + \|\vartheta_x\|_2^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_j}\|U\|_{\mathcal{H}_j}.$$

□

Neste momento, nosso objetivo é obter estimativas locais para as funções coordenadas do vetor $U \in D(A_j)$ e, após a obtenção destas estimativas, utilizar a Desigualdade de Observabilidade para o sistema de Bresse, para que seja possível estender estas estimativas para o intervalo $(0, L)$.

Neste intuito, exigiremos que a solução do problema (4.53) tenha mais regularidade, pois em alguns momentos será necessário que precisemos, por exemplo, derivar três vezes a função w .

Deste modo, para que exista a terceira derivada da função w , exigiremos $U \in D(A_j^2)$. Notemos que tal exigência não acarretará em problemas, pois é possível, via densidade do domínio e unicidade de solução, utilizar a teoria de semigrupos de operadores lineares e estender os resultados obtidos para os espaços \mathcal{H}_j e $D(A_j)$ nos teoremas de decaimento exponencial e polinomial, respectivamente. Além disso, afim de obter tais estimativas, consideraremos $|\beta| > 1$ suficientemente grande, sem nenhuma perda de generalidade.

Com efeito, dado $L_0 \in (0, L)$, existe $\delta > 0$ tal que $(L_0 - \delta, L_0 + \delta) \subset (0, L)$. Considere uma função $s_1 \in C^2((0, L), \mathbb{R})$ satisfazendo as seguintes propriedades

$$\text{supp}(s_1) \subset (L_0 - \delta, L_0 + \delta), \quad 0 \leq s_1(x) \leq 1, \quad \text{para todo } x \in (0, L), \quad (4.116)$$

$$s_1(x) = 1, \quad \text{para todo } x \in \left[L_0 - \frac{\delta}{2}, L_0 + \frac{\delta}{2} \right]. \quad (4.117)$$

Considerando $L = 6$, $L_0 = 3$ e $\delta = 2$, temos um exemplo de função s_1 , dado por:

$$s_1(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ e^{\frac{1}{(x-2)^2-1}} e, & 1 \leq x \leq 2, \\ 1, & 2 \leq x \leq 4, \\ e^{\frac{1}{(x-4)^2-1}} e, & 4 \leq x \leq 5, \\ 0, & 5 \leq x \leq 6. \end{cases} \quad (4.118)$$

A ideia geométrica do exemplo de função s_1 está dada na Figura 4.1.

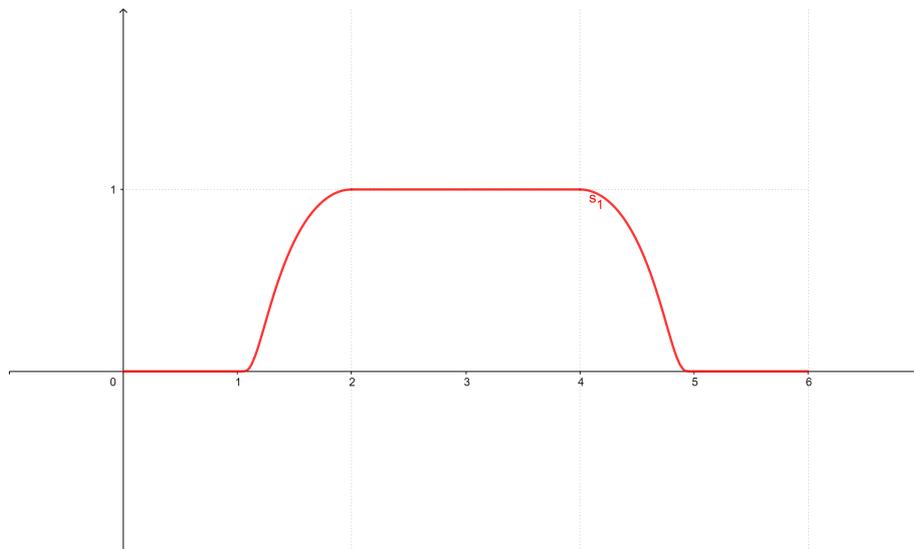


Figura 4.1: Exemplo de uma função s_1 .

Lema 4.20. *Sob as notações anteriores, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s_1 |w_x - l\varphi|^2 dx \leq \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C \|\theta_x\|_2 \left(\int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s_1 |W|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (4.119)$$

Demonstração. Primeiramente, das equações (4.106) e (4.110), temos que

$$W_x - l\Phi = i\beta(w_x - l\varphi) - (f_{5,x} - lf_1). \quad (4.120)$$

Substituindo (4.120) na equação (4.112),

$$i\beta\theta - k_1\theta_{xx} + m(i\beta(w_x - l\varphi) - (f_{5,x} - lf_1)) = f_7,$$

o que implica

$$i\beta\theta - k_1\theta_{xx} + i\beta m(w_x - l\varphi) = f_7 + m(f_{5,x} - lf_1). \quad (4.121)$$

Multiplicando a equação (4.121) por $k_0 s_1 \overline{(w_x - l\varphi)}$ e integrando no intervalo $(0, L)$, temos

$$\begin{aligned} i\beta \int_0^L k_0 s_1 \theta \overline{(w_x - l\varphi)} dx - k_1 \int_0^L k_0 s_1 \theta_{xx} \overline{(w_x - l\varphi)} dx + i\beta m \int_0^L k_0 s_1 |w_x - l\varphi|^2 dx \\ = \int_0^L k_0 s_1 f_7 \overline{(w_x - l\varphi)} dx + m \int_0^L k_0 s_1 (f_{5,x} - lf_1) \overline{(w_x - l\varphi)} dx, \end{aligned}$$

e integrando por partes,

$$\begin{aligned} i\beta k_0 m \int_0^L s_1 |w_x - l\varphi|^2 dx &= \underbrace{-k_1 \int_0^L s_1 \theta_x \overline{(k_0 (w_x - l\varphi)_x)} dx}_{:=I_1} - k_1 k_0 \int_0^L s_1' \theta_x \overline{(w_x - l\varphi)} dx \\ &\quad + \underbrace{k_0 \int_0^L s_1 \theta \overline{(i\beta (w_x - l\varphi))} dx}_{:=I_2} + k_0 \int_0^L s_1 f_7 \overline{(w_x - l\varphi)} dx \\ &\quad + m k_0 \int_0^L s_1 (f_{5,x} - lf_1) \overline{(w_x - l\varphi)} dx. \end{aligned} \quad (4.122)$$

Assim, usando a equação (4.111),

$$\begin{aligned} I_1 &= -k_1 \int_0^L s_1 \theta_x \overline{(i\beta \rho_1 W + kl(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma \theta_x - \rho_1 f_6)} dx \\ &= i\beta k_1 \rho_1 \int_0^L s_1 \theta_x \overline{W} dx - k_1 kl \int_0^L s_1 \theta_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx - k_1 \gamma \int_0^L s_1 |\theta_x|^2 dx \\ &\quad + k_1 \rho_1 \int_0^L s_1 \theta_x \overline{f_6} dx. \end{aligned} \quad (4.123)$$

Por outro lado, usando as equações (4.106) e (4.110),

$$\begin{aligned} I_2 &= k_0 \int_0^L s_1 \theta \overline{(f_{5,x} - lf_1 + W_x - l\Phi)} dx \\ &= -k_0 \int_0^L [s_1 \theta]_x \overline{W} dx - k_0 l \int_0^L s_1 \theta \overline{\Phi} dx + k_0 \int_0^L s_1 \theta \overline{(f_{5,x} - lf_1)} dx. \end{aligned} \quad (4.124)$$

Substituindo (4.123) e (4.124) na igualdade (4.122),

$$i\beta k_0 m \int_0^L s_1 |w_x - l\varphi|^2 dx = i\beta k_1 \rho_1 \int_0^L s_1 \theta_x \overline{W} dx + I_3, \quad (4.125)$$

onde

$$\begin{aligned} I_3 &= -k_1 \gamma \int_0^L s_1 |\theta_x|^2 dx - k_1 k_0 \int_0^L s_1' \theta_x \overline{(w_x - l\varphi)} dx - k_0 \int_0^L [s_1 \theta]_x \overline{W} dx \\ &\quad - k_0 l \int_0^L s_1 \theta \overline{\Phi} dx + k_0 \int_0^L s_1 \theta \overline{(f_{5,x} - lf_1)} dx + k_1 \rho_1 \int_0^L s_1 \theta_x \overline{f_6} dx \\ &\quad - k_1 k l \int_0^L s_1 \theta_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx + k_0 \int_0^L s_1 f_7 \overline{(w_x - l\varphi)} dx \\ &\quad + m k_0 \int_0^L s_1 (f_{5,x} - lf_1) \overline{(w_x - l\varphi)} dx. \end{aligned}$$

Usando a Desigualdade (4.114), a hipótese (4.116) sobre a função s_1 e as desigualdades de Hölder e Poincaré, temos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|I_3| \leq C \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C \|\theta_x\|_2 \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j}. \quad (4.126)$$

Deste modo, usando a condição de que $\text{supp}(s_1) \subset (L_0 - \delta, L_0 + \delta)$, temos de (4.125) que

$$\begin{aligned} |\beta| \int_{L_0 - \delta}^{L_0 + \delta} s_1 |w_x - l\varphi|^2 dx &\leq C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C \|\theta_x\|_2 \|F\|_{\mathcal{H}_j} \\ &\quad + C |\beta| \int_{L_0 - \delta}^{L_0 + \delta} s_1 |\theta_x| |W| dx. \end{aligned}$$

Portanto, usando as desigualdades de Hölder e Young e a estimativa (4.114),

$$\begin{aligned} \int_{L_0 - \delta}^{L_0 + \delta} s_1 |w_x - l\varphi|^2 dx &\leq \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 \\ &\quad + C \|\theta_x\|_2 \left(\int_{L_0 - \delta}^{L_0 + \delta} s_1 |W|^2 \right)^{1/2} dx, \end{aligned}$$

provando (4.119). □

Lema 4.21. *Sob as notações anteriores, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_{L_0 - \frac{\delta}{2}}^{L_0 + \frac{\delta}{2}} |W|^2 dx \leq \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (4.127)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (4.111) por $-s_1 \bar{w}$ e integrando no intervalo $(0, L)$,

$$\begin{aligned} -\rho_1 \int_0^L s_1 f_6 \bar{w} dx &= \rho_1 \int_0^L s_1 W \overline{(i\beta w)} dx + k_0 \int_0^L s_1 (w_x - l\varphi)_x \bar{w} dx \\ &\quad - kl \int_0^L s_1 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{w} dx - \gamma \int_0^L s_1 \theta_x \bar{w} dx. \end{aligned}$$

Usando a equação (4.110) e integrando por partes,

$$\begin{aligned} -\rho_1 \int_0^L s_1 f_6 \bar{w} dx &= \rho_1 \int_0^L s_1 W \overline{(W + f_5)} dx - k_0 \int_0^L s_1' (w_x - l\varphi) \bar{w} dx \\ &\quad - k_0 \int_0^L s_1 |w_x - l\varphi|^2 dx - lk_0 \int_0^L s_1 (w_x - l\varphi) \bar{\varphi} dx \\ &\quad - kl \int_0^L s_1 \varphi_x \bar{w} dx - kl \int_0^L (\psi + lw) \bar{w} dx - \gamma \int_0^L s_1 \theta_x \bar{w} dx, \end{aligned}$$

o que implica, usando (4.110) e integrando por partes novamente,

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^L s_1 |W|^2 dx &= k_0 \int_0^L s_1 |w_x - l\varphi|^2 dx + lk_0 \int_0^L s_1 (w_x - l\varphi) \bar{\varphi} dx \\ &\quad - \underbrace{\rho_1 \int_0^L s_1 [f_6 \bar{w} + W \bar{f}_5] dx + \frac{i}{\beta} \gamma \int_0^L s_1 \theta_x \overline{(W + f_5)} dx}_{:=I_4} \\ &\quad - \underbrace{kl^2 \int_0^L s_1 |\varphi|^2 dx - kl \int_0^L s_1' \varphi \bar{w} dx + kl \int_0^L s_1 (\psi + lw) \bar{w} dx}_{:=I_5} \\ &\quad - kl \int_0^L s_1 \varphi \overline{(w_x - l\varphi)} dx + \underbrace{k_0 \int_0^L s_1' (w_x - l\varphi) \bar{w} dx}_{:=I_6}. \quad (4.128) \end{aligned}$$

Utilizando a Desigualdade de Hölder, observamos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|I_4| \leq \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j}. \quad (4.129)$$

Além disso, usando as equações (4.106) e (4.110),

$$\begin{aligned}
I_6 &= \frac{k_0}{|\beta|^2} \int_0^L s'_1(W_x - l\Phi + f_{5,x} - lf_1)\overline{(W + f_5)}dx \\
&= \frac{k_0}{|\beta|^2} \int_0^L s'_1(f_{5,x} - lf_1)\overline{(W + f_5)}dx - \frac{k_0l}{|\beta|^2} \int_0^L s'_1\Phi\overline{(W + f_5)}dx \\
&\quad + \frac{k_0}{|\beta|^2} \int_0^L s'_1W_x\overline{f_5}dx + \frac{k_0}{|\beta|^2} \int_0^L s'_1W_x\overline{W}dx.
\end{aligned} \tag{4.130}$$

Usando integração por partes, segue do Lema 2.22 que

$$\operatorname{Re} \int_0^L s'_1W_x\overline{W}dx = -\frac{1}{2} \int_0^L s''_1|W|^2dx.$$

Assim, usando integração por partes em (4.130) e considerando sua parte real,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} I_6 &= \operatorname{Re} \frac{k_0}{|\beta|^2} \int_0^L s'_1(f_{5,x} - lf_1)\overline{(W + f_5)}dx - \operatorname{Re} \frac{k_0l}{|\beta|^2} \int_0^L s'_1\Phi\overline{(W + f_5)}dx \\
&\quad - \operatorname{Re} \frac{k_0}{|\beta|^2} \int_0^L s''_1W\overline{f_5}dx - \operatorname{Re} \frac{k_0}{|\beta|^2} \int_0^L s'_1W\overline{f_{5,x}}dx \\
&\quad - \frac{k_0}{2|\beta|^2} \int_0^L s''_1|W|^2dx.
\end{aligned}$$

Logo, usando as desigualdades de Hölder, Poincaré e Young, existe uma constante positiva $C > 0$ tal que

$$|\operatorname{Re} I_6| \leq \frac{C}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\beta|^2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \tag{4.131}$$

Resta limitar o termo I_5 . De fato, usando as equações (4.106), (4.108) e (4.110),

$$\begin{aligned}
I_5 &= -\frac{kl^2}{|\beta|^2} \int_0^L s_1|\Phi + f_1|^2dx - \frac{kl}{|\beta|^2} \int_0^L s'_1(\Phi + f_1)\overline{(W + f_5)}dx \\
&\quad + \frac{kl}{|\beta|^2} \int_0^L s_1(\Psi + f_3 + lW + lf_5)\overline{(W + f_5)}dx,
\end{aligned}$$

o que implica, usando as desigualdades triangular, de Hölder, de Poincaré e de Young, que

$$|I_5| \leq \frac{C}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\beta|^2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2, \tag{4.132}$$

para alguma constante $C > 0$.

Deste modo, considerando a parte real em (4.128), utilizando as estimativas (4.129), (4.131)

e (4.132) e usando a hipótese (4.116), temos que

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s_1 |W|^2 dx &\leq C \int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s_1 |w_x - l\varphi|^2 dx + C \int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s_1 |w_x - l\varphi| |\varphi| dx \\ &\quad + \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} \\ &\quad + \frac{C}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\beta|^2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2, \end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$. Usando a Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s_1 |W|^2 dx &\leq C \int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s_1 |w_x - l\varphi|^2 dx + C \left(\int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s_1 |w_x - l\varphi|^2 dx \right)^{1/2} \|\varphi\|_2 \\ &\quad + \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} \\ &\quad + \frac{C}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\beta|^2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2, \end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$.

Por fim, usando a Desigualdade de Young e as estimativas dos Lemas 4.19 e 4.20, segue que existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s_1 |W|^2 dx &\leq C \|\theta_x\|_2 \left(\int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} |W|^2 dx \right)^{1/2} + C \|\varphi\|_2^2 + \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} \\ &\quad + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \end{aligned}$$

Mais uma vez, utilizando a Desigualdade de Young, a estimativa obtida no Lema 4.19 e a igualdade (4.106), existe $C > 0$ tal que

$$\int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s_1 |W|^2 dx \leq \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (4.133)$$

Portanto, segue da propriedade (4.117) para a função s_1 que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} |W|^2 dx \leq \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2,$$

provando (4.127) e concluindo a demonstração do Lema 4.21. \square

Corolário 4.22. *Sob as notações anteriores, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_{L_0 - \frac{\delta}{2}}^{L_0 + \frac{\delta}{2}} |w_x - l\varphi|^2 dx \leq \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (4.134)$$

Demonstração. Substituindo a Desigualdade (4.133) obtida na demonstração do Lema 4.21 na estimativa (4.119) do Lema 4.20 e utilizando o fato de que existe $C > 0$ tal que, para quaisquer $a, b > 0$,

$$\sqrt{a+b} \leq C (\sqrt{a} + \sqrt{b}), \quad (4.135)$$

temos que

$$\begin{aligned} \int_{L_0 - \delta}^{L_0 + \delta} s_1 |w_x - l\varphi|^2 dx &\leq \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C \|\theta_x\|_2 \|F\|_{\mathcal{H}_j} \\ &\quad + C \|\theta_x\|_2 \left(\frac{C}{|\beta|^{1/2}} \|\theta_x\|_2^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Utilizando a Desigualdade de Young, a estimativa do Lema 4.19 e a propriedade (4.117) para a função s_1 , existe $C > 0$ tal que

$$\int_{L_0 - \frac{\delta}{2}}^{L_0 + \frac{\delta}{2}} |w_x - l\varphi|^2 dx \leq \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2.$$

Isto conclui a prova do Corolário 4.22. □

Lema 4.23. *Sob as notações anteriores, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} \int_{L_0 - \delta}^{L_0 + \delta} s_1 |\psi_x|^2 dx &\leq \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|} \|\vartheta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} \\ &\quad + \frac{C}{|\beta|} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C \|\vartheta_x\|_2 \left(\int_{L_0 - \delta}^{L_0 + \delta} s_1 |\Psi|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.136)$$

Demonstração. Primeiramente, da equação (4.108), temos que

$$\Psi_x = i\beta\psi_x - f_{3,x}.$$

Substituindo em (4.113),

$$i\beta\vartheta - k_1\vartheta_{xx} + m(i\beta\psi_x - f_{3,x}) = f_8,$$

o que implica

$$i\beta\vartheta - k_1\vartheta_{xx} + mi\beta\psi_x = f_8 + mf_{3,x}. \quad (4.137)$$

Multiplicando (4.137) por $bs_1\overline{\psi_x}$ e integrando no intervalo $(0, L)$, temos

$$\begin{aligned} i\beta \int_0^L bs_1\vartheta\overline{\psi_x}dx - k_1 \int_0^L bs_1\vartheta_{xx}\overline{\psi_x}dx + mi\beta \int_0^L bs_1|\psi_x|^2dx \\ = \int_0^L bs_1f_8\overline{\psi_x}dx + m \int_0^L bs_1f_{3,x}\overline{\psi_x}dx, \end{aligned}$$

e integrando por partes,

$$\begin{aligned} i\beta mb \int_0^L s_1|\psi_x|^2dx &= \underbrace{-k_1 \int_0^L s_1\vartheta_x(\overline{b\psi_{xx}})dx}_{:=I_7} - k_1b \int_0^L s_1'\vartheta_x\overline{\psi_x}dx \\ &\quad + \underbrace{b \int_0^L s_1\vartheta(\overline{i\beta\psi_x})dx}_{:=I_8} + b \int_0^L s_1f_8\overline{\psi_x}dx \\ &\quad + mb \int_0^L s_1f_{3,x}\overline{\psi_x}dx. \end{aligned} \tag{4.138}$$

Deste modo, usando a equação (4.109),

$$\begin{aligned} I_7 &= -k_1 \int_0^L s_1\vartheta_x(\overline{i\beta\rho_2\Psi + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\vartheta_x - \rho_2f_4})dx \\ &= i\beta k_1\rho_2 \int_0^L s_1\vartheta_x\overline{\Psi}dx - k_1k \int_0^L s_1\vartheta_x(\overline{\varphi_x + \psi + lw})dx \\ &\quad - k_1\gamma \int_0^L s_1|\vartheta_x|^2dx + k_1\rho_2 \int_0^L s_1\vartheta_x\overline{f_4}dx. \end{aligned} \tag{4.139}$$

Por outro lado, usando (4.108),

$$I_8 = b \int_0^L s_1\vartheta(\overline{f_{3,x} + \Psi_x})dx = b \int_0^L s_1\vartheta\overline{\Psi_x}dx + b \int_0^L s_1\vartheta\overline{f_{3,x}}dx,$$

e integrando por partes,

$$I_8 = -b \int_0^L s_1'\vartheta\overline{\Psi}dx - b \int_0^L s_1\vartheta_x\overline{\Psi}dx + b \int_0^L s_1\vartheta\overline{f_{3,x}}dx. \tag{4.140}$$

Substituindo as igualdades (4.139) e (4.140) em (4.138), temos

$$i\beta mb \int_0^L s_1|\psi_x|^2dx = i\beta k_1\rho_2 \int_0^L s_1\vartheta_x\overline{\Psi}dx + I_9, \tag{4.141}$$

onde

$$\begin{aligned}
I_9 &= -k_1 k \int_0^L s_1 \vartheta_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx - k_1 \gamma \int_0^L s_1 |\vartheta_x|^2 dx \\
&\quad + k_1 \rho_2 \int_0^L s_1 \vartheta_x \overline{f_4} dx - k_1 b \int_0^L s_1' \vartheta_x \overline{\psi_x} dx - b \int_0^L s_1' \vartheta \overline{\Psi} dx \\
&\quad - b \int_0^L s_1 \vartheta_x \overline{\Psi} dx + b \int_0^L s_1 \vartheta \overline{f_{3,x}} dx + b \int_0^L s_1 f_8 \overline{\psi_x} dx \\
&\quad + mb \int_0^L s_1 f_{3,x} \overline{\psi_x} dx.
\end{aligned}$$

Assim, usando a Estimativa (4.114), juntamente com as desigualdades de Hölder e Poincaré, e utilizando também a propriedade (4.116) da função s_1 , temos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|I_9| \leq C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|\vartheta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C \|\vartheta_x\|_2 \|F\|_{\mathcal{H}_j}.$$

Com isto, retornando a equação (4.141) e, novamente, usando a condição (4.116) para s_1 , temos que

$$\begin{aligned}
|\beta| \int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s_1 |\psi_x|^2 dx &\leq C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|\vartheta_x\|_2 \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|\vartheta_x\|_2 \|F\|_{\mathcal{H}_j} \\
&\quad + C |\beta| \int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s_1 |\vartheta_x| |\Psi| dx.
\end{aligned}$$

Por fim, usando as desigualdades de Hölder e Young, juntamente com a Desigualdade (4.114), existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s_1 |\psi_x|^2 dx &\leq \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|} \|\vartheta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 \\
&\quad + C \|\vartheta_x\|_2 \left(\int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s_1 |\Psi|^2 dx \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

provando o Lema 4.23. □

Lema 4.24. *Sob as notações anteriores, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} |\Psi|^2 dx \leq \frac{C}{|\beta|} \|\vartheta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (4.142)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (4.109) por $-s_1 \overline{\psi}$ e integrando no intervalo $(0, L)$, temos

$$\begin{aligned}
-\rho_2 \int_0^L s_1 f_4 \overline{\psi} dx &= \rho_2 \int_0^L s_1 \overline{\Psi(i\beta\psi)} dx + b \int_0^L s_1 \psi_{xx} \overline{\psi} dx \\
&\quad - k \int_0^L s_1 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\psi} dx - \gamma \int_0^L s_1 \vartheta_x \overline{\psi} dx.
\end{aligned}$$

Usando (4.108) e integrando por partes,

$$\begin{aligned} -\rho_2 \int_0^L s_1 f_4 \bar{\psi} dx &= \rho_2 \int_0^L s_1 \overline{\Psi(\Psi + f_3)} dx - b \int_0^L s_1' \psi_x \bar{\psi} dx - b \int_0^L s_1 |\psi_x|^2 dx \\ &\quad - k \int_0^L s_1 \varphi_x \bar{\psi} dx - k \int_0^L s_1 (\psi + lw) \bar{\psi} dx - \gamma \int_0^L s_1 \vartheta_x \bar{\psi} dx, \end{aligned}$$

de onde vem, usando integração por partes, que

$$\begin{aligned} \rho_2 \int_0^L s_1 |\Psi|^2 dx &= b \int_0^L s_1 |\psi_x|^2 dx + \int_0^L s_1' \psi_x \bar{\psi} dx - k \int_0^L s_1' \varphi \bar{\psi} dx \\ &\quad - k \int_0^L s_1 \varphi \bar{\psi}_x dx + k \int_0^L s_1 (\psi + lw) \bar{\psi} dx + \gamma \int_0^L s_1 \vartheta_x \bar{\psi} dx \\ &\quad - \rho_2 \int_0^L s_1 f_4 \bar{\psi} dx - \rho_2 \int_0^L s_1 \overline{\Psi f_3} dx, \end{aligned}$$

e, novamente, usando a equação (4.108),

$$\begin{aligned} \rho_2 \int_0^L s_1 |\Psi|^2 dx &= b \int_0^L s_1 |\psi_x|^2 dx - k \int_0^L s_1 \varphi \bar{\psi}_x dx + \underbrace{\int_0^L s_1' \psi_x \bar{\psi} dx}_{:=I_{10}} \\ &\quad \underbrace{- \rho_2 \int_0^L s_1 [f_4 \bar{\psi} + \overline{\Psi f_3}] dx + \frac{i}{\beta} \gamma \int_0^L s_1 \vartheta_x (\overline{\Psi + f_3}) dx}_{:=I_{11}} \\ &\quad \underbrace{- k \int_0^L s_1' \varphi \bar{\psi} dx + k \int_0^L s_1 (\psi + lw) \bar{\psi} dx}_{:=I_{12}}. \end{aligned} \tag{4.143}$$

Primeiramente, segue do Lema 2.22 que

$$\operatorname{Re} \int_0^L s_1' \psi_x \bar{\psi} dx = -\frac{1}{2} \int_0^L s_1'' |\psi|^2 dx.$$

Deste modo, usando a equação (4.108), temos que

$$\operatorname{Re} I_{10} = -\frac{1}{2} \int_0^L s_1'' \left| \frac{\Psi + f_3}{i\beta} \right|^2 dx,$$

o que implica, usando as desigualdades Triangular e de Poincaré, que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|\operatorname{Re} I_{10}| \leq \frac{C}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\beta|^2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \tag{4.144}$$

Além disso, utilizando as desigualdades de Hölder e de Poincaré, e também a hipótese

(4.116) sobre a função s_1 , notamos que

$$|I_{11}| \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|}\|\vartheta_x\|_2\|U\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|}\|\vartheta_x\|_2\|F\|_{\mathcal{H}_j}. \quad (4.145)$$

Por fim, para estimar o termo I_{12} , usaremos as equações (4.106), (4.108) e (4.110), obtendo,

$$I_{12} = -\frac{k}{|\beta|^2} \int_0^L s_1'(\Phi + f_1)\overline{(\Psi + f_3)}dx + \frac{k}{|\beta|^2} \int_0^L s_1(\Psi + f_3 + lW + lf_5)\overline{(\Psi + f_3)}dx.$$

Assim, usando as desigualdades de Hölder, Triangular, de Poincaré e de Young, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|I_{12}| \leq \frac{C}{|\beta|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (4.146)$$

Com isto, considerando a parte real em (4.143), usando a desigualdade de Hölder e a hipótese (4.116) sobre a função s_1 , existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s_1|\Psi|^2dx &\leq C \int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s_1|\psi_x|^2dx + C \left(\int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s_1|\psi_x|^2dx \right)^{1/2} \|\varphi\|_2 \\ &\quad + \frac{C}{|\beta|}\|\vartheta_x\|_2\|U\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|}\|\vartheta_x\|_2\|F\|_{\mathcal{H}_j} + C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j} \\ &\quad + \frac{C}{|\beta|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \end{aligned}$$

Por fim, usando a Desigualdade de Young e as estimativas dos Lemas 4.19 e 4.23, segue que existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s_1|\Psi|^2dx &\leq C\|\vartheta_x\|_2 \left(\int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} |\Psi|^2dx \right)^{1/2} + C\|\varphi\|_2^2 + \frac{C}{|\beta|}\|\vartheta_x\|_2\|U\|_{\mathcal{H}_j} \\ &\quad + C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \end{aligned}$$

Mais uma vez, utilizando a Desigualdade de Young, a estimativa obtida no Lema 4.19 e a igualdade (4.106), existe $C > 0$ tal que

$$\int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s_1|\Psi|^2dx \leq \frac{C}{|\beta|}\|\vartheta_x\|_2\|U\|_{\mathcal{H}_j} + C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (4.147)$$

Portanto, segue da Propriedade (4.117) para a função s_1 que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} |\Psi|^2dx \leq \frac{C}{|\beta|}\|\vartheta_x\|_2\|U\|_{\mathcal{H}_j} + C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2,$$

provando (4.142) e, conseqüentemente, o Lema 4.24. \square

Corolário 4.25. *Sob as notações anteriores, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_{L_0 - \frac{\delta}{2}}^{L_0 + \frac{\delta}{2}} |\psi_x|^2 dx \leq \frac{C}{|\beta|} \|\vartheta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (4.148)$$

Demonstração. Substituindo a Desigualdade (4.147) obtida na demonstração do Lema 4.24 na estimativa (4.136) do Lema 4.23 e utilizando o fato (4.135), existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{L_0 - \delta}^{L_0 + \delta} s_1 |\psi_x|^2 dx &\leq \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|} \|\vartheta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C \|\vartheta_x\|_2 \|F\|_{\mathcal{H}_j} \\ &\quad + C \|\vartheta_x\|_2 \left(\frac{C}{|\beta|^{1/2}} \|\vartheta_x\|_2^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Utilizando a Desigualdade de Young, a estimativa do Lema 4.19 e a propriedade (4.117) para a função s_1 , existe $C > 0$ tal que

$$\int_{L_0 - \frac{\delta}{2}}^{L_0 + \frac{\delta}{2}} |\psi_x|^2 dx \leq \frac{C}{|\beta|} \|\vartheta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2.$$

□

Para as próximas estimativas, considere uma função $s_2 \in C^2((0, L), \mathbb{R})$ satisfazendo as seguintes propriedades

$$\text{supp}(s_2) \subset \left(L_0 - \frac{\delta}{2}, L_0 + \frac{\delta}{2} \right), \quad 0 \leq s_2(x) \leq 1, \quad \text{para todo } x \in (0, L), \quad (4.149)$$

$$s_2(x) = 1, \quad \text{para todo } x \in \left[L_0 - \frac{\delta}{3}, L_0 + \frac{\delta}{3} \right]. \quad (4.150)$$

Considerando $L = 6$, $L_0 = 3$ e $\delta = 2$, temos um exemplo de função s_2 , dado por:

$$s_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 2, \\ e^{\frac{1}{(3x-7)^2-1}} e, & 2 \leq x \leq \frac{7}{3}, \\ 1, & \frac{7}{3} \leq x \leq \frac{11}{3}, \\ e^{\frac{1}{(3x-11)^2-1}} e, & \frac{11}{3} \leq x \leq 4, \\ 0, & 4 \leq x \leq 6. \end{cases} \quad (4.151)$$

A ideia geométrica do exemplo de uma função s_2 está dada na Figura 4.2.

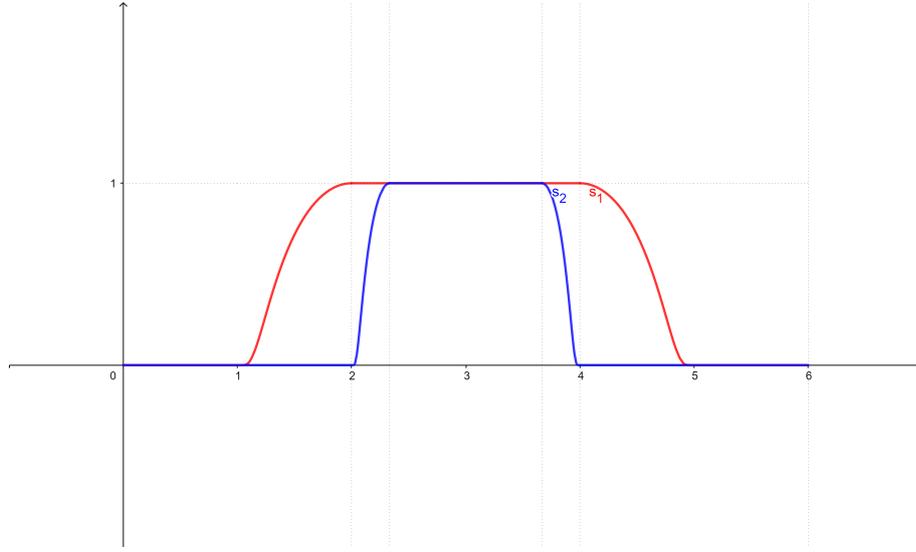


Figura 4.2: Exemplo de uma função s_2 .

Lema 4.26. *Sob as notações anteriores, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned}
 \int_{L_0 - \frac{\delta}{2}}^{L_0 + \frac{\delta}{2}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx &\leq C |\beta| |k_0 - k| \int_{L_0 - \frac{\delta}{2}}^{L_0 + \frac{\delta}{2}} s_2 |w_x - l\varphi| |\Phi| dx \\
 &+ C \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \left(\int_{L_0 - \frac{\delta}{2}}^{L_0 + \frac{\delta}{2}} |w_x - l\varphi|^2 dx \right)^{1/2} \\
 &+ C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (4.152)
 \end{aligned}$$

Demonstração. Multiplicando a equação (4.107) por $s_2 \frac{kl}{\rho_1} \bar{\varphi}$ e integrando no intervalo $(0, L)$, temos

$$\begin{aligned}
 kl \int_0^L s_2 f_2 \bar{\varphi} dx &= i\beta kl \int_0^L s_2 \Phi \bar{\varphi} dx - \frac{k^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_2 (\varphi_x + \psi + lw)_x \bar{\varphi} dx \\
 &- \frac{k_0 k l^2}{\rho_1} \int_0^L s_2 (w_x - l\varphi) \bar{\varphi} dx + \frac{l^2 k \gamma}{\rho_1} \int_0^L s_2 \theta \bar{\varphi} dx.
 \end{aligned}$$

Integrando por partes e somando alguns termos apropriadamente,

$$\begin{aligned}
 \frac{k^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx &= i\beta k \int_0^L s_2 (-l\Phi) \bar{\varphi} dx - \frac{k^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_2' (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\varphi} dx \\
 &+ \frac{k_0 k l^2}{\rho_1} \int_0^L s_2 (w_x - l\varphi) \bar{\varphi} dx - \frac{l^2 k \gamma}{\rho_1} \int_0^L s_2 \theta \bar{\varphi} dx \\
 &+ kl \int_0^L s_2 f_2 \bar{\varphi} dx + \frac{k^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_2 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\psi + lw)} dx. \quad (4.153)
 \end{aligned}$$

Por outro lado, derivando a equação (4.111), multiplicando por $s_2 k \bar{\varphi}$ e integrando no inter-

valo $(0, L)$, temos

$$\begin{aligned} k \int_0^L s_2 f_{6,x} \bar{\varphi} dx &= i\beta k \int_0^L s_2 W_x \bar{\varphi} dx - \frac{k}{\rho_1} \int_0^L s_2 (k_0 (w_x - l\varphi)_{xx}) \bar{\varphi} dx \\ &\quad + \frac{k^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_2 (\varphi_x + \psi + lw)_x \bar{\varphi} dx + \frac{\gamma k}{\rho_1} \int_0^L s_2 \theta_{xx} \bar{\varphi} dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes,

$$\begin{aligned} i\beta k \int_0^L s_2 W_x \bar{\varphi} dx + \frac{k}{\rho_1} \int_0^L s_2' (k_0 (w_x - l\varphi)_{xx}) \bar{\varphi} dx + \frac{k}{\rho_1} \int_0^L s_2 (k_0 (w_x - l\varphi)_{xx}) \bar{\varphi}_x dx \\ + \frac{k^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_2 (\varphi_x + \psi + lw)_x \bar{\varphi} dx - \frac{\gamma k}{\rho_1} \int_0^L \theta_x [s_2 \bar{\varphi}]_x dx + k \int_0^L f_6 [s_2 \bar{\varphi}]_x dx = 0. \end{aligned} \quad (4.154)$$

Somando as igualdades (4.153) e (4.154), temos

$$\begin{aligned} \frac{k^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx &= i\beta k \int_0^L s_2 (W_x - l\Phi) \bar{\varphi} dx - \frac{k^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_2' (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\varphi} dx \\ &\quad + \frac{k_0 k l^2}{\rho_1} \int_0^L s_2 (w_x - l\varphi) \bar{\varphi} dx - \frac{l^2 \gamma k}{\rho_1} \int_0^L s_2 \theta \bar{\varphi} dx \\ &\quad + \frac{k^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_2 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\psi + lw)} dx + lk \int_0^L s_2 f_2 \bar{\varphi} dx \\ &\quad + \underbrace{\frac{k^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_2 (\varphi_x + \psi + lw)_x \bar{\varphi} dx - \frac{k\gamma}{\rho_1} \int_0^L \theta_x [s_2 \bar{\varphi}]_x dx}_{:=I_{13}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{k}{\rho_1} \int_0^L s_2 (k_0 (w_x - l\varphi)_{xx}) \bar{\varphi}_x dx + k \int_0^L f_6 [s_2 \bar{\varphi}]_x dx}_{:=I_{14}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{k}{\rho_1} \int_0^L s_2' (k_0 (w_x - l\varphi)_{xx}) \bar{\varphi} dx}_{:=I_{15}}. \end{aligned} \quad (4.155)$$

Agora, observe que, integrando por partes, podemos reescrever o termo I_{13} da seguinte forma

$$\begin{aligned} I_{13} &= \frac{k^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_2 (\varphi_x + \psi + lw)_x \bar{\varphi} dx \\ &= -\frac{k^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_2' (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\varphi} dx - \frac{k^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_2 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\varphi}_x dx \\ &= -\frac{k^2 l}{\rho_1} s_2' (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\varphi} dx - \frac{k^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \\ &\quad + \frac{k^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_2 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\psi + lw)} dx. \end{aligned}$$

Logo, substituindo I_{13} em (4.155),

$$\begin{aligned}
\frac{2k^2l}{\rho_1} \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx &= i\beta k \int_0^L s_2 (W_x - l\Phi) \bar{\varphi} dx - \frac{2k^2l}{\rho_1} \int_0^L s_2' (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\varphi} dx \\
&+ \frac{k_0 k l^2}{\rho_1} \int_0^L s_2 (w_x - l\varphi) \bar{\varphi} dx - \frac{l^2 \gamma k}{\rho_1} \int_0^L s_2 \theta \bar{\varphi} dx \\
&+ \frac{2k^2l}{\rho_1} \int_0^L s_2 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\psi + lw)} dx + lk \int_0^L s_2 f_2 \bar{\varphi} dx \\
&- \frac{k\gamma}{\rho_1} \int_0^L \theta_x [s_2 \bar{\varphi}]_x dx + k \int_0^L f_6 [s_2 \bar{\varphi}]_x dx + I_{14} + I_{15},
\end{aligned} \tag{4.156}$$

onde I_{14} e I_{15} são dados em (4.155).

Neste momento, antes de começarmos a estimar cada termo presente em (4.156), podemos observar que, usando a equação (4.106),

$$i\beta k \int_0^L s_2 (W_x - l\Phi) \bar{\varphi} dx = -k \int_0^L s_2 (W_x - l\Phi) \bar{\Phi} dx - k \int_0^L s_2 (W_x - l\Phi) \bar{f}_1 dx.$$

Com isto, usando as equações (4.106) e (4.110), além disso, integrando por partes,

$$\begin{aligned}
i\beta k \int_0^L s_2 (W_x - l\Phi) \bar{\varphi} dx &= -i\beta k \int_0^L s_2 (w_x - l\varphi) \bar{\Phi} dx + k \int_0^L s_2 (f_{5,x} - lf_1) \bar{\Phi} dx \\
&+ k \int_0^L W [s_2 \bar{f}_1]_x dx + kl \int_0^L s_2 \Phi \bar{f}_1 dx.
\end{aligned} \tag{4.157}$$

Substituindo (4.157) em (4.156), chegamos a

$$\begin{aligned}
\frac{2k^2l}{\rho_1} \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx &= -i\beta k \int_0^L s_2 (w_x - l\varphi) \bar{\Phi} dx + \frac{k_0 k l^2}{\rho_1} \int_0^L s_2 (w_x - l\varphi) \bar{\varphi} dx \\
&- \frac{2k^2l}{\rho_1} \int_0^L s_2' (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\varphi} dx - \frac{l^2 \gamma k}{\rho_1} \int_0^L s_2 \theta \bar{\varphi} dx \\
&+ \frac{2k^2l}{\rho_1} \int_0^L s_2 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\psi + lw)} dx \\
&+ k \int_0^L f_6 [s_2 \bar{\varphi}]_x dx - \frac{k\gamma}{\rho_1} \int_0^L \theta_x [s_2 \bar{\varphi}]_x dx + lk \int_0^L s_2 f_2 \bar{\varphi} dx \\
&+ k \int_0^L s_2 W [s_2 \bar{f}_1]_x dx + k \int_0^L s_2 (f_{5,x} - lf_1) \bar{\Phi} dx \\
&+ kl \int_0^L s_2 \Phi \bar{f}_1 dx + I_{14} + I_{15}.
\end{aligned} \tag{4.158}$$

Agora, vamos trabalhar com os termos I_{14} e I_{15} . Com efeito, realizando uma integração

por partes em I_{14} ,

$$I_{14} = -\frac{k}{\rho_1} \int_0^L s_2'(k_0(w_x - l\varphi)) \overline{\varphi_x} dx - \frac{k}{\rho_1} \int_0^L s_2(k_0(w_x - l\varphi)) \overline{(\varphi_x + \psi + lw)_x} dx \\ + \frac{k}{\rho_1} \int_0^L s_2(k_0(w_x - l\varphi)) \overline{(\psi + lw)_x} dx,$$

e, usando a equação (4.107),

$$I_{14} = -\frac{k_0 k}{\rho_1} \int_0^L s_2'(w_x - l\varphi) \overline{\varphi_x} dx + \frac{k_0 k}{\rho_1} \int_0^L s_2(w_x - l\varphi) \overline{\psi_x} dx \\ + \frac{l k_0 k}{\rho_1} \int_0^L s_2(w_x - l\varphi) \overline{w_x} dx + i\beta k_0 \int_0^L s_2(w_x - l\varphi) \overline{\Phi} dx \\ + \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_2(w_x - l\varphi) \overline{(w_x - l\varphi)} dx - \frac{k_0 l \gamma}{\rho_1} \int_0^L s_2(w_x - l\varphi) \overline{\theta} dx \\ + k_0 \int_0^L s_2(w_x - l\varphi) \overline{f_2} dx. \quad (4.159)$$

Além disso, integrando por partes o termo I_{15} ,

$$I_{15} = -\frac{k_0 k}{\rho_1} \int_0^L s_2''(w_x - l\varphi) \overline{\varphi} dx - \frac{k_0 k}{\rho_1} \int_0^L s_2''(w_x - l\varphi) \overline{\varphi_x} dx. \quad (4.160)$$

Deste modo, substituindo (4.159) e (4.160) em (4.158), segue que

$$\frac{2k^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx = i\beta(k_0 - k) \int_0^L s_2(w_x - l\varphi) \overline{\Phi} dx + I_{16} + I_{17} + I_{18} \\ + \frac{2k^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_2(\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\psi + lw)} dx, \quad (4.161)$$

onde I_{16} , I_{17} e I_{18} são dados, respectivamente, da seguinte forma

$$I_{16} = k \int_0^L W[s_2 \overline{f_1}]_x dx + kl \int_0^L s_2 \overline{\Phi f_1} dx + k \int_0^L s_2(f_{5,x} - lf_1) \overline{\Phi} dx \\ - \frac{l^2 \gamma k}{\rho_1} \int_0^L s_2 \overline{\theta \varphi} dx + kl \int_0^L s_2 f_2 \overline{\varphi} dx + \frac{\gamma k}{\rho_1} \int_0^L \theta_x [s_2 \overline{\varphi}]_x dx + k \int_0^L f_6 [s_2 \overline{\varphi}]_x dx \\ - \frac{k_0 l \gamma}{\rho_1} \int_0^L s_2(w_x - l\varphi) \overline{\theta} dx + k_0 \int_0^L s_2(w_x - l\varphi) \overline{f_6} dx,$$

$$\begin{aligned}
I_{17} = & \frac{k_0 k l^2}{\rho_1} \int_0^L s_2(w_x - l\varphi) \overline{\varphi} dx - \frac{k_0 k}{\rho_1} \int_0^L s_2(w_x - l\varphi) \overline{\varphi}_x dx + \frac{k_0 k}{\rho_1} \int_0^L s_2(w_x - l\varphi) \overline{\psi}_x dx \\
& + \frac{k_0 k l}{\rho_1} \int_0^L s_2(w_x - l\varphi) \overline{w}_x dx - \frac{k_0 k}{\rho_1} \int_0^L s_2''(w_x - l\varphi) \overline{\varphi} - \frac{k_0 k}{\rho_1} \int_0^L s_2'(w_x - l\varphi) \overline{\varphi}_x dx \\
& + \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_2(w_x - l\varphi) \overline{(w_x - l\varphi)} dx,
\end{aligned}$$

$$I_{18} = -\frac{2k^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_2'(\varphi_x + \psi + lw) \overline{\varphi} dx.$$

A partir de agora, começaremos a limitar estes termos. Primeiramente, usando as desigualdades de Hölder, Poincaré e Young, juntamente com a Estimativa (4.114), existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|I_{16}| \leq C \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (4.162)$$

Além disso, utilizando as desigualdades de Hölder e Poincaré, e também usando a propriedade (4.149) para a função s_2 , existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|I_{17}| \leq C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \left(\int_{L_0 - \frac{\delta}{2}}^{L_0 + \frac{\delta}{2}} |w_x - l\varphi|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (4.163)$$

Por fim, usando as equações (4.106), (4.108) e (4.110), vem que

$$I_{18} = -\frac{2k^2 l}{\rho_1 \beta^2} \int_0^L s_2'(\Phi_x + f_{1,x} + \Psi + f_3 + lW + lf_5) \overline{(\Phi + f_1)} dx,$$

e do Lema 2.22, obtemos

$$\operatorname{Re} \int_0^L s_2' \Phi_x \overline{\Phi} dx = -\frac{1}{2} \int_0^L s_2' |\Phi|^2 dx,$$

de onde, utilizando as desigualdades de Hölder e Young, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|\operatorname{Re} I_{18}| \leq \frac{C}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\beta|^2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (4.164)$$

Voltando em (4.161), considerando sua parte real, usando as estimativas (4.162), (4.163) e

(4.164), juntamente com a propriedade (4.149) da função s_2 , existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2|\varphi_x + \psi + lw|^2 dx &\leq C|\beta||k_0 - k| \int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2|w_x - l\varphi||\Phi| dx \\
&+ C\|\theta_x\|_2\|U\|_{\mathcal{H}_j} + C\|U\|_{\mathcal{H}_j} \left(\int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} |w_x - l\varphi|^2 dx \right)^{1/2} \\
&+ C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j} + C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\beta|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 \\
&+ C \int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2|\varphi_x + \psi + lw||\psi + lw| dx. \tag{4.165}
\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando as equações (4.108) e (4.110),

$$C \int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2|\varphi_x + \psi + lw||\psi + lw| dx = \frac{C}{|\beta|} \int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2|\varphi_x + \psi + lw||\Psi + f_3 + lW + lf_5| dx.$$

Utilizando as desigualdades de Hölder, de Young e Triangular,

$$\begin{aligned}
C \int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2|\varphi_x + \psi + lw||\psi + lw| dx &\leq \frac{1}{2} \int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2|\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \\
&+ \frac{C}{|\beta|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2,
\end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$. Substituindo esta estimativa em (4.165), existe uma constante positiva $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2|\varphi_x + \psi + lw|^2 dx &\leq C|\beta||k_0 - k| \int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2|w_x - l\varphi||\Phi| dx \\
&+ C\|\theta_x\|_2\|U\|_{\mathcal{H}_j} + C\|U\|_{\mathcal{H}_j} \left(\int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} |w_x - l\varphi|^2 dx \right)^{1/2} \\
&+ C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j} + C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\beta|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2,
\end{aligned}$$

como desejado em (4.152). □

Lema 4.27. *Sob as notações anteriores, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned}
\int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2|\Phi|^2 dx &\leq C|\beta||k_0 - k| \int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2|w_x - l\varphi||\Phi| dx \\
&+ C\|\theta_x\|_2\|U\|_{\mathcal{H}_j} + C\|U\|_{\mathcal{H}_j} \left(\int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} |w_x - l\varphi|^2 dx \right)^{1/2} \\
&+ C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j} + C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\beta|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2. \tag{4.166}
\end{aligned}$$

Demonstração. Começamos esta demonstração multiplicando a equação (4.107) por $-s_2\bar{\varphi}$ e integrando no intervalo $(0, L)$, obtendo

$$\begin{aligned} -\rho_1 \int_0^L s_2 f_2 \bar{\varphi} dx &= -i\beta\rho_1 \int_0^L s_2 \Phi \bar{\varphi} dx + k \int_0^L s_2 (\varphi_x + \psi + lw)_x \bar{\varphi} dx \\ &\quad + k_0 l \int_0^L s_2 (w_x - l\varphi) \bar{\varphi} dx - l\gamma \int_0^L s_2 \theta \bar{\varphi} dx. \end{aligned}$$

Usando a equação (4.106) e integrando por partes,

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^L s_2 |\Phi|^2 dx &= -\rho_1 \int_0^L s_2 \Phi \bar{f}_1 dx + k \int_0^L s_2' (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\varphi} dx \\ &\quad + k \int_0^L s_2 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\varphi}_x dx + k_0 l \int_0^L s_2 (w_x - l\varphi) \bar{\varphi} dx \\ &\quad + l\gamma \int_0^L s_2 \theta \bar{\varphi} dx - \rho_1 \int_0^L s_2 f_2 \bar{\varphi} dx, \end{aligned}$$

implicando, após somar termos específicos, que

$$\begin{aligned} \int_0^L s_2 |\Phi|^2 dx &= - \int_0^L s_2 \Phi \bar{f}_1 dx + \underbrace{\frac{k}{\rho_1} \int_0^L s_2' (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\varphi} dx}_{:=I_{19}} \\ &\quad + \frac{k}{\rho_1} \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx - \underbrace{\frac{k}{\rho_1} \int_0^L s_2 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\psi + lw)} dx}_{:=I_{20}} \\ &\quad - \frac{k_0 l}{\rho_1} \int_0^L s_2 (w_x - l\varphi) \bar{\varphi} dx + \frac{l\gamma}{\rho_1} \int_0^L s_2 \theta \bar{\varphi} dx - \int_0^L s_2 f_2 \bar{\varphi} dx. \quad (4.167) \end{aligned}$$

Usando as equações (4.106), (4.108) e (4.110),

$$I_{19} = \frac{k}{\rho_1 \beta^2} \int_0^L s_2' (\Phi_x + f_{1,x} + \Psi + f_3 + lW + lf_5) \overline{(\Phi + f_1)} dx,$$

e notando que, integrando por partes, segue do Lema 2.22 que

$$\operatorname{Re} \int_0^L s_2' \Phi_x \bar{\Phi} dx = -\frac{1}{2} \int_0^L s_2'' |\Phi|^2 dx,$$

temos, utilizando as desigualdades de Hölder e Young, que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|\operatorname{Re} I_{19}| \leq \frac{C}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\beta|^2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (4.168)$$

Por outro lado, usando as equações (4.108) e (4.110),

$$I_{20} = -\frac{ik}{\rho_1\beta} \int_0^L s_2(\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\Psi + f_3 + lW + lf_5)} dx.$$

Com isto, usando as desigualdades de Hölder e Young, a Desigualdade Triangular e a Propriedade (4.149) sobre a função s_2 , existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|I_{20}| \leq C \int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2|\varphi_x + \psi + lw|^2 dx + \frac{C}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\beta|^2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (4.169)$$

Portanto, considerando a parte real em (4.167), usando a Desigualdade de Hölder, as estimativas (4.168) e (4.169), a estimativa obtida no Lema 4.26 e a propriedade (4.149) sobre a função s_2 , existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2|\Phi|^2 dx &\leq C|\beta||k_0 - k| \int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2|w_x - l\varphi||\Phi| dx \\ &\quad + C\|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C\|U\|_{\mathcal{H}_j} \left(\int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} |w_x - l\varphi|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\quad + C\|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2, \end{aligned}$$

provando (4.166). □

Corolário 4.28. *Sob as notações anteriores, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\frac{\delta}{3}}^{L_0+\frac{\delta}{3}} (|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |\Phi|^2) dx &\leq C|\beta||k_0 - k| \int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2|w_x - l\varphi||\Phi| dx \\ &\quad + C\|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C\|U\|_{\mathcal{H}_j} \left(\int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} |w_x - l\varphi|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\quad + C\|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2. \end{aligned} \quad (4.170)$$

Demonstração. Basta utilizarmos, nas estimativas dos lemas 4.26 e 4.27, a Propriedade (4.150) para a função s_2 e, com isto, temos (4.170). □

Agora, é o momento preciso onde usaremos a condição (4.81). Nos resultados a seguir, para simplificar as notações, vamos considerar

$$\mathcal{I}_{\frac{\delta}{3}} = \int_{L_0-\frac{\delta}{3}}^{L_0+\frac{\delta}{3}} (|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2 + |\psi_x|^2 + |\Phi|^2 + |\Psi|^2 + |W|^2) dx. \quad (4.171)$$

Corolário 4.29. *Sob as notações anteriores, sejam $\chi_0 = 0$ em (4.81) e $|\beta| > 1$ suficientemente grande, então dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$\mathcal{I} \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (4.172)$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Nesta demonstração, usaremos a Desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$ em diversos momentos.

Primeiramente, observemos que, sendo $\chi_0 = 0$, segue do Corolário 4.28 que, utilizando a Desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{L_0 - \frac{\delta}{3}}^{L_0 + \frac{\delta}{3}} (|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |\Phi|^2) dx &\leq C_\varepsilon \int_{L_0 - \frac{\delta}{2}}^{L_0 + \frac{\delta}{2}} |w_x - l\varphi|^2 dx + \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 \\ &\quad + C \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2. \end{aligned}$$

Logo, do Corolário 4.22, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{L_0 - \frac{\delta}{3}}^{L_0 + \frac{\delta}{3}} (|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |\Phi|^2) dx &\leq \frac{C_\varepsilon}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} \\ &\quad + \frac{C}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2. \end{aligned} \quad (4.173)$$

Assim, segue dos Corolários 4.22, 4.25, dos Lemas 4.24, 4.21 e de (4.173) que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\frac{\delta}{3}} &\leq \frac{C_\varepsilon}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|} \|\vartheta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 \\ &\quad + C_\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2. \end{aligned} \quad (4.174)$$

Mais uma vez, usando a Desigualdade de Young e a Estimativa (4.114), existe $C > 0$ tal que

$$\mathcal{I}_{\frac{\delta}{3}} \leq C_\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (4.175)$$

Por fim, usando a Desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$,

$$\mathcal{I}_{\frac{\delta}{3}} \leq C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2.$$

Sendo $|\beta| > 1$ suficientemente grande, temos que dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\mathcal{I}_{\frac{\delta}{3}} \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2,$$

que mostra o resultado desejado. \square

Corolário 4.30. *Sob as notações anteriores, sejam $\chi_0 \neq 0$ em (4.81) e $|\beta| > 1$ suficientemente grande, então dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$\mathcal{I}_{\frac{\delta}{3}} \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C|\beta|^4 \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (4.176)$$

Demonstração. Sendo $\chi_0 \neq 0$, podemos observar que a maioria dos termos presentes em \mathcal{I} já foram estimados na demonstração do Corolário 4.29, com exceção do termo

$$C|\beta| \int_{L_0 - \frac{\delta}{2}}^{L_0 + \frac{\delta}{2}} s_2 |w_x - l\varphi| |\Phi| dx,$$

que se encontra na estimativa do Corolário 4.28. Com isto, basta estimarmos tal termo e teremos o resultado desejado.

Para isto, comecemos usando a Desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$ e a Propriedade (4.149) da função s_2 , obtendo

$$C|\beta| \int_{L_0 - \frac{\delta}{2}}^{L_0 + \frac{\delta}{2}} s_2 |w_x - l\varphi| |\Phi| dx \leq C_\varepsilon |\beta|^2 \int_{L_0 - \frac{\delta}{2}}^{L_0 + \frac{\delta}{2}} |w_x - l\varphi|^2 dx + \varepsilon \int_{L_0 - \frac{\delta}{2}}^{L_0 + \frac{\delta}{2}} |\Phi|^2 dx.$$

Logo, segue do Corolário 4.22 que

$$\begin{aligned} C|\beta| \int_{L_0 - \frac{\delta}{2}}^{L_0 + \frac{\delta}{2}} s_2 |w_x - l\varphi| |\Phi| dx &\leq C|\beta| \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C|\beta|^2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} \\ &\quad + C|\beta|^2 \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2. \end{aligned} \quad (4.177)$$

Por fim, sendo $|\beta| > 1$, usando a Desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$ e a Estimativa (4.114), existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que,

$$C|\beta| \int_{L_0 - \frac{\delta}{2}}^{L_0 + \frac{\delta}{2}} s_2 |w_x - l\varphi| |\Phi| dx \leq C_\varepsilon |\beta|^4 \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2.$$

Com isto, usando as estimativas obtidas na demonstração do Corolário 4.29, temos que dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que, para $|\beta| > 1$ suficientemente grande,

$$\mathcal{I}_{\frac{\delta}{3}} \leq C_\varepsilon |\beta|^4 \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2,$$

o que mostra o desejado. \square

Com as estimativas obtidas durante esta seção, podemos finalizar a demonstração dos teoremas 4.14 e 4.15, como afirmado inicialmente.

4.3.2 Estabilidade Exponencial - Conclusão da prova do Teorema 4.14

Face ao Teorema de Prüss, a demonstração do Teorema 4.14 é baseada na caracterização de estabilidade exponencial para um C_0 -semigrupo de contrações.

Do Lema 4.18, segue que

$$i\mathbb{R} \subset \rho(A_j),$$

para $j = 1, 2$. Com isso, temos a primeira condição do Teorema de Prüss satisfeita.

Para concluirmos a segunda condição do Teorema de Prüss, seja $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente e $\chi_0 = 0$. Utilizando a notação dada em (4.171), segue do Corolário 4.29 que existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\mathcal{I}_{\frac{\delta}{3}} \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (4.178)$$

Aqui, obtemos uma estimativa local para o vetor $U \in D(A_j)$. Para que seja possível estender esta estimativa para o intervalo $(0, L)$, vamos usar a Desigualdade de Observabilidade para o Sistema de Bresse, apresentada no Capítulo 3.

Primeiramente, segue das equações (4.106)-(4.111) que $V = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ é solução de (3.1)-(3.6), considerando

$$g_1 = f_1; \quad g_2 = \rho_1 f_2 - l\gamma\theta; \quad g_3 = f_3; \quad g_4 = \rho_2 f_4 - \gamma\vartheta_x; \quad g_5 = f_5; \quad g_6 = \rho_1 f_6 - \gamma\theta_x. \quad (4.179)$$

Além disso, de (4.178), observando que a notação $\mathcal{I}_{\frac{\delta}{3}}$ é uma integral local do tipo $\|V\|_{b_1, b_2}^2$ com $b_1 = L_0 - \frac{\delta}{3}$ e $b_2 = L_0 + \frac{\delta}{3}$, a condição (3.34) é satisfeita para $\Lambda := \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2$.

Com isso, aplicando o Corolário 3.2, a estimativa (4.114) e a Desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$, existem constantes $C, C_\varepsilon > 0$ tais que

$$\int_0^L (|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2 + |\psi_x|^2 + |\Phi|^2 + |\Psi|^2 + |W|^2) dx \leq \varepsilon C \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (4.180)$$

Agora, combinando (4.180) com a estimativa (4.114) e usando novamente a Desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$, existem constantes $C, C_\varepsilon > 0$ tais que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 \leq \varepsilon C \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2.$$

Logo, considerando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $C > 0$ tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 \leq C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2.$$

Lembrando que $U \in D(A_j)$ é a única solução da equação resolvente (4.105), segue que

$$\|(i\beta I_d - A_j)^{-1} F\|_{\mathcal{H}_j} \leq C \|F\|_{\mathcal{H}_j}, \quad |\beta| \rightarrow \infty, \quad (4.181)$$

para alguma constante $C > 0$, concluindo a veracidade da segunda condição do Teorema de Prüss.

Portanto, aplicando o Teorema de Prüss, concluímos a prova do Teorema 4.14, isto é, a solução $U(t) = e^{A_j t} U_0$ do problema de Cauchy abstrato (4.53) possui um decaimento exponencial no caso em que $\chi_0 = 0$. Em outras palavras, o sistema (4.1)-(4.4) é exponencialmente estável quando $\chi_0 = 0$. \square

4.3.3 Estabilidade Polinomial - Conclusão da prova do Teorema 4.15

A demonstração do Teorema 4.15 é baseada na caracterização da estabilidade polinomial para um C_0 -semigrupo de contrações, de acordo com o Teorema de Borichev e Tomilov.

Do Lema 4.18, temos uma das condições do Teorema de Borichev e Tomilov satisfeita. Com o intuito de concluir a outra condição do Teorema de Borichev e Tomilov, seja $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente e $\chi_0 \neq 0$. Usando a notação dada em (4.171), segue do Corolário 4.30 que existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\mathcal{I}_{\frac{\delta}{3}} \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon |\beta|^4 \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (4.182)$$

Novamente, obtemos uma estimativa local para o vetor $U \in D(A_j)$. Para estender tal estimativa para o intervalo $(0, L)$, vamos usar a Desigualdade de Observabilidade para o Sistema de Bresse, vide Capítulo 3.

Analogamente à Subseção 4.3.2, observando que $V = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ satisfaz (3.1)-(3.6) com

$$g_1 = f_1; \quad g_2 = \rho_1 f_2 - l\gamma\theta; \quad g_3 = f_3; \quad g_4 = \rho_2 f_4 - \gamma\vartheta_x; \quad g_5 = f_5; \quad g_6 = \rho_1 f_6 - \gamma\theta_x,$$

e, lembrando que $\mathcal{I}_{\frac{\delta}{3}}$ é uma integral local do tipo $\|V\|_{b_1, b_2}^2$ com $b_1 = L_0 - \frac{\delta}{3}$ e $b_2 = L_0 + \frac{\delta}{3}$, segue de (4.182) que a condição (3.34) é satisfeita com $\Lambda := \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon |\beta|^4 \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2$.

Logo, podemos utilizar o Corolário 3.2, a estimativa (4.114) e a Desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$ e, deste modo, obtemos que existem constantes $C, C_\varepsilon > 0$ tais que

$$\int_0^L (|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2 + |\psi_x|^2 + |\Phi|^2 + |\Psi|^2 + |W|^2) dx \leq \varepsilon C \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon |\beta|^4 \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (4.183)$$

Combinando a equação (4.183) com a estimativa (4.114) e usando novamente a Desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$, existem constantes $C, C_\varepsilon > 0$ tais que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 \leq \varepsilon C \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon |\beta|^4 \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2.$$

Logo, considerando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, da equação resolvente (4.105), existe $C > 0$ tal que

$$\|(i\beta I_d - A_j)^{-1} F\|_{\mathcal{H}_j} \leq C |\beta|^2 \|F\|_{\mathcal{H}_j}, \quad |\beta| \rightarrow \infty, \quad (4.184)$$

o que mostra a segunda condição do Teorema de Borichev-Tomilov, com $\alpha = 2$. Logo, segue do

Teorema de Borichev-Tomilov que

$$\|S(t)A_j^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_j)} = \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2}}),$$

onde $S(t) = e^{A_j t}$ é o semigrupo gerado por A_j em \mathcal{H}_j definido em (4.56). Deste modo, como $0 \in \rho(A_j)$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_j} = \|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}_j} = \|S(t)A_j^{-1}F\|_{\mathcal{H}_j} \leq C t^{-\frac{1}{2}} \|U_0\|_{D(A_j)}, \quad t \rightarrow \infty,$$

para $U_0 \in D(A_j)$, como queríamos mostrar em (4.84).

Portanto, face ao Teorema de Borichev e Tomilov, demonstramos o Teorema 4.15, ou seja, a solução $U(t) = e^{A_j t} U_0$ do problema de Cauchy abstrato (4.53) possui um decaimento polinomial no caso em que $\chi_0 \neq 0$ e $U_0 \in D(A_j)$. Em outras palavras, o sistema (4.1)-(4.4) é polinomialmente estável quando $\chi_0 \neq 0$ e $U_0 \in D(A_j)$, $j = 1, 2$. \square

4.3.4 Otimalidade do decaimento polinomial

Considerando o problema (4.1)-(4.2) com as condições de fronteira dadas em (4.4) e também $k - k_0 \neq 0$, segue do Teorema 4.15 que dado $U_0 \in D(A_2)$,

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{1/2}} \|U_0\|_{D(A_2)}, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (4.185)$$

No que segue, vamos concluir que a taxa de decaimento polinomial $t^{-1/2}$ dada em (4.185) é ótima, no sentido de que a taxa $t^{-1/2}$ não pode ser melhorada. Além disso, vamos concluir a falta de decaimento exponencial quando $\chi_0 \neq 0$. Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.31. *Sob as notações anteriores, se $\chi_0 \neq 0$, então a taxa de decaimento polinomial $t^{-1/2}$ dada em (4.185) é ótima. Em particular, se $\chi_0 \neq 0$, o sistema (4.1)-(4.2) com condições de fronteira (4.4) não é exponencialmente estável.*

Demonstração. Sejam $\chi_0 = k - k_0 \neq 0$ e $U_0 \in D(A_2)$ fixo. Para mostrar a otimalidade da taxa de decaimento polinomial $t^{-1/2}$, vamos usar argumentos de contradição.

Com efeito, suponha que a taxa de decaimento $t^{-1/2}$ dada em (4.185) não seja ótima, isto é, existe $\nu \in (0, 2)$ tal que

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2-\nu}}} \|U_0\|_{D(A_2)}, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Então, como $U(t) = S(t)U_0 = e^{A_2 t} U_0$, segue que

$$\|e^{A_2 t} U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2-\nu}}} \|U_0\|_{D(A_2)}, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Além disso, utilizando o fato de que $0 \in \rho(A_2)$ e a norma do domínio $D(A_2)$, segue que

$$\|e^{A_2 t}(A_2)^{-1}F\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2-\nu}}} \|F\|_{\mathcal{H}_2}, \quad t \rightarrow +\infty,$$

portanto, obtemos

$$\|e^{A_2 t}(A_2)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2-\nu}}}, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Do Teorema de Borichev e Tomilov, temos que

$$\frac{1}{|\beta|^{2-\nu}} \|(i\beta I_d - A_2)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} \leq C, \quad |\beta| \rightarrow +\infty. \quad (4.186)$$

Por outro lado, se encontrarmos uma sequência $(F_n) \subset \mathcal{H}_2$ limitada, para todo $n \in \mathbb{N}$ e uma sequência $(\beta_n) \subset \mathbb{R}$ com $|\beta_n| \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\beta_n|^{2-\nu}} \|(i\beta_n I_d - A_2)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_2} = +\infty, \quad (4.187)$$

então teremos uma contradição envolvendo as afirmações (4.186) e (4.187).

Portanto, basta mostrarmos a existência das sequências $(F_n) \subset \mathcal{H}_2$ e $(\beta_n) \subset \mathbb{R}$ satisfazendo (4.187). Para isto, sem perda de generalidade, consideremos $L = \pi$ e tomemos $F_n \in \mathcal{H}_2$ da seguinte forma

$$F_n = \left(0, \frac{1}{\rho_1} \text{sen}(nx), 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right).$$

Agora, como $i\mathbb{R} \subset \rho(A_2)$, seja $U_n \in \mathcal{H}_2$ tal que

$$(i\beta I - A_2)U_n = F_n. \quad (4.188)$$

Reescrevendo (4.188) em termos de suas componentes e omitindo o índice n de U_n , isto é, usando a notação $U_n = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \theta, \vartheta) \in \mathcal{H}_2$, temos

$$\begin{cases} i\beta\varphi - \Phi = 0, \\ i\beta\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0l(w_x - l\varphi) + l\gamma\theta = \text{sen}(nx), \\ i\beta\psi - \Psi = 0, \\ i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\vartheta_x = 0, \\ i\beta w - W = 0, \\ i\beta\rho_1 W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = 0, \\ i\beta\theta - k_1\theta_{xx} + m(W_x - l\Phi) = 0, \\ i\beta\vartheta - k_1\vartheta_{xx} + m\Psi_x = 0. \end{cases} \quad (4.189)$$

Deste modo, $\Phi = i\beta\varphi$, $\Psi = i\beta\psi$ e $W = i\beta w$. Logo, reescrevemos (4.189) como

$$\begin{cases} -\rho_1\beta^2\varphi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0l(w_x - l\varphi) + l\gamma\theta = \text{sen}(nx), \\ -\rho_2\beta^2\psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\vartheta_x = 0, \\ -\rho_1\beta^2w - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = 0, \\ i\beta\theta - k_1\theta_{xx} + i\beta m(w_x - l\varphi) = 0, \\ i\beta\vartheta - k_1\vartheta_{xx} + i\beta m\psi_x = 0. \end{cases} \quad (4.190)$$

Para que as condições de fronteira dadas em (4.4) sejam satisfeitas, podemos supor que a solução do sistema (4.190) é da forma

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= A \sin(nx), & \psi(x) &= B \cos(nx), & w(x) &= C \cos(nx), \\ \theta(x) &= D \sin(nx), & \vartheta(x) &= E \sin(nx). \end{aligned} \quad (4.191)$$

Substituindo (4.191) em (4.190), chegamos ao seguinte sistema algébrico, equivalente à (4.190)

$$\begin{cases} (-\rho_1\beta^2 + kn^2 + k_0l^2)A + knB + (k + k_0)lnC + l\gamma D = 1, \\ knA + (-\rho_2\beta^2 + bn^2 + k)B + klC + \gamma nE = 0, \\ (k + k_0)lnA + klB + (-\rho_1\beta^2 + k_0n^2 + kl^2)C + \gamma nD = 0 \\ -i\beta mlA - i\beta mnC + (i\beta + k_1n^2)D = 0, \\ -i\beta mnB + (i\beta + k_1n^2)E = 0. \end{cases} \quad (4.192)$$

Reescrevendo (4.192) no formato matricial, temos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_1 & kn & (k + k_0)ln & l\gamma & 0 \\ kn & P_2 & kl & 0 & \gamma n \\ (k + k_0)ln & kl & P_3 & \gamma n & 0 \\ -i\beta ml & 0 & i\beta mn & P_4 & 0 \\ 0 & -i\beta mn & 0 & 0 & P_4 \end{bmatrix}}_{:=M} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde denotamos

$$\begin{aligned} P_1 &= -\rho_1\beta^2 + kn^2 + k_0l^2, \\ P_2 &= -\rho_2\beta^2 + bn^2 + k, \\ P_3 &= -\rho_1\beta^2 + k_0n^2 + kl^2, \\ P_4 &= i\beta + k_1n^2. \end{aligned}$$

Lembrando que nossa intenção é avaliar o comportamento de

$$\|(i\beta I - A_2)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_2}, \quad n \rightarrow +\infty, \quad (4.193)$$

observemos que

$$\|(i\beta I_d - A_2)^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 \geq \rho_1 \|\Phi\|_2^2 = \rho_1 |\beta|^2 \|\varphi\|_2^2 = \frac{\pi}{2} \rho_1 |\beta|^2 |A|^2.$$

A fim de concluir (4.193), devemos avaliar a constante A e observar como tal, que depende de n , se comporta quando $n \rightarrow +\infty$.

Para isso, vamos utilizar a regra de Cramer. Deste modo, antes de mais nada, devemos mostrar que $\det M \neq 0$. Com efeito, usando o método de Laplace,

$$\begin{aligned} \det M &= P_1 P_2 P_3 P_4^2 - k^2 n^2 P_3 P_4^2 - l^2 (k + k_0)^2 n^2 P_2 P_4^2 + i\beta \gamma m n^2 P_1 P_2 P_4 + i\beta m \gamma n^2 P_1 P_3 P_4 \\ &\quad - \beta^2 m^2 \gamma^2 n^4 P_1 - i\beta m \gamma l^2 n^4 (k + k_0)^2 P_4 + i\beta l^2 \gamma m P_2 P_3 P_4 - 2i\beta l^2 (k + k_0) \gamma m n^2 P_2 P_4 \\ &\quad - i\beta k^2 \gamma m n^4 P_4 + 2\beta^2 m^2 \gamma^2 n^4 l^2 (k + k_0) - \beta^2 m^2 l^2 \gamma n^2 P_3 + 2k^2 l^2 (k + k_0) n^2 P_4^2 \\ &\quad - k^2 l^2 P_1 P_4^2 + 2i\beta k^2 l^2 \gamma m n^2 P_4 - i\beta k^2 l^4 \gamma m P_4. \end{aligned}$$

Escolhendo a sequência $(\beta_n) \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\beta_n = \sqrt{\frac{1}{\rho_1} (kn^2 + k_0 l^2 - \Xi)}, \quad (4.194)$$

onde a constante $\Xi \in \mathbb{R}$ será determinada posteriormente. Além disso, omitiremos o índice n da sequência β_n para simplificar as notações. Deste modo, segue que o grau de P_1, P_2, P_3 e P_4 é menor ou igual a 2 e, sendo assim, o $\det M$ se comporta como um polinômio complexo de grau 10, isto é,

$$\det M \approx P(n^{10}).$$

Sendo assim, a aplicação $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\phi(n) = P(n^{10})$ tem no máximo 10 raízes, ou seja, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\phi(n) \neq 0, \forall n > n_0.$$

Portanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\det M \neq 0, \forall n > n_0.$$

Sabendo que $\det M \neq 0$, com β escolhido da forma (4.194), então podemos calcular A utilizando a regra de Cramer, ou seja,

$$A = \frac{\det M_1}{\det M},$$

onde a matriz M_1 é dada por

$$M_1 := \begin{bmatrix} 1 & kn & (k+k_0)ln & l\gamma & 0 \\ 0 & P_2 & kl & 0 & \gamma n \\ 0 & kl & P_3 & \gamma n & 0 \\ 0 & 0 & i\beta mn & P_4 & 0 \\ 0 & -i\beta mn & 0 & 0 & P_4 \end{bmatrix}.$$

Notemos que

$$\det M_1 = P_2 P_3 P_4^2 + i\beta \gamma mn^2 P_3 P_4 + i\beta m \gamma n^2 P_2 P_4 - \beta^2 m^2 n^4 \gamma^2 - k^2 l^2 P_4^2.$$

Levando em consideração (1.8), então nota-se facilmente de (4.81) e (4.82) que

$$\chi_0 = k - k_0 \neq 0 \Leftrightarrow \chi = \frac{k}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2} \neq 0 \Leftrightarrow \chi_1 := b - \frac{\rho_2}{\rho_1} k \neq 0.$$

Observemos, até o momento, que o grau do $\det M$ é menor ou igual 10, enquanto o grau do $\det M_1$ é menor ou igual a 8. A fim de diminuir o grau do $\det M$ sem interferir no grau do $\det M_1$, escolhemos $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $P_1 = \Xi$, onde Ξ é uma constante (a ser determinada) independente de n , ou seja, tal que

$$-\rho_1 \beta^2 + kn^2 + k_0 l^2 = \Xi,$$

isto é,

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{\rho_1}(kn^2 + k_0 l^2 - \Xi)}. \quad (4.195)$$

Com essa escolha, podemos analisar os três primeiros termos de $\det M$, que possuem maior grau, isto é,

$$P_1 P_2 P_3 P_4^2 - k^2 n^2 P_3 P_4^2 - l^2 (k+k_0)^2 n^2 P_2 P_4^2 = (P_1 P_2 P_3 - k^2 n^2 P_3 - l^2 (k+k_0)^2 n^2 P_2) P_4^2. \quad (4.196)$$

Substituindo β tomado em (4.195) em P_2 e P_3 , temos

$$\begin{aligned} P_1 &= \Xi, \\ P_2 &= \left(b - \frac{\rho_2}{\rho_1} k\right) n^2 + k - \frac{\rho_2}{\rho_1} k_0 l^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \Xi, \\ P_3 &= (k_0 - k) n^2 + (k - k_0) l^2 - \Xi. \end{aligned}$$

Assim,

$$P_1 P_2 P_3 - k^2 n^2 P_3 - l^2 (k+k_0)^2 n^2 P_2 = \sigma_1 n^4 + \sigma_2 n^3, \quad \sigma_1, \sigma_2 > 0, \quad n \rightarrow +\infty,$$

onde

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \left(b - \frac{\rho_2}{\rho_1}k\right) (k_0 - k)\Xi - k^2(k_0 - k) - l^2(k_0 + k)^2 \left(b - \frac{\rho_2}{\rho_1}k\right) \\ &= \chi_1 \chi_0 \Xi - k^2 \chi_0 - l^2(k_0 + k)^2 \chi_1.\end{aligned}$$

Portanto, com a intenção de diminuir o grau do termo dado em (4.196), tome

$$\Xi = \frac{k^2 \chi_0 + l^2(k_0 + k)^2 \chi_1}{\chi_1 \chi_0}, \quad (4.197)$$

que é uma constante independente de n .

Deste modo, com a constante Ξ dada em (4.197), obtemos uma sequência $(\beta_n) \subset \mathbb{R}$ onde seus termos são dados em (4.195), de modo que $|\beta_n| \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$. Além disso,

$$\begin{aligned}\det M &\approx \sigma_3 n^7, \quad \sigma_3 > 0, \quad n \rightarrow +\infty, \\ \det M_1 &\approx \sigma_4 n^8, \quad \sigma_4 > 0, \quad n \rightarrow +\infty.\end{aligned}$$

Com isto, o termo A tem um comportamento

$$|A| \approx \sigma_5 n, \quad \sigma_5 > 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Logo,

$$\|(i\beta_n I_d - A_2)^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 \geq \frac{\pi}{2} \rho_1 |\beta|^2 |A|^2 \rightarrow +\infty, \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty. \quad (4.198)$$

Extraindo a raiz de (4.198) e multiplicando por $|\beta|^{\nu-2}$, temos

$$|\beta|^{\nu-2} \|(i\beta_n I_d - A_2)^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}_2} \geq \sqrt{\frac{\pi}{2} \rho_1} |\beta|^{\nu-1} |A| \approx \sigma_6 n^\nu, \quad \sigma_6 > 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Portanto, existe uma sequência $(F_n) \subset \mathcal{H}_2$ com $\|F_n\| \leq 1$ e uma sequência $(\beta_n) \subset \mathbb{R}$, $|\beta_n| \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$ tais que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\beta|^{2-\nu}} \|(i\beta_n I_d - A_2)^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}_2} = +\infty,$$

mostrando (4.187). Portanto, concluímos que a taxa de decaimento polinomial $t^{-1/2}$ é ótima. Em particular, de (4.198) segue a falta de decaimento exponencial quando $\chi_0 = k - k_0 \neq 0$, via o Teorema de Prüss. \square

Observação 11. Podemos observar que concluímos a falta de decaimento exponencial e a otimalidade de taxa de decaimento polinomial para a condição de fronteira mista dada em (1.12). Não podemos afirmar que tal resultado é válido para a condição de fronteira do tipo Dirichlet dada em

(1.11), pois o método utilizado para demonstrar o Teorema 4.31 não poderia ser aplicado neste caso. De fato, teríamos problemas com a escolha das funções dadas em (4.191) ou, dependendo desta escolha, com a resolução do sistema algébrico obtido na sequência.

5 SISTEMA TERMOELÁSTICO DE BRESSE COM DISSIPACÃO LOCALIZADA

5.1 O MODELO COM DOIS ACOPLAMENTOS TÉRMICOS E UMA DISSIPACÃO LOCALIZADA

Neste capítulo, estudaremos o seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + l\gamma\theta + \alpha(x)\varphi_t = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, +\infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\vartheta_x = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, +\infty), \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, +\infty), \\ \theta_t - k_1 \theta_{xx} + m(w_x - l\varphi)_t = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, +\infty), \\ \vartheta_t - k_1 \vartheta_{xx} + m\psi_{xt} = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, +\infty), \end{array} \right. \quad (5.1)$$

com condições de iniciais

$$\begin{aligned} \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1, \quad \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \quad \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1, \\ w(\cdot, 0) = w_0, \quad w_t(\cdot, 0) = w_1, \quad \theta(\cdot, 0) = \theta_0, \quad \vartheta(\cdot, 0) = \vartheta_0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

e condições de fronteira do tipo Dirichlet

$$\varphi(x, t) = \psi(x, t) = w(x, t) = \theta(x, t) = \vartheta(x, t) = 0, \quad x \in \{0, L\}, \quad t \geq 0, \quad (5.3)$$

ou com condições de fronteira do tipo Dirichlet-Neumann

$$\varphi(x, t) = \psi_x(x, t) = w_x(x, t) = \theta(x, t) = \vartheta(x, t) = 0, \quad x \in \{0, L\}, \quad t \geq 0, \quad (5.4)$$

onde os coeficientes $\rho_1, \rho_2, k, k_0, k_1, l, b$ e m são constantes positivas, $\alpha = \alpha(x)$ uma função não negativa e as funções φ, ψ, w, θ e ϑ descrevem, respectivamente, a oscilação vertical, o ângulo de rotação da seção transversal, a oscilação longitudinal e as variações da temperatura de uma viga arqueada, fina e com comprimento L , conforme apresentado no Capítulo 1.

Aqui, diferentemente do problema (4.1)-(4.4) do Capítulo 4, mostraremos que o problema (5.1)-(5.4) decai exponencialmente independente de qualquer relação entre os coeficientes, conforme foi indicado em (1.13). Para isso, assumiremos que α é uma função não negativa e localizada definida como segue.

Hipótese 5.1. *Seja $\alpha \in W^{1,\infty}(0, L)$ uma função não negativa satisfazendo*

$$\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0 \quad \text{para todo } x \in \omega \subset (0, L), \quad (5.5)$$

onde $\omega \neq \emptyset$ é um subintervalo aberto qualquer de $(0, L)$.

Observação 12. Note que α pode se anular no complementar de ω , de modo que a dissipação

localizada $\alpha(x)\varphi_t$ tem efeito apenas no aberto genérico ω . A Figura 5.1 ilustra um caso em que α é efetivamente positiva apenas numa vizinhança contida em $(0, L)$.

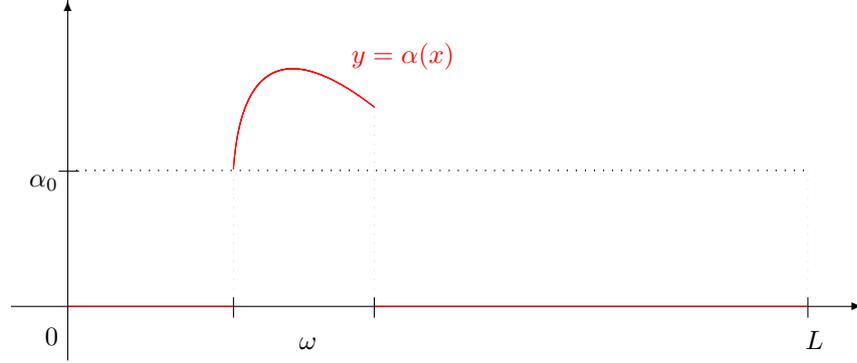


Figura 5.1: Descrição geométrica de um exemplo para a função $\alpha(x)$.

5.2 EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Prosseguindo de um modo semelhante ao apresentado no Capítulo 4, temos como objetivo inicial, reescrever o sistema (5.1)-(5.4) num problema de Cauchy abstrato e, conseqüentemente, utilizar a teoria de semigrupos de operadores lineares para garantir a existência e unicidade da solução deste problema.

Para isto, comecemos considerando os seguintes espaços

$$\mathcal{H}_1 = H_0^1 \times L^2 \times H_0^1 \times L^2 \times H_0^1 \times L^2 \times L^2 \times L^2, \quad (5.6)$$

para as condições de fronteira dadas em (5.3) e

$$\mathcal{H}_2 = H_0^1 \times L^2 \times H_*^1 \times L_*^2 \times H_*^1 \times L_*^2 \times L^2 \times L^2, \quad (5.7)$$

para as condições de fronteira dadas em (5.4).

Além disso, consideremos seus elementos da forma $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \theta, \vartheta) \in \mathcal{H}_j$, para $j = 1, 2$.

Notemos que, podemos definir em \mathcal{H}_j a seguinte norma

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 &= \rho_1 \|\Phi\|_2^2 + \rho_2 \|\Psi\|_2^2 + \rho_1 \|W\|_2^2 + b \|\psi_x\|_2^2 \\ &+ k \|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0 \|w_x - l\varphi\|_2^2 + \frac{\gamma}{m} \|\theta\|_2^2 + \frac{\gamma}{m} \|\vartheta\|_2^2, \end{aligned} \quad (5.8)$$

com a condição de que $lL \neq n\pi$, para todo $n \in \mathbb{N}$, quando considerada a condição de fronteira (5.4).

Segue do Corolário 4.5 que a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_j}$ é equivalente à norma usual do espaço \mathcal{H}_j dada por

$$|U|_{\mathcal{H}_j}^2 = \|\varphi_x\|_2^2 + \|\Phi\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|\Psi\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 + \|W\|_2^2 + \|\theta\|_2^2 + \|\vartheta\|_2^2. \quad (5.9)$$

Portanto, temos que o espaço \mathcal{H}_j é Hilbert para $j = 1, 2$.

Inicialmente, vamos reescrever o sistema (5.1)-(5.4) na forma de um problema de Cauchy abstrato. Logo após, utilizaremos alguns resultados vistos no Capítulo 4 que serão de extrema utilidade para garantir o principal resultado desta seção, o qual nos fornece a existência e unicidade da solução do problema de Cauchy abstrato e, conseqüentemente, do sistema (5.1)-(5.4).

De fato, consideremos os espaços de Hilbert \mathcal{H}_j , dados em (5.6) e (5.7), para $j = 1, 2$, respectivamente. Denotando $\Phi = \varphi_t, \Psi = \psi_t, W = w_t$, o vetor $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \theta, \vartheta)$ e $U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1, \theta_0, \vartheta_0)$, reescrevemos o sistema (5.1)-(5.4) como um problema de Cauchy abstrato dado por

$$\begin{cases} U_t = A_j U, & t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (5.10)$$

para todo $U \in D(A_j)$, onde

$$D(A_1) = \{U \in \mathcal{H}_1 : \varphi, \psi, w, \theta, \vartheta \in H^2 \cap H_0^1; \Phi, \Psi, W \in H_0^1\}, \quad (5.11)$$

$$D(A_2) = \{U \in \mathcal{H}_2 : \varphi, \theta, \vartheta \in H^2; \Phi, \psi_x, w_x, \theta, \vartheta \in H_0^1; \Psi, W \in H_*^1\}, \quad (5.12)$$

e o operador $A_j : D(A_j) \subset \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_j$ é dado por

$$A_j U = \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw)_x + \frac{k_0 l}{\rho_1}(w_x - l\varphi) - \frac{l\gamma}{\rho_1}\theta - \frac{\alpha}{\rho_1}\Phi \\ \Psi \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + lw) - \frac{\gamma}{\rho_2}\vartheta_x \\ W \\ \frac{k_0}{\rho_1}(w_x - l\varphi)_x - \frac{kl}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw) - \frac{\gamma}{\rho_1}\theta_x \\ k_1\theta_{xx} - m(W_x - l\Phi) \\ k_1\vartheta_{xx} - m\Psi_x \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

para todo $U \in D(A_j), j = 1, 2$.

Deste modo, estudar o problema (5.1)-(5.4) é equivalente a realizar um estudo do problema de valor inicial (5.10), o qual faremos por meio da teoria de semigrupos de operadores lineares.

Além disso, notemos que os domínios do operador A_j definidos em (5.11) e (5.12) são os mesmos domínios definidos anteriormente em (4.54) e (4.55), respectivamente.

Lema 5.2. *O operador A_j definido em (5.13) é dissipativo em \mathcal{H}_j , para $j = 1, 2$.*

Demonstração. Para mostrar que o operador $A_j : D(A_j) \subset \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_j$ é dissipativo, basta verificar que $\text{Re}((A_j U, U))_{\mathcal{H}_j} \leq 0$. Com efeito, dado $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \theta, \vartheta) \in \mathcal{H}_j$, da definição do operador A_j dada em (5.13), já realizando integrações por partes e utilizando as condições de

fronteira, segue que

$$\begin{aligned}
((A_j U, U))_{\mathcal{H}_j} &= -k(\varphi_x + \psi + lw, \Phi_x)_2 - k_0(w_x - l\varphi, -l\Phi)_2 + \gamma(\theta, -l\Phi)_2 - (\alpha\Phi, \Phi)_2 \\
&\quad - b(\psi_x, \Psi_x)_2 - k(\varphi_x + \psi + lw, \Psi)_2 + \gamma(\vartheta, \Psi_x)_2 + b(\Psi_x, \psi_x)_2 \\
&\quad - k_0(w_x - l\varphi, W_x)_2 - k(\varphi_x + \psi + lw, lW)_2 + \gamma(\theta, W_x)_2 \\
&\quad + k(\Phi_x + \Psi + lW, \varphi_x + \psi + lw)_2 + k_0(W_x - l\Phi, w_x - l\varphi)_2 \\
&\quad - \frac{k_1\gamma}{m}(\theta_x, \theta_x)_2 - \gamma(W_x - l\Phi, \theta)_2 - \frac{k_1\gamma}{m}(\vartheta_x, \vartheta_x)_2 - \gamma(\Psi_x, \vartheta)_2
\end{aligned}$$

Assim, considerando a parte real de $((A_j U, U))_{\mathcal{H}_j}$, temos para todo $U \in D(A_j)$ que

$$\operatorname{Re}((A_j U, U))_{\mathcal{H}_j} = -\frac{k_1\gamma}{m}(\|\theta_x\|_2^2 + \|\vartheta_x\|_2^2) - \int_0^L \alpha|\Phi|^2 dx \leq 0. \quad (5.14)$$

Como $k_1, \gamma, m > 0$ e $\alpha \geq 0$, o operador A_j é dissipativo em \mathcal{H}_j , para $j = 1, 2$. \square

Lema 5.3. *Sob as notações anteriores,*

$$0 \in \rho(A_j), \text{ para } j = 1, 2,$$

onde $\rho(A_j)$ denota o conjunto resolvente de A_j dado em (5.13).

Demonstração. Para concluir que $0 \in \rho(A_j)$, basta mostrarmos que o operador linear $-A_j : D(A_j) \subset \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_j$ é um operador invertível e, além disso, $(-A_j)^{-1}$ é limitado.

De fato, para concluirmos estas duas afirmações, prosseguiremos de maneira análoga à demonstração do Lema 4.10. Notemos que a única diferença com a demonstração do Lema 4.10 é a presença do termo $\frac{\alpha}{\rho_1}\Phi$ na igualdade (4.59) presente na equação resolvente (4.58)-(4.65). De fato,

$$-\Phi = f_1, \quad (5.15)$$

$$-\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw)_x - \frac{k_0 l}{\rho_1}(w_x - l\varphi) + \frac{l\gamma}{\rho_1}\theta + \frac{\alpha}{\rho_1}\Phi = f_2, \quad (5.16)$$

$$-\Psi = f_3, \quad (5.17)$$

$$-\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + lw) + \frac{\gamma}{\rho_2}\vartheta_x = f_4, \quad (5.18)$$

$$-W = f_5, \quad (5.19)$$

$$-\frac{k_0}{\rho_1}(w_x - l\varphi)_x + \frac{k l}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw) + \frac{\gamma}{\rho_1}\theta_x = f_6, \quad (5.20)$$

$$-k_1\theta_{xx} + m(W_x - l\Phi) = f_7, \quad (5.21)$$

$$-k_1\vartheta_{xx} + m\Psi_x = f_8. \quad (5.22)$$

Portanto, seguindo de modo análogo à demonstração do Lema 4.10, podemos mostrar que existe o operador $(-A_j)^{-1}$ e, além disso, $(-A_j)^{-1}$ é limitado, para $j = 1, 2$. Deste modo, conclui-

se que $0 \in \rho(A_j)$, para $j = 1, 2$. □

Teorema 5.4. *O operador $A_j : D(A_j) \subset \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_j$ definido em (5.13) é um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $e^{A_j t}$ sobre \mathcal{H}_j , para $j = 1, 2$.*

Demonstração. De acordo com o Corolário 2.25 e com os Lemas 5.2, 5.3 e 4.11, segue que o operador A_j definido em (5.13) é um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $e^{A_j t}$ sobre \mathcal{H}_j , para $j = 1, 2$. □

Teorema 5.5. *Para cada vetor $U_0 \in D(A_j)$, o problema (5.10) possui uma única solução*

$$U \in C([0, \infty), D(A_j)) \cap C^1([0, \infty), \mathcal{H}_j),$$

dada por $U(t) = e^{A_j t} U_0$, para $j = 1, 2$.

Além disso, se $U_0 \in D(A^n)$, $n \geq 2$, então existe uma única função U na classe

$$U \in \bigcap_{j=0}^n C^{n-j}([0, +\infty), D(A^j)).$$

Demonstração. Sendo $A_j : D(A_j) \subset \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_j$ o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações sobre \mathcal{H}_j , segue do Teorema 2.26 que para cada $U_0 \in D(A_j)$, o sistema (5.10) possui uma única solução

$$U \in C([0, \infty), D(A_j)) \cap C^1([0, \infty), \mathcal{H}_j),$$

dada por $U(t) = e^{A_j t} U_0$, para $j = 1, 2$.

E mais, se $U_0 \in D(A_j^n)$, $n \geq 2$, então segue do Teorema (2.26) que existe uma única função U na classe

$$U \in \bigcap_{r=0}^n C^{n-r}([0, +\infty), D(A_j^r)).$$

□

5.3 ESTABILIDADE

Nesta seção, estudaremos o comportamento assintótico da solução $U(t) = e^{A_j t} U_0$, para $j = 1, 2$, do problema (5.10) e, conseqüentemente, para a solução do sistema (5.1)-(5.4).

Diferentemente do que vimos no Capítulo 4, vamos mostrar que não será necessário considerarmos condição alguma para as constantes presentes no sistema, visto que para obtermos uma estabilidade exponencial para o sistema (4.1)-(4.4) dado no Capítulo 4, era necessário supor que $\chi_0 = 0$, caso contrário, obtínhamos uma falta de estabilidade exponencial para tal sistema.

Teorema 5.6. *Suponhamos que $\rho_1, \rho_2, b, k, k_0, k_1, \gamma, l > 0$ e que α satisfaça a Hipótese 5.1. Então, existem constantes $C, \eta > 0$, independentes do dado inicial $U_0 \in \mathcal{H}_j$, tais que*

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_j} \leq Ce^{-\eta t} \|U_0\|_{\mathcal{H}_j}, \quad t > 0, \quad j = 1, 2, \quad (5.23)$$

ou seja, o semigrupo $e^{A_j t}$ é exponencialmente estável. Em outras palavras, o problema (5.1)-(5.4) é exponencialmente estável independentemente de qualquer relação entre os coeficientes do sistema.

Para demonstrarmos o Teorema 5.6, é suficiente mostrar que as duas condições do Teorema de Prüss são verificadas, como feito anteriormente.

Antes, enunciaremos e demonstraremos alguns resultados nas seguintes seções deste capítulo e, por fim, na subseção 5.3.2 faremos a conclusão da demonstração do Teorema 5.6.

Alguns resultados serão semelhantes aos já enunciados e demonstrados no Capítulo 4, com isto, em alguns casos, a demonstração do mesmo estará omitida ou será apresentada brevemente com as devidas alterações.

5.3.1 Lemas Técnicos

Lema 5.7. *Sob as notações anteriores e hipóteses do Teorema 5.6, temos que $i\mathbb{R} \subset \rho(A_j)$, para $j = 1, 2$.*

Demonstração. Seja $j = 1, 2$. Suponha que $i\mathbb{R} \not\subset \rho(A_j)$, assim existe $\beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$ (pois já vimos que $0 \in \rho(A_j)$) tal que $i\beta \in \sigma(A_j)$. Do Lema 4.17, segue que $i\beta$ é um autovalor de A_j , portanto existe um autovetor não-nulo $U \in D(A_j)$, satisfazendo a equação

$$i\beta U - A_j U = 0. \quad (5.24)$$

Reescrevendo a equação (5.24) em termos de suas componentes, temos

$$i\beta\varphi - \Phi = 0, \quad (5.25)$$

$$i\beta\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0l(w_x - l\varphi) + l\gamma\theta + \alpha\Phi = 0, \quad (5.26)$$

$$i\beta\psi - \Psi = 0, \quad (5.27)$$

$$i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\vartheta_x = 0, \quad (5.28)$$

$$i\beta w - W = 0, \quad (5.29)$$

$$i\beta\rho_1 W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = 0, \quad (5.30)$$

$$i\beta\theta - k_1\theta_{xx} + m(W_x - l\Phi) = 0, \quad (5.31)$$

$$i\beta\vartheta - k_1\vartheta_{xx} + m\Psi_x = 0, \quad (5.32)$$

Considerando o produto interno de (5.24) com U em \mathcal{H}_j , obtemos

$$i\beta\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 - ((A_j U, U))_{\mathcal{H}_j} = 0. \quad (5.33)$$

Considerando a parte real em (5.33) e utilizando (5.14), segue que

$$\|\theta_x\|_2^2 = \|\vartheta_x\|_2^2 = 0.$$

Assim, obtemos que $\theta_x = \vartheta_x = 0$. Usando a desigualdade de Poincaré,

$$0 \leq \|\theta\|_2 \leq C\|\theta_x\|_2 = 0.$$

Assim, $\theta = 0$. Analogamente, temos que $\vartheta = 0$. Deste modo, substituindo em (5.31), temos que

$$W_x - l\Phi = 0,$$

e usando as equações (5.25) e (5.29),

$$w_x - l\varphi = \frac{1}{i\beta}(W_x - l\Phi) = 0. \quad (5.34)$$

Por outro lado, de (5.32),

$$\Psi_x = 0,$$

e utilizando (5.27),

$$\psi_x = \frac{1}{i\beta}\Psi_x = 0.$$

Utilizando a Desigualdade de Poincaré, assim como feito para a função θ , temos que $\psi = 0$. Consequentemente, de (5.27), $\Psi = 0$.

Agora, substituindo tais funções em (5.28) e (5.30), obtemos

$$k(\varphi_x + lw) = 0, \quad (5.35)$$

$$i\beta\rho_1 W + kl(\varphi_x + lw) = 0. \quad (5.36)$$

Multiplicando (5.35) por $-l$ e somando com (5.36), segue que

$$i\beta\rho_1 W = 0,$$

implicando em $W = 0$. Da equação (5.29), segue que $w = 0$. De (5.34), $\varphi = 0$. Além disso, de (5.25), $\Phi = 0$.

Assim, obtemos que $U = 0$, o que contradiz o fato de U ser um autovetor associado ao autovalor $i\beta$. Portanto, $i\mathbb{R} \subset \rho(A_j)$, para $j = 1, 2$. \square

De acordo com o Lema 5.7, temos que $i\mathbb{R} \subset \rho(A_j)$, para $j = 1, 2$. Deste modo, dado

$F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8) \in \mathcal{H}_j$, existe $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \theta, \vartheta) \in D(A_j)$ satisfazendo a equação resolvente

$$i\beta U - A_j U = F. \quad (5.37)$$

Reescrevendo (5.37) em termos de suas componentes, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$i\beta\varphi - \Phi = f_1, \quad (5.38)$$

$$i\beta\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0l(w_x - l\varphi) + l\gamma\theta + \alpha\Phi = \rho_1f_2, \quad (5.39)$$

$$i\beta\psi - \Psi = f_3, \quad (5.40)$$

$$i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\vartheta_x = \rho_2f_4, \quad (5.41)$$

$$i\beta w - W = f_5, \quad (5.42)$$

$$i\beta\rho_1W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = \rho_1f_6, \quad (5.43)$$

$$i\beta\theta - k_1\theta_{xx} + m(W_x - l\Phi) = f_7, \quad (5.44)$$

$$i\beta\vartheta - k_1\vartheta_{xx} + m\Psi_x = f_8. \quad (5.45)$$

Lema 5.8. *Seja $U \in D(A_j)$ satisfazendo a equação resolvente (5.37) para $\beta \in \mathbb{R}$ e $F \in \mathcal{H}_j$. Então,*

$$\int_0^L \alpha|\Phi|^2 dx + \|\theta_x\|_2^2 + \|\vartheta_x\|_2^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j}, \quad (5.46)$$

para alguma constante $C > 0$.

Demonstração. Esta demonstração segue de maneira análoga à prova do Lema 4.19, utilizando, neste caso, (5.14). \square

Procedendo de modo semelhante ao Capítulo 4, nosso objetivo é obter estimativas locais para as funções coordenadas do vetor $U \in D(A_j)$ e, após a obtenção destas estimativas, utilizar a Desigualdade de Observabilidade para o sistema de Bresse obtida no Capítulo 3, para que seja possível estender tais estimativas para o intervalo $(0, L)$. Além disso, afim de obter tais estimativas, consideraremos $|\beta| > 1$ suficientemente grande, sem nenhuma perda de generalidade.

Neste momento, no Capítulo 4, nós consideramos um número L_0 qualquer no intervalo $(0, L)$ e, a partir deste, definimos uma função auxiliar s_1 que nos permitia, ao realizar integrações por partes, evitar avaliar alguns termos na fronteira 0 e L . Neste capítulo, também consideraremos uma função auxiliar, mas vamos considerar um número $L_0 \in \omega$, para que possamos também utilizar as condições sobre a função $\alpha(x)$.

Com efeito, dado $L_0 \in \omega \subset (0, L)$, existe $\delta > 0$ tal que $(L_0 - \delta, L_0 + \delta) \subset \omega \subset (0, L)$. Considere uma função $s_1 \in C^2((0, L), \mathbb{R})$ satisfazendo as seguintes propriedades

$$\text{supp}(s_1) \subset (L_0 - \delta, L_0 + \delta), \quad 0 \leq s_1(x) \leq 1, \quad \text{para todo } x \in (0, L), \quad (5.47)$$

$$s_1(x) = 1, \text{ para todo } x \in \left[L_0 - \frac{\delta}{2}, L_0 + \frac{\delta}{2} \right]. \quad (5.48)$$

A ideia gráfica da função s_1 é a mesma da Figura 4.1, apenas nos atentando ao fato de $L_0 \in \omega$.

Lema 5.9. *Sob as notações anteriores, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s_1 |w_x - l\varphi|^2 dx &\leq \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} \\ &\quad + \frac{C}{|\beta|} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C \|\theta_x\|_2 \left(\int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s_1 |W|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Demonstração. Demonstração análoga à realizada para o Lema 4.20. □

Lema 5.10. *Sob as notações anteriores, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} |W|^2 dx \leq \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (5.50)$$

Demonstração. Demonstração análoga à realizada para o Lema 4.21. □

Corolário 5.11. *Sob as notações anteriores, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} |w_x - l\varphi|^2 dx \leq \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (5.51)$$

Demonstração. Demonstração análoga à realizada para o Corolário 4.22. □

Lema 5.12. *Sob as notações anteriores, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s_1 |\psi_x|^2 dx &\leq \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|} \|\vartheta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} \\ &\quad + \frac{C}{|\beta|} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C \|\vartheta_x\|_2 \left(\int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s_1 |\Psi|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Demonstração. Demonstração análoga à realizada para o Lema 4.23. □

Lema 5.13. *Sob as notações anteriores, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} |\Psi|^2 dx \leq \frac{C}{|\beta|} \|\vartheta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (5.53)$$

Demonstração. Demonstração análoga à realizada para o Lema 4.24. □

Corolário 5.14. *Sob as notações anteriores, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} |\psi_x|^2 dx \leq \frac{C}{|\beta|} \|\vartheta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (5.54)$$

Demonstração. Demonstração análoga à realizada para o Corolário 4.25. \square

Lema 5.15. *Sob as notações anteriores, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_{L_0 - \frac{\delta}{2}}^{L_0 + \frac{\delta}{2}} |\Phi|^2 dx \leq C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j}. \quad (5.55)$$

Demonstração. Segue diretamente de (5.46), da Hipótese 5.1 e do fato de que $L_0 \in \omega$ satisfazendo $(L_0 - \delta, L_0 + \delta) \subset \omega$ que existe $C > 0$ tal que

$$\alpha_0 \int_{\omega} |\Phi|^2 dx \leq \int_0^L \alpha |\Phi|^2 dx \leq C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j}. \quad (5.56)$$

Como o intervalo $(L_0 - \frac{\delta}{2}, L_0 + \frac{\delta}{2}) \subset \omega$, então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_{L_0 - \frac{\delta}{2}}^{L_0 + \frac{\delta}{2}} |\Phi|^2 dx \leq C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j}.$$

\square

Lema 5.16. *Sob as notações anteriores, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_{L_0 - \frac{\delta}{2}}^{L_0 + \frac{\delta}{2}} |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \leq C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (5.57)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (5.39) por $s_1 \bar{\varphi}$ e integrando em $(0, L)$, temos

$$\begin{aligned} i\beta\rho_1 \int_0^L s_1 \Phi \bar{\varphi} dx - k \int_0^L s_1 (\varphi_x + \psi + lw)_x \bar{\varphi} dx - k_0 l \int_0^L s_1 (w_x - l\varphi) \bar{\varphi} dx \\ + l\gamma \int_0^L s_1 \theta \bar{\varphi} dx + \int_0^L \alpha s_1 \Phi \bar{\varphi} dx = \rho_1 \int_0^L s_1 f_2 \bar{\varphi} dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes,

$$\begin{aligned} \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx = \rho_1 \int_0^L s_1 f_2 \bar{\varphi} dx - i\beta\rho_1 \int_0^L s_1 \Phi \bar{\varphi} dx + k_0 l \int_0^L s_1 (w_x - l\varphi) \bar{\varphi} dx \\ - l\gamma \int_0^L s_1 \theta \bar{\varphi} dx - \int_0^L \alpha s_1 \Phi \bar{\varphi} dx - k \int_0^L s_1' (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\varphi} dx \\ - k \int_0^L s_1 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\psi + lw)} dx. \end{aligned}$$

Utilizando a equação (5.38), obtemos

$$\int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx = \rho_1 \int_0^L s_1 |\Phi|^2 dx + I_1 + I_2, \quad (5.58)$$

onde

$$I_1 = \rho_1 \int_0^L s_1 f_2 \bar{\varphi} dx + \rho_1 \int_0^L s_1 \Phi \bar{f}_1 dx - l\gamma \int_0^L s_1 \theta \bar{\varphi} dx,$$

$$I_2 = k_0 l \int_0^L s_1 (w_x - l\varphi) \bar{\varphi} dx - \int_0^L \alpha s_1 \Phi \bar{\varphi} dx - k \int_0^L s_1' (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\varphi} dx \\ - k \int_0^L s_1 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\psi + lw)} dx.$$

Agora, observemos que utilizando a propriedade (5.47) para a função s_1 e a Desigualdade (5.56), existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\rho_1 \int_0^L s_1 |\Phi|^2 dx \leq C \int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} |\Phi|^2 dx \leq \int_{\omega} |\Phi|^2 dx \leq C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j}. \quad (5.59)$$

Além disso, usando as desigualdades de Hölder e Poincaré, existe $C > 0$ tal que

$$|I_1| \leq C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j}. \quad (5.60)$$

E mais, utilizando as igualdades (5.38), (5.40) e (5.42), a propriedade (5.47) para a função s_1 e a desigualdade de Hölder, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|I_2| \leq \frac{C}{|\beta|} \|U\|^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j}. \quad (5.61)$$

Portanto, de (5.58), das estimativas (5.59), (5.60) e (5.61) e da propriedade (5.48), existe uma constante $C > 0$ satisfazendo (5.57), como queríamos mostrar. \square

A fim de simplificar as notações, vamos considerar

$$\mathcal{I}_{\frac{\delta}{2}} = \int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} (|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2 + |\psi_x|^2 + |\Phi|^2 + |\Psi|^2 + |W|^2) dx. \quad (5.62)$$

Corolário 5.17. *Sob as notações anteriores, seja $|\beta| > 1$ suficientemente grande, então dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$\mathcal{I}_{\frac{\delta}{2}} \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (5.63)$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ qualquer. Nesta demonstração, usaremos a Desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$ em diversos momentos.

Primeiramente, segue dos corolários 5.11, 5.14 e dos Lemas 5.10, 5.13, 5.15 e 5.16 que

existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\mathcal{I}_{\frac{\delta}{2}} \leq \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|} \|\vartheta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2.$$

Utilizando a desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$ e a estimativa (5.46), existe $C > 0$ tal que

$$\mathcal{I}_{\frac{\delta}{2}} \leq C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (5.64)$$

Por fim, usando novamente a desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$,

$$\mathcal{I}_{\frac{\delta}{2}} \leq C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2.$$

Sendo $|\beta| > 1$ suficientemente grande, temos que dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\mathcal{I}_{\frac{\delta}{2}} \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2,$$

que mostra o resultado desejado. \square

Com as estimativas obtidas até o momento, estamos em condições de concluir a demonstração do Teorema 5.6.

5.3.2 Estabilidade Exponencial - Conclusão da prova do Teorema 5.6

De acordo com Teorema de Prüss, a demonstração do Teorema 5.6 é baseada na caracterização de estabilidade exponencial para um C_0 -semigrupo de contrações.

Inicialmente, segue do Lema 5.7 que

$$i\mathbb{R} \subset \rho(A_j),$$

para $j = 1, 2$. Com isso, temos a primeira condição do Teorema de Prüss satisfeita.

Para concluirmos a segunda condição do Teorema de Prüss, seja $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente. Utilizando a notação dada em (5.62), segue do Corolário 5.17 que existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\mathcal{I}_{\frac{\delta}{2}} \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (5.65)$$

Neste momento, obtemos uma estimativa local para o vetor $U \in D(A_j)$. Com a intenção de estender esta estimativa para o intervalo $(0, L)$, usaremos a desigualdade de observabilidade para o Sistema de Bresse, apresentada no Capítulo 3.

Primeiramente, segue das equações (5.38)-(5.43) que $V = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ é solução de

(3.1)-(3.6), considerando

$$\begin{aligned} g_1 &= f_1; \quad g_2 = \rho_1 f_2 - l\gamma\theta - \alpha\Phi; \quad g_3 = f_3; \\ g_4 &= \rho_2 f_4 - \gamma\vartheta_x; \quad g_5 = f_5; \quad g_6 = \rho_1 f_6 - \gamma\theta_x. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Além disso, observando que a notação $\mathcal{I}_{\frac{\delta}{2}}$ é uma integral local do tipo $\|V\|_{b_1, b_2}$ considerando $b_1 = L_0 - \frac{\delta}{2}$ e $b_2 = L_0 + \frac{\delta}{2}$, segue de (5.65) que a condição (3.34) é satisfeita para $\Lambda := \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2$.

Com isso, aplicando o resultado do Corolário 3.2, a estimativa (5.46) e a desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$, existem constantes $C, C_\varepsilon > 0$ tais que

$$\int_0^L (|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2 + |\psi_x|^2 + |\Phi|^2 + |\Psi|^2 + |W|^2) dx \leq \varepsilon C\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (5.67)$$

Agora, combinando (5.67) com a estimativa (5.46) e usando a desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$ novamente, existem constantes $C, C_\varepsilon > 0$ tais que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 \leq \varepsilon C\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2.$$

Logo, considerando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $C > 0$ tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2.$$

Como $U \in D(A_j)$ é a única solução da equação resolvente (5.37), segue que

$$\|(i\beta I_d - A_j)^{-1}F\|_{\mathcal{H}_j} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_j}, \quad |\beta| \rightarrow \infty, \quad (5.68)$$

para alguma constante $C > 0$, concluindo a veracidade da segunda condição do Teorema de Prüss.

Portanto, aplicando o Teorema de Prüss, concluímos a demonstração do Teorema 5.6, isto é, a solução $U(t) = e^{A_j t}U_0$ do problema de Cauchy abstrato (5.10) possui um decaimento exponencial. Em outras palavras, o sistema (5.1)-(5.4) é exponencialmente estável. \square

6 CONCLUSÃO

Mediante aos resultados obtidos neste trabalho, podemos concluir que foi possível melhorar os resultados obtidos por Liu e Rao em [16]. Com efeito, em [16], Liu e Rao estudaram o problema (1.9)-(1.12) e obtiveram condições suficientes para garantir a estabilidade exponencial da solução deste problema. Mais precisamente, o sistema é exponencialmente estável se $\chi_0 = 0$. Além disso, caso $\chi_0 \neq 0$, Liu e Rao obtiveram uma taxa de decaimento polinomial

$$\left(\frac{\ln t}{t}\right)^{1/j} \ln t, \quad (6.1)$$

onde j varia de acordo com as condições de fronteira (1.11) e (1.12), a saber, j satisfaz (1.16).

Em nossos estudos, provamos nos teoremas 4.14 e 4.31 que a condição $\chi_0 = 0$ é necessária e suficiente para garantir que a solução do sistema (1.9)-(1.12) é exponencialmente estável. Quando $\chi_0 \neq 0$, mostramos no Teorema 4.15 que este sistema possui um decaimento polinomial com taxa

$$\frac{1}{t^{1/2}}, \quad (6.2)$$

independentemente das condições de fronteira consideradas, melhorando assim a taxa dada em (6.1). Além disso, no Teorema 4.31 provamos que taxa de decaimento polinomial (6.2) é ótima, ou seja, tal taxa não pode ser melhorada para dados no domínio do operador.

Provamos o resultado do Teorema 4.15 para ambas as condições de fronteira devido ao resultado obtido no Capítulo 3, chamado de Desigualdade de Observabilidade para sistemas de Bresse, o qual ainda não foi apresentado (como na Proposição 3.1 e no Corolário 3.2) na literatura.

Além disso, estudamos uma variação do sistema (1.9)-(1.12) dado em [16], adicionando um mecanismo dissipativo localizado no deslocamento vertical φ , obtendo assim o sistema (5.1)-(5.4). Neste caso, mostramos que a solução deste sistema possui um decaimento exponencial independentemente da relação entre os coeficientes ou das condições de fronteira (ver Teorema 5.6), diferentemente dos resultados de estabilidade provados no Capítulo 4, os quais dependiam da relação $\chi_0 = 0$ e dos dados iniciais regulares $U_0 \in D(A_j)$.

REFERÊNCIAS

- [1] ADAMS, R. A., AND FOURNIER, J. J. *Sobolev spaces*, vol. 140. Elsevier, 2003.
- [2] ALVES, M., SILVA, M. J., MA, T., AND RIVERA, J. M. Invariance of decay rate with respect to boundary conditions in thermoelastic Timoshenko systems. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 67, 3 (2016), 70.
- [3] BORICHEV, A., AND TOMILOV, Y. Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups. *Mathematische Annalen* 347, 2 (2010), 455–478.
- [4] BRESSE, J. A. C. *Cours de mécanique appliquée, professé à l'École impériale des ponts et chaussées*. Gauthier-Villars, 1868.
- [5] BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [6] CARDOZO, C., SILVA, M. J., MA, T., AND RIVERA, J. M. Stability of Timoshenko systems with thermal coupling on the bending moment. *Mathematische Nachrichten* (2019).
- [7] CAVALCANTI, M. M., AND CAVALCANTI, V. D. Introdução a teoria das distribuições e aos espaços de Sobolev. *Eduem, Maringá* (2009).
- [8] CAVALCANTI, M. M., CAVALCANTI, V. N., AND KOMORNIK, V. Introdução a análise funcional. *Eduem, Maringá* (2011).
- [9] DE LIMA, P. R. Sistema de Bresse termoelástico não linear. *Dissertação de Mestrado, UEL* (2009).
- [10] ENGEL, K.-J., AND NAGEL, R. *A short course on operator semigroups*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [11] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [12] GEARHART, L. Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert space. *Transactions of the American Mathematical Society* 236 (1978), 385–394.
- [13] KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*, vol. 1. wiley New York, 1978.
- [14] LAGNESE, J., LEUGERING, G., AND SCHMIDT, E. Modelling of dynamic networks of thin thermoelastic beams. *Mathematical methods in the applied sciences* 16, 5 (1993), 327–358.

- [15] LIMA, E. L. *Espaços métricos*, vol. 4. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro, 1983.
- [16] LIU, Z., AND RAO, B. Energy decay rate of the thermoelastic Bresse system. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 60, 1 (2009), 54–69.
- [17] LIU, Z., AND ZHENG, S. *Semigroups associated with dissipative systems*, vol. 398. CRC Press, 1999.
- [18] ODEN, J. T., AND DEMKOWICZ, L. *Applied functional analysis*. Chapman and Hall/CRC, 2010.
- [19] PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, vol. 44. Springer Science & Business Media, 2012.
- [20] PRÜSS, J. On the spectrum of c_0 -semigroups. *Transactions of the American Mathematical Society* 284, 2 (1984), 847–857.
- [21] RIFO, S., VILLAGRAN, O. V., AND RIVERA, J. E. M. The lack of exponential stability of the hybrid Bresse system. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 436, 1 (2016), 1–15.
- [22] RIVERA, J. E. M. Estabilização de semigrupos e aplicações. *Série de Métodos Matemáticos* (2008).
- [23] ZHENG, S. *Nonlinear evolution equations*. Chapman and Hall/CRC, 2004.