



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

EDUARDO OLIVEIRA BELINELLI

**SIMULAÇÃO DA DISPERSÃO DA FERRUGEM
ASIÁTICA NO PARANÁ DEVIDO ÀS FRENTES FRIAS**

Londrina
2020

EDUARDO OLIVEIRA BELINELLI

**SIMULAÇÃO DA DISPERSÃO DA FERRUGEM
ASIÁTICA NO PARANÁ DEVIDO ÀS FRENTES FRIAS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Laerte Natti.

Londrina
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Belinelli, Eduardo Oliveira.

Simulação da Dispersão da Ferrugem Asiática no Paraná devido às Frentes Frias / Eduardo Oliveira Belinelli. - Londrina, 2020.
90 f. : il.

Orientador: Paulo Laerte Natti.

Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2020.
Inclui bibliografia.

1. Ferrugem Asiática; Modelagem Matemática; Método de Diferenças Finitas - Tese. I. Natti, Paulo Laerte . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

CDU 51

EDUARDO OLIVEIRA BELINELLI

**SIMULAÇÃO DA DISPERSÃO DA FERRUGEM
ASIÁTICA NO PARANÁ DEVIDO ÀS FRENTES FRIAS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA


Prof. Dr. Paulo Laerte Natti
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Marcelo Giovanetti Canteri
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Gylles Ricardo Ströher
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Londrina, 30 de abril de 2020.

Dedico este trabalho a minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ser meu suporte em todos os momentos difíceis da minha vida.

Aos meus pais, Madalena e Valdeci, por sempre estarem ao meu lado e por todo amor depositado em mim.

À minha irmã, Ana Paula, por sempre me incentivar e apoiar nos estudos.

Ao meu orientador, Prof. Paulo, por toda dedicação, competência, paciência, conhecimento e, principalmente, por ter acreditado em mim.

Aos professores Eliandro e Neyva por toda ajuda na elaboração do código computacional e pelas valiosas contribuições com as quais este trabalho se fez possível.

Aos professores da banca, pela disponibilidade, colaboração e contribuição para o aperfeiçoamento deste trabalho.

Ao Lucas Fantin, pela ajuda e amizade.

Aos professores do PGMAC pela competência.

Aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Cornélio Procópio, onde fiz minha graduação, em especial, à Profa. Glaucia Maria Bressan, que foi minha orientadora de iniciação científica e TCC, e me encorajou a seguir os meus sonhos.

Aos meus colegas do PGMAC, em especial, aos meus amigos Jesika e Romário, pela ajuda, companheirismo e amizade nesses dois últimos anos.

Aos meus amigos da república que me acolheram, em especial, ao Maurilio Matos da Silva, por toda ajuda, amizade, companheirismo e por sempre estar junto comigo em todos os momentos da minha vida.

À CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, Código de Financiamento 001, pelo apoio financeiro cedido para o desenvolvimento deste trabalho.

Enfim, agradeço todos aqueles que de forma direta ou indireta contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Que Deus, pela sua infinita bondade, abençoe cada um de vocês.

"Deus dá asas, faz teu voo..."

BELINELLI, Eduardo Oliveira. **Simulação da Dispersão da Ferrugem Asiática no Paraná devido às Frentes Frias**. 2020. 90f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo simular o transporte atmosférico dos esporos da ferrugem asiática no estado do Paraná, provenientes de regiões infectadas do Paraguai, via a ocorrência de frentes frias. O problema proposto é modelado por meio de uma equação diferencial parcial bidimensional com termos difusivo, convectivo e reativo. Essa equação foi discretizada pelo método de diferenças finitas. O esquema algébrico da discretização é posto na forma implícita, resultando em um sistema de equações lineares, que foi resolvido iterativamente pelo método de Gauss-Siedel. Em particular, para o termo convectivo da equação foi utilizado o esquema *First Order Upwind* (FOU). A consistência da equação discretizada foi verificada. Um teste de verificação dos resultados numéricos foi realizado para todos tempos considerados, mostrando que a solução numérica da equação diferencial convergiu para a solução do problema. Os resultados numéricos obtidos mostram que existe uma relação entre o transporte atmosférico dos esporos da ferrugem asiática do Paraguai, por meio de frentes frias com os casos confirmados de ferrugem asiática no estado do Paraná durante a safra 2018/19.

Palavras-chave: Ferrugem Asiática; Modelagem Matemática; Método de Diferenças Finitas.

BELINELLI, Eduardo Oliveira. **Simulation of Soybean Rust Dispersal in Paraná due to Cold Fronts**. 2020. 90f. Dissertation (Masters in Applied Mathematics and Computational) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

ABSTRACT

This work aims to simulate the atmospheric transport of Asian rust spores in the state of Paraná, from infected regions of Paraguay, via the occurrence of cold fronts. The proposed problem is modeled by means of a two-dimensional partial differential equation with diffusive, convective, and reactive terms. This equation was discretized by the finite difference method. The algebraic scheme of discretization is put in the implicit form, resulting in a system of linear equations, which was solved iteratively by the Gauss-Siedel method. In particular, the First Order Upwind (FOU) scheme was used for the convective term of the equation. The consistency of the discretized equation was verified. A test of verification of the numerical results was performed for all times considered, showing that the numerical solution of the differential equation converged to the solution of the problem. The numerical results obtained show that there is a relationship between the atmospheric transport of Asian rust spores from Paraguay, through cold fronts, with the confirmed cases of Asian rust in the state of Paraná during the 2018/19 harvest.

Keywords: Asian Rust; Mathematical Modeling; Finite Differences Method.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	APRESENTAÇÕES EM EVENTOS E PUBLICAÇÕES	18
2	FERRUGEM ASIÁTICA	20
2.1	HISTÓRICO DE OCORRÊNCIAS NO MUNDO	20
2.2	CICLO E EPIDEMIOLOGIA	21
2.3	EVOLUÇÃO NO BRASIL	23
2.4	MEDIDAS DE CONTROLE	24
3	DADOS SOBRE O ESTADO DO PARANÁ	26
3.1	LOCALIZAÇÃO GEOGRÁFICA DO ESTADO DO PARANÁ	26
3.2	ASPECTOS CLIMÁTICOS	26
3.3	ASPECTOS EÓLICOS	28
3.4	INFLUÊNCIA DOS FATORES HÍDRICOS E CLIMÁTICOS PARA O CULTIVO DA SOJA NO PARANÁ	29
4	EQUAÇÃO DE TRANSPORTE	33
4.1	EQUAÇÃO DIFUSIVA-CONVECTIVA DA PROPAGAÇÃO DO CALOR	33
4.2	EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE ESPOROS	36
5	DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE	38
5.1	DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO DE SOLUÇÕES	38
5.2	DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE ESPOROS	40
5.3	CONDIÇÕES INICIAIS	45
5.3.1	Condição Inicial para a Concentração de Esporos	45
5.3.2	Condição Inicial para o Campo de Velocidades	46
5.4	CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA A EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE ES- POROS	53
5.5	CONSISTÊNCIA DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE ESPOROS	57
6	RESULTADOS	62
6.1	PARÂMETROS DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE ESPOROS	62
6.2	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	63
6.3	ANÁLISE DOS RESULTADOS	68
6.4	VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS	73
7	CONCLUSÕES	75
A	MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS	76
A.1	DIFERENÇAS FINITAS PARA FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL	76
A.2	DIFERENÇAS FINITAS PARA FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS	78
A.3	FÓRMULAS DE DIFERENÇAS FINITAS DISCRETIZADAS	79
A.3.1	Fórmulas de Diferenças Finitas Discretizadas para Funções de uma Variável	79

A.3.2	Fórmulas de Diferenças Finitas Discretizadas para Funções de duas Variáveis	80
B	RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES	82
B.1	MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL	82
B.2	CRITÉRIOS DE PARADA	84

LISTA DE FIGURAS

2.1	Histórico da disseminação global da ferrugem asiática ao longo dos anos em diversas localidades.	20
2.2	Ciclo biológico da ferrugem asiática.	21
2.3	Estágios de desenvolvimento da ferrugem asiática na folha de soja.	23
2.4	Custo com o controle da ferrugem asiática entre as safras 2001/02 à 2018/19.	24
2.5	Período do vazio sanitário da soja da safra 2018/19.	25
3.1	Localização geográfica do estado do Paraná.	26
3.2	Distribuição média anual de temperatura no estado do Paraná.	27
3.3	Distribuição média anual de chuvas no estado do Paraná.	27
3.4	Mecanismos predominantes do regime de ventos no estado do Paraná.	28
3.5	Dinâmica de uma frente fria na região sul do Brasil.	29
3.6	Distribuição média de temperatura nos meses de verão no estado do Paraná.	30
3.7	Distribuição média de temperatura nos meses de primavera no estado do Paraná.	30
3.8	Distribuição média de chuvas nos meses de verão no estado do Paraná.	31
3.9	Distribuição média de chuvas nos meses de primavera no estado do Paraná.	31
4.1	Elemento cúbico de controle infinitesimal.	33
5.1	Domínio geométrico de soluções.	38
5.2	Molécula computacional da equação (5.17), destacando a relação explícita na variável temporal e implícita nas variáveis espaciais.	45
5.3	Fluxograma de interpolação bidimensional.	47
5.4	Campo de velocidades - Malha (20 × 20) - Frente fria 25/10/2018.	48
5.5	Campo de velocidades - Malha (20 × 20) - Frente fria 27/10/2018.	49
5.6	Campo de velocidades - Malha (20 × 20) - Frente fria 01/11/2018.	49
5.7	Campo de velocidades - Malha (20 × 20) - Frente fria 23/11/2018.	50
5.8	Campo de velocidades - Malha (20 × 20) - Frente fria 01/12/2018.	50
5.9	Campo de velocidades - Malha (20 × 20) - Frente fria 22/12/2018.	51
5.10	Campo de velocidades - Malha (20 × 20) - Frente fria 05/01/2019.	51
5.11	Campo de velocidades - Malha (20 × 20) - Frente fria 15/01/2019.	52
5.12	Campo de velocidades - Malha (20 × 20) - Frente fria 01/02/2019.	52
5.13	Regiões produtoras de soja no Paraguai	53
5.14	Identificação dos pontos da malha que recebem condições de contorno e pontos onde a equação (5.17) será calculada.	54
6.1	Dispersão atmosférica dos esporos da ferrugem asiática na malha (20 × 20): (a) condições iniciais; (b) frente fria 25/10/2018; (c) frente fria 27/10/2018; (d) frente fria 01/11/2018; (e) frente fria 23/11/2018; (f) frente fria 01/12/2018; (g) frente fria 22/12/2018; (h) frente fria 05/01/2019; (i) frente fria 15/01/2019; (j) frente fria 01/02/2019.	64

6.2	Dispersão atmosférica dos esporos da ferrugem asiática na malha (60 × 60): (a) condições iniciais; (b) frente fria 25/10/2018; (c) frente fria 27/10/2018; (d) frente fria 01/11/2018; (e) frente fria 23/11/2018; (f) frente fria 01/12/2018; (g) frente fria 22/12/2018; (h) frente fria 05/01/2019; (i) frente fria 15/01/2019; (j) frente fria 01/02/2019.	65
6.3	Dispersão atmosférica dos esporos da ferrugem asiática na malha (100 × 100): (a) condições iniciais; (b) frente fria 25/10/2018; (c) frente fria 27/10/2018; (d) frente fria 01/11/2018; (e) frente fria 23/11/2018; (f) frente fria 01/12/2018; (g) frente fria 22/12/2018; (h) frente fria 05/01/2019; (i) frente fria 15/01/2019; (j) frente fria 01/02/2019.	66
6.4	Comportamento da condição (6.12) para os resultados da malha (20 × 20), ob- tidos na seção 6.2 conforme a figura 6.1: (a) frente fria 25/10/2018; (b) frente fria 27/10/2018; (c) frente fria 01/11/2018; (d) frente fria 23/11/2018; (e) frente fria 01/12/2018; (f) frente fria 22/12/2018; (g) frente fria 05/01/2019; (h) frente fria 15/01/2019; (i) frente fria 01/02/2019.	71
6.5	Comportamento da condição (6.12) para os resultados da malha (60 × 60), ob- tidos seção 6.2, conforme a figura 6.2: (a) frente fria 25/10/2018; (b) frente fria 27/10/2018; (c) frente fria 01/11/2018; (d) frente fria 23/11/2018; (e) frente fria 01/12/2018; (f) frente fria 22/12/2018; (g) frente fria 05/01/2019; (h) frente fria 15/01/2019; (i) frente fria 01/02/2019.	72
6.6	Comportamento da condição (6.12) para os resultados da malha (100 × 100), obtidos na seção 6.2, conforme a figura 6.3: (a) frente fria 25/10/2018; (b) frente fria 27/10/2018; (c) frente fria 01/11/2018; (d) frente fria 23/11/2018; (e) frente fria 01/12/2018; (f) frente fria 22/12/2018; (g) frente fria 05/01/2019; (h) frente fria 15/01/2019; (i) frente fria 01/02/2019.	73
6.7	Casos confirmados de ferrugem asiática no estado do Paraná na safra 2018/19: (a) 25/10/2018 - 06/11/2018; (b) 27/10/2018 - 08/11/2018; (c) 01/11/2018 - 13/11/2018; (d) 23/11/2018 - 05/12/2018; (e) 01/12/2018 - 13/12/2018; (f) 22/12/2018 - 03/01/2019; (g) 05/01/2019 - 18/01/2019; (h) 15/01/2019 - 27/01/2019; (i) 01/02/2019 - 13/02/2019.	74
A.1	Discretização unidimensional por diferenças finitas.	80
A.2	Equivalência de rotulação dos pontos de malha. Rotulação ponto (i, j) e pontos cardeais.	81

LISTA DE SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

c = calor específico

C = concentração de fungos

D = coeficiente de difusão molecular

\dot{E}_{ar} = taxa de energia armazenada no volume de controle

\dot{E}_e = fluxo de calor que entra por difusão no volume de controle

\dot{E}_s = fluxo de calor que sai do volume de controle

k = condutividade térmica

q_c = fluxo de calor por convecção

q_x = taxa de transferência de calor na direção do eixo x .

q_y = taxa de transferência de calor na direção do eixo y .

q_z = taxa de transferência de calor na direção do eixo z .

T = temperatura

V = volume do elemento cúbico de controle infinitesimal

\vec{v} = campo de velocidades

v_x = componente x do campo de velocidades

v_y = componente y do campo de velocidades

α = difusividade térmica

λ = taxa de mortalidade

ρ = massa específica

x = variável espacial no sentido horizontal

y = variável espacial no sentido vertical

t = tempo

Δ_x = espaçamento espacial no sentido horizontal

Δ_y = espaçamento espacial no sentido vertical

Δ_t = espaçamento temporal

t_f = tempo final

M_x = Número de subintervalos no eixo x

M_y = Número de subintervalos no eixo y

M_t = Número de subintervalos no tempo

LISTA DE ABREVIACOES

CAPECO = Cmara Paraguaya de Exportadores y Comercializadores de Cereales y Oleaginosas

CCA = Centro de Ciências Agrárias - Universidade Estadual de Londrina

CONAB = Companhia Nacional de Abastecimento

COPEL = Companhia Paranaense de Energia

EDF - Equao de diferenças finitas

EDP - Equao diferencial parcial

ETL - Erro de truncamento local

EMBRAPA = Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária FOU = First Order Upwind

IAMS = Integrated Aerobiology Modeling System

INPE = Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

IPARDES = Instituto Paranaense de Desenvolvimento Econmico e Social UEL = Universidade Estadual de Londrina

1 INTRODUÇÃO

A soja é uma das dez culturas de maior importância econômica em âmbito mundial devido à grande demanda de grãos para a produção de óleo vegetal e rações, como também, fonte alternativa na produção de biocombustíveis. O Brasil é o segundo maior produtor de soja do mundo. Apenas na safra 2018/19 a produção de soja no país foi superior à 100 milhões de toneladas em uma área equivalente à 35,8 milhões de hectares. O maior estado brasileiro produtor de soja foi o Mato Grosso com 32,455 milhões de toneladas, seguido pelo estado do Paraná com 5,438 milhões de hectares (EMBRAPA, 2019; CONAB, 2019).

O início do cultivo da soja no Brasil ocorreu em 1882 no estado da Bahia. Por volta de 1890, a soja passou a ser cultivada no estado de São Paulo, seguido pelo Rio Grande do Sul. No estado do Paraná foi introduzida pela primeira vez em 1954 como uma tentativa de minimizar prejuízos causados por geadas em plantações de café (EMBRAPA, 2019). Sendo uma cultura capaz de se adaptar aos diferentes solos e condições climáticas, ao longo dos anos, a soja ganhou destaque no mercado de consumo nacional e internacional. O aumento da produtividade no Brasil foi resultado de melhorias no setor de infraestrutura e de técnicas agrícolas empregadas no campo. Práticas de rotação de culturas e manejo do solo, assim como investimentos em controles químicos, proporcionaram cultivo em regiões que não eram propícias ao cultivo da soja devido à escassez de recursos ambientais e tecnológicos. No setor de infraestrutura houve a criação e amplificação de rodovias e portos, possibilitando a expansão e comercialização de grãos e produtos derivados da soja em todas as regiões brasileiras. No ramo científico, o número de pesquisas direcionadas ao controle e manejo de doenças, que são os principais fatores que geram perdas de grãos de soja no campo, também teve crescimento. Melhorias na composição de fungicidas possibilitaram maior controle das doenças diminuindo as perdas (FREITAS, 2011; RIZATO, 2015). Contudo, a cultura da soja ainda está sujeita ao ataque de diversas doenças, desde o estágio de germinação das sementes até a colheita dos grãos. Estima-se que a cultura da soja é afetada por 47 doenças já relatadas que são causadas por fungos ou bactérias (FIALLOS, 2011). Entre as doenças já relatadas, encontra-se a ferrugem asiática, que tem o potencial de ser a doença mais destrutiva às lavouras de soja.

A ferrugem asiática é uma doença fúngica que afeta todos os anos a produção de soja em escala mundial. Os danos nas plantações de soja variam na ordem de 10% a 90% (MINCHIO et al., 2016) nas diversas regiões geográficas em que ocorre. O custo com a contenção da doença gira em torno de 2 bilhões de dólares anualmente, sendo a maior parte com gastos em aplicações de fungicidas (EMBRAPA, 2019). O principal agravante da doença é que a disseminação ocorre devido à produção de esporos¹ pelo fungo, que se desprendem das folhas de soja por meio do vento. Desta forma, as vias atmosféricas decorrentes da rotação

¹Estruturas microscópicas produzidas em grande escala por fungos, bactérias e plantas com capacidade de gerar novos indivíduos (AMORIM; REZENDE; BERGAMIN, 2018).

terrestre permitem que os esporos alcancem grandes altitudes, percorrendo longas distâncias e ocasionando a contaminação de grandes áreas produtoras de soja.

No estado do Paraná, a maior parte da contaminação de soja que acontecia no campo por ferrugem asiática era durante a entressafra, pois nesse período, hospedeiros secundários serviam como fonte de inóculo primário² para a doença (EMBRAPA, 2019). Para reduzir o número de casos na entressafra e atrasar a ocorrência da doença na safra foi implantado em alguns estados brasileiros, inclusive no estado do Paraná, um período de sessenta a noventa dias sem plantas vivas no campo, denominado vazio sanitário. Entretanto, esse mesmo procedimento, considerado como a melhor forma de reduzir a fonte de inóculo primário, não ocorre em outros países produtores de soja que fazem fronteira com o estado do Paraná, como o Paraguai, onde o cultivo da soja é constante o ano inteiro. Considerando que os esporos da ferrugem asiática são transportados predominantemente pelo vento, as correntes atmosféricas decorrentes da rotação terrestre caracterizam os ventos que ocorrem no estado do Paraná no sentido leste-oeste. Por outro lado, durante à ocorrência das frentes frias as correntes atmosféricas deslocam-se no sentido contrário e que *a priori*, podem ser responsáveis pelo transporte dos esporos de regiões infectadas do Paraguai para o estado do Paraná. Neste contexto, compreender como os esporos são transportados para o estado do Paraná, via frentes frias, é de fundamental importância para avaliar os impactos nas plantações de soja e prever medidas de controle e manejo da doença no campo. Desta forma, este trabalho tem por objetivo compreender o transporte atmosférico dos esporos da ferrugem asiática no estado do Paraná, provenientes de regiões infectadas do Paraguai, por meio das frentes frias, via a simulação numérica.

Na literatura encontram-se alguns trabalhos que estudam o transporte atmosférico dos esporos da ferrugem asiática, tais como (ISARD et al., 2005; PAN et al., 2006; ISARD et al., 2011; MEYER et al., 2017). O modelo matemático apresentado nesses trabalhos é o *Integrated Aerobiology Modeling System* - Sistema de modelagem integrado de aerobiologia - (IAMS). O IAMS é configurado em um formato modular que inclui nas simulações: a liberação de esporos do dossel, a mortalidade de esporos devido à exposição à radiação ultravioleta, a deposição dos esporos via precipitação úmida e seca, o desenvolvimento e o progresso da doença nas regiões de destino. Juntos, os módulos preveem a progressão e intensidade de uma epidemia em uma região impactada. Diante deste cenário, nos trabalhos apresentados por (ISARD et al., 2005 e ISARD et al., 2007) o modelo IAMS é utilizado para simular o transporte dos esporos da ferrugem asiática de regiões do norte da América do Sul para os Estados Unidos devido às movimentações das massas de ar associadas ao furacão Ivan, que ocorreu em março de 2004. Já os trabalhos apresentados por (PAN et al., 2006 e ISARD et al., 2011) utilizam o modelo IAMS para simular o transporte dos esporos da ferrugem asiática em áreas mais restritivas, sendo as regiões do sudoeste dos Estados Unidos (PAN et al., 2006) e algumas regiões da Etiópia (ISARD et al., 2011).

²É a fonte que vai começar uma doença em uma área onde ainda não tem a doença (AMORIN; REZENDE; BERGAMIN, 2018).

Neste trabalho o modelo matemático que descreve o transporte atmosférico dos esporos da ferrugem asiática é dado por uma equação diferencial parcial (EDP) com termos difusivo, convectivo e reativo. Alguns trabalhos encontrados na literatura utilizam equações diferenciais parciais para descrever o fenômeno de transporte, conforme (PARDO, 2009; ROMEIRO et al., 2001; DIAS, 2014; SAITA, 2016). Sobre o campo de velocidades que representam as frentes frias, descrito matematicamente pelo termo convectivo da EDP proposta, são obtidos a partir da coleta de dados reais disponibilizados no site do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - (INPE). Para discretizar a EDP proposta neste trabalho, utiliza-se o método de diferenças finitas, de modo que o esquema algébrico resultante da discretização é posto na forma implícita, resultando em um sistema de equações lineares e resolvido iterativamente pelo método de Gauss-Seidel.

Este trabalho encontra-se estruturado em sete capítulos. No capítulo 2 são apresentados alguns dados sobre a ferrugem asiática, necessários para compreender as características físicas do problema em estudo. O capítulo 3 descreve algumas características do estado do Paraná, com informações sobre aspectos climáticos e eólicos, a fim de compreender a influência desses fatores no plantio da soja e no desenvolvimento da ferrugem asiática no campo. No capítulo 4 é feita a modelagem da equação diferencial que descreve o transporte atmosférico dos esporos da ferrugem asiática no Paraná. No capítulo 5 é realizada a discretização da equação diferencial proposta neste trabalho pelo método de diferenças finitas. Os resultados numéricos obtidos neste trabalho são apresentados no capítulo 6. Por fim, o capítulo 7 apresenta as conclusões deste trabalho.

1.1 APRESENTAÇÕES EM EVENTOS E PUBLICAÇÕES

Este trabalho gerou as seguintes publicações:

- BELINELLI, E. O.; NATTI, P. L.; CIRILO, E. R.; ROMEIRO, N. M. L.; Geração de malha para descrever a dispersão da ferrugem da soja no Paraná. In: I Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional (ERMAC), Blumenau, 2019.
- FANTIN, L. H.; BELINELLI, E. O.; BRAGA, K.; NATTI, P. L.; CIRILO, E. R.; ROMEIRO, N. M. L. Simulação numérica do transporte atmosférico e dispersão de uredinósporos no estado do Paraná provenientes de exodemia. In: IX Congresso Brasileiro de Fitopatologia, Recife, 2019.
- FANTIN, L. H.; BELINELLI, E. O.; BRAGA, K.; NATTI, P. L.; GIOVANETTI, C. Viajante do mal: o fungo causador da ferrugem-asiática. *Revista Cultivar Grandes Culturas*, v.249, n.2, p.21-23, 2020.

Capítulo de livro aceito

- FANTIN, L. H. ; BELINELLI, E. O. ; BRAGA, K. ; CIRILO, E. R. ; ROMEIRO, N. M. L. ; CANTERI, M. G. ; NATTI, P. L. GERAÇÃO DE MALHA: A DISPERSÃO DA FERRUGEM DA SOJA NO PARANÁ. In: Mariane Freitas. (Org.). Ciências Exatas e da Terra: Conhecimentos Estratégicos para o Desenvolvimento do País. 1ed. Ponta Grossa: Atena Editora, 06/2020.

2 FERRUGEM ASIÁTICA

Neste capítulo são apresentados alguns dados sobre a ferrugem asiática como o histórico de ocorrências no mundo, o ciclo e epidemiologia, a evolução da doença no Brasil e as medidas de controle.

2.1 HISTÓRICO DE OCORRÊNCIAS NO MUNDO

A ferrugem asiática foi identificada pela primeira vez no Japão em 1902 e rapidamente espalhou-se entre diversos países do continente asiático. Em meados da década de 1990 a doença foi encontrada na África e em cinco anos havia se expandido em áreas de cultivo nas regiões sul e oeste deste continente (ISARD et al., 2007).

No continente americano a doença foi identificada em 2001 no Paraguai, sendo que nos anos seguintes espalhou-se para diversos países vizinhos como o Brasil e a Argentina em 2002, a Bolívia em 2003, o Uruguai em 2004 e o Equador em 2005 (FIALLOS, 2011). Como os esporos da ferrugem asiática são espalhados predominantemente pelos ventos, as vias atmosféricas decorrentes da rotação terrestre justificam o sentido leste-oeste da disseminação da doença em diversas localidades ao longo dos anos. Por outro lado, os casos de ferrugem asiática que foram identificados na América do Norte em 2004, são explicados devido à movimentação das massas de ar associadas ao furacão Ivan que transportou os esporos da ferrugem asiática de regiões contaminadas do norte da América do Sul para regiões do sudoeste dos Estados Unidos (ISARD et al., 2007).

Atualmente, a ferrugem asiática está presente em todos os países onde a soja é cultivada (FIALLOS, 2011). Em suma, a figura 2.1 ilustra o histórico da disseminação da doença ao longo dos anos, desde o primeiro relato em 1902.



Figura 2.1: Histórico da disseminação global da ferrugem asiática ao longo dos anos em diversas localidades.

Fonte: Adaptado de Li et al. (2010).

2.2 CICLO E EPIDEMIOLOGIA

O agente etiológico da ferrugem asiática é um fungo biotrófico denominado *Phakopsora pachyrhizi*, que depende de hospedeiros vivos como a própria soja ou de hospedeiros secundários como plantas daninhas, para sobreviver e se multiplicar (EMBRAPA, 2019). O ciclo biológico da doença é ilustrado pela figura 2.2.

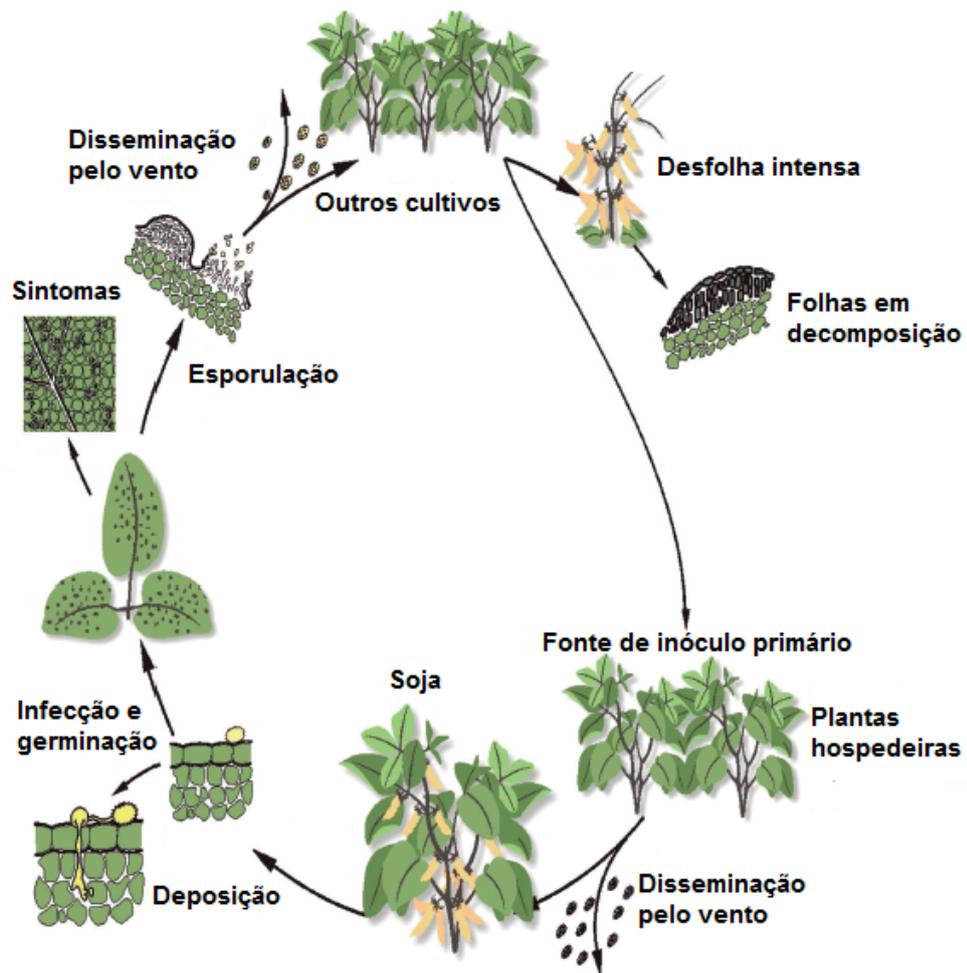


Figura 2.2: Ciclo biológico da ferrugem asiática.

Fonte: Adaptado de Fiallos (2011).

O ciclo biológico da ferrugem asiática é descrito a seguir, de acordo com a figura 2.2:

- **Fonte de inóculo primário:** o fungo precisa de um hospedeiro vivo para sobreviver e se multiplicar. Contudo, sem a presença de soja no campo, hospedeiros secundários como plantas daninhas servirão como fonte de inóculo primário para o fungo que produzirão esporos conhecidos como urediniósporos, iniciando assim, o primeiro estágio da doença (EMBRAPA, 2019).
- **Disseminação:** o fungo pode sobreviver fora do hospedeiro por meio dos esporos. Os esporos são estruturas, assim como sementes, que servem para disseminar o fungo para outras plantas e

locais por meio do vento. Durante o transporte atmosférico, os esporos ficam expostos a alguns fatores presentes na atmosfera como por exemplo, a radiação ultravioleta. Entretanto, os esporos não possuem proteção física contra esse fator o que inibe a sua sobrevivência. Na literatura encontram-se alguns trabalhos que estudam os efeitos da radiação ultravioleta na sobrevivência dos esporos durante o transporte atmosférico (ISARD et al., 2005; ISARD et al., 2006; YOUNG et al., 2012).

- **Deposição:** sobre os processos de deposição dos esporos nos hospedeiros, esses são de dois tipos: a deposição úmida e a deposição seca. A deposição úmida é responsável pelo transporte de materiais particulados da atmosfera para a superfície terrestre por meio da chuva, neblina ou neve. Já a deposição seca constitui-se do mesmo processo de remoção de materiais particulados da atmosfera, porém, sem a influência de meios aquosos. Alguns trabalhos encontrados na literatura tais como (PONTE, et al., 2006; LI et al., 2008; PONTE; ESKER, 2008; STEFANELLO, et al., 2016), mostram que a deposição úmida causa a maior parte da remoção dos esporos da ferrugem asiática da atmosfera, quando comparada com a deposição seca, resultando na acumulação de muitos esporos em um único hospedeiro.

- **Infecção:** para temperaturas variando entre 15 °C a 25 °C, e com a presença de molhamento foliar, o fungo começa o processo de germinação dos esporos, penetrando diretamente na folha de soja (FIALLOS, 2011).

- **Sintomas:** durante cinco dias após a penetração é possível visualizar os primeiros sintomas da doença, caracterizados por minúsculos ovoides presentes em grande abundância na parte inferior da folha (figura 2.3 (a)). À medida que a doença evolui, esses ovoides mudam de tamanho e formam as primeiras lesões nas folhas de soja devido à necrose do tecido foliar (figura 2.3 (b)). Durante vinte e um dias as lesões produzem esporos e vão iniciar novas infecções na mesma lavoura ou alcançar lavouras mais distantes por meio do vento (EMBRAPA, 2019).

- **Estágio final da doença:** o estágio final da doença é caracterizado pela decomposição da folhagem (figura 2.3 (c)) e desfolha precoce, comprometendo a formação e o enchimento de vagens e reduzindo assim, o peso final dos grãos (EMBRAPA, 2019). Quando chega ao fim do ciclo da cultura, os esporos passam a sobreviver em novas plantas hospedeiras, iniciando um novo ciclo de contaminação.

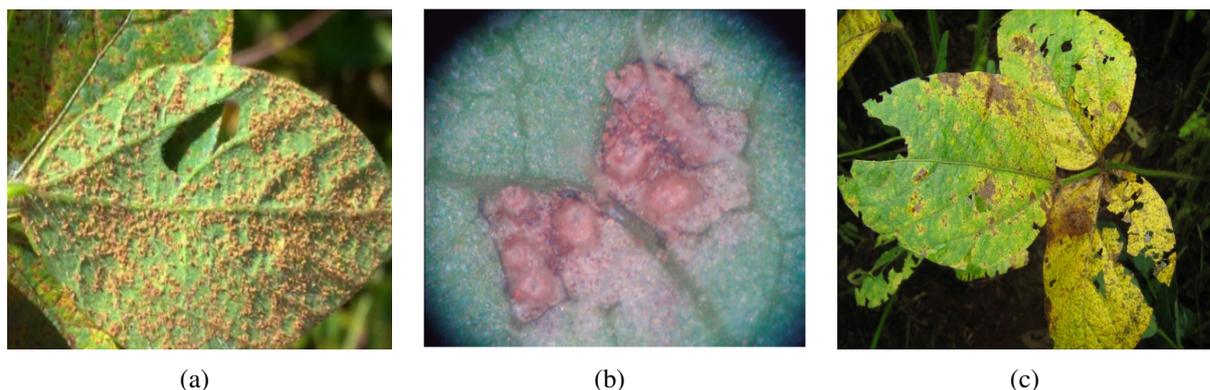


Figura 2.3: Estágios de desenvolvimento da ferrugem asiática na folha de soja.

Fonte: Embrapa (2019).

Entre os estágios da doença apresentados pela figura 2.2, será estudado neste trabalho, o estágio da disseminação dos esporos pelo vento.

2.3 EVOLUÇÃO NO BRASIL

A ferrugem asiática foi identificada pela primeira vez no Brasil durante a safra 2001/02, nas regiões oeste e norte do Paraná. Na safra subsequente 2002/03 a doença disseminou-se rapidamente entre os estados do Rio Grande do Sul, Mato Grosso do Sul, Goiás e Minas Gerais. Na safra 2003/04 houve baixa incidência da doença, devido ao uso intensivo de fungicidas e pela frequência de altas temperaturas. Entretanto, novos estados registraram perdas como a Bahia e o Mato Grosso. Entre as safras 2004/05 e 2010/11 a ferrugem asiática ocorreu de forma generalizada entre os estados brasileiros que haviam registrados casos da doença nas safras anteriores (EMBRAPA, 2019). A safra 2011/12 foi influenciada pelo fenômeno La Niña, responsável pelo esfriamento das águas na região do oceano Pacífico ocasionando a ocorrência de chuvas acima da média nas regiões norte e nordeste, e baixa incidência de chuvas na região sul e sudeste (CALDERON; BORSATO, 2017), o que diminuiu o número de casos da doença nessas regiões do Brasil.

No Paraná, a ferrugem asiática foi identificada pela primeira vez nas regiões oeste e norte do estado na safra 2001/02, mais especificamente nos municípios de Foz do Iguaçu, Guaíra e Londrina. Posteriormente, na mesma safra, a doença apresentou rápida evolução na região sul, onde os municípios mais atingidos foram Ponta Grossa e Guarapuava (EMBRAPA, 2019). Atualmente, a ferrugem asiática encontra-se presente em todas as regiões paranaenses produtoras de soja.

Para compreender o potencial destrutivo da ferrugem asiática, a figura 2.4 mostra os gastos para o controle da doença no campo entre a safra 2001/02 à safra 2018/19.

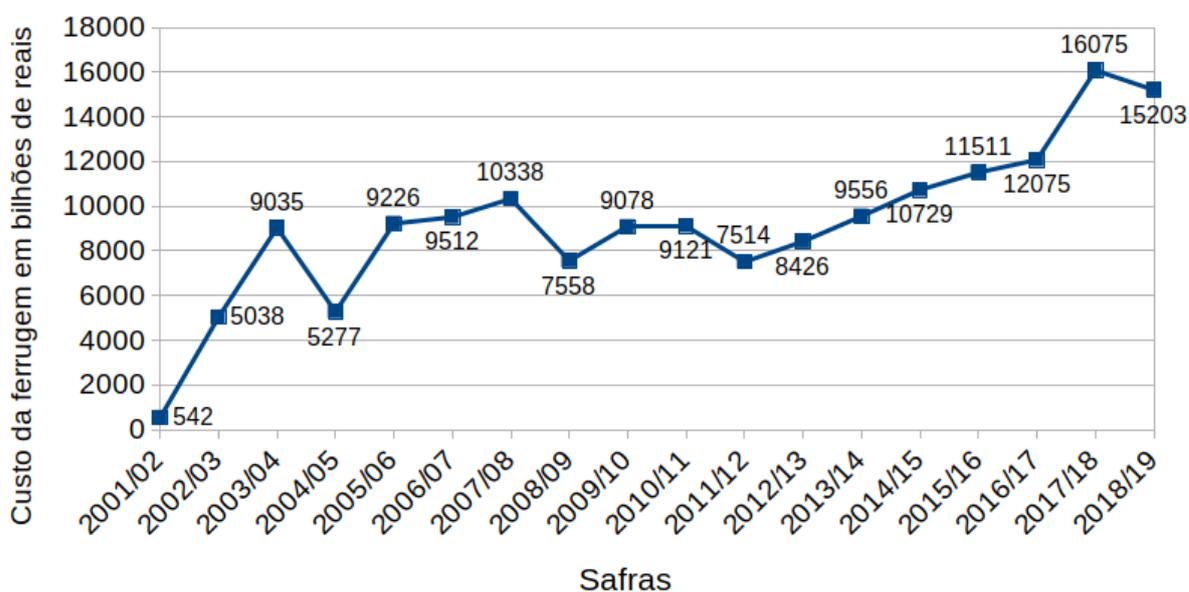


Figura 2.4: Custo com o controle da ferrugem asiática entre as safras 2001/02 à 2018/19.

Fonte: Adaptado de CONAB, EMBRAPA (2018).

De acordo com os dados apresentados pela figura 2.4 entre as safras 2001/02 e 2003/04 houve um aumento significativo de investimentos para combater a ferrugem asiática. Neste período, como a doença ainda era uma novidade, os produtores não estavam preparados para realizar o diagnóstico da doença e as aplicações com fungicidas disponíveis na época foram realizadas tardiamente (EMBRAPA, 2019).

2.4 MEDIDAS DE CONTROLE

Considerando a grande quantidade de investimentos conforme apresentada na seção anterior, foram implantadas no Brasil, medidas alternativas para ajudar a combater e monitorar a ferrugem asiática no campo.

No Brasil, o ano agrícola corresponde ao período de doze meses que engloba o início do cultivo até a colheita da soja. Geralmente, esse período se inicia na estação chuvosa para que as plantas possam receber água suficiente para vegetarem. Após a colheita, o solo permanece em repouso até que condições climáticas favoráveis se estabeleçam para que a soja possa ser cultivada novamente. O período que contempla o fim da colheita até o início do novo plantio recebe o nome de entressafra. Conforme mencionado na seção 2.2, durante o período da entressafra a propagação de inóculo primário para o fungo da ferrugem asiática ocorre em hospedeiros secundários como por exemplo, em plantas daninhas e principalmente, em plantas de soja voluntárias que nascem após a colheita. Com o objetivo de reduzir a incidência precoce da doença durante a entressafra e atrasar a ocorrência da doença na safra foi estabelecido por lei em alguns estados brasileiros, inclusive no estado do Paraná, um período de sessenta a noventa dias sem plantas vivas de soja no campo, que atualmente, é a melhor forma de reduzir a fonte

de inóculo primário para o fungo e minimizar a aplicação de fungicidas, denominado vazio sanitário (GODOY et al., 2016).

O vazio sanitário foi implantado pela primeira vez no Brasil no ano de 2006, nos estados do Mato Grosso e Goiás, seguido pelos estados do Mato Grosso do Sul, Tocantins, São Paulo e Minas Gerais. No Paraná, essa prática foi implantada em 2008 (EMBRAPA, 2019). O calendário do vazio sanitário para a safra 2018/19 no Brasil é apresentado pela figura 2.5, que contempla os meses junho à setembro de 2018.

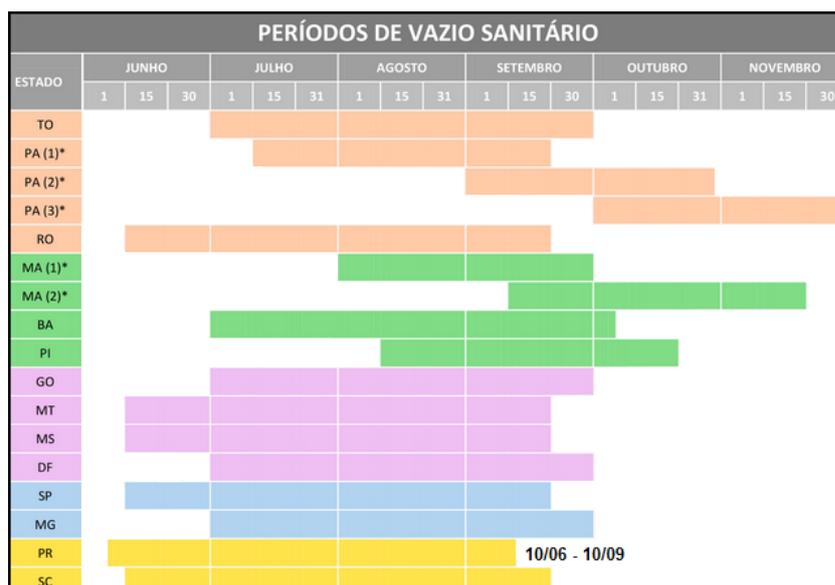


Figura 2.5: Período do vazio sanitário da soja da safra 2018/19.

Fonte: Embrapa (2018).

Além da implantação do vazio sanitário, outras medidas de controle foram adotadas para combater a ferrugem asiática no campo. A utilização de fungicidas nos sintomas iniciais da doença tem sido a ferramenta mais indicada no combate a ferrugem asiática, em curto prazo. Entretanto, práticas alternativas têm sido adquiridas como a rotação de culturas, semeadura da soja em época recomendada, monitoramento constante da lavoura, cuidados para evitar perdas na colheita e eliminação da soja voluntária (SOARES, 2004; GABRIEL et al., 2018).

Por outro lado, com o objetivo de alertar os agricultores de forma prática e eficiente sobre o aparecimento da doença nas lavouras de soja no Brasil foi criado o Consórcio Antiferrugem, um projeto coordenado pela Embrapa, que conta com laboratórios cadastrados no Brasil, capacitados para identificar e monitorar a doença. Por meio de um site na internet, a página do Consórcio Antiferrugem reúne dados de pesquisa, orientações técnicas e também monitora a doença em tempo real durante a safra de soja. A partir da detecção regional dos focos de ferrugem asiática a cada safra e do compartilhamento digital dos dados, é gerado um mapa sobre a dispersão da doença no Brasil (EMBRAPA, 2019).

3 DADOS SOBRE O ESTADO DO PARANÁ

Este capítulo apresenta algumas características físicas do estado do Paraná como os aspectos climáticos e eólicos, a fim de compreender a influência desses fatores para o desenvolvimento da soja e da ferrugem asiática no campo.

3.1 LOCALIZAÇÃO GEOGRÁFICA DO ESTADO DO PARANÁ

O estado do Paraná está localizado na região sul do Brasil, limitando-se ao norte com São Paulo, ao sul com Santa Catarina, a leste com o oceano Atlântico, a sudoeste com a Argentina, ao oeste com o Paraguai e a noroeste com Mato Grosso do Sul, conforme ilustra a figura 3.1. A área territorial do estado é de aproximadamente 119.554 km^2 que representa 2,34% do território nacional (COPEL, 2007).



Figura 3.1: Localização geográfica do estado do Paraná.

Fonte: Ipardes (2019).

3.2 ASPECTOS CLIMÁTICOS

O clima do estado do Paraná encontra-se dividido em tropical e subtropical. O clima tropical é caracterizado por verões quentes, quando a temperatura média anual varia em torno de 28°C a 30°C e ocorre em grandes partes da região noroeste do estado. Já o clima subtropical possui duas variações, sendo o clima subtropical Cfa e o subtropical Cfb. O clima subtropical Cfa é caracterizado por verões quentes com temperatura média anual variando entre

25 °C a 27 °C. Esse clima é característico das regiões litorâneas do estado do Paraná. O clima subtropical Cfb é caracterizado por temperaturas variando entre 20 °C a 27 °C. Esse clima é característico das regiões Sul e Sudeste do estado do Paraná (SCAPIN, 2006; APARECIDO et al., 2016). Em síntese, a figura 3.2 mostra a distribuição média anual da temperatura no estado do Paraná.

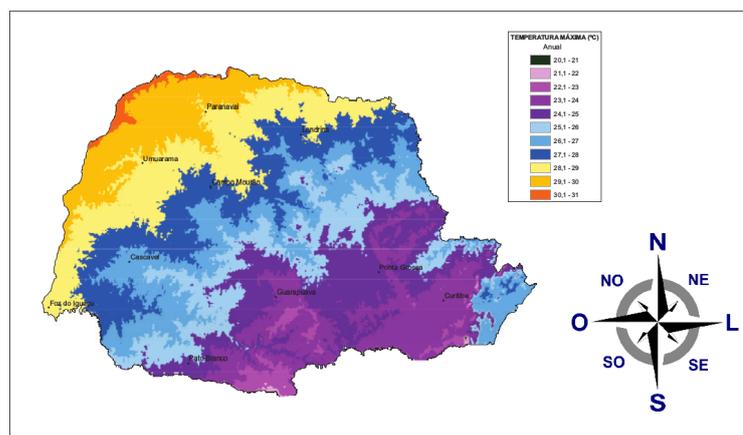


Figura 3.2: Distribuição média anual de temperatura no estado do Paraná.
Fonte: Copel (2019).

Com relação à distribuição média anual de chuvas no estado do Paraná, o clima tropical é caracterizado por chuvas bem distribuídas ao longo do ano, com pluviosidade média anual variando entre 1200 a 1600 milímetros. Nas regiões onde o clima subtropical é predominante, a distribuição média anual de chuvas variam entre 1200 a 2400 milímetros. A figura 3.3 mostra a distribuição média anual de chuvas no estado do Paraná.

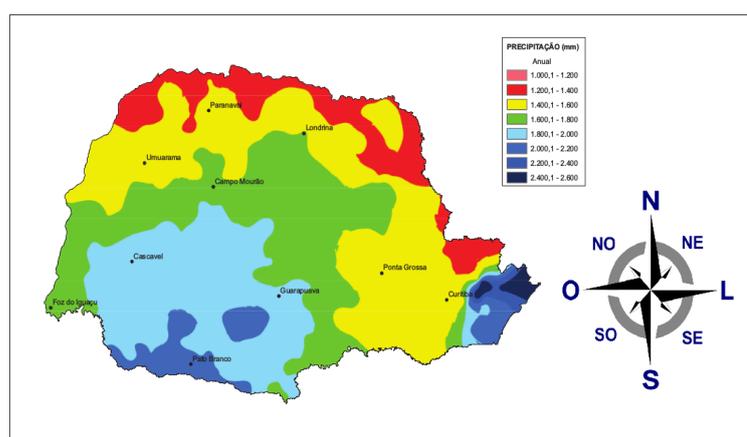


Figura 3.3: Distribuição média anual de chuvas no estado do Paraná.
Fonte: Copel (2019).

3.3 ASPECTOS EÓLICOS

O regime de ventos que ocorre no estado do Paraná é influenciado diretamente pela rotação terrestre que gera os ventos alísios, pelos efeitos do anticiclone subtropical do Atlântico Sul, os deslocamentos de massas de ar polares e da depressão barométrica do nordeste da Argentina (COPEL, 2007), conforme ilustra a figura 3.4.



Figura 3.4: Mecanismos predominantes do regime de ventos no estado do Paraná.

Fonte: Copel (2007).

O anticiclone subtropical do Atlântico Sul localizado entre a América do Sul e o continente africano, exerce grande influência no clima brasileiro seja no verão ou no inverno. No verão é responsável pelo aquecimento sobre os continentes com a ocorrência de ventos fracos. No inverno causa inversão térmica e concentração de poluentes nas regiões centro-oeste, sudeste e sul do Brasil (SILVA et al., 2011). A depressão barométrica localizada na região nordeste da Argentina é uma área quase permanente de baixas pressões, geralmente estacionária a leste da Cordilheira dos Andes, causada pelo bloqueio da circulação geral imposta pela parede montanhosa dos Andes e acentuada pelo intenso aquecimento das planícies de baixa altitude na região. As massas de ar polares são formadas nas regiões próximas aos polos e tendem a se deslocarem das regiões de altas pressões para as regiões de baixas pressões atmosféricas (COPEL, 2007).

O regime padrão de ventos no estado do Paraná é caracterizado pelos ventos alísios de leste para oeste. No entanto, esse regime de ventos também é influenciado pela passagem de frentes frias que se intensificam no inverno e na primavera. A chegada de uma frente fria é precedida por ventos que ocorrem de norte-noroeste e que trazem ventos mais intensos. Como a frente fria tende a se deslocar para a região nordeste, sua passagem é influenciada por ventos polares de sudoeste, com velocidades que podem se intensificar por alguns dias. Depois,

gradualmente, a situação geral dos ventos de leste-oeste tende a se restabelecer, até a passagem de uma nova frente fria (COPEL, 2007), veja figura 3.5.

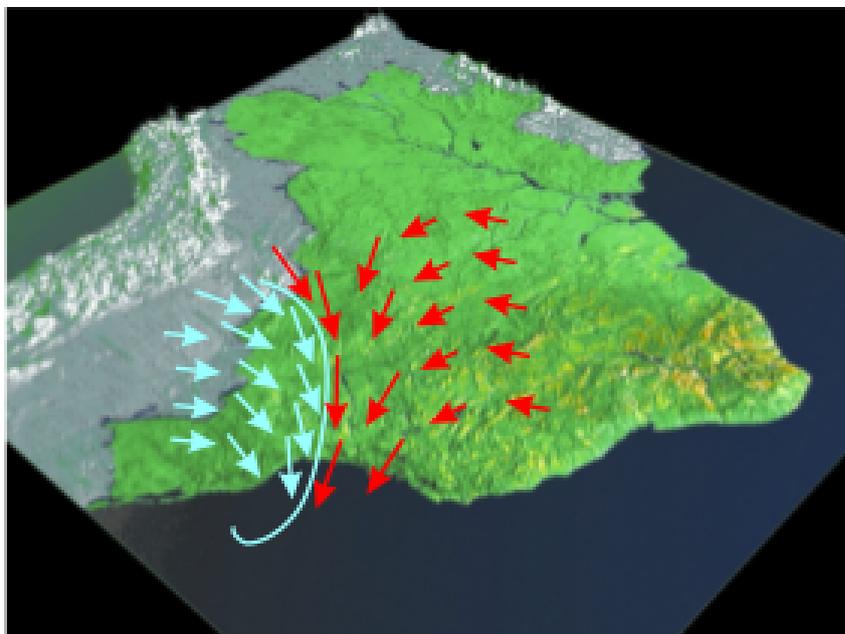


Figura 3.5: Dinâmica de uma frente fria na região sul do Brasil.

Fonte: Copel (2007).

3.4 INFLUÊNCIA DOS FATORES HÍDRICOS E CLIMÁTICOS PARA O CULTIVO DA SOJA NO PARANÁ

Nesta seção reúnem-se as informações apresentadas anteriormente com o objetivo de compreender a influência dos aspectos climáticos para o cultivo da soja e o desenvolvimento da ferrugem asiática no estado do Paraná.

O Paraná é um dos maiores estados brasileiros produtores de soja. Apenas na safra 2018/19 a produtividade no estado foi superior à 16 milhões de toneladas em uma área cultivada equivalente à 5.438 milhões de hectares (EMBRAPA, 2019). Geralmente, o início do plantio da soja no estado do Paraná ocorre na primavera entre os meses de setembro e outubro. Nos meses seguintes (novembro e dezembro) é o período de desenvolvimento da planta e de janeiro à março, o período da colheita. Durante os meses de crescimento da planta de soja as condições ambientais como temperatura e distribuição de chuvas devem estar bem definidas para que seja possível obter bons resultados na colheita.

As plantas de soja se adaptam melhor às regiões onde as temperaturas variam entre 20 °C a 30 °C, sendo que a temperatura ideal está em torno de 30 °C. Regiões onde as temperaturas são menores ou iguais 10 °C ou superiores à 40 °C, têm efeitos adversos no cultivo da soja. Além disso, a disponibilidade hídrica durante o ciclo de crescimento da planta de soja, constitui-se na principal limitação do rendimento da cultura. A necessidade total de

água para que seja possível obter o máximo de rendimento varia entre 450 a 800 milímetros por ciclo. Neste contexto, a fim de compreender a disponibilidade desses recursos no estado do Paraná, as figuras 3.6 e 3.7 mostram a distribuição média de temperatura entre os meses de verão (dezembro a março) e os meses de primavera (setembro a novembro) e as figuras 3.8 e 3.9 mostram a distribuição média de chuvas no verão e na primavera, respectivamente, no estado do Paraná.

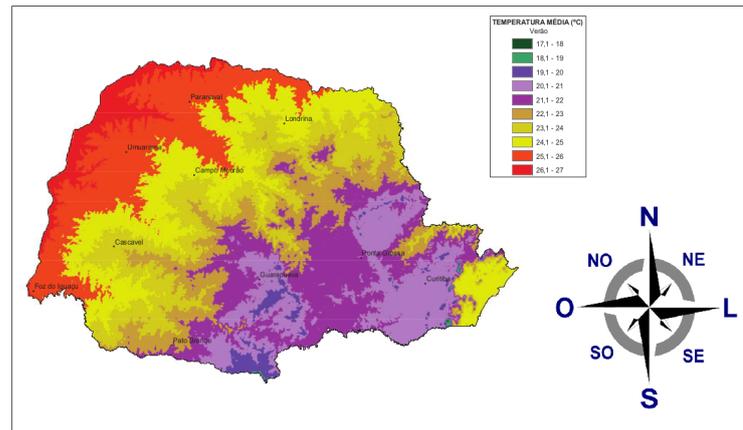


Figura 3.6: Distribuição média de temperatura nos meses de verão no estado do Paraná.

Fonte: Copel (2019).

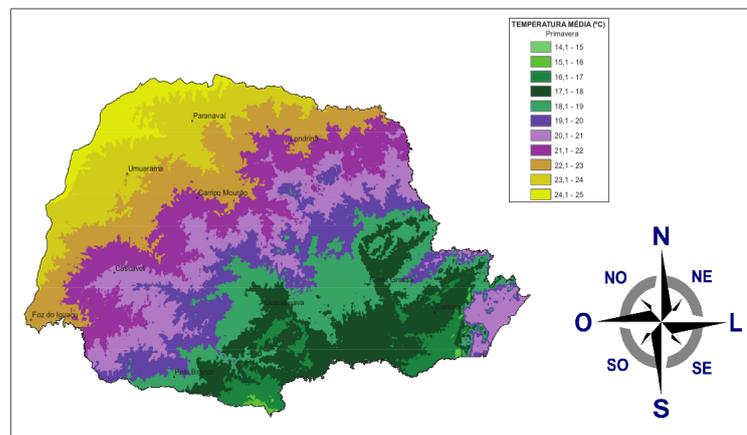


Figura 3.7: Distribuição média de temperatura nos meses de primavera no estado do Paraná.

Fonte: Copel (2019).

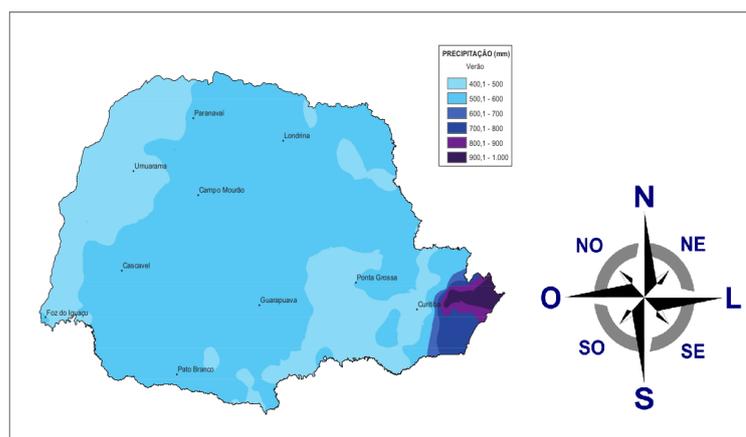


Figura 3.8: Distribuição média de chuvas nos meses de verão no estado do Paraná.
Fonte: Copel (2019).

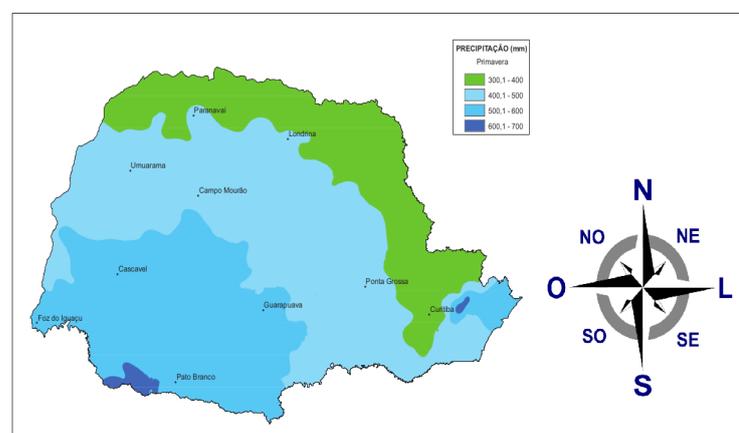


Figura 3.9: Distribuição média de chuvas nos meses de primavera no estado do Paraná.
Fonte: Copel (2019).

De acordo com a figura 3.6, pode-se observar que a distribuição média de temperatura em grande parte das regiões norte, noroeste e oeste do estado do Paraná, onde localizam-se as cidades de Paranavaí, Umuarama e Foz do Iguaçu, variam em torno de 27°C nos meses de verão, compreendendo as regiões de maiores temperaturas do estado. Já as regiões nordeste, central, sudoeste e o litoral paranaense são caracterizadas por temperaturas variando entre 22°C a 24°C onde localizam-se as cidades de Londrina, Campo Mourão e Cascavel. As regiões sul e sudeste são caracterizadas por temperaturas amenas, variando entre 19°C e 24°C . Nessas regiões encontram-se as cidades de Ponta Grossa, Guarapuava, Pato Branco e Curitiba. Analogamente, nos meses de primavera, a distribuição média de temperatura (figura 3.7) segue o mesmo padrão que a distribuição de temperatura nos meses de verão, amenos da ocorrência de temperaturas mais baixas, onde a máxima é de 24°C nas regiões norte, noroeste e o oeste do estado paranaense.

Com relação à distribuição de chuvas nos meses de verão (figura 3.8), a precipitação pluviométrica em grande parte do estado é de 500 milímetros, compreendendo as re-

giões norte, central, sudoeste e nordeste do estado do Paraná. Na região litorânea, a ocorrência de chuvas é de 800 milímetros, enquanto que nas demais localidades, a distribuição de chuvas é de 400 milímetros. Por outro lado, durante os meses da primavera a distribuição de chuvas (figura 3.9) é menor em todas as regiões, com máxima de 600 milímetros nas proximidades da região sudoeste do estado do Paraná.

Nesse contexto, o estado do Paraná dispõe de boas condições ambientais para o cultivo da soja, pois a distribuição de chuvas e temperaturas nesse estado estão entre as condições necessárias para o desenvolvimento da cultura da soja. Por outro lado, essas condições ambientais também contribuem para a deposição e penetração dos esporos da ferrugem asiática na soja pois conforme mencionado no capítulo 2, temperaturas variando entre 15 °C a 25 °C, e com a presença de molhamento foliar, são condições ideais para que os esporos comecem o processo de germinação, infectando a folha de soja (FIALLOS, 2011; EMBRAPA, 2019).

4 EQUAÇÃO DE TRANSPORTE

A equação matemática que descreve o transporte atmosférico dos esporos da ferrugem asiática apresentada neste trabalho, é equivalente à equação da propagação do calor por mecanismos de difusão e convecção em meios fluidos. Desta forma, será apresentada inicialmente neste capítulo, a modelagem da equação difusiva-convectiva do calor, que será adaptada posteriormente à situação do transporte atmosférico dos esporos da ferrugem asiática.

4.1 EQUAÇÃO DIFUSIVA-CONVECTIVA DA PROPAGAÇÃO DO CALOR

Para derivar a equação difusiva-convectiva da transferência de calor em meios fluidos, considera-se, inicialmente, um elemento cúbico de controle infinitesimal, com volume $V = dx dy dz$ (figura 4.1), massa específica ρ , condutividade térmica k e calor específico c . Supondo que a distribuição de temperatura $T = T(x, y, z, t)$ possa ser expressa em coordenadas cartesianas, a primeira lei da termodinâmica é utilizada para modelar a equação da transferência de calor em um dado instante de tempo (WHITE, 2011; KREITH et al., 2012).

A transferência de calor por mecanismo de difusão consiste no processo físico onde o calor flui através de um sólido pela interação dos átomos em colisões elásticas e inelásticas, a fim de propagar energia de regiões com temperaturas mais altas para regiões de temperaturas mais baixas (WHITE, 2011; KREITH et al., 2012). As taxas de transferência de calor que entram por difusão, perpendiculares a cada uma das superfícies do volume de controle são indicadas pelos termos: q_x , q_y e q_z .

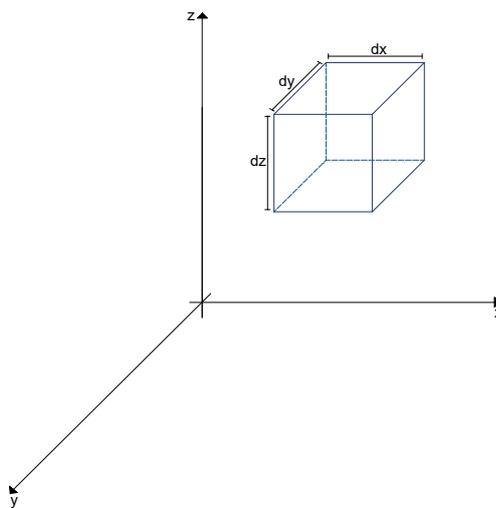


Figura 4.1: Elemento cúbico de controle infinitesimal.

Fonte: Adaptada de White (2011).

Se existirem gradientes de temperatura, então haverá a transferência de calor

por difusão através de cada uma das superfícies de controle (WHITE, 2011). A distribuição de temperatura pode ser determinada pela primeira lei da termodinâmica, ou seja

$$\begin{pmatrix} \text{Taxa de energia} \\ \text{armazenada dentro} \\ \text{do volume} \\ \text{de controle} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Taxa de} \\ \text{difusão de} \\ \text{calor que} \\ \text{entra no} \\ \text{volume} \\ \text{de controle} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Taxa de} \\ \text{geração de} \\ \text{de calor} \\ \text{dentro do} \\ \text{volume de} \\ \text{controle} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Taxa de difusão} \\ \text{de calor que sai} \\ \text{do volume de} \\ \text{controle} \end{pmatrix}.$$

O fluxo de calor que entra por difusão \dot{E}_e , perpendicularmente às superfícies de controle, é dado por

$$\dot{E}_e = q_x + q_y + q_z. \quad (4.1)$$

No interior do volume de controle podem existir fontes de geração de energia interna associadas às taxas de geração de energia térmica, contudo, nessa modelagem considera-se que não haja fontes de geração de energia interna ou sorvedouros.

As taxas de transferência de calor que saem do volume de controle podem ser expressas como uma expansão em séries de Taylor. Supondo que o volume de controle é suficientemente pequeno, os termos na expansão em séries de Taylor superiores à derivada de primeira ordem podem ser desprezados, desta forma

$$\begin{aligned} q_{x+dx} &= q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx, \\ q_{y+dy} &= q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy, \\ q_{x+dz} &= q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Se o volume de controle não sofre mudanças de fase, então não há o efeito de energia latente e a taxa de energia armazenada \dot{E}_{ar} dentro do volume de controle é dada por

$$\dot{E}_{ar} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz, \quad (4.3)$$

onde $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz$ representa a taxa de variação da energia com o tempo por unidades de volume.

Reconhecendo as taxas de calor por difusão que entram \dot{E}_e , as taxas de calor por difusão que saem \dot{E}_s , e a energia armazenada dentro do volume de controle \dot{E}_{ar} , o balanço

da conservação de energia (primeira lei da termodinâmica) é descrito por

$$\dot{E}_{ar} = \dot{E}_e - \dot{E}_s. \quad (4.4)$$

Substituindo as equações (4.1)-(4.3) em (4.4), tem-se

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz = q_x + q_y + q_z - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy + q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right). \quad (4.5)$$

As taxas de calor que entram no volume de controle por difusão podem ser descritas a partir da Lei de Fourier (WHITE, 2011), desta forma

$$\begin{aligned} q_x &= -k dy dz \frac{\partial T}{\partial x}, \\ q_y &= -k dx dz \frac{\partial T}{\partial y}, \\ q_z &= -k dx dy \frac{\partial T}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Na equação (4.6) o sinal é negativo pois a transferência de calor ocorre da região com temperatura mais alta em direção às regiões de temperatura mais baixas. Substituindo a equação (4.6) na equação (4.5) e dividindo cada termo pelas dimensões do volume de controle ($dx dy dz$), obtém-se a equação tridimensional da transferência de calor por mecanismo de difusão

$$\underbrace{\rho c \frac{\partial T}{\partial t}}_{\substack{\text{taxa de} \\ \text{energia térmica} \\ \text{armazenada}}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)}_{\substack{\text{taxa de energia} \\ \text{transferida} \\ \text{por difusão na} \\ \text{direção do eixo x}}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right)}_{\substack{\text{taxa de energia} \\ \text{transferida} \\ \text{por difusão na} \\ \text{direção do eixo y}}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)}_{\substack{\text{taxa de energia} \\ \text{transferida} \\ \text{por difusão na} \\ \text{direção do eixo z}}}, \quad (4.7)$$

ou ainda, se a condutividade térmica for constante, então a equação (4.7) é escrita como

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T, \quad (4.8)$$

onde $\alpha = k/c\rho$ representa a difusividade térmica.

O processo de difusão também ocorre em líquidos e gases, entretanto, nem sempre é o mecanismo predominante nos fluidos (KREITH et al., 2012). A transferência de calor em meios fluidos também ocorre pelo processo de convecção. O fluxo de calor por convecção q_c é dado por

$$q_c = \frac{\partial T v_x}{\partial x} + \frac{\partial T v_y}{\partial y} + \frac{\partial T v_z}{\partial z}, \quad (4.9)$$

ou ainda,

$$q_c = \vec{\nabla} \cdot (T\vec{v}), \quad (4.10)$$

onde $\vec{v} = v_x(x, y, z, t)\hat{i} + v_y(x, y, z, t)\hat{j} + v_z(x, y, z, t)\hat{k}$, representa o campo de velocidades do fluido. Acrescentando o termo convectivo dado por (4.10) em (4.7), tem-se a equação que descreve a transferência de calor por mecanismos de difusão e convecção em meios fluidos segundo Fortuna et al. (2012), expressa em coordenadas cartesianas, pode ser escrita na forma

$$\underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{\substack{\text{taxa de} \\ \text{variação da energia} \\ \text{térmica em} \\ \text{ao longo} \\ \text{do tempo}}} = \underbrace{\alpha \vec{\nabla}^2 T}_{\substack{\text{fluxo de calor} \\ \text{por difusão}}} - \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (T\vec{v})}_{\substack{\text{fluxo de calor} \\ \text{por convecção}}}. \quad (4.11)$$

4.2 EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE ESPOROS

Nesta seção, a equação (4.11) será adaptada à situação do transporte atmosférico dos esporos da ferrugem asiática, no qual são levadas em consideração as informações apresentadas no capítulo 2.

Conforme apresentado no capítulo 2, durante o transporte atmosférico os esporos ficam expostos à alguns fatores presentes na atmosfera como, por exemplo, a radiação ultravioleta que inibe a sua sobrevivência. Por outro lado, supõe-se que os esporos estão sendo transportados para o estado do Paraná por meio de frentes frias. As frentes frias geralmente são acompanhadas de umidade (nuvens e chuva), que absorvem a radiação ultravioleta, dessa forma, não considera-se o efeito da radiação ultravioleta na sobrevivência dos esporos.

No presente trabalho, a função que representa a concentração de esporos depende de duas variáveis espaciais x e y e uma temporal t , denotada por $C(x, y, t)$. O coeficiente de difusão molecular dos esporos suspensos no ar é denotado por D e o campo de velocidades que descrevem as frentes frias é dado por $\vec{v}(x, y, t) = v_x(x, y, t)\hat{i} + v_y(x, y, t)\hat{j}$. Por fim, na equação (4.11), deve-se considerar que os esporos possuem um período de vida durante o transporte atmosférico (PAN et. al., 2006). Neste caso, deve-se acrescentar um termo reativo em (4.11) que descreva esse fenômeno. Desta forma, um termo do tipo Malthus (MALTHUS, 1888) pode ser utilizado para determinar a taxa de mortalidade dos esporos durante o transporte atmosférico, isto é

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\lambda C, \quad (4.12)$$

onde λ é a taxa de mortalidade natural dos esporos, com $\lambda > 0$.

Acrescentando o termo $-\lambda C$ de (4.12) em (4.11), obtém-se a equação de transporte com termos difusivo (propriedade de se homogeneizar a concentração de esporos com o fluido), convectivo (movimento do fluido com um campo de velocidades) e reativo (propriedade dos esporos), que fornece a dispersão atmosférica dos esporos da ferrugem asiática, ou seja,

$$\underbrace{\frac{\partial C}{\partial t}}_{\text{termo temporal}} = \underbrace{D \vec{\nabla}^2 C}_{\text{termo difusivo}} - \underbrace{\vec{\nabla} (C \vec{v})}_{\text{termo convectivo}} - \underbrace{\lambda C}_{\text{termo reativo}} . \quad (4.13)$$

5 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE

Neste capítulo é apresentada a discretização do domínio de soluções e a discretização da equação (4.13) pelo método de diferenças finitas, cuja a teoria é apresentada no Apêndice A. Além disso, são apresentadas as condições iniciais e de contorno para a concentração de esporos e os campos de velocidades que descrevem as frentes frias. Por fim, é realizado um estudo sobre a consistência da equação discretizada.

5.1 DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO DE SOLUÇÕES

Na abordagem numérica de equações diferenciais problemas contínuos são transformados em problemas discretos. A transformação referida é realizada tanto na equação de interesse quanto no domínio de soluções. No domínio de soluções, a transformação consiste na decomposição de uma região geométrica contínua em um conjunto finito de pontos, de modo que seja possível a aplicação de métodos numéricos para aproximar soluções de equações diferenciais (MACHADO, 2008; CUMINATO; MENEGUETTE, 2013).

O domínio de soluções definido neste trabalho é uma região retangular fechada do \mathbb{R}^2 , que tem como geometria interna o estado do Paraná e suas fronteiras, conforme mostra a figura 5.1.



Figura 5.1: Domínio geométrico de soluções.

Fonte: Autor.

A dimensão geométrica da figura 5.1 corresponde a uma área de $1000 \times 700 \text{ km}^2$ e representa a dimensão real da geometria interna considerada. As coordenadas (x, y) da geometria interna foram coletadas pelo software WebPlotDigitizer (ROHATGI, 2011), em que utilizou-se como base a figura 3.1 do capítulo 3. Após a coleta dos dados, gerou-se um arquivo de texto na extensão $(.txt)$, onde os dados coletados foram visualizados na janela gráfica do software Octave.

A discretização do domínio de soluções consiste em obter um conjunto finito de pares ordenados (x, y) , que estão espaçados entre si por uma distância Δx e Δy , respectivamente. Esse conjunto de pontos recebe o nome de malha computacional. A malha computacional definida neste trabalho foi obtida a partir das operações definidas na Sub-Rotina 1.

Sub-Rotina 1: Discretização do domínio de soluções.

Dados iniciais do domínio de soluções.

$$x_0 = 0; \quad x_f = 1000 \quad y_0 = 0; \quad y_f = 700$$

Número de partições.

$$M_x = \text{dados de entrada};$$

$$M_y = M_x;$$

Comprimento das partições.

$$\Delta_x = \frac{(x_f - x_0)}{M_x}; \quad \Delta_y = \frac{(y_f - y_0)}{M_y};$$

Malha computacional.

$$x = (x_0 : \Delta_x : x_f); \quad y = (y_0 : \Delta_y : y_f);$$

Fonte: Autor.

De acordo com a Sub-Rotina 1, os dados iniciais correspondem à dimensão do domínio de soluções. As variáveis $x_0 = 0$, $x_f = 1000$, $y_0 = 0$ e $y_f = 700$ definem o domínio de soluções em que a geometria interna da figura 5.1 está inserida. As variáveis M_x e M_y definem o número de partições que serão realizadas nos eixos x e y , respectivamente, enquanto que as variáveis Δ_x e Δ_y definem o comprimento dessas partições. As variáveis x e y definem um conjunto de pontos entre x_0 e x_f , e y_0 e y_f , que estão espaçados entre si por uma distância Δ_x e Δ_y , respectivamente.

A discretização do domínio de soluções pela Sub-Rotina 1 resulta em uma malha computacional do tipo cartesiana estruturada, pois apresenta uma regularidade na distribuição espacial dos pontos, isto é, os pontos estão igualmente espaçados entre si (FORTUNA,

2012). No presente trabalho optou-se por utilizar uma malha do tipo cartesiana estruturada devido à simplicidade na implementação computacional, de modo que os cálculos serão realizados sobre os pontos da malha. Para que seja possível realizar a implementação computacional da Sub-Rotina 1, os pontos da malha devem ser identificados pelo computador por meio de índices. Geralmente, os índices i e j são utilizados para identificar um ponto na i -ésima coluna e na j -ésima linha da malha, respectivamente. Desta forma, dado um ponto (i, j) , o mesmo possui coordenadas $(x_0 + i\Delta_x, y_0 + j\Delta_y)$, com $i = 1, \dots, n_x$ e $j = 1, \dots, n_y$, em que o ponto (x_0, y_0) representa a origem do sistema de coordenadas, n_x e n_y , o número de pontos nas dimensões x e y , respectivamente.

5.2 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE ESPOROS

Para que seja possível tratar numericamente equações diferenciais é necessário representá-las na forma de operações aritméticas, de modo que o computador possa executar. Essencialmente, deve-se representar os diferenciais da equação por expressões algébricas, ou seja, discretizá-la. As respectivas expressões são denominadas aproximações por diferenças finitas e devem ser escritas em função dos pontos da malha (FORTUNA, 2012).

Nesta seção são utilizadas as fórmulas de diferenças finitas apresentadas no Apêndice A para discretizar a equação (4.13). A título de simplificação, os pontos da malha computacional são rotulados por meio de pontos cardeais com $P = (i, j)$, $E = (i + 1, j)$, $W = (i - 1, j)$, $N = (i, j + 1)$, $S = (i, j - 1)$, $EE = (i + 2, j)$, $WW = (i - 2, j)$, $NN = (i, j + 2)$ e $SS = (i, j - 2)$. Os espaçamentos em x , y e t são denotados por Δx , Δy e Δt , respectivamente.

Considere novamente a equação de transporte de esporos

$$\underbrace{\frac{\partial C}{\partial t}}_{\text{termo temporal}} = \underbrace{D\nabla^2 C}_{\text{termo difusivo}} - \underbrace{\nabla \cdot (C\vec{v})}_{\text{termo convectivo}} - \underbrace{\lambda C}_{\text{termo reativo}},$$

ou ainda, escrita com as derivadas explícitas,

$$\underbrace{\frac{\partial C}{\partial t}}_{\text{termo temporal}} = D \underbrace{\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right)}_{\text{termo difusivo}} - \underbrace{\left(\frac{\partial C v_x}{\partial x} + \frac{\partial C v_y}{\partial y} \right)}_{\text{termo convectivo}} - \underbrace{\lambda C}_{\text{termo reativo}}. \quad (5.1)$$

No instante de tempo $t = 0$, condições iniciais são assumidas para a equação (5.1). Ao fazer incremento no tempo por Δt as variáveis espaciais são calculadas para o novo nível de tempo, ou seja, conhecidas as variáveis no nível de tempo k (condições iniciais), calcula-se as variáveis espaciais no nível de tempo $k + 1$. Desta forma, o termo temporal da equação (5.1) é aproximado pela fórmula de diferenças finitas regressivas, isto é

$$\left. \frac{\partial C}{\partial t} \right|_P^{k+1} \approx \frac{C|_P^{k+1} - C|_P^k}{\Delta t}. \quad (5.2)$$

No termo difusivo aproximam-se as derivadas de segunda ordem pela fórmula de diferenças finitas centradas, que para o nível de tempo $k + 1$, tem-se

$$\left. \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right|_P^{k+1} \approx \frac{C|_E^{k+1} - 2C|_P^{k+1} + C|_W^{k+1}}{(\Delta x)^2}, \quad (5.3)$$

$$\left. \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right|_P^{k+1} \approx \frac{C|_N^{k+1} - 2C|_P^{k+1} + C|_S^{k+1}}{(\Delta y)^2}. \quad (5.4)$$

Grande parte dos problemas reais que envolvem o transporte de propriedades físicas são modelados por equações diferenciais que possuem dinâmica convectiva. Este termo convectivo é o principal causador de dificuldades nas simulações numéricas, pois pode apresentar instabilidade e oscilações nos resultados dependendo do método numérico utilizado para discretizá-lo (FORTUNA, 2012; CUMINATTO; MENEGUETTE, 2013). Desta forma, esquemas do tipo *upwind* são técnicas numéricas especializadas para discretizar termos convectivos, em geral, não lineares, presentes em equações diferenciais, cujo o transporte de propriedades físicas ocorre predominantemente por mecanismo de convecção. No presente trabalho utiliza-se o esquema do tipo *upwind* de primeira ordem - *First Order Upwind* (FOU) para discretizar o termo convectivo da equação (5.1).

Considerando o termo convectivo de (5.1), a aproximação por diferenças finitas centradas no espaço, para o nível de tempo $k + 1$, é dada por

$$\left. \frac{\partial C v_x}{\partial x} \right|_P^{k+1} \approx \frac{C v_x|_E^{k+1} - C v_x|_W^{k+1}}{2\Delta x} = \frac{C|_E^{k+1} v_x|_E - C|_W^{k+1} v_x|_W}{2\Delta x}. \quad (5.5)$$

O termo $v_x|_E$ da aproximação (5.5) corresponde à velocidade de convecção, que neste trabalho é prescrito por um campo de velocidades constante ao longo do tempo e variável no espaço, enquanto que o termo $C|_E^{k+1}$ representa a propriedade sendo transportada (esporos), na qual será aplicada o esquema FOU (QUEIROZ, 2009; FORTUNA, 2012; CUMINATTO; MENEGUETTE, 2013), assim

$$C|_E^{k+1} = \left(\frac{1 + S_E}{2} \right) C|_P^{k+1} + \left(\frac{1 - S_E}{2} \right) C|_{EE}^{k+1} \quad (5.6)$$

$$C|_W^{k+1} = \left(\frac{1 + S_W}{2} \right) C|_{WW}^{k+1} + \left(\frac{1 - S_W}{2} \right) C|_P^{k+1}, \quad (5.7)$$

onde os termos $S|_E$ e $S|_W$ são dados por

$$S|_E = \begin{cases} 1, & v_x|_E \geq 0 \\ -1, & v_x|_E < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad S|_W = \begin{cases} 1, & v_x|_W \geq 0 \\ -1, & v_x|_W < 0. \end{cases}$$

Analogamente,

$$\frac{\partial C v_y}{\partial y} \Big|_P^{k+1} \approx \frac{C v_y|_N^{k+1} - C v_y|_S^{k+1}}{2\Delta y} = \frac{C|_N^{k+1} v_y|_N - C|_S^{k+1} v_y|_S}{2\Delta y}. \quad (5.8)$$

Aplicando o esquema FOU em (5.8), tem-se

$$C|_N^{k+1} = \left(\frac{1 + S_N}{2} \right) C|_P^{k+1} + \left(\frac{1 - S_N}{2} \right) C|_{NN}^{k+1}, \quad (5.9)$$

$$C|_S^{k+1} = \left(\frac{1 + S_S}{2} \right) C|_{SS}^{k+1} + \left(\frac{1 - S_S}{2} \right) C|_P^{k+1}, \quad (5.10)$$

onde os termos $S|_N$ e $S|_S$ são dados por

$$S|_N = \begin{cases} 1, & v_y|_N \geq 0 \\ -1, & v_y|_N < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad S|_S = \begin{cases} 1, & v_y|_S \geq 0 \\ -1, & v_y|_S < 0. \end{cases}$$

Na aplicação do esquema FOU foram utilizados os pontos de malha rotulados por EE , WW , NN e SS , pois conforme mencionado anteriormente, as variáveis de interesse (concentração de esporos e a velocidade de convecção) são calculadas em função dos pontos da malha.

Por fim, o termo reativo também deve ser calculado no ponto de malha P , no nível de tempo $k + 1$, desta forma

$$\lambda C|_P^{k+1}. \quad (5.11)$$

Substituindo as discretizações (5.2) - (5.11) em (5.1), segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta t} \left(C \Big|_P^{k+1} - C \Big|_P^k \right) &= \frac{D}{(\Delta x)^2} \left(C \Big|_E^{k+1} - 2C \Big|_P^{k+1} + C \Big|_W^{k+1} \right) + \frac{D}{(\Delta y)^2} \left(C \Big|_N^{k+1} - 2C \Big|_P^{k+1} + C \Big|_S^{k+1} \right) \\
&- \frac{1}{2\Delta x} \left[v_x|_E \left(\frac{1+S_E}{2} \right) C \Big|_P^{k+1} + v_x|_E \left(\frac{1-S_E}{2} \right) C \Big|_{EE}^{k+1} - v_x|_W \left(\frac{1+S_W}{2} \right) C \Big|_{WW}^{k+1} \right. \\
&- \left. v_x|_W \left(\frac{1-S_W}{2} \right) C \Big|_P^{k+1} \right] - \frac{1}{2\Delta y} \left[v_y|_N \left(\frac{1+S_N}{2} \right) C \Big|_P^{k+1} + v_y|_N \left(\frac{1-S_N}{2} \right) C \Big|_{NN}^{k+1} \right. \\
&- \left. v_y|_S \left(\frac{1+S_S}{2} \right) C \Big|_{SS}^{k+1} - v_y|_S \left(\frac{1-S_S}{2} \right) C \Big|_P^{k+1} \right] - \lambda C \Big|_P^{k+1}. \tag{5.12}
\end{aligned}$$

Com o objetivo de simplificar a notação em (5.12), considera-se

$$\begin{aligned}
r_x &= \frac{D}{(\Delta x)^2} & r_y &= \frac{D}{(\Delta y)^2} \\
\delta_E &= v_x|_E \left(\frac{1+S_E}{2} \right) & \bar{\delta}_E &= v_x|_E \left(\frac{1-S_E}{2} \right) \\
\delta_W &= v_x|_W \left(\frac{1+S_W}{2} \right) & \bar{\delta}_W &= v_x|_W \left(\frac{1-S_W}{2} \right) \\
\delta_N &= v_y|_N \left(\frac{1+S_N}{2} \right) & \bar{\delta}_N &= v_y|_N \left(\frac{1-S_N}{2} \right) \\
\delta_S &= v_y|_S \left(\frac{1+S_S}{2} \right) & \bar{\delta}_S &= v_y|_S \left(\frac{1-S_S}{2} \right). \tag{5.13}
\end{aligned}$$

Substituindo as simplificações de (5.13) em (5.12), tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta t} \left(C \Big|_P^{k+1} - C \Big|_P^k \right) &= r_x \left(C \Big|_E^{k+1} - 2C \Big|_P^{k+1} + C \Big|_W^{k+1} \right) + r_y \left(C \Big|_N^{k+1} - 2C \Big|_P^{k+1} + C \Big|_S^{k+1} \right) \\
&- \frac{1}{2\Delta x} \left[\delta_E C \Big|_P^{k+1} + \bar{\delta}_E C \Big|_{EE}^{k+1} - \delta_W C \Big|_{WW}^{k+1} - \bar{\delta}_W C \Big|_P^{k+1} \right] \\
&- \frac{1}{2\Delta y} \left[\delta_N C \Big|_P^{k+1} + \bar{\delta}_N C \Big|_{NN}^{k+1} - \delta_S C \Big|_{SS}^{k+1} - \bar{\delta}_S C \Big|_P^{k+1} \right] - \lambda C \Big|_P^{k+1}. \tag{5.14}
\end{aligned}$$

Agrupando os termos do tipo $C \Big|_P^{k+1}$ do lado esquerdo em (5.14) obtém-se

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{\Delta t} + 2r_x + 2r_y + \frac{\delta_E}{2\Delta x} - \frac{\bar{\delta}_W}{2\Delta x} + \frac{\delta_N}{2\Delta y} - \frac{\bar{\delta}_S}{2\Delta y} + \lambda \right] C \Big|_P^{k+1} &= r_x \left(C \Big|_E^{k+1} + C \Big|_W^{k+1} \right) \\
&+ r_y \left(C \Big|_N^{k+1} + C \Big|_S^{k+1} \right) - \frac{1}{2\Delta x} \left[\bar{\delta}_E C \Big|_{EE}^{k+1} - \delta_W C \Big|_{WW}^{k+1} \right] - \frac{1}{2\Delta y} \left[\bar{\delta}_N C \Big|_{NN}^{k+1} - \delta_S C \Big|_{SS}^{k+1} \right] \\
&+ \frac{1}{\Delta t} C \Big|_P^k. \tag{5.15}
\end{aligned}$$

Considerando,

$$d = \left[\frac{1}{\Delta t} + 2r_x + 2r_y + \frac{\delta_E}{2\Delta x} - \frac{\bar{\delta}_W}{2\Delta x} + \frac{\delta_N}{2\Delta y} - \frac{\bar{\delta}_S}{2\Delta y} + \lambda \right]^{-1}, \tag{5.16}$$

em (5.15) tem-se a equação discretizada de (5.1) dada por

$$\begin{aligned}
C \Big|_P^{k+1} &= d \left[r_x \left(C \Big|_E^{k+1} + C \Big|_W^{k+1} \right) + r_y \left(C \Big|_N^{k+1} + C \Big|_S^{k+1} \right) - \frac{\bar{\delta}_E}{2\Delta x} C \Big|_{EE}^{k+1} \right. \\
&\left. + \frac{\delta_W}{2\Delta x} C \Big|_{WW}^{k+1} - \frac{\bar{\delta}_N}{2\Delta y} C \Big|_{NN}^{k+1} + \frac{\delta_S}{2\Delta y} C \Big|_{SS}^{k+1} + \frac{1}{\Delta t} C \Big|_P^k \right]. \tag{5.17}
\end{aligned}$$

A equação discretizada (5.17) exige o cálculo da concentração de esporos nos pontos de malha $E = (i + 1, j, k + 1)$, $W = (i - 1, j, k + 1)$, $N = (i, j + 1, k + 1)$, $S = (i, j - 1, k + 1)$, $EE = (i + 2, j, k + 1)$, $WW = (i - 2, j, k + 1)$, $NN = (i, j + 2, k + 1)$, $SS = (i, j - 2, k + 1)$ e $P = (i, j, k)$, como pode ser visto na figura 5.2, resultando em um esquema explícito na variável temporal e implícito nas variáveis espaciais, ocasionando a resolução de um sistema de equações lineares em cada passo de tempo para gerar a solução numérica.

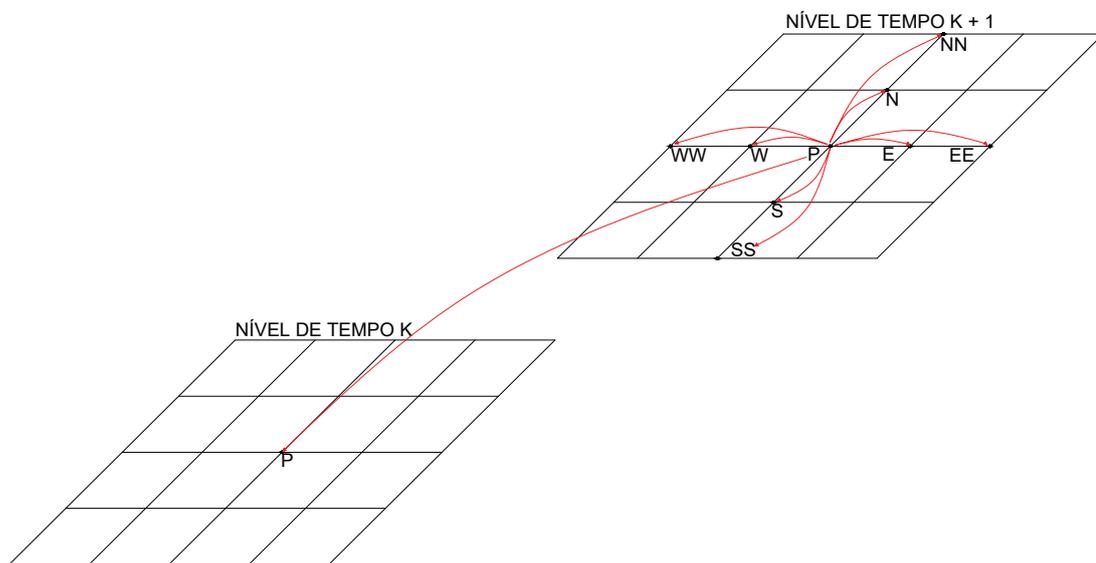


Figura 5.2: Molécula computacional da equação (5.17), destacando a relação explícita na variável temporal e implícita nas variáveis espaciais.

Fonte: Autor.

5.3 CONDIÇÕES INICIAIS

Nesta seção são apresentadas as condições iniciais para a equação (5.17) com relação à concentração de esporos e o campo de velocidades.

5.3.1 Condição Inicial para a Concentração de Esporos

A condição inicial para a equação (5.17) com relação a concentração de esporos leva em consideração que no instante de tempo $t = 0$ não há fungos sobre a geometria interna da figura 5.1, assim

$$C(x, y, 0) = 0. \quad (5.18)$$

A condição inicial dada por (5.18) é utilizada nas simulações quando o campo de velocidades for prescrito para a primeira frente fria. Após os cálculos serem realizados pela equação (5.17) para todos os níveis tempo, a concentração de esporos do último nível será utilizada como condição inicial para calcular novamente a equação (5.17), tendo como base agora, o campo de velocidades prescrito pela segunda frente fria. As condições iniciais são estabelecidas dessa forma, pois após a ocorrência de uma frente fria, as regiões que foram contaminadas são levadas em consideração no cálculo da próxima frente fria e assim por diante.

5.3.2 Condição Inicial para o Campo de Velocidades

Os campos de velocidades que descrevem as frentes frias foram obtidos a partir da coleta de dados reais disponíveis no site do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE, 2019). Para simular os campos de velocidades os dados coletados foram armazenados em arquivos de texto na extensão (.txt), tendo como base uma malha bidimensional (20×20).

Para melhorar a qualidade do campo de velocidades e obter maior precisão numérica dos resultados nas simulações, faz-se necessário realizar o refinamento de malha. Para realizar o refinamento de malha, de modo que os valores sejam obtidos de forma genérica, utiliza-se neste trabalho a técnica de interpolação bidimensional. Esta técnica estima valores, a partir de uma matriz de dados pré-estabelecida, por meio de alguma operação aritmética. De modo geral, a interpolação bidimensional deve seguir o fluxograma apresentado pela figura 5.3.

De acordo com o fluxograma apresentado pela figura 5.3, o primeiro passo consiste em criar vetores base que definem o domínio geométrico de interesse e conforme a figura 5.1 são dados por $x_{\text{início}} = 0$, $x_{\text{final}} = 1000$, $y_{\text{início}} = 0$ e $y_{\text{final}} = 700$. No segundo passo, deve-se criar a matriz que contém os dados a serem interpolados, ou seja, utilizar os dados que foram armazenados em arquivos de texto na malha bidimensional (20×20). Para realizar o refinamento dos vetores base no terceiro passo, constrói-se novas matrizes denominadas x_{novo} e y_{novo} , que por meio da função *linspace*, refina o número de elementos através do parâmetro *ref* entre os pontos $x_{\text{início}}$ e x_{final} , $y_{\text{início}}$ e y_{final} . No quarto passo, deve-se criar uma malha retangular que contém os vetores que foram refinados no passo anterior por meio da função *meshgrid*. Para calcular os valores provenientes da interpolação das matrizes x_{novo} e y_{novo} utiliza-se a função *interp2*, cuja a sintaxe é dada por

$$\textit{interp2}(x_{\text{início}}, y_{\text{início}}, z, x_{\text{novo}}, y_{\text{novo}}, \textit{método de interpolação}).$$

O parâmetro 2 na função *interp2* indica que serão interpolados dados de duas dimensões. Os argumentos $x_{\text{início}}$ e $y_{\text{início}}$ definem os vetores base obtidos no primeiro passo. O terceiro argumento z corresponde à matriz que contém os dados a serem interpolados obtidos no segundo passo. As matrizes x_{novo} e y_{novo} foram obtidas pelo refinamento dos dados e por fim, deve-se

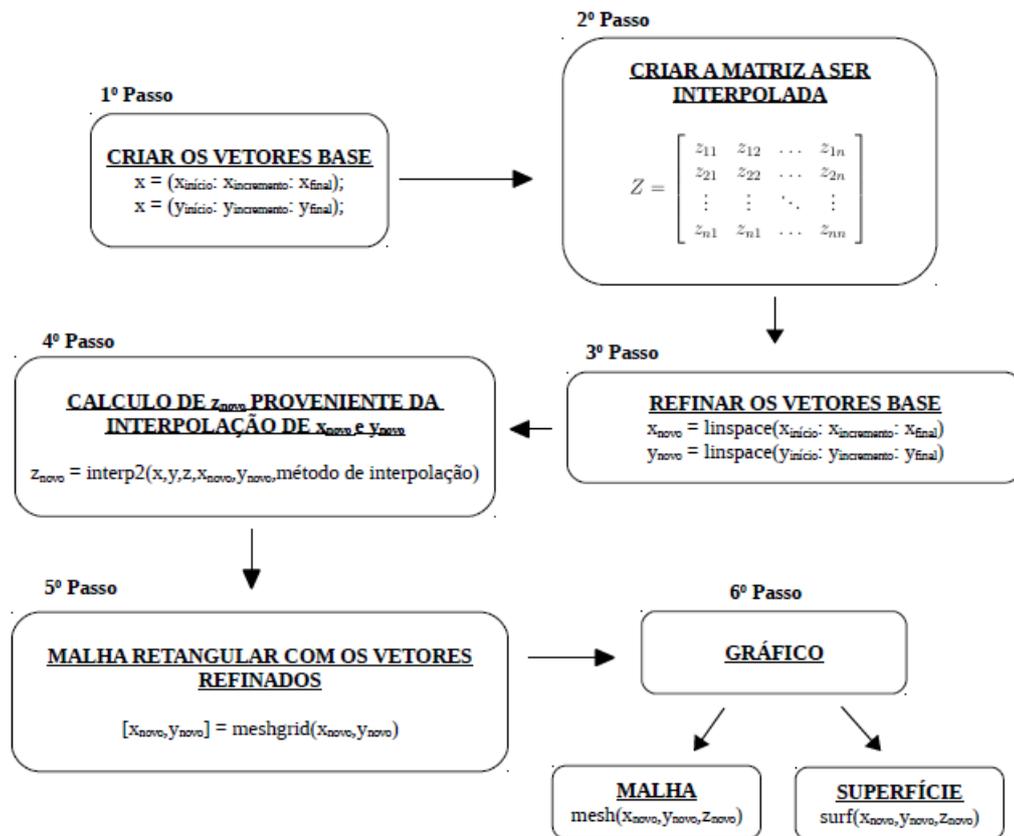


Figura 5.3: Fluxograma de interpolação bidimensional.

Fonte: Adaptado de Chapman (2017).

empregar algum método de interpolação, que por exemplo pode ser do tipo *linear* ou *cubic*. O método de interpolação do tipo *linear* considera que os valores intermediários serão obtidos por meio de média aritmética. No método do tipo *cubic* considera-se que um polinômio de terceira ordem se ajuste aos dados interpolados. Outros métodos de interpolação também pode ser empregados como *nearest* e *extrap* (CHAPMAN, 2017). No sexto e último passo, constrói-se o gráfico por meio das funções *mesh* ou *surf*.

No presente trabalho utilizou-se o método de interpolação do tipo *linear* para obter o refinamento de malha, pois os pontos na malha estão igualmente espaçados entre si, conforme definido na seção 5.1. Para visualizar graficamente os campos de velocidades utilizou-se o recurso computacional do software Scilab, por meio da função *champ1*, cuja a sintaxe da função é dada por

$$champ1(x, y, f_x, f_y).$$

A função *champ1* constrói um campo vetorial bidimensional com setas coloridas que representam a intensidade do campo vetorial. Os argumentos x e y definem a malha e os argumentos f_x e f_y são as matrizes que descrevem os componentes x e y do campo vetorial.

Conforme mencionado no capítulo 3, geralmente o cultivo da soja no estado do Paraná ocorre entre os meses de setembro à março. Desta forma, os campos de veloci-

des que descrevem as frentes frias apresentados nesta seção contemplam o período de final de outubro a início de fevereiro na safra 2018/2019.

A seguir são apresentados os campos de velocidades das frentes frias para uma malha bidimensional (20×20) com suas respectivas datas de ocorrências. Nas simulações consideram-se malhas refinadas, de modo que a técnica de interpolação bidimensional, apresentada pelo fluxograma da figura 5.3 (subseção 5.3.2), é utilizada.

Os campos de velocidades que descrevem as frentes frias que ocorreram nas datas 25/10/2018 (figura 5.4), 01/11/2018 (figura 5.6), 01/12/2018 (figura 5.8), 05/01/2019 (figura 5.10) e 15/01/2019 (figura 5.11) possuem direção de oeste a nordeste, enquanto que as frentes frias que ocorreram nas datas 27/10/2018 (figura 5.5), 23/11/2018 (figura 5.7), 22/12/2018 (figura 5.9) e 01/02/2019 (figura 5.12) possuem direção oeste a leste com algumas variando na direção leste a sudeste.

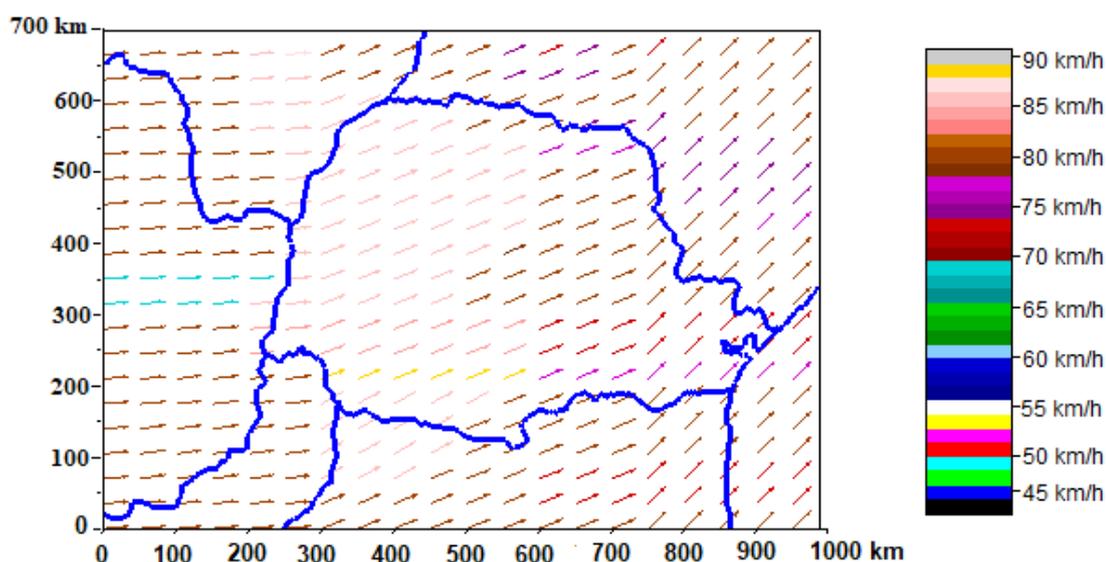


Figura 5.4: Campo de velocidades - Malha (20×20) - Frente fria 25/10/2018.

Fonte: Adaptado de INPE (2018).

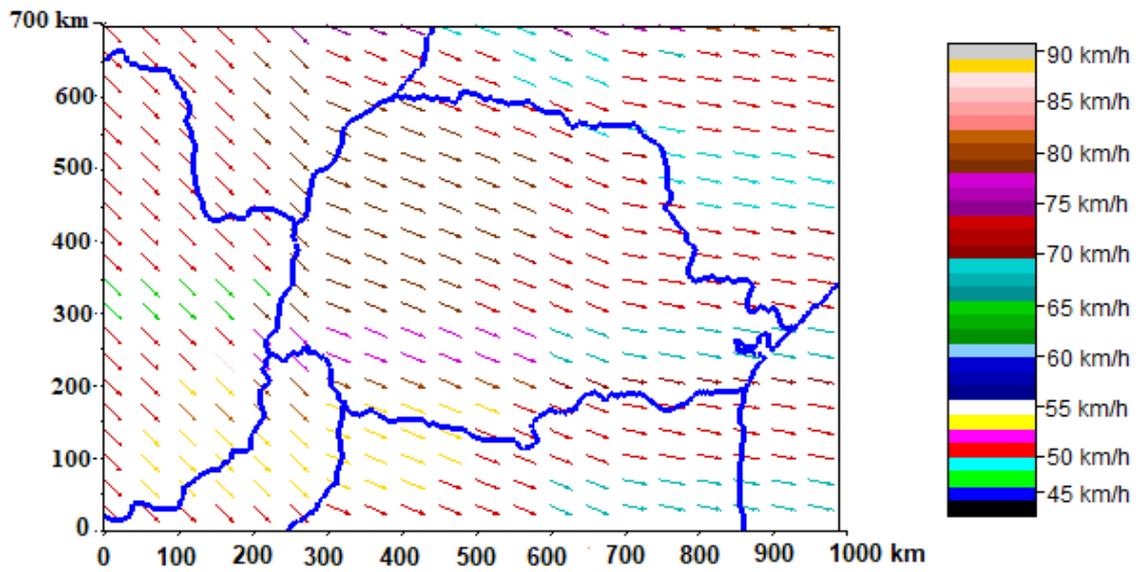


Figura 5.5: Campo de velocidades - Malha (20×20) - Frente fria 27/10/2018.

Fonte: Adaptado de INPE (2018).

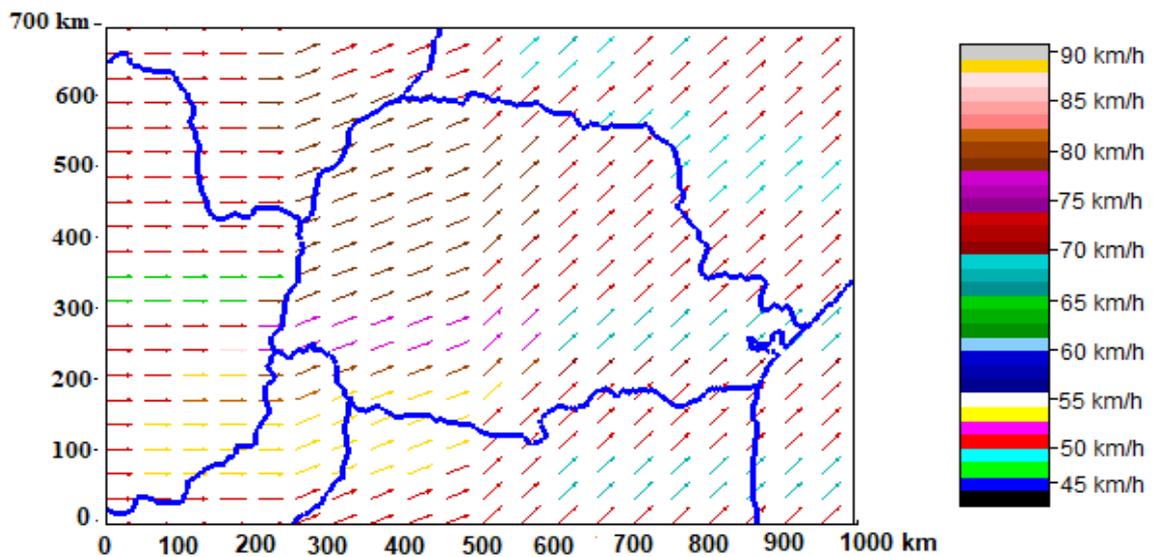


Figura 5.6: Campo de velocidades - Malha (20×20) - Frente fria 01/11/2018.

Fonte: Adaptado de INPE (2018).

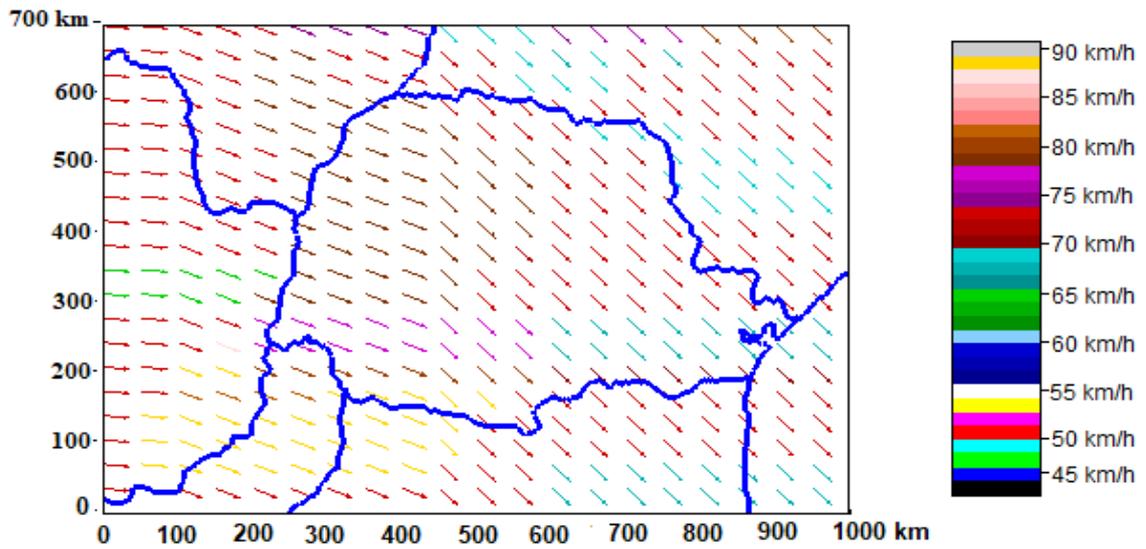


Figura 5.7: Campo de velocidades - Malha (20×20) - Frente fria 23/11/2018.

Fonte: Adaptado de INPE (2018).

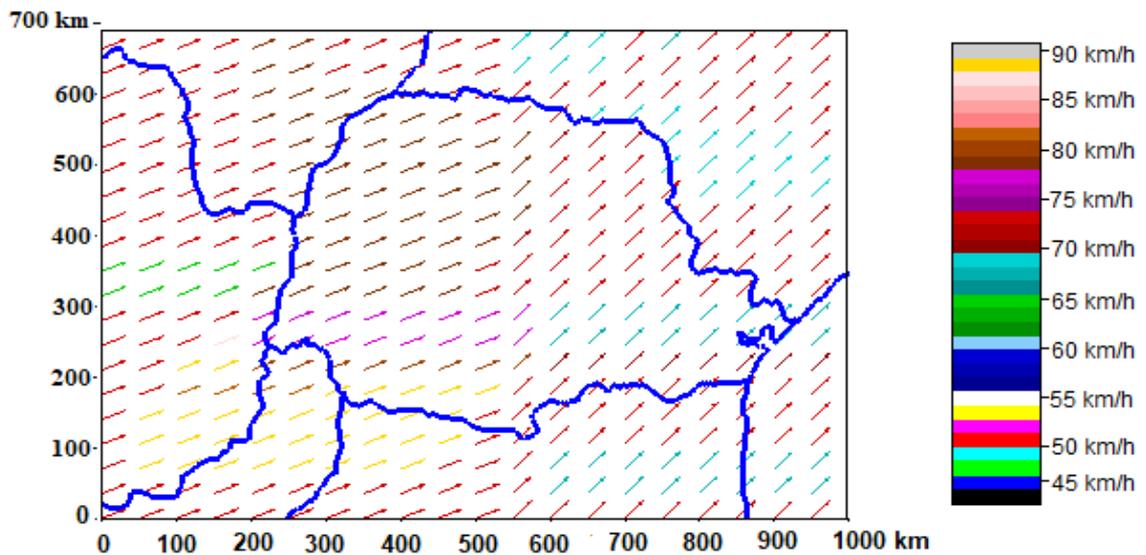


Figura 5.8: Campo de velocidades - Malha (20×20) - Frente fria 01/12/2018.

Fonte: Adaptado de INPE (2018).

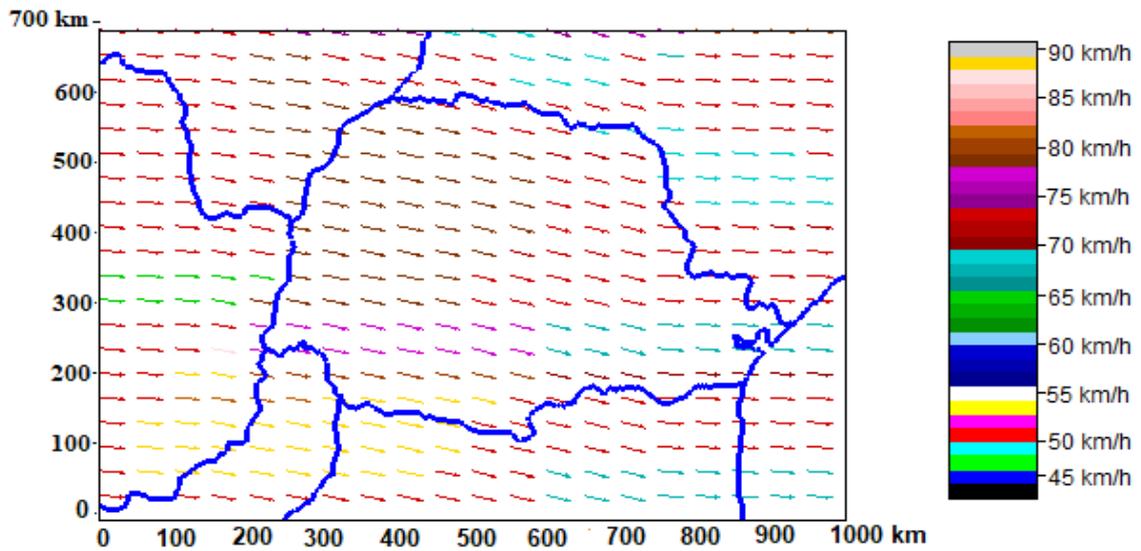


Figura 5.9: Campo de velocidades - Malha (20×20) - Frente fria 22/12/2018.

Fonte: Adaptado de INPE (2018).

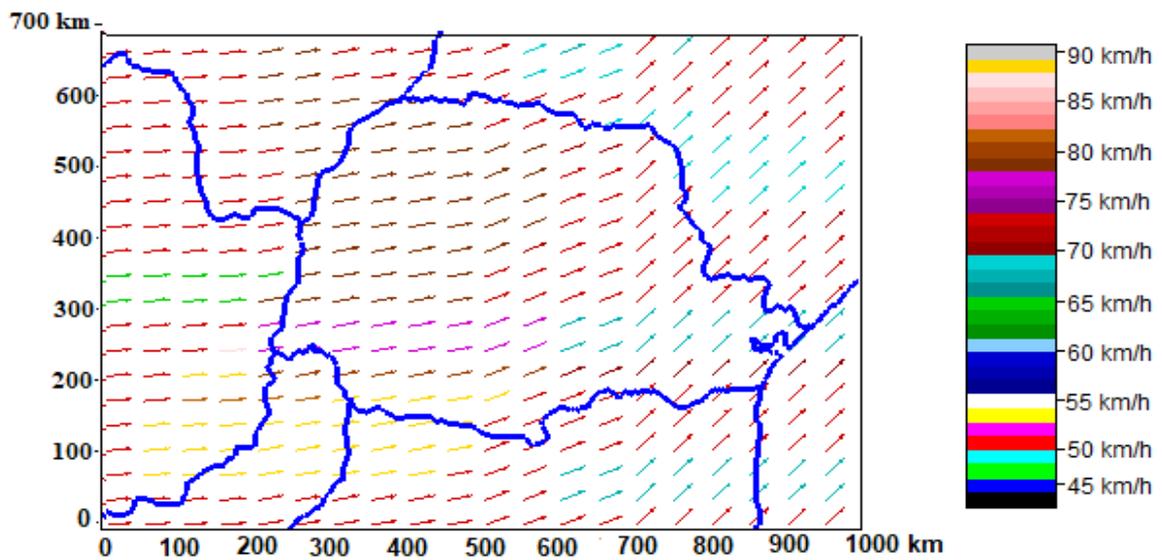


Figura 5.10: Campo de velocidades - Malha (20×20) - Frente fria 05/01/2019.

Fonte: Adaptado de INPE (2019).

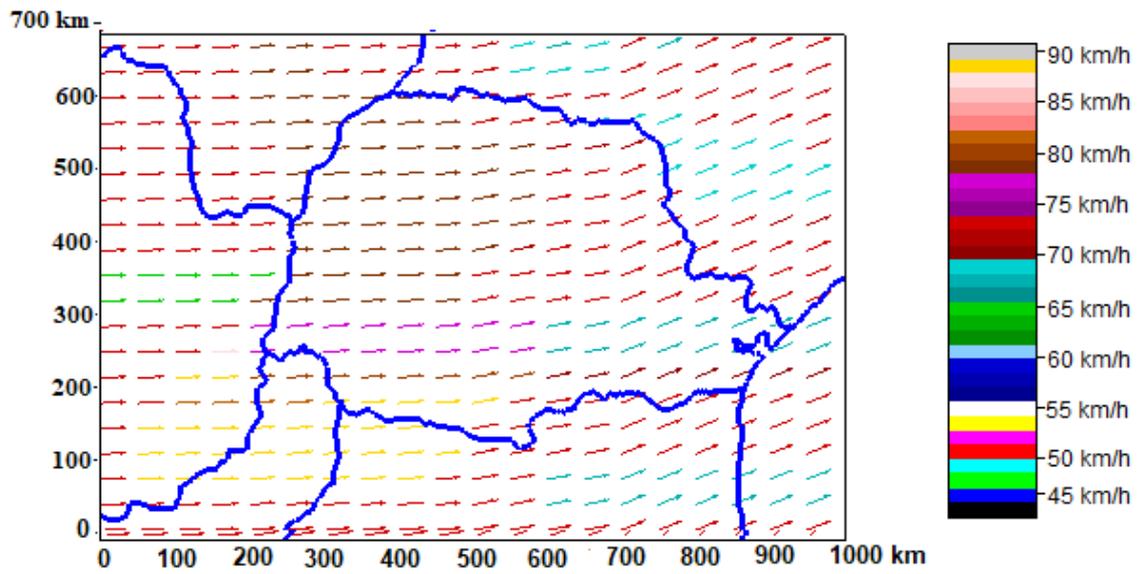


Figura 5.11: Campo de velocidades - Malha (20×20) - Frente fria 15/01/2019.
Fonte: Adaptado de INPE (2019).

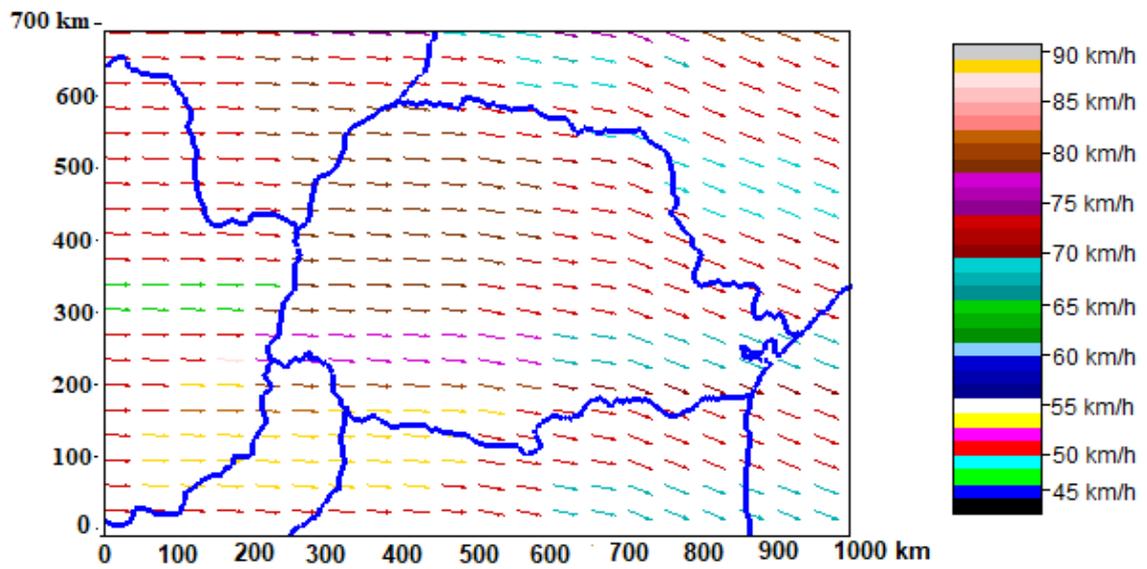


Figura 5.12: Campo de velocidades - Malha (20×20) - Frente fria 01/02/2019.
Fonte: Adaptado de INPE (2019).

5.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA A EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE ESPOROS

Para estabelecer as condições de contorno para a equação (5.17) com relação à concentração de esporos considera-se, inicialmente, as regiões do Paraguai produtoras de soja destacadas pelas cores verde, amarelo e vermelho da figura 5.1, que fazem fronteira com o estado do Paraná.

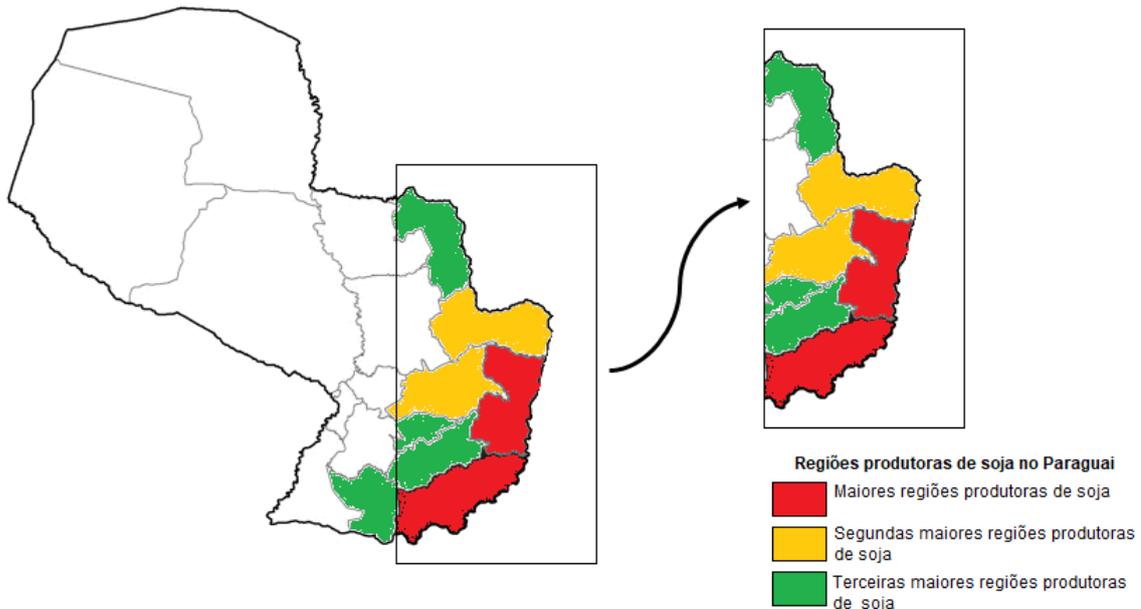


Figura 5.13: Regiões produtoras de soja no Paraguai

Fonte: CAPECO (2019).

De acordo com a *Cámara Paraguaya de Exportadores y Comercializadores de Cereales y Oleaginosas* (CAPECO) - site oficial do governo do Paraguai - as regiões destacadas pela cor vermelho da figura 5.13 são as maiores regiões produtoras de soja no Paraguai. As regiões na cor amarelo são as segundas maiores e as regiões na cor verde são as terceiras maiores. Essas regiões são utilizadas como condição de contorno do tipo Dirichlet para a equação (5.17). Entretanto, não é possível estimar a concentração de fungos da ferrugem asiática nas plantações de soja nessas regiões, pois essas informações não são fornecidas pelo governo do Paraguai. Desta forma, considera-se como hipótese que as concentrações de fungos são proporcionais ao tamanho da produção de soja nessas regiões, ou seja, as regiões que mais produzem soja são as que estão propícias à maiores contaminações. Neste contexto, os valores numéricos que são atribuídos nos pontos da malha computacional com relação as concentrações de fungos, conforme o recorte da figura 5.13, que contempla as regiões produtoras de soja no Paraguai, são representados por números na forma percentual no intervalo $[0, 1]$, de modo que, o valor 1 corresponde às regiões de maiores contaminações, os valores próximos à zero, às regiões de menores contaminações e zero as regiões que não produzem soja no Paraguai.

A figura 5.14 mostra a discretização do domínio geométrico de soluções, identificando os pontos da malha computacional onde a equação (5.17) será calculada (pontos azuis)

e pontos que recebem condições de contorno (pontos amarelo, verde, vermelho e rosa). Os pontos do contorno identificados pela cor vermelho recebem valores de concentração de fungos iguais a 1. Os pontos na cor amarelo recebem 0,8 e os pontos na cor verde recebem 0,05 (condições de contorno do tipo Dirichlet). Os pontos do contorno identificados pela cor rosa recebem condições de contorno do tipo Neumann. Por fim, os pontos do contorno que não foram identificados recebem valores nulos para a concentração de esporos.

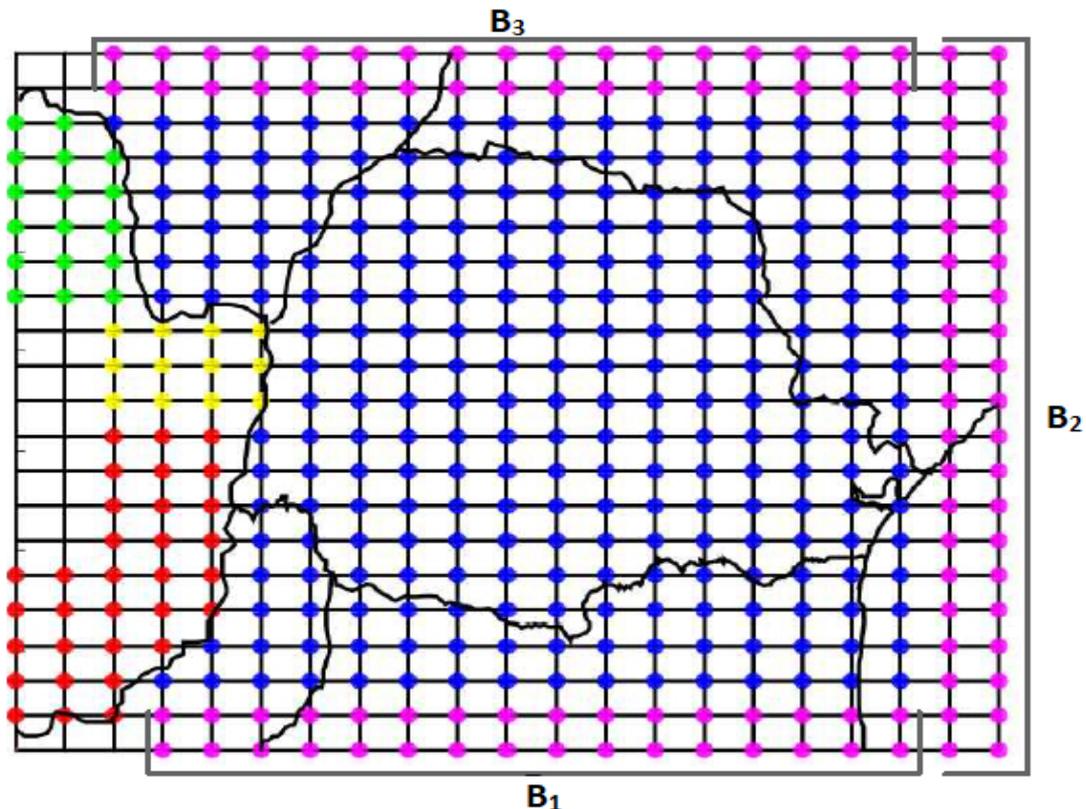


Figura 5.14: Identificação dos pontos da malha que recebem condições de contorno e pontos onde a equação (5.17) será calculada.

Fonte: Autor.

A seguir faz-se alguns comentários sobre a malha (20×20) apresentada na figura 5.14. Primeiramente, por meio do refinamento de malha (técnica apresentada na figura 5.3 da seção 5.3.2), é possível tornar as variações do campo de concentração de fungos mais suave. Segundo, observe que a equação (5.17) é calculada somente nos pontos identificados pela cor azul, pois os outros pontos são condições de contorno. Finalmente, se o tempo de duração de uma frente fria possa permitir que os esporos da ferrugem asiática ultrapassem a geometria física do estado do Paraná, eles irão se deslocar para outros estados vizinhos, por isso a necessidade das condições de contorno do tipo Neumann (pontos identificados pela cor rosa na figura 5.14), estabelecidas para representar o fluxo contínuo do transporte dos esporos da ferrugem asiática.

Na malha computacional ilustrada pela figura 5.14, conforme mencionado anteriormente, os pontos identificados pela cor rosa recebem condições de contorno do tipo Neumann. Desta forma, pode-se observar que duas camadas são estabelecidas nas bordas B_1 , B_2 e B_3 , pois a equação discretizada (5.17) utiliza valores dos pontos do tipo $EE = (i + 2, j)$, $WW = (i - 2, j)$, $NN = (i, j + 2)$ e $SS = (i - 2, j)$, para o cálculo da concentração de esporos.

Como as condições de contorno do tipo Neumann especificam os valores que a derivada de uma solução deve tomar no contorno do domínio (BOYCE; DIPRIMA, 2012), em nosso problema, tem-se

$$\frac{\partial C(B_1)}{\partial n} = \frac{\partial C(B_2)}{\partial n} = \frac{\partial C(B_3)}{\partial n} = 0, \quad (5.19)$$

esta condição (5.19) também deve ser discretizada. Desta forma, utilizando a fórmula de diferenças finitas centradas no espaço, no nível de tempo $k + 1$, para os pontos das bordas B_1 e B_3 , tem-se

$$\frac{\partial C}{\partial n} \Big|_{B_1}^{k+1} = \frac{\partial C}{\partial n} \Big|_{B_3}^{k+1} = \frac{C|_N^{k+1} - C|_S^{k+1}}{2\Delta y} = 0 \Rightarrow C|_N^{k+1} = C|_S^{k+1}. \quad (5.20)$$

O mesmo procedimento é empregado nos pontos da borda B_2 , assim

$$\frac{\partial C}{\partial n} \Big|_{B_2}^{k+1} = \frac{C|_E^{k+1} - C|_W^{k+1}}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow C|_E^{k+1} = C|_W^{k+1}. \quad (5.21)$$

As discretizações (5.20) e (5.21) indicam que os pontos das bordas B_1 , B_2 e B_3 recebem valores de alguns pontos interiores específicos da malha. Por exemplo, após a equação (5.17) ser calculada em todos os pontos identificados pela cor azul da figura 5.32, os pontos da malha que recebem condições de contorno do tipo Neumann são atribuídos da seguinte forma:

• **Borda B_1 :**

$$\begin{aligned} C(i, 1, k + 1) &= C(i, 3, k + 1) \\ C(i, 2, k + 1) &= C(i, 3, k + 1), \end{aligned} \quad (5.22)$$

com $i = i_{inicial}, \dots, n_x - 2$.

• **Borda B_2 :**

$$\begin{aligned} C(n_x - 1, j, k + 1) &= C(n_x, -2, j, k + 1) \\ C(n_x, j, k + 1) &= C(n_x - 2, j, k + 1) \end{aligned} \quad (5.23)$$

com $j = 1, \dots, n_y$.

• **Borda B_3 :**

$$\begin{aligned} C(i, n_y - 1, k + 1) &= C(i, n_y - 2, k + 1) \\ C(i, n_y, k + 1) &= C(i, n_y - 2, k + 1) \end{aligned} \quad (5.24)$$

com $i = i_{inicial}, \dots, n_x - 2$.

Os pontos de malha identificados por $i_{inicial}$ correspondem aos primeiros pontos que aparecem fora da geometria interna do Paraguai, onde a equação (5.17) será calculada. Esses pontos possuem posições variáveis, pois dependem do refinamento de malha. As variáveis n_x e n_y indicam o número de pontos nas dimensões x e y , respectivamente, conforme a Sub-Rotina 1 (seção 5.1). Para compreender a maneira como o código computacional foi estruturado, apresenta-se a Sub-Rotina 2.

Sub-Rotina 2: Principal.m

Dados iniciais: Sub-Rotina 1: Discretização do domínio de soluções (seção 5.1).

Condições iniciais: Atribua as condições iniciais conforme a seção 5.3.1.

Condições de contorno: Atribua as condições de contorno do tipo Dirichlet estabelecidas nesta seção.

Campo de velocidades: Realize o refinamento do campo de velocidades de acordo com a malha desejada.

Laço Temporal: Para $k = 2 : M_t$, faça:

Sub-Rotina: Cálculo da concentração de esporos iterativamente pelo método de Gauss-Seidel - equação (5.17).

Sub-Rotina: Aplicar as condições de contorno do tipo Neumann - equações (5.22) - (5.24).

fim

Gravação: Gravar os dados de saída da última camada de tempo em arquivos de texto na extensão (.txt).

Figura: Gerar o mapa de cores com a concentração de esporos.

Fonte: Autor.

5.5 CONSISTÊNCIA DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE ESPOROS

Quando se resolve numericamente uma EDP é necessário que a solução numérica calculada se aproxime da solução real do problema em estudo. Em outras palavras, quando as derivadas de uma equação diferencial são substituídas pelas fórmulas de diferenças finitas, obtém-se uma equação de diferenças finitas (EDF) e um erro associado, de modo que a solução exata da EDP não satisfaz a EDF, precisamente. Este erro é definido como Erro de Truncamento Local (ETL) e aparece devido à utilização de um número finito de termos na expansão de uma função séries de Taylor (OISHI, 2008; CUMINATO; MENEGUETTE, 2013).

Em alguns casos a solução exata de EDP não pode ser determinada, desta forma, pode-se estimar o ETL por meio de séries de Taylor e utilizar esta estimativa para mostrar que a EDF é consistente com a EDP, quando Δx , Δy e $\Delta t \rightarrow 0$. Se o ETL tender a zero, restando somente a EDP aplicada em um ponto da malha, a EDF é dita consistente com a EDP (FORTUNA, 2012; CUMINATO; MENEGUETTE, 2013).

Nesta seção verifica-se a consistência da equação discretizada (5.17). Considerando que a equação diferencial parcial (5.1) não possui solução exata, utiliza-se a expansão em séries de Taylor para mostrar que a EDF (5.17) é consistente com a EDP (5.1). Para isso, considera-se inicialmente, a equação equivalente (5.14) dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (C|_P^{k+1} - C|_P^k) &= r_x (C|_E^{k+1} - 2C|_P^{k+1} + C|_W^{k+1}) + r_y (C|_N^{k+1} - 2C|_P^{k+1} + C|_S^{k+1}) \\ &- \frac{1}{2\Delta x} \left[\delta_E C|_P^{k+1} + \bar{\delta}_E C|_{EE}^{k+1} - \delta_W C|_{WW}^{k+1} - \bar{\delta}_W C|_P^{k+1} \right] \\ &- \frac{1}{2\Delta y} \left[\delta_N C|_P^{k+1} + \bar{\delta}_N C|_{NN}^{k+1} - \delta_S C|_{SS}^{k+1} - \bar{\delta}_S C|_P^{k+1} \right] - \lambda C|_P^{k+1}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Inicialmente, realiza-se a expansão em séries de Taylor no termo $C|_P^k$ de (5.25), ou seja

$$C|_P^k = C|_P^{k+1} - \Delta t \frac{\partial C}{\partial t} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} - \frac{(\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 C}{\partial t^3} \Big|_P^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta t^4), \quad (5.26)$$

onde $\mathcal{O}(\Delta t^4)$ de (5.26) representa os termos de ordem superior e igual à quatro na expansão em

séries de Taylor.

Em seguida, é feita a expansão nos termos $C|_E^{k+1}$, $C|_W^{k+1}$, $C|_N^{k+1}$ e $C|_S^{k+1}$.

Desta forma, considerando que $E = P + \Delta x$, $W = P - \Delta x$, $N = P + \Delta y$ e $S = P - \Delta y$

obtem-se

$$C|_E^{k+1} = C|_P^{k+1} + \Delta x \frac{\partial C}{\partial x}|_P^{k+1} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}|_P^{k+1} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 C}{\partial x^3}|_P^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta x^4), \quad (5.27)$$

$$C|_W^{k+1} = C|_P^{k+1} - \Delta x \frac{\partial C}{\partial x}|_P^{k+1} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}|_P^{k+1} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 C}{\partial x^3}|_P^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta x^4), \quad (5.28)$$

$$C|_N^{k+1} = C|_P^{k+1} + \Delta y \frac{\partial C}{\partial y}|_P^{k+1} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}|_P^{k+1} + \frac{(\Delta y)^3}{3!} \frac{\partial^3 C}{\partial y^3}|_P^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta y^4), \quad (5.29)$$

$$C|_S^{k+1} = C|_P^{k+1} - \Delta y \frac{\partial C}{\partial y}|_P^{k+1} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}|_P^{k+1} - \frac{(\Delta y)^3}{3!} \frac{\partial^3 C}{\partial y^3}|_P^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta y^4), \quad (5.30)$$

onde $\mathcal{O}(\Delta x^4)$ e $\mathcal{O}(\Delta y^4)$ são os termos de ordem superior e igual a quatro na expansão em séries de Taylor.

Por outro lado, da equação (5.13) da seção 5.2 para o nível de tempo $k + 1$ tem-se

$$\begin{aligned} \delta_E C|_P^{k+1} + \bar{\delta}_E C|_{EE}^{k+1} &= v_x|_E \left(\frac{1 + S_E}{2} \right) C|_P^{k+1} + v_x|_E \left(\frac{1 - S_E}{2} \right) C|_{EE}^{k+1} \\ &= v_x|_E \left(\underbrace{\left(\frac{1 + S_E}{2} \right) C|_P^{k+1} + \left(\frac{1 - S_E}{2} \right) C|_{EE}^{k+1}}_{\text{equação (5.6)}} \right) \\ &= v_x|_E C|_E^{k+1} = C v_x|_E^{k+1}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Da mesma forma utilizando as equações (5.7), (5.9) e (5.10) no nível de tempo $k + 1$, tem-se

$$-\delta_W C \Big|_{WW}^{k+1} - \bar{\delta}_W C \Big|_P^{k+1} = -C v_x \Big|_W^{k+1}, \quad (5.32)$$

$$\delta_N C \Big|_P^{k+1} - \bar{\delta}_N C \Big|_{NN}^{k+1} = C v_y \Big|_N^{k+1}, \quad (5.33)$$

$$-\delta_S C \Big|_{SS}^{k+1} - \bar{\delta}_S^{k+1} C \Big|_P^{k+1} = -C v_y \Big|_S^{k+1}. \quad (5.34)$$

Realizando a expansão em séries de Taylor em (5.31)-(5.34) segue que

$$C v_x \Big|_E^{k+1} = C v_x \Big|_P^{k+1} + \Delta x \frac{\partial C v_x}{\partial x} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 C v_x}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 C v_x}{\partial x^3} \Big|_P^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta x^4), \quad (5.35)$$

$$C v_x \Big|_W^{k+1} = C v_x \Big|_P^{k+1} - \Delta x \frac{\partial C v_x}{\partial x} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 C v_x}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 C v_x}{\partial x^3} \Big|_P^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta x^4), \quad (5.36)$$

$$C v_y \Big|_N^{k+1} = C v_y \Big|_P^{k+1} + \Delta y \frac{\partial C v_y}{\partial y} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 C v_y}{\partial y^2} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta y)^3}{3!} \frac{\partial^3 C v_y}{\partial y^3} \Big|_P^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta y^4), \quad (5.37)$$

$$C v_y \Big|_S^{k+1} = C v_y \Big|_P^{k+1} - \Delta y \frac{\partial C v_y}{\partial y} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 C v_y}{\partial y^2} \Big|_P^{k+1} - \frac{(\Delta y)^3}{3!} \frac{\partial^3 C v_y}{\partial y^3} \Big|_P^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta y^4). \quad (5.38)$$

Substituindo as expansões (5.26)-(5.30) e (5.35)-(5.38) em (5.25) e considerando que $r_x = \frac{D}{(\Delta x)^2}$ e $r_y = \frac{D}{(\Delta y)^2}$, tem-se

$$\frac{1}{\Delta t} \left(C \Big|_P^{k+1} - C \Big|_P^{k+1} + \Delta t \frac{\partial C}{\partial t} \Big|_P^{k+1} - \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 C}{\partial t^3} \Big|_P^{k+1} - \mathcal{O}(\Delta t^4) \right)$$

$$- \frac{D}{(\Delta x)^2} \left(C \Big|_P^{k+1} + \Delta x \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 C}{\partial x^3} \Big|_P^{k+1} - 2C \Big|_P^{k+1} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& C \Big|_P^{k+1} - \Delta x \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 C}{\partial x^3} \Big|_P^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta x^4) \Big) \\
& - \frac{D}{(\Delta y)^2} \left(C \Big|_P^{k+1} + \Delta y \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta y)^3}{3!} \frac{\partial^3 C}{\partial y^3} \Big|_P^{k+1} - 2C \Big|_P^{k+1} \right. \\
& \left. C \Big|_P^{k+1} - \Delta y \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \Big|_P^{k+1} - \frac{(\Delta y)^3}{3!} \frac{\partial^3 C}{\partial y^3} \Big|_P^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta y^4) \right) \tag{5.39} \\
& + \frac{1}{2\Delta x} \left(C v_x \Big|_P^{k+1} + \Delta x \frac{\partial C v_x}{\partial x} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 C v_x}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 C v_x}{\partial x^3} \Big|_P^{k+1} + \right. \\
& \left. - C v_x \Big|_P^{k+1} + \Delta x \frac{\partial C v_x}{\partial x} \Big|_P^{k+1} - \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 C v_x}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 C v_x}{\partial x^3} \Big|_P^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta x^4) \right) \\
& + \frac{1}{2\Delta y} \left(C \Big|_P^{k+1} + \Delta y \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta y)^3}{3!} \frac{\partial^3 C}{\partial y^3} \Big|_P^{k+1} + \right. \\
& \left. - C v_y \Big|_P^{k+1} + \Delta y \frac{\partial C v_y}{\partial y} \Big|_P^{k+1} - \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 C v_y}{\partial y^2} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta y)^3}{3!} \frac{\partial^3 C v_y}{\partial y^3} \Big|_P^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta y^4) \right) + \lambda C \Big|_P^{k+1} = 0.
\end{aligned}$$

Realizando algumas manipulações algébricas, simplificações e reagrupamento de termos comuns em (5.39) segue que

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial C}{\partial t} \Big|_P^{k+1} - D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \Big|_P^{k+1} \right) + \left(\frac{\partial C v_x}{\partial x} \Big|_P^{k+1} + \frac{\partial C v_y}{\partial y} \Big|_P^{k+1} \right) + \lambda C \Big|_P^{k+1} = \\
& \underbrace{\frac{\Delta t}{2!} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} - \frac{(\Delta t)^2}{3!} \frac{\partial^3 C}{\partial t^3} \Big|_P^{k+1} - \frac{(\Delta x)^2}{3} \frac{\partial^3 C v_x}{\partial x^3} \Big|_P^{k+1} - \frac{(\Delta y)^2}{3} \frac{\partial^3 C v_y}{\partial y^3} \Big|_P^{k+1}}_{\text{ETL}} \tag{5.40}
\end{aligned}$$

$$+ \underbrace{\mathcal{O}(\Delta t^3) - \mathcal{O}(\Delta x^2) - \mathcal{O}(\Delta y^2)}_{\text{ETL}}.$$

Fazendo Δx , Δy e $\Delta t \rightarrow 0$ em (5.40), o ETL tende à zero restando apenas a equação discretizada aplicada em um ponto da malha, ou seja

$$\frac{\partial C}{\partial t} \Big|_P^{k+1} - D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \Big|_P^{k+1} \right) + \left(\frac{\partial C v_x}{\partial x} \Big|_P^{k+1} + \frac{\partial C v_y}{\partial y} \Big|_P^{k+1} \right) + \lambda C \Big|_P^{k+1} = 0, \quad (5.41)$$

Portanto, a partir de (5.41), conclui-se que a EDF dada por (5.17) é consistente com a EDP (5.1).

6 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos obtidos para a equação (5.17), em conjunto com as condições iniciais e de contorno apresentadas no capítulo 5, seções 5.3 e 5.4.

6.1 PARÂMETROS DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE ESPOROS

Neste trabalho o transporte dos esporos ocorre devido à influência de dois mecanismos, o processo difusivo e o processo convectivo. Sobre o processo difusivo, os esporos (solutos) são espalhados localmente por movimentos aleatórios. Contudo, em larga escala, é o movimento das frentes frias (solventes) que transportam os esporos. Como a escala do movimento das frentes frias é maior que a escala do processo difusivo, o movimento das frentes frias são várias ordens de grandeza maior do que o processo difusivo. Por exemplo, em lagos, os solutos têm valores de difusão molecular no intervalo entre $D = 10^{-10} m^2/s$ e $D = 10^{-7} m^2/s$. Já o processo convectivo, esses valores estão entre $D = 10^{-3} m^2/s$ e $D = 10^7 m^2/s$ (ROMEIRO et al., 2011).

Normalmente, o coeficiente de difusão de um soluto é aproximadamente dez mil vezes maior no ar do que na água. Por exemplo, o coeficiente de difusão molecular do dióxido de carbono no ar é de $16 mm^2/s$, enquanto que na água seu coeficiente de difusão é de $0,0016 mm^2/s$ (TSUDA; HENRY; BUTLER, 2013). Os modelos matemáticos que descrevem o processo de difusão, geralmente, dependem da temperatura e da viscosidade do solvente, além da massa do soluto. Os esporos da ferrugem asiática possuem dimensões de 20×30 microns ($1 \text{ micron} = 10^{-6} m$), ou seja, possuem massa/tamanho grandes, quando comparadas àquelas de moléculas simples. Desta forma, considera-se que os coeficientes de difusão longitudinal e transversal são iguais e dados por $D = D_x = D_y = 10^{-2} km^2/h$. Esse valor é compatível com valores adotados na literatura (PAN et al., 2006; ISARD et al., 2007; LI et al., 2008; ISARD et al., 2011; YOUNG et al., 2012; MEYER et al., 2017).

Com relação ao parâmetro de mortandade dos esporos durante o transporte atmosférico λ , este parâmetro provém da equação de Malthus (MALTHUS, 1888), cuja a solução exata é dada por

$$C = C_0 e^{-\lambda t}, \quad (6.1)$$

onde C_0 é uma concentração inicial de esporos.

De acordo dados fornecidos pelo Departamento de Ciências Agrárias Universidade Estadual de Londrina (CCA), a população de esporos decai à 50% em seis horas, devido ao período de vida dos esporos durante o transporte atmosférico. Assim, fazendo $t = 6$ horas e resolvendo a equação (6.1), encontra-se $\lambda \approx 0.12 h^{-1}$.

6.2 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

As simulações numéricas desta seção foram realizadas em um sistema operacional *Ubuntu*, em uma CPU Intel (R) Core i5-3567-D30P com 4 GB de memória e 1 TB de RAM. O esquema numérico é implementado em *GNU Octave*, versão (4.2.2).

Para a resolução do sistema linear resultante da equação discretizada (5.17), utiliza-se o método de Gauss-Seidel, cuja a teoria é apresentada no Apêndice B. Como critério de parada considerou-se o erro absoluto calculado na norma L_1 , dado por

$$\|C|_P^{it+1} - C|_P^{it}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq m} \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| C^{it+1}|_P^{k+1} - C^{it}|_P^{k+1} \right| \right\} < \varepsilon, \quad (6.2)$$

onde C_P^{k+1} indica a concentração de esporos no ponto de malha $P = (i, j)$ no nível de tempo $k + 1$. Os índices $it + 1$ e it definem o nível iterativo do método de Gauss-Seidel e $\varepsilon = 10^{-6}$ é a tolerância escolhida para o erro absoluto na resolução do sistema linear.

O tempo considerado nas simulações é de $t_f = 3$ horas, o que representa uma média do tempo de duração das frentes frias consideradas neste trabalho. O refinamento no tempo é considerado como $M_t = 100$. Os parâmetros referentes ao coeficiente de difusão molecular dos esporos durante o transporte atmosférico D e a taxa de mortalidade dos esporos λ , assumem valores discutidos na seção anterior, ou seja, $D = 10^{-2} km^2/h$ e $\lambda = 0.12h^{-1}$. Para analisar a influência da malha na precisão numérica dos resultados, apresentam-se a seguir, os resultados numéricos obtidos em três diferentes malhas com dimensões (20×20) , (60×60) e (100×100) . Os resultados são discutidos para a malha (100×100) .

A figura 6.1 mostra os resultados numéricos obtidos para a equação (5.17) na malha (20×20) . Conforme a figura 5.13 da seção 5.4 (capítulo 5), as regiões em tons de vermelho da figura 6.1 indicam a maior concentração de esporos e as regiões em tons de azul indicam as regiões de menor concentração de esporos, de modo que, os valores apresentados estão na forma percentual no intervalo $[0, 1]$. Os campos de velocidades que descrevem as frentes frias são de acordo com as figuras 5.4 - 5.12, apresentadas na seção 5.3.2 do capítulo 5. Além disso, também são identificadas algumas cidades no estado do Paraná como Foz do Iguaçu, Cascavel, Maringá, Londrina, Ponta Grossa e Curitiba, para localização.

A figura 6.2 mostra os resultados obtidos para a equação (5.17) na malha (60×60) e a figura 6.3 para a malha (100×100) . Os campos de velocidades que descrevem as frentes frias foram obtidos a partir da interpolação bidimensional dos campos de velocidades apresentados pelas figuras 5.4 - 5.12, conforme o fluxograma esquematizado pela figura 5.3 da seção 5.3.2, do capítulo 5.

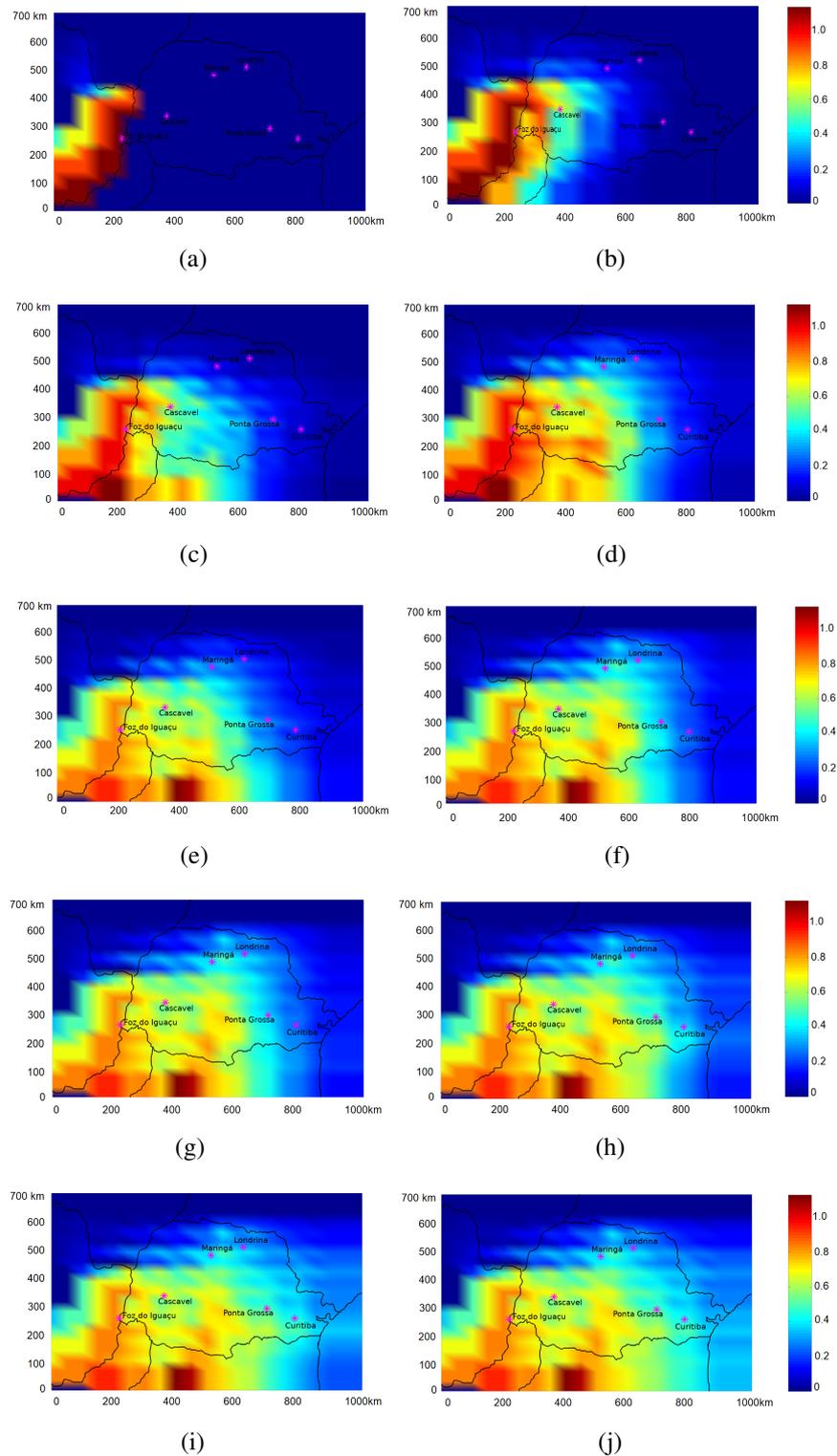


Figura 6.1: Dispersão atmosférica dos esporos da ferrugem asiática na malha (20×20) : (a) condições iniciais; (b) frente fria 25/10/2018; (c) frente fria 27/10/2018; (d) frente fria 01/11/2018; (e) frente fria 23/11/2018; (f) frente fria 01/12/2018; (g) frente fria 22/12/2018; (h) frente fria 05/01/2019; (i) frente fria 15/01/2019; (j) frente fria 01/02/2019.

Fonte: Autor.

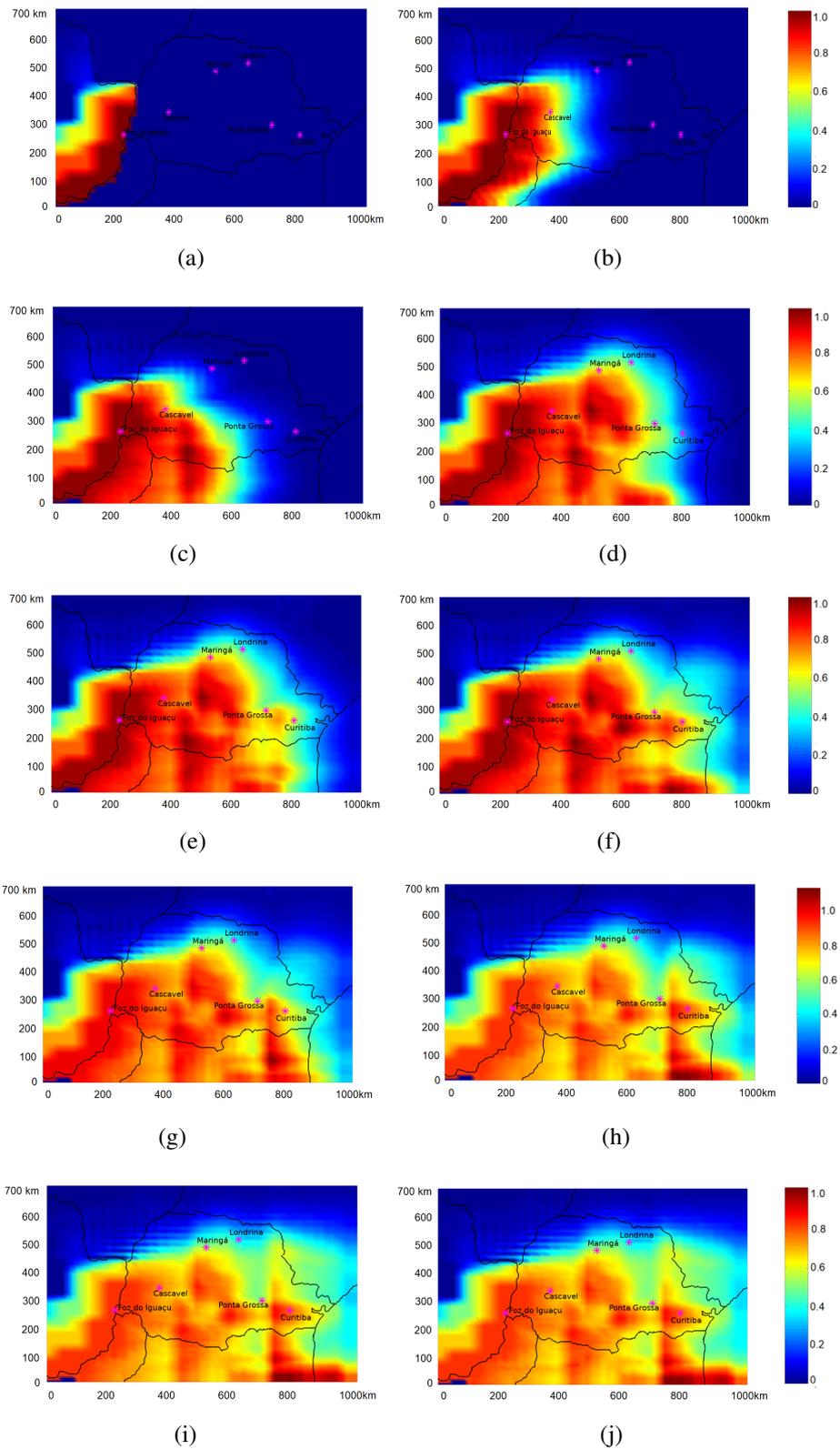


Figura 6.2: Dispersão atmosférica dos esporos da ferrugem asiática na malha (60×60): (a) condições iniciais; (b) frente fria 25/10/2018; (c) frente fria 27/10/2018; (d) frente fria 01/11/2018; (e) frente fria 23/11/2018; (f) frente fria 01/12/2018; (g) frente fria 22/12/2018; (h) frente fria 05/01/2019; (i) frente fria 15/01/2019; (j) frente fria 01/02/2019.

Fonte: Autor.

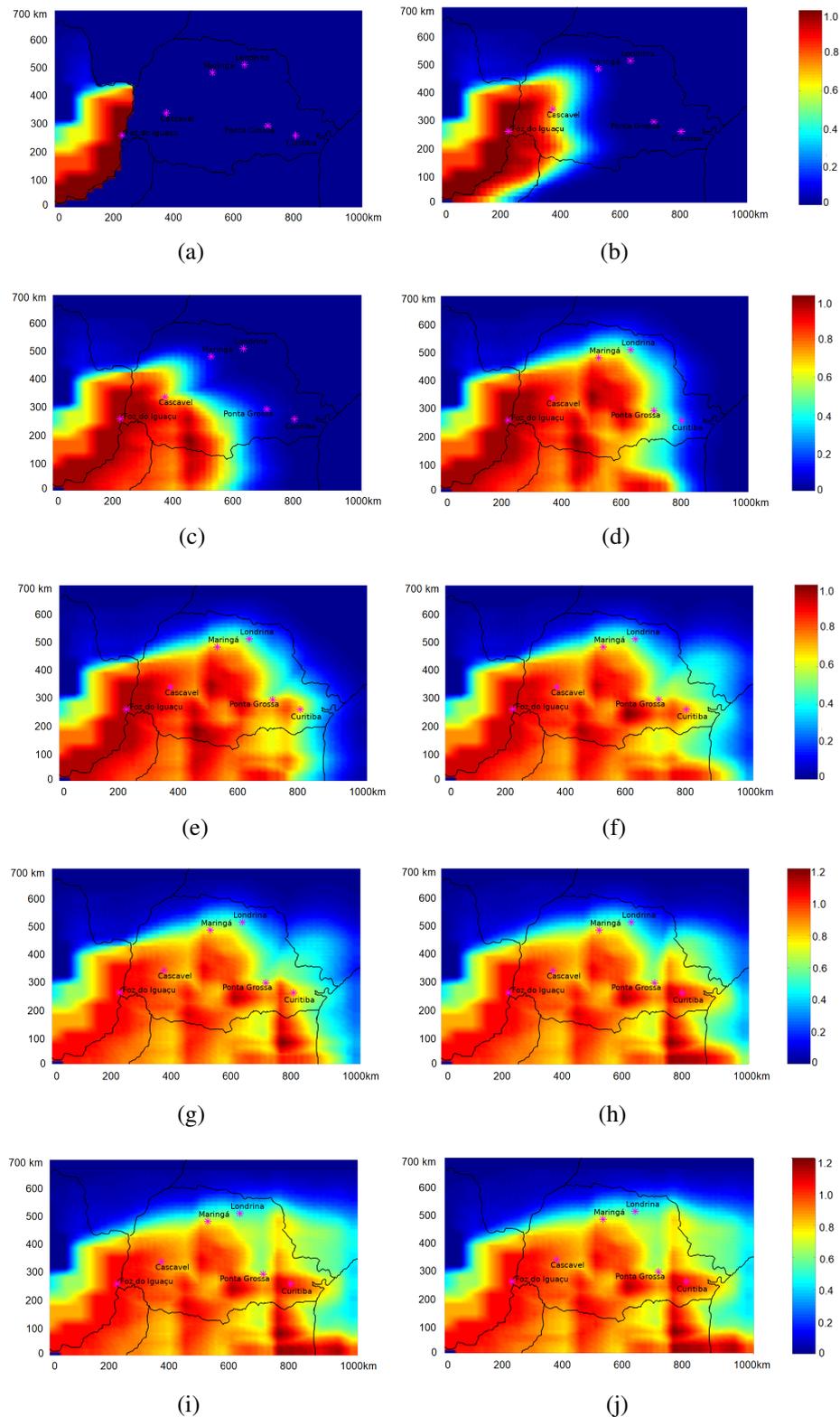


Figura 6.3: Dispersão atmosférica dos esporos da ferrugem asiática na malha (100×100): (a) condições iniciais; (b) frente fria 25/10/2018; (c) frente fria 27/10/2018; (d) frente fria 01/11/2018; (e) frente fria 23/11/2018; (f) frente fria 01/12/2018; (g) frente fria 22/12/2018; (h) frente fria 05/01/2019; (i) frente fria 15/01/2019; (j) frente fria 01/02/2019.

Fonte: Autor.

Conforme os resultados apresentados pela figura 6.3 (b), pode-se observar que os esporos da ferrugem asiática foram transportados em direção à região norte do estado do Paraná, durante a ocorrência da frente fria do dia 25/10/2018, passando pelas cidades de Foz do Iguaçu e Cascavel com concentração de 0,6 e 1,0, chegando até a cidade de Maringá, onde a concentração de esporos foi menor (valores entre 0,2 e 0,4). Além disso, a região do Paraguai onde a concentração de esporos é menor (região em azul claro da figura 6.3 (a)) também foi transportada para a região noroeste do estado do Paraná, passando pela região sul do estado do Mato Grosso do Sul.

Por outro lado, os resultados apresentados pela figura 6.3 (c), mostram que os esporos foram transportados para a região sudeste do estado do Paraná, durante a ocorrência da frente fria do dia 27/10/2018, chegando até a cidade de Ponta Grossa. Pode-se observar também, que a disseminação dos esporos foi maior quando comparada com os resultados da figura 6.3 (a). Isto ocorre pois a disseminação dos esporos apresentados na figura 6.3 (a) foi utilizada como condição inicial para o cálculo da dispersão dos esporos pela frente fria do dia 27/10/2018 (figura 6.3 (b)). Os esporos também foram transportados para as regiões norte e nordeste do estado de Santa Catarina, passando pela região nordeste da Argentina. Já os resultados apresentados pela figura 6.3 (d), mostram que os esporos foram transportados em direção às regiões leste e norte do estado do Paraná, com uma concentração de esporos de 0,4 nas cidades e regiões próximas de Curitiba e Londrina, chegando uma pequena concentração de esporos até a região sudoeste do estado de São Paulo.

Na figura 6.3 (e), pode-se observar que, durante a ocorrência da frente fria do dia 23/11/2018, os esporos foram transportados em direção à região leste do estado do Paraná, resultando em uma concentração de esporos ainda maior na cidade de Curitiba e região, comparada com a disseminação dos esporos dada pela frente fria anterior (figura 6.3 (d)), com os valores entre 0,8 e 1,0. De modo geral, as demais frentes frias, apresentadas pelas figuras 6.3 (f) - 6.3 (j), mostram que os esporos da ferrugem asiática são transportados ainda mais em direção à região leste, nordeste e norte do estado do Paraná, chegando até as regiões litorâneas, nas regiões oeste e sudoeste do estado de São Paulo e na região norte do estado de Santa Catarina.

Sobre o esquema numérico modelado, destaca-se que consistentemente com a Física do problema, os esporos foram transportados seguindo a mesma direção do escoamento dos fluidos (frentes frias). Isto ocorre devido à técnica de discretização *upwind* empregada no termo convectivo. Esquemas do tipo *upwind*, aplicados para discretizar termos convectivos, dependem da direção local do escoamento do fluido, ou seja, o sinal que v_x e v_y da equação (4.13) assumem nos pontos da malha. Fisicamente, isto mostra que as propriedades (esporos da ferrugem asiática) que estão sendo transportadas por meios fluidos (frentes frias), em um ponto qualquer da malha, dependem, segundo Fortuna (2012), fortemente das propriedades do escoamento à montante desse ponto, ou seja, na direção de onde vem o escoamento do fluido.

Conforme os resultados apresentados pode-se observar que, conforme é realizado o refinamento de malha, ou seja, quanto mais pontos são acrescentados na malha, mais

próximo estão as soluções numéricas com o problema real (CUMINATTO; MENEGUETTE, 2013; FORTUNA, 2012).

6.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS

A equação matemática que descreve o transporte atmosférico dos esporos da ferrugem asiática, apresentada neste trabalho, não possui solução analítica. Desta forma, faz-se necessário o uso de alguma ferramenta numérica para analisar se os resultados obtidos na seção anterior são representativos do problema em estudo, ou seja, para comprovar que as soluções numéricas são, de fato, soluções da equação diferencial contínua. Para isso, utiliza-se um procedimento numérico descrito por CIRILO et al. (2019).

Inicialmente, a equação discretizada (5.17) é resolvida iterativamente pelo método de Gauss-Seidel, encontrando uma solução do sistema linear para cada nível de tempo, sendo estabelecido como critério de parada uma tolerância de $\varepsilon = 10^{-6}$. Dispondo de duas soluções do sistema linear $C(P, k+1)$ e $C(P, k)$, obtidas consecutivamente em diferentes níveis de tempo, substitui-se as soluções convergidas na equação discretizada 5.12 (seção 5.2, capítulo 5) dada por

$$\begin{aligned}
\left(\frac{C(P, k+1) - C(P, k)}{\Delta t} \right) &= D \left(\frac{C(E, k+1) - 2C(P, k+1) + C(W, k+1)}{(\Delta x)^2} \right) + \\
D \left(\frac{C(N, k+1) - 2C(P, k+1) + C(S, k+1)}{(\Delta x)^2} \right) &- \frac{1}{2\Delta x} \left[v_x|_E \left(\frac{1 + S_E}{2} \right) C(P, k+1) + \right. \\
v_x|_E \left(\frac{1 - S_E}{2} \right) C(E, k+1) &- v_x|_W \left(\frac{1 + S_W}{2} \right) C(W, k+1) \\
\left. - v_x|_W \left(\frac{1 - S_W}{2} \right) C(P, k+1) \right] &- \frac{1}{2\Delta y} \left[v_y|_N \left(\frac{1 + S_N}{2} \right) C(P, k+1) + \right. \\
v_y|_N \left(\frac{1 - S_N}{2} \right) C(N, k+1) &- v_y|_S \left(\frac{1 + S_S}{2} \right) C(S, k+1) \\
\left. - v_y|_S \left(\frac{1 - S_S}{2} \right) C(P, k+1) \right] &- \lambda C(P, k+1). \tag{6.3}
\end{aligned}$$

Em seguida, realizam-se todos os cálculos em (6.3). Por exemplo, sendo as soluções convergidas $C(P, k + 1)$ e $C(P, k)$ substituídas no termo temporal dado por

$$Sol_t \Big|_P = \left(\frac{C(P, k + 1) - C(P, k)}{\Delta t} \right), \quad (6.4)$$

as operações definidas em (6.4) indicam que deve-se realizar a diferença elemento à elemento da solução convergida do nível de tempo $k + 1$ com a solução convergida do nível de tempo anterior k , no ponto de malha P e em seguida, multiplicar pelo escalar $1/\Delta t$. Como as soluções convergidas são dadas em termos de matrizes, a matriz resultante dessas operações é definida por $Sol_t|_P$. Analogamente, define-se a matriz resultante das operações do termo difusivo

$$Sol_d \Big|_P = D \left(\frac{C(E, k + 1) - 2C(P, k + 1) + C(W, k + 1)}{(\Delta x)^2} \right) + \quad (6.5)$$

$$+ D \left(\frac{C(N, k + 1) - 2C(P, k + 1) + C(S, k + 1)}{(\Delta x)^2} \right),$$

do termo convectivo

$$Sol_c \Big|_P = -\frac{1}{2\Delta x} \left[v_x|_E \left(\frac{1 + S_E}{2} \right) C(P, k + 1) + v_x|_E \left(\frac{1 - S_E}{2} \right) C(EE, k + 1) \right. \\ \left. - v_x|_W \left(\frac{1 + S_W}{2} \right) C(WW, k + 1) - v_x|_W \left(\frac{1 - S_W}{2} \right) C(P, k + 1) \right] \quad (6.6)$$

$$- \frac{1}{2\Delta y} \left[v_y|_N \left(\frac{1 + S_N}{2} \right) C(P, k + 1) + v_y|_N \left(\frac{1 - S_N}{2} \right) C(NN, k + 1) \right. \\ \left. - v_y|_S \left(\frac{1 + S_S}{2} \right) C(SS, k + 1) - v_y|_S \left(\frac{1 - S_S}{2} \right) C(P, k + 1) \right],$$

do termo reativo

$$Sol_r \Big|_P = -\lambda C(P, k + 1). \quad (6.7)$$

As matrizes definidas por Sol_t , Sol_d , Sol_c e Sol_r , indicam que as soluções convergidas do sistema linear obtidas consecutivamente em diferentes níveis de tempo foram calculadas novamente na equação diferencial discretizada, onde avaliou-se separadamente os termos temporal, difusivo, convectivo e reativo. Para analisar a contribuição desses termos no cálculo da concentração de esporos, realiza-se uma média aritmética entre os elementos que aparecem nas matrizes resultantes em (6.4) - (6.7), ou seja

$$Termo_t(t) = \left(\frac{1}{P_t} \right) \sum_j^{n_y-2} \sum_i^{n_x-2} Sol_t \Big|_{P=(i,j)} \quad (6.8)$$

$$Termo_d(t) = \left(\frac{1}{P_t} \right) \sum_j^{n_y-2} \sum_i^{n_x-2} Sol_d \Big|_{P=(i,j)} \quad (6.9)$$

$$Termo_c(t) = \left(\frac{1}{P_t} \right) \sum_j^{n_y-2} \sum_i^{n_x-2} Sol_c \Big|_{P=(i,j)} \quad (6.10)$$

$$Termo_r(t) = \left(\frac{1}{P_t} \right) \sum_j^{n_y-2} \sum_i^{n_x-2} Sol_r \Big|_{P=(i,j)}, \quad (6.11)$$

os termos definidos em (6.8) - (6.11), correspondem à média aritmética realizada nos termos temporal, difusivo, convectivo e reativo representados por ($Termo_t$), ($Termo_d$), ($Termo_c$) e ($Termo_r$), respectivamente. O termo definido por P_t corresponde à quantidade total de pontos em que a equação (5.17) foi resolvida na malha. Esse termo é variável, pois conforme mencionado na seção 5.4 do capítulo 5, o primeiro índice i e j que a equação (5.17) começa à ser calculada depende do refinamento que é realizado na malha.

Por fim, para analisar se o processo iterativo converge para a solução da equação diferencial que descreve o transporte de esporos, basta analisar se

$$Erro = Termo_t(t) - Termo_d(t) - Termo_c(t) - Termo_r(t) \rightarrow 0, \quad (6.12)$$

quando $M_t \rightarrow \infty$. Se (6.12) for verdadeira sob as condições definidas anteriormente, então a solução numérica da equação diferencial discretizada é solução da equação diferencial contínua (CIRILO et. al, 2019).

Nas simulações apresentadas anteriormente, considerou-se o refinamento temporal $M_t = 100$. Desta forma, o comportamento da condição (6.12) é apresentado a seguir, considerando $M_t = 100$ para as malhas (20×20) , (60×60) e (100×100) , conforme as figuras 6.4 - 6.6, respectivamente.

Os resultados mostram que a condição (6.12) apresenta valores entre 10^{-9} a 10^{-11} para os resultados da malha (20×20) - figura 6.4, valores entre 10^{-7} e 10^{-8} para os resultados da malha (60×60) - figura 6.5, e valores entre 10^{-8} a 10^{-10} para os resultados da malha (100×100) - figura 6.6. Como o comportamento da condição (6.12) foi menor do que o critério de parada para o método de Gauss-Seidel $\varepsilon = 10^{-6}$, considera-se que os resultados obtidos pela equação diferencial discretizada (5.17) são soluções da equação diferencial contínua (4.13).

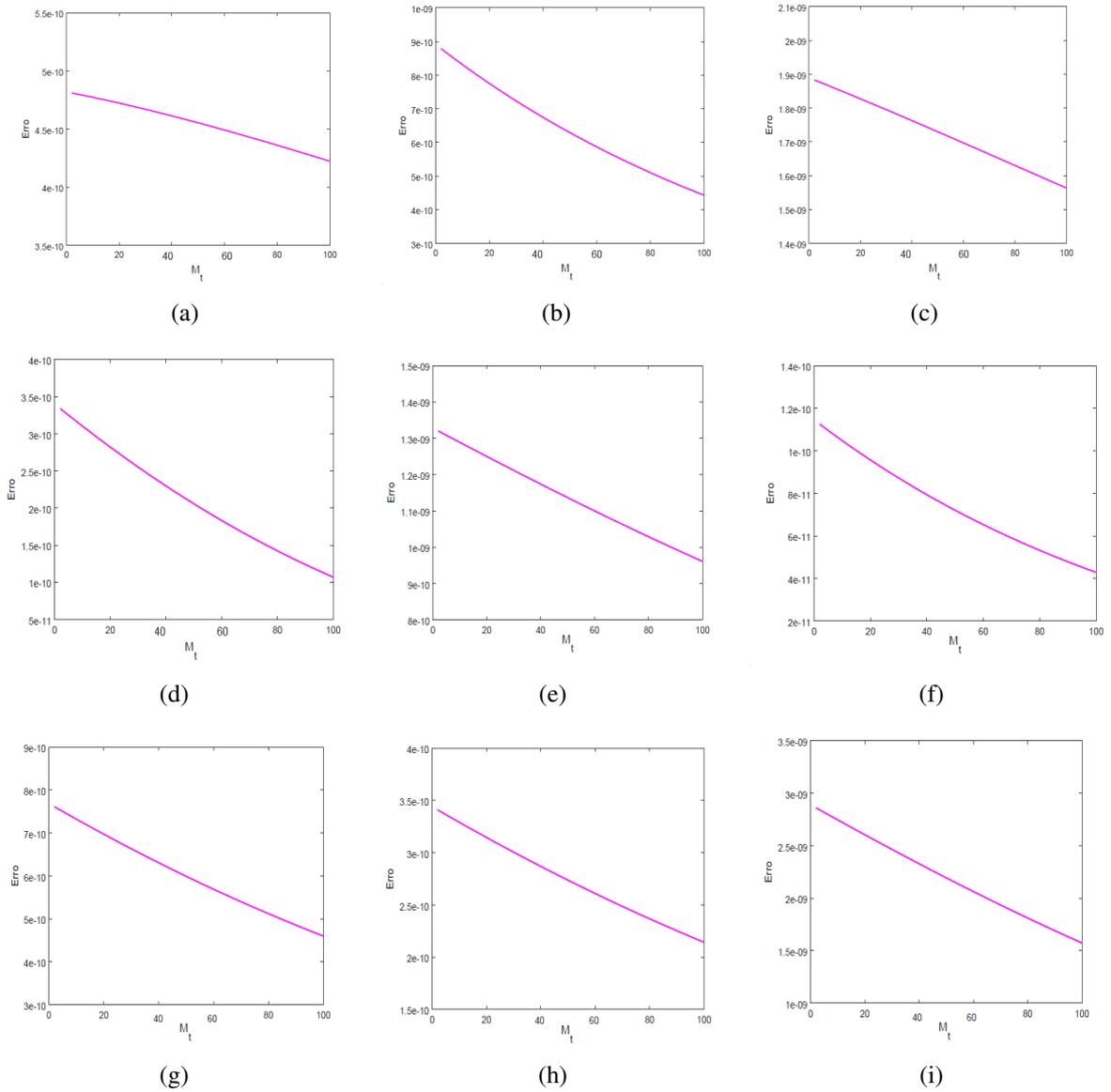
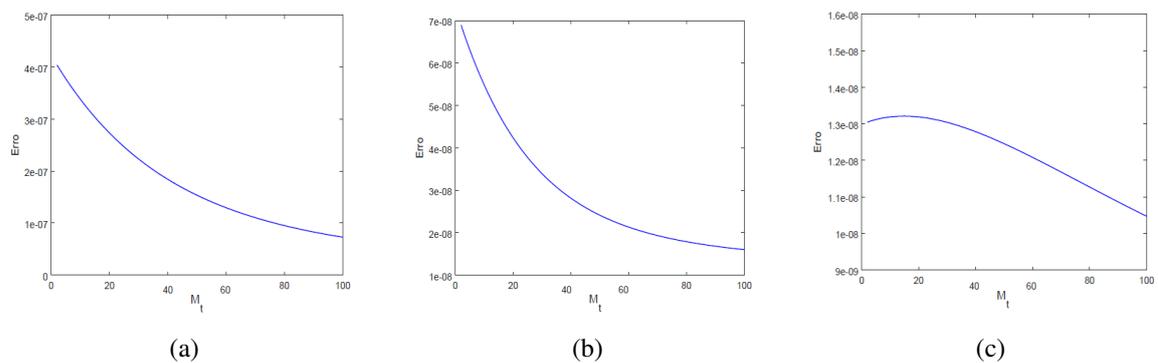


Figura 6.4: Comportamento da condição (6.12) para os resultados da malha (20×20), obtidos na seção 6.2 conforme a figura 6.1: (a) frente fria 25/10/2018; (b) frente fria 27/10/2018; (c) frente fria 01/11/2018; (d) frente fria 23/11/2018; (e) frente fria 01/12/2018; (f) frente fria 22/12/2018; (g) frente fria 05/01/2019; (h) frente fria 15/01/2019; (i) frente fria 01/02/2019.

Fonte: Autor.



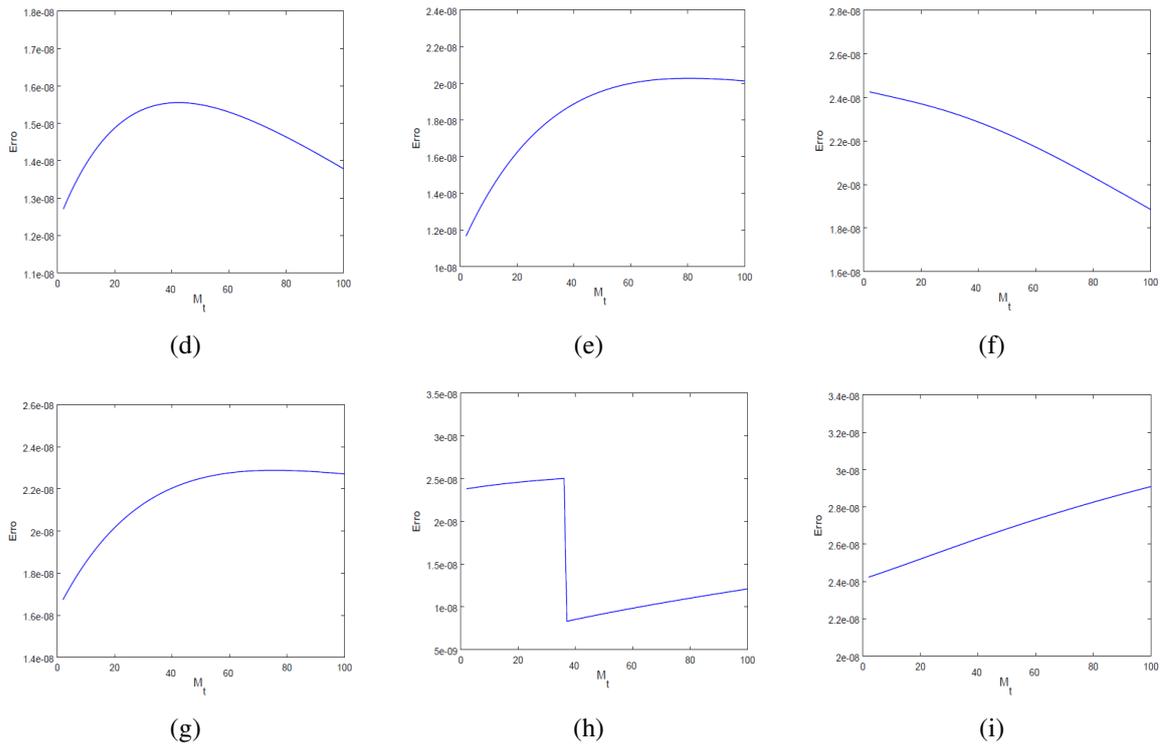
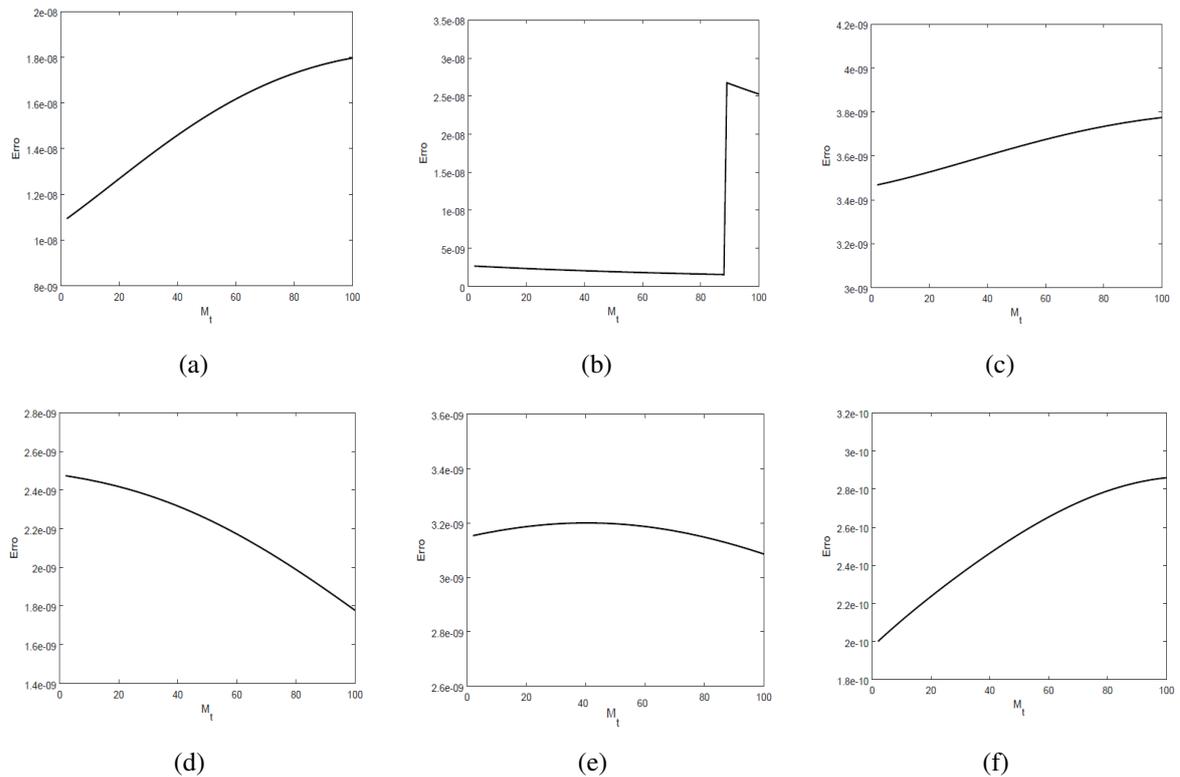


Figura 6.5: Comportamento da condição (6.12) para os resultados da malha (60×60) , obtidos seção 6.2, conforme a figura 6.2: (a) frente fria 25/10/2018; (b) frente fria 27/10/2018; (c) frente fria 01/11/2018; (d) frente fria 23/11/2018; (e) frente fria 01/12/2018; (f) frente fria 22/12/2018; (g) frente fria 05/01/2019; (h) frente fria 15/01/2019; (i) frente fria 01/02/2019.

Fonte: Autor.



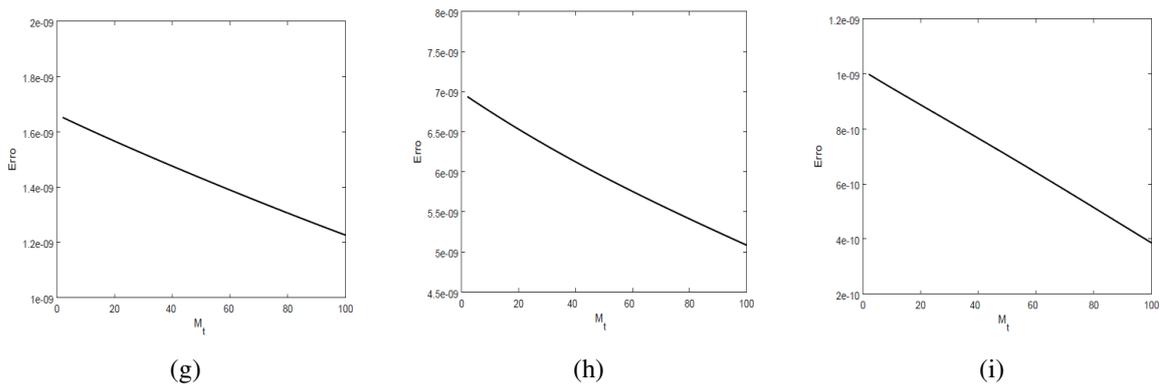


Figura 6.6: Comportamento da condição (6.12) para os resultados da malha (100×100), obtidos na seção 6.2, conforme a figura 6.3: (a) frente fria 25/10/2018; (b) frente fria 27/10/2018; (c) frente fria 01/11/2018; (d) frente fria 23/11/2018; (e) frente fria 01/12/2018; (f) frente fria 22/12/2018; (g) frente fria 05/01/2019; (h) frente fria 15/01/2019; (i) frente fria 01/02/2019.

Fonte: Autor.

6.4 VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS

Conforme apresentado anteriormente, os resultados obtidos nas malhas (20×20), (60×60) e (100×100), são soluções representativas do problema em estudo. Assim, como forma de validação dos resultados, verifica-se, se os resultados da seção 6.2 são compatíveis com os casos confirmados de ferrugem asiática registrados no Paraná durante a safra 2018/19. Para isso, são utilizados dados registrados pelo Consórcio Antiferrugem (EMBRAPA, 2019).

De acordo com o Centro de Ciências Agrárias (CCA) da Universidade Estadual de Londrina (UEL), após o transporte atmosférico dos esporos, via frentes frias, são necessários, em média, doze dias para que a doença seja confirmada nas plantações de soja. Desta forma, os resultados obtidos neste trabalho serão validados, sobrepondo o comportamento das frentes frias com os casos confirmados no Paraná, considerando o período de doze dias após a ocorrência das frentes frias.

A partir dos resultados apresentados pela figuras 6.7, pode-se observar que, de modo geral, os casos de ferrugem asiática registrados pelo Consórcio Antiferrugem no estado do Paraná, durante a safra 2018/19, são compatíveis com os resultados numéricos obtidos neste trabalho.

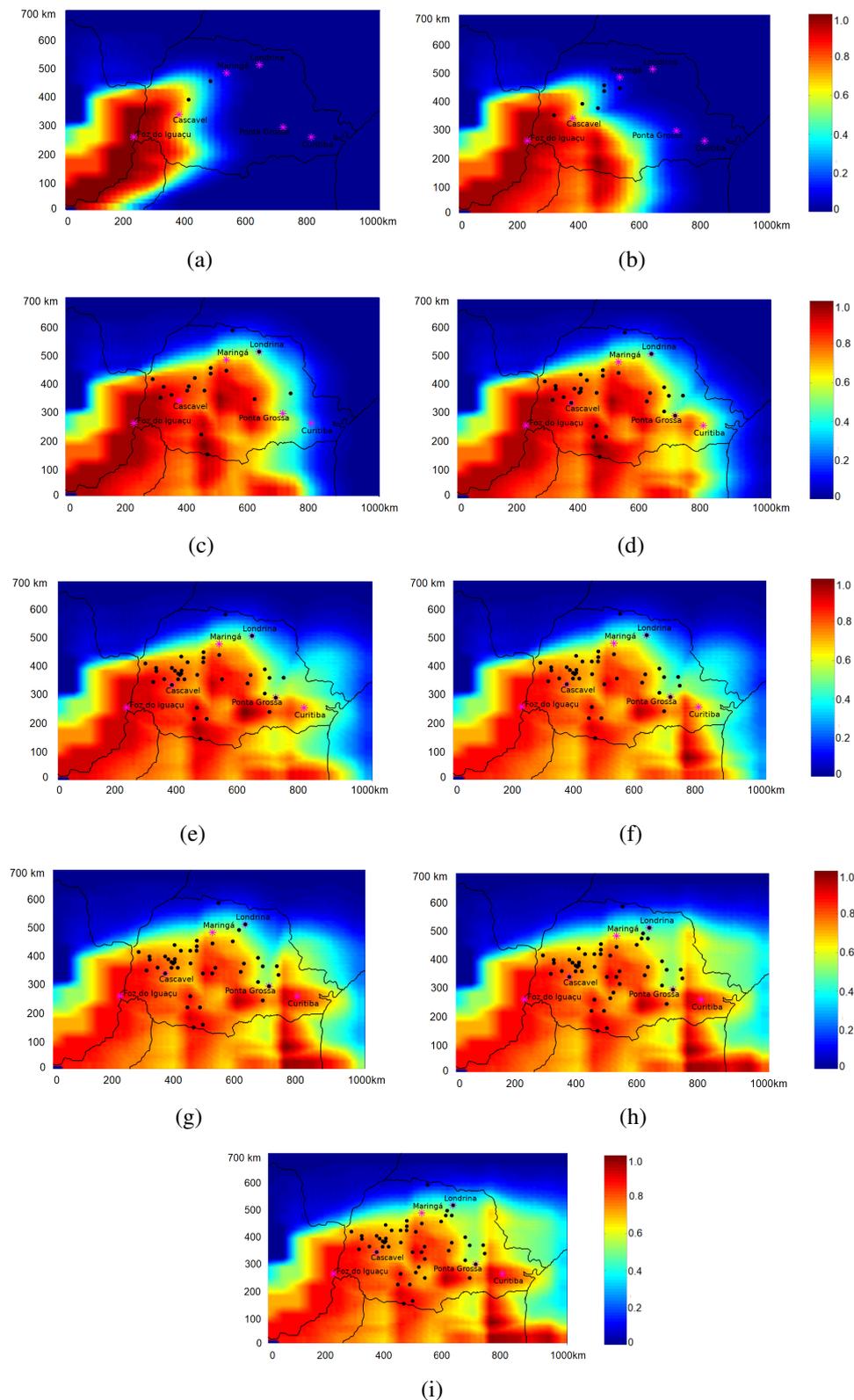


Figura 6.7: Casos confirmados de ferrugem asiática no estado do Paraná na safra 2018/19: (a) 25/10/2018 - 06/11/2018; (b) 27/10/2018 - 08/11/2018; (c) 01/11/2018 - 13/11/2018; (d) 23/11/2018 - 05/12/2018; (e) 01/12/2018 - 13/12/2018; (f) 22/12/2018 - 03/01/2019; (g) 05/01/2019 - 18/01/2019; (h) 15/01/2019 - 27/01/2019; (i) 01/02/2019 - 13/02/2019.

7 CONCLUSÕES

Neste trabalho utilizou-se uma equação diferencial parcial com termos difusivo, convectivo e reativo para simular o transporte bidimensional dos esporos da ferrugem asiática no estado do Paraná, provenientes de regiões infectadas do Paraguai, por meio da ocorrência de frentes frias.

Para compreender as características físicas do problema em estudo, realizou-se uma revisão bibliográfica de trabalhos encontrados na literatura. Verificou-se que os esporos podem permanecer viáveis por longos períodos de tempo durante o transporte atmosférico, resultando na contaminação de grandes áreas produtoras de soja. Neste contexto, considerou-se a hipótese que os casos de ferrugem asiática encontrados no estado do Paraná, durante a safra 2018/19, são ocasionados pela ocorrência de frentes frias, pois os casos que foram registrados nesse período (safra 2018/19), ocorrem depois do período de vazão sanitário.

Diante deste cenário e a partir do estudo realizado neste trabalho, conclui-se que existe uma concordância espacial e temporal entre os dados medidos pelo Consórcio Anti-ferrugem sobre os casos de ferrugem asiática no estado do Paraná, durante a safra 2018/19, com as simulações, o que mostra que, as frentes frias podem ser um fator importante no transporte dos esporos da ferrugem asiática para o estado do Paraná.

Como sugestão de trabalhos futuros, pode-se implementar um sistema computacional online para simular em tempo real a disseminação dos esporos no estado do Paraná, via a ocorrência das frentes frias, auxiliando assim, os profissionais da área da agronomia a estabelecerem medidas preventivas de controle e manejo da ferrugem asiática no campo.

A MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

A ideia central do método de diferenças finitas é a discretização das derivadas presentes em equações diferenciais por aproximações, envolvendo apenas valores numéricos da função. Na prática, substitui-se as derivadas pela razão incremental, que converge para o valor da derivada, quando o incremento tende à zero (CUMINATO; MENEGUETTE, 2013). Desta forma, é apresentado neste apêndice a abordagem do método de diferenças finitas para funções de uma e duas variáveis.

A.1 DIFERENÇAS FINITAS PARA FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL

Considere $x_0 \in \mathbb{R}$ e h um número positivo. Define-se malha de passo h associada a x_0 como sendo o conjunto de pontos

$$x_i = x_0 \pm ih, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{A.1})$$

Nos pontos da malha obtidos por (A.1) serão calculadas as aproximações para uma função $f(x)$ e suas respectivas derivadas. O operador de diferenças finitas para problemas unidimensionais pode ser obtido a partir da expansão de uma função em séries de Taylor (BURDEN; FAIRES, 2008). A demonstração do Teorema 1 pode ser encontrada em (LIMA, 2014).

Teorema 1. *(Teorema de Taylor para funções de uma variável)*

Suponha que $f \in C^n[a, b]$ e que existam $f^{(n+1)}$ derivadas de f em $[a, b]$. Para todo $x \in [a, b]$, existe um número $\xi(x)$ entre $(x, x + h)$ de modo que

$$f(x + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}, \quad (\text{A.2})$$

onde o termo $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}$ da expressão (A.1) representa o erro da aproximação de $f(x + h)$, pelo polinômio de grau n , dado por

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k. \quad (\text{A.3})$$

Considerando $n = 1$ em (A.2), pode-se obter uma aproximação para a derivada de primeira ordem $f'(x)$, ou seja

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2!} f''(\xi), \quad (\text{A.4})$$

com $\xi \in (x, x + h)$.

A expressão (A.4) é conhecida como a fórmula de diferenças finitas progressivas, onde o termo $\frac{h}{2!}f''(\xi)$ representa o erro de aproximação. Analogamente, substituindo h por $-(h)$ em (A.2), obtém-se a aproximação para $f'(x)$ conhecida como a fórmula de diferenças finitas regressivas, dada por

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{h}{2!}f''(\xi), \quad (\text{A.5})$$

com $\xi \in (x-h, x)$.

Considerando $n = 2$ em (A.2) e reescrevendo-a para h e $-(h)$, respectivamente, tem-se

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(\xi_1), \quad (\text{A.6})$$

e

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(\xi_2). \quad (\text{A.7})$$

Subtraindo (A.7) de (A.6), aplicando o Teorema do Valor Intermediário para funções contínuas (CUMINATO; MENEGUETTE, 2013) e isolando $f'(x)$, obtém-se a fórmula de diferenças finitas centradas para aproximar derivadas de primeira ordem

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{3!}f'''(\xi), \quad (\text{A.8})$$

onde $\xi \in [\min\{\xi_1, \xi_2\}, \max\{\xi_1, \xi_2\}]$.

Por outro lado, para estabelecer uma expressão para o cálculo de aproximação para derivadas de segunda ordem, considere $n = 3$ em (A.2) para h e $-(h)$, respectivamente, assim

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi_1), \quad (\text{A.9})$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi_2). \quad (\text{A.10})$$

Somando as equações (A.9) e (A.10) e isolando $f''(x)$, tem-se

$$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi). \quad (\text{A.11})$$

A expressão (A.11) é conhecida como a fórmula de diferenças finitas centrada para aproximar derivadas de segunda ordem. Manipulações algébricas semelhantes podem ser realizadas para obter fórmulas de diferenças finitas para aproximar derivadas de ordens superiores.

A.2 DIFERENÇAS FINITAS PARA FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

As fórmulas de diferenças finitas para funções de uma variável podem ser utilizadas para gerar aproximações para derivadas de funções de várias variáveis. No caso bidimensional utiliza-se o Teorema da Série de Taylor para funções de duas variáveis. A demonstração do Teorema 2 pode ser encontrada em (LIMA, 2002).

Teorema 2. (Teorema de Taylor para funções de duas variáveis).

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^{n+1} , A um conjunto aberto e $(x, y) \in A$. Sejam $h, k \in \mathbb{R}$ tal que $(x + \lambda h, y + \lambda k) \in A$, com $\lambda \in [0, 1]$, então existe $\xi \in (0, 1)$ tal que

$$f(x + h, y + k) = f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} k + \dots + \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^{n-j} \partial y^j} h^{n-j} k^j + O(h, k)^{n+1}, \quad (\text{A.12})$$

onde

$$O(h, k)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \frac{\partial^{n+1} f(x + \xi h, y + \xi k)}{\partial x^{n+1-j} \partial y^j} h^{n+1-j} k^j, \quad (\text{A.13})$$

é o erro cometido na aproximação de $f(x + h, y + k)$.

Utilizando o Teorema 2 e o mesmo procedimento apresentado para funções de uma variável seguem as fórmulas de diferenças finitas utilizadas para aproximar derivadas parciais de funções de duas variáveis.

• Fórmulas de diferenças finitas progressivas:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 f(\xi, y)}{\partial x^2} \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k} - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 f(x, \zeta)}{\partial y^2} \quad (\text{A.15})$$

com $\xi \in (x, x + h)$ e $\zeta \in (y, y + k)$.

• **Fórmulas de diferenças finitas regressivas:**

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{f(x, y) - f(x - h, y)}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 f(\xi, y)}{\partial x^2} \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{f(x, y) - f(x, y - k)}{k} + \frac{k}{2} \frac{\partial^2 f(x, \zeta)}{\partial y^2} \quad (\text{A.17})$$

com $\xi \in (x - h, x)$ e $\zeta \in (y - k, y)$.

• **Fórmulas de diferenças finitas centradas:**

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{f(x + h, y) - f(x - h, y)}{2h} - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 f(\xi, y)}{\partial x^3} \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{f(x, y + k) - f(x, y - k)}{2k} - \frac{k^2}{6} \frac{\partial^3 f(x, \zeta)}{\partial y^3} \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{f(x + h, y) - 2f(x, y) + f(x - h, y)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 f(\xi, y)}{\partial x^4} \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = \frac{f(x, y + k) - 2f(x, y) + f(x, y - k)}{k^2} - \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 f(x, \zeta)}{\partial y^4} \quad (\text{A.21})$$

com $\xi \in (x - h, x + h)$ e $\zeta \in (y - k, y + k)$.

A.3 FÓRMULAS DE DIFERENÇAS FINITAS DISCRETIZADAS

As fórmulas de diferenças finitas apresentadas nas seções anteriores apresentam aproximações contínuas de derivadas. Para que seja possível realizar a implementação computacional dessas fórmulas é necessário representá-las por meio de operações aritméticas, de modo que o computador possa executar. Nesta seção são apresentadas as discretizações das fórmulas de diferenças finitas apresentadas anteriormente.

A.3.1 Fórmulas de Diferenças Finitas Discretizadas para Funções de uma Variável

Com base nas aproximações contínuas apresentadas na seção (A.1), seguem as fórmulas de diferenças finitas discretizadas para funções de uma variável.

• **Fórmula de diferenças finitas progressiva:**

$$f'(x) \Big|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}. \quad (\text{A.22})$$

- **Fórmula de diferenças finitas regressiva:**

$$f'(x) \Big|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h}. \quad (\text{A.23})$$

- **Fórmula de diferenças finitas centrada:**

$$f'(x) \Big|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}, \quad (\text{A.24})$$

$$f''(x) \Big|_i = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}. \quad (\text{A.25})$$

Os índices $(i - 1)$, (i) e $(i + 1)$ presentes nas equações (A.22)-(A.25) correspondem aos valores $f(x - h)$, $f(x)$ e $f(x + h)$, respectivamente, conforme ilustra a figura A.1.

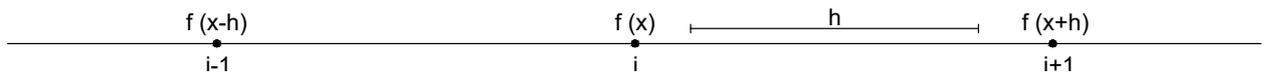


Figura A.1: Discretização unidimensional por diferenças finitas.

Fonte: Autor.

A.3.2 Fórmulas de Diferenças Finitas Discretizadas para Funções de duas Variáveis

Com base nas aproximações contínuas apresentadas na seção (A.2), seguem as fórmulas de diferenças finitas discretizadas para funções de duas variável.

- **Fórmula de diferenças finitas progressivas:**

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(i,j)} = \frac{f_{(i+1,j)} - f_{(i,j)}}{h} \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(i,j)} = \frac{f_{(i,j+1)} - f_{(i,j)}}{h} \quad (\text{A.27})$$

- **Fórmula de diferenças finitas regressivas:**

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(i,j)} = \frac{f_{(i,j)} - f_{(i-1,j)}}{h} \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(i,j)} = \frac{f_{(i,j)} - f_{(i,j-1)}}{h} \quad (\text{A.29})$$

- **Fórmula de diferenças finitas centradas:**

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(i,j)} = \frac{f_{(i+1,j)} - f_{(i-1,j)}}{2h} \quad (\text{A.30})$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(i,j)} = \frac{f_{(i,j+1)} - f_{(i,j-1)}}{2h} \quad (\text{A.31})$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(i,j)} = \frac{f_{(i-1,j)} - 2f_{(i,j)} + f_{(i+1,j)}}{h^2} \quad (\text{A.32})$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{(i,j)} = \frac{f_{(i,j-1)} - 2f_{(i,j)} + f_{(i,j+1)}}{h^2} \quad (\text{A.33})$$

De acordo com as equações (A.26)-(A.33) os índices i e j foram utilizados para representar a variação dos pontos da malha no sentido horizontal e vertical, respectivamente. Os índices $(i-1, j)$, (i, j) , $(i+1, j)$, $(i, j-1)$ e $(i, j+1)$, correspondem aos valores de $f(x-h, y)$, $f(x, y)$, $f(x+h, y)$, $f(x, y-k)$ e $f(x, y+k)$, respectivamente. Os pontos de uma malha computacional também podem ser rotulados por meio de pontos cardeais. Geralmente, os rótulos P , E , W , N e S são utilizados para identificar os pontos $P = (i, j)$, $E = (i+1, j)$, $W = (i-1, j)$, $N = (i, j+1)$ e $S = (i, j-1)$, e significam, centro, leste, oeste, norte e sul, respectivamente. A figura A.2 ilustra a discretização bidimensional por diferenças finitas e a rotulação dos pontos da malha por meio de pontos cardeais.

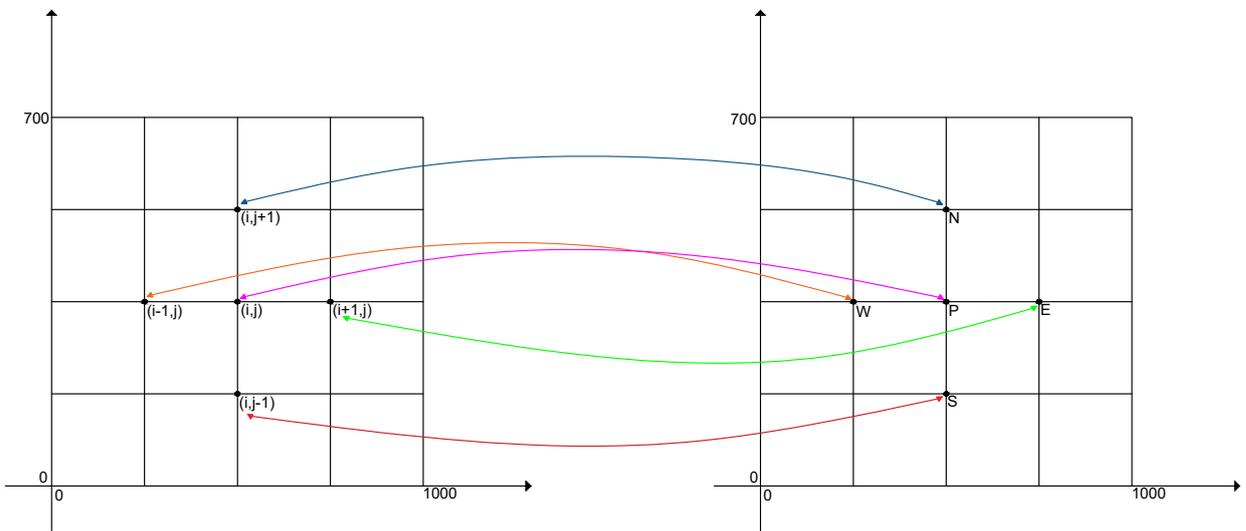


Figura A.2: Equivalência de rotulação dos pontos de malha. Rotulação ponto (i, j) e pontos cardeais.

Fonte: Autor.

B RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Na abordagem numérica de equações diferenciais utiliza-se alguma técnica de discretização como, por exemplo, o método de diferenças finitas, em que o sistema algébrico resultante é posto na forma explícita ou implícita. No contexto de métodos implícitos, faz-se necessário a resolução de sistemas de equações lineares. Geralmente, o sistema linear resultante é de grande porte, pois o número de incógnitas é proporcional ao número de pontos na malha, uma vez que malhas refinadas são utilizadas para obter soluções numéricas que sejam representativas do problema em estudo. Além disso, a maioria dos elementos da matriz dos coeficientes são iguais a zero, caracterizando a matriz como esparsa. Desta forma, a aplicação de métodos diretos para a resolução de sistemas lineares, como por exemplo, o método de Gauss, não é em geral recomendado, pois ao tentar eliminar os elementos da parte triangular inferior da matriz, muitos elementos que eram nulos tornarão-se não nulos ao longo do processo (CUMINATO; MENEGUETTE, 2013).

Por outro lado, os métodos iterativos não sofrem esse problema, pois requerem somente o resultado da multiplicação da matriz dos coeficientes por um vetor e portanto, o padrão de zeros da matriz não sofre qualquer modificação. Métodos iterativos resultam da aplicação repetida de um algoritmo, que a partir de uma aproximação inicial conhecida, obtém-se uma nova aproximação, mais próxima da solução real do problema. Outra característica positiva é que os métodos iterativos são auto-corrigíveis, pois sua convergência é independente da aproximação inicial (CUMINATO; MENEGUETTE, 2013).

Entre os métodos iterativos mais utilizados para resolver sistemas lineares encontram-se o método de Jacobi, o método de Gauss-Seidel, o método da Sobre-Relaxação Sucessiva (SOR), o método dos Gradientes Conjugados, entre outros (BURDEN; FAIRES, 2008). Neste trabalho, utiliza-se o método de Gauss-Seidel para resolver iterativamente a equação (5.17).

B.1 MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

O método de Gauss-Seidel (BURDEN; FAIRES, 2008) obtém a solução de um sistema linear $Ax = b$, com n equações, por uma sequência de operações aplicadas a uma aproximação inicial $x^{(0)}$ do vetor solução x . A partir da aproximação inicial $x^{(0)}$, o método de Gauss-Seidel gera uma sequência de vetores $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$, que convergem para a solução do sistema linear a medida que $n \rightarrow \infty$. Para descrever o método de Gauss-Seidel considere inicialmente o sistema linear $Ax = b$ dado por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Se $a_{ii} \neq 0, i = 1, \dots, n$, então o sistema linear (B.1) pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n) \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}). \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Considerando que no nível de iteração it os valores $x_1^{it}, x_2^{it}, \dots, x_n^{it}$ sejam conhecidos, então de (B.2) para o nível de iteração $it + 1$ tem-se

$$\begin{cases} x_1^{it+1} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{it} - a_{13}x_3^{it} - \dots - a_{1n}x_n^{it}) \\ x_2^{it+1} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{it+1} - a_{23}x_3^{it} - \dots - a_{2n}x_n^{it}) \\ \vdots \\ x_n^{it+1} = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1^{it+1} - a_{n2}x_2^{it+1} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{it+1}). \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

O método de Gauss-Seidel consiste em utilizar no passo de iteração $it + 1$ valores calculados no passo de iteração anterior it para obter uma sequência de vetores x^1, x^2, \dots, x^m , de modo que x^m seja solução do sistema linear (B.1), quando os critérios de parada forem satisfeitos. Esse critério indica se a solução obtida na it -ésima iteração é representativa, dentro de uma tolerância estipulada. Em outras palavras, diz-se, então, que a solução numérica convergiu para a solução do sistema de equações lineares. Em suma, o método de Gauss-Seidel é dado por (BURDEN; FAIRES, 2008):

$$x_i^{it+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{it+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{it} \right], \quad (\text{B.4})$$

com $i = 1, \dots, n$.

B.2 CRITÉRIOS DE PARADA

Ao implementar o método de Gauss-Seidel em alguma linguagem de programação é necessário fornecer ao computador um critério de parada, que significa que a solução do sistema linear foi obtida ao considerar a diferença entre duas aproximações consecutivas x_i^{it+1} e x_i^{it} menores que uma determinada tolerância estipulada. Para determinar os critérios de parada para o método de Gauss-Seidel, define-se inicialmente, a norma vetorial.

Definição 1. *Seja V um espaço vetorial. Uma norma definida em V é uma função $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

- i) $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.
- iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, com x e $y \in V$.

As normas vetoriais usais são:

- **Norma das colunas:**

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|. \quad (\text{B.5})$$

- **Norma euclidiana:**

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}. \quad (\text{B.6})$$

- **Norma das linhas:**

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|. \quad (\text{B.7})$$

Dispondo de dois vetores consecutivos x^{it+1} e x^{it} define-se erro absoluto e erro relativo como

$$\text{Erro absoluto} = |x_i^{it+1} - x_i^{it}| \quad \text{e} \quad \text{Erro relativo} = \frac{|x_i^{it+1} - x_i^{it}|}{|x_i^{it}|}, \quad (\text{B.8})$$

e então, pode-se utilizar alguma das normas definidas por (B.5) - (B.7), para verificar se dado um valor real $\varepsilon > 0$, a norma do Erro absoluto ou Erro relativo são menores que ε , isto é

$$\|\text{Erro absoluto}\|_p < \varepsilon \quad \text{ou} \quad \|\text{Erro relativo}\|_p < \varepsilon, \quad (\text{B.9})$$

onde $p = 1$, ou $p = 2$ ou $p = \infty$.

Se a condição (B.9) for verificada para o Erro relativo ou Erro absoluto para o passo de iteração $it + 1$, então o critério de parada é satisfeito. O algoritmo do método de Gauss Seidel aplicado para resolver iterativamente sistemas de equações lineares é dado por (BURDEN; FAIRES, 2008):

Algoritmo 1: MÉTODO DE GAUSS SEIDEL

Entrada: Matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; vetor $b \in \mathbb{R}^n$; aproximação inicial $x^{(0)}$.

Dados: Número máximo de iterações $k_{\text{máx}}$ e tolerância $\varepsilon > 0$.

1 **início**

2 inicialize com $it = 0$

3 **faça:**

4

$$x_i^{it+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{it+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{it} \right],$$

5 para $i = 1, \dots, n$.

6 **calcule:**

7

$$\frac{\|x_i^{it+1} - x_i^{it}\|_p}{\|x_i^{it}\|_p} \quad \text{ou} \quad \|x_i^{it+1} - x_i^{it}\|_p$$

8 com $p = 1$ ou $p = 2$ ou $p = \infty$ em (B.5) - (B.7).

9 **verifique:**

10

$$\frac{\|x_i^{it+1} - x_i^{it}\|_p}{\|x_i^{it}\|_p} < \varepsilon \quad \text{ou} \quad \|x_i^{it+1} - x_i^{it}\|_p < \varepsilon \quad (\text{B.10})$$

11

Se a condição estabelecida em (B.10) for verdadeira, então
PARE! A solução do sistema linear foi encontrada. Senão:

12

atualize: $x_i^{it} = x_i^{it+1}$ e $it = it + 1$, retorne para o passo 3.

13 **fim**

REFERÊNCIAS

- AMORIM, L.; REZENDE, J. A. M.; BERGAMIN, A. *Manual de fitopatologia - princípios e conceitos*. 5 ed. Agronômica Ceres, 2018.
- APARECIDO, L. E de O.; ROLIM, G. de S.; RICHETTI, J.; SOUZA, R. S.; JOHANN, J. A. Koppen, Thornthwaite and Camargo climate classifications for climatic zoning in the state of Paraná, Brazil. *Ciência e Agrotecnologia* v.4, p. 405-417, 2016.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 10 ed. LTC, Rio de Janeiro, 2012.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, D. *Numerical analysis*. 8. ed. Cengage Learning, 2008.
- CALDERON, G.; BORSATO, V. A. O fenômeno La Niña e sua influência na disponibilidade hídrica no município de Campo Mourão-PR. *Geosp – Espaço e Tempo* (Online), v. 21, n. 1, p. 177-197, 2017.
- CAPECO - Cámara Paraguaya de Exportadores y Comercializadores de Cereales y Oleaginosas. Disponível em <<http://capeco.org.py>>. Último acesso em: 31 mar. 2020.
- CHAPMAN, S. J. *Programação em Matlab para engenheiros*. 3.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017.
- CIRILO, E.; PETROVSKII, S.; ROMEIRO, N.; NATTI, P. Investigation into the critical domain problem for the reaction-telegraph equation using advanced numerical algorithms. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, v. 5, p. 54-78, 2019.
- CONAB - Companhia Nacional de Abastecimento. Disponível em: <<https://www.conab.gov.br/>>. Último acesso em: 31 mar. 2020.
- COPEL. *Atlas do potencial eólico do estado do Paraná*. Curitiba, 2007.
- COPEL. *Atlas climático do estado do Paraná*. Londrina, 2019.
- CUMINATO, J. A.; MENEGUETTE, M. *Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas*. SBMAC, Rio de Janeiro, 2013.
- DIAS, J. F. *Aplicação de métodos múltiplo estágios na equação de advecção-difusão-reação bidimensional*. 2014. 68f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

EMBRAPA - Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária. Disponível em: <<https://www.embrapa.br>>. Último acesso em: 31 mar. 2020.

FIALLOS, F. R. G. A ferrugem asiática da soja causada por *phakopsora pachyrhizi* sydow e *sydow*. *Ciencia y Tecnologia*, p. 45-60, 2011.

FORTUNA, A. de O.; *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos*. 2 ed. São Paulo: Edusp, 2012.

FREITAS, M. de C. M. A cultura da soja no Brasil: o crescimento da produção brasileira e o surgimento de uma nova fronteira agrícola. *Enciclopédia biosfera*, Goiânia, v. 7, n. 12, p. 1-12, 2011.

GABRIEL, M.; MURARO, D. S.; ROSA, G. M.; WASTOWSK, A. D.; KULCZYNSKI, S. M.; SILVA, J. de C.; CARVALHO, I. R.; SZARESKEI, V. J.; SILVA, V. A.; STUMM, J. de O. Chemical control of asian soybean rust and its effect in the yield and quality of soybean seeds. *Journal of Agricultural Science*, v. 10, n. 10, p. 518-526, 2018.

GODOY, C. V.; SEIXAS, C. D. S.; SOARES, R. M.; GUIMARÃES, F. C. M.; MEYER, M. C.; COSTAMILAN, L. M. Asian soybean rust in Brazil: past, present, and future. *Pesquisa Agropecuária Brasileira*, v. 51, n. 5, p. 407-421, 2016.

INPE - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. Disponível em: <<http://www.inpe.br>>. Último acesso em: 31 mar. 2020.

IPARDES - Instituto Paranaense de Desenvolvimento Econômico e Social. Disponível em: <<http://www.ipardes.gov.br>>. Último acesso em: 31 mar. 2020.

ISARD, S. A.; GAGE, S. H.; COMTOIS, P.; RUSSO, J. M. Principles of the atmospheric pathway for invasive species applied to soybean rust. *BioScience*, v. 55, n. 10, p. 851-861, 2005.

ISARD, S. A.; DEFAULT, N. S.; MILES, M. R.; HARTMAN, G. L.; RUSSO, L. M.; WOLF, E. D.; MOREL, W. The effect of solar irradiance on the mortality of *phakopsora pachyrhizi* urediniospores. *Plant Disease*, v.90, n.7, p. 941-945, 2006.

ISARD, S. A.; RUSSO, J. M.; ARIATTI, A. The integrated aerobiology modeling system applied to the spread of soybean rust into the Ohio river valley during september 2006. *Aerobiologia*, v. 23, p. 271-282, 2007.

ISARD, S. A.; BARNES, C. W.; HAMBLETON, S.; ARIATTI, A.; RUSSO, J. M.; TENUTA, A.; GAY, D. A.; SZABO, L. J. Predicting soybean rust incursions into the North American continental interior using crop monitoring, spore trapping, and aerobiological modeling. *Plant*

Disease, v.95, p. 1346-1357, 2011.

KREITH, F; MANGLIK, R. M.; BOHN, M. S. *Princípios de transferência de calor*. 7. ed. Cengage Learning, 2012.

LI, X.; YANG, X.; GUO, T. Estimation of soybean rust uredospore terminal velocity, dry deposition, and the wet deposition associated with rainfall. *Eur J Plant Pathol*, p. 377-386, 2008.

LI, X.; ESKER, P. D.; PAN, Z.; DIAS, A. P.; XUE, L.; YANG, X. B. The uniqueness of the SBR pathosystem and its scientific value, global distribution, economic importance, and epidemiology of SBR. *Plant Disease*, v. 94, n. 7, p. 796–806, 2010.

LIMA, E. L. *Análise no \mathbb{R}^n* . 2 ed. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária, 2002.

LIMA, E. L. *Análise Real: Funções de uma variável*. 12 ed. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária, 2014.

MACHADO, L. G. P. *Malhas adaptativas em domínios definidos por fronteiras curvas*. 2008. 79f. Dissertação (Mestrado em Ciências de Computação e Matemática Aplicada) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

MALTHUS, T. R. *An essay on the principle of population; or, a view of its past and present effects on human happiness*. Reeves & Turner, 1888.

MEYER, M.; BURGIN, L.; HORT, M. C.; GILLIGAN, C. A. Large-scale atmospheric dispersal simulations identify likely airborne incursion routes of wheat stem rust into Ethiopia. *Phytopathology*, v. 107, n. 10, p. 1175-1186, 2017.

MINCHIO, C. A.; CANTERI, M. G.; FANTIN, L. H.; SILVA, M. A. de A. Epidemias de ferrugem asiática no Rio Grande do Sul explicadas pelo fenômeno ENOS e pela incidência da doença na entressafra. *Summa Phytopathol*, Botucatu, v.42, n. 4, p. 321-326, 2016.

OISHI, C. M. *Análise e implementação de métodos implícitos no sistema FreeFlow2D*. 2004. 149f. Dissertação (Mestrado em Ciências Matemáticas e Computação) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

PAN, Z.; YANG, X. B.; PIVONIA, S.; XUE, L.; PASKEN, R.; ROADS, J. Long-term prediction of soybean rust entry into the continental United States. *Plant Disease*, v. 90, p.840-846, 2006.

- PARDO, S. R. *Uma modelagem do transporte e reações dos ciclos do carbono e do nitrogênio no lago Igapó I, Londrina, Paraná*. 2009. 94f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.
- PONTE, E. M. D.; GODOY, C. V.; LI, X.; YANG, X. B. Predicting severity of asian soybean rust epidemics with empirical rainfall models. *Ecology and Epidemiology*, v.96, n.7, p. 797-803, 2006.
- PONTE, E. M. D; ESKER, P. D. Meteorological factors and asian soybean rust epidemics - a systems approach and implications for risk assessment. *Scientia Agricola*. v.65, p. 88-97, 2008.
- QUEIROZ, R. A. B. *Desenvolvimento e teste de esquemas "upwind" de alta resolução e suas aplicações em escoamentos incompressíveis com superfícies livres*. 2009. 134f. Dissertação (Mestrado em Ciências de Computação e Matemática Aplicada) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.
- ROHATGI, A. WebPlotDigitizer URL <http://arohatgi.info/WebPlotDigitizer/app>, 2011.
- ROMEIRO, N.; CASTRO, R.; CIRILO, E.; NATTI, P. Local calibration of coliform parameters of water quality problem at Igapó I Lake - Londrina, Paraná, Brazil. *Ecological Modelling*, v. 222, p. 1888-1896, 2011.
- RIZATO, M. *O cultivo da soja no oeste do estado do Paraná: contribuição metodológica para a análise espaço-temporal*. 2015. 115f. Dissertação (Mestrado em Geografia) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2015.
- SAITA, T. M. *Dinâmica de coliformes fecais no lago Luruaco - Atlântico, Colômbia*. 2016. 106f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.
- SCAPIN, P. J. *Fundamentos geográficos do Paraná*. 2006. 98f. Monografia (Especialização em Geografia) - Faculdade Estadual de Ciências e Letras de Campo Mourão, Campo Mourão, 2006.
- SOARES, R. M.; RUBIN, S. de A. L.; WIELEWICKI, A. P.; OZELAME, J. G. Fungicidas no controle da ferrugem asiática e produtividade da soja. *Ciência Rural*, Santa Maria, v. 34, n. 4, p. 1245 - 1247, 2004.
- SILVA, B. F. P.; FEDOROVA, N.; LEVIT, V.; PERESETSKY, A.; BRITO, B. M. Sistemas sinóticos associados às precipitações intensas no estado de Alagoas. *Revista Brasileira de Meteorologia*, v.26, n.3, p.323-338, 2011.

STEFANELLO, M. T.; BALARDIN, R. S.; MINUZZI, S. G.; FAREVA, D. D.; MARQUES, D. T. P.; PEZZINI, D. T.; EBONE, A. Effect of the interaction between fungicide application time and rainfall simulation interval on asian soybean rust control effectiveness. *Semina: Ciências Agrárias*. v.37, n.6, p. 3881-3892, 2016.

TSUDA, A.; HENRY, F. S.; BUTLER, J. P. Particle transport and deposition: basic physics of particle kinetics. *Compr Physiol*. 2013; 3(4) :1437–71.

WHITE, F. M.; *Mecânica dos fluidos* 6. ed. Rio Janeiro, AMGH, 2011.

YOUNG, H. M.; GEORGE, S.; NARVÁEZ, D. F.; SRIVASTAVA, P.; SCHUERGER, A. C.; WRIGHT, D. L.; MAROIS, J. J. Effect of solar radiation on severity of soybean rust *Phytopathology* v.102, n.8, p. 794-803, 2012.