SAULO RODRIGO MEDRADO

SISTEMAS DE TIMOSHENKO COM DISSIPAÇÕES FRACA E TERMOELÁSTICA: BOA COLOCAÇÃO E ESTABILIDADE

Londrina
2019

SAULO RODRIGO MEDRADO

SISTEMAS DE TIMOSHENKO COM DISSIPAÇÕES FRACA E TERMOELÁSTICA: BOA COLOCAÇÃO E ESTABILIDADE

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva

Londrina
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Medrado, Saulo Rodrigo.
Sistemas de Timoshenko com Dissipações Fraca e Termoelástica : Boa Colocação e Estabilidade / Saulo Rodrigo Medrado. - Londrina, 2019.
113 f. : il.

Orientador: Marcio Antonio Jorge da Silva.
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2019.
Inclui bibliografia.

1. Timoshenko - Tese. 2. Semigrupos - Tese. 3. Estabilidade - Tese. 4. Equações Diferenciais - Tese. I. da Silva, Marcio Antonio Jorge. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

SAULO RODRIGO MEDRADO

SISTEMAS DE TIMOSHENKO COM DISSIPAÇÕES FRACA E TERMOELÁSTICA: BOA COLOCAÇÃO E ESTABILIDADE

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Albo Carlos Cavalheiro
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Adeval Lino Ferreira
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 15 de fevereiro de 2019.

AGRADECIMENTOS

Aos professores do PGMAC que, direta ou indiretamente, contribuíram com a realização deste trabalho.

Aos amigos e companheiros de Mestrado.

Ao professor Marcio pela paciência na orientação deste trabalho.

Por fim, agradeço à CAPES e à Fundação Araucária pelo suporte financeiro.

MEDRADO, Saulo Rodrigo. **Sistemas de Timoshenko com Dissipações Fraca e Termoelástica: Boa Colocação e Estabilidade**. 2019. Número total de folhas 113. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

RESUMO

Este trabalho é dedicado ao estudo de alguns sistemas de Timoshenko, no que se refere a existência e unicidade de solução e estabilidade exponencial ou polinomial, conforme o tipo de sistema onde a dissipação está acoplada. Mais precisamente, serão considerados três sistemas, a saber, um com duas dissipações friccionais, outro com dissipação térmica e lei de Cattaneo, e o último com dissipações friccional e térmica. Para o estudo de tais sistemas, usa-se uma abordagem via teoria de semigrupos lineares tanto para existência e unicidade quanto para a estabilidade de soluções.

Palavras-chave: Timoshenko, semigrupos, soluções, estabilidade, equações diferenciais.

MEDRADO, Saulo Rodrigo. **Timoshenko Systems with Weak and Thermoelastic Damping: Well-posedness and Stability**. 2019. Number of pages 113. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

ABSTRACT

This work is dedicated to the study of some Timoshenko systems with respect to existence and uniqueness of solution and exponential or polynomial stability, depending on the dissipation of the system. More precisely, three systems are considered, namely, the first one with two frictional dissipations, the second one with thermal dissipation and Cattaneo's law, and the last one with frictional and thermal dissipations. To study such systems, it is used the linear semigroup theory for the existence and uniqueness as well as to the stability of solutions.

Keywords: Timoshenko, semigroups, solutions, stability, differential equations.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 O Sistema de Vigas de Timoshenko

O sistema de Timoshenko, em referência ao engenheiro ucraniano Sthephen P. Timoshenko (1878-1972), é um sistema de equações diferenciais parciais que descreve a vibração de uma viga levando em consideração o deslocamento vertical e o ângulo de rotação, o qual possui suas origens nos trabalhos de Timoshenko [21, 22]. No que segue, vamos expor inicialmente a ideia geométrica e algébrica do sistema elástico de Timoshenko.

Em uma viga de comprimento $l > 0$, denotaremos o deslocamento vertical e ângulo de rotação de uma seção transversal com relação a seção normal por $\phi = \phi(x,t)$ e $\psi = \psi(x,t)$, respectivamente, ambas dependendo da posição $x \in [0,l]$ e do tempo $t \geq 0$, conforme a Figura 1.1 abaixo.

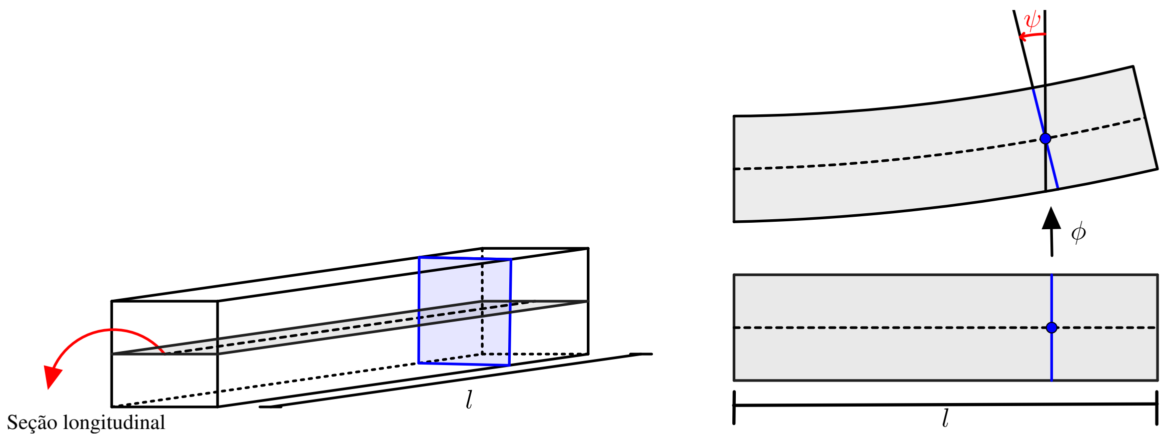

Figura 1.1: Deslocamento Vertical ϕ e Ângulo de Rotação ψ

De acordo com Timoshenko [21, 22] as Equações de Momento para as variáveis ϕ e ψ são:

$$\rho A \phi_{tt} = S_x, \tag{1.1}$$
$$\rho I \psi_{tt} = M_x - S, \tag{1.2}$$

onde ρ é a densidade de massa, A e I representam área e o momento de inércia de uma seção transversal da viga, S designa força de cisalhamento e M o momento fletor. Além disso, as Leis Constitutivas Elásticas para a força de cisalhamento e momento fletor são dadas por

$$S = k'GA(\phi_x + \psi), \tag{1.3}$$
$$M = EI\psi_x, \tag{1.4}$$

onde k' é um fator de correção de cisalhamento, G e E denotam os módulos de cilhamento e de elasticidade de Young, respectivamente. Fisicamente, todas as constantes do sistema são positivas. Abaixo, na Figura 1.2, ilustramos casos que representam a força de cisalhamento e momento fletor aplicadas sobre o objeto

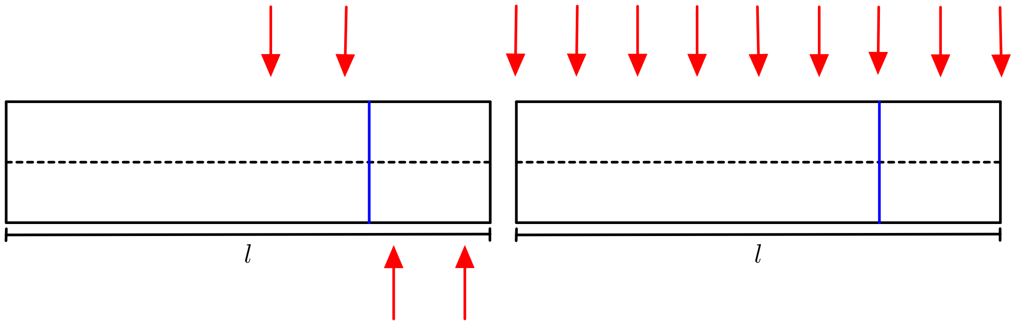

Figura 1.2: Força de Cisalhamento à esquerda e Momento Fletor à direita

Substituindo (1.3)-(1.4) em (1.1)-(1.2) e denotando as constantes por

$$\rho_1 = \rho A, \quad \rho_2 = \rho I, \quad k = k'GA, \quad b = EI, \tag{1.5}$$

chegamos ao seguinte sistema de vigas de Timoshenko

$$\begin{cases} \rho_1 \phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x = 0 & \text{em} \quad (0,l) \times (0,\infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) = 0 & \text{em} \quad (0,l) \times (0,\infty). \end{cases} \tag{1.6}$$

Podemos assumir ainda que a viga está fixada nos extremos $\{0, l\}$, o que no leva a considerar a seguinte condição de fronteira

$$\phi(0,t) = \phi(l,t) = 0, \quad \psi(0,t) = \psi(l,t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{1.7}$$

Além disso, para $t = 0$ consideramos as condições iniciais

$$\phi(x,0) = \phi_0(x), \; \phi_t(x,0) = \phi_1(x), \; \psi(x,0) = \psi_0(x), \; \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \; x \in (0,l). \tag{1.8}$$

Ao problema de valor inicial e de fronteira (1.6)-(1.8) podemos associar o seguinte funcional de energia definido por

$$\begin{aligned} E(t) \;=\; & \frac{1}{2}\left[\rho_1 \int_0^l (\phi_t(t))^2 dx + \rho_2 \int_0^l (\psi_t(t))^2 dx + b \int_0^l (\psi_x(t))^2 dx \right. \\ & \left. + k \int_0^l (\phi_x(t) + \psi(t))^2 dx \right], \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Por meio de uma conta usual (a qual será esclarecida na Seção 3.3 do Capítulo 3), verifica-se formalmente que

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0 \quad \forall\, t > 0, \tag{1.10}$$

de onde segue que $E(t) = E(0)$ para todo $t > 0$. Isto nos diz que a energia é constante, ou seja, se conserva com o mesmo valor $E(0)$ para todo $t > 0$. Neste caso, dizemos que o sistema (1.6)-(1.8) é conservativo e, para estudar sua estabilidade, deve-se considerar algum mecanismo dissipativo como efeitos friccionais, termoelásticos, dentre outros. Neste trabalho consideramos apenas efeitos friccionais e termoelásticos conforme as referências estudadas e cujos modelos estão descritos como segue.

1.2 Sistema de Timoshenko com duas dissipações friccionais

No Capítulo 3 vamos considerar o sistema (1.6) com duas dissipações friccionais dadas pelos termos $\alpha\phi_t$ e $\beta\psi_t$, sendo $\alpha, \beta \geq 0$. Mais precisamente, assim como em [18], consideramos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x + \alpha\phi_t = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) + \beta\psi_t = 0. \end{cases} \tag{1.11}$$

com condições iniciais e de fronteira dadas em (1.7)-(1.8). Em primeiro lugar, aplicamos teoria de semigrupos conforme [12] para mostrar a existência e unicidade de solução forte para o problema.

Em seguida, a proposta é estudar a estabilidade de tal sistema. Para isto, notamos que o funcional de energia também é definido como em (1.9), ou seja,

$$\begin{aligned} E(t) \;&=\; \frac{1}{2}\left[\rho_1 \int_0^l (\phi_t(t))^2 dx + \rho_2 \int_0^l (\psi_t(t))^2 dx + b \int_0^l (\psi_x(t))^2 dx \right. \\ &\left. \quad + k \int_0^l (\phi_x(t) + \psi(t))^2 dx \right], \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Neste caso, assim como verificado na Seção 3.3 do Capítulo 3, podemos concluir que $E(t)$ satisfaz

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\alpha \int_0^l (\phi_t(t))^2 dx - \beta \int_0^l (\psi_t(t))^2 dx \leq 0, \quad \forall\, t > 0, \tag{1.13}$$

uma vez que $\alpha, \beta \geq 0$. Logo, $E(t)$ é não-crescente com $E(t) \leq E(0)$ para todo $t > 0$. Com isto, no caso em que consideramos $\alpha, \beta > 0$ podemos concluir dois fatos interessantes:

- De (1.13), vê-se que $\alpha\phi_t$ e $\beta\psi_t$ fornecem dissipações ao sistema em questão, as quais já foram denominadas como dissipações friccionais.
- Podemos estudar algum tipo de estabilidade para $E(t)$ dada em (1.12), como feito na

Seção 3.3 do Capítulo 3. Mais precisamente, vamos mostrar que $E(t) \to 0$ a uma taxa exponencial quando $t \to \infty$.

No que concerne à estabilidade exponencial comentada no item acima, faremos por dois métodos, a saber, o método de perturbação de energia e o método de semigrupos lineares via Teorema de Prüss.

1.3 Sistema de Timoshenko com dissipação térmica e lei de Cattaneo

No Capítulo 4 abordamos um sistema de Timoshenko com acoplamento térmico com lei de Cattaneo ao momento fletor, produzindo uma dissipação. Iniciamos considerando as equações que descrevem a vibração transversal de uma viga de comprimento l dadas por (1.1) e (1.2)

$$\rho A\phi_{tt} = S_x \quad e \quad \rho I\psi_{tt} = M_x - S,$$

e as leis constitutivas para a tensão-deformação da viga, neste caso, são dadas por

$$M = EI\phi_x - \delta\theta, \tag{1.14}$$

$$S = kGA(\phi_x + \psi), \tag{1.15}$$

onde $\theta = \theta(x,t)$ para $x \in [0,l]$ e $t \geq 0$ denota a diferença de temperatura acoplada ao momento fletor, conforme proposto em [8]. Substituindo (1.14)-(1.15) nas Equações de Momento (1.1)-(1.2) e denotando as constantes, como (1.5), por

$$\rho_1 = \rho A, \ \ \rho_2 = \rho I, \ \ k = k'GA, \ \ b = EI,$$

obtemos

$$\rho_1\phi_{tt} = k(\phi_x + \psi)_x, \tag{1.16}$$

$$\rho_2\psi_{tt} = (b\psi_x - \delta\theta)_x - k(\phi_x + \psi), \tag{1.17}$$

onde θ satisfaz a equação do calor

$$\rho_3\theta_t + \beta q_x + \delta\psi_{xt} = 0, \tag{1.18}$$

em que δ, β e ρ_3 são constantes positivas de termoelasticidade e $q = q(x,t)$, para $x \in [0,l]$ e $t \geq 0$, é fluxo de calor que é dado pela lei de Cattaneo (ver [8])

$$\tau q_t + \beta q + \theta_x = 0, \tag{1.19}$$

em que $\tau > 0$ é tempo de atraso no fluxo de calor com respeito ao gradiente da temperatura, assim como em [8]. As equações (1.16), (1.17), (1.18) e 1.19 formam o seguinte sistema

$$\begin{cases} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) + \delta\theta_x = 0, \\ \rho_3\theta_t + q_x + \delta\psi_{xt} = 0, \\ \tau q_t + \beta q + \theta_x = 0, \end{cases} \tag{1.20}$$

o qual será considerado com condições inciais e de fronteira conforme o Capítulo 4. Novamente o objeto de estudo inicial é mostrar a existência e unicidade de solução para tal problema.

Neste caso, o funcional de energia associado ao sistema (1.20) é definido por

$$\begin{aligned} E(t) &= \rho_1 \int_0^l (\phi_t(t))^2 dx + \rho_2 \int_0^l (\psi_t(t))^2 dx + b \int_0^l (\psi_x(t))^2 + \rho_3 \int_0^l (\theta(t))^2 \\ &\quad + \tau \int_0^l (q(t))^2 dx + k \int_0^l (\phi_x(t) + \psi(t))^2 dx, \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{1.21}$$

e mostra-se que

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\beta \int_0^l (q(t))^2 dx \leq 0, \quad t > 0, \tag{1.22}$$

uma vez que $\beta > 0$.

Observação 1.1. Para concluir (1.22) multiplicamos $(1.20)_1$ por ϕ_t, $(1.20)_2$ por ψ_t, $(1.20)_3$ por θ e $(1.20)_4$ por q, integramos em $(0, l)$, usamos integração por partes, desconsideramos os termos de fronteira (devido às condições de fronteira) e somamos as expressões resultantes. As contas serão omitidas aqui (e posteriormente), pois usaremos apenas a teoria de semigrupos para estudar estabilidade do problema. Neste momento, a intenção é apenas exibir o termo dissipativo deste problema.

Novamente temos de (1.22) que $E(t)$, dada em (1.21), é não-crescente com $E(t) \leq E(0)$ para todo $t > 0$. Além disso, como $\beta > 0$ podemos estudar a estabilidade de soluções (energia), sendo o termo dissipativo dado por βq, como vê-se em (1.22). Neste caso, como temos apenas uma dissipação no sistema, então a estabilidade do problema requer uma relação dos coeficientes como descriminado a seguir.

Observamos que no caso em que o sistema é obtido com lei térmica de Fourier, foi mostrado em [14] que a estabilidade exponencial ocorre se, e somente se, ocorre a igualdade de velocidade de propagação de ondas, isto é, se é válida a relação $\chi := \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} = 0$. No entanto, neste trabalho mostramos que a estabilidade exponencial não ocorre em geral, nem mesmo se $\chi = 0$, conforme obtido [8]. Porém, existe uma condição sobre os coeficientes do sistema que equivale a estabilidade exponencial do sistema. Mais especificamente, definindo a constante

$$\chi_0 := \left(\tau - \frac{\rho_1}{\rho_3 k}\right)\left(\rho_2 - \frac{\rho_1 b}{k}\right) - \frac{\rho_1 \tau \delta^2}{\rho_3 k}, \tag{1.23}$$

mostramos que $\chi_0 = 0$ equivale a estabilidade exponencial do sistema (1.20). No caso em que $\chi_0 \neq 0$, conseguimos obter a estabilidade polinomial com taxa ótima conforme obtido em [20]. Observe que

$$\left(\rho_2 - \frac{\rho_1 b}{k}\right) = -b\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) = -b\chi,$$

logo, mesmo se $\chi = 0$ temos $\chi_0 \neq 0$, e portanto o número χ nada diz sobre a estabilidade exponencial deste sistema. Todas essas afirmações serão esclarecidas na Seções 4.2, 4.3 e 4.4 do Capítulo 4.

1.4 SISTEMA DE TIMOSHENKO COM DISSIPAÇÃO TÉRMICA E LEI DE CATTANEO, E DISSIPAÇÃO FRICCIONAL

Por fim, no Capítulo 5 a fim de recuperar a estabilidade exponencial para um sistema do tipo (1.20) no caso geral (sem relação entre os coeficientes), vamos considerar um um termo dissipativo dado por $\alpha\phi_t$ acoplado na primeira equação de (1.20), assim como em [13, 23], obtendo o sistema

$$\begin{cases} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x + \alpha\phi_t = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) + \delta\theta_x = 0, \\ \rho_3\theta_t + q_x + \delta\psi_{xt} = 0, \\ \tau q_t + \beta q + \theta_x = 0. \end{cases} \tag{1.24}$$

Ver [13, 23] para mais detalhes. Neste caso, o funcional de energia associado ao sistema (1.24) também é definido como em (1.21), ou seja,

$$\begin{aligned} E(t) \;=\;& \rho_1\int_0^l (\phi_t(t))^2dx + \rho_2\int_0^l (\psi_t(t))^2dx + b\int_0^l (\psi_x(t))^2 + \rho_3\int_0^l (\theta(t))^2 \\ & +\tau\int_0^l (q(t))^2dx + k\int_0^l (\phi_x(t) + \psi(t))^2dx, \end{aligned} \tag{1.25}$$

e procedendo de forma análoga como descrito na Observação 1.1, obtemos agora

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\alpha\int_0^l (\phi_t(t))^2dx - \beta\int_0^l (q(t))^2dx \leq 0, \quad t > 0, \tag{1.26}$$

Note que, assumindo $\alpha, \beta > 0$, temos novamente duas dissipações no sistema (1.24). Com efeito, de (1.26) vê-se que $\alpha\phi_t$ e βq constituem dissipações para este problema, uma friccional e outra térmica. Logo, podemos estudar a estabilidade de soluções do sistema (1.24).

Em [13] foi usado método de perturbação de energia para estabilidade exponencial. Neste trabalho usamos semigrupos a fim de obter o mesmo resultado porém, de forma mais simples, conforme [23].

1.5 Demais considerações

Para abordar tanto a existência e unicidade de solução para os problemas (1.11), (1.20) e (1.24), quanto a estabilidade dos mesmos, vamos aplicar a teoria geral de análise funcional e, em especial, a teoria de semigrupos de operadores lineares. Para isto e para tornar o texto mais autossuficiente possível, fizemos no Capítulo 2 uma lista dos principais resultados utilizados na resolução dos problemas, conforme as referências [2, 3, 5, 6, 7, 11, 12, 17, 19].

Além disso, ressaltamos que em todos os três problemas estudados (1.11), (1.20) e (1.24), a ideia é reescrever os mesmos em um problema abstrato na forma

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}U, \;\; t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{1.27}$$

onde $\mathcal{A}$ será um operador linear diferencial diferente em cada caso. Portanto, a existência e unidade de solução para os problemas supracitados, bem como o comportamento assintótico de soluções, serão feitos por meio da teoria espectral para o operador A em (1.27) em cada caso, onde cada problema será abordado separadamente conforme os Capítulos 3, 4 e 5. Para estabilidade de soluções via teoria de semigrupos lineares, ressaltamos ainda que as seguintes referências foram utilizadas [2, 12, 19].

2 PRELIMINARES

Vamos enunciar algumas definições e resultados importantes para os capítulos seguintes. No entanto, indicaremos algumas referências para que o leitor possa consultar caso julgue necessário.

2.1 ESPAÇOS DE HILBERT

Definição 2.1. *Um espaço normado X é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ com uma função de X em $\mathbb{K}$ chamada norma e denotada por $\|x\|_X$, $x \in X$ satisfazendo, $\|x\|_X \geq 0$, $\|x\| = 0$ é equivalente a $x = 0$, $\|\alpha x\|_X = |\alpha|\|x\|_X$, e $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$, para todo x e y em X e todo α em $\mathbb{K}$.*

Definição 2.2. *Seja X um espaço vetorial normado e $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ duas normas em X. Diz-se que as norma $\|.\|_1$ é equivalente a norma $\|.\|_2$ quando existem constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$ tais que,*

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_2, \forall x \in X.$$

Definição 2.3. *Uma sequência (x_n) de elementos de um espaço vetorial normado X é convergente para um elemento x de X, quando dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $\|x_n - x\|_X < 0$. Neste caso denotamos $x_n \to x$.*

Definição 2.4. *Dizemos que uma sequência (x_n) de um espaço vetorial normado X é de Cauchy, quando dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\|_X < \epsilon$ para todo $n, m > n_0$.*

Definição 2.5. *Um espaço vetorial normado X com norma $\|.\|_X$ é um espaço de Banach quando toda sequência de Cauchy com a norma $\|.\|_X$ também é convergente para algum elemento x de X com a norma $\|.\|_X$.*

Definição 2.6. *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre um corpo K. Uma aplicação T de um subconjunto de X denotado $D(T)$, em Y é chamada operador linear quando são válidas $T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$ para todo $x, y \in X$ e todo $\alpha \in \mathbb{K}$. O conjunto $D(T) \subset X$ é chamado domínio de T, o conjunto*

$$Im := \{y \in Y; T(x) = y, x \in D(T)\},$$

é chamado imagem de T, e o conjunto

$$Gr(T) := \{(x, y) \in X \times Y; x \in X \text{ e } T(x) = y\}$$

é chamado de gráfico de T. Note que $D(T)$, $Im(T)$ e $Gr(t)$ são subespaços vetoriais de X, Y e $X \times Y$, respectivamente. No caso em que $Y = \mathbb{K}$ chamamos T de funcional linear.

Definição 2.7. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $T : D(T) \subset X \to Y$ um operador linear, dizemos que:*

(i) T é limitado se existe um número $c > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_Y \leq c\|x\|_X,\ \forall x \in D(T)$$

(ii) T é contínuo em em $x_0 \in D(T)$ se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$x \in D(T),\ \|x - x_0\|_X < \delta\ \Rightarrow\ \|T(x) - T(x_0)\|_Y.$$

T é dito contínuo se for contínuo em todo $x_0 \in D(T)$.

(iii) T é compacto se para todo subconjunto limitado M de $D(T)$, a imagem $T(M)$ é relativamente compacta, isto é, o fechado $\overline{T(M)}$ é compacto.

Definição 2.8. *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. O conjunto de todos os operadores lineares limitados T de X em Y, tais que $D(T) = X$, denotado por $\mathcal{L}(X, Y)$ é um espaço vetorial normado com norma $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup\{\|T(x)\|_Y; \|x\|_X = 1\}$. Quando $X = Y$ denotamos $\mathcal{L}(X, X) = \mathcal{L}(X)$. Quando $Y = \mathbb{K}$, denota-se $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ por X'. O espaço X' é chamado de espaço dual de X, e para todo $f \in X'$ denota-se $f(x) = \langle f, x\rangle$ para todo x em X.*

Teorema 2.9. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados sobre um corpo $\mathbb{K}$ e T um operador linear de um subconjunto $D(T)$ de X em Y. Então*

(i) T é limitado se, e somente se T é contínuo.

(ii) Se T é contínuo em $x = 0$, então T é contínuo.

Demonstração. Ver [10], página 97, Teorema 2.7-9. □

Teorema 2.10. *Seja X um espaço de Banach e $T_1 \in \mathcal{L}(X)$ invertível com $T_1^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Se $T_2 \in \mathcal{L}(X)$ é tal que $\|T_2\|_{\mathcal{L}} \leq \|T_1^{-1}\|_{\mathcal{L}}$, então o $T_1 + T_2 \in \mathcal{L}(X)$ é invertível.*

Demonstração. Ver [19], página 89, Lema 2.12.1. □

Definição 2.11. *Sejam X e Y espaços de Banach com $Y \subset X$. Dizemos que Y está imerso continuamente em X quando a aplicação inclusão $i : Y \to X$, $i(x) = x$ para todo $x \in X$, é contínua em Y, isto é, existe $C > 0$ tal que $\|x\|_X \leq C\|x\|_Y$ para todo $x \in Y$. Denotamos a imersão contínua de Y em X por $Y \hookrightarrow X$. Dizemos que Y está imerso compactamente em X quando a aplicação inclusão $i : Y \hookrightarrow X$ é compacta em Y, isto é, $i(B_E)$, onde $B_E = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$, tem fecho compacto em Y. Denotamos a imersão compacta de Y em X por $Y \overset{c}{\hookrightarrow} X$.*

Definição 2.12. *Um espaço vetorial normado X é dito reflexivo quando,*

$$\begin{aligned} J : X &\to X'' \\ x &\mapsto J(x), \end{aligned}$$

definida por $J(x)(f) = \langle f, x\rangle$, para todo f em X e todo f em X', é sobrejetora. Onde $X'' := (X')'$ é chamado espaço bidual do espaço X.

Teorema 2.13. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Se Y é de Banach, então $\mathcal{L}(X,Y)$ com a norma $\|.\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ é de Banach. Em particular X' e X'' são espaços de Banach.*

Demonstração. Ver [10], página 118, Teorema 2.10-2. □

Definição 2.14. *Um espaço com produto interno é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e uma função de $X \times X$ em $\mathbb{K}$, chamada produto interno em X e denotada por $(x, y)_X$ tal que para todo par de vetores x e y de X se tenha, $(x+y, z)_X = (x, z)_X + (y, z)_X$, $(\alpha x, y)_X = \alpha(x, y)_X$, $(x, y)_X = \overline{(y, x)_X}$, $(x, x)_X \geq 0$, em que $\overline{(y, x)_X}$ denota o conjugado de $(y, x)_X$, e $(x, x)_x = 0$ é equivalente a $x = 0$.*

Proposição 2.15. *Seja X um espaço vetorial com produto interno $(.,.)_X$, temos*

1. $\|x\|_X = \sqrt{(x, x)_X}$,
2. $\|x + y\|_X^2 + \|x - y\|_X^2 = 2\left(\|x\|_X^2 + \|y\|_X^2\right)$,
3. $Re\left((x, y)_X\right) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|_X^2 - \|x - y\|_X^2\right)$, *onde* $Re\left((x, y)_X\right)$ *é a parte real do número* $(x, y)_X$,
4. $Im\left(x, y)_X\right) = \frac{1}{4}\left(\|x + iy\|_X^2 - \|x - iy\|_X^2\right)$, *onde* $Im\left((x, y)_X\right)$ *é a parte imaginária do número* $(x, y)_X$,
5. $|(x, y)_X| \leq \|x\|_X \|y\|_X$,
6. *o produto interno é uma função continua.*

Demonstração. Ver [10]. □

Teorema 2.16. *Todo espaço de Hilbert é reflexivo*

Demonstração. Ver [10], página 242, Teorema 4.6-6. □

Teorema 2.17. *(Lax-Milgran) Seja H um espaço de Hilbert real (complexo) e $a : H \times H \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ uma forma bilinear (sesquilinear) contínua e coerciva. Então para todo funcional linear (antilinear) limitado f de H, existe um único $x \in H$ tal que $a(x, \widetilde{x}) = \langle f, \widetilde{x}\rangle$, para todo $\widetilde{x} \in \mathcal{H}$.*

Demonstração. Para o caso real ver [3], página 140, Corolário 5.8 e para o caso complexo ver [16], página 529, Corolário 6.6.2. □

Definição 2.18. *Uma aplicação dualidade, é qualquer aplicação $j : X \to X'$ tal que para cada $x \in X$, tem-se $j(x) \in F_x$, onde*

$$F_x(x) = \left\{x^* \in X'; \langle x^*, x\rangle_{X',X} = \|x\|^2_{X'} = \|x^*\|^2_X\right\}.$$

Definição 2.19. *Dizemos que o operador linear $A : X \to X$ é dissipativo relativamente à aplicação dualidade j, se*

$$Re\langle j(x), Ax\rangle \leq 0 \tag{2.1}$$

para todo $x \in D(A)$

2.2 O ESPAÇO $L^p(\Omega)$

Nesta seção vamos definir um espaço normado com desigualdades que serão muito usadas neste trabalho.

Definição 2.20. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}$ um aberto e $0 < p < \infty$. Sejam $L^p(\Omega)$ o conjunto de todas as funções Lebesgue mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $|f|^p$ é integrável em Ω, ou seja*

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} | \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Diremos que duas funções $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ são equivalentes se $f = g$ quase sempre em Ω. Indicaremos por $L^p(\Omega)$ o conjunto das classes de equivalência em $\mathcal{L}^p(\Omega)$. Para $p = \infty$ definimos

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}|\ f \text{ é limitada quase sempre em } \Omega\}.$$

Se $f \in L^p(\Omega)$ então escrevemos

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

e para $f \in L^\infty(\Omega)$ escrevemos

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} ess|f(x)| := \inf\{C > 0; |f(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\}.$$

A integral que usamos para definir o espaço $L^p(\Omega)$ é a integral de Lebesgue definida em [9].

Definição 2.21. *Sejam p e p^* números naturais tais que $1 < p$. Dizemos que p e p^* são expoentes conjugados quando*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1.$$

Vamos adotar a convenção que se $p = 1$ então $p^* = \infty$ e se $p = \infty$ então $p^* = 1$.

Teorema 2.22 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam a e b números reais não negativos. Se p e p^* são expoentes conjugados, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p^*}}{p^*},$$

mais ainda, dado $\epsilon > 0$ temos

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon}.$$

Demonstração. A função g, definida por $g(x) = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{p^*} - x$ para $x > 0$, tem derivada positiva em $(1, \infty)$, e negativa em $(0, 1)$, e é igual a 0 quando $x = 1$. Também g é não negativa em $(0, \infty)$, isto é

$$x \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{p^*} \ \text{ se } \ x > 0. \tag{2.2}$$

Em particular,

$$x_0 \leq \frac{1}{p}x_0^p + \frac{1}{p^*} \ \text{ se } \ x_0 = \frac{a}{b^{p^*-1}}. \tag{2.3}$$

Assim, essa inequação é equivalente a desigualdade de Young, já que, como $p(q-1) = q$, esta inequação é obtida dividindo cada lado da equação de Young por b^{p^*}. □

Teorema 2.23 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p^*}(\Omega)$ com p e p^* expoentes conjugados com $1 \leq p \leq \infty$, então $fg \in L^1(\Omega)$, e*

$$\int_\Omega |fg| dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p^*}.$$

Demonstração. Ver [3], página 92, Teorema 4.6. □

Teorema 2.24 (Desigualdade de Minkowiski)**.** *Sejam $f, g \in L^p(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$, então*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Demonstração. Ver [3], página 93, Teorema 4.7. □

Teorema 2.25. *$L^p(\Omega)$ com a norma $\|.\|_p$ é um espaço de Banach para todo p tal que $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração. Ver [3], página 93, Teorema 4.8. □

Proposição 2.26. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $1 \leq p < \infty$, então $C_0(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.*

Demonstração. Ver em [3], página 97, Teorema 4.12. □

Corolário 2.27. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $1 \leq p < \infty$, então $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.*

Demonstração. Ver em [3], página 109, Corolário 4.23. □

2.3 O ESPAÇO DE SOBOLEV $W^{1,p}(I)$

Seja $I = (a,b)$ um intervalo com $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$.

Definição 2.28. *O espaço de Sobolev $W^{1,p}(I)$ é definido por*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I); \exists g \in L^p(I) \text{ com } \int_I u\phi' dx = -\int_I g\phi dx, \forall \phi \in C_0^1(I) \right\},$$

onde ϕ' é a derivada no sentido clássico de ϕ. No caso que $p = 2$ denotamos $W^{1,2}(I) = H^1(I)$. A função g da definição acima é única e é chamada a derivada fraca de u que será denotada por u'.

Observação 2.1. Os seguintes resultados serão necessários. Podem ser encontrados como comentários em [3], Seção 8.2.

(i) $W^{1,p}(I)$ é subespaço de $L^p(I)$.

(ii) Na definição de $W^{1,p}$ podemos usas as funções $\phi \in C_0^\infty(I)$ ao invés de $\phi \in C_0^1(I)$.

(iii) Se $u \in C^1(I) \cap L^p(I)$ e a derivada clássica de u está em $L^p(I)$, então a derivadas fraca e clássica coincidem.

(iv) Se I é limitado. então $C^1(\overline{I}) \subset W^{1,p}(I)$ e para qualquer que seja I, $C_0^1(I) \subset W^{1,p}(I)$.

(v) $W^{1,p}(I)$ é um espaço vetorial de Banach com as normas

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_p + \|u'\|_p, \quad \forall u \in W^{1,p}(I), \quad 1 \leq p \leq \infty, \tag{2.4}$$

$$\|u\|_{1,p} = \left(\|u\|_p^p + \|u'\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall u \in W^{1,p}(I), \quad 1 < p < \infty, \tag{2.5}$$

que são equivalentes entre si, sendo a primeira denominada norma usual.

(vi) O espaço $H^1(I)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u,v)_{H^1} = \int_I u\overline{v} dx + \int_I u'\overline{v} dx, \quad \forall u, v \in H^1(I).$$

.

Teorema 2.29. *Seja $u \in W^{1,p}(I)$, com $1 \leq p \leq \infty$. Então, existe uma função $\tilde{u} \in C(\overline{I})$ tal que $u = \tilde{u}$ quase sempre em I e $\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \displaystyle\int_y^x u'(t)dt,$ para quaisquer que sejam $x, y \in I$.*

Demonstração. Ver [3], página 204, Teorema 8.2. $\square$

Teorema 2.30 (Imersões de Sobolev)**.** *Temos que*

(i) $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$*, para todo* $1 \leq p \leq \infty$*, com inclusão contínua, ou seja, existe uma constante* $c = c(|I|)$*,* $|I| \leq \infty$ *tal que* $\|u\|_\infty \leq c\|u\|_{W^{1,p}(I)}$ *para todo* $u \in W^{1,p}(I)$*, em que* $|I|$ *é a medida de Lebesgue de* I*.*

(ii) Se I *é limitado então* $W^{1,p}(I) \subset C(\overline{I})$ *para todo* $1 < p \leq \infty$ *com inclusão compacta.*

(iii) Se I *é limitado então* $W^{1,p}(I) \subset L^{p^*}(I)$ *para todo* $1 \leq p^* < \infty$*, onde* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^*} = 1$*, com inclusão compacta.*

Demonstração. Ver [3], página 212, Teorema 8.8. □

2.3.1 O espaço $W_0^{1,p}(I)$

Definição 2.31. *Seja* $1 \leq p < \infty$*. O espaço* $W_0^{1,p}(I)$ *é o fecho do conjunto* $C_0^1(I)$ *em* $W^{1,p}(I)$*, isto é,*

$$W_0^{1,p}(I) = \overline{C_0^1(I)}^{W^{1,p}(I)}. \tag{2.6}$$

No caso $p = 2$ *denotamos*

$$H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I). \tag{2.7}$$

Observação 2.2. Os seguintes resultados serão necessários. Podem ser encontrados em [3], Seção 8.2.

(i) $W_0^{1,p}(I)$ é subespaço de $W^{1,p}(I)$ com produto interno, no caso $p = 2$, e norma induzidos,

(ii) Se $1 < p \leq \infty$ então $W_0^{1,p}(I)$ é um espaço de Banach.

(iii) $H_0^1(I)$ é um espaço de Hilbert com produto interno e norma induzidos de $H^1(I)$.

(iv) $C_0^\infty(I)$ é denso em $W_0^{1,p}(I)$, para qualquer $I \subset \mathbb{R}$, isto é $\overline{C_0^\infty(I)}^{W_0^{1,p}(I)} = W_0^{1,p}(I)$.

Lema 2.32. *Seja* $I \subset \mathbb{R}$*. Os espaços* $W_0^{1,p}(I)$ *são densos em* $L^p(I)$*, para* $1 \leq p < \infty$*.*

Demonstração. Do Corolário 2.27 temos $\overline{C_0^\infty(I)}^{L^p(I)} = L^p(I)$, e sabe-se também que $C_0^\infty(I) \subset W^{1,p}(I) \subset L^p(I)$. Logo $L^p(I) \subset \overline{W^{1,p}(I)}^{L^p(I)} \subset \overline{C_0^\infty(I)}^{L^p(I)} \subset L^p(I)$. □

O próximo resultado nos dá uma caracterização para as funções de $W_0^{1,p}(I)$ que será muito usada neste trabalho, e que pode ser encontrada em [3].

Teorema 2.33. *Seja* $u \in W^{1,p}(I)$*. Então* $u \in W_0^{1,p}(I)$ *se e somente se* $u = 0$ *em* ∂I*, onde* ∂I *é a fronteira do intervalo* I*.*

Demonstração. Ver [3], página 217, Teorema 8.12. □

Teorema 2.34 (Desigualdade de Poincaré). *Seja I um intervalo limitado. Então existe $C > 0$, tal que,*

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq C\|u'\|_{L^p(I)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I). \tag{2.8}$$

Isso quer dizer que $\|u\|_{W_0^{1,p}(I)} = \|u'\|_{L^p(I)}$ define uma norma equivalente em $W_0^{1,p}(I)$. Além disso, é possível mostrar que $C = |I|$.

Demonstração. Ver [3], página 218, Teorema 8.13. □

2.3.2 Os espaços $L_*^p(I)$ e $W_*^{1,p}(I)$

Definição 2.35. *Denota-se por $L_*^p(I)$ e $W_*^{1,p}(I)$, respectivamente, os espaços ditos de média nula, em que,*

$$L_*^p(I) = \left\{ u \in L^p(I); \frac{1}{|I|}\int_I u(x)dx = 0 \right\}$$

e

$$W_*^{1,p}(I) = \left\{ u \in W^{1,p}(I); \frac{1}{|I|}\int_I u(x)dx = 0 \right\},$$

no caso em que $p = 2$ denotamos $W_*^{1,2}(I) = H_*^1(0,l)$.

Observação 2.3. Os espaços $W_*^{1,p}(I)$ e $H_*^1(I)$ são subespaços de $W^{1,p}(I)$ e $H^1(I)$, respectivamente, com norma e produto interno induzidos de $W^{1,p}(I)$ e $H^1(I)$.

Teorema 2.36. *(i) Se $1 < p \leq \infty$, então $W_*^{1,p}(I)$ são espaços de Banach.*

(ii) Se $1 \leq p < \infty$, então $W_*^{1,p}(I)$ são espaços separáveis.

(iii) Se $1 < p < \infty$, então $W_*^{1,p}(I)$ são espaços reflexivos.

(iv) $H_*^1(I)$ é um espaço de Hilbert com produto interno e norma induzidos de $H^1(I)$.

Demonstração. As demonstrações dos itens (i), (ii), (iii) e (iv) são consequências da Observação 2.3 e resultados de Análise Funcional que podem ser encontrados em [3] e [4]. □

Lema 2.37. *Seja $I \subset \mathbb{R}$. Os espaços $W_*^{1,p}(I)$ são densos em $L_*^p(I)$, para $1 \leq p < \infty$, isto é, o fecho de $W_*^{1,p}(I)$ em $L_*^p(I)$ é $L_*^p(I)$, que denotamos $\overline{W_*^{1,p}(I)}^{L_*^p(I)} = L_*^p(I)$.*

Demonstração. Considere o caso particular em que $p = 2$, ou seja,

$$\overline{H_*^1(I)}^{L_*^2} = L_*^2(I).$$

Observe que $\overline{H^1_*(I)}^{L^2_*(I)} \subset L^2_*(I)$. Falta mostrar que $L^2_*(I) \subset \overline{H^1_*(I)}^{L^2_*(I)}$, então seja $f \in L^2_*(I)$, será mostrado que existe $f_n \in H^1_*(I)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0, \text{ com } f \in L^2_*(I).$$

Sabe-se ainda que $\overline{H^1(I)}^{L^2(I)} = L^2(I)$. Logo, existe uma sequência $g_n \in H^1(I)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n - f\| = 0.$$

Defina $f_n := g_n - \frac{1}{|I|}\int_I g_n(x)dx$, uma vez que

$$\int_I f_n(x)dx = 0,$$

então $f_n \in H^1_*(I)$, e ainda,

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_{L^2(I)} &= \left\| g_n - \frac{1}{|I|}\int_I g_n(x)dx - f \right\|_{L^2(I)} \\
&= \left\| g_n - \frac{1}{|I|}\int_I g_n(x)dx - f + \int_I f(x)dx \right\|_{L^2(I)} \\
&\leq \|g_n - f\|_{L^2(I)} + \left\| \frac{1}{|I|}\int_I (g_n - f)(x) \right\|_{L^2(I)} \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

deste modo, $f \in \overline{H^1_*(I)}^{L^2_*(I)}$, concluindo que $\overline{H^1_*(I)}^{L^2_*(I)} = L^2_*(I)$.
Para $p \neq 2$, a demonstração segue análoga. □

Teorema 2.38 (Desigualdade de Poincaré para espaços de média nula)**.** *Seja I um intervalo limitado. Então existe $C > 0$, tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq C\|u'\|_{L^p(I)}, \quad \forall u \in W^{1,p}_*(I). \tag{2.9}$$

Isso quer dizer que $\|u\|_{W^{1,p}_*(I)} = \|u'\|_{L^p(I)}$ define uma norma equivalente em $W^{1,p}_*(I)$. Além disso, é possível mostrar que $C = |I|$.

Demonstração. Considere $I = (a,b) = (0,L)$ limitado, x e $y \in (0,L)$ e $u \in W^{1,p}_*(I)$. Pelo Teorema 2.29, sabe-se que existe $\widetilde{u} \in C([0,L])$ tal que $\widetilde{u} = u\ \ q.s.$ em $(0,L)$ e

$$\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |u(x)-u(y)| &= \left|\int_y^x u'(t)dt\right| \leq \int_y^x |u'(t)|dt \\ \Rightarrow \quad |u(x)-u(y)| &\leq \int_y^x |u'(t)|dt. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Integrando ambos os membros de (2.10), obtém-se

$$\begin{aligned} &\int_I |u(x)-u(y)|dy \leq \int_I \int_y^x |u'(t)|dtdy \\ \Rightarrow &\left|\int_I u(x)-u(y)dy\right| \leq \int_I \int_y^x |u'(t)|dtdy \\ \Rightarrow &\left|\int_I u(x)dy - \int_I u(y)dy\right| \leq \int_I \int_y^x |u'(t)|dtdy. \end{aligned}$$

Por hipótese, $\displaystyle\int_I u(y)dy = 0$, e tem-se também que

$$\int_y^x |u'(t)|dt \leq \int_I |u'(t)|dt.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left|\int_I u(x)dy\right| &\leq \int_I \int_I |u'(t)|dtdy \\ \Rightarrow |u(x)\int_I dy| &\leq \int_I |u'(t)|dt \int_I dy, \end{aligned}$$

pois $\displaystyle\int_I |u'(t)|dt$ e $u(x)$ são constantes em relação a y. Deste modo,

$$|u(x)|I|| \leq \int_I |u'(t)|dt|I|.$$

Como $|I| > 0$, então

$$|u(x)| \leq \int_I |u'(t)|dt. \tag{2.11}$$

Elevando ambos os membros de (2.11) a p, obtém-se

$$|u(x)|^p \leq \left(\int_I |u'(t)1|dt\right)^p. \tag{2.12}$$

Aplicando Hölder no lado direito de (2.12), tem-se

$$|u(x)|^p \leq \left(\left(\int_I |u'(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \cdot \left(\left(\int_I |1|^{p^*} dt\right)^{\frac{1}{p^*}}\right)^p,$$

com $\frac{1}{p}+\frac{1}{p^*}=1$. Assim,

$$|u(x)|^p \leq \|u'\|_{L^p}^p |I|^{\frac{p}{p^*}}. \tag{2.13}$$

Integrando ambos os membros de (2.13), obtém-se

$$\begin{aligned}
&\int_I |u(x)|^p dx \leq \int_I \|u'\|_{L^p}^p |I|^{\frac{p}{p^*}} dx \\
\Rightarrow\quad &\int_I |u(x)|^p dx \leq \|u'\|_{L^p}^p |I|^{\frac{p}{p^*}} \int_I dx \\
\Rightarrow\quad &\int_I |u(x)|^p dx \leq \|u'\|_{L^p}^p |I|^{\frac{p}{p^*}+1}. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Elevando ambos os membros de (2.14) a $\frac{1}{p}$, tem-se

$$\left(\int_I |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\|u'\|_{L^p}^p |I|^{\frac{p}{p^*}+1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Finalmente, recordando que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, conclui-se

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{L^p(I)} \leq \|u'\|_{L^p(I)} |I|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p^*}} \\
\Rightarrow &\|u\|_{L^p(I)} \leq \|u'\|_{L^p(I)} |I| \\
\Rightarrow &\|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)} \leq \|u'\|_{L^p(I)} |I| + \|u'\|_{L^p(I)} \\
\Rightarrow &\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq \|u'\|_{L^p(I)} (1+|I|) \\
\Rightarrow &\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq C\|u'\|_{L^p(I)}.
\end{aligned}$$

Portanto, tem-se que, para todo $u \in W_*^{1,p}(I)$, vale $\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq C\|u'\|_{L^p(I)}$. □

2.3.3 Os espaços $W^{m,p}(I)$ e $W_0^{m,p}(I)$

Definição 2.39. *Dado $m \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$ e $I \subset \mathbb{R}$, os espaços de Sobolev $W^{m,p}(I)$ são definidos como*

$$W^{m,p}(I) = \left\{u \in L^p(I); \exists u', u'', ..., u^{(m)} \in L^p(I)\right\},$$

onde as funções $u', u'', ..., u^{(m)}$ são chamadas de derivada fraca de ordem $1, 2, ..., m$ respectivamente. Além disso, se $u \in W^{m,p}(I)$

$$\int_I u D^j \phi dx = (-1)^j \int_I u^{(j)} \phi dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(I) \quad 1 \leq j \leq m \tag{2.15}$$

onde D^j representa a derivada clássica de ordem j.

Observação 2.4. Os seguintes resultados serão necessários. Podem ser encontrados em [3], Seção 8.2.

(i) $W^{m,p}(I)$ é um espaço vetorial de Banach normado com a norma,

$$\|u\|_{W^{m,p}(I)} = \|u\|_p + \sum_{j=1}^{m} \|D^j u\|_p,$$

(ii) quando $p = 2$, denota-se $W^{m,p}(I) = H^m(I)$ é um espaço de Hilbert com produto interno e norma dados por

$$(u, v)_{H^m(I)} = (u, v)_2 + \sum_{j=1}^{m} (D^j u, D^j v)_2$$

e

$$\|u\|_{H^m(I)} = \left(\|u\|_2^2 + \sum_{j=1}^{m} \|D^j u\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

(iii) $W^{m,p}(I) \subset W^{1,p}(I)$, $\forall m \geq 2$, com inclusão contínua,

(iv) $W^{m,p}(I)$ são espaços de Banach para $1 \leq p \leq \infty$,

(v) $H^m(I)$ é um espaço de Hilbert,

(vi) $C_0^\infty(\mathbb{R})$ é denso em $W^{m,p}(\mathbb{R})$.

Lema 2.40. *Se $I \subset \mathbb{R}$ então $H_0^1(0, l) = \overline{H_0^1(0, l) \cap H^2(0, l)}^{H_0^1(0,l)}$.*

Demonstração. A prova do Lema decorre das seguintes afirmações

(i) $C_0^\infty \subset H^2$.

(ii) $H_0^1(0, l) = \overline{C_0^\infty}^{H_0^1(0,l)}$ ver observação 2.2 item (iv).

Assim, temos

$$\begin{aligned} H_0^1(0, l) &= \overline{C_0^\infty(0, l)}^{H_0^1(0,l)} \\ &= \overline{C_0^\infty(0, l) \cap H^2(0, l)}^{H_0^1(0,l)} \\ &\subset \overline{H_0^1(0, l) \cap H^2(0, l)}^{H_0^1(0,l)} \\ &\subset \overline{H_0^1(0, l)}^{H_0^1(0,l)} \\ &\subset H_0^1(0, l) \end{aligned}$$

provando o lema. □

Teorema 2.41 (Imersões de Sobolev)**.** *Temos que*

(i) $W^{m,p}(I) \subset L^\infty(I)$*, para todo* $1 \leq p \leq \infty$ *e todo* $1 \leq m$*, com inclusão contínua, ou seja, existe uma constante* $c = c(|I|)$*,* $|I| \leq \infty$ *tal que* $\|u\|_\infty \leq c\|u\|_{W^{m,p}(I)}$ *para todo* $u \in W^{m,p}(I)$*.*

(ii) Se I *é limitado então* $W^{m,p}(I) \subset C^{m-1}(\overline{I})$ *para todo* $1 < p \leq \infty$ *e todo* $1 \leq m$ *com inclusão compacta, e inclusão contínua para todo* $1 \leq p \leq \infty$ *e todo* $1 \leq m$*.*

(iii) Se I *é limitado então* $W^{m,p}(I) \subset L^{p^*}(I)$ *para todo* $1 \leq p^* < \infty$ *e todo* $1 \leq m$*, onde* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$*, com inclusão compacta.*

Demonstração. Consequência do Teorema 2.30. □

2.4 Semigrupos de operadores lineares limitados

Definição 2.42. *Seja* X *um espaço de Banach. Uma família de operadores lineares limitados* $S(t)$ *com parâmetro* $0 \leq t < \infty$ *é um semigrupo de operadores lineares limitados em* X *se*

- $S(0) = Id$*,*
- $S(t+s) = S(t)S(s)$ *para todo* $t, s \geq 0$*.*

Um semigrupo de operadores lineares limitados $S(t)$*, é uniformemente contínuo se*

$$\lim_{t \to 0} \|S(t) - Id\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

Chamamos um semigrupo de operadores lineares limitados uniformemente contínuo de C_0*-semigrupo. O operador linear* A *definido por*

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t}, \forall x \in D(A),$$

é o gerador infinitesimal do C_0*-semigrupo* $S(t)$*,* $D(A)$ *é o domínio de* A*. As vezes vamos denotar o semigrupo* $S(t)$ *por* e^{At}*.*

Seja X um espaço de Banach. Podemos ver que o semigrupo $S(t), 0 \leq t < \infty$, de operadores lineares limitados em X é um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados se

$$\lim_{t \to s} \|S(t) - S(s)\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

Definição 2.43. *Seja* A *um operador linear em um espaço* X*. O conjunto formado pelos* $\lambda \in \mathbb{C}$ *para os quais o operador linear* $(\lambda I_d - A)$ *é inversível, seu inverso é limitado, é dito conjunto resolvente de* A *e denotado por* $\rho(A)$*. Se* $\lambda \in \rho(A)$*, o operador* $(\lambda I - A)^{-1}$ *representado por* $R(\lambda; A)$*, é dito resolvente de* A*. O conjunto* $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$ *é chamado espectro de* A*.*

Os dois próximos resultados que serão utilizados na prova da estabilização exponencial podem ser encontrados em [6]. Mais especificamente o Corolário a seguir nos diz que sob certas condições o conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A)$ é formado apenas por autovetores do operador A.

Proposição 2.44. *Seja $(A, D(A))$ um operador linear em um espaço X tal que $\rho(A) \neq \varnothing$ e seja $X_1 := (D(A), \|.\|_A)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes*

1. *o operador A possui resolvente compacto,*

2. *a aplicação canônica $X_1 \hookrightarrow X$ é compacta.*

Demonstração. Ver [6], página 107, Proposição 5.8. □

Corolário 2.45. *Se o operador A tem resolvente compacto, então $\sigma(A)$ é formado apenas por autovalores de A.*

Demonstração. Ver [6], página 162, Corolário 1.15. □

2.5 RESULTADOS DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO

Também precisamos do importante Teorema de Lumer-Philips. A demonstração pode ser encontrada em [17].

Teorema 2.46 (Hille-Yosida para contrações). *Um operador linear A é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $S(t), t \geq 0$ se e somente se,*

1. *A é fechado e densamente definido, isto é, $\overline{D(A)} = X$,*

2. *o conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém $\mathbb{R}^+$ e para todo $\lambda > 0$*

$$\|R(\lambda : A)\|_{\mathcal{L}(X)} \geq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração. Ver [17], página 8, Teorema 3.1. □

Teorema 2.47 (Lumer-Phillips para espaços de Hilbert). *Se A é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em um espaço de Hilbert H com produto interno $(.,.)_H$ então*

1. *A é dissipativo, isto é $Re(Ax, x)_H \leq 0$, $\forall x \in D(A)$,*

2. *$Im(\lambda I_H - A) = H$, para todo $\lambda > 0$.*

   Reciprocamente, se

3. *$D(A)$ é denso em H,*

4. *A é dissipativo relativamente a alguma aplicação dualidade,*

5. *$Im(\lambda_0 I_H - A) = H$, para algum $\lambda_0 > 0$,*

    então A é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações.

Demonstração. Ver [17], página 14, Teorema 4.3. □

Teorema 2.48. *Seja A um operador linear com domínio $D(A)$ denso em um espaço de Hilbert H. Se A é dissipativo e $0 \in \rho(A)$, então A é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em H.*

Demonstração. Ver [12], página 3, Teorema 1.2.4. □

Teorema 2.49. *Seja H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear dissipativo. Se $Im(\lambda_0 I_H - A) = H$ para algum $\lambda_0 > 0$, então $Im(\lambda I_d - A) = H$ para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração. Ver [17], página 15, Teorema 4.5. □

Teorema 2.50. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador dissipativo tal que $Im(I - A) = X$. Se X é reflexivo, então $\overline{D(A)} = X$.*

Demonstração. Ver [17], página 16, Teorema 4.6. □

Agora temos condições de considerar o resultado de existência e unicidade de soluções para problemas de valor iniciais abstratos da forma (1.27). Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} U_t = AU, t > 0, \\ U_0 = U(0), \end{cases}$$

onde A é um operador linear com domínio $D(A) \subset X$, sendo X um espaço de Banach(ou Hilbert) e $u : [0, \infty) \to X$.

Definição 2.51. *Diz-se que $U : [0, \infty) \to X$ é uma solução para o problema* (1.27) *se $U(t)$ é contínua para todo $t \in (0, \infty)$, $U(t) \in D(A)$ para todo $t \in (0, \infty)$, $U(t)$ é continuamente diferenciável e satisfaz* (1.27) *quase sempre em $[0, \infty)$. No caso em que $U_0 \in X$, a função $U \in C([0, \infty), X)$ dada por $U(t) = S(t)U_0$, $t \geq 0$, é chamada de solução generalizada de* (1.27).

O próximo Teorema é o principal resultado que usaremos para encontrar as soluções regular e fraca do problema (1.27).

Teorema 2.52. *Considere o problema de Cauchy abstrato* (1.27). *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $S(t)$, $t \geq 0$ em um espaço de Banach X, então para cada $U_0 \in D(A)$, existe uma única função na classe*

$$U \in C\left([0, \infty); D(A)\right) \cap C^1\left([0, \infty); X\right),$$

que é a solução clássica de (1.27)*, dada por* $U(t) = S(t)U_0$*. Além disso, se* $S(t)$*,* $t \geq 0$ *for um* C_0*-semigrupo de contrações, tem-se que*

$$\|u(t)\|_X \leq \|u_0\|_X \quad e \quad \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_X \leq \|Au_0\|_X.$$

Demonstração. Ver [3], página 185, Teorema 7.4. □

2.6 Resultados de estabilidade exponencial

O resultados de estabilidade exponencial são obtidos de [12] e [19].

Definição 2.53. *O semigrupo* e^{At}*,* $0 \leq t$*, é dito exponencialmente estável se existem constantes positivas* α *e* $M > 1$ *tais que*

$$\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.16}$$

Teorema 2.54. *Um semigrupo de contrações* $\left\{e^{At}\right\}_{t\geq 0}$ *em um espaço de Hilbert é exponencialmente estável se, e somente se ,*

(i) *o conjunto resolvente de* A*, denotado por* $\rho(A)$*, contém o eixo imaginário,*

(ii) $\limsup\limits_{|\lambda|\to\infty} \|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty.$

Demonstração. Ver [19], página 122, Teorema 3.6.5. □

2.7 Resultados de estabilidade polinomial

E para concluir este capítulo, segue o resultado de estabilidade polinomial, que pode ser verificado em [2].

Definição 2.55. *Sejam* $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ *funções. Escrevemos*

1. $f = O(g)$ *com* $x \to x_0$ *se existir uma constante* C *tal que* $|f(x)| \leq C|g(x)|$ *para todo* x *suficientemente perto de* x_0*,*
2. $f = o(g)$ *com* $x \to x_0$ *se* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$

Observação 2.5. As expressões "$O(g)$" e "$o(g)$" não são por si só definidas. Deve sempre haver um limite acompanhando, por exemplo "$x \to x_0$", apesar desse limite estar usualmente implícito.

Teorema 2.56 (Borichev-Tomilov)**.** *Seja* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0*-semigrupo limitado em um espaço de Hilbert* H *com gerador* A *tal que* $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$*. Então, para um* $\alpha > 0$ *fixado, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\|R(i\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} = O(|s|^{\alpha})$, $\lambda \to \infty$,

(ii) $\|S(t)(-A)^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(X)} = O(t^{-1})$, $t \to \infty$,

(iii) $\|S(t)(-A)^{-\alpha}x\|_{X} = o(t^{-1})$, $t \to \infty$, $x \in H$,

(iv) $\|S(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = O(t^{-1/\alpha})$, $t \to \infty$,

(v) $\|S(t)A^{-1}x\|_{X} = o(t^{-1/\alpha})$, $t \to \infty$, $x \in H$.

Demonstração. Ver [2], Teorema 2.4. $\square$

3 SISTEMA DE TIMOSHENKO COM DUAS DISSIPAÇÕES FRICCIONAIS

3.1 BREVE DEDUÇÃO DO MODELO

Para título de completude, vamos apresentar novamente as considerações iniciais sobre a dedução do modelo de vigas de Timoshenko conforme segue.

Consideremos as equações de balanço que descrevem a vibração transversal de uma viga de Timoshenko de comprimento $l > 0$:

$$\rho A \phi_{tt} = S_x, \tag{3.1}$$
$$\rho I \psi_{tt} = M_x - S, \tag{3.2}$$

onde $\phi = \phi(x,t)$ é o deslocamento transversal e $\psi = \psi(x,t)$ é o ângulo de rotação de uma seção transversal em relação os eixos coordenados, $t \geq 0$ denota o tempo, $0 \leq x \leq l$ é a variável espacial. Além disso ρ é a densidade de massa, M é o momento fletor e S é a força de cisalhamento, A é área de uma seção transversal e I é o momento de inércia de uma seção transversal. Conforme [21], as leis constitutivas para a tensão-deformação do comportamento elástico da viga são dadas por

$$M = EI\phi_x, \tag{3.3}$$
$$S = k'GA(\phi_x + \psi), \tag{3.4}$$

onde E e G representam os módulos de elasticidade de Young e de cisalhamento, respectivamente, k' é o coeficiente de cisalhamento. Substituindo (3.3) e (3.4) em (3.1) e (3.2) e fazendo $\rho_1 = \rho A$, $k = k'GA$, $\rho_2 = \rho I$ e $b = EI$, obtemos

$$\rho_1 \phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x = 0, \tag{3.5}$$
$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) = 0. \tag{3.6}$$

Para mais detalhes físicos sobre (3.5)-(3.6) veja [21]. Além disso, de acordo com [1, 15, 18] podemos considerar mecanismos dissipativos friccionais atuando no sistema (3.5)-(3.6), os quais representam o atrito na vibração vertical $\alpha\phi_t$ e no ângulo de rotação $\beta\psi_t$ com $\alpha, \beta \geq 0$ constantes de dissipação. Neste caso, chegamos ao seguinte sistema de Timoshenko com duas dissipações friccionais (fracas)

$$\rho_1 \phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x + \alpha\phi_t = 0 \quad \text{em } (0,l) \times (0,\infty), \tag{3.7}$$
$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) + \beta\psi_t = 0 \quad \text{em } (0,l) \times (0,\infty), \tag{3.8}$$

com condições iniciais

$$\begin{aligned}&\phi(x,0)=\phi_0(x),\quad \phi_t(x,0)=\phi_1(x),\quad \psi(x,0)=\psi_0(x),\quad \psi_t(x,0)=\psi_1(x),\\&x\in(0,l),\end{aligned}\tag{3.9}$$

e de fronteira

$$\phi(0,t)=\phi(l,t)=0,\quad \psi(0,t)=\psi(l,t)=0,\quad t\geq 0.\tag{3.10}$$

No que segue estudaremos a existência e unicidade de solução e a estabilidade do sistema (3.7)-(3.10).

3.2 Existência e unicidade

Fazendo $\phi_t=\Phi$ e $\psi_t=\Psi$, temos

$$U=(\phi,\Phi,\psi,\Psi)^T,\ \ U_t=(\Phi,\Phi_t,\Psi,\Psi_t)^T,\ \ U(0)=(\phi_0,\phi_1,\psi_0,\psi_1)^T.$$

Para obtermos o problema de Cauchy abstrato na forma

$$\begin{cases}U_t=\mathcal{A}U,\ \ t>0,\\U(0)=U_0,\end{cases}\tag{3.11}$$

equivalente ao sistema (3.7)-(3.10), definimos o espaço de fase

$$\mathcal{H}=H_0^1(0,l)\times L^2(0,l)\times H_0^1(0,l)\times L^2(0,l),\tag{3.12}$$

que é um espaço de Hilbert, com produto interno $(.,.)_{\mathcal{H}}:\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ e norma $\|.\|_{\mathcal{H}}:\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ dados,respectivamente, por

$$(U,\widehat{U})_{\mathcal{H}}\ \ =\ \ \rho_1(\Phi,\widehat{\Phi})_2+\rho_2(\Psi,\widehat{\Psi})_2+k(\phi_x+\psi,\widehat{\phi}_x+\widehat{\psi})_2+b(\psi_x,\widehat{\psi}_x)_2,\tag{3.13}$$

e

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}}\ \ =\ \ \rho_1\|\Phi\|_2^2+\rho_2\|\Psi\|_2^2+k\|\phi_x+\psi\|_2^2+b\|\psi_x\|_2^2,\tag{3.14}$$

para quaisquer $U=(\phi,\Phi,\psi,\Psi)^T,\widehat{U}=(\widehat{\phi},\widehat{\Phi},\widehat{\psi},\widehat{\Psi})^T\in\mathcal{H}$. Com as notações acima, note que podemos escrever (3.7)-(3.8) como

$$U_t\ \ =\ \ \begin{bmatrix}\Phi\\ \frac{k}{\rho_1}(\phi_x+\psi)_x-\frac{\alpha}{\rho_1}\Phi\\ \Psi\\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}-\frac{k}{\rho_2}(\phi_x+\psi)-\frac{\beta}{\rho_2}\Psi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & I_d & 0 & 0\\ \frac{k}{\rho_1}\partial_{xx} & -\frac{\alpha}{\rho_1}I & \frac{k}{\rho_1}\partial_x & 0\\ 0 & 0 & 0 & I\\ -\frac{k}{\rho_2}\partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2}\partial_{xx}-\frac{k}{\rho_2}I & -\frac{\beta}{\rho_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi\\ \Phi\\ \psi\\ \Psi\end{bmatrix},$$

com $U(0) = U_0 = (\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1)^T$, onde obtemos o operador linear diferencial

$$\mathcal{A} := \begin{bmatrix} 0 & I_d & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1}\partial_{xx} & -\frac{\alpha}{\rho_1}I & \frac{k}{\rho_1}\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{k}{\rho_2}\partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2}\partial_{xx} - \frac{k}{\rho_2}I & -\frac{\beta}{\rho_2} \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

Assim, consideramos (3.11) com $\mathcal{A}$ dado em (3.15). Resta ainda determinarmos o domínio $D(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$. Pela definição formal de semigrupos lineares, temos

$$D(\mathcal{A}) = \{U \in \mathcal{H}; \mathcal{A}U \in \mathcal{H}\}.$$

Assim, dado $U = (\phi, \Phi, \psi, \Psi,) \in \mathcal{H}$ com $\mathcal{A}U \in \mathcal{H}$, teremos que

$$\Phi \in H_0^1(0,l), \frac{k}{\rho_1}(\phi_x + \psi)_x - \frac{\alpha}{\rho_1}\Phi \in L^2(0,l),$$
$$\Psi \in H_0^1(0,l), \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\phi_x + \psi) - \frac{\beta}{\rho_2}\Psi \in L^2(0,l),$$

de onde concluímos que

$$\Phi, \Psi \in H_0^1(0,l) \quad \text{e} \quad \phi, \psi \in H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l).$$

Logo, podemos definir

$$D(\mathcal{A}) = \left(H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)\right) \times H_0^1(0,l) \times \left(H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)\right) \times H_0^1(0,l). \tag{3.16}$$

Teorema 3.1 (Existência e unicidade)**.** *Suponhamos que $\rho_1, \rho_2, b, k > 0$ e $\alpha, \beta \geq 0$ e considere o operador linear $\mathcal{A}$ definido em* (3.15)*. Se $U_0 \in D(\mathcal{A})$, onde $D(\mathcal{A})$ é definido em* (3.16)*, então o problema* (3.11) *possui uma única solução na classe*

$$U \in C\left([0,\infty), D(\mathcal{A})\right) \cap C^1\left([0,\infty), \mathcal{H}\right). \tag{3.17}$$

Em outras palavras, se $\phi_0, \psi_0 \in H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l)$ e $\phi_1, \psi_1 \in H_0^1(0,l)$, então o sistema (3.7)-(3.10) *possui uma única solução na classe*

$$\phi, \psi \in C\left([0,\infty), H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l)\right) \cap C^1\left([0,\infty), H_0^1(0,l)\right) \cap C^2\left([0,\infty), L^2(0,l)\right). \tag{3.18}$$

Demonstração. Conforme o Teorema 2.52 devemos mostrar que o operador $\mathcal{A}$ definido em (3.15) é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em $\mathcal{H}$. Para isto, vamos aplicar o Teorema 2.47 e mostrar que:

(i) $D(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{H}$. Isto decorre do Lema 2.40 e do Lema 2.32.

(ii) $\mathcal{A}$ é dissipativo em $\mathcal{H}$. De fato, dado $U=(\phi,\Phi,\psi,\Psi)^T\in D(\mathcal{A})$, temos

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{A}U,U)_{\mathcal{H}} \\
= & \left(\left(\Phi,\frac{k}{\rho_1}(\phi_x+\psi)_x-\frac{\alpha}{\rho_2}\Phi,\Psi,\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}-\frac{k}{\rho_2}(\phi_x+\psi)-\frac{\beta}{\rho_2}\Psi\right),(\phi,\Phi,\psi,\Psi)\right)_{\mathcal{H}} \\
= & \int_0^l\left(k(\phi_x+\psi)_x-\alpha\Phi\right)\overline{\Phi}dx+\int_0^l\left(b\psi_{xx}-k(\phi_x+\psi)-\beta\Psi\right)\overline{\Psi}dx \\
& +b\int_0^l\Psi_x\overline{\psi_x}dx+k\int_0^l(\Phi_x+\Psi)\overline{(\phi_x+\psi)}dx \\
= & k\int_0^l(\phi_x+\psi)_x\overline{\Phi}dx-\alpha\int_0^l\Phi\overline{\Phi}dx+b\int_0^l\psi_{xx}\overline{\Psi}dx-k\int_0^l(\phi_x+\psi)\overline{\Psi}dx \\
& -\beta\int_0^l\Psi\overline{\Psi}dx+b\int_0^l\Psi_x\overline{\psi_x}dx+k\int_0^l(\Phi_x+\Psi)\overline{(\phi_x+\psi)}dx.
\end{aligned}$$

Usando integração por partes, as condições de fronteira e agrupando convenientemente,

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{A}U,U)_{\mathcal{H}} \\
= & -k\int_0^l(\phi_x+\psi)\overline{\Phi_x}dx-\alpha\int_0^l\Phi\overline{\Phi}dx-b\int_0^l\psi_x\overline{\Psi_x}dx-k\int_0^l(\phi_x+\psi)\overline{\Psi}dx \\
& -\beta\int_0^l\Psi\overline{\Psi}dx+b\int_0^l\Psi_x\overline{\psi_x}dx+k\int_0^l(\Phi_x+\Psi)\overline{(\phi_x+\psi)}dx,
\end{aligned}$$

das propriedades algébricas dos números complexos, obtemos

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{A}U,U)_{\mathcal{H}} \\
= & -k\int_0^l(\phi_x+\psi)\overline{(\Phi_x+\Psi)}dx-\alpha\int_0^l\Phi\overline{\Phi}dx-\beta\int_0^l\Psi\overline{\Psi}dx+k\int_0^l(\Phi_x+\Psi)\overline{(\phi_x+\psi)}dx \\
= & -k\int_0^l(\phi_x+\psi)\overline{(\Phi_x+\Psi)}dx-\alpha\int_0^l\Phi\overline{\Phi}dx-\beta\int_0^l\Psi\overline{\Psi}dx+\overline{k\int_0^l\overline{(\Phi_x+\Psi)}(\phi_x+\psi)dx} \\
= & 2Im\left(k\int_0^l(\phi_x+\psi)\overline{(\Phi_x+\Psi)}dx\right)i-\alpha\int_0^l\Phi\overline{\Phi}dx-\beta\int_0^l\Psi\overline{\Psi}dx,
\end{aligned}$$

donde tomando a parte real obtemos

$$Re\left((\mathcal{A}U,U)_{\mathcal{H}}\right)=-\beta\|\Psi\|_2^2-\alpha\|\Phi\|_2^2\leq 0, \tag{3.19}$$

provando que o operador $\mathcal{A}$ é dissipativo em $\mathcal{H}$.

(iii) Sobrejetividade do operador $(I-\mathcal{A}):D(\mathcal{A})\to\mathcal{H}$. Dado $F=(f_1,f_2,f_3,f_4)\in\mathcal{H}$, vamos mostrar que a equação resolvente

$$(I-\mathcal{A})U=F, \tag{3.20}$$

possui uma única solução $U \in D(\mathcal{A})$. Com efeito, em termos de coordenadas, temos o sistema

$$\phi - \Phi = f_1 \quad \in H_0^1(0,l), \tag{3.21}$$

$$\Phi - \frac{k}{\rho_1}\phi_{xx} + \frac{\alpha}{\rho_1}\Phi - \frac{k}{\rho_1}\psi_x = f_2 \quad \in L^2(0,l), \tag{3.22}$$

$$\psi - \Psi = f_3 \quad \in H_0^1(0,l), \tag{3.23}$$

$$\Psi + \frac{k}{\rho_2}\phi_x - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}\psi + \frac{\beta}{\rho_2}\Psi = f_4 \quad \in L^2(0,l),. \tag{3.24}$$

Isolando Φ e Ψ em (3.21) e (3.23), e substituindo em (3.22) e (3.24) temos

$$(\rho_1 + \alpha)\phi - k(\phi_x + \psi)_x = (\rho_1 + \alpha)f_1 + \rho_1 f_2 \quad \in L^2(0,l), \tag{3.25}$$

$$(\rho_2 + \beta)\psi + k(\phi_x + \psi) - b\psi_{xx} = (\rho_2 + \beta)f_3 + \rho_2 f_4 \quad \in L^2(0,l),. \tag{3.26}$$

Fazendo

$$M_1 = \rho_1 + \alpha \quad \text{e} \quad M_2 = \rho_2 + \beta,$$

e

$$g_1 = M_1 f_1 + \rho_1 f_2 \quad \text{e} \quad g_2 = M_2 f_3 + \rho_2 f_4,$$

obtemos

$$M_1\phi - k(\phi_x + \psi)_x = g_1 \quad \in L^2(0,l), \tag{3.27}$$

$$M_2\psi + k(\phi_x + \psi) - b\psi_{xx} = g_2 \quad \in L^2(0,l). \tag{3.28}$$

Vamos mostrar que o sistema (3.27)-(3.28) possui uma única solução $(\phi, \psi) \in (H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l)) \times (H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l))$. De fato, dado $(\widetilde{\phi}, \widetilde{\psi}) \in H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l)$, vamos multiplicar as equações de (3.27)-(3.28) por $\overline{\widetilde{\phi}}$ e $\overline{\widetilde{\psi}}$, respectivamente, e integrando em $(0,l)$, temos

$$M_1 \int_0^l \phi\overline{\widetilde{\phi}}dx - k\int_0^l (\phi_x + \psi)_x\overline{\widetilde{\phi}}dx = \int_0^l g_1\overline{\widetilde{\phi}}dx,$$

$$M_2 \int_0^l \psi\overline{\widetilde{\psi}}dx + k\int_0^l (\phi_x + \psi)\overline{\widetilde{\psi}}dx - b\int_0^l \psi_{xx}\overline{\widetilde{\psi}}dx = \int_0^l g_2\overline{\widetilde{\psi}}dx.$$

Usando integração por partes e as condições de fronteira temos

$$M_1 \int_0^l \phi\overline{\widetilde{\phi}}dx + k\int_0^l (\phi_x + \psi)\overline{\widetilde{\phi}_x}dx = \int_0^l g_1\overline{\widetilde{\phi}}dx, \tag{3.29}$$

$$M_2 \int_0^l \psi\overline{\widetilde{\psi}}dx + k\int_0^l (\phi_x + \psi)\overline{\widetilde{\psi}}dx + b\int_0^l \psi_x\overline{\widetilde{\psi}_x}dx = \int_0^l g_2\overline{\widetilde{\psi}}dx. \tag{3.30}$$

e somando (3.29) com (3.30)

$$M_1\int_0^l \phi\overline{\widetilde{\phi}}dx + M_2\int_0^l \psi\overline{\widetilde{\psi}}dx + k\int_0^l(\phi_x+\psi)\overline{(\widetilde{\phi}_x+\widetilde{\psi})}dx + b\int_0^l \psi_x\overline{\widetilde{\psi}_x}dx$$
$$= \int_0^l g_2\overline{\widetilde{\psi}}dx + \int_0^l g_1\overline{\widetilde{\phi}}dx.$$

Motivado por isto, definimos a aplicação

$$\begin{array}{rccl} a: & (H_0^1(0,l)\times H_0^1(0,l))\times(H_0^1(0,l)\times H_0^1(0,l)) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \Big((\phi,\psi),(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi})\Big) & \longmapsto & a\Big((\phi,\psi),(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi})\Big), \end{array}$$

onde

$$a\Big((\phi,\psi),(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi})\Big) = M_1\int_0^l \phi\overline{\widetilde{\phi}}dx + M_2\int_0^l \psi\overline{\widetilde{\psi}}dx + k\int_0^l(\phi_x+\psi)\overline{(\widetilde{\phi}_x+\widetilde{\psi})}dx$$
$$+b\int_0^l \psi_x\overline{\widetilde{\psi}_x}dx,$$

e também o funcional

$$\begin{array}{rccl} h: & H_0^1(0,l)\times H_0^1(0,l) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (\widetilde{\phi},\widetilde{\psi}) & \longmapsto & h(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi}), \end{array}$$

onde

$$h(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi}) = \int_0^l g_2\overline{\widetilde{\psi}}dx + \int_0^l g_1\overline{\widetilde{\phi}}dx.$$

Afirmação 1. A aplicação a é uma forma sesquilinear. É imediato.

Afirmação 2. A aplicação a é contínua. De fato, seja $\Big((\phi,\psi),(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi})\Big) \in (H_0^1(0,l)\times H_0^1(0,l))\times(H_0^1(0,l)\times H_0^1(0,l))$, usando as desigualdades triangular, de Hölder e de Poincaré temos

$$\begin{aligned}
&\left|a\Big((\phi,\psi),(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi})\Big)\right| \\
= &\left|M_1\int_0^l \phi\overline{\widetilde{\phi}}dx + M_2\int_0^l \psi\overline{\widetilde{\psi}}dx + k\int_0^l(\phi_x+\psi)\overline{(\widetilde{\phi}_x+\widetilde{\psi})}dx + b\int_0^l \psi_x\overline{\widetilde{\psi}_x}dx\right| \\
\leq\ & M_1\|\phi\|_2\|\widetilde{\phi}\|_2 + M_2\|\psi\|_2\|\widetilde{\psi}\|_2 + k\|\phi_x\|_2\|\widetilde{\phi}_x\|_2 + k\|\phi_x\|_2\|\widetilde{\psi}\|_2 + k\|\psi\|_2\|\widetilde{\phi}_x\|_2 \\
&+k\|\psi\|_2\|\widetilde{\psi}\|_2 + b\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 \\
\leq\ & C\Big[\|\phi_x\|_2(\|\widetilde{\phi}_x\|_2 + \|\widetilde{\psi}_x\|_2) + \|\psi_x\|_2(\|\widetilde{\psi}_x\|_2 + \|\widetilde{\phi}_x\|_2)\Big] \\
=\ & C(\|\phi_x\|_2 + \|\psi_x\|_2\|\widetilde{\phi}_x\|_2 + \|\widetilde{\psi}_x\|_2) \\
=\ & C(\|\phi\|_{H_0^1} + \|\psi\|_{H_0^1})(\|\widetilde{\phi}\|_{H_0^1} + \|\widetilde{\psi}\|_{H_0^1}) \\
=\ & C\|(\phi,\psi)\|_{H_0^1\times H_0^1}\|(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi})\|_{H_0^1\times H_0^1},
\end{aligned}$$

em que $C = \max\{M_1l^2 + k, M_2l^2 + kl^2 + b, kl\}$. Isso prova que a é contínua.

Afirmação 3. A aplicação a é coerciva. De fato, seja $(\phi,\psi) \in (H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l))$, então

$$
\begin{aligned}
\|(\phi,\psi)\|^2_{H_0^1\times H_0^1} &= (\|\phi\|_{H_0^1} + \|\psi\|_{H_0^1})^2 \\
&= (\|\phi_x\|_2 + \|\psi_x\|_2)^2 \\
&\leq (\|\phi_x+\psi\|_2 + \|\psi\|_2 + \|\psi_x\|_2)^2 \\
&\leq 2^2(2^2\|\phi_x+\psi\|_2 + \|\psi\|_2)^2 + 2^2\|\psi_x\|_2^2 \\
&\leq 16\|\phi_x+\psi\|_2^2 + 16\|\psi\|_2^2 + 4\|\psi_x\|_2^2
\end{aligned}
$$

somando $M_1\|\phi\|_2^2$ onde $M_1 = \rho_1 + \alpha$, temos

$$
\begin{aligned}
&\|(\phi,\psi)\|^2_{H_0^1\times H_0^1} \\
\leq\ & M_1\|\phi\|_2^2 + \frac{16}{M_2}M_2\|\psi\|_2^2 + \frac{16}{k}k\|\phi_x+\psi\|_2^2 + \frac{4}{b}b\|\psi_x\|_2^2 \\
\leq\ & C[M_1\|\phi\|_2^2 + M_2\|\psi\|_2^2 + k\|\phi_x+\psi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2] \\
\leq\ & C\left[M_1\int_0^l \phi\overline{\phi}dx + M_2\int_0^l \psi\overline{\psi}dx + k\int_0^l(\phi_x+\psi)\overline{\phi_x+\psi}dx + b\int_0^l \psi_x\overline{\psi_x}dx\right] \\
=\ & Ca\left((\phi,\psi),(\phi,\psi)\right),
\end{aligned}
$$

onde $C = \max\left\{1, \dfrac{16}{M_2}, \dfrac{16}{k}, \dfrac{4}{b}\right\}$, provando que a é coerciva.

Afirmação 4. Afirmamos que h é antilinear e limitada. A antilinearidade é imediata. Para mostrar que h é limitada considere $(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi}) \in (H_0^1(0,l)\times H_0^1(0,l))$, então

$$
\begin{aligned}
\left|h(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi})\right| &= \left|\int_0^l g_1\overline{\widetilde{\phi}}dx + \int_0^l g_2\overline{\widetilde{\psi}}dx\right| \\
&\leq \|g_1\|_2\|\widetilde{\phi}\|_2 + \|g_2\|_2\|\widetilde{\psi}\|_2 \\
&\leq \|g_1\|_2(\|\widetilde{\phi}\|_2 + \|\widetilde{\phi}_x\|_2) + \|g_2\|_2(\|\widetilde{\psi}\|_2 + \|\widetilde{\psi}_x\|_2) \\
&\leq \|g_1\|_2\|\phi\|_{H_0^1} + \|g_2\|_2\|\psi\|_{H_0^1} \\
&\leq C\left(\|\phi\|_{H_0^1} + \|\psi\|_{H_0^1}\right) \\
&\leq C\|\,(\phi,\psi)\,\|_{H_0^1\times H_0^1},
\end{aligned}
$$

onde $C = \max\{\|g_1\|_2, \|g_2\|_2, 1\}$. O que prova que h é contínua. Pelo Teorema 2.17 existe um único par $(\phi,\psi) \in H_0^1(0,l)\times H_0^1(0,l)$ tal que

$$
a\left((\phi,\psi),(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi})\right) = h(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi}), \quad \forall(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi}) \in H_0^1\times H_0^1. \tag{3.31}
$$

Afirmação 5. O vetor $(\phi,\psi) \in H_0^1(0,l)\times H_0^1(0,l)$ satisfazendo (3.31) é a solução de (3.27)-

(3.28) em $(H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l)) \times (H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l))$. De fato, considerando

$$\widetilde{\phi} = \xi \in C_0^1(0,l) \subset H_0^1(0,l) \quad \text{e} \quad \widetilde{\psi} = 0 \in H_0^1(0,l)$$

em (3.31), integrando por partes e usando as condições de fronteira temos

$$\begin{aligned}
& a((\phi,\psi),(\xi,0)) = h(\xi,0) \\
\Rightarrow \quad & M_1 \int_0^l \phi\overline{\xi}dx + k\int_0^l (\phi_x+\psi)\overline{\widetilde{\xi}_x}dx = \int_0^l g_1\overline{\xi}dx \\
\Rightarrow \quad & M_1 \int_0^l \phi\overline{\xi}dx + k\int_0^l \phi_x\overline{\widetilde{\xi}_x}dx + k\int_0^l \psi\overline{\widetilde{\xi}_x}dx = \int_0^l g_1\overline{\xi}dx \\
\Rightarrow \quad & k\int_0^l \phi_x\overline{\widetilde{\xi}_x}dx = \int_0^l g_1\overline{\xi}dx - M_1\int_0^l \phi\overline{\xi}dx + k\int_0^l \psi_x\overline{\widetilde{\xi}}dx \\
\Rightarrow \quad & k\int_0^l \phi_x\overline{\widetilde{\xi}_x}dx = -\int_0^l \left(-g_1\overline{\xi} + M_1\phi - k\psi_x\right)\overline{\widetilde{\xi}}dx,
\end{aligned}$$

o que significa que $\phi_x \in H^1(0,l)$ e satisfaz

$$k\phi_{xx} = -g_1\overline{\xi} + M_1\phi - k\psi_x \quad \in L^2(0,l),$$

isto é, $\phi \in H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l)$ e satisfaz (3.27). Agora sejam

$$\widetilde{\phi} = 0 \in H_0^1(0,l) \quad \text{e} \quad \widetilde{\psi} = \xi \in C_0^1(0,l) \subset H_0^1(0,l)$$

em (3.31), logo

$$\begin{aligned}
& a\left((\phi,\psi),(0,\xi)\right) = h(0,\xi) \\
\Rightarrow \quad & M_2\int_0^l \psi\overline{\xi}dx + k\int_0^l (\phi_x+\psi)\overline{\xi}dx + b\int_0^l \psi_x\overline{\xi_x}dx = \int_0^l g_2\overline{\xi}dx \\
\Rightarrow \quad & b\int_0^l \psi_x\overline{\xi_x}dx = -\int_0^l \left(-g_2 + M_2\psi + k(\phi_x+\psi)\right)\overline{\xi}dx,
\end{aligned}$$

o que significa que $\psi_x \in H^1(0,l)$ e satisfaz

$$b\psi_{xx} = -g_2 + M_2\psi + k(\phi_x+\psi),$$

isto é, $\psi \in H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l)$ e satisfaz (3.28). Isto prova o item (iii). Portanto, o operador $\mathcal{A}$ definido em (3.15) é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em $\mathcal{H}$. Aplicando o Teorema 2.52 concluímos a prova do Teorema 3.1. $\square$

Uma outra forma de provar (i) $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$ é a seguinte:

(i) Mostramos que $I - \mathcal{A}$ é sobrejetor. Sendo $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, então pelo Teorema 2.16 $\mathcal{H}$ é reflexivo. Portanto, pelo Teorema 2.50 vem que $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$.

3.3 ESTABILIDADE EXPONENCIAL

O Teorema 3.1 mostrou que o problema (3.11) tem solução única na classe $C^1([0,\infty),\mathcal{H})\cap C([0,\infty),D(\mathcal{A}))$ dada por $U(t)=S(t)U_0$, onde $S(t)$, $t\geq 0$ é o semigrupo de operadores lineares gerado pelo operador $\mathcal{A}$. Vamos estudar o comportamento assintótico desta solução. Faremos isto usando duas técnicas distintas, a saber, via perturbação de energia e via semigrupos lineares. Em seguida mostraremos a equivalência entre as duas técnicas, o que permitirá aplicarmos a mais conveniente nos problemas seguintes.

3.3.1 Método de energia

Por simplicidade, vamos considerar (apenas nesta subseção) que as funções são reais, de modo a simplificar as notações de decaimento via energia.

No que segue, vamos obter um funcional que será chamado funcional de energia do sistema. Este funcional é obtido por operações envolvendo o produto interno em $L^2(0,l)$, para funções do espaço $D(\mathcal{A})$.

Multiplicando (3.7) e(3.8) por ϕ_t e ψ_t, respectivamente e integrando em $(0,l)$ temos

$$\int_0^l \rho_1\phi_{tt}\phi_t dx-\int_0^l k(\phi_x+\psi)_x\phi_t dx+\int_0^l \alpha\phi_t\phi_t dx=0,$$
$$\int_0^l \rho_2\psi_{tt}\psi_t dx-\int_0^l b\psi_{xx}\psi_t dx+\int_0^l k(\phi_x+\psi)\psi_t dx+\int_0^l \beta\psi_t\psi_t dx=0.$$

Como $\phi_t,\psi_t\in H_0^1(0,l)$, integrando por partes e usando as condições de fronteira, temos

$$\int_0^l \rho_1\phi_{tt}\phi_t dx+\int_0^l k(\phi_x+\psi)\phi_{tx} dx+\int_0^l \alpha\phi_t\phi_t dx=0,$$
$$\int_0^l \rho_2\psi_{tt}\psi_t dx+\int_0^l b\psi_x\psi_{tx} dx+\int_0^l k(\phi_x+\psi)\psi_t dx+\int_0^l \beta\psi_t\psi_t dx=0,$$

e somando as equações

$$\int_0^l \rho_1\phi_{tt}\phi_t dx+\int_0^l \rho_2\psi_{tt}\psi_t dx+\int_0^l b\psi_x\psi_{tx} dx+\int_0^l k(\phi_x+\psi)(\phi_{tx}+\psi_t) dx$$
$$+\int_0^l \alpha\phi_t\phi_t dx+\int_0^l \beta\psi_t\psi_t dx=0.$$

usando formalmente que

$$(\phi_x+\psi)(\phi_x+\psi)_t=\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial t}(\phi_x+\psi)^2,\quad \phi_{tt}\phi_t=\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial t}(\phi_t)^2,\quad \psi_{tt}\psi_t=\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial t}(\psi_t)^2,$$
$$\psi_x\psi_{xt}=\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial t}(\psi_x)^2,$$

temos

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left[\rho_1\int_0^l(\phi_t)^2dx+\rho_2\int_0^l(\psi_t)^2dx+b\int_0^l(\psi_x)^2dx\ +k\int_0^l(\phi_x+\psi)^2dx\right]$$
$$=-\alpha\int_0^l\phi_t^2dx-\beta\int_0^l\psi_t^2dx. \qquad (3.32)$$

Definimos a função $t\mapsto E(t)$ por

$$\begin{aligned}E(t) &= \frac{1}{2}\left[\rho_1\int_0^l(\phi_t(t))^2dx+\rho_2\int_0^l(\psi_t(t))^2dx+b\int_0^l(\psi_x(t))^2dx\right.\\ &\quad\left.+k\int_0^l(\phi_x(t)+\psi(t))^2dx\right],\end{aligned} \qquad (3.33)$$

e note que

$$\frac{d}{dt}E(t)=-\alpha\int_0^l(\phi_t(t))^2dx-\beta\int_0^l(\psi_t(t))^2dx\le 0, \qquad (3.34)$$

uma vez que $\alpha,\beta\ge 0$.

A expressão em (3.33) estabelece o funcional de energia associado ao sistema (3.7)-(3.10). Note que $E(t)$ está bem definido para elementos da forma $(\phi,\phi_t,\psi,\psi_t)\in H_0^1(0,l)\times L^2(0,l)\times H_0^1(0,l)\times L^2(0,l)$. Note ainda que se U é solução de (3.11), então vale (3.32) e a relação

$$E(t)=\frac{1}{2}\|U(t)\|^2_{\mathcal{H}},\quad t\ge 0. \qquad (3.35)$$

A técnica consiste em definir um funcional E_ϵ satisfazendo

$$\gamma_1E(t)\le E_\epsilon(t)\le\gamma_2E(t),\ \ t\ge 0, \qquad (3.36)$$

para constantes positivas γ_1,γ_2 e

$$E'_\epsilon(t)\le-\gamma E_\epsilon(t),\ \ t\ge 0, \qquad (3.37)$$

para algum $\gamma>0$ e algum $\epsilon>0$. A desigualdade (3.36) implica que se conseguirmos uma estabilização para o funcional de energia perturbada E_ϵ, então teremos a estabilização para o funcional de energia E. Já a desigualdade (3.37) é suficiente para obter que E_ϵ seja exponencialmente estável. Mais precisamente temos o seguinte resultado.

Teorema 3.2. *Suponhamos que* $\rho_1,\rho_2,b,k>0$ *e* $\alpha,\beta>0$*, e considere o funcional* $E(t)$ *definido em* (3.33)*. Então, existe uma constante* $\gamma_0>0$*, independente dos dados iniciais, tal* *que*

$$E(t) \leq 3E(0)e^{-\gamma_0 t}, \quad t \geq 0. \tag{3.38}$$

Em outras palavras, o sistema (3.7)-(3.10) *é exponencialmente estável.*

Demonstração. Definimos inicialmente o funcional

$$\xi(t) = \rho_1 \int_0^l \phi(t)\phi_t(t)dx + \rho_2 \int_0^l \psi(t)\psi_t(t)dx, \quad t \geq 0, \tag{3.39}$$

e, para todo $\epsilon > 0$, definimos o funcional de energia perturbada

$$E_\epsilon(t) = E(t) + \epsilon\xi(t), \quad t \geq 0, \tag{3.40}$$

onde $E(t)$ foi obtido em (3.33).

Afirmação 1. Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\frac{1}{2}E(t) \leq E_\epsilon(t) \leq \frac{3}{2}E(t), \quad t \geq 0. \tag{3.41}$$

De fato, usando as desigualdades triangular, de Cauchy, de Schwarz, de Poincaré e de Young, temos

$$\begin{aligned}
& |E_\epsilon(t) - E(t)| \\
= \ & \epsilon\, |\xi(t)| \\
= \ & \epsilon \left| \rho_1 \int_0^l \phi(t)\phi_t(t)dx + \rho_2 \int_0^l \psi(t)\psi_t(t)dx \right| \\
\leq \ & \epsilon \left(\rho_1 \int_0^l |\phi(t)\phi_t(t)|dx + \rho_2 \int_0^l |\psi(t)\psi_t(t)|dx \right) \\
\leq \ & \epsilon \left(\rho_1 \|\phi_t(t)\|_2 \|\phi(t)\|_2 + \rho_2 \|\psi_t(t)\|_2 \|\psi(t)\|_2 \right) \\
\leq \ & \epsilon(\rho_1 l \|\phi_t(t)\|_2 \|\phi_x(t)\|_2 + \rho_2 l \|\psi_t(t)\|_2 \|\psi_x(t)\|_2) \\
\leq \ & \epsilon(\rho_1 l \|\phi_t(t)\|_2 (\|\phi_x(t) + \psi(t)\|_2 + \|\psi(t)\|_2) + \rho_2 l \|\psi_t(t)\|_2 \|\psi_x(t)\|_2) \\
\leq \ & \epsilon \left(\rho_1 l \|\phi_t(t)\|_2 \|\phi_x(t) + \psi(t)\|_2 + \rho_1 l^2 \|\phi_t(t)\|_2 \|\psi_x(t)\|_2 + \rho_2 l \|\psi_t(t)\|_2 \|\psi_x(t)\|_2 \right) \\
\leq \ & \epsilon \left(\rho_1 l \left(\frac{1}{2}\|\phi_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\phi_x(t) + \psi(t)\|_2^2 \right) + \rho_1 l^2 \left(\frac{1}{2}\|\phi_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\psi_x(t)\|_2^2 \right) \right. \\
& \left. + \rho_2 l \left(\frac{1}{2}\|\psi_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\psi_x(t)\|_2^2 \right) \right) \\
\leq \ & \epsilon \left(\frac{\rho_1}{2}(l + l^2)\|\phi_t(t)\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2} l \|\psi_t(t)\|_2^2 + \frac{b}{b}\frac{\rho_1 l^2 + \rho_2 l}{2}\|\psi_x(t)\|_2^2 + \frac{k}{k}\frac{\rho_1 l}{2}\|\phi_x(t) + \psi(t)\|_2^2 \right).
\end{aligned}$$

Fazendo

$$C = \max\left\{(l+l^2), l, \frac{\rho_1 l^2 + \rho_2 l}{b}, \frac{\rho_1 l}{k}\right\}, \tag{3.42}$$

então para todo $\epsilon > 0$ temos

$$\begin{aligned} |E_\epsilon(t) - E(t)| &\leq \epsilon C\left(\frac{\rho_1}{2}\|\phi_t(t)\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2}\|\psi_t(t)\|_2^2 + \frac{b}{2}\|\psi_x(t)\|_2^2 + \frac{k}{2}\|\phi_x(t)+\psi(t)\|_2^2\right) \\ &\leq \epsilon C E(t). \end{aligned}$$

Logo, para todo $\epsilon > 0$ temos

$$(1-\epsilon C)E(t) \leq E_\epsilon(t) \leq (1+\epsilon C)E(t).$$

Escolhendo ϵ tal que $\frac{1}{2} \leq 1 - \epsilon C$, isto é

$$\epsilon \leq \frac{1}{2C} = \frac{1}{2\max\left\{(l+l^2), l, \frac{\rho_1 l^2 + \rho_2 l}{b}, \frac{\rho_1 l}{k}\right\}}, \tag{3.43}$$

então

$$\frac{1}{2}E(t) \leq E_\epsilon(t) \leq \frac{3}{2}E(t),$$

provando a Afirmação 1.

Afirmação 2. Existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\xi'(t) \leq C_1\|\phi_t(t)\|_2^2 + C_2\|\psi_t(t)\|_2^2 - \frac{k}{2}\|\phi_x(t)+\psi(t)\|_2^2 - \frac{b}{2}\|\psi_x(t)\|_2^2, \quad t \geq 0. \tag{3.44}$$

De fato, para cada $t > 0$, tomando a derivada de ξ em (3.39), usando integração por partes, e substituindo ϕ_{tt}, ψ_{tt} conforme (3.7)-(3.8) temos

$$\begin{aligned} &\xi'(t) \\ = \;& \rho_1\int_0^l \phi_{tt}(t)\phi(t)dx + \rho_1\|\phi_t(t)\|_2^2 + \rho_2\int_0^l \psi_{tt}(t)\psi(t)dx + \rho_2\|\psi_t(t)\|_2^2 \\ = \;& \rho_1\|\phi_t(t)\|_2^2 + \rho_2\|\psi_t(t)\|_2^2 + k\int_0^l (\phi_x(t)+\psi(t))_x\phi(t)dx + b\int_0^l \psi_{xx}(t)\psi(t)dx \\ & -k\int_0^l (\phi_x(t)+\psi(t))\,\psi(t)dx - \alpha\int_0^l \phi_t(t)\phi(t)dx - \beta\int_0^l \psi_t(t)\psi(t)dx, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$
\begin{aligned}
& \xi'(t) \\
= \; & \rho_1\|\phi_t(t)\|_2^2 + \rho_2\|\psi_t(t)\|_2^2 - k\int_0^l \left(\phi_x(t)+\psi(t)\right)\left(\phi_x(t)+\psi(t)\right)dx - b\int_0^l \psi_x\psi_x dx \\
& -\alpha\int_0^l \phi_t(t)\phi(t)dx - \beta\int_0^l \psi_t(t)\psi(t)dx \\
= \; & \rho_1\|\phi_t(t)\|_2^2 + \rho_2\|\psi_t(t)\|_2^2 - k\|\phi_x(t)+\psi(t)\|_2^2 - b\|\psi_x\|_2^2 - \alpha\int_0^l \phi_t(t)\phi(t)dx \\
& -\beta\int_0^l \psi_t(t)\psi(t)dx. \qquad (3.45)
\end{aligned}
$$

Fazendo

$$
I_1 := -\alpha\int_0^l \phi_t(t)\phi(t)dx \quad \text{e} \quad I_2 := -\beta\int_0^l \psi_t(t)\psi(t)dx,
$$

usando a desigualdades de Hölder, Poincaré e de Young temos que

$$
\begin{aligned}
|I_1| &\leq \alpha\|\phi_t(t)\|_2\|\phi(t)\|_2 \\
&\leq \alpha l\|\phi_t(t)\|_2\|\phi_x(t)\|_2 \\
&\leq \alpha l\|\phi_t(t)\|_2\left(\|\phi_x(t)+\psi(t)\|_2 + \|\psi(t)\|_2\right) \\
&= \alpha l\|\phi_t(t)\|_2\|\phi_x(t)+\psi(t)\|_2 + \alpha l\|\phi_t(t)\|_2\|\psi(t)\|_2 \\
&\leq \alpha l\|\phi_t(t)\|_2\|\phi_x(t)+\psi(t)\|_2 + \alpha l^2\|\phi_t(t)\|_2\|\psi_x(t)\|_2 \\
&\leq \eta_1\|\phi_x(t)+\psi(t)\|_2^2 + \frac{\alpha^2 l^2}{4\eta_1}\|\phi_t(t)\|_2^2 + \eta_2\|\psi_x(t)\|_2^2 + \frac{\alpha^2 l^4}{4\eta_2}\|\phi_t(t)\|_2^2,
\end{aligned}
$$

onde $\eta_1 = \frac{k}{2}$ e $\eta_2 = \frac{b}{4}$, segue que

$$
\begin{aligned}
|I_1| &\leq \frac{k}{2}\|\phi_x(t)+\psi(t)\|_2^2 + \frac{\alpha^2 l^2}{2k}\|\phi_t(t)\|_2^2 + \frac{b}{4}\|\psi_x(t)\|_2^2 + \frac{\alpha^2 l^4}{b}\|\phi_t(t)\|_2^2 \\
&\leq \frac{k}{2}\|\phi_x(t)+\psi(t)\|_2^2 + \frac{b}{4}\|\psi_x(t)\|_2^2 + \left(\frac{\alpha^2 l^4}{b} + \frac{\alpha^2 l^2}{2k}\right)\|\phi_t(t)\|_2^2. \qquad (3.46)
\end{aligned}
$$

Analogamente

$$
|I_2| \leq \eta_3\|\psi_x(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\eta_3}\beta^2 l^2\|\psi_t(t)\|_2^2,
$$

usando $\eta_3 = \frac{b}{4}$, segue que

$$
|I_2| \leq \frac{b}{4}\|\psi_x(t)\|_2^2 + \frac{1}{b}\beta^2 l^2\|\psi_t(t)\|_2^2. \qquad (3.47)
$$

Substituindo (3.46) e (3.47) em (3.45), temos

$$\begin{aligned}
\xi'(t) &\leq \rho_1\|\phi_t(t)\|_2^2 + \rho_2\|\psi_t(t)\|_2^2 - k\|\phi_x(t)+\psi(t)\|_2^2 - b\|\psi_x(t)\|_2^2 + \frac{k}{2}\|\phi_x(t)+\psi(t)\|_2^2 \\
&\quad + \frac{b}{4}\|\psi_x(t)\|_2^2 + \left(\frac{\alpha^2 l^4}{b} + \frac{\alpha^2 l^2}{2k}\right)\|\phi_t(t)\|_2^2 + \frac{b}{4}\|\psi_x(t)\|_2^2 + \frac{1}{b}\beta^2 l^2\|\psi_t(t)\|_2^2 \\
&\leq \left(\rho_1 + \frac{\alpha^2 l^4}{b} + \frac{\alpha^2 l^2}{2k}\right)\|\phi_t(t)\|_2^2 + \left(\rho_2 + \frac{1}{b}\beta^2 l^2\right)\|\psi_t(t)\|_2^2 - \frac{k}{2}\|\phi_x(t)+\psi(t)\|_2^2 \\
&\quad - \frac{b}{2}\|\psi_x(t)\|_2^2,
\end{aligned}$$

e basta tomar

$$C_1 = \rho_1 + \frac{\alpha^2 l^4}{b} + \frac{\alpha^2 l^2}{2k} > 0 \quad e \quad C_2 = \rho_2 + \frac{1}{b}\beta^2 l^2 > 0, \tag{3.48}$$

para concluir a Afirmação 2.

Afirmação 3. Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\gamma > 0$, que depende de ϵ, tal que

$$E_\epsilon'(t) \leq -\gamma E(t), \quad t > 0. \tag{3.49}$$

Lembramos de (3.34) dada por

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\alpha\int_0^l (\phi_t(t))^2 dx - \beta\int_0^l (\psi_t(t))^2 dx \leq 0.$$

Disso, de (3.40) e (3.44)) obtemos

$$\begin{aligned}
E_\epsilon'(t) &\leq -\alpha\|\phi_t(t)\|_2^2 - \beta\|\psi_t(t)\|_2^2 \\
&\quad + \epsilon\left(C_1\|\phi_t(t)\|_2^2 + C_2\|\psi_t(t)\|_2^2 - \frac{k}{2}\|\phi_x(t)+\psi(t)\|_2^2 - \frac{b}{2}\|\psi_x(t)\|_2^2\right) \\
&\leq (-\alpha + \epsilon C_1)\|\phi_t(t)\|_2^2 + (-\beta + \epsilon C_2)\|\psi_t(t)\|_2^2 - \epsilon\frac{k}{2}\|\phi_x(t)+\psi(t)\|_2^2 - \epsilon\frac{b}{2}\|\psi_x(t)\|_2^2.
\end{aligned}$$

Logo, escolhendo $\epsilon > 0$ tal que

$$\alpha - \epsilon C_1 \geq \frac{\alpha}{2} \quad e \quad \beta - \epsilon C_2 \geq \frac{\beta}{2},$$

ou seja,

$$\epsilon = \min\left\{\frac{\alpha}{2C_1}, \frac{\beta}{2C_2}\right\} > 0, \tag{3.50}$$

temos

$$
\begin{aligned}
E_\epsilon'(t) &\leq -\frac{\alpha}{2}\|\phi_t(t)\|_2^2 - \frac{\beta}{2}\|\psi_t(t)\|_2^2 - \frac{\epsilon k}{2}\|\phi_x(t)+\psi(t)\|_2^2 - \frac{\epsilon b}{2}\|\psi_x(t)\|_2^2 \\
&\leq -\frac{\alpha}{2}\frac{\rho_1}{\rho_1}\|\phi_t(t)\|_2^2 - \frac{\beta}{2}\frac{\rho_2}{\rho_2}\|\psi_t(t)\|_2^2 - \frac{\epsilon k}{2}\|\phi_x(t)+\psi(t)\|_2^2 - \frac{\epsilon b}{2}\|\psi_x(t)\|_2^2.
\end{aligned}
$$

Pondo

$$
\gamma = \min\left\{\frac{\alpha}{\rho_1}, \frac{\beta}{\rho_2}, \epsilon\right\} > 0, \tag{3.51}
$$

temos

$$
\begin{aligned}
E_\epsilon'(t) &\leq -\gamma\left[\frac{\rho_1}{2}\|\phi_t(t)\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2}\|\psi_t(t)\|_2^2 + \frac{k}{2}\|\phi_x(t)+\psi(t)\|_2^2 + \frac{b}{2}\|\psi_x(t)\|_2^2\right] \\
&\leq -\gamma E(t),
\end{aligned}
$$

para $t > 0$. Isso conclui a prova da Afirmação 3.

Afirmação 4. Para $\epsilon > 0$ satisfazendo

$$
\epsilon = \min\left\{\frac{\alpha}{2C_1}, \frac{\beta}{2C_2}, \frac{1}{2C}\right\} > 0 \tag{3.52}
$$

onde C, C_1 e C_2 são definidos em (3.42), (3.48), e considerando $\gamma > 0$ como em (3.51), de (3.41) e (3.49), temos para $t > 0$ que,

$$
\begin{aligned}
E_\epsilon'(t) \leq -\gamma E(t) &\Rightarrow E_\epsilon'(t) \leq -\frac{2}{3}\gamma E_\epsilon(t) \\
&\Rightarrow E_\epsilon'(t) + \frac{2}{3}\gamma E_\epsilon(t) \leq 0 \\
&\Rightarrow e^{\frac{3}{2}\gamma t}E_\epsilon'(t) + e^{\frac{3}{2}\gamma t}\frac{2}{3}\gamma E_\epsilon(t) \leq 0 \\
&\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[e^{\frac{3}{2}\gamma t}E_\epsilon(t)\right] \leq 0 \\
&\Rightarrow e^{\frac{3}{2}\gamma t}E_\epsilon(t) \leq E_\epsilon(0) \\
&\Rightarrow E_\epsilon(t) \leq E_\epsilon(0)e^{-\frac{3}{2}\gamma t}.
\end{aligned} \tag{3.53}
$$

Novamente de (3.41) e de (3.53)

$$
\frac{1}{2}E(t) \leq E_\epsilon(t) \leq E_\epsilon(0)e^{-\frac{2}{3}\gamma t} \leq \frac{3}{2}E(0)e^{-\frac{2}{3}\gamma t}, \quad t > 0.
$$

Portanto

$$
E(t) \leq 3E(0)e^{-\frac{2}{3}\gamma t}, \quad t > 0,
$$

provando o Teorema 3.2 com $\gamma_0 = \dfrac{2}{3}\gamma > 0$. $\square$

3.3.2 Estabilidade exponencial via Semigrupos de Operadores Lineares

Nesta seção, vamos mostrar que (3.7)-(3.10) é exponencialmente estável via o Teorema 2.54 para semigrupos de operadores lineares.

Lema 3.3. *Suponhamos que* $\rho_1, \rho_2, b, k > 0$ *e* $\alpha, \beta > 0$. *Então,* $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$*, onde* $\mathcal{A}$ *é o operador definido em* (3.15).

Demonstração. Como as inclusões $H^2(0,l) \hookrightarrow H^1(0,l) \hookrightarrow L^2(0,l)$ são compactas (Teorema 2.30 item (iii)), então segue que cada espaço do produto cartesiano em $D(\mathcal{A})$ tem inclusão compacta no respectivo espaço de $\mathcal{H}$. Logo, segue que $D(\mathcal{A}) \overset{c}{\hookrightarrow} \mathcal{H}$. Assim, pelo Teorema 2.44 temos $\rho(\mathcal{A})$ é compacto. Pelo Corolário 2.45 segue que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C}\backslash\rho(\mathcal{A})$ é formado apenas por autovalores de $\mathcal{A}$. Suponha que $i\mathbb{R} \not\subseteq \rho(\mathcal{A})$. Então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $i\lambda \notin \rho(\mathcal{A})$. Assim, $i\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$, isto é, existe $U = (\phi, \Phi, \psi(t), \Psi) \in D(\mathcal{A})$ não nulo, tal que

$$\mathcal{A}U - i\lambda U = 0. \tag{3.54}$$

Tomando o produto interno de (3.54) por U em $\mathcal{H}$, temos

$$(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} - i\lambda\|U\|^2_{\mathcal{H}} = 0,$$

e tomando a parte real e usando (3.19) temos

$$\begin{aligned} Re(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = 0 \quad &\Rightarrow \quad -\alpha\|\Phi\|_2^2 - \beta\|\Psi\|_2^2 = 0 \\ &\Rightarrow \quad \Phi = \Psi = 0, \end{aligned}$$

uma vez que $\alpha, \beta > 0$. Por outro lado, escrevendo (3.54) em termos de coordenadas temos

$$\Phi - i\lambda\phi = 0, \tag{3.55}$$

$$\frac{k}{\rho_1}\phi_{xx} - \frac{\alpha}{\rho_1}\Phi + \frac{k}{\rho_1}\psi_x - i\lambda\Phi = 0, \tag{3.56}$$

$$\Psi - i\lambda\psi = 0, \tag{3.57}$$

$$-\frac{k}{\rho_2}\phi_x(t) + \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}(t) - \frac{k}{\rho_2}\psi - \frac{\beta}{\rho_2}\Psi - i\lambda\Psi = 0. \tag{3.58}$$

Substituindo $\Phi = \Psi = 0$ em (3.55) e em (3.55), temos $\phi = \psi = 0$. Assim $U \in D(\mathcal{A})$ tal que $\mathcal{A}U = i\lambda U$ é $U = (0,0,0,0)$, o que é um absurdo, pois U é autovetor de $\mathcal{A}$. Segue que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$. $\square$

Lema 3.4. *Suponhamos que*$\rho_1, \rho_2, b, k > 0$ *e* $\alpha, \beta > 0$*, e seja* $\mathcal{A}$ *o operador definido em* (3.15).

Então,

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}} < \infty$$

Demonstração. O Lema 3.3 mostrou que $i\mathbb{R} \in \rho(\mathcal{A})$. Assim, dado $F \in \mathcal{H}$ existe um único $U \in D(\mathcal{A})$ tal que

$$(i\lambda I - \mathcal{A})U = F, \tag{3.59}$$

qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Seja $U \in D(\mathcal{A})$ tal que $(i\lambda I - \mathcal{A})U = F$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, então $U = (i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F$. Assim, para mostrar que o limite superior de $\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}} < \infty$ quando $\lambda \to \infty$, basta mostrar que existe $C > 0$ tal que para todo $F \in \mathcal{H}$

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}},$$

onde $U = (i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F$. Seja $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{H}$, e $U = (\phi, \Phi, \psi, \Psi) \in D(\mathcal{A})$ satisfazendo $U = (i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F$ para todo λ. Temos

$$\begin{aligned} & i\lambda U - \mathcal{A}U = F \\ \Rightarrow \quad & i\lambda(U, U)_{\mathcal{H}} - (\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = (F, U)_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Tomando a parte real, usando (3.19) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & -Re(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = Re(F, U)_{\mathcal{H}} \\ \Rightarrow \quad & \alpha\|\Phi\|_2^2 + \beta\|\Psi\|_2^2 \leq \|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \\ \Rightarrow \quad & \|\Phi\|_2^2, \|\Psi\|_2^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \tag{3.60}$$

uma vez que $\alpha, \beta > 0$. Por outro lado, reescrevendo a equação resolvente (3.59) em termos de coordenadas temos

$$i\lambda\phi - \Phi = f_1, \tag{3.61}$$

$$i\lambda\Phi - \frac{k}{\rho_1}(\phi_x + \psi)_x + \frac{\alpha}{\rho_1}\Phi = f_2, \tag{3.62}$$

$$i\lambda\psi - \Psi = f_3, \tag{3.63}$$

$$i\lambda\Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}(t) + \frac{k}{\rho_2}(\phi_x + \psi) + \frac{\beta}{\rho_2}\Psi = f_4. \tag{3.64}$$

multiplicando (3.64) por $\overline{\psi}$ e integrando em $(0, l)$, usando (3.63), as desigualdades triangular, de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
& \int_0^l i\lambda\Psi\overline{\psi}dx - \frac{b}{\rho_2}\int_0^l \psi_{xx}\overline{\psi}dx + \frac{k}{\rho_2}\int_0^l (\phi_x+\psi)\overline{\psi}dx + \frac{\beta}{\rho_2}\int_0^l \Psi\overline{\psi}dx = \int_0^l f_4\overline{\psi}dx \\
\Rightarrow\ & \int_0^l \Psi\overline{(-\Psi - f_3)}dx + \frac{b}{\rho_2}\int_0^l \psi_x\overline{\psi_x}dx + \frac{k}{\rho_2}\int_0^l (\phi_x+\psi)\overline{(-\frac{i}{\lambda}[\Psi+f_3])}dx \\
& +\frac{\beta}{\rho_2}\int_0^l \Psi\overline{\psi}dx = \int_0^l f_4\overline{\psi}dx \\
\Rightarrow\ & \frac{b}{\rho_2}\|\psi_x\|_2^2 \le \|f_4\|_2\|\psi\|_2 + \frac{\beta}{\rho_2}\|\Psi\|_2\|\psi\|_2 + \frac{k}{\rho_2|\lambda|}\|\phi_x+\psi\|_2\|\Psi\|_2 + \frac{k}{\rho_2|\lambda|}\|\phi_x+\psi\|_2\|f_3\|_2 \\
& +\|\Psi\|_2\|f_3\|_2 + \|\Psi\|^2 \\
\Rightarrow\ & \frac{b}{\rho_2}\|\psi_x\|_2^2 \le \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C_\epsilon\|\Psi\|_2^2 + \epsilon\|\psi\|_2^2 + \frac{k}{\rho_2|\lambda|}\|\phi_x+\psi\|_2\|\Psi\|_2 \\
& +\frac{k}{\rho_2|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \|\Psi\|_2^2.
\end{aligned}$$

De (3.60), tomando $|\lambda| > 1$, $\epsilon < \frac{b}{\rho_2}$ e a desigualdade de Poincaré, temos

$$\|\psi_x\|_2^2 \ \le\ C\|\phi_x+\psi\|_2\|\Psi\|_2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.65}$$

Multiplicando (3.62) por $\overline{\phi}$, integrando em $(0,l)$ e usando (3.61), obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_0^l i\lambda\Phi\overline{\phi}dx - \frac{k}{\rho_1}\int_0^l (\phi_x+\psi)_x\overline{\phi}dx + \frac{\alpha}{\rho_1}\int_0^l \Phi\overline{\phi}dx = \int_0^l f_2\overline{\phi}dx \\
\Rightarrow\ & \int_0^l \Phi\overline{(-\Phi - f_1)}dx + \frac{k}{\rho_1}\left[\int_0^l (\phi_x+\psi)\overline{(\phi_x+\psi)}dx - \int_0^l (\phi_x+\psi)\overline{\psi}dx\right] \\
& +\frac{\alpha}{\rho_1}\frac{i}{\beta}\int_0^l \Phi\overline{\Phi}dx + \frac{\alpha}{\rho_1}\frac{i}{\beta}\int_0^l \Phi\overline{f_1}dx = \int_0^l f_2\overline{\phi}dx \\
\Rightarrow\ & \frac{k}{\rho_1}\|\phi_x+\psi\|_2^2 = \|\Phi\|_2^2 + \int_0^l \Phi\overline{f_1}dx + \frac{k}{\rho_1}\int_0^l (\phi_x+\psi)\overline{\psi}dx + \int_0^l f_2\overline{\phi}dx \\
& -\frac{\alpha i}{\rho_1\beta}\left[\|\Phi\|_2^2 + \int_0^l \Phi\overline{f_1}dx\right].
\end{aligned}$$

Usando novamente (3.60) e as desigualdades triangular, de Hölder e de Poincaré, para $|\lambda|$ suficientemente grande temos

$$\begin{aligned}
\frac{k}{\rho_1}\|\phi_x+\psi\| \ &\le\ C\|\Phi\|_2^2 + C\|\Phi\|_2\|f_1\|_2 + C\|\phi_x+\psi\|_2\|\psi\|_2 + C\|f_2\|_2\|\phi\|_2 + C\|\Phi\|_2\|f_1\|_2 \\
&\le\ C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \epsilon\|\phi_x+\psi\|_2^2 + C_\epsilon\|\psi\|_2^2.
\end{aligned}$$

Tomando $\epsilon < \frac{k}{\rho_1}$ e usando (3.65),

$$\begin{aligned} \|\phi_x + \psi\|_2^2 &\leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|\Psi\|_2^2 \\ &\leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Substituindo (3.66) em (3.65) resulta em

$$\|\psi_x\|_2^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.67}$$

Finalmente, de (3.60), (3.66) e (3.67) e usando a desigualdade de Young temos

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= k\|\phi_x + \psi\|_2^2 + \rho_1\|\Phi\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 \\ &\leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq C\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

e assim

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

o que conclui a demonstração do Lema 3.4. □

Teorema 3.5. *Suponhamos que*$\rho_1, \rho_2, b, k > 0$ *e* $\alpha, \beta > 0$*, então a solução* U *de* (3.11) *decai exponencialmente em* $\mathcal{H}$*, independentemente do dado inicial* U_0 *. Em outras palavras, o sistema* (3.7)-(3.10) *é exponencialmente estável.*

Demonstração. Segue dos Lemas 3.3, 3.4 e do Teorema 2.54 que o semigrupo $e^{\mathcal{A}t}$ associado ao problema (3.11) é exponencialmente estável. Portanto $U(t) = e^{\mathcal{A}t}U_0$ é exponencialmente estável em $\mathcal{H}$ seja qual for o dado inicial U_0. □

Observação 3.1. Notamos que as estabilidades obtidas nos Teoremas 3.2 e 3.5 são equivalentes. De fato, de (3.33), (3.14) e (3.38) temos

$$\frac{1}{2}\|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 = E(t) \leq 3E(0)e^{-\gamma_0 t}, \quad t > 0, \tag{3.68}$$

e como $U(t) = e^{\mathcal{A}t}U_0$, então

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|e^{\mathcal{A}t}U_0\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 6\|U_0\|_{\mathcal{H}}^2 e^{-\gamma_0 t}, \tag{3.69}$$

ou seja, a solução U de (3.11) decai exponencialmente em $\mathcal{H}$. A recíproca é imediata.

4 SISTEMA DE TIMOSHENKO TERMOELÁSTICO

Consideremos o sistema Termoelástico de Timoshenko com Lei Térmica de Cattaneo

$$\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x = 0, \quad \text{em } (0,l)\times(0,\infty), \tag{4.1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) + \delta\theta_x = 0, \quad \text{em } (0,l)\times(0,\infty), \tag{4.2}$$

$$\rho_3\theta_t + q_x + \delta\psi_{xt} = 0, \quad \text{em } (0,l)\times(0,\infty), \tag{4.3}$$

$$\tau q_t + \beta q + \theta_x = 0, \quad \text{em } (0,l)\times(0,\infty), \tag{4.4}$$

com condições iniciais

$$\begin{aligned}&\phi(x,0) = \phi_0(x), \quad \phi_t(x,0) = \phi_1(x), \quad \psi(x,0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x,0) = \psi_1(x),\\ &\theta(x,0) = \theta_0(x), \quad q(x,0) = q_0(x), \quad x \in (0,l),\end{aligned} \tag{4.5}$$

e condições de fronteira

$$\begin{aligned}&\phi(0,t) = \phi(l,t) = 0, \quad \psi_x(0,t) = \psi_x(l,t) = 0, \quad \theta(0,t) = \theta(l,t) = 0,\\ &t \geq 0.\end{aligned} \tag{4.6}$$

4.1 Existência e unicidade

Fazendo $\phi_t = \Phi$ e $\psi_t = \Psi$ temos

$$U = (\phi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, q)^T, \quad U_t = (\Phi, \Phi_t, \Psi, \Psi_t, \theta_t, q_t)^T, \quad U(0) = (\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0, q_0)^T.$$

Para obtermos o problema de Cauchy abstrato na forma

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}U, \;\; t > 0, \\ U_0 = U(0), \end{cases} \tag{4.7}$$

equivalente ao sistema (3.7)-(3.10), definimos o espaço de fase

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,l) \times L^2(0,l) \times H_*^1(0,l) \times L_*^2(0,l) \times L^2(0,l) \times L^2(0,l), \tag{4.8}$$

onde

$$L_*^2(0,l) = \left\{ f \in L^2(0,l); \int_0^l f\,dx = 0 \right\}, \quad H_*^1(0,l) = H^1(0,l) \cap L_*^2(0,l),$$

que é um espaço de Hilbert, com produto interno $(.,.)_{\mathcal{H}}:\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ e norma $\|.\|_{\mathcal{H}}:\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ dados, respectivamente por

$$\begin{aligned}(U,\widehat{U})_{\mathcal{H}} &= \rho_1(\Phi,\widehat{\Phi})_2+\rho_2(\Psi,\widehat{\Psi})_2+\rho_3(\theta,\widehat{\theta})_2+\tau(q,\widehat{q})_2+k(\phi_x+\psi,\widehat{\phi}_x+\widehat{\psi})_2\\ &\quad +b(\psi_x,\widehat{\psi})_2, \end{aligned}\tag{4.9}$$

e

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}} = \rho_1\|\Phi\|_2^2+\rho_2\|\Psi\|_2^2+\rho_3\|\theta\|_2^2+\tau\|q\|_2^2+k\|\phi_x+\psi\|_2^2+b\|\psi_x\|_2^2, \tag{4.10}$$

para todos $U=(\phi,\Phi,\psi,\Psi,\theta,q)^T,\widehat{U}=(\widehat{\phi},\widehat{\Phi},\widehat{\psi},\widehat{\Psi},\widehat{\theta},\widehat{q})^T\in\mathcal{H}$. Com estas notações, podemos escrever (4.1)-(3.10) como

$$U_t=\begin{bmatrix}\Phi\\ \Phi_t\\ \Psi\\ \Psi_t\\ \theta_t\\ q_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Phi\\ \frac{k}{\rho_1}(\phi_x+\psi)_x\\ \Psi\\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}-\frac{k}{\rho_2}(\phi_x+\psi)-\frac{\delta}{\rho_2}\theta_x\\ -\dfrac{1}{\rho_3}q_x-\frac{\delta}{\rho_3}\Psi_x\\ -\dfrac{\beta}{\tau}q-\frac{1}{\tau}\theta_x\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & I_d & 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{k}{\rho_1}\partial_{xx} & 0 & \frac{k}{\rho_1}\partial_x & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & I_d & 0 & 0\\ -\frac{k}{\rho_2}\partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2}\partial_{xx}-\frac{k}{\rho_2} & 0 & -\dfrac{\delta}{\rho_2}\partial_x & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\delta}{\rho_3}\partial_x & 0 & -\dfrac{\beta}{\rho_3}\partial_x\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\tau}\partial_x & -\dfrac{\beta}{\tau}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi\\ \Phi\\ \psi\\ \Psi\\ \theta\\ q\end{bmatrix},$$

com $U(0):=U_0=(\phi_0,\phi_1,\psi_0,\psi_1,\theta_0,q_0)^T$, obtendo o operador linear diferencial

$$\mathcal{A}=\begin{bmatrix}0 & I_d & 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{k}{\rho_1}\partial_{xx} & 0 & \frac{k}{\rho_1}\partial_x & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & I_d & 0 & 0\\ -\frac{k}{\rho_2}\partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2}\partial_{xx}-\frac{k}{\rho_2} & 0 & -\dfrac{\delta}{\rho_2}\partial_x & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\delta}{\rho_3}\partial_x & 0 & -\dfrac{\beta}{\rho_3}\partial_x\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\tau}\partial_x & -\dfrac{\beta}{\tau}\end{bmatrix}. \tag{4.11}$$

Resta agora determinarmos o domínio $D(\mathcal{A})$. Por definição de semigrupos lineares temos

$$D(\mathcal{A}) = \{U \in \mathcal{H}; \mathcal{A}U \in \mathcal{H}\}.$$

Assim, dado $U = (\phi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, q) \in \mathcal{H}$ com $\mathcal{A}U \in \mathcal{H}$, teremos

$$\begin{aligned} \Phi \in H_0^1(0,l), \frac{k}{\rho_1}(\phi_x + \psi)_x \in L^2(0,l), \\ \Psi \in H_*^1(0,l), \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\phi_x + \psi) - \frac{\delta}{\rho_2}\theta_x \in L_*^2(0,l), \\ -\frac{1}{\rho_3}q_x - \frac{\delta}{\rho_3}\Psi_x \in L^2(0,l), -\frac{\beta}{\tau}q - \frac{1}{\tau}\theta_x \in L^2(0,l), \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned} \Phi \in H_0^1(0,l), \Psi \in H_*^1(0,l), \theta \in H^1(0,l), \\ q \in H^1(0,l), \phi \in H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l), \psi \in H_*^1(0,l), \psi \in H^2(0,l). \end{aligned}$$

Além disso, para contemplar as condições de fronteira vamos considerar

$$\psi_x \in H_0^1(0,l), \quad \theta \in H_0^1(0,l),$$

de onde definimos

$$D(\mathcal{A}) = \{U \in \mathcal{H}, \Psi \in H_*^1(0,l), \phi, \psi \in H^2, \Phi, \psi_x, \theta \in H_0^1(0,l), q \in H^1\}, \tag{4.12}$$

e denotando ainda

$$H_*^2(0,l) = \left\{f \in H_*^1(0,l); f_x \in H_0^1(0,l)\right\},$$

temos

$$D(\mathcal{A}) = \left(H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)\right) \times H_0^1(0,l) \times H_*^2(0,l) \times H_*^1(0,l) \times H_0^1(0,l) \times H^1(0,l). \tag{4.13}$$

A seguir provamos o Teorema de existência e unicidade de solução do problema (4.7) com $\mathcal{A}$ definido em (4.11) e, consequentemente, do sistema (4.1)-(4.6).

Teorema 4.1. *(Existência e Unicidade) Suponhamos que $\rho_1, \rho_2, \rho_3, b, k, \delta, \tau, \beta > 0$ e considere o operador linear $\mathcal{A}$ definido em* (4.11). *Se $U_0 \in D(\mathcal{A})$, onde $D(\mathcal{A})$ é definido em* (4.12)*, então o problema* (4.7) *possui uma única solução na classe*

$$U \in C\left([0,\infty), D(\mathcal{A})\right) \cap C^1\left([0,\infty), \mathcal{H}\right). \tag{4.14}$$

Em outras palavras, se $\phi_0 \in H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l)$, $\psi_0 \in H_*^2(0,l)$ e $\phi_1, \psi_1 \in H_0^1(0,l)$, então o *sistema* (4.1)-(4.6) *possui uma única solução na classe*

$$\phi, \psi \in C\left([0,\infty), H_0^1(0,l)\cap H^2(0,l)\right)\cap C^1\left([0,\infty), H_0^1(0,l)\right)\cap C^2\left([0,\infty), L^2(0,l)\right). \quad (4.15)$$

Demonstração. De acordo com o Teorema 2.52 basta mostrar que o operador $\mathcal{A}$ definido em (4.11) é um C_0-semigrupo de contrações no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Para isso vamos usar o Teorema 2.48 onde é suficiente mostrar os seguintes itens:

(i) $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$,

(ii) $\mathcal{A}$ é dissipativo em $\mathcal{H}$, ou seja $Re(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} \leq 0$ para todo $U \in D(\mathcal{A})$,

(iii) $0 \in \rho(\mathcal{A})$, isto é, o operador $-\mathcal{A}$ é invertível, com inverso limitado.

No que segue, vamos começar a demonstração pelo item (ii). O item (i) faremos ao final como consequência dos itens (ii) e (iii), apesar de (i) ser imediato da teoria de espaços de Sobolev.

(ii) Seja $U = (\phi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, q)^T \in D(\mathcal{A})$, integrando por partes e usando que $\Psi, \psi_x, \theta \in H_0^1(0,l)$ temos

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}}\\
= \ & k\int_0^l [\Phi_x + \Psi]\,\overline{(\phi_x+\psi)}dx - k\overline{\int_0^l [\Phi_x + \Psi]\,\overline{(\phi_x+\psi)}dx} + \delta\int_0^l \theta\overline{\Psi_x}dx - \delta\overline{\int_0^l \theta\overline{\Psi_x}dx}\\
&-b\overline{\int_0^l \Psi_x\overline{\psi_x}dx} + b\int_0^l \Psi_x\overline{\psi_x}dx + \int_0^l q\overline{\theta_x}dx - \overline{\int_0^l q\overline{\theta_x}dx} + \int_0^l -\beta q\overline{q}dx\\
= \ & k2Im(\int_0^l [\Phi_x + \Psi]\,\overline{(\phi_x+\psi)}dx)i + \delta 2Im(\int_0^l \theta\overline{\Psi_x}dx)i + b2Im(\int_0^l \Psi_x\overline{\psi_x}dx)i\\
&+2Im(\int_0^l q\overline{\theta_x}dx)i - \beta\int_0^l q\overline{q}dx,
\end{aligned}$$

e tomando a parte real

$$Re(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = -\beta\|q\|_2^2 \leq 0, \quad (4.16)$$

lembrando que $\beta > 0$. Isto prova que $\mathcal{A}$ é dissipativo em $\mathcal{H}$.

(iii) Agora vamos mostrar que $0 \in \rho(\mathcal{A})$, isto é, $(-\mathcal{A})^{-1}$ existe e é limitado. Faremos em duas etapas.

Passo 1. Existe $(-\mathcal{A})^{-1}$. Com efeito, dado $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \in \mathcal{H}$, mostraremos que a equação

$$-\mathcal{A}U = F, \quad (4.17)$$

possui uma única solução $U \in D(\mathcal{A})$. Com efeito, reescrevendo (4.17), em termos de coordenadas, temos

$$\begin{aligned}
-\Phi &= f_1 \in H_0^1(0,l), && (4.18)\\
-\frac{k}{\rho_1}(\phi_x+\psi)_x &= f_2 \in L^2(0,l), && (4.19)\\
-\Psi &= f_3 \in H_*^1(0,l), && (4.20)\\
-\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}+\frac{k}{\rho_2}(\phi_x+\psi)+\frac{\delta}{\rho_2}\theta_x &= f_4 \in L_*^2(0,l), && (4.21)\\
\frac{1}{\rho_3}q_x+\frac{\delta}{\rho_3}\Psi_x &= f_5 \in L^2(0,l), && (4.22)\\
\frac{\beta}{\tau}q+\frac{1}{\tau}\theta_x &= f_6 \in L^2(0,l), && (4.23)
\end{aligned}$$

segue que

$$\Phi = -f_1 \in H_0^1(0,l), \tag{4.24}$$

$$\Psi = -f_3 \in H_*^1(0,l). \tag{4.25}$$

Substituindo (4.24) e (4.25) em (4.19), (4.21),(4.22) e (4.23), obtemos o sistema nas variáveis ϕ, ψ, q, θ

$$\begin{aligned}
-k(\phi_x+\psi)_x &= \rho_1 f_2 \quad \in L^2(0,l), && (4.26)\\
-b\psi_{xx}+k(\phi_x+\psi)+\delta\theta_x &= \rho_2 f_4 \quad \in L_*^2(0,l), && (4.27)\\
q_x &= \delta(f_3)_x+\rho_3 f_5 \quad \in L^2(0,l), && (4.28)\\
\beta q+\theta_x &= \tau f_6 \quad \in L^2(0,l). && (4.29)
\end{aligned}$$

Integrando (4.28) em $(0,x)$ com $x \in (0,l)$ temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^x q_x(s)ds = \delta\int_0^x (f_3)_x(s)ds+\rho_3\int_0^x f_5(s)ds\\
\Rightarrow\quad & q(x) = \rho_3\int_0^x f_5(s)ds+\delta f_3(x)-\delta f_3(0)+q(0),
\end{aligned}$$

donde temos

$$q(x) = \rho_3\int_0^x f_5(s)ds+\delta f_3(x)+C_0, \tag{4.30}$$

com $C_0 = -\delta f_3(0)+q(0)$. Note que $q \in H^1(0,l)$ com $q_x = \rho_3 f_5+\delta(f_3)_x$. Agora vamos determinar θ. Substituindo q em (4.29) e isolando θ_x

$$\theta_x = \tau f_6 - \beta \left[\rho_3 \int_0^x f_5(s)ds + \delta f_3(x) + C_0 \right], \tag{4.31}$$

integrando (4.31) em $(0, x)$ com $x \in (0, l)$ temos

$$\begin{aligned} & \int_0^x \theta_x(r)dr = \int_0^x \tau f_6(r)dr - \int_0^x \beta \left[\rho_3 \int_0^r f_5(s)ds + \delta f_3(r) + C_0 \right] dr \\ \Rightarrow \quad & \theta(x) = \int_0^x \tau f_6(r)dr - \int_0^x \int_0^r \rho_3 \beta f_5(s)dsdr - \int_0^x \beta\delta f_3(r)dr \\ & -\beta C_0 x + \theta(0). \end{aligned} \tag{4.32}$$

Agora vamos escolher C_0 de forma que $\theta(l) = 0$. Logo,

$$\theta(l) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \int_0^l \tau f_6 dx - \int_0^l \int_0^r \rho_3 \beta f_5(s)dsdx - \int_0^l \beta\delta f_3 dx - \beta C_0 l,$$

e isolando $\beta C_0 l$, temos

$$\beta C_0 l = \int_0^l \tau f_6 dx - \int_0^l \int_0^x \rho_3 \beta f_5(s)dsdx - \int_0^l \beta\delta f_3(x)dx.$$

Lembrando que $f_3 \in H^1_*(0, l)$, assim $\int_0^l \beta\delta f_3 dx = 0$ e segue que

$$C_0 = \frac{1}{l\beta} \left[\int_0^l \tau f_6 dx - \int_0^l \int_0^x \rho_3 \beta f_5(s)dsdx \right]. \tag{4.33}$$

Substituindo (4.33) em (4.32), temos

$$\begin{aligned} \theta(x) \quad = \quad & \int_0^x \tau f_6 dx - \int_0^x \int_0^y \rho_3 \beta f_5(s)dsdy - \int_0^x \beta\delta f_3(y)dy \\ & -\frac{x}{l} \left[\int_0^l \tau f_6(y)dy - \int_0^l \int_0^y \rho_3 \beta f_5(s)dsdy \right]. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Por (4.31) temos $\theta_x \in L^2(0, l)$. Para que $\theta \in H^1_0(0, l)$, precisamos mostrar que $\theta \in L^2(0, l)$. De fato, como $f_6 \in L^2(0, l)$ e usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \int_0^l \left| \int_0^x \tau f_6(y)dy \right|^2 dx \quad & \leq \quad \int_0^l \left(\int_0^l \tau |f_6(y)|dy \right)^2 dx \\ & \leq \quad \tau^2 l^2 \|f_6\|_2^2 \\ & < \quad \infty. \end{aligned} \tag{4.35}$$

De $f_5 \in L^2(0,l)$ e usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^l \left| \int_0^x \int_0^y \beta\rho_3 f_5(s) ds dy \right|^2 dx &\leq \int_0^l \left(\int_0^l \int_0^l \beta\rho_3 |f_5(s)| ds dy \right)^2 dx \\
&\leq \int_0^l \beta^2\rho_3^2 l \|f_5\|_2^2 dx \\
&\leq \beta^2\rho_3^2 l^2 \|f_5\|_2^2 \\
&< \infty. \qquad (4.36)
\end{aligned}$$

De $f_3 \in L^2(0,l)$, e usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^l \left| \int_0^x \beta\delta f_3(y) dy \right|^2 dx &\leq \int_0^l \left(\int_0^l \beta\delta |f_3(y)| dy \right)^2 dx \\
&\leq \beta^2\delta^2 l^2 \|f_3\|_2^2 \\
&< \infty. \qquad (4.37)
\end{aligned}$$

Logo, de (4.35)-(4.37), provando que $\theta \in L^2(0,l)$, isto é,

$$\int_0^l |\theta(x)|^2 dx < \infty$$

Também temos $\theta(0) = \theta(l) = 0$, e portanto $\theta \in H_0^1(0,l)$. Substituindo C_0 de (4.33) na expressão (4.30), obtemos a expressão de q

$$q(x) = \rho_3 \int_0^x f_5(s) ds + \delta f_3(x) + \frac{1}{l\beta} \left[\int_0^l \tau f_6(y) dy - \int_0^l \int_0^x \rho_3 \beta f_5(s) ds dx \right]. \qquad (4.38)$$

Resta mostrarmos que existe $\phi \in H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)$ e $\psi \in H_*^2(0,l)$ satisfazendo

$$\begin{aligned}
-k(\phi_x + \psi)_x &= \rho_1 f_2, \\
-b\psi_{xx} + k\rho_2(\phi_x + \psi) + \delta\theta_x &= \rho_2 f_4.
\end{aligned}$$

Denotando

$$\begin{aligned}
g_1 &:= \rho_1 f_2 \quad \in L^2(0,l), \qquad (4.39) \\
g_2 &:= \rho_2 f_4 - \delta\theta_x \quad \in L^2(0,l), \qquad (4.40)
\end{aligned}$$

temos o problema

$$\begin{aligned}
-k(\phi_x + \psi)_x &= g_1 \quad \in L^2(0,l), \qquad (4.41) \\
-b\psi_{xx} + k\rho_2(\phi_x + \psi) &= g_2 \quad \in L^2(0,l). \qquad (4.42)
\end{aligned}$$

Afirmamos que existe uma única solução $(\phi,\psi)\in(H^2(0,l)\cap H_0^1(0,l))\times H_*^2(0,l)$ satisfazendo as equações (4.41)-(4.42). Com efeito, seja $(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi})\in(H^2(0,l)\cap H_0^1(0,l))\times H_*^2(0,l)$. Multiplicando (4.41)-(4.42) por $\overline{\widetilde{\phi}}$ e $\overline{\widetilde{\psi}}$, respectivamente, integrando em $(0,l)$, fazendo integração por partes e considerando as condições de fronteira temos

$$\begin{aligned} \int_0^l -k(\phi_x+\psi)\overline{\widetilde{\phi}_x}dx &= \int_0^l g_1\overline{\widetilde{\phi}}dx, \\ -\int_0^l -b\psi_x\overline{\widetilde{\psi}_x}dx+\int_0^l k\rho_2(\phi_x+\psi)\overline{\widetilde{\psi}}dx &= \int_0^l g_2\overline{\widetilde{\psi}}dx, \end{aligned}$$

somando as equações e agrupando convenientemente

$$b\int_0^l \psi_x\overline{\widetilde{\psi}_x}dx+k\int_0^l(\phi_x+\psi)\left(\overline{\widetilde{\phi}_x}+\overline{\widetilde{\psi}}\right)dx=\int_0^l g_1\overline{\widetilde{\phi}}dx+\int_0^l g_2\overline{\widetilde{\psi}}dx. \tag{4.43}$$

Motivado por isto, definimos a aplicação

$$\begin{array}{rccl} a: & H_0^1(0,l)\times H_*^1(0,l)\times H_0^1(0,l)\times H_*^1(0,l) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & ((\phi,\psi),(\widetilde{\phi},\overline{\widetilde{\psi}})) & \longrightarrow & a((\phi,\psi),(\widetilde{\phi},\overline{\widetilde{\psi}})), \end{array} \tag{4.44}$$

onde

$$a((\phi,\psi),(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi}))=b\int_0^l \psi_x\overline{\widetilde{\psi}_x}dx+k\int_0^l(\phi_x+\psi)(\overline{\widetilde{\phi}_x}+\overline{\widetilde{\psi}})dx, \tag{4.45}$$

e também o funcional

$$\begin{array}{rccl} h: & H_0^1(0,l)\times H_*^1(0,l) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (\widetilde{\phi},\widetilde{\psi}) & \longrightarrow & h(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi}), \end{array} \tag{4.46}$$

onde

$$h(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi})=\int_0^l g_1\overline{\widetilde{\phi}}dx+\int_0^l g_2\overline{\widetilde{\psi}}dx. \tag{4.47}$$

É fácil ver que a é sesquilinear. Vamos mostrar que a é contínua na norma de $H_0^1(0,l)\times H_*^1(0,l)$, a qual vamos denotar por $\|.\|_3$, isto é, que existe uma constante $C>0$ tal que

$$|a((\phi,\psi),(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi}))|\le C\|(\phi,\psi)\|_3\|(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi})\|_3 \tag{4.48}$$

para todo $(\phi,\psi),(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi})\in H_0^1(0,l)\times H_*^1(0,l)$. De fato, sejam $(\phi,\psi),(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi})\in H_0^1(0,l)\times$

$H^1_*(0,l)$, temos

$$\begin{aligned}
& |a((\phi,\psi),(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi}))| \\
= & |b\int_0^l \psi_x \overline{\widetilde{\psi}_x} dx + k\int_0^l (\phi_x+\psi)\overline{(\widetilde{\phi}_x+\widetilde{\psi})} dx| \\
\leq & b\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 + k\|\phi_x+\psi\|_2\|\widetilde{\phi}_x+\widetilde{\psi}\|_2 \\
\leq & b\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 + k\left(\|\phi_x\|_2+\|\psi\|_2\right)\left(\|\widetilde{\phi}_x\|_2+\|\widetilde{\psi}\|_2\right) \\
\leq & \|\psi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 + k\left(\|\phi_x\|_2+\|\psi\|_2+\|\psi_x\|_2\right)\left(\|\widetilde{\phi}_x\|_2+\|\widetilde{\psi}\|_2+\|\widetilde{\psi}_x\|_2\right) \\
\leq & b\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 + k\left(\|\phi_x\|_2+\|\psi\|_{H^1}\right)\left(\|\widetilde{\phi}_x\|_2+\|\widetilde{\psi}\|_{H^1}\right) \\
\leq & b\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 + k\left(\|\phi_x\|_2+l\|\psi_x\|_2\right)\left(\|\widetilde{\phi}_x\|_2+l\|\widetilde{\psi}_x\|_2\right) \\
\leq & k\|\phi_x\|_2\|\widetilde{\phi}_x\|_2 + kl\|\phi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 + kl\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\phi}_x\|_2 + (kl^2+b)\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 \\
\leq & C\left(\|\phi_x\|_2+\|\psi_x\|_2\right)\left(\|\widetilde{\phi}_x\|_2+\|\widetilde{\psi}_x\|_2\right) \\
= & C\left(\|\phi\|_{H^1_0(0,l)}+\|\psi\|_{H^1_0(0,l)}\right)\left(\|\widetilde{\phi}\|_{H^1_0(0,l)}+\|\widetilde{\psi}\|_{H^1_0(0,l)}\right) \\
= & C\|(\phi,\psi)\|_3\|(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi})\|_3,
\end{aligned}$$

onde $C=\max\{k,kl,kl^2+b\}$. Assim a é contínua. Agora provaremos que a é coerciva, isto é, existe $C>0$ tal que

$$a((\phi,\psi),(\phi,\psi)) \geq C\|(\phi,\psi)\|_3, \tag{4.49}$$

para todo $(\phi,\psi)\in H^1_0(0,l)\times H^1_*(0,l)$. Para isso vamos usar a seguinte desigualdade. Dados $a,b,c\geq 0$ temos

$$(a+b+c)^2 \leq 9(a^2+b^2+c^2).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
0\leq \|(\phi,\psi)\|_3^2 &= \left(\|\phi\|_{H^1_0(0,l)}+\|\psi\|_{H^1_*(0,l)}\right)^2 \\
&= \left(\|\phi_x\|_2+\|\psi_x\|_2\right)^2 \\
&= \left(\|\phi_x+\psi-\psi\|_2+\|\psi_x\|_2\right)^2 \\
&\leq \left(\|\phi_x+\psi\|_2+\|\psi\|_2+\|\psi_x\|_2\right)^2 \\
&\leq 9\left(\|\phi_x+\psi\|_2^2+\|\psi\|_2^2+\|\psi_x\|_2^2\right) \\
&\leq 9\frac{k}{k}\|\phi_x+\psi\|_2^2+9(l^2+1)\frac{b}{b}\|\psi_x\|_2^2 \\
&\leq C\left(k\|\phi_x+\psi\|_2^2+b\|\psi_x\|_2^2\right) \\
&\leq C\left((\phi_x+\psi,\phi_x+\psi)_2+(\psi_x,\psi_x)_2\right) \\
&\leq Ca((\phi,\psi),(\phi,\psi)),
\end{aligned}$$

onde $C = \max\{\frac{9}{k}, \frac{9(l+1)}{b}\}$. Tomando $C_1 = \frac{1}{C}$ temos

$$a((\phi,\psi),(\phi,\psi)) \geq C_1\|(\phi,\psi)\|_3^2.$$

O que prova que a é coerciva. Também temos que h é antilinear. Vamos mostrar que h é limitada. Sejam $(\phi,\psi) \in H_0^1(0,l) \times H_*^1(0,l)$, usando as desigualdades triangular, de Hölder e Poincaré temos

$$\begin{aligned}
\left|h(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi})\right| &\leq \|g_1\|_2\|\widetilde{\phi}\|_2 + \|g_2\|_2\|\widetilde{\psi}\|_2 \\
&\leq \|g_1\|_2 l\|\widetilde{\phi}_x\|_2 + \|g_2\|_2 l\|\widetilde{\psi}_x\|_2 \\
&\leq C(\|\widetilde{\phi}\|_{H_0^1(0,l)} + \|\widetilde{\psi}\|_{H_*^1(0,l)}) \\
&\leq C\|(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi})\|_3,
\end{aligned}$$

com $C = \max\{l\|g_1\|_2, l\|g_2\|_2\}$. O que prova que h é limitada. Pelo Teorema 2.17 existe um único par $(\phi,\psi) \in H_0^1(0,l) \times H_*^1(0,l)$ tal que

$$a((\phi,\psi),(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi})) = h(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi}), \quad \forall(\widetilde{\phi},\widetilde{\psi}) \in H_0^1 \times H_*^1. \tag{4.50}$$

Resta mostrarmos que $(\phi,\psi) \in H_0^1(0,l) \times H_*^1(0,l)$ satisfazendo (4.50) é a solução regular de (4.41)-(4.42) em $(H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)) \times H_*^2(0,l)$, isto é, pertence a $(H^2(0,l) \cap H_*^1(0,l)) \times H_*^2(0,l)$ e satisfaz (4.41)-(4.42). Primeiro vamos mostrar que $\phi \in H_0^1(0,l)$ satisfazendo (4.50) está em $H^2(0,l)$. De fato, para

$$\widetilde{\phi} = \xi \in C_0^1(0,l) \subset H_0^1(0,l) \quad \text{e} \quad \widetilde{\psi} = 0 \in H_*^1(0,l), \tag{4.51}$$

então

$$a((\phi,\psi),(\xi,0)) = h(\xi,0) \quad \Rightarrow \quad \int_0^l k(\phi_x+\psi)\overline{\xi_x}dx = \int_0^l g_1\overline{\xi}dx,$$

como $\xi \in C_0^1(0,l)$ é arbitrário e $\phi_x, \psi, g_1 \in L^2(0,l)$, então segue que $\phi_x + \psi \in H^1(0,l)$ e, $-k(\phi_x+\psi)_x = g_1$. Sendo $\psi \in H_*^1(0,l) \subset H^1(0,l)$ temos $\phi_x \in H^1(0,l)$ o que significa que $\phi \in H^2(0,l)$. Como por hipótese $\phi \in H_0^1(0,l)$ temos portanto $\phi \in H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)$. Agora vamos mostrar que $\psi \in H_*^1(0,l)$ satisfazendo (4.50) está em $H_*^2(0,l)$, isto é, $\psi_x \in H_0^1(0,l)$. Considere $\xi \in H^1(0,l)$ e defina

$$\widetilde{\xi} = \xi - \frac{1}{l}\int_0^l \xi(x)dx, \tag{4.52}$$

note que $\widetilde{\xi} \in L^2_*(0,l)$, de fato, integrando $\widetilde{\xi}$ em $(0,l)$ temos

$$\begin{aligned}\int_0^l \widetilde{\xi}(y)dy &= \int_0^l \left[\xi(y) - \frac{1}{l}\int_0^l \xi(x)dx\right] dy \\ &= \int_0^l \xi(y)dy - \frac{1}{l}\int_0^l \xi(x)dx \int_0^l dy \\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo $\widetilde{\xi} \in L^2_*(0,l)$. Também temos que $\widetilde{\xi} \in H^1(0,l)$, com $\widetilde{\xi}_x = \xi_x$. De fato, dado $\gamma \in C^1_0(0,l)$, e usando integração por partes temos

$$\begin{aligned}\int_0^l \widetilde{\xi}(y)\overline{\gamma_y(y)}dy &= \int_0^l \left[\xi(y) - \frac{1}{l}\int_0^l \xi(x)dx\right] \overline{\gamma_y(y)}dy \\ &= \int_0^l \xi\gamma_y(y)dy - \frac{1}{l}\int_0^l \xi(x)dx \int_0^l \overline{\gamma_y(y)}dy \\ &= -\int_0^l \xi_y(y)\overline{\gamma(y)}dy,\end{aligned}$$

o que prova que $\widetilde{\xi} \in H^1(0,l)$, com $\widetilde{\xi}_x = \xi_x$. Segue portanto que $\widetilde{\xi} \in H^1_*(0,l)$. Podemos então escolher

$$\widetilde{\psi} = \widetilde{\xi} \in H^1_*(0,l) \quad \text{e} \quad \widetilde{\phi} = 0 \in H^1_0(0,l), \tag{4.53}$$

e, usando (4.52) e (4.40) temos

$$\begin{aligned}&\int_0^l k(\phi_y(y)+\psi(y))\overline{\widetilde{\xi}_y(y)}dy + \int_0^l b\psi_y(y)\overline{\widetilde{\xi}_y(y)}dy = \int_0^l g_2(y)\overline{\widetilde{\xi}(y)}dy \\ \Rightarrow\ &\int_0^l k(\phi_y(y)+\psi(y))\overline{\left[\xi(y) - \frac{1}{l}\int_0^l \xi(x)dx\right]}dy + \int_0^l b\psi_y(y)\overline{\left[\xi(y) - \frac{1}{l}\int_0^l \xi(x)dx\right]_y}dy \\ &= \int_0^l [\rho_2 f_4(y) - \delta\theta_y(y)]\overline{\left[\xi(y) - \frac{1}{l}\int_0^l \xi(x)dx\right]}dy \\ \Rightarrow\ &\int_0^l k(\phi_y(y)+\psi(y))\overline{\xi(y)}dy - \frac{1}{l}\int_0^l k(\phi_y(y)+\psi(y))\int_0^l \overline{\xi(x)}dxdy + \int_0^l b\psi_y(y)\overline{\xi_y(y)}dy \\ &-\frac{1}{l}\int_0^l b\psi_y(y)\left[\int_0^l \overline{\xi(x)}dx\right]_y dy = \int_0^l [\rho_2 f_4(y) - \delta\theta_y(y)]\,\overline{\xi(y)}dy \\ &-\frac{1}{l}\int_0^l [\rho_2 f_4(y) - \delta\theta_y(y)]\int_0^l \overline{\xi(x)}dxdy,\end{aligned}$$

e usando que $\phi \in H^1_0(0,l)$, $\psi \in H^1_*(0,l)$ e $f_4 \in L^2_*(0,l)$, que são hipóteses do espaço de fase, e

$\theta \in H_0^1(0,l)$ que mostramos anteriormente, temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^l k(\phi_y(y)+\psi(y))\overline{\xi(y)}dy - \frac{1}{l}\int_0^l k\phi_y(y)\int_0^l \overline{\xi(x)}dxdy - \frac{1}{l}\int_0^l k\psi(y)\int_0^l \overline{\xi(y)}dxdy\\
&+\int_0^l b\psi_y(y)\overline{\xi_y(y)}dy = \int_0^l \left[\rho_2 f_4(y) - \delta\theta_y(y)\right]\overline{\xi}dy + \frac{1}{l}\int_0^l \rho_2 f_4(y)\int_0^l \overline{\xi(x)}dxdy\\
&-\frac{1}{l}\int_0^l \delta\theta_y(y)\int_0^l \overline{\xi(x)}dxdy\\
\Rightarrow\quad &\int_0^l k(\phi_y(y)+\psi(y))\overline{\xi(y)}dy - \frac{1}{l}k\int_0^l \overline{\xi(x)}dx\left[(\phi(l)-\phi(0))\right] - \frac{1}{l}\int_0^l k\psi(y)\overline{\xi(y)}dy\\
&+\int_0^l b\psi_y(y)\overline{\xi_y(y)}dy = \int_0^l \left[\rho_2 f_4(y) - \delta\theta_y(y)\right]\overline{\xi(y)}dy + \frac{1}{l}\int_0^l \rho_2 f_4(y)dy\int_0^l \overline{\xi(x)}dx\\
&+\frac{1}{l}\int_0^l \overline{\xi(x)}dx\left[\theta(l)-\theta(0)\right]\\
\Rightarrow\quad &\int_0^l k(\phi_y(y)+\psi(y))\overline{\xi(y)}dy + \int_0^l b\psi_y(y)\overline{\xi_y(y)}dy = \int_0^l \left[\rho_2 f_4(y) - \delta\theta_y(y)\right]\overline{\xi(y)}dy,
\end{aligned}$$

e assim

$$\int_0^l b\psi_y\overline{\xi_y}dy = -\int_0^l -\left[\rho_2 f_4 - \delta\theta_y - k(\phi_y+\psi)\right]\overline{\xi}dy,$$

para todo $\xi \in H^1(0,l)$. Como $\phi_x, \psi, g_2 \in L^2(0,l)$ e $C_0^1[0,l] \subset H^1(0,l)$ então $\psi_x \in H^1(0,l)$ e

$$b\psi_{xx} = k(\phi_x+\psi) - (\rho_2 f_4 - \delta\theta_x),$$

e portanto $\psi \in H^2(0,l)$. Assim, para todo $\xi \in H^1(0,l)$ temos

$$\int_0^l \psi_x\overline{\xi_x}dx = -\int_0^l \psi_{xx}\overline{\xi}dx,$$

integrando por partes

$$\int_0^l \psi_x\overline{\xi_x}dx = -\left[\psi_x(l)\overline{\xi(l)} - \psi_x(0)\overline{\xi(0)}\right] + \int_0^l \psi\overline{\xi_x}dx,$$

para todo $\xi \in H^1(0,l)$. Em particular, se $\xi \in C^1[0,l] \subset H^1(0,l)$ tal que $\overline{\xi(0)} = 0$ e $\overline{\xi(l)} = 1$, então $\psi_x(l) = 0$. Analogamente, se $\overline{\xi(l)} = 0$ e $\overline{\xi(0)} = 1$, então $\psi_x(0) = 0$. Logo $\psi_x \in H_0^1(0,l)$. Como por hipótese $\psi \in H_*^1(0,l)$ então temos que $\psi \in H_*^2(0,l)$. Isso conclui a demonstração de que o operador $-\mathcal{A}$ é sobrejetor.

Agora vamos mostrar que $-\mathcal{A}$ é injetor. Fazendo $-\mathcal{A}U = 0$ temos

$$-\Phi = 0, \tag{4.54}$$
$$-\frac{k}{\rho_1}(\phi_x + \psi)_x = 0, \tag{4.55}$$
$$-\Psi = 0, \tag{4.56}$$
$$-\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\phi_x + \psi) + \frac{\delta}{\rho_2}\theta_x = 0, \tag{4.57}$$
$$\frac{1}{\rho_3}q_x + \frac{\delta}{\rho_3}\Psi_x = 0, \tag{4.58}$$
$$\frac{\beta}{\tau}q + \frac{1}{\tau}\theta_x = 0. \tag{4.59}$$

De (4.54) e (4.56) temos $\Phi = \Psi = 0$. Como $F = 0$ de (4.38) e (4.34) temos $q = 0$ e $\theta = 0$, assim (4.54)-(4.59) reduz-se a

$$-\frac{k}{\rho_1}(\phi_x + \psi)_x = 0, \tag{4.60}$$
$$-\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\phi_x + \psi) = 0. \tag{4.61}$$

Usando o produto interno em $L^2(0,l)$ e integrando por partes e usando as hipóteses de fronteira temos

$$\int_0^l \frac{k}{\rho_1}(\phi_x + \psi)\overline{\phi_x}dx = 0,$$
$$\int_0^l \frac{b}{\rho_2}\psi_x\overline{\psi_x}dx + \int_0^l \frac{k}{\rho_2}(\phi_x + \psi)\overline{\psi}dx = 0,$$

somando as equações

$$k\|\phi_x + \psi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 = 0,$$

usando a desigualdade de Poincaré temos que tanto ψ quanto ϕ são nulas quase sempre em $(0,l)$. Isso completa a prova de que $-\mathcal{A}$ é injetor, portanto admite inverso $(-\mathcal{A})^{-1}$.

Passo 2. Finalmente, vamos mostrar que o operador $(-\mathcal{A})^{-1}$ é limitado, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|(-\mathcal{A})^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall F \in \mathcal{H}.$$

Dado $F \in \mathcal{H}$, existe $U \in D(\mathcal{A})$ tal que $-\mathcal{A}U = F$, então é suficiente mostrar que existe $C > 0$

tal que $\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\| - \mathcal{A}U\|_{\mathcal{H}} = C\|F\|_{\mathcal{H}}$. De (4.18) e (4.20) temos

$$\|\Phi\|_2^2 = \|f_1\|_2^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}^2, \tag{4.62}$$

$$\|\Psi\|_2^2 = \|f_3\|_2^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}^2, \tag{4.63}$$

para algum $C > 0$. Além disso, de (4.16) e da desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\beta\|q\|_2^2 = -Re(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} \leq \|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}. \tag{4.64}$$

De $\theta \in H_0^1(0,l)$, da desigualdade de Poincaré e usando (4.23), em seguida (4.64), temos

$$\begin{aligned} \|\theta\|_2^2 &\leq l^2\|\theta_x\|_2^2 \\ &\leq l^2\|\tau f_6 - \beta q\|_2^2 \\ &\leq l^2\left[2^2\|\tau f_6\|_2^2 + \|\beta q\|_2^2\right] \\ &\leq C\left[\|F\|_2^2 + \|q\|_2^2\right] \\ &\leq C\|F\|_2^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \tag{4.65}$$

Agora, tomando o produto interno em $L^2(0,l)$ de (4.19) e (4.21) com ϕ e ψ, respectivamente, e usando integração por partes e as condições de fronteira

$$\int_0^l k(\phi_x + \psi)\overline{\phi_x}dx = \int_0^l \rho_1 f_2\overline{\phi}dx,$$

$$\int_0^l b\psi_x\overline{\psi_x}dx + \int_0^l k(\phi_x + \psi)\overline{\psi}dx - \int_0^l \delta\theta\overline{\psi_x}dx = \int_0^l \rho_2 f_4\overline{\psi}dx.$$

Somando as duas equações acima, usando as desigualdades triangular, de Young e (4.65) temos

$$\begin{aligned} b\|\psi_x\|_2^2 + k\|\phi_x + \psi\|_2^2 &= \rho_1\int_0^l f_2\overline{\psi}dx + \rho_2\int_0^l f_4\overline{\psi} - \delta\int_0^l \theta\overline{\psi_x}dx \\ &\leq \rho_1\|f_2\|_2\|\psi\|_2 + \rho_2\|f_4\|_2\|\psi\|_2 + \delta\|\theta_x\|_2\|\psi\|_2 \\ &\leq \rho_1\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \rho_2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \delta\|\theta\|_2\|\psi_x\|_2 \\ &\leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{b}{2}\|\psi_x\|_2^2 + C\|\theta\|_2^2 \\ &\leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{b}{2}\|\psi_x\|_2^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\|\psi_x\|_2^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2, \tag{4.66}$$

$$\|\phi_x + \psi\|_2^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{4.67}$$

Usando (4.62), (4.63), (4.64), (4.65), (4.66) e (4.67) temos

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \rho_1\|\Phi\|_2^2+\rho_2\|\Psi\|_2^2+\rho_3\|\theta\|_2^2+\tau\|q\|_2^2+k\|\phi_x+\psi\|_2^2+b\|\psi_x\|_2^2\\ &\leq C\|F\|_{\mathcal{H}}^2+C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{F}}\\ &\leq C\|F\|_{\mathcal{H}}^2+\frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2+C\|F\|_{\mathcal{H}}^2,\end{aligned}$$

que finalmente resulta em

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

para todo $F\in\mathcal{H}$. Isso conclui a prova de que $(-\mathcal{A})^{-1}$ é limitado. Logo $0\in\rho(\mathcal{A})$. Isso prova o item (iii) do Teorema 4.1.

(i) $\overline{D(\mathcal{A})}=\mathcal{H}$. Note que o operador $(\lambda_0 I-\mathcal{A}):D(\mathcal{A})\to\mathcal{H}$ pode ser escrito como a composição dos operadores $\mathcal{A}:D(\mathcal{A})\to\mathcal{H}$ e $(\lambda_0\mathcal{A}^{-1}-I):\mathcal{H}\to D(\mathcal{A})$. Por (iii) mostramos que o operador $-\mathcal{A}$ é invertível com inverso limitado, assim dado $\lambda_0>0$ podemos definir os operadores invertíveis com inversos limitados

$$\mathcal{B}_1=-I:\mathcal{H}\to\mathcal{H}\quad\text{e}\quad\mathcal{B}_2=\lambda_0\mathcal{A}^{-1}:\mathcal{H}\to D(\mathcal{A}).$$

Escolhendo $\lambda_0>0$ tal que

$$|\lambda_0|<\frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}},$$

temos

$$\|\mathcal{B}_2\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}=|\lambda_0|\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}<1=\|\mathcal{B}_1\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}.$$

Pelo Teorema 2.10 o operador $\mathcal{B}_1+\mathcal{B}_2$ é linear, limitado e invertível. Por outro lado, o operador $(\lambda_0 I-A)$ é uma composição de operadores lineares invertíveis e portanto sobrejetor para $\lambda_0>0$ suficientemente pequeno. Também sabemos que $\mathcal{H}$ é reflexivo. No item (ii) mostramos que $\mathcal{A}$ é dissipativo. Logo, o Teorema 2.49 resulta que $Im(\lambda I-\mathcal{A})=\mathcal{H}$ para todo $\lambda>0$. Agora, pelo Teorema 2.50 temos $\overline{D(\mathcal{A})}=\mathcal{H}$. □

4.2 Falta de estabilidade exponencial mesmo que $\frac{\rho_1}{k}=\frac{\rho_2}{b}$

Vamos considerar o problema (4.7), o qual está relacionado com o sistema (4.1)-(4.6). Para mostrar que a estabilidade exponencial não ocorre de uma formal geral, vamos usar o Teorema 2.54. No entanto, mostraremos mais adiante (Lema 4.3) que $i\mathbb{R}\subset\rho(A)$, então resta verificar que $\limsup\limits_{|\lambda|\to\infty}\|(i\lambda I-\mathcal{A})^{-1}\|=\infty$.

Teorema 4.2. *Sob as notações anteriores, a solução U do problema* (4.7) *não decai exponencialmente. Em outras palavras, o sistema* (4.1)-(4.6) *não é exponencialmente estável.*

Demonstração. Do Lema 4.3 segue que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$. Então, para cada $F \in \mathcal{H}$ existe $U \in D(\mathcal{A})$ tal que $U = (i\lambda Id - \mathcal{A})^{-1}F$ qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Sendo assim, para uma sequência conveniente $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$, vamos exibir $\lambda_n \in \mathbb{R}$ e $U_n \in D(\mathcal{A})$ com $(i\lambda_n I_d - \mathcal{A})U_n = F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de forma que $\lambda_n \to \infty$ e $\|U_n\|_{\mathcal{H}} \to \infty$ quando $n \to \infty$. Consideremos

$$F_n := (0, \operatorname{sen}(\alpha\lambda_n x), 0, \cos(\alpha\lambda_n x), 0, 0)^T, \quad \lambda_n := \tfrac{n\pi}{\alpha l}; \forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha := \sqrt{\frac{\rho_1}{k}}.$$

A fim de simplificar as notações, vamos denotar $\lambda = \lambda_n$ e omitir o índice n na variáveis a seguir. Note que $F \in \mathcal{H}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, pois $f_2(x) = \operatorname{sen}(\alpha\lambda x) \in L^2(0,l)$ e $f_4(x) = \cos(\alpha\lambda x) \in L^2_*(0,l)$. Seja $U = U_n$ solução de $(i\lambda Id - \mathcal{A})U = F$, a qual pode ser reescrita como

$$
\begin{aligned}
i\lambda\phi - \Phi &= 0, & (4.68)\\
i\lambda\Phi - \frac{k}{\rho_1}\phi_{xx} - \frac{k}{\rho_1}\psi_x &= \operatorname{sen}(\alpha\lambda x), & (4.69)\\
i\lambda\psi - \Psi &= 0, & (4.70)\\
i\lambda\Psi + \frac{k}{\rho_2}(\phi_x + \psi) - \frac{b}{\rho_2}\psi_{nxx} + \frac{\delta}{\rho_2}\theta_x &= \cos(\alpha\lambda x), & (4.71)\\
i\lambda\theta + \frac{\delta}{\rho_3}\Psi_x + \frac{1}{\rho_3}q_x &= 0, & (4.72)\\
i\lambda q + \frac{1}{\tau}\theta_x + \frac{\beta}{\tau}q &= 0. & (4.73)
\end{aligned}
$$

De $\Phi = i\lambda\phi$ e $\Psi = i\lambda\psi$, obtemos o sistema reduzido

$$
\begin{aligned}
-\lambda^2\phi - \frac{k}{\rho_1}\phi_{xx} - \frac{k}{\rho_1}\psi_x &= \operatorname{sen}(\alpha\lambda x), & (4.74)\\
-\lambda^2\psi + \frac{k}{\rho_2}\phi_x + \frac{k}{\rho_2}\psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{\delta}{\rho_2}\theta_x &= \cos(\alpha\lambda x), & (4.75)\\
i\lambda\theta + \frac{\delta}{\rho_3}i\lambda\psi_x + \frac{1}{\rho_3}q_x &= 0, & (4.76)\\
i\lambda q + \frac{1}{\tau}\theta_x + \frac{\beta}{\tau}q &= 0. & (4.77)
\end{aligned}
$$

Vamos obter uma solução do sistema numérico (4.74)-(4.77) na forma

$$\phi(x) = A \operatorname{sen}\alpha\lambda x, \quad \psi(x) = B\cos\alpha\lambda x, \quad \theta(x) = C\operatorname{sen}\alpha\lambda x, \quad q(x) = D\cos\alpha\lambda x,$$

onde A, B, C, D são coeficientes a serem determinados que dependem de λ. Ao substituir a solução particular no sistema, obtemos o seguinte sistema linear

$$
\begin{aligned}
-\lambda^2 A+\frac{k}{\rho_1}\alpha^2\lambda^2 A+\frac{k}{\rho_1}\alpha\lambda B &= 1, && (4.78)\\
-\lambda^2 B+\frac{k}{\rho_2}\alpha\lambda A+\frac{k}{\rho_2}B+\frac{b}{\rho_2}\alpha^2\lambda^2 B+\frac{\delta}{\rho_2}\alpha\lambda C &= 1, && (4.79)\\
i\lambda C-\frac{\delta}{\rho_3}i\lambda^2\alpha B-\frac{1}{\rho_3}\alpha\lambda D &= 0, && (4.80)\\
i\lambda D+\frac{1}{\tau}\alpha\lambda C+\frac{\beta}{\tau}D &= 0. && (4.81)
\end{aligned}
$$

De (4.81) temos

$$D=\frac{-\alpha\lambda}{i\lambda\tau+\beta}C, \tag{4.82}$$

e substituindo (4.82) em (4.80) obtemos

$$C=\frac{\delta\alpha\lambda(i\lambda\tau+\beta)}{\rho_3(i\lambda\tau+\beta)-i\alpha^2\lambda}B. \tag{4.83}$$

Além disso, usando a definição de $\alpha=\sqrt{\frac{\rho_1}{k}}$ em (4.78), temos

$$B=\frac{\rho_1}{k\alpha\lambda}. \tag{4.84}$$

Fazendo $\Theta=\left(\frac{b}{\rho_2}\alpha^2-1\right)$ e usando (4.83) em (4.79) chegamos a

$$\Theta\lambda^2 B+\frac{k}{\rho_2}\alpha\lambda A+\frac{k}{\rho_2}\alpha\lambda A+\frac{k}{\rho_2}B+\frac{\delta^2\alpha^2\lambda^2(i\lambda\tau+\beta)}{\rho_2[\rho_3(i\lambda\tau+\beta)-i\alpha^2\lambda]}B=1. \tag{4.85}$$

Usando (4.84) em (4.85) e $\alpha=\sqrt{\frac{\rho_1}{k}}$ temos

$$
\begin{aligned}
A &= -\Theta\frac{\rho_2}{k}-\frac{1}{\lambda^2}+\frac{\rho_1\delta^2(i\lambda\tau+\beta)}{k^2[i\alpha^2\lambda-\rho_3(i\lambda\tau+\beta)]}+\frac{\rho_2\sqrt{k}}{k\lambda\sqrt{\rho_1}}\\
&= -\Theta\frac{\rho_2}{k}-\frac{1}{\lambda^2}+P(\lambda),
\end{aligned}
$$

onde

$$P(\lambda)=\frac{\rho_1\delta^2(i\lambda\tau+\beta)}{k^2[i\alpha^2\lambda-\rho_3(i\lambda\tau+\beta)]}+\frac{\rho_2\sqrt{k}}{k\lambda\sqrt{\rho_1}},$$

com

$$\lim_{\lambda\to\infty}|\lambda||P(\lambda)|=\infty.$$

Retornando a equação (4.68)

$$\begin{aligned}\Phi &= i\lambda\phi\\ &= i\lambda A \operatorname{sen}\alpha\lambda x\\ &= i\lambda\left(-\Theta\frac{\rho_2}{k}-\frac{1}{\lambda^2}+P(\lambda)\right)\operatorname{sen}(\alpha\lambda x).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|\Phi\|_2 &= \left(\int_0^l\left|i\lambda\left(-\Theta\frac{\rho_2}{k}-\frac{1}{\lambda^2}+P(\lambda)\right)\operatorname{sen}(\alpha\lambda x)\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \left|i\lambda\left(-\Theta\frac{\rho_2}{k}-\frac{1}{\lambda^2}+P(\lambda)\right)\right|\left(\int_0^l\operatorname{sen}^2(\alpha\lambda x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Usando que $\operatorname{sen}^2(\alpha\lambda x)=\dfrac{1+\cos 2\alpha\lambda x}{2}$ temos

$$\begin{aligned}\|\Phi\|_2 &= \left|i\lambda\left(-\Theta\frac{\rho_2}{k}-\frac{1}{\lambda^2}+P(\lambda)\right)\right|\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\operatorname{sen}(2\alpha\lambda l)}{4\alpha\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \left|\lambda\frac{b}{k}\left(\frac{\rho_2}{b}-\frac{\rho_1}{k}\right)-\frac{1}{\lambda}+\lambda P(\lambda)\right|\left(\frac{l}{2}+\frac{\operatorname{sen}2\alpha\lambda l}{4\alpha\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

usando que $\lambda_n=\frac{n\pi}{\alpha l}$, temos

$$\left(\frac{l}{2}+\frac{\operatorname{sen}2\alpha\lambda_n l}{4\alpha\lambda_n}\right)=\left(\frac{l}{2}+\frac{\operatorname{sen}2\alpha\frac{n\pi}{\alpha l}l}{4\alpha\frac{n\pi}{\alpha l}}\right)=\left(\frac{l}{2}+\frac{l\operatorname{sen}2n\pi}{4n\pi}\right)\to\frac{l}{2},\ \ n\to\infty, \qquad (4.86)$$

assim quando $n\to\infty$ temos $\lambda\to\infty$, que por sua vez implica que o número

$$\left|\lambda\frac{b}{k}\left(\frac{\rho_2}{b}-\frac{\rho_1}{k}\right)+\lambda P(\lambda)-\frac{1}{\lambda}\right|^2\left|\frac{l}{2}+\frac{l\operatorname{sen}2\alpha\lambda l}{4\alpha\lambda}\right|$$

se comporta como um polinômio em λ de grau 2 quando $\lambda\to\infty$, o que denotaremos na forma

$$\left|\lambda\frac{b}{k}\left(\frac{\rho_2}{b}-\frac{\rho_1}{k}\right)+\lambda P(\lambda)-\frac{1}{\lambda}\right|^2\left|\frac{\pi}{2}+\frac{\operatorname{sen}2\alpha\lambda\pi}{4\alpha\lambda}\right|\approx C\lambda^2, C>0, \lambda\to\infty,$$

de onde segue que

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|U\|_2^2\geq\lim_{\lambda\to\infty}\rho_1\|\Phi\|_2^2=\infty,$$

o que prova que o sistema (4.1)-(4.6) não é exponencialmente estável, mesmo se $\dfrac{\rho_1}{k}=\dfrac{\rho_2}{b}$. $\square$

4.3 ESTABILIDADE EXPONENCIAL: O NÚMERO DE ESTABILIDADE EXPONENCIAL

Vamos definir uma condição necessária e suficiente para que o problema (4.1)-(4.5) seja exponencialmente estável. Para isso vamos usar o Teorema 2.54 novamente. Foi mostrado no Teorema 4.1 que o operador $\mathcal{H}$ definido em (4.11) é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em $\mathcal{H}$, e no que segue vamos mostrar que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$, além da condição (ii) conforme o Teorema 2.54, a qual será obtida supondo uma condição entre os coeficientes do sistema.

Lema 4.3. *Suponhamos que $\rho_1, \rho_2, \rho_3, b, k, \delta, \beta > 0$. Sob as notações da Subseção 4.1, tem-se $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$, onde $\mathcal{A}$ é o operador linear definido em* (4.11).

Demonstração. Como as inclusões $H^2(0,l) \hookrightarrow H^1(0,l) \hookrightarrow L^2(0,l)$ são compactas (Teorema 2.30 item (iii)), então segue que cada espaço do produto cartesiano em $D(\mathcal{A})$ tem inclusão compacta no respectivo espaço de $\mathcal{H}$. Logo, segue que $D(\mathcal{A}) \overset{c}{\hookrightarrow} \mathcal{H}$. Pelo Teorema 2.44 temos $\rho(\mathcal{A})$ é compacto. Pelo Corolário 2.45 segue que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C}\backslash\rho(\mathcal{A})$ é formado apenas por autovalores de $\mathcal{A}$. Suponha que $i\mathbb{R} \nsubseteq \rho(\mathcal{A})$. Então, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $i\lambda \notin \rho(\mathcal{A})$. Assim, $i\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$, isto é, existe $U = (\phi, \Phi, \psi(t), \Psi) \in D(\mathcal{A})$ não nulo, tal que

$$\mathcal{A}U = i\lambda U, \tag{4.87}$$

disso e da dissipatividade, veja (4.16), do operador $\mathcal{A}$ segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}U - i\lambda U = 0 \quad &\Rightarrow \quad (\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} - i\lambda(U,U)_{\mathcal{H}} = 0 \\ &\Rightarrow \quad Re((\mathcal{A}U,U)_{\mathcal{H}}) - Re(i\lambda\|U\|^2_{\mathcal{H}}) = 0 \\ &\Rightarrow \quad -\beta\|q\|_2^2 = 0 \\ &\Rightarrow \quad q = 0. \end{aligned} \tag{4.88}$$

Além disso, (4.87) em termos de coordenadas fica

$$i\lambda\phi - \Phi = 0, \tag{4.89}$$

$$i\lambda\rho_1\Phi - k(\phi_x + \psi)_x = 0, \tag{4.90}$$

$$i\lambda\psi - \Psi = 0, \tag{4.91}$$

$$i\lambda\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) + \delta\theta_x = 0, \tag{4.92}$$

$$i\rho_3\theta + q_x + \delta\Psi_x = 0, \tag{4.93}$$

$$i\lambda\tau q + \beta q + \theta_x = 0. \tag{4.94}$$

substituindo (4.88) em (4.94) resulta $\theta_x = 0$. Como $\theta \in H_0^1(0,l)$ a desigualdade de Poincaré resulta em

$$\|\theta\|_2^2 \leq l^2\|\theta_x\|_2^2 = 0, \tag{4.95}$$

substituindo (4.88) e (4.95) em temos $\Psi_x = 0$. Como $\Psi \in H^1_*(0,l)$ pela desigualdade de Poincaré temos

$$\|\Psi\|_2^2 \leq l^2\|\Psi_x\|_2^2 = 0, \tag{4.96}$$

de (4.96) e (4.91) temos

$$\psi = 0. \tag{4.97}$$

Substituindo (4.96),(4.97) e (4.88) em (4.92) e usando que $\phi \in H^1_0(0,l)$ obtemos

$$\phi = 0, \tag{4.98}$$

e de (4.98) e (4.89) temos

$$\Phi = 0. \tag{4.99}$$

Finalmente, de (4.98), (4.99), (4.97), (4.96), (4.95) e (4.88) segue que $U = 0$, o que é absurdo, pois U é autovetor de $\mathcal{A}$. Portanto temos $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$. $\square$

Agora, conforme o Teorema 2.54 devemos mostrar que o limite superior de $\|(i\lambda - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}} < \infty$ quando $|\lambda| \to \infty$. Como o Lema 4.3 mostrou que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$, então dado $F \in \mathcal{H}$ existe $U \in D(\mathcal{A})$ satisfazendo

$$(i\lambda I - \mathcal{A})U = F \tag{4.100}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Então é suficiente obter $C > 0$ tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}} \tag{4.101}$$

onde U é solução de (4.100). Vamos começar estimando alguns termos da norma de U.

Lema 4.4. *Suponhamos que $\rho_1, \rho_2, \rho_3, b, k, \delta, \beta > 0$, e seja $\mathcal{A}$ o operador linear definido em* (4.11). *Então existe uma constante positiva C tal que*

$$\|q\|_2^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Demonstração. Pelo Lema 4.3 temos que $(i\lambda I - \mathcal{A}) : D(\mathcal{A}) \to \mathcal{H}$ é inversível com inverso limitado para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim, dado $F \in \mathcal{H}$ existe um único $U \in D(\mathcal{A})$ tal que $(i\lambda I_d - \mathcal{A})U = F$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo,

$$(F, U)_{\mathcal{H}} = ((i\lambda I - \mathcal{A})U, U)_{\mathcal{H}} = i\lambda\|U\|^2_{\mathcal{H}} - (\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}}.$$

Tomando a parte real e usando a identidade (4.16), temos

$$\beta\|q\|_2^2 = -Re(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = Re(F, U)_{\mathcal{H}} \leq \|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.$$

□

Lema 4.5. *Sob as condições do Lema 4.3, existe uma constante positiva C tal que*

$$\|\theta\|_2^2 \leq C\|\Psi\|_2\|q\|_2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{4.102}$$

Demonstração. Dado $F \in \mathcal{H}$, existe um único $U \in D(\mathcal{A})$ tal que $(i\lambda I_{\mathcal{H}} - \mathcal{A})U = F$, que em termos de suas coordenadas resulta em

$$\begin{aligned} i\lambda\phi - \Phi &= f_1, && (4.103)\\ i\lambda\rho_1\Phi - k(\psi_x + \psi)_x &= f_2\rho_1, && (4.104)\\ i\lambda\psi - \Psi &= f_3, && (4.105)\\ i\lambda\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) + \delta\theta_x &= \rho_2 f_4, && (4.106)\\ i\lambda\rho_3\theta + q_x + \delta\Psi_x &= \rho_3 f_5, && (4.107)\\ i\lambda\tau q + \beta q + \theta_x &= \tau f_6. && (4.108) \end{aligned}$$

Integrando (4.107) em $[x, l] \subset [0, l]$ e em seguida multiplicando por $\int_0^l \overline{q}dx$ obtemos

$$\begin{aligned} & i\lambda\rho_3\theta + q_x + \delta\Psi_x = \rho_3 f_5\\ \Rightarrow\ & i\lambda\rho_3\int_x^l \theta(s)ds + \int_x^l q_s(s)ds + \delta\int_x^l \Psi_s(s)ds = \rho_3\int_x^l f_5(s)ds\\ \Rightarrow\ & i\lambda\rho_3\int_x^l \theta ds\int_0^l \overline{q}dx + [q(l) - q(x)]\int_0^l \overline{q(x)}dx + \delta[\Psi(l) - \Psi(x)]\int_0^l \overline{q(x)}dx\\ & = \rho_3\int_x^l f_5(s)ds\int_0^l \overline{q(x)}dx, \end{aligned}$$

de onde

$$\begin{aligned} [q(l) + \delta\Psi(l)]\int_0^l \overline{q}dx &= \rho_3\int_x^l f_5 ds\int_0^l \overline{q}dx + [q(x) + \delta\Psi(x)]\int_0^l \overline{q}dx\\ &\quad - i\lambda\rho_3\int_x^l \theta(s)ds\int_0^l \overline{q(x)}dx. && (4.109) \end{aligned}$$

De (4.108), como $\tau i\lambda\overline{q} = -(\overline{\tau i\lambda q})$ e $\theta \in H_0^1(0, l)$ temos que

$$\begin{aligned} i\lambda\rho_3\int_x^l \theta ds\int_0^l \overline{q}dx &= -\frac{\rho_3}{\tau}\int_x^l \theta ds\int_0^l \overline{(\tau f_6 - \beta q - \theta_x)}dx\\ &= -\frac{\rho_3}{\tau}\int_x^l \theta ds\int_0^l \overline{(\tau f_6 - \beta q)}dx, \end{aligned}$$

substituindo em (4.109), depois integrando sobre $[0,l]$ e usando a desigualdade triangular,

$$\begin{aligned}
& \left| l\left[q(l)+\delta\Psi(l)\right]\int_0^l \overline{q(x)}dx\right| \\
= & \left|\int_0^l \left[[q(l)+\delta\Psi(l)]\int_0^l \overline{q(x)}dx\right]dx\right| \\
\leq & \rho_3\int_0^l\int_0^l |f_5(s)|ds\int_0^l |\overline{q(x)}|dxdx + \int_0^l |q|\int_0^l |\overline{q(x)}|dxdx + \delta\int_0^l |\Psi|\int_0^l |\overline{q(x)}|dxdx \\
& +\frac{\rho_3}{\tau}\int_0^l\int_0^l |\theta(s)|ds\int_0^l \tau|\overline{f_6(x)}|dxdx + \beta\frac{\rho_3}{\tau}\int_0^l\int_0^l |\theta(s)|ds\int_0^l |\overline{q(x)}|dxdx \\
\leq & \rho_3 l\int_0^l |f_5(x)|dx\int_0^l |\overline{q(x)}|dx + \|q\|_2\|q\|_2 + \delta\|\Psi\|_2\|q\|_2 + \frac{\rho_3}{\tau}\int_0^l |\theta(s)|ds\int_0^l \tau|\overline{f_6(x)}|dx \\
& +\beta\frac{\rho_3}{\tau}l\int_0^l |\theta(s)|ds\int_0^l |\overline{q(x)}|dx.
\end{aligned}$$

da desigualdade de Hölder e o Lema 4.4 temos

$$\begin{aligned}
\left| l\left[q(l)+\delta\Psi(l)\right]\int_0^l \overline{q}dx\right| \leq & \rho_3 l\|f_5\|_2\|q\|_2 + \|q\|_2^2 + \delta\|\Psi\|_2\|q\|_2 + \frac{\rho_3}{\tau}\|\theta\|_2\tau\|f_6\|_2 \\
& +\beta\frac{\rho_3}{\tau}l\|\theta\|_2\|q\|_2,
\end{aligned}$$

donde segue que

$$\left|[q(l)+\delta\Psi(l)]\int_0^l \overline{q}dx\right| \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|\Psi\|_2\|q\|_2 + C\|\theta\|_2\|q\|_2. \quad (4.110)$$

Agora, integrando (4.108) sobre $[0,x]\subset[0,l]$, depois multiplicando por $\overline{\theta}$, integrando em $[0,l]$ com integração por partes quando for preciso, e usando (4.107)

$$\begin{aligned}
& \|\theta\|_2^2 \\
= & \int_0^l \tau\int_0^x f_6(s)ds\overline{\theta(x)}dx - \beta\int_0^l\int_0^x q(s)ds\overline{\theta(x)}dx + \frac{\tau}{\rho_3}\int_0^l\int_0^x q(s)ds\overline{i\lambda\rho_3\theta(x)}dx \\
= & \int_0^l \tau\int_0^x f_6(s)ds\overline{\theta(x)}dx - \beta\int_0^l\int_0^x q(s)ds\overline{\theta(x)}dx \\
& +\frac{\tau}{\rho_3}\int_0^l\int_0^x q(s)ds\left[\rho_3\overline{f_5(x)} - \overline{q_x(x)} - \delta\overline{\Psi_x(x)}\right]dx \\
= & \int_0^l \tau\int_0^x f_6(s)ds\overline{\theta(x)}dx - \beta\int_0^l\int_0^x q(s)ds\overline{\theta(x)}dx + \tau\int_0^l\int_0^x q(s)ds\overline{f_5(x)}dx \\
& -\frac{\tau}{\rho_3}\left[\int_0^l q(s)ds\overline{q(l)} - \int_0^l q(x)\overline{q(x)}\right]dx - \frac{\delta\tau}{\rho_3}\left[\int_0^l q(x)dx\overline{\Psi(l)} - \int_0^l q(x)\overline{\Psi}dx\right].
\end{aligned}$$

Tomando a parte real, em seguida o módulo e a desigualdade triangular no lado direito da equação obtemos

$$
\begin{aligned}
&\|\theta\|_2^2\\
= \;& \int_0^l \tau \int_0^x f_6(s)ds\overline{\theta(x)}dx - \beta\int_0^l\int_0^x q(s)ds\overline{\theta(x)}dx + \tau\int_0^l\int_0^x q(s)ds\overline{f_5(x)}dx\\
&-\frac{\tau}{\rho_3}\left[\int_0^l q(x)dx\overline{q(l)} - \int_0^l q(x)\overline{q(x)}dx\right] - \frac{\delta\tau}{\rho_3}\left[\int_0^l q(x)dx\overline{\Psi(l)} - \int_0^l q(x)\overline{\Psi(x)}dx\right]\\
\leq \;& \left|\int_0^l \tau\int_0^x f_6(s)ds\overline{\theta}dx\right| + \left|\beta\int_0^l\int_0^x q(s)ds\overline{\theta}dx\right| + \left|\tau\int_0^l\int_0^x q(s)ds\overline{f_5(x)}dx\right|\\
&+\frac{\tau}{\rho_3}\left|\left[\overline{q(l)} + \delta\overline{\Psi(l)}\right]\int_0^l q(x)dx\right| + \frac{\tau}{\rho_3}\|q\|_2^2 + \frac{\delta\tau}{\rho_3}\left|\int_0^l q(x)\overline{\Psi(x)}dx\right|\\
\leq \;& \int_0^l \tau\int_0^l |f_6(s)|ds|\overline{\theta(x)}|dx + \beta\int_0^l\int_0^x |q(s)|ds|\overline{\theta(x)}|dx + \tau\int_0^l\int_0^l |q(s)|ds|\overline{f_5(x)}|dx\\
&+\frac{\tau}{\rho_3}\left|\left[\overline{q(l)} + \delta\overline{\Psi(l)}\right]\int_0^l q(x)dx\right| + \frac{\tau}{\rho_3}\|q\|_2^2 + \frac{\delta\tau}{\rho_3}\int_0^l |q(x)\overline{\Psi(x)}|dx.
\end{aligned}
$$

Além disso, do Lema 4.5, e as desigualdades triangular, de Hölder, de Young vem que

$$
\begin{aligned}
\|\theta\|_2^2 \;\leq\;& \tau\|f_6\|_2\|\theta\|_2 + \beta\|q\|_2\|\theta\|_2 + \tau\|q\|_2\|f_5\|_2 + \frac{\tau}{\rho_3}\left|\left[\overline{q(l)} + \delta\overline{\Psi(l)}\right]\int_0^l qdx\right|\\
&+\frac{\tau}{\rho_3}\|q\|_2^2 + \frac{\delta\tau}{\rho_3}\|q\|\|\Psi\|_2\\
\leq\;& C\|q\|_2\|\theta\|_2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\left[C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|\Psi\|_2\|q\|_2 + C\|\theta\|_2\|q\|_2\right]\\
&+\frac{\delta\tau}{\rho_3}\|q\|\|\Psi\|_2\\
\leq\;& C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|\Psi\|_2\|q\|_2 + \frac{1}{2}\|\theta\|_2^2 + \frac{1}{2}C\|q\|_2^2 + C\|q\|\|\Psi\|_2,
\end{aligned}
$$

de onde concluímos que

$$\|\theta\|_2^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|q\|_2\|\Psi\|_{\mathcal{H}}$$

ou seja, fica provada (4.102). $\square$

Lema 4.6. *Sob as condições e notações do Lema 4.5, existe uma constante positiva C tal que*

$$\int_0^l |\Psi|^2dx \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2. \tag{4.111}$$

Além disso, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$\int_0^l |\psi_x|^2dx \leq \frac{C_\epsilon}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + \frac{\epsilon}{|\lambda|^2}\int_0^l |\phi_x+\psi|^2dx + C_\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \tag{4.112}$$

para $|\lambda|$ suficientemente grande.

Demonstração. Passo 1. Vamos mostrar que existe $C > 0$ tal que

$$\|\Psi\|_2^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C\|\theta\|_2\|\psi_x\|_2. \tag{4.113}$$

Multiplicando (4.107) por $\int_0^x \overline{\Psi}ds$, integrando em $[0, l]$, usando integração por partes e usando (4.106) temos

$$\begin{aligned}
&\delta\int_0^l |\Psi|^2 dx \\
= \;& i\lambda\rho_3\int_0^l \theta(x)\int_0^x \overline{\Psi(s)}dsdx - \int_0^l q(x)\overline{\Psi(x)}dx - \rho_3\int_0^l f_5(x)\int_0^x \overline{\Psi(s)}dsdx \\
= \;& \frac{\rho_3}{\rho_2}\int_0^l \theta(x)\int_0^x \left(\rho_2\overline{f_4(s)} + b\overline{\psi_{xx}(s)} - k(\overline{\phi_x(s)} + \overline{\psi(s)}) - \delta\overline{\theta_x(s)}\right) dsdx - \int_0^l q(x)\overline{\Psi(x)}dx \\
& -\rho_3\int_0^l f_5(x)\int_0^x \overline{\Psi(s)}dsdx \\
= \;& \rho_3\int_0^l \theta(x)\int_0^x \overline{f_4(s)}dsdx + \frac{\rho_3 b}{\rho_2}\int_0^l \theta(x)\int_0^x \overline{\psi_{xx}(s)}dsdx - k\frac{\rho_3}{\rho_2}\int_0^l \theta(x)\int_0^x (\overline{\phi_x(s)} + \overline{\psi(s)})dsdx \\
& -\frac{\rho_3}{\rho_2}\delta\int_0^l \theta(x)\int_0^x \overline{\theta_x(s)}dsdx - \int_0^l q(x)\overline{\Psi(x)}dx - \rho_3\int_0^l f_5(x)\int_0^x \overline{\Psi(s)}dsdx \\
= \;& \rho_3\int_0^l \theta(x)\int_0^x \overline{f_4(s)}dsdx + \frac{\rho_3}{\rho_2}\int_0^l \theta(x)b\overline{\psi_x(s)}dsdx - k\frac{\rho_3}{\rho_2}\int_0^l \theta(x)\int_0^x (\overline{\phi_x(s)} + \overline{\psi(s)})dsdx \\
& -\frac{\rho_3}{\rho_2}\delta\int_0^l \theta(x)\overline{\theta(x)}dx - \int_0^l q(x)\overline{\Psi(x)}dx - \rho_3\int_0^l f_5(x)\int_0^x \overline{\Psi(s)}dsdx.
\end{aligned} \tag{4.114}$$

Agora, de (4.103) e (4.105), temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^l \theta(x)\int_0^x (\overline{\phi_x(s) + \psi(s)})dsdx \\
= \;& -\frac{i}{\lambda}\int_0^l \theta(x)\int_0^x \left(\overline{(f_1)_x(s)} + \overline{\Phi_x(s)} + \overline{f_3(s)} + \overline{\Psi(s)}\right) dsdx \\
= \;& -\frac{i}{\lambda}\left[\int_0^l \theta(x)\int_0^x \left(\overline{(f_1)_x(s)} + \overline{f_3(s)}\right) dsdx + \int_0^l \theta(x)\overline{\Phi(x)}dx + \int_0^l \theta(x)\int_0^x \overline{\Psi(s)}dsdx\right].
\end{aligned}$$

Usando as desigualdades triangular e de Hölder, temos para $|\lambda| > 1$ que

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^l \theta(x)\int_0^x (\phi_x(s) + \psi(s))dsdx\right| &\leq \frac{1}{|\lambda|}\left[l\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|\theta\|_2\|U\|_{\mathcal{H}}\right] \\
&\leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|}\|\theta\|_2\|U\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Substituindo em (4.114), aplicando as desigualdades triangular, de Hölder e de Young e os

Lemas 4.4 e 4.5, e tomando $|\lambda| > 1$,

$$\begin{aligned}
& \delta \int_0^l |\Psi(x)|^2 dx \\
\leq\ & \rho_3 \int_0^l |\theta(x)| \int_0^l |f_4(x)| dx dx + \frac{b\rho_3}{\rho_2} \int_0^l |\theta(x)||\psi_x(x)| dx \\
& + k\frac{\rho_3}{\rho_2} \left| \int_0^l \theta(x) \int_0^x (\overline{\phi_s(s)} + \overline{\psi(s)}) ds dx \right| + \frac{\rho_3}{\rho_2}\delta \|\theta\|_2^2 + \int_0^l |q(x)\Psi(x)| dx \\
& + \rho_3 \int_0^l |f_5(x)| \int_0^l |\Psi(x)| dx dx \\
\leq\ & \rho_3 l \|\theta\|_2 \|f_4\|_2 + \frac{b\rho_3}{\rho_2} \|\theta\|_2 \|\psi_x\|_2 + \|q\|_2 \|\Psi\|_2 + \rho_3 l \|f_5\| \|\Psi\|_2 + \frac{\rho_3}{\rho_2}\delta \|\theta\|_2^2 \\
& + k\frac{\rho_3}{\rho_2} \left[\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|\theta\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} \right] \\
\leq\ & C\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C\|\theta\|_2 \|\psi_x\|_2 + \frac{1}{2\delta}\|q\|_2^2 + \frac{\delta}{2}\|\Psi\|_2^2 + \frac{C}{|\lambda|}\|\theta\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

que resulta em

$$\int_0^l |\Psi|^2 dx \leq C\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C\|\theta\|_2 \|\psi_x\|_2 + \frac{C}{|\lambda|}\|\theta\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}}.$$

O que conclui o Passo 1.

Passo 2. Vamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$, existem constantes C, C_ϵ positivas tais que

$$\frac{b}{2}\|\psi_x\|_2^2 \leq C_\epsilon \|\Psi\|_2^2 + \frac{\epsilon}{|\lambda|^2}\|\phi_x + \psi\|_2^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{4.115}$$

Multiplicando (4.106) por $\overline{\psi}$ e integrando em $[0, l]$ com integração por partes e as condições de fronteira e usando (4.105) temos que

$$i\lambda \int_0^l \Psi\overline{\psi} dx - b\int_0^l \psi_{xx}\overline{\psi} dx + k\int_0^l (\phi_x + \psi)\overline{\psi} dx + \delta \int_0^l \theta_x \overline{\psi} dx \quad = \quad \rho_2 \int_0^l f_4 \overline{\psi} dx$$

que resulta em

$$\begin{aligned}
& b\int_0^l |\psi_x|^2 dx \\
=\ & -i\lambda\rho_2 \int_0^l \Psi\overline{\psi} dx - k\int_0^l (\phi_x + \psi)\overline{\psi} dx + \delta \int_0^l \theta \overline{\psi_x} dx - \rho_2 \int_0^l f_4 \overline{\psi} dx \\
=\ & -i\lambda\rho_2 \int_0^l \Psi \frac{\overline{f_3} + \overline{\Psi}}{\lambda} \bar{i} dx - k\int_0^l (\phi_x + \psi)\frac{\overline{f_3} + \overline{\Psi}}{\lambda} \bar{i} dx + \delta \int_0^l \theta \overline{\psi_x} dx - \rho_2 \int_0^l f_4 \overline{\psi} dx.
\end{aligned}$$

Tomando a parte real da equação, em seguida o módulo do lado direito obtemos

$$\begin{aligned}
& b\int_0^l |\psi_x|^2 dx \\
\leq\ & \rho_2\int_0^l |\Psi\overline{f_3}|dx + \int_0^l |\Psi|^2 dx + \frac{k}{|\lambda|}\int_0^l |(\phi_x+\psi)\overline{f_3}|dx + \frac{k}{|\lambda|}\int_0^l |(\phi_x+\psi)\overline{\Psi}|dx \\
& +\delta\int_0^l |\theta\overline{\psi_x}|dx + \rho_2\int_0^l |f_4\overline{\psi}|dx.
\end{aligned}$$

Usando novamente as desigualdades triangular, de Hölder e de Young com $\epsilon > 0$, temos

$$\begin{aligned}
& b\int_0^l |\psi_x|^2 dx \\
\leq\ & \rho_2\|\Psi\|_2\|f_3\|_2 + \int_0^l |\Psi|^2 dx + k\frac{1}{|\lambda|}\|\phi_x+\psi\|_2\|f_3\|_2 + k\frac{1}{|\lambda|}\|\phi_x+\psi\|_2\|\Psi\|_2 \\
& +\delta\|\theta\|_2\|\psi_x\|_2 + \rho_2\|f_4\|_2\|\psi\|_2 \\
\leq\ & \rho_2\|\Psi\|_2\|f_3\|_2 + \int_0^l |\Psi|^2 dx + \frac{k}{|\lambda|}\|\phi_x+\psi\|_2\|f_3\|_2 + \frac{\epsilon}{|\lambda|^2}\|\phi_x+\psi\|_2^2 \\
& +C_\epsilon k^2\|\Psi\|_2^2 + \frac{b}{2}\|\psi_x\|_2^2 + \frac{\delta^2}{2b}\|\theta\|_2^2 + \rho_2\|f_4\|_2\|\psi\|_2 \\
\leq\ & \rho_2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \int_0^l |\Psi|^2 dx + \frac{k}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{\epsilon}{|\lambda|^2}\|\phi_x+\psi\|_2^2 + C_\epsilon k^2\|\Psi\|_2^2 + \frac{b}{2}\|\psi_x\|_2^2 \\
& +\frac{\delta^2}{2b}\|\theta\|_2^2 + \rho_2\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Assumindo que $|\lambda|$ é suficientemente grande e usando o Lema 4.5 temos

$$\begin{aligned}
& \frac{b}{2}\int_0^l |\psi_x| dx \\
\leq\ & C_\epsilon\int_0^l |\Psi|^2 dx + \frac{\epsilon}{|\lambda|^2}\|\phi_x+\psi\|_2^2 + C\|\theta\|_2^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
\leq\ & C_\epsilon\int_0^l |\Psi|^2 dx + \frac{\epsilon}{|\lambda|^2}\|\phi_x+\psi\|_2^2 + C[C\|\Psi\|\|_2\|q\|_2 + \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}] + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
\leq\ & C_\epsilon\int_0^l |\Psi|^2 dx + \frac{\epsilon}{|\lambda|^2}\|\phi_x+\psi\|_2^2 + C_\epsilon\|\Psi\|_2^2 + \epsilon\|q\|_2^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

que resulta em

$$\frac{b}{2}\|\psi_x\|_2^2 \leq C_\epsilon\|\Psi\|_2^2 + \frac{\epsilon}{|\lambda|^2}\|\phi_x+\psi\|_2^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}},$$

com $|\lambda|$ suficientemente grande e para todo $\epsilon > 0$, o que prova o Passo 2. Finalmente vamos provar as desigualdades (4.111) e (4.112) do Lema 4.6. Usando (4.113), (4.115) e o Lema 4.5

temos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^l |\Psi|^2 dx \\
\leq\ & C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|}\|\theta\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|\theta\|_2\|\psi_x\|_2 \\
\leq\ & C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|}\|\theta\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|\theta\|_2 \left[C_\epsilon\|\Psi\|_2 + \frac{\epsilon}{|\lambda|}\|\phi_x + \psi\|_2 + C^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} \right] \\
\leq\ & C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C+\epsilon}{|\lambda|}\|\theta\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + C_\epsilon\|\theta\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Psi\|_2^2 + \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|\theta\|_2^2 \\
\leq\ & C_\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C+\epsilon}{|\lambda|}\|\theta\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}\|\Psi\|_2^2 + \frac{1}{4}\|\Psi\|_2^2 + (C_\epsilon + C)^2\|q\|_2^2,
\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\int_0^l |\Psi|^2 dx \leq C_\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C+\epsilon}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2,$$

provando (4.111). Agora, substituindo em (4.115) obtemos

$$\frac{b}{2}\int_0^l |\psi_x|^2 dx \leq \frac{C_\epsilon}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + \frac{\epsilon}{|\lambda|^2}\|\phi_x + \psi\|_2^2 + C_\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \tag{4.116}$$

provando (4.112) e o Lema 4.6. □

Podemos refinar a estimativa para $\|\theta\|_2^2$ em (4.102) usando o Lema 4.6 do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
\|\theta\|_2^2 &\leq C\left[C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 \right]^{\frac{1}{2}} \|q\|_2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq C\left[C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|\theta\|_2^{\frac{1}{2}} \right] \|q\|_2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|q\|_2 + \frac{C}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|\theta\|_2^{\frac{1}{2}}\|q\|_2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

usando a desigualdade de Young com $\epsilon > 0$ e o Lema 4.4 temos

$$\begin{aligned}
\|\theta\|_2^2 &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \frac{\epsilon}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C_\epsilon\|q\|_2^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{\epsilon}{|\lambda|^2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq \frac{\epsilon}{|\lambda|^2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned} \tag{4.117}$$

para $|\lambda|$ suficientemente grande.

Aqui vamos definir dois números importantes que chamaremos *Números dis-*

sipativos associados ao sistema Timoshenko-Cattaneo:

$$\chi_0 := \left(\tau - \frac{\rho_1}{\rho_3 k}\right)\left(\rho_2 - \frac{\rho_1 b}{k}\right) - \frac{\rho_1 \tau \delta^2}{\rho_3 k} \quad \text{e} \quad \chi_1 := \tau - \frac{\rho_1}{\rho_3 k}. \tag{4.118}$$

Note que se $\chi_0 = 0$ então $\chi_1 \neq 0$.

Lema 4.7. *Suponhamos que $\chi_1 \neq 0$. Então,*

$$\begin{aligned} \left[k|\chi_1| - \frac{C}{|\lambda|^2}\right] \|\phi_x + \psi\|_2^2 \;\; &\leq \;\; |\chi_0| \left|\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx\right| + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \|q\|_2\|U\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \tag{4.119}$$

Por outro lado, se $\chi_1 = 0$, temos

$$\|\phi_x + \psi\|_2^2 \leq C\left|\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx\right| + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \tag{4.120}$$

para $|\lambda|$ suficientemente grande e alguma constante $C > 0$.

Demonstração. Para organizar as ideias vamos enumerar uma sequência de passos.

Passo 1. Vamos mostrar que

$$k\|\phi_x + \psi\|_2^2 = \left[\rho_2 - \frac{\rho_1 b}{k}\right]\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx - \frac{i\lambda\rho_1\delta}{k}\int_0^l \theta\overline{\Phi}dx + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + R_1, \tag{4.121}$$

onde

$$\begin{aligned} R_1 \;\; &= \;\; \rho_2\int_0^l \Psi\overline{(f_1)_x}dx + \rho_2\int_0^l \Psi\overline{f_3}dx - \frac{b\rho_1}{k}\int_0^l \psi_x\overline{f_2} + \frac{\delta\rho_1}{k}\int_0^l \theta\overline{f_2}dx \\ &\quad + \rho_2\int_0^l f_4\overline{(\phi_x + \psi)}dx + \frac{\rho_1 b}{k}\int_0^l (f_1)_x\overline{\Phi}dx. \end{aligned}$$

Para isso, multiplicando (4.106) por $\overline{\phi_x + \psi}$, integrando por partes e usando as condições de fronteira temos

$$\begin{aligned} k\int_0^l |\phi_x + \psi|^2 dx \;\; &= \;\; \rho_2\int_0^l f_4(\overline{\phi_x + \psi})dx - \delta\int_0^l \theta_x(\overline{\phi_x + \psi})dx + b\int_0^l \psi_{xx}(\overline{\phi_x + \psi})dx \\ &\quad - i\rho_2\lambda\int_0^l \Psi(\overline{\phi_x + \psi})dx \\ &= \;\; \underbrace{-i\rho_2\lambda\int_0^l \Psi\overline{\phi_x}dx}_{I_1}\underbrace{-i\rho_2\lambda\int_0^l \Psi\overline{\psi}dx}_{I_2}\underbrace{-b\int_0^l \psi_x(\overline{\phi_x + \psi})_x dx}_{I_3} \\ &\quad \underbrace{+\delta\int_0^l \theta(\overline{\phi_x + \psi})_x dx}_{I_4} + \rho_2\int_0^l f_4(\overline{\phi_x + \psi})dx. \end{aligned}$$

Substituindo ϕ, ψ $(\phi_x + \psi)_x$ dados por (4.103)-(4.105) em I_1, I_2, I_3, I_4, respectivamente, e usando integração por partes temos

$$I_1 = -i\rho_2\lambda \int_0^l \Psi\overline{\phi_x}dx = \rho_2 \int_0^l \Psi\overline{(f_1)_x}dx + \rho_2 \int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx,$$

$$I_2 = -i\rho_2\lambda \int_0^l \Psi\overline{\psi}dx = \rho_2 \int_0^l \Psi\overline{f_3}dx + \rho_2 \int_0^l \Psi\overline{\Psi}dx,$$

$$\begin{aligned} I_3 &= -b \int_0^l \psi_x(\overline{\phi_x + \psi})_x dx \\ &= \frac{b}{k}\int_0^l \psi_x i\lambda\rho_1\overline{\Phi}dx + \frac{b}{k}\rho_1 \int_0^l \psi_x\overline{f_2}dx \\ &= \frac{b\rho_1}{k}\int_0^l (f_3)_x\overline{\Phi}dx + \frac{b\rho_1}{k}\int_0^l \Psi_x\overline{\Phi}dx + \frac{b}{k}\rho_1\int_0^l \psi_x\overline{f_2}dx \\ &= \frac{b\rho_1}{k}\int_0^l (f_3)_x\overline{\Phi}dx - \frac{b\rho_1}{k}\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx + \frac{b}{k}\rho_1\int_0^l \psi_x\overline{f_2}dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \delta \int_0^l \theta(\overline{\phi_x + \psi})_x dx \\ &= \frac{\delta}{k}\int_0^l \theta[\bar{i}\lambda\rho_1\overline{\Phi} - \rho_1\overline{f_2}]dx \\ &= -\frac{i\delta\lambda\rho_1}{k}\int_0^l \theta\overline{\Phi}dx - \frac{\rho_1\delta}{k}\int_0^l \theta\overline{f_2}dx. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} k\int_0^l |\phi_x + \psi|^2 dx &= \rho_2\int_0^l \Psi\overline{(f_1)_x}dx + \rho_2\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx + \rho_2\int_0^l \Psi\overline{f_3}dx + \rho_2\int_0^l \Psi\overline{\Psi}dx \\ &\quad \frac{b\rho_1}{k}\int_0^l (f_3)_x\overline{\Phi}dx - \frac{b\rho_1}{k}\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx + \frac{b}{k}\rho_1\int_0^l \psi_x\overline{f_2}dx \\ &\quad -\frac{i\delta\lambda\rho_1}{k}\int_0^l \theta\overline{\Phi}dx - \frac{\rho_1\delta}{k}\int_0^l \theta\overline{f_2}dx + \rho_2\int_0^l f_4(\overline{\phi_x + \psi})dx \\ &= \left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{k}\right)\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx - \frac{i\delta\lambda\rho_1}{k}\int_0^l \theta\overline{\Phi}dx + \rho_2\int_0^l \Psi\overline{\Psi}dx \\ &\quad -\frac{\rho_1\delta}{k}\int_0^l \theta\overline{f_2}dx + \rho_2\int_0^l \Psi\overline{(f_1)_x}dx + \frac{b\rho_1}{k}\int_0^l (f_3)_x\overline{\Phi}dx \\ &\quad +\frac{b}{k}\rho_1\int_0^l \psi_x\overline{f_2}dx + \rho_2\int_0^l f_4(\overline{\phi_x + \psi})dx + \rho_2\int_0^l \Psi\overline{f_3}dx \\ &= \left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{k}\right)\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx - \frac{i\delta\lambda\rho_1}{k}\int_0^l \theta\overline{\Phi}dx + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + R_1, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} R_1 : \;&= -\frac{\rho_1\delta}{k}\int_0^l \theta\overline{f_2}dx + \rho_2\int_0^l \Psi\overline{(f_1)_x}dx + \frac{b\rho_1}{k}\int_0^l (f_3)_x\overline{\Phi}dx \\ &+\frac{b}{k}\rho_1\int_0^l \psi_x\overline{f_2}dx + \rho_2\int_0^l f_4(\overline{\phi_x+\psi})dx + \rho_2\int_0^l \Psi\overline{f_3}dx, \end{aligned}$$

o que completa o Passo 1.

Passo 2 .Vamos mostrar que,

$$\begin{aligned} \frac{i\lambda\rho_1\delta}{k}\int_0^l \theta\overline{\Phi}dx &= -\frac{i\lambda\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l q(\overline{\phi_x}+\overline{\psi})dx - \frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l q\overline{\Psi}dx \\ &+\frac{\delta^2\rho_1}{\rho_3 k}\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx + R_2, \end{aligned} \tag{4.122}$$

onde

$$R_2 : \;= -\frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l q\overline{(f_1)_x}dx - \frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l q\overline{f_3}dx + \frac{\rho_1\delta}{k}\int_0^l f_5\overline{\Phi}dx.$$

Para isso, multiplicando (4.107) por $\overline{\Phi}$, integrando em $[0,l]$ e usando integração por partes, e as equações (4.103) e (4.105)

$$\begin{aligned} i\lambda\rho_3\int_0^l \theta\overline{\Phi}dx &= -\int_0^l q_x\overline{\Phi}dx - \delta\int_0^l \Psi_x\overline{\Phi}dx + \rho_3\int_0^l f_5\overline{\Phi}dx \\ &= +\int_0^l q(\overline{i\lambda\phi}-\overline{f_1})_x dx + \delta\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx + \rho_3\int_0^l f_5\overline{\Phi}dx. \end{aligned}$$

Multiplicando a identidade acima por $\frac{\delta\rho_1}{\rho_3 k}$, somando e subtraindo $\overline{\psi}$ e usando (4.105) temos

$$\begin{aligned} \frac{i\lambda\rho_1\delta}{k}\int_0^l \theta\overline{\Phi}dx &= \frac{\lambda\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l q\overline{i\phi_x}dx - \frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l q\overline{(f_1)_x}dx + \frac{\delta^2\rho_1}{\rho_3 k}\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx + \frac{\rho_1\delta}{k}\int_0^l f_5\overline{\Phi}dx \\ &= -\frac{i\lambda\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l q(\overline{\phi_x}+\overline{\psi})dx + \frac{i\lambda\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l q\overline{\psi}dx - \frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l q\overline{(f_1)_x}dx \\ &-\frac{\delta^2\rho_1}{\rho_3 k}\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx + \frac{\rho_1\delta}{k}\int_0^l f_5\overline{\Phi}dx \\ &= -\frac{i\lambda\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l q(\overline{\phi_x}+\overline{\psi})dx - \frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l q\overline{f_3}dx - \frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l q\overline{\Psi}dx \\ &+\frac{\delta^2\rho_1}{\rho_3 k}\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx - \frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l q\overline{(f_1)_x}dx + \frac{\rho_1\delta}{k}\int_0^l f_5\overline{\Phi}dx, \end{aligned}$$

o que completa o Passo 2.

Antes de realizarmos o próximo passo, vamos provar a desigualdade (4.120).

Se $\chi_1 = 0$, substituindo (4.122) em (4.121) e tomando a parte real

$$\begin{aligned}
& k\int_0^l |\phi_x+\psi|^2 dx \\
= & \left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{k}\right) Re\left(\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx\right) \\
& -Re\left(-\frac{i\lambda\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l q(\overline{\phi_x}+\overline{\psi})dx - \frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l q\overline{\Psi}dx + \frac{\delta^2\rho_1}{\rho_3 k}\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx + R_2\right) \\
& +\rho_2\|\Psi\|_2^2 + Re(R_1). \qquad (4.123)
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade triangular no lado direito da equação (4.123) temos

$$\begin{aligned}
& k|\phi_x+\psi|_2^2 \\
\le & \left|\rho_2 - \frac{b\rho_1}{k} - \frac{\delta^2\rho_1}{\rho_3 k}\right|\left|\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx\right| + \frac{|\lambda|\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l |q(\overline{\phi_x}+\overline{\psi})|dx + \left|\frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\right|\int_0^l |q\overline{\Psi}|dx \\
& +|R_2| + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + |R_1|
\end{aligned}$$

Agora usando as desigualdades de Hölder, de Young, e os Lemas 4.4, 4.5 e 4.6, obtemos

$$\begin{aligned}
& k|\phi_x+\psi|_2^2 \\
\le & \left|\rho_2 - \frac{b\rho_1}{k} - \frac{\delta^2\rho_1}{\rho_3 k}\right|\left|\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx\right| + \frac{|\lambda|\rho_1\delta}{\rho_3 k}\|q\|_2\|\overline{\phi_x}+\overline{\psi}\|_2 + \left|\frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\right|\|q\|_2\|\Psi\|_2 + |R_2| \\
& +\rho_2\|\Psi\|_2^2 + |R_1| \\
\le & C\left|\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx\right| + C|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{k}{2}\|\overline{\phi_x}+\overline{\psi}\|_2^2 + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2.
\end{aligned}$$

Logo, segue que,

$$\int_0^l |\phi_x+\psi|^2 dx \le C\left|\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx\right| + C|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{c}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2,$$

para $|\lambda|$ suficientemente grande, o que prova (4.120).

Passo 3. Vamos provar que

$$\frac{i\lambda\rho_1\delta}{k}\int_0^l \theta\overline{\Phi}dx = -\frac{i\lambda\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l q\overline{\phi_x}dx + \frac{\delta^2\rho_1}{\rho_3 k}\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx + \widetilde{R_2}, \qquad (4.124)$$

onde

$$\widetilde{R_2} = \frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l q\overline{f_3}dx + R_2.$$

Usando (4.105) em (4.122) obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{i\lambda\rho_1\delta}{k}\int_0^l \theta\overline{\Phi}dx \\
= \quad & -\frac{i\lambda\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l q(\overline{\phi_x}+\overline{\psi})dx - \frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l q\overline{\Psi}dx + \frac{\delta^2\rho_1}{\rho_3 k}\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx + R_2 \\
= \quad & -\frac{i\lambda\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l q\overline{\phi_x}dx + \frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l q(\overline{f_3}+\overline{\Psi})dx - \frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l q\overline{\Psi}dx + \frac{\delta^2\rho_1}{\rho_3 k}\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx + R_2 \\
= \quad & -\frac{i\lambda\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l q\overline{\phi_x}dx + \frac{\delta^2\rho_1}{\rho_3 k}\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx + \frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l q\overline{f_3}dx + R_2,
\end{aligned}
$$

concluindo o Passo 3.

Passo 4. Vamos obter a igualdade

$$
-\frac{i\lambda\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l q\overline{\phi_x}dx = \frac{\rho_1\delta\beta}{\rho_3 k\tau}\int_0^l q\overline{\phi_x}dx + \frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k\tau}\int_0^l \theta_x\overline{\phi_x}dx + R_3, \tag{4.125}
$$

em que

$$
R_3 := -\frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l f_6\overline{\phi_x}.
$$

Usando (4.108) temos

$$
\begin{aligned}
-\frac{i\lambda\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l q\overline{\phi_x}dx &= -\frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k\tau}\int_0^l (\tau f_6 - \beta q - \theta_x)\overline{\phi_x}dx \\
&= \frac{\rho_1\delta\beta}{\rho_3 k\tau}\int_0^l q\overline{\phi_x}dx + \frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k\tau}\int_0^l \theta_x\overline{\phi_x}dx + R_3,
\end{aligned}
$$

em que

$$
R_3 := -\frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l f_6\overline{\phi_x}.
$$

Passo 5. Vamos mostrar a igualdade

$$
\begin{aligned}
\frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k\tau}\int_0^l \theta_x\overline{\phi_x}dx &= \left[\frac{\rho_2\rho_1}{\rho_3 k\tau} - \frac{b\rho_1^2}{\rho_3 k^2\tau}\right]\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx + \frac{b\rho_1}{\rho_3 k\tau}\|\psi_x\|_2^2 \\
&\quad -\frac{\rho_1}{\rho_3\tau}\|\phi_x+\psi\|_2^2 + \frac{\rho_1}{\rho_3\tau}\int_0^l (\phi_x+\psi)\overline{\psi}dx + R_4,
\end{aligned} \tag{4.126}
$$

em que

$$
R_4 := \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_3 k\tau}\int_0^l f_4\overline{\phi_x}dx + \frac{\rho_2\rho_1}{\rho_3 k\tau}\int_0^l \Psi\overline{(f_1)_x}dx + \frac{b\rho_1^2}{\rho_3 k^2\tau}\int_0^l (f_3)_x\overline{\Phi}dx + \frac{b\rho_1^2}{\rho_3 k^2\tau}\int_0^l \psi_x\overline{f_2}dx.
$$

Usando (4.106) e (4.103), somando e subtraindo ψ, integrando por partes, usando (4.104) e

(4.105) e novamente integrando por partes temos

$$
\begin{aligned}
& \frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k\tau}\int_0^l \theta_x\overline{\phi_x}dx \\
= \; & \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_3 k\tau}\int_0^l f_4\overline{\phi_x}dx - \frac{i\lambda\rho_2\rho_1}{\rho_3 k\tau}\int_0^l \Psi\overline{\phi_x}dx + \frac{b\rho_1}{\rho_3 k\tau}\int_0^l \psi_{xx}\overline{\phi_x}dx - \frac{\rho_1}{\rho_3\tau}\int_0^l (\phi_x+\psi)\overline{\phi_x}dx \\
= \; & \frac{\rho_2\rho_1}{\rho_3 k\tau}\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx + \frac{b\rho_1}{\rho_3 k\tau}\int_0^l \psi_{xx}(\overline{\phi_x}+\overline{\psi})dx - \frac{b\rho_1}{\rho_3 k\tau}\int_0^l \psi_{xx}\overline{\psi}dx - \frac{\rho_1}{\rho_3\tau}\|\phi_x+\psi\|_2^2 \\
& + \frac{\rho_1}{\rho_3\tau}\int_0^l (\phi_x+\psi)\overline{\psi}dx + \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_3 k\tau}\int_0^l f_4\overline{\phi_x}dx + \frac{\rho_2\rho_1}{\rho_3 k\tau}\int_0^l \Psi\overline{(f_1)_x}dx \\
= \; & \frac{\rho_2\rho_1}{\rho_3 k\tau}\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx - \frac{b\rho_1}{\rho_3 k\tau}\int_0^l \psi_x\frac{\overline{[i\lambda\rho_1\Phi-\rho_1 f_2]}}{k}dx + \frac{b\rho_1}{\rho_3 k\tau}\|\psi_x\|_2^2 - \frac{\rho_1}{\rho_3\tau}\|\phi_x+\psi\|_2^2 \\
& + \frac{\rho_1}{\rho_3\tau}\int_0^l (\phi_x+\psi)\overline{\psi}dx + \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_3 k\tau}\int_0^l f_4\overline{\phi_x}dx + \frac{\rho_2\rho_1}{\rho_3 k\tau}\int_0^l \Psi\overline{(f_1)_x}dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \; & \frac{\rho_2\rho_1}{\rho_3 k\tau}\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx + \frac{b\rho_1^2}{\rho_3 k^2\tau}\int_0^l ((f_3)_x+\Psi_x)\overline{\Phi}dx + \frac{b\rho_1^2}{\rho_3 k^2\tau}\int_0^l \psi_x\overline{f_2}dx + \frac{b\rho_1}{\rho_3 k\tau}\|\psi_x\|_2^2 \\
& - \frac{\rho_1}{\rho_3\tau}\|\phi_x+\psi\|_2^2 + \frac{\rho_1}{\rho_3\tau}\int_0^l i\lambda\phi_x\overline{\psi}dx + \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_3 k\tau}\int_0^l f_4\overline{\phi_x}dx + \frac{\rho_2\rho_1}{\rho_3 k\tau}\int_0^l \Psi\overline{(f_1)_x}dx \\
= \; & \frac{\rho_2\rho_1}{\rho_3 k\tau}\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx + \frac{b\rho_1^2}{\rho_3 k^2\tau}\int_0^l ((f_3)_x+\Psi_x)\overline{\Phi}dx + \frac{b\rho_1^2}{\rho_3 k^2\tau}\int_0^l \psi_x\overline{f_2}dx + \frac{b\rho_1}{\rho_3 k\tau}\|\psi_x\|_2^2 \\
& - \frac{\rho_1}{\rho_3\tau}\|\phi_x+\psi\|_2^2 + \frac{\rho_1}{\rho_3\tau}\int_0^l (\phi_x+\psi)\overline{\psi}dx + \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_3 k\tau}\int_0^l f_4\overline{\phi_x}dx + \frac{\rho_2\rho_1}{\rho_3 k\tau}\int_0^l \Psi\overline{(f_1)_x}dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \; & \frac{\rho_2\rho_1}{\rho_3 k\tau}\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx + \frac{b\rho_1^2}{\rho_3 k^2\tau}\int_0^l (f_3)_x\overline{\Phi}dx - \frac{b\rho_1^2}{\rho_3 k^2\tau}\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx + \frac{b\rho_1^2}{\rho_3 k^2\tau}\int_0^l \psi_x\overline{f_2}dx \\
& + \frac{b\rho_1}{\rho_3 k\tau}\|\psi_x\|_2^2 - \frac{\rho_1}{\rho_3\tau}\|\phi_x+\psi\|_2^2 + \frac{\rho_1}{\rho_3\tau}\int_0^l (\phi_x+\psi)\overline{\psi}dx + \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_3 k\tau}\int_0^l f_4\overline{\phi_x}dx \\
& + \frac{\rho_2\rho_1}{\rho_3 k\tau}\int_0^l \Psi\overline{(f_1)_x}dx \\
= \; & \left[\frac{\rho_2\rho_1}{\rho_3 k\tau} - \frac{b\rho_1^2}{\rho_3 k^2\tau}\right]\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx + \frac{b\rho_1}{\rho_3 k\tau}\|\psi_x\|_2^2 - \frac{\rho_1}{\rho_3\tau}\|\phi_x+\psi\|_2^2 + \frac{\rho_1}{\rho_3\tau}\int_0^l (\phi_x+\psi)\overline{\psi}dx \\
& + \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_3 k\tau}\int_0^l f_4\overline{\phi_x}dx + \frac{\rho_2\rho_1}{\rho_3 k\tau}\int_0^l \Psi\overline{(f_1)_x}dx + \frac{b\rho_1^2}{\rho_3 k^2\tau}\int_0^l (f_3)_x\overline{\Phi}dx + \frac{b\rho_1^2}{\rho_3 k^2\tau}\int_0^l \psi_x\overline{f_2}dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \; & \left[\frac{\rho_2\rho_1}{\rho_3 k\tau} - \frac{b\rho_1^2}{\rho_3 k^2\tau}\right]\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx + \frac{b\rho_1}{\rho_3 k\tau}\|\psi_x\|_2^2 - \frac{\rho_1}{\rho_3\tau}\|\phi_x+\psi\|_2^2 + \frac{\rho_1}{\rho_3\tau}\int_0^l (\phi_x+\psi)\overline{\psi}dx \\
& + R_4,
\end{aligned}
$$

como queríamos.

Passo 6. Vamos mostrar que

$$
\begin{aligned}
k\chi_1\|\phi_x+\psi\|_2^2 &= \chi_0\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx+\tau\rho_2\|\Psi\|_2^2-\frac{\rho_1\delta\beta}{\rho_3 k}\int_0^l q\overline{\phi_x}dx-\frac{b\rho_1}{\rho_3 k}\|\psi_x\|_2^2\\
&\quad -\frac{\rho_1}{\rho_3}\int_0^l(\phi_x+\psi)\overline{\psi}dx-\frac{\tau\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l q\overline{f_3}dx\\
&\quad +R_1-\tau\widetilde{R_2}-\tau R_4-\tau R_3. \qquad (4.127)
\end{aligned}
$$

Substituindo (4.126) em (4.125) temos

$$
\begin{aligned}
-\frac{i\lambda\rho_1\delta}{\rho_3 k}\int_0^l q\overline{\phi_x}dx &= \frac{\rho_1\delta\beta}{\rho_3 k\tau}\int_0^l q\overline{\phi_x}dx+\left[\frac{\rho_2\rho_1}{\rho_3 k\tau}-\frac{b\rho_1^2}{\rho_3 k^2\tau}\right]\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx+\frac{b\rho_1}{\rho_3 k\tau}\|\psi_x\|_2^2\\
&\quad -\frac{\rho_1}{\rho_3\tau}\|\phi_x+\psi\|_2^2+\frac{\rho_1}{\rho_3\tau}\int_0^l(\phi_x+\psi)\overline{\psi}dx+R_4+R_3. \qquad (4.128)
\end{aligned}
$$

Agora, substituindo (4.128) em (4.124) e multiplicando a equação por τ temos

$$
\begin{aligned}
\frac{i\lambda\rho_3\delta}{k}\int_0^l \theta\overline{\Phi}dx &= \left[\frac{\rho_2\rho_1}{\rho_3 k\tau}-\frac{b\rho_1^2}{\rho_3 k^2\tau}+\frac{\delta^2\rho_1}{\rho_3 k}\right]\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx+\frac{\rho_1\delta\beta}{\rho_3 k\tau}\int_0^l q\overline{\phi_x}dx+\frac{b\rho_1}{\rho_3 k\tau}\|\psi_x\|_2^2\\
&\quad -\frac{\rho_1}{\rho_3\tau}\|\phi_x+\psi\|_2^2+\frac{\rho_1}{\rho_3\tau}\int_0^l(\phi_x+\psi)\overline{\psi}dx\\
&\quad +\widetilde{R_2}+R_4+R_3. \qquad (4.129)
\end{aligned}
$$

substituindo (4.129) em (4.121) obtemos

$$
\begin{aligned}
k\int_0^l|\phi_x+\psi|^2dx &= \left[\rho_2-\frac{b\rho_1}{k}-\frac{\rho_2\rho_1}{\rho_3 k\tau}+\frac{b\rho_1^2}{\rho_3 k^2\tau}-\frac{\delta^2\rho_1}{\rho_3 k}\right]\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx+\rho_2\|\Psi\|_2^2+R_1\\
&\quad -\frac{\rho_1\delta\beta}{\rho_3 k\tau}\int_0^l q\overline{\phi_x}dx-\frac{b\rho_1}{\rho_3 k\tau}\|\psi_x\|_2^2+\frac{\rho_1}{\rho_3\tau}\|\phi_x+\psi\|_2^2\\
&\quad -\frac{\rho_1}{\rho_3\tau}\int_0^l(\phi_x+\psi)\overline{\psi}dx-\widetilde{R_2}-R_4-R_3,
\end{aligned}
$$

donde segue que

$$
\begin{aligned}
&k\left(\tau-\frac{\rho_1}{k\rho_3}\right)\|\phi_x+\psi\|_2^2\\
&=\left[\left(\tau-\frac{\rho_1}{\rho_3 k}\right)\left(\rho_2-\frac{b\rho_1}{k}\right)-\frac{\tau\delta^2\rho_1}{\rho_3}\right]\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx+\tau\rho_2\|\Psi\|_2^2-\frac{\rho_1\delta\beta}{\rho_3 k}\int_0^l q\overline{\phi_x}dx\\
&\quad -\frac{b\rho_1}{\rho_3 k}\|\psi_x\|_2^2-\frac{\rho_1}{\rho_3}\int_0^l(\phi_x+\psi)\overline{\psi}dx+\tau R_1-\tau\widetilde{R_2}-\tau R_4-\tau R_3,
\end{aligned}
$$

o que conclui o Passo 6.

Passo 7. Finalmente, supondo que $\chi_1 \neq 0$, vamos mostrar que

$$\begin{aligned}\left[k|\chi_1| - \frac{C}{|\lambda|^2}\right] \|\phi_x+\psi\|_2^2 &\leq |\chi_0| \left|\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx\right| + C\|q\|_2\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+\frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2, \end{aligned} \tag{4.130}$$

para $|\lambda|$ suficientemente grande e alguma constante $C > 0$, provando (4.119). Somando e subtraindo ψ, usando a equação (4.105), tomando a parte real e em seguida o módulo, e usando as desigualdades triangular e de Hölder, temos de (4.127) que

$$\begin{aligned} & k|\chi_1|\|\phi_x+\psi\|_2^2 \\ = & \left|\chi_0\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx + \tau\rho_2\|\Psi\|_2^2 - \frac{\rho_1\delta\beta}{\rho_3 k}\int_0^l q\overline{\phi_x}dx - \frac{b\rho_1}{\rho_3 k}\|\psi_x\|_2^2 \right. \\ & \left. -\frac{\rho_1}{\rho_3}\int_0^l(\phi_x+\psi)\overline{\psi}dx + \tau R_1 - \tau\widetilde{R_2} - \tau R_4 - \tau R_3\right| \\ = & \left|\chi_0\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx + \tau\rho_2\|\Psi\|_2^2 - \frac{\rho_1\delta\beta}{\rho_3 k}\int_0^l q\overline{\phi_x+\psi}dx + \frac{\rho_1\delta\beta}{\rho_3 k}\int_0^l q\overline{\psi}dx \right. \\ & \left. -\frac{b\rho_1}{\rho_3 k}\|\psi_x\|_2^2 - \frac{\rho_1}{\rho_3}\int_0^l(\phi_x+\psi)(\overline{\frac{\Psi+f_3}{i\lambda}})dx + \tau R\right| \\ = & |\chi_0|\left|\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx\right| + \tau\rho_2\|\Psi\|_2^2 + \frac{\rho_1\delta\beta}{\rho_3 k}\int_0^l |q\overline{(\phi_x+\psi)}|dx + \frac{\rho_1\delta\beta}{\rho_3 k}\int_0^l |q\overline{\psi}|dx \\ & +\frac{b\rho_1}{\rho_3 k}\|\psi_x\|_2^2 + \frac{\rho_1}{\rho_3|\lambda|}\int_0^l |(\phi_x+\psi)\overline{\Psi}|dx + \frac{\rho_1}{\rho_3|\lambda|}\int_0^l |(\phi_x+\psi)\overline{f_3}|dx + \tau|R| \\ = & |\chi_0|\left|\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx\right| + \tau\rho_2\|\Psi\|_2^2 + \frac{\rho_1\delta\beta}{\rho_3 k}\|q\|_2\|\phi_x+\psi\|_2 + \frac{\rho_1\delta\beta}{\rho_3 k}\|q\|_2\|\psi\|_2 \\ & +\frac{b\rho_1}{\rho_3 k}\|\psi_x\|_2^2 + \frac{\rho_1}{\rho_3|\lambda|}\|\phi_x+\psi\|_2\|\Psi\|_2 + \frac{\rho_1}{\rho_3|\lambda|}\|\phi_x+\psi\|\|f_3\|_2 + \tau|R|, \end{aligned}$$

onde $R = \tau R_1 - \tau\widetilde{R_2} - \tau R_4 - \tau R_3$. Agora usando a desigualdade de Young temos

$$\begin{aligned} k|\chi_1|\|\phi_x+\psi\|_2^2 &= |\chi_0|\left|\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx\right| + C\|\Psi\|_2^2 + C\|q\|_2\|\phi_x+\psi\|_2 + C\|q\|_2\|\psi\|_2 \\ &+C\|\psi_x\|_2^2 + \frac{C}{|\lambda|}\|\phi_x+\psi\|_2\|\Psi\|_2 + \frac{C}{|\lambda|}\|\phi_x+\psi\|_2\|f_3\|_2 + \tau|R| \\ &\leq |\chi_0|\left|\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx\right| + C\|\Psi\|_2^2 + C\|q\|_2\|\phi_x+\psi\|_2 + C\|q\|_2^2 + Cl\|\psi_x\|_2^2 \\ &+C\|\psi_x\|_2^2 + \frac{C}{|\lambda|^2}\|\phi_x+\psi\|_2^2 + C\|\Psi\|_2^2 + \frac{C}{|\lambda|}\|\phi_x+\psi\|_2\|f_3\|_2. + \tau|R|, \end{aligned}$$

Notando que $|R| \leq \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}$, usando os Lemas 4.4 e 4.6, agrupando convenientemente, e usando Young com $\epsilon > 0$. temos que existem $C > 0$ e $C_\epsilon > 0$ tais que

$$
\begin{aligned}
& \left[k|\chi_1| - \frac{C}{|\lambda|^2}\right] \|\phi_x + \psi\|_2^2 \\
\leq \quad & |\chi_0| \left| \int_0^l \Psi \overline{\Phi_x} dx \right| + C\|q\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} + \left[\frac{C_\epsilon}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|\theta\|_2 + \frac{\epsilon}{|\lambda|^2} \|\phi_x + \psi\|_2^2 + c_\epsilon \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \right] \\
& + \left[C\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|q\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} \right] + C\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned}
$$

que resulta em

$$
\begin{aligned}
\left[k|\chi_1| - \frac{C+\epsilon}{|\lambda|^2}\right] \|\phi_x + \psi\|_2^2 \quad \leq \quad & |\chi_0| \left| \int_0^l \Psi \overline{\Phi_x} dx \right| + C\|q\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} \\
& + \left[\frac{C_\epsilon}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|\theta\|_2 + c_\epsilon \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \right],
\end{aligned}
$$

para $|\lambda|$ suficientemente grande, completando a prova (4.130) e, portanto, o Lema 4.7. $\square$

Lema 4.8. *Sob as condições e notações do Lema 4.7 , existe uma constante positiva C tal que*

$$
\|\Phi\|_2^2 \leq C\|\phi_x + \psi\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{4.131}
$$

Demonstração. Multiplicando a equação (4.104) por $\overline{\phi}$, e integrando em $[0, l]$, usando integração por partes e (4.103) e (4.106) obtemos

$$
\begin{aligned}
& \int_0^l i\lambda \rho_1 \Phi \overline{\phi} dx = \rho_1 \int_0^l f_2 \overline{\phi} dx + k \int_0^l (\phi_x + \psi)_x \overline{\phi} dx \\
\Rightarrow \quad & -\rho_1 \int_0^l \Phi(\overline{f_1 + \Phi}) dx = \rho_1 \int_0^l f_2 \overline{\phi} dx - k \int_0^l (\phi_x + \psi) \overline{\phi_x} dx \\
\Rightarrow \quad & -\rho_1 \|\Phi\|_2^2 = \rho_1 \int_0^l \Phi \overline{f_1} dx + \rho_1 \int_0^l f_2 \overline{\phi} dx - k \int_0^l (\phi_x + \psi)(\overline{\phi_x + \psi}) dx \\
& + k \int_0^l (\phi_x + \psi) \overline{\psi} dx.
\end{aligned}
$$

Tomando a parte real da ultima equação acima e o módulo do lado direito da mesma, em seguida usando as desigualdades triangular, de Hölder, de Poincaré e Young, obtemos,

$$
\|\Phi\|_2^2 \leq C\|\phi_x + \psi\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}
$$

provando (4.131), e portanto o Lema 4.8. $\square$

Agora podemos enunciar e provar o Teorema de estabilidade exponencial para o problema (4.1)-(4.6). Mais precisamente, temos o:

Teorema 4.9. *Suponhamos que* $\rho_1, \rho_2, \rho_3, b, k, \delta, \beta > 0$ *e seja* $\mathcal{A}$ *o operador linear definido em* (4.11). *Então o semigrupo* $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ *associado ao problema* (4.7) *é exponencialmente estável se, e somente se,* $\chi_0 = 0$*, onde relembramos que* χ_0 *é definido em* (4.118). *Em outras palavras, o sistema* (4.1)-(4.6) *é exponencialmente estável se, e somente se,* $\chi_0 = 0$.

Demonstração. Suponhamos $\chi_0 = 0$, vamos mostrar inicialmente que

$$\|\phi_x + \psi\|_2^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C\|q\|_2\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{4.132}$$

Com efeito, de $\chi_0 = 0$ temos

$$\left(\tau - \frac{\rho_1}{\rho_3 k}\right)\left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{k}\right) = \frac{\tau\rho_1\delta^2}{\rho_3 k} > 0 \Rightarrow \chi_1 \neq 0, \tag{4.133}$$

assim vale a estimativa (4.119) do Lema 4.7 e como para $|\lambda|$ suficientemente grande temos $0 < k|\chi_1| < k|\chi_1| - \frac{2C}{|\lambda|^2}$ então podemos estimar $\|\phi_x + \psi\|_2^2$ como segue

$$\|\phi_x + \psi\|_2^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C\|q\|_2\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Finalmente, vamos mostrar que para $|\lambda|$ suficientemente grande, dado $F \in \mathcal{H}$, existe $C > 0$ tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}},$$

onde U é a solução de $(i\lambda I - \mathcal{A})U = F$ em $D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, que existe pelo Lema 4.3. De fato, usando os Lemas 4.4, 4.5, 4.6 e 4.8, o fato que $\dfrac{1}{|\lambda|} \leq 1$, depois a equação (4.119) do Lema 4.7 com $\epsilon > 0$ escolhido temos

$$\begin{aligned}
& \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\
= \; & \rho_1\|\Phi\|_2^2 + k\|\phi_x + \psi\|_2^2 + \rho_1\|\Psi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 + \rho_3\|\theta\|_2^2 + \tau\|q\|_2^2 \\
\leq \; & \rho_1\left[C\|\phi_x + \psi\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\right] + k\|\phi_x + \psi\|_2^2 \\
& + \rho_2\left[C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2\right] + b\|\psi_x\|_2^2 + \rho_3\|\theta\|_2^2 + \tau\|q\|_2^2 \\
\leq \; & C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|\phi_x + \psi\|_2^2 + C\|\psi_x\|_2^2 \\
& + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|q\|_2 + C\|q\|_2^2 + C\|\theta\|_2^2 \\
\leq \; & C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|\phi_x + \psi\|_2^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|q\|_2 + C\|q\|_2^2 \\
& + C\|\theta\|_2^2.
\end{aligned} \tag{4.134}$$

Agora usando a equação (4.132), a desigualdade de Young, e os Lemas 4.4 e 4.5, temos

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + [C\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C\|q\|_2\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}] \\
&\quad + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|q\|_2 + C\|q\|_2^2 + C\|\theta\|_2^2 \\
&\leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + [C\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C\|q\|_2\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}] \\
&\quad + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|q\|_2 + C\|q\|_2^2 + C\|\theta\|_2^2 \\
&\leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{8}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{8}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|q\|_2^2 + C\|\theta\|_2^2 \\
&\leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{4}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|\theta\|_2^2 \\
&\leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{4}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + [C\|\Psi\|_2\|q\|_2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}] \\
&\leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{4}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{8}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq \frac{1}{8}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{4}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{8}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{8}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2,
\end{aligned}$$

obtendo finalmente que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}},$$

para alguma constante $C > 0$. Disto, do Lema 4.3 e o Teorema 2.54, obtém-se a estabilidade exponencial do sistema (4.1)-(4.6).

Para mostrarmos que a condição $\chi_0 = 0$ é necessária para a estabilidade exponencial, vamos mostrar que $\chi_0 \neq 0$ implica em $\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}}$ não limitado quando $\lambda \to \infty$. Para isso vamos definir uma sequência (F_μ) de $\mathcal{H}$ tal que exista uma sequência (λ_μ) com

$$\frac{\|(i\lambda_\mu - \mathcal{A})^{-1}F_\mu\|_{\mathcal{H}}}{\|F_\mu\|_{\mathcal{H}}} \to \infty, \tag{4.135}$$

ou equivalentemente,

$$\|U_\mu\|_{\mathcal{H}} \to \infty, \mu \to \infty, \tag{4.136}$$

para (F_μ) limitada, onde U_μ é solução de $(i\lambda_\mu I_d - \mathcal{A})U_\mu = F_\mu$.

Definimos a sequência limitada $(F_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}$, onde $F_\mu = \left(0, \dfrac{\operatorname{sen}(\mu x)}{\rho_1}, 0, 0, 0, 0\right)$, e para simplificar faremos $l = \pi$, e vamos utilizar o índice μ apenas quando for necessário, assim trabalharemos com λ, U e F ao invés de λ_μ, U_μ e F_μ. É fácil ver que $F_\mu = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \in \mathcal{H}$ é limitada. Assim para cada $\mu \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $\lambda_\mu \in \mathbb{R}$

e $U_\mu \in D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$ tais que valem as igualdades

$$i\lambda\phi - \Phi = 0, \tag{4.137}$$

$$i\lambda\rho_1\Phi - k(\phi_x + \psi)_x = \operatorname{sen}(\mu x), \tag{4.138}$$

$$i\lambda\psi - \Psi = 0, \tag{4.139}$$

$$i\lambda\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) + \delta\theta_x = 0, \tag{4.140}$$

$$i\rho_3\theta + q_x + \delta\Psi_x = 0, \tag{4.141}$$

$$i\lambda\tau q + \beta q + \theta_x = 0. \tag{4.142}$$

Substituindo (4.137) e (4.139) nas demais igualdades de (4.137)-(4.142), obtemos

$$-\lambda^2\rho_1\phi - k(\phi_x + \psi)_x = \operatorname{sen}(\mu x), \tag{4.143}$$

$$-\lambda^2\rho_2\psi - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) + \delta\theta_x = 0, \tag{4.144}$$

$$i\rho_3\theta + q_x + i\lambda\delta\psi_x = 0, \tag{4.145}$$

$$i\lambda\tau q + \beta q + \theta_x = 0. \tag{4.146}$$

o qual posssui solução na forma $\phi(x) = A\operatorname{sen}(\mu x)$, $\psi(x) = B\cos(\mu x)$, $\theta(x) = D\operatorname{sen}(\mu x)$ e $q(x) = E\cos(\mu x)$, com os coeficientes A, B, D, e E dependendo de λ e a serem determinados. É fácil ver que esta solução está no espaço $D(\mathcal{A})$. Substituindo a solução no sistema (4.143)-(4.146), obtemos o sistema numérico equivalente

$$[-\lambda^2\rho_1 + k\mu^2]A + k\mu B = 1, \tag{4.147}$$

$$k\mu A + \left[-\lambda^2\rho_2 + b\mu^2 + k\right] B + \delta\mu D = 0, \tag{4.148}$$

$$-i\lambda\delta\mu B + i\lambda\rho_3 D - \mu E = 0, \tag{4.149}$$

$$\mu D + [i\lambda\tau + \beta]\, E = 0. \tag{4.150}$$

Isolando E em (4.150) e substituindo nas demais temos

$$\begin{aligned}
[-\lambda^2\rho_1 + k\mu^2]A + k\mu B &= 1,\\
k\mu A + [-\lambda^2\rho_2 + b\mu^2 + k]B + \delta\mu D &= 0,\\
-i\lambda\delta\mu B + \left[i\lambda\rho_3 + \frac{\mu^2}{i\lambda\tau + \beta}\right] D &= 0,
\end{aligned}$$

que na forma matricial fica

$$\begin{bmatrix} P_1 & k\mu & 0 \\ k\mu & P_2 & \delta\mu \\ 0 & -\delta i\lambda\mu & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

em que

$$P_1(\lambda) := -\lambda^2\rho_1 + k\mu^2, \quad P_2(\lambda) := -\lambda^2\rho_2 + b\mu^2 + k, \quad P_3(\lambda) := i\lambda\rho_3 + \frac{\mu^2}{i\lambda\tau + \beta}.$$

Assim temos

$$\begin{aligned} A &= \frac{P_2P_3 + i\delta^2\lambda\mu^2}{P_1P_2P_3 + i\lambda\delta^2\mu^2P_1 - P_3k^2\mu^2} \\ &= \frac{P_3\left(P_2 + \frac{i\delta^2\lambda\mu^2}{P_3}\right)}{P_3\left(P_1\left(P_2 + \frac{i\lambda\delta^2\mu^2}{P_3}\right) - k^2\mu^2\right)} \\ &= \frac{K}{P_1K - k^2\mu^2}, \end{aligned}$$

com

$$K := P_2 + \frac{i\delta^2\lambda\mu^2}{P_3}.$$

Queremos definir uma relação entre λ e μ de forma que $|\lambda| \to \infty$ quando $\mu \to \infty$ e $|A| \to \infty$. Deste modo estará definida a sequência $(\lambda_\mu) \subset \mathbb{R}$ e $(U_\mu) \subset D(A) \subset \mathcal{H}$ tal que $\lim_{\mu\to\infty} \|U_\mu\| = \infty$. Se a relação entre μ e $|\lambda|$ for tal que $|\lambda|$ se comporte como um polinômio de grau 1 em μ quando $\mu \to \infty$, o que denotaremos por $|\lambda| \approx C\mu,\ C > 0,\ \mu \to \infty$, então podemos notar que $|P_1|$ se comporta como um polinômio em de grau 2 em $|\lambda|$ quando $|\lambda| \to \infty$, o que denotamos por $|P_1| \approx C|\lambda|^2,\ |\lambda| \to \infty, C > 0$. Analogamente $|P_2| \approx C|\lambda|^2,\ |\lambda| \to \infty,\ C > 0$ e $P_3 \approx C|\lambda|,\ |\lambda| \to \infty,\ C > 0$ e $K \approx C|\lambda|^2,\ |\lambda| \to \infty,\ C > 0$. Vamos fazer com que $P_1(\lambda) = d$ constante, onde d será determinada depois, então temos

$$P_1(\lambda) = d \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{k\mu^2}{\rho_1} - \frac{d}{\rho_1},$$

substituindo λ^2 na expressão de K, temos

$$\begin{aligned} K &= P_2 + \frac{i\lambda\delta^2\mu^2}{P_3} \\ &= P_2 + i\lambda\delta^2\mu^2\left(\frac{i\lambda\tau + \beta}{-\lambda^2\tau\rho_3 + i\lambda\beta\rho_3 + \mu^2}\right) \\ &= P_2 + \delta^2\mu^2\frac{-\lambda^2\tau + i\lambda\beta}{-\lambda^2\tau\rho_3 + i\lambda\beta\rho_3 + \mu^2} \\ &= P_2 + \delta^2\mu^2\left(\frac{-\left(\frac{k\mu^2}{\rho_1} - \frac{d}{\rho_1}\right)\tau + i\lambda\beta}{-\left(\frac{k\mu^2}{\rho_1} - \frac{d}{\rho_1}\right)\tau\rho_3 + i\lambda\beta\rho_3 + \mu^2}\right) \\ &= P_2 + \delta^2\mu^2\left(\frac{-\frac{k\mu^2\tau}{\rho_1} + \frac{d\tau}{\rho_1} + i\lambda\beta}{\chi_2\mu^2 + \frac{\tau d\rho_3}{\rho_1} + i\lambda\beta\rho_3}\right), \end{aligned}$$

onde denotamos

$$\chi_2 := \left(1 - \frac{\tau\rho_3 k}{\rho_1}\right).$$

Observe que

$$\begin{aligned}
-\frac{\rho_3\tau k}{\rho_1}\chi_1 &= -\frac{\rho_3\tau k}{\rho_1}\left(\tau - \frac{\rho_1}{\rho_3 k}\right) \\
&= \tau\chi_2. \qquad (4.151)
\end{aligned}$$

Isso significa que $\chi_1 = 0$ se, e somente se $\chi_2 = 0$. Ao supormos que $\chi_0 \neq 0$ temos dois casos a considerar, que são, o caso em que $\chi_1 = 0$ e o caso em que $\chi_1 \neq 0$. Vamos considerar primeiro o caso em que $\chi_1 = 0$, assim temos $\chi_2 = 0$. Escolhendo $d = 0$ temos

$$\begin{aligned}
K &= P_2 + \delta^2\mu^2\frac{(i\lambda\beta - \frac{\tau k\mu^2}{\rho_1})}{i\lambda\beta\rho_3} \\
&= \left(-\frac{k}{\rho_1}\rho_2 + b + \frac{k}{\mu^2} + \frac{\delta^2}{\rho_3} - \delta^2\frac{\tau\lambda}{i\beta\rho_3}\right)\mu^2,
\end{aligned}$$

para λ e, consequentemente μ, suficientemente grandes. Substituindo na expressão de A temos

$$A = \frac{K}{-k^2\mu^2} = \frac{\left(-\frac{k}{\rho_1}\rho_2 + b + \frac{k}{\mu^2} + \frac{\delta^2}{\rho_3} - \delta^2\frac{\tau\lambda}{i\beta\rho_3}\right)}{-k^2},$$

de onde segue que $|A| \approx C|\lambda|$, $\lambda \to \infty$, $C > 0$. E como

$$\begin{aligned}
\|U_\mu\|_{\mathcal{H}}^2 &\geq \rho_1\|\Phi_\mu\|_2^2 \\
&= \rho_1\int_0^\pi |i\lambda A\,\mathrm{sen}(\mu x)|^2 dx \\
&\geq \rho_1|\lambda|^2|A|^2\int_0^\pi |\,\mathrm{sen}(\mu x)|^2 dx \\
&= \rho_1^3|\lambda|^2|A|^2\|\, f_2\|_2^2 \\
&\approx C|\lambda|^4\|F_\mu\|_{\mathcal{H}}^2,\ |\lambda| \to \infty,\ C > 0, \qquad (4.152)
\end{aligned}$$

e assim se $\mu \to \infty$ temos

$$\lim_{\lambda_\mu \to \infty} \|U_\mu\|_{\mathcal{H}}^2 = \infty.$$

Finalmente, suponha $\chi_1 \neq 0$, por (4.151) temos $\chi_2 \neq 0$ e então vamos multiplicar e dividir a segunda parcela de K por χ_2, substituir convenientemente χ_2, P_2 e λ^2, de forma a evidenciar o coeficiente de μ^2, assim podemos reescrever K como segue

$$
\begin{aligned}
K &= P_2+\delta^2\mu^2\left[\frac{-\frac{\tau k\mu^2}{\rho_1}\chi_2+\frac{\tau d}{\rho_1}\left(1-\frac{\rho_3\tau k}{\rho_1}\right)+i\beta\lambda\left(1-\frac{\rho_3\tau k}{\rho_1}\right)}{\left(\chi_2\mu^2+\frac{\rho_3\tau d}{\rho_1}+i\beta\rho_3\lambda\right)\chi_2}\right]\\
&= -\rho_2\lambda^2+b\mu^2+k+\delta^2\mu^2\left[\frac{-\frac{\tau k}{\rho_1}(\chi_2\mu^2+\frac{\rho_3\tau d}{\rho_1}+i\lambda\beta\rho_3)+i\lambda\beta+\frac{\tau d}{\rho_1}}{\left(\chi_2\mu^2+\frac{\rho_3\tau d}{\rho_1}+i\beta\rho_3\lambda\right)\chi_2}\right]\\
&= -\rho_2\left(\frac{k\mu^2}{\rho_1}-\frac{d}{\rho_1}\right)+b\mu^2+k+\delta^2\mu^2\left[\frac{-\frac{\tau k}{\rho_1}}{\chi_2}+\frac{i\lambda\beta+\frac{\tau d}{\rho_1}}{\left(\chi_2\mu^2+\frac{\rho_3\tau d}{\rho_1}+i\beta\rho_3\lambda\right)\chi_2}\right]\\
&= \left[-\frac{\rho_2 k}{\rho_1}+b-\delta^2\frac{\tau k}{\rho_1\chi_2}\right]\mu^2+k+\frac{\rho_2 d}{\rho_1}-\delta^2\mu^2\left[\frac{\left(i\lambda\beta+\frac{\tau d}{\rho_1}\right)}{\chi_2\left(\chi_2\mu^2+\frac{\rho_3\tau d}{\rho_1}+i\lambda\rho_3\beta\right)}\right].
\end{aligned}
$$

Agora escolhendo d de forma que

$$
k^2=\left[-\frac{\rho_2 k}{\rho_1}+b-\delta^2\frac{\tau k}{\rho_1\chi_2}\right]d=\left[\frac{-\rho_2 k\chi_2+b\rho_1\chi_2-\delta^2\tau k}{\rho_1\chi_2}\right]d,
$$

temos que

$$
d=\frac{k^2\rho_1\chi_2}{-\rho_2 k\chi_2+b\rho_1\chi_2-\delta^2\tau k}=\frac{k^2\rho_1\left(-\frac{\rho_3 k}{\rho_1}\chi_1\right)}{\left(\frac{\rho_3 k^2}{\rho_1}\right)\left[\chi_1\left(\rho_2-\frac{b\rho_1}{k}\right)-\frac{\delta^2\tau\rho_1}{\rho_3 k}\right]}=-\frac{k\rho_1\chi_1}{\chi_0},
$$

de onde segue que

$$
\begin{aligned}
dK-k^2\mu^2 &= k^2\mu^2+d\left[k+\frac{\rho_2 d}{\rho_1}-\delta^2\mu^2\frac{\left(i\lambda\beta+\frac{\tau d}{\rho_1}\right)}{\chi_2\left(\chi_2\mu^2+\frac{\rho_3\tau d}{\rho_1}+i\lambda\rho_3\beta\right)}\right]-k^2\mu^2\\
&= d\left[k+\frac{\rho_2 d}{\rho_1}-\delta^2\mu^2\frac{\left(i\lambda\beta+\frac{\tau d}{\rho_1}\right)}{\chi_2\left(\chi_2\mu^2+\frac{\rho_3\tau d}{\rho_1}+i\lambda\rho_3\beta\right)}\right],
\end{aligned}
$$

e como $|dK-k^2\mu^2|\approx C\mu,\mu\to\infty,C>0$ e $|K|\approx C\mu^2,\mu\to\infty,C>0$, temos $|A|\approx C\mu,\mu\to\infty,C>0$. Então, definindo $\lambda_\mu=\sqrt{\frac{k\mu^2}{\rho_1}-\frac{d}{\rho_1}}$ temos $|A|^2\approx C|\lambda|^2,|\lambda|\to\infty,C>0$ e assim como em (4.152) temos

$$
\|U_\mu\|^2_{\mathcal{H}} \;\geq\; C|\lambda_\mu|^4\|F_\mu\|^2_{\mathcal{H}}, \tag{4.153}
$$

de onde concluímos que

$$
\lim_{\lambda\to\infty}\|U_\mu\|^2_{\mathcal{H}}=\infty.
$$

Isso conclui a prova de que o sistema (4.1)-(4.6) não é exponencialmente estável novamente via Teorema 2.54. Portanto, fica provado o Teorema 4.9. $\square$

4.4 Estabilidade polinomial

No caso em que não acorre a estabilidade exponencial, ou seja, quando $\chi_0 \neq 0$ nos resta verificar se ocorre a estabilidade polinomial, conforme [20].

Teorema 4.10. *Suponhamos que* $\rho_1, \rho_2, \rho_3, b, k, \delta, \beta > 0$ *e seja* $\mathcal{A}$ *o operador linear definido em* (4.11)*. Se* $\chi_0 \neq 0$*, então o sistema* (4.1)-(4.6) *é polinomialmente estável, com*

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}\|U_0\|_{D(A)}, \quad t \to \infty.$$

Mais ainda, essa taxa de decaimento é ótima.

Demonstração. Com relação a χ_1 temos dois casos a considerar, $\chi_1 \neq 0$ e $\chi_1 = 0$. Suponhamos inicialmente que $\chi_1 \neq 0$. Faremos em passos como de costume.

Passo 1. Existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|\phi_x + \psi\|_2^2 \;\; &\leq \;\; C|\lambda|\left|\int_0^l \Psi\phi_x dx\right| + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad +C\|q\|_2\|U\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \tag{4.154}$$

para λ suficientemente grande. Usando o Lema 4.7, a equação (4.103), somando e subtraindo f_3, tomando a parte real e aplicando as desigualdades triangular e de Hölder, temos

$$\begin{aligned} &\|\phi_x + \psi\|_2^2 \\ \leq\;& C|\chi_0|\left|\int_0^l \Psi(\overline{i\lambda\phi_x - (f_1)_x})dx\right| + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|q\|_2\|U\|_{\mathcal{H}} \\ \leq\;& C|\chi_0||\lambda|\left|\int_0^l \Psi\phi_x dx\right| + C|\chi_0|\left|\int_0^l \Psi(f_1)_x dx\right| + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+C\|q\|_2\|U\|_{\mathcal{H}} \\ \leq\;& C|\chi_0||\lambda|\left|\int_0^l \Psi\phi_x dx\right| + C|\chi_0|\left|\int_0^l \Psi((f_1)_x + f_3)dx\right| - C|\chi_0|\left|\int_0^l \Psi(f_3)_x dx\right| \\ &+\frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|q\|_2\|U\|_{\mathcal{H}} \\ \leq\;& C|\chi_0||\lambda|\left|\int_0^l \Psi\phi_x dx\right| + C|\chi_0|\|\Psi\|_2\|(f_1)_x + f_3\|_2 - C|\chi_0|\|\Psi\|_2\|(f_3)_x\|_2 \\ &+\frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|q\|_2\|U\|_{\mathcal{H}} \\ \leq\;& C|\chi_0||\lambda|\left|\int_0^l \Psi\phi_x dx\right| + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|q\|_2\|U\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Passo 2. Existe $C>0$ tal que

$$\begin{aligned}\rho_1\|\Phi\|_2^2 \;&\le\; C|\lambda|\left|\int_0^l \Psi\phi_x dx\right| + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|q\|_2\|U\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\Psi\|_2^2. \qquad (4.155)\end{aligned}$$

Multiplicando a equação (4.104) por $\overline{\phi}$, integrando por partes, somando e subtraindo $\overline{\psi}$ e usando a equação (4.103) e depois (4.105), e usando as desigualdades triangular e de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
& i\lambda\rho_1\int_0^l \Phi\overline{\phi}dx - k\int_0^l(\phi_x+\psi)_x\overline{\phi}dx = \rho_1\int_0^l f_2\overline{\phi}dx \\
\Rightarrow\;& \rho_1\|\Phi\|_2^2 = \rho_1\int_0^l \Phi\overline{f_1}dx + k\|\phi_x+\psi\|_2^2 + \frac{k}{i\lambda}\int_0^l(\phi_x+\psi)\overline{\Psi}dx \\
& +\frac{k}{i\lambda}\int_0^l(\phi_x+\psi)\overline{f_3}dx + \rho_1\int_0^l f_2\overline{\phi}dx \\
\Rightarrow\;& \rho_1\|\Phi\|_2^2 \le \rho_1\|\Phi\|_2\|f_1\|_2 + k\|\phi_x+\psi\|_2^2 + \frac{k}{|\lambda|}\|\phi_x+\psi\|_2\|\Psi\|_2 \\
& +\frac{k}{|\lambda|}\|\phi_x+\psi\|_2\|f_3\|_2 + \rho_1\|f_2\|_2\|\phi\|_2 \\
\Rightarrow\;& \rho_1\|\Phi\|_2^2 \le \rho_1\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + k\|\phi_x+\psi\|_2^2 + \frac{k}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\Psi\|_2 + \frac{k}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

e usando (4.154), temos

$$\begin{aligned}\rho_1\|\Phi\|_2^2 \;&\le\; C|\lambda|\left|\int_0^l \Psi\phi_x dx\right| + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + C\|q\|_2\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{k}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\Psi\|_2^2, \qquad (4.156)\end{aligned}$$

completando o Passo 2.

Passo 3. Existe $C>0$ tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \le C|\lambda|^2\|F\|_{\mathcal{H}},$$

para $|\lambda|$ suficientemente grande. Com efeito, usando a desigualdade (4.155) e os Lemas 4.4, 4.5 e 4.6, em que para esta última escolhemos $\epsilon = 1$, para λ suficientemente grande temos

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \;&\le\; C|\lambda|\left|\int_0^l \Psi\phi_x dx\right| + C\|q\|_2\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\Psi\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + C\|\Psi\|_2\|q\|_2 \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + 2k\|\phi_x+\psi\|_2^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

e usando a desigualdade de Young com $\rho_2 > \epsilon > 0$ e em seguida o Lema 4.4, obtemos

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C|\lambda|\left|\int_0^l \Psi\phi_x dx\right| + C\|q\|_2\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\Psi\|_2^2 + 2\rho_2\|\Psi\|_2^2 \\ &+\frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + 2k\|\phi_x+\psi\|_2^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Agora, usando a equação (4.154), em seguida somando e subtraindo ψ, usando a desigualdade triangular e substituindo convenientemente ψ conforme a equação (4.105) e a desigualdade de Hölder, chegamos a

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C|\lambda|\|\Psi\|_2\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|\Psi\|_2^2 + C\|q\|_2\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\Psi\|_2^2 \\ &+\frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

e aplicando novamente a desigualdade de Young com $\epsilon > 0$,

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_\epsilon|\lambda|^2\|\Psi\|_2 + 5\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|q\|_2^2 + C_\epsilon\|\theta\|_2^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Além disso, usando novamente o Lema 4.6 e a desigualdade de Young com $0 < \epsilon < \frac{1}{8}$, temos

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C_\epsilon|\lambda|^2\left[\frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\right] + 6\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|\theta\|_2^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq C_\epsilon|\lambda|^2\|\theta\|_2^2 + C_\epsilon|\lambda|^4\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + 8\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|\theta\|_2^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2.\end{aligned}$$

resultando em

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C|\lambda|^2\|\theta\|_2^2 + C|\lambda|^4\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Finalmente usando a estimativa (4.117), e em seguida aplicando a desigualdade de Young com $\epsilon > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C|\lambda|^2\left[\frac{\epsilon}{|\lambda|^2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\right] + C|\lambda|^4\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq C\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon|\lambda|^4\|F\|_{\mathcal{H}} + \epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C|\lambda|^4\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq C_\epsilon|\lambda|^4\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + (C+1)\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2,\end{aligned}$$

escolhendo $0 < \epsilon < \frac{1}{C+1}$ temos

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C|\lambda|^2\|F\|_{\mathcal{H}},$$

concluindo o Passo 3. Logo existe $C > 0$ tal que

$$\|(\lambda i - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}} \leq C|\lambda|^2,$$

para $|\lambda|$ suficientemente grande. Ou ainda

$$\|(\lambda I_d - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}} = O(|\lambda|^2),\ \lambda \to \infty.$$

Pelo o Teorema 2.56 ($(i) \Rightarrow (iv)$) temos

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq Ct^{-\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}, t \to \infty,\ F \in \mathcal{H}.$$

Como $0 \in \rho(\mathcal{A})$, isto é, $\mathcal{A}^{-1}$ é sobrejetor, então para $F \in \mathcal{H}$ tal que $\mathcal{A}U_0 = F$. Portanto,

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{\sqrt{t}}\|U_0\|_{D(\mathcal{A})},\ t \to \infty,\ C > 0,$$

o que prova que a solução é polinomialmente estável no caso $\chi_1 \neq 0$. Agora suponhamos que $\chi_1 = 0$.

Passo 4. Existe $C > 0$ tal que

$$\|\phi_x + \psi\|_2^2 \leq C\left|\int_0^l \Psi\phi_x dx\right| + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{4.157}$$

De fato, usando a equação (4.103) na segunda estimativa do Lema 4.7 temos

$$\begin{aligned}
\|\phi_x + \psi\|_2^2 &\leq C\left|\int_0^l \Psi\overline{\Phi_x}dx\right| + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq C\left|\int_0^l \Psi[\overline{i\lambda\phi_x - (f_1)_x}]dx\right| + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq C|\lambda|\left|\int_0^l \Psi\overline{\phi_x}dx\right| + \left|\int_0^l \Psi\overline{(f_1)_x + f_3}dx\right| + \left|\int_0^l \Psi\overline{f_3}dx\right| + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 \\
&\quad + C|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq C|\lambda|\left|\int_0^l \Psi\overline{\phi_x}dx\right| + \|\Psi\|_2\|(f_1)_x + f_3\|_2 + \|\Psi\|_2\|f_3\|_2 + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 \\
&\quad + C|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq C|\lambda|\left|\int_0^l \Psi\overline{\phi_x}dx\right| + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Passo 5. Existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\rho_1\|\Phi\|_2^2 &\leq C|\lambda|\left|\int_0^l \Psi\phi_x dx\right| + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\Psi\|_2 \\
&\quad + C|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned} \tag{4.158}$$

Realizando procedimento análogo ao do Passo 2 do caso $\chi_1 \neq 0$ obtemos

$$\rho_1\|\Phi\|_2^2 \leq C\|\phi_x+\psi\|_2^2 + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\Psi\|_2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}},$$

e usando a equação (4.157) conclui-se o Passo 5.

Passo 6. Existe $C>0$ tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C|\lambda|^2\|F\|_{\mathcal{H}}, \tag{4.159}$$

para $|\lambda|$ suficientemente grande. Usando as equações (4.157), (4.158) e os Lemas 4.4, 4.5 e 4.6 temos

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C|\lambda|\left|\int_0^l \Psi\phi_x dx\right| + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\Psi\|_2^2\\
&\quad +C|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \rho_1\|\Psi\|_2^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|q\|_2\\
&\quad +C|\lambda|\left|\int_0^l \Psi\phi_x dx\right| + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo ψ, usando a desigualdade triangular e substituindo convenientemente ψ conforme a equação (4.105), em seguida usando a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C|\lambda|\|\Psi\|_2\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|\Psi\|_2^2 + C\|U\|_2\|F\|_2 + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2\\
&\quad +C|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|q\|_2,
\end{aligned}$$

usando a desigualdade de Young com $\epsilon>0$, em seguida usando o Lemas 4.4 e 4.6, temos

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq 3\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon|\lambda|\|\Psi\|_2 + C\|\Psi\|_2^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2\\
&\quad +C|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C_\epsilon\|q\|_2^2\\
&\leq 3\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon|\lambda|\left[C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2\right] + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2\\
&\quad +C|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C_\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\\
&\leq 3\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\\
&\leq 4\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|\theta\|_2^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

tomando $0<\epsilon<\frac{1}{4}$ temos

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C\|\theta\|_2^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{4.160}$$

novamente usando a equação (4.117) e a desigualdade de Young, concluímos

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C\left[\frac{\epsilon}{|\lambda|^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + C_\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\right] + C|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\\ &\leq 2\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C|\lambda|^4\|F\|_{\mathcal{H}}^2,\end{aligned}$$

de onde escolhendo $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ resulta em

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C|\lambda|^2\|F\|_{\mathcal{H}}, \tag{4.161}$$

para λ suficientemente grande, o que conclui o Passo 6. A estabilidade polinomial segue como fizemos no caso em que $\chi_1 = 0$. Para a otimalidade, suponhamos que exista $\epsilon > 0$ tal que para todo $U_0 \in D(\mathcal{A})$ se tenha

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2-\epsilon}}}\|U_0\|_{D(\mathcal{A})},\ t \to \infty,\ C > 0.$$

Como $0 \in \rho(\mathcal{A})$, então $(-\mathcal{A}) : D(\mathcal{A}) \to \mathcal{H}$ é invertível com inverso limitado e assim para todo $F \in \mathcal{H}$ existe $U_0 \in D(\mathcal{A})$ tal que $F = \mathcal{A}U_0$. Logo,

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2-\epsilon}}}\|\mathcal{A}^{-1}F\|_{D(\mathcal{A})},\ t \to \infty,\ C > 0$$

para todo $F \in \mathcal{H}$. Logo temos

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{C}{t^{1/2-\epsilon}},\ t \to \infty,\ C > 0,$$

pelo Teorema 2.56 ($(iv) \Rightarrow (i)$), temos que

$$\|(i\lambda I_d - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}} = O\left(|\lambda|^{2-\epsilon}\right),\ \lambda \to \infty,$$

ou equivalentemente,

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C|\lambda|^{2-\epsilon}\|F\|_{\mathcal{H}},\ \lambda \to \infty,\ C > 0.$$

Por outro lado, na prova do Teorema 4.9 obtivemos as desigualdades (4.152) e (4.153) para ambos os casos, $\chi_1 = 0$ ou $\chi_1 \neq 0$, a saber,

$$\|U_\mu\|_{\mathcal{H}} \geq C|\lambda_\mu|^2\|F_\mu\|_{\mathcal{H}}$$

para $\mu \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Então, dado μ suficientemente grande temos

$$\begin{aligned} & |\lambda_\mu|^2 \|F_\mu\|_{\mathcal{H}} \leq \|U_\mu\|_{\mathcal{H}} \leq C|\lambda_\mu|^{2-\epsilon}\|F_\mu\|_{\mathcal{H}} \\ \Rightarrow \quad & |\lambda_\mu|^2 \leq C|\lambda_\mu|^{2-\epsilon} \\ \Rightarrow \quad & |\lambda_\mu|^\epsilon \leq C, \end{aligned}$$

ou seja, (λ_μ) é limitada, o que é um absurdo. Isto completa a prova da otimalidade no sentido de que a taxa $t^{-\frac{1}{2}}$ (para dados regulares) não pode ser melhorada. $\square$

5 SISTEMA DE TIMOSHENKO TERMOELÁSTICO E DISSIPAÇÃO FRICCIONAL

5.1 BREVE DEDUÇÃO DO MODELO

Agora vamos considerar o sistema obtido de (4.1)-(4.4), a saber

$$\begin{aligned} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x &= 0 \quad \text{em } (0,l)\times(0,\infty),\\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x+\psi) + \delta\theta_x &= 0 \quad \text{em } (0,l)\times(0,\infty),\\ \rho_3\theta_t + q_x + \delta\psi_{xt} &= 0 \quad \text{em } (0,l)\times(0,\infty),\\ \tau q_t + \beta q + \theta_x &= 0 \quad \text{em } (0,l)\times(0,\infty), \end{aligned}$$

com uma dissipação friccional acoplada no deslocamento transversal dado por $\alpha\phi_t$, com $\alpha \geq 0$ para existência e $\alpha > 0$ para estabilidade de soluções, conforme considerado em [13]. Logo, mediante ao sistema apresentado em [13, 23], vamos estudar o seguinte sistema

$$\rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x + \alpha\phi_t = 0 \quad \text{em } (0,l)\times(0,\infty), \tag{5.1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x+\psi) + \delta\theta_x = 0 \quad \text{em } (0,l)\times(0,\infty), \tag{5.2}$$

$$\rho_3\theta_t + q_x + \delta\psi_{xt} = 0 \quad \text{em } (0,l)\times(0,\infty), \tag{5.3}$$

$$\tau q_t + \beta q + \theta_x = 0 \quad \text{em } (0,l)\times(0,\infty), \tag{5.4}$$

com condições iniciais

$$\begin{aligned} &\phi(x,0) = \phi_0(x), \quad \phi_t(x,0) = \phi_1(x), \quad \psi(x,0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x,0) = \psi_1(x)\\ &\theta(x,0) = \theta_0(x), \quad q(x,0) = q_0(x), \quad x \in (0,l), \end{aligned} \tag{5.5}$$

e condições de fronteira

$$\begin{aligned} &\phi(0,t) = \phi(l,t) = 0, \quad \psi_x(0,t) = \psi_x(l,t) = 0, \quad \theta(0,t) = \theta(l,t) = 0,\\ &t \geq 0. \end{aligned} \tag{5.6}$$

5.2 EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Fazendo $\phi_t = \Phi$ e $\psi_t = \Psi$ temos

$$U = (\phi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, q)^T, \quad U_t = (\Phi, \Phi_t, \Psi, \Psi_t, \theta_t, q_t)^T, \quad U(0) = (\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0, q_0)^T.$$

Para obtermos o problema de Cauchy abstrato na forma

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}U, \quad t > 0,\\ U_0 = U(0), \end{cases} \tag{5.7}$$

equivalente ao sistema (5.1)-(5.6), definimos o espaço de fase

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,l) \times L^2(0,l) \times H_*^1(0,l) \times L_*^2(0,l) \times L^2(0,l) \times L^2(0,l), \tag{5.8}$$

onde

$$L_*^2(0,l) = \left\{ f \in L^2(0,l); \int_0^l f dx = 0 \right\}, \quad H_*^2(0,l) = H^1(0,l) \cap L_*^2(0,l)$$

que é um espaço de Hilbert com produto interno $(.,.)_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ e norma $\|.\|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ dados por

$$\begin{aligned} (U, \widehat{U})_{\mathcal{H}} &= \rho_1(\Phi, \widehat{\Phi})_2 + \rho_2(\Psi, \widehat{\Psi})_2 + \rho_3(\theta, \widehat{\theta})_2 + \tau(q, \widehat{q})_2 + k(\phi_x + \psi, \widehat{\phi}_x + \widehat{\psi})_2 \\ &\quad + b(\psi_x, \widehat{\psi})_2, \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \rho_1\|\Phi\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + \rho_3\|\theta\|_2^2 + \tau\|q\|_2^2 + k\|\phi_x + \psi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2, \tag{5.10}$$

para todos $U = (\phi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, q)^T, \widehat{U} = (\widehat{\phi}, \widehat{\Phi}, \widehat{\psi}, \widehat{\Psi}, \widehat{\theta}, \widehat{q})^T \in \mathcal{H}$. Note que podemos escrever (5.1)-(5.6) como P.V.I. abstrato

$$U_t = \begin{bmatrix} \Phi \\ \Phi_t \\ \Psi \\ \Psi_t \\ \theta_t \\ q_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1}(\phi_x + \psi)_x - \frac{\alpha}{\rho_1}\Phi \\ \Psi \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\phi_x + \psi) - \frac{\delta}{\rho_2}\theta_x \\ -\dfrac{1}{\rho_3}q_x - \dfrac{\delta}{\rho_3}\Psi_x \\ -\dfrac{\beta}{\tau}q - \dfrac{1}{\tau}\theta_x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & I_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1}\partial_{xx} & -\frac{\alpha}{\rho_1} & \frac{k}{\rho_1}\partial_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d & 0 & 0 \\ -\frac{k}{\rho_2}\partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2}\partial_{xx} - \frac{k}{\rho_2} & 0 & -\dfrac{\delta}{\rho_2}\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\delta}{\rho_3}\partial_x & 0 & -\dfrac{\beta}{\rho_3}\partial_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\tau}\partial_x & -\dfrac{\beta}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \Phi \\ \psi \\ \Psi \\ \theta \\ q \end{bmatrix},$$

com $U(0) := U_0 = (\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0, q_0)^T$, obtendo o operador linear diferencial

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1}\partial_{xx} & -\frac{\alpha}{\rho_1} & \frac{k}{\rho_1}\partial_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d & 0 & 0 \\ \frac{b}{\rho_2}\partial_{xx} - \frac{k}{\rho_2}\partial_x & 0 & -\frac{k}{\rho_2} & 0 & -\dfrac{\delta}{\rho_2}\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\delta}{\rho_3}\partial_x & 0 & -\dfrac{\beta}{\rho_3}\partial_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\tau}\partial_x & -\dfrac{\beta}{\tau} \end{bmatrix}. \tag{5.11}$$

Definimos

$$D(\mathcal{A}) = \{U \in \mathcal{H}, \Psi \in H^1_*(0,l), \phi, \psi \in H^2, \Phi, \psi_x, \theta \in H^1_0(0,l), q \in H^1\}, \tag{5.12}$$

e denotando

$$H^2_*(0,l) = \left\{ f \in H^1_*(0,l); f_x \in H^1_0(0,l) \right\},$$

temos

$$D(\mathcal{A}) = \left(H^2(0,l) \cap H^1_0(0,l)\right) \times H^1_0(0,l) \times H^2_*(0,l) \times H^1_*(0,l) \times H^1_0(0,l) \times H^1(0,l).$$

Com isto, podemos enunciar e demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 5.1. *(Existência e unicidade) Suponhamos que* $\rho_1, \rho_2, \rho_3, b, k, \delta, \tau, \beta > 0$ *e* $\alpha \geq 0$ *e considere o operador linear* $\mathcal{A}$ *definido em* (5.11)*. Se* $U_0 \in D(\mathcal{A})$*, onde* $D(\mathcal{A})$ *é definido em* (5.12)*, então o problema* (5.7) *possui uma única solução na classe*

$$U \in C\left([0,\infty), D(\mathcal{A})\right) \cap C^1\left([0,\infty), \mathcal{H}\right). \tag{5.13}$$

Em outras palavras, se $\phi_0 \in H^1_0(0,l) \cap H^2(0,l)$*,* $\psi_0 \in H^2_*(0,l)$ *e* $\phi_1, \psi_1 \in H^1_0(0,l)$*, então o sistema* (5.1)-(5.6) *possui uma única solução na classe*

$$\phi, \psi \in C\left([0,\infty), H^1_0(0,l) \cap H^2(0,l)\right) \cap C^1\left([0,\infty), H^1_0(0,l)\right) \cap C^2\left([0,\infty), L^2(0,l)\right). \tag{5.14}$$

dada por $U(t) = e^{At}U_0, t \geq 0.$

Demonstração. Usaremos os Teoremas 2.47 e 2.52 assim com o fizemos no Capítulo 4.

(ii) O operador $\mathcal{A}$ definido em (5.11) é dissipativo em $\mathcal{H}$. De fato, dado $U = (\phi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, q)^T \in$

$D(\mathcal{A})$, integrando por partes e usando que $\Psi, \psi_x, \theta \in H_0^1(0,l)$ temos

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} &= \rho_1\left(\frac{k}{\rho_1}(\phi_x+\psi)_x - \frac{k}{\rho_1}\Phi, \Phi\right) + \rho_2\left(\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\phi_x+\psi) - \frac{\delta}{\rho_2}\theta_x, \Psi\right)_2 \\
&\quad + \rho_3\left(-\frac{1}{\rho_3}q_x - \frac{\delta}{\rho_3}\Psi_x, \theta\right)_2 + \tau\left(-\frac{\beta}{\tau}q - \frac{1}{\tau}\theta_x, q\right)_2 \\
&\quad + k(\Phi_x+\Psi, \phi_x+\psi)_2 + b(\Psi_x, \psi_x)_2 \\
&= k(\Phi_x+\Psi, \phi_x+\psi)_2 - k\overline{(\Phi_x+\Psi, (\phi_x+\psi))_2} + \\
&\quad + \delta(\theta, \Psi_x)_2 - \delta\overline{(\theta, \Psi_x)_2} - b\overline{(\Psi_x, \psi_x)_2} + b(\Psi_x, \psi_x)_2 \\
&\quad + (q, \theta_x)_2 - \overline{(q, \theta_x)_2} + (-\beta q, q)_2 \\
&= k2Im((\Phi_x+\Psi, \phi_x+\psi)_2) + \delta 2Im((\theta, \Psi_x)_2) - (\alpha\Phi, \Phi) \\
&\quad + b2Im((\Psi_x, \psi_x)_2) + 2Im((q, \theta_x)_2) - \beta(q, q)_2 - \alpha\left(\Phi, \Phi\right),
\end{aligned}
$$

e tomando a parte real

$$
Re(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = -\alpha\|\Phi\|_2^2 - \beta\|q\|_2^2 \le 0, \tag{5.15}
$$

o que prova que o operador $\mathcal{A}$ é dissipativo em $\mathcal{H}$.

(iii) Agora vamos mostrar que $0 \in \rho(\mathcal{A})$, isto é, $(-\mathcal{A})^{-1}$ existe e é limitado. Faremos em duas etapas.

Passo 1. Existe $(-\mathcal{A})^{-1}$. Com efeito, dado $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) \in \mathcal{H}$, mostraremos que a equação

$$
-\mathcal{A}U = F, \tag{5.16}
$$

possui uma única solução $U \in D(\mathcal{A})$. Com efeito, reescrevendo (5.16), em termos de coordenadas, temos

$$
\begin{aligned}
-\Phi &= f_1 \in H_0^1(0,l), && (5.17)\\
-\frac{k}{\rho_1}(\phi_x+\psi)_x + \frac{\alpha}{\rho_1}\Phi &= f_2 \in L^2(0,l), && (5.18)\\
-\Psi &= f_3 \in H_*^1(0,l), && (5.19)\\
-\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}\rho_2(\phi_x+\psi) + \frac{\delta}{\rho_2}\theta_x &= f_4 \in L_*^2(0,l), && (5.20)\\
\frac{1}{\rho_3}q_x + \frac{\delta}{\rho_3}\Psi_x &= f_5 \in L^2(0,l), && (5.21)\\
\frac{\beta}{\tau}q + \frac{1}{\tau}\theta_x &= f_6 \in L^2(0,l), && (5.22)
\end{aligned}
$$

note que Φ, Ψ, θ e q já foram obtidos em (4.24), (4.25) (4.34) e (4.38), respectivamente. Resta mostrarmos que existem $\phi \in H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)$ e $\psi \in H_*^2(0,l)$, satisfazendo (5.17) - (5.22).

Substituindo (4.24), (4.25) (4.34) e (4.38) nas demais

$$-k(\phi_x+\psi)_x = \rho_1 f_2 - \alpha f_1 \quad \in L^2(0,l), \tag{5.23}$$

$$-b\psi_{xx} + k\rho_2(\phi_x+\psi) = \rho_2 f_4 - \delta\theta_x \quad \in L^2_*(0,l). \tag{5.24}$$

Denotando

$$g_1 := \rho_1 f_2 - \alpha f_1 \quad \in L^2(0,l), \tag{5.25}$$

$$g_2 := \rho_2 f_4 - \delta\theta_x \quad \in L^2(0,l), \tag{5.26}$$

temos o problema

$$-k(\phi_x+\psi)_x = g_1 \quad \in L^2(0,l), \tag{5.27}$$

$$-b\psi_{xx} + k\rho_2(\phi_x+\psi) = g_2 \quad \in L^2(0,l), \tag{5.28}$$

que é o mesmo problema que (4.41)-(4.42) obtido no Capítulo 4. Logo, mostra-se de forma análoga que (5.27)-(5.28) possui uma única solução $\phi \in H^2(0,l)\cap H^1_0(0,l)$ e $\psi \in H^2_*(0,l)$. Portanto, a equação (5.16) possui uma única solução $U \in D(\mathcal{A})$ como desejado.

Finalmente, vamos mostrar que o operador $(-\mathcal{A})^{-1}$ é limitado, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que,

$$\|(-\mathcal{A})^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \le C\|F\|_{\mathcal{H}}, \forall F \in \mathcal{H}. \tag{5.29}$$

Observação 5.1. Observe que a única diferença entre o sistema (5.17)-(5.22) e o sistema (4.18)-(4.23) do Capítulo 4 ocorre entre as equações (5.18) com a equação (4.19). Então as estimativas do Capítulo 4 que não dependem da equação (4.19) poderão ser aproveitadas aqui.

Como $-\mathcal{A}$ é bijetor é suficiente mostrar que $\|U\|_{\mathcal{H}} \le C\|F\|_{\mathcal{H}}$ para todo $F \in \mathcal{H}$. De (5.17) e (5.19) temos

$$\|\Phi\|_2^2 = \|f_1\|_2^2 \le C\|F\|^2_{\mathcal{H}} \tag{5.30}$$

$$\|\Psi\|_2^2 = \|f_3\|_2^2 \le C\|F\|^2_{\mathcal{H}}. \tag{5.31}$$

De (5.15) e da desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\alpha\|\Phi\|_2^2 + \beta\|q\|_2^2 = -Re(AU,U)_{\mathcal{H}} \le \|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}. \tag{5.32}$$

Da Observação 5.1 temos

$$\|\theta\|_2^2 \quad \le \quad C\|F\|_2^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \tag{5.33}$$

$$\|\psi_x\|_2^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2, \tag{5.34}$$

$$\|\phi_x + \psi\|_2^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{5.35}$$

Usando (5.30), (5.31), (5.32), (5.33) (5.34) e (5.35), obtemos

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \rho_1\|\Phi\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + \rho_3\|\theta\|_2^2 + \tau\|q\|_2^2 + k\|\phi_x + \psi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 \\
&\leq C\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq C\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2, \qquad (5.36)
\end{aligned}$$

Que finalmente resulta em

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}^2, \tag{5.37}$$

para todo $F \in \mathcal{H}$. Isso conclui a prova de que $(-\mathcal{A})^{-1}$ é limitado e, portanto a prova de que $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

(i) A prova de que $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$ já foi feita o Capítulo 4. Com (i)-(iii) o Teorema 2.47 nos dá que o sistema (5.1)-(5.6) tem uma única solução. $\square$

5.3 Estabilidade exponencial

Para aplicar Teorema 2.54 vamos considerar dois lemas que permitirão obtermos a estabilidade exponencial de (5.1)-(5.6)

Lema 5.2. *Suponhamos que $\rho_1, \rho_2, \rho_3, b, k, \delta, \tau, \alpha, \beta > 0$ e considere o operador linear $\mathcal{A}$ definido em* (5.11). *Então $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$.*

Demonstração. Assim como anteriormente, temos $D(\mathcal{A}) \overset{c}{\hookrightarrow} \mathcal{H}$. Pelo Teorema 2.44 temos $\rho(\mathcal{A})$ é compacto. Pelo Corolário 2.45 segue que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C}\backslash\rho(\mathcal{A})$ é formado apenas por autovalores de $\mathcal{A}$. Se assumirmos que $i\mathbb{R} \not\subseteq \rho(\mathcal{A})$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $i\lambda \notin \rho(\mathcal{A})$. Assim, $i\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$, isto é, existe $U = (\phi, \Phi, \psi(t), \Psi) \in D(\mathcal{A})$ não nulo, tal que

$$\mathcal{A}U = i\lambda U, \tag{5.38}$$

disso e da dissipatividade, (5.15), do operador $\mathcal{A}$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}U - i\lambda U = 0 &\Rightarrow (\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} - i\lambda(U, U)_{\mathcal{H}} = 0 \\
&\Rightarrow Re((\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}}) - Re(i\lambda\|U\|_{\mathcal{H}}^2) = 0 \\
&\Rightarrow -\alpha\|\Phi\|_2^2 - \beta\|q\|_2^2 = 0 \\
&\Rightarrow \Phi, q = 0, \qquad (5.39)
\end{aligned}$$

uma vez que $\alpha, \beta > 0$. Escrevendo equação (5.38) em termos de coordenadas obtemos

$$i\lambda\phi - \Phi = 0, \tag{5.40}$$
$$i\lambda\rho_1\Phi - k(\phi_x + \psi)_x + \frac{\alpha}{\rho_1}\Phi = 0, \tag{5.41}$$
$$i\lambda\psi - \Psi = 0, \tag{5.42}$$
$$i\lambda\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) + \delta\theta_x = 0, \tag{5.43}$$
$$i\rho_3\theta + q_x + \delta\Psi_x = 0, \tag{5.44}$$
$$i\lambda\tau q + \beta q + \theta_x = 0. \tag{5.45}$$

Substituindo (5.39) em (5.45) resulta $\theta_x = 0$. Como $\theta \in H_0^1(0,l)$ a desigualdade de Poincaré resulta em
$$\|\theta\|_2^2 \leq l^2\|\theta_x\|_2^2 = 0. \tag{5.46}$$
Substituindo (5.39) e (5.46) em (5.44) temos $\Psi_x = 0$. Como $\Psi \in H_*^1(0,l)$ pela desigualdade de Poincaré temos
$$\|\Psi\|_2^2 \leq l^2\|\Psi_x\|_2^2 = 0. \tag{5.47}$$
De (5.47) e (5.42) temos
$$\psi = 0. \tag{5.48}$$
Substituindo (5.47),(5.48) e (5.39) em (5.43) e usando que $\phi \in H_0^1(0,l)$ obtemos

$$\phi = 0. \tag{5.49}$$

Finalmente, de (5.39), (5.46), (5.47), (5.48) e (5.49) segue que $U = 0$, o que é um absurdo, pois U é autovetor de $\mathcal{A}$. Portanto temos $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$. □

O Lema 5.2 nos diz que o operador $(i\lambda I - \mathcal{A}) : D(\mathcal{A}) \to \mathcal{H}$ é inversível com inverso limitado para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Para que o sistema (5.1)-(5.6) seja exponencialmente estável, resta mostrarmos que o operador o operador $(i\lambda - \mathcal{A})^{-1}$ é limitado para todo λ real. É suficiente mostrarmos que, para todo $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \in \mathcal{H}$ existe $C > 0$ tal que $\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}$ onde $U = (\phi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, q)$ é solução de

$$i\lambda\phi - \Phi = f_1, \tag{5.50}$$
$$i\lambda\rho_1\Phi - k(\phi_x + \psi)_x - \alpha\Phi = f_2, \rho_1 \tag{5.51}$$
$$i\lambda\psi - \Psi = f_3, \tag{5.52}$$
$$i\lambda\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) + \delta\theta_x = \rho_2 f_4, \tag{5.53}$$
$$i\lambda\rho_3\theta + q_x + \delta\Psi_x = \rho_3 f_5, \tag{5.54}$$
$$i\lambda\tau q + \beta q + \theta_x = \tau f_6, . \tag{5.55}$$

em $D(\mathcal{A})$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Com essas considerações podemos enunciar o:

Lema 5.3. *Suponhamos que* $\rho_1, \rho_2, \rho_3, b, k, \delta, \tau, \alpha, \beta > 0$ *e considere o operador linear* $\mathcal{A}$ *definido em* (5.11). *Então existe uma constante positiva* C *tal que*

$$\|q\|_2^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \tag{5.56}$$

e

$$\|\Phi\|_2^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \tag{5.57}$$

Demonstração. Dado $F \in \mathcal{H}$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$(F, U)_{\mathcal{H}} = ((i\lambda I - \mathcal{A})U, U)_{\mathcal{H}} = i\lambda\|U\|_{\mathcal{H}}^2 - (\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}},$$

tomando a parte real e usando (5.15), obtemos

$$\alpha\|\Phi\|_2^2 + \beta\|q\|_2^2 = -Re(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = Re(F, U)_{\mathcal{H}} \leq \|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}},$$

□

Lema 5.4. *Suponhamos que* $\rho_1, \rho_2, \rho_3, b, k, \delta, \tau, \alpha, \beta > 0$ *e considere o operador linear* $\mathcal{A}$ *definido em* (5.11). *Então existe uma constante positiva* C *tal que*

$$\|\theta\|_2^2 \leq C\|\Psi\|_2\|q\|_2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{5.58}$$

Demonstração. Por causa da Observação 5.1 a prova é a mesma que a do Lema 4.5. □

Lema 5.5. *Suponhamos que* $\rho_1, \rho_2, \rho_3, b, k, \delta, \tau, \alpha, \beta > 0$ *e considere o operador linear* $\mathcal{A}$ *definido em* (5.11). *Então existe uma constante positiva* C *tal que*

$$\int_0^l |\Psi|^2 dx \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2.$$

Além disso, para qualquer $\epsilon > 0$ *existe* $C_\epsilon > 0$ *tal que*

$$\int_0^l |\psi_x|^2 dx \leq \frac{C_\epsilon}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + \frac{\epsilon}{|\lambda|^2}\int_0^l |\phi_x + \psi|^2 dx + c_\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \tag{5.59}$$

para $|\lambda|$ *suficientemente grande.*

Demonstração. Análogo ao Lema 5.4. □

Lema 5.6. *Suponhamos que* $\rho_1, \rho_2, \rho_3, b, k, \delta, \tau, \alpha, \beta > 0$ *e considere o operador linear* $\mathcal{A}$

definido em (5.11). *Então existe uma constante positiva* C *tal que*

$$\|\phi_x + \psi\|_2^2 \leq +\frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \tag{5.60}$$

para $|\lambda|$ *suficientemente grande.*

Demonstração. Multiplicando (5.51) por $\overline{\phi}$, integrando por partes e considerando as condições de fronteira, usando as equações (5.50), (5.52) e somando e subtraindo ψ, temos

$$\begin{aligned}
& i\lambda\rho_1 \int_0^l \Phi\overline{\phi}dx - k\int_0^l (\phi_x+\psi)_x\overline{\phi}dx + \alpha\int_0^l \Phi\overline{\phi}dx = \rho_1\int_0^l f_2\overline{\phi}dx \\
\Rightarrow\quad & -\rho_1\int_0^l \Phi\overline{(\Phi+f_1)}dx + k\int_0^l(\phi_x+\psi)\overline{(\phi_x+\psi)}dx - k\int_0^l(\phi_x+\psi)\overline{\psi}dx \\
& -i\alpha\int_0^l \Phi\frac{\overline{\Phi}+f_1}{\lambda}dx = \rho_1\int_0^l f_2\overline{\phi}dx \\
\Rightarrow\quad & -\rho_1\|\Phi\|_2^2 - \rho_1\int_0^l \Phi\overline{f_1}dx + k\|\phi_x+\psi\|_2^2 - ik\int_0^l(\phi_x+\psi)\frac{\overline{\Psi+f_3}}{\lambda}dx \\
& +\frac{\alpha}{i\lambda}\|\Phi\|_2^2 + \frac{\alpha}{i\lambda}\int_0^l \Phi\overline{f_1}dx = \rho_1\int_0^l f_2\overline{\phi}dx \\
\Rightarrow\quad & -\rho_1\|\Phi\|_2^2 - \rho_1\int_0^l \Phi\overline{f_1}dx + k\|\phi_x+\psi\|_2^2 - ik\int_0^l(\phi_x+\psi)\frac{\overline{\Psi}}{\lambda}dx \\
& -k\int_0^l(\phi_x+\psi)\frac{\overline{f_3}}{i\lambda}dx - \frac{\alpha}{i\lambda}\|\Phi\|_2^2 = \rho_1\int_0^l f_2\overline{\phi}dx - ik\int_0^l(\phi_x+\psi)\frac{\overline{f_3}}{\lambda}dx \\
\Rightarrow\quad & k\|\phi_x+\psi\|_2^2 = \rho_1\int_0^l f_2\overline{\phi}dx - ik\int_0^l(\phi_x+\psi)\frac{\overline{f_3}}{\lambda}dx + \rho_1\|\Phi\|_2^2 \\
& +\rho_1\int_0^l \Phi\overline{f_1}dx + ik\int_0^l(\phi_x+\psi)\frac{\overline{\Psi}}{\lambda}dx + ik\int_0^l(\phi_x+\psi)\frac{\overline{f_3}}{\lambda}dx + \bar{i}\frac{\alpha}{\lambda}\|\Phi\|_2^2.
\end{aligned}$$

Tomando a parte real da equação acima, em seguida o módulo do lado direito, usando as desigualdades triangular, de Hölder e o Lema 5.3

$$\begin{aligned}
k\|\phi_x+\psi\|_2^2 &\leq \rho_1\|f_2\|_2\|\phi\|_2 + \frac{k}{|\lambda|}\|\phi_x+\psi\|\|f_3\|_2 + \rho_1\|\Phi\|_2^2 \\
&\quad +\rho_1\|\Phi\|_2\|f_1\|_2 + \frac{k}{|\lambda|}\|\phi_x+\psi\|_2\|\Psi\|_2 + \frac{k}{|\lambda|}\|\phi_x+\psi\|_2\|f_3\|_2 + \frac{\alpha}{|\lambda|}\|\Phi\|_2^2 \\
&\leq \rho_1\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{k}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \rho_1\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{k}{|\lambda|}\|\phi_x+\psi\|_2\|\Psi\|_2 \\
&\quad +\frac{k}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{k}{|\lambda|}\|\phi_x+\psi\|_2\|\Psi\|_2,
\end{aligned}$$

e usando a desigualdade de Young com $\epsilon = \frac{k}{2}$ e em seguida o Lema 5.5

$$\begin{aligned}
\frac{k}{2}\|\phi_x+\psi\|_2^2 &\leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2|\lambda|}\|\Psi\|_2^2 \\
&\leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2|\lambda|}\left[C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2\right] \\
&\leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2,
\end{aligned}$$

e temos provada a desigualdade desejada. □

Lema 5.7. *Suponhamos que $\rho_1, \rho_2, \rho_3, b, k, \delta, \tau, \alpha, \beta > 0$ e considere o operador linear $\mathcal{A}$ definido em* (3.15). *Então existe uma constante positiva C tal que para todo $F \in \mathcal{H}$ tem-se $\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}$ onde U é solução de $(i\lambda I - \mathcal{A})U = F$ em $D(\mathcal{A})$.*

Demonstração. Seja U solução de (5.50)-(5.55), então dos Lemas 5.3-5.6, obtemos

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \rho_1\|\Phi\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + \rho_3\|\theta\|_2^2 + \tau\|q\|_2^2 + k\|\phi_x+\psi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 \\
&= C_\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_\epsilon}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_2 + C\|\Psi\|_2\|q\|_2 \\
&= 3\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C_\epsilon}{|\lambda|^2}\|\theta\|_2^2 + C_\epsilon\|q\|_2^2 \\
&= 3\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C_\epsilon}{|\lambda|^2}\left[\|\Psi\|_2\|q\|_2\right] + C_\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&= 5\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C_\epsilon}{|\lambda|^4}\|q\|_2^2 \\
&= 6\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2,
\end{aligned}$$

para $\epsilon > 0$. Além disso, escolhendo $0 < \epsilon < \frac{1}{6}$, temos

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}, \tag{5.61}$$

como desejado. □

Finalmente, temos o seguinte resultado.

Teorema 5.8. *Suponhamos que $\rho_1, \rho_2, \rho_3 b, k, \delta, \tau, \alpha, \beta > 0$, então a solução U de* (5.7) *decai exponencialmente em $\mathcal{H}$, independentemente do dado inicial U_0. Em outras palavras, o sistema* (5.1)-(5.6) *é exponencialmente estável.*

Demonstração. Segue dos Lemas 5.2 e 5.7 em conjunto com o Teorema 2.54 que o semigrupo $S(t) = e^{\mathcal{A}t},\ t \geq 0$, associado ao problema (5.7) é exponencialmente estável. Portanto $U(t) = e^{\mathcal{A}t}U_0$ é exponencialmente estável em $\mathcal{H}$ seja qual for o dado inicial U_0. □

REFERÊNCIAS

[1] D. S. Almeida Júnior, M. L. Santos, and J. Muñoz Rivera. Stability to weakly dissipative Timoshenko systems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 36(14):1965–1976, 2013.

[2] A. Borichev and Y. Tomilov. Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups. *Mathematische Annalen*, 347(2):455–478, 2010.

[3] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer-Verlag New York, 1 edition, 2010.

[4] M. M. Cavalcanti and V. N. D. Cavalcanti. *Introdução a Teoria das Distribuiçoes e aos Espaços de Sobolev*. Editora da Universidade Estadual de Maringá (Eduem), Maringá, 2009.

[5] M. M. Cavalcanti and V. N. Domingos Cavalcanti. *Semigrupos Lineares e Não Lineares e Aplicações*. Livro Texto - Universidade Estadual de Maringá, DMA. UEM/DMA, 2016.

[6] K.-J. Engel and R. Nagel. *A Short Course on Operator Semigroups*. Springer Science & Business Media, New York, 2006.

[7] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2 edition, 2010.

[8] H. D. Fernández Sare and R. Racke. On the stability of damped Timoshenko systems: Cattaneo versus Fourier law. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 194(1):221–251, 2009.

[9] C. Isnard. *Introdução à Medida e Integração*. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2013.

[10] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons. Inc., New York, 1978.

[11] Z. Liu and B. Rao. Characterization of polynomial decay rate for the solution of linear evolution equation. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 56(4):630–644, Jul 2005.

[12] Z. Liu and S. Zheng. *Semigroups Associated with Dissipative Systems*. Research Notes in Mathematics. Chapman & Hall/CRC, New York, 1999.

[13] S. A. Messaoudi, M. Pokojovy, and B. Said-Houari. Nonlinear damped Timoshenko systems with second sound-global existence and exponential stability. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 32(5):505–534, 2009.

[14] J. E. Muñoz Rivera and R. Racke. Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems—global existence and exponential stability. *J. Math. Anal. Appl.*, 276(1):248–278, 2002.

[15] J. E. Muñoz Rivera and R. Racke. Global stability for damped Timoshenko systems. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 9(6):1625–1639, 2003.

[16] J. T. Oden and L. F. Demkowicz. *Applied Functional Analysis*. CRC Press, Boca Raton, FL, second edition, 2010.

[17] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1983.

[18] C. A. Raposo, J. Ferreira, M. L. Santos, and N. N. O. Castro. Exponential stability for the Timoshenko system with two weak dampings. *Appl. Math. Lett.*, 18(5):535–541, 2005.

[19] J. M. Rivera. *Estabilizaçao de Semigrupos e Aplicações*. Séries de Métodos Matemáticos. Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC), Petrópolis-RJ/Instituto de Matemática-Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro-RJ, 2008.

[20] M. L. Santos, D. S. Almeida Júnior, and J. E. Muñoz Rivera. The stability number of the Timoshenko system with second sound. *J. Differential Equations*, 253(9):2715–2733, 2012.

[21] S. P. Timoshenko. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 41(245):744–746, 1921.

[22] S. P. Timoshenko. Vibration Problems in Engineering. *Van Nostrand, New York*, 1955.

[23] L.-J. Yang and J.-M. Wang. Stability of a damped hyperbolic Timoshenko system coupled with a heat equation. *Asian J. Control*, 16(2):546–555, 2014.