Universidade Estadual de Londrina

GUILHERME DE MARTINI

SISTEMA DE TIMOSHENKO COM HISTÓRIA E LEI DE CATTANEO/FOURIER: EXISTÊNCIA, UNICIDADE E COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE SOLUÇÃO

Londrina

2019

GUILHERME DE MARTINI

SISTEMA DE TIMOSHENKO COM HISTÓRIA E LEI DE CATTANEO/FOURIER: EXISTÊNCIA, UNICIDADE E COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE SOLUÇÃO

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Michele de Oliveira Alves

Coorientador: Prof. Dr. Marcio A. Jorge da Silva

Londrina
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração
Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Martini, Guilherme de.

Sistema de Timoshenko com História e Lei de Cattaneo/Fourier : Existência, Unicidade e Comportamento Assintótico de Solução / Guilherme de Martini. - Londrina, 2019.
164 f.

Orientador: Michele de Oliveira Alves.
Coorientador: Marcio Antonio Jorge da Silva.
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, , 2019.
Inclui bibliografia.

1. Sistema de Timoshenko - Tese. 2. Lei de Cattaneo e Fourier - Tese. 3. Semigrupos de Operadores Lineares - Tese. 4. Comportamento Assintótico - Tese. I. de Oliveira Alves, Michele. II. Antonio Jorge da Silva, Marcio. III. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. . IV. Título.

GUILHERME DE MARTINI

SISTEMA DE TIMOSHENKO COM HISTÓRIA E LEI DE CATTANEO/FOURIER: EXISTÊNCIA, UNICIDADE E COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE SOLUÇÃO

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Prof[a]. Dr[a]. Michele de Oliveira Alves
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino
Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. José Henrique Rodrigues
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 18 de fevereiro de 2019.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por permitir a realização deste trabalho, por ter me dado força para superar os momentos difíceis e por todas as oportunidades concedidas.

À toda minha família, em especial, aos meus pais Vera e Moacir, e ao meu irmão Murilo, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

À minha orientadora Michele, pela paciência, prestatividade e todos ensinamentos a mim dedicados.

Ao meu coorientador Marcio, por todas as ideias e grandiosas contribuições.

À minha namorada Tayssa, pela paciência e companheirismo.

Aos amigos do PGMAC, em especial, ao Anderson, Arthur, Gabriel, Jesika, Matheus, Samuel, Sandro e Saulo, pelos momentos compartilhados e pelas enriquecedoras discussões.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte desta conquista.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

MARTINI, Guilherme De. **Sistema de Timoshenko com História e Lei de Cattaneo/Fourier:** Existência, Unicidade e Comportamento Assintótico de Solução. 2019. 164 páginas. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

RESUMO

Neste trabalho estuda-se um sistema de Timoshenko com história considerando as leis de Cattaneo e Fourier para o fluxo de calor. Mais especificamente, investiga-se questões relativas a existência, unicidade e comportamento assintótico dos problemas com história apresentados em [21]. A teoria de semigrupos de operadores lineares é utilizada para garantir a existência e unicidade de solução. Em ambos os casos, uma condição necessária e suficiente para a estabilidade exponencial do semigrupo é apresentada. Quando tal condição falha, taxas ótimas de decaimento polinomial são exibidas.

Palavras-chave: Sistema de Timoshenko. Lei de Cattaneo. Lei de Fourier. Semigrupos de Operadores Lineares. Comportamento Assintótico.

MARTINI, Guilherme De. **Tymoshenko System with History and Cattaneo/Fourier Law:** Existence, Uniqueness and Asymptotic Behavior of Solution. 2019. 164 pages. Master thesis (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – State University of Londrina, Londrina, 2019.

ABSTRACT

In this work we study a Timoshenko system with history considering the laws of Cattaneo and Fourier for the heat flow. More specifically, we investigate questions regarding the existence, uniqueness and asymptotic behavior of the problems with history presented in [21]. The theory of semigroups of linear operators is used to guarantee the existence and uniqueness of solution. In both cases, a necessary and sufficient condition for the exponential stability of the semigroup is presented. When this condition fails, optimal polynomial decay rates are displayed.

Keywords: Timoshenko System. Cattaneo's Law. Fourier's Law. Semigroups of Linear Operators. Asymptotic Behavior.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{K}$	corpo dos números reais ($\mathbb{R}$) ou dos números complexos ($\mathbb{C}$)
$\mathbb{R}^+$	conjunto dos números reais não negativos, $[0,\infty)$
$\mathbb{R}^+_*$	conjunto dos números reais positivos, $(0,\infty)$
I	intervalo da reta (a,b)
$\lvert I\rvert$	medida do intervalo I
∂I	fronteira do intervalo I, isto é, $\{a,b\}$
$\overline{X}$	fecho do conjunto X
1_K	função característica do conjunto K
$X \hookrightarrow Y$	X imerso continuamente em Y
X^2	produto cartesiano $X \times X$
$(0,\infty)^2$	produto cartesiano $(0,\infty)\times(0,\infty)$
$X \cong Y$	X e Y são isomorfos
$\mathrm{Nuc}(A)$	núcleo do operador A
$\mathrm{Im}(A)$	imagem do operador A
$D(A)$	domínio do operador A
$\varrho(A)$	conjunto resolvente do operador A
i	unidade imaginária
$\mathrm{Re}\, z$	parte real do número complexo z
$\mathrm{supp}(f)$	suporte da função f
$\mathcal{L}(X,Y)$	espaço das transformações lineares e limitadas de X em Y
$\mathcal{L}(X)$	espaço dos operadores lineares e limitados de X em X
X'	espaço dual topológico de X
$H^{-1}(I)$	espaço dual topológico de $H^1_0(I)$, isto é, $[H^1_0(I)]'$
$C(I)$	espaço das funções contínuas em I
$C^k(I)$	espaço das funções k vezes diferenciáveis com derivadas contínuas em I
$C^\infty(I)$	espaço das funções infinitamente diferenciáveis em I
$C_0(I)$	espaço das funções contínuas em I com suporte compacto em I
$C^k_0(I)$	espaço das funções de $C^k(I)$ com suporte compacto
$C^\infty_0(I)$	espaço das funções de $C^\infty(I)$ com suporte compacto
$L^p(I)$	espaço $L^p(I)$ usual
$L^2_*(I)$	espaço das funções de $L^2(I)$ com média nula
$W^{m,p}(I)$	espaço de Sobolev usual
$H^m(I)$	espaço $W^{m,p}(I)$ com $p=2$
$H^1_*(I)$	espaço das funções de $H^1(I)$ com média nula
$L^p_g\big(\mathbb{R}^+,X\big)$	espaço com peso g

$\|\cdot\|_{D(A)}$	norma do gráfico em $D(A) \subset X$
$\|\cdot\|_{L^p}$	norma usual do espaço $L^p(I)$
$\|\cdot\|_{L^\infty}$	norma usual do espaço $L^\infty(I)$
$\|\cdot\|_{H_0^1}$	norma em $H_0^1(I)$ dada por $\|u\|_{H_0^1} = \|u'\|_{L^2}$
$\|\cdot\|_{H_*^1}$	norma em $H_*^1(I)$ dada por $\|u\|_{H_*^1} = \|u'\|_{L^2}$
$\|\cdot\|_{L_g^p(X)}$	norma usual em $L_g^p\big(\mathbb{R}^+, X\big)$

1 INTRODUÇÃO

O sistema de Timoshenko, assim chamado em referência ao engenheiro ucraniano Sthephen Prokofievich Timoshenko, é um sistema de equações diferenciais parciais que descreve o comportamento de uma viga considerando seu ângulo de rotação e deslocamento transversal. Nos últimos anos muitos pesquisadores tem estudado este tipo de problema, analisando questões relacionadas a existência e unicidade de solução. Investigar como a solução se comporta com o passar do tempo também é um tema que despertou o interesse de diversos pesquisadores. Uma ferramenta que se destaca nesse tipo de abordagem é a teoria de semigrupos de operadores lineares.

Nesse contexto, em 2005 Raposo et al. (veja [16]) foram os primeiros a estudar o comportamento da solução de sistemas do tipo Timoshenko utilizando a teoria de semigrupos de operadores lineares. Mais precisamente, os autores mostraram que o sistema isotérmico (isto é, que despreza a variação de temperatura) dado por

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x - \psi)_x + \varphi_t &= 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x - \psi) + \psi_t &= 0, \end{aligned}$$

com condições de fronteira de Dirichlet, é exponencialmente estável utilizando argumentos de contradição.

No que se trata de sistemas de Timoshenko com história, um dos trabalhos pioneiros foi apresentado no ano de 2008 por Rivera & Sare em [17]. Nesta ocasião, os autores provaram que o semigrupo associado a versão autônoma do sistema viscoelástico

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x &= 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\psi_{xx}(t-s)\,ds + k(\varphi_x + \psi) &= 0, \end{aligned}$$

é exponencialmente estável se, e somente se, a igualdade de velocidade de propagação de ondas for satisfeita, isto é, é válida a seguinte relação

$$\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}. \tag{1.1}$$

Quando (1.1) não é satisfeita, Rivera & Sare mostraram que a energia do sistema decai pelo menos na mesma taxa que $1/t$, ou equivalentemente, a norma da solução decai com taxa $1/\sqrt{t}$.

Sistemas de Timoshenko que levam em consideração leis térmicas vem sendo objeto de estudo de muitos pesquisadores nos últimos anos. Em [19], por exemplo, Rivera & Racke provam que (1.1) é uma condição necessária e suficiente para que o funcional de energia associado ao sistema de Timoshenko com Lei de Fourier seja exponencialmente estável. Ainda neste trabalho, os autores apresentam resultados sobre o comportamento da solução considerando um problema não-linear.

Embora o sistema de Timoshenko com Lei de Fourier tenha rendido, em geral, soluções cujo a energia decai exponencialmente quando a igualdade de velocidade de propagação de ondas é satisfeita, ao considerar a Lei de Cattaneo para o fluxo de calor essa propriedade é perdida. Por exemplo, em 2009 Sare & Racke ([21]) provaram que o sistema de Timoshenko com Lei de Cattaneo

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x &= 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x &= 0, \\ \rho_3\theta_t + q_x + \delta\psi_{xt} &= 0, \\ \tau q_t + \beta q + \theta_x &= 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

não é exponencialmente estável mesmo que (1.1) seja satisfeita. Diante deste impasse, no ano de 2012, Santos et al. (em [20]) definiram um novo número de estabilidade, a saber

$$\chi_0 = \left(\tau - \frac{\rho_1}{\rho_3 k}\right)\left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{k}\right) - \frac{\tau\rho_1\delta^2}{\rho_3 k}.$$

Nessa circunstância, os autores provaram que o semigrupo associado ao sistema (1.2) com condições de fronteira do tipo Dirichlet-Neumann é exponencial se, e somente se, $\chi_0 = 0$. Além disso, mostraram que se $\chi_0 \neq 0$ então, o semigrupo decai com taxa $1/\sqrt{t}$, não podendo ser melhorada.

Uma situação parecida ocorre ao considerar leis térmicas no sistemas de Timoshenko com história. Em [21], Sare & Racke provaram que ao considerar a Lei de Fourier, o sistema de Timoshenko com história é exponencialmente estável se, e somente se, a igualdade de velocidade de propagação de ondas é satisfeita, isto é, a relação (1.1). Nessa circunstância, nenhum resultado de decaimento polinomial foi apresentado. Por outro lado, um estudo recente dirigido por Yong Ma em [12], mostra que se igualdade (1.1) não é válida, então existem constantes $C_m > 0$ que independem do dado inicial $U_0 \in D(A^m)$, tais que

$$\|U(t)\| \leq C_m \left(\frac{\ln(t)}{t}\right)^{\frac{m}{4}} \ln(t)\|U_0\|_{D(A^m)}, \quad t > 0, \quad m = 1, 2, \dots,$$

onde A é um operador linear não limitado oriundo do problema de Cauchy abstrato equivalente. Neste trabalho, o autor considera condições de fronteira do tipo Dirichlet para as funções ψ e θ, e do tipo Neumann para φ.

Em relação ao sistema com história e Lei Térmica de Cattaneo, Sare & Racke (em [21]) mostraram que o semigrupo associado ao problema não é exponencialmente estável mesmo que (1.1) seja satisfeita. Nesta ocasião, condições de fronteira do tipo Dirichlet foram consideradas para as funções ψ e q, e do tipo Neumann para φ e θ.

Recentemente (2014), Fatori et al. (veja [7]) utilizaram a condição $\chi_0 = 0$

introduzida em [20] para caracterizar o decaimento exponencial do sistema termoviscoelástico

$$
\begin{aligned}
\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x &= 0, \\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\psi_{xx}(t-s)\,ds + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x &= 0, \\
\rho_3\theta_t + q_x + \delta\psi_{xt} &= 0, \\
\tau q_t + \beta q + \theta_x &= 0,
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

com condições de fronteira mistas, a dizer, do tipo Dirichlet para φ e θ, e do tipo Neumann para ψ e q (note que estas condições não são as mesmas das abordadas em [21]). Os autores provaram que se $\chi_0 \neq 0$, então o semigrupo associado a versão autônoma de (1.3) decai polinomialmente com taxa ótima $1/\sqrt{t}$.

No presente trabalho será apresentado um estudo detalhado dos resultados relativos aos sistemas de Timoshenko com história e leis térmicas apresentados em [21]. Posteriormente, serão exibidas adaptações das ideias apresentadas em [7] que permitem caracterizar o comportamento assintótico do sistema de Timoshenko com história e Lei de Cattaneo. Sobre a função g, a abordagem utilizada neste trabalho permitiu assumir hipóteses mais fracas do que as encontradas nas referências mencionadas. Adicionalmente, um resultado de decaimento polinomial para o sistema de Timoshenko com história e Lei de Fourier será exposto, assim como a otimalidade da taxa apresentada.

O trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2 resultados necessários para o desenvolvimento do trabalho serão enunciados. O Capítulo 3 traz uma breve dedução dos problemas a serem estudados. No Capítulo 4 inicia-se o estudo do sistema de Timoshenko com história e Lei de Fourier. Já no Capítulo 5 o sistema de Timoshenko com história e Lei de Cattaneo torna-se objeto de estudo. Os capítulos 4 e 5 são divididos em três seções: a primeira é destinada a resultados de existência e unicidade de solução; na segunda é exibida uma condição necessária e suficiente para que a solução dos respectivos problemas decaiam exponencialmente; resultados de decaimento polinomial e otimalidade são apresentados na terceira seção.

2 PRELIMINARES

O presente capítulo tem como objetivo apresentar os principais resultados que serão utilizados no decorrer do trabalho, mais especificamente, serão exibidos resultados de Análise Funcional, espaços L^p e de Sobolev, assim como importantes teoremas da teoria de Semigrupo de Operadores Lineares. Boa parte dos resultados serão exibidos sem uma prova formal, mas as mesmas poderão ser facilmente encontradas nas referências oferecidas.

2.1 ANÁLISE FUNCIONAL

Definição 2.1. *Uma norma em um espaço vetorial (real ou complexo) X é uma função a valores reais, cujo valor em um vetor $x \in X$ é denotado por $\|x\|_X$ e que satisfaz as propriedades:*

(N1) $\|x\|_X \geq 0$,

(N2) $\|x\|_X = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$,

(N3) $\|\alpha x\|_X = |\alpha| \|x\|_X$,

(N4) $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$,

onde x e y são vetores arbitrários em X e α qualquer escalar no corpo.

Definição 2.2. *(Normas Equivalentes) Uma norma $\| \cdot \|_1$ em um espaço vetorial X é dita equivalente a norma $\| \cdot \|_2$ em X se existirem números reais positivos a e b tal que para todo $x \in X$*

$$\|x\|_1 \leq a\|x\|_2 \quad e \quad \|x\|_2 \leq b\|x\|_1.$$

Definição 2.3. *Um espaço de Banach é um espaço vetorial normado completo, isto é, um espaço vetorial normado onde toda sequência de Cauchy é convergente.*

Teorema 2.4. *Um subespaço Y de um espaço de Banach X é completo se, e somente se, Y é fechado em X.*

Demonstração. Ver [10], página 67, Teorema 2.3-1. ∎

Definição 2.5. *Sejam X e Y espaços normados sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : D(T) \longrightarrow Y$ um operador, onde $D(T) \subset X$. Diz-se que T é um operador linear se para quaisquer $x, y \in D(T)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$,*

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \quad e \quad T(\alpha x) = \alpha T(x).$$

Denota-se por: $D(T)$ o domínio de T; $\mathrm{Im}(T)$ a imagem de T; e $\mathrm{Nuc}(T)$ o núcleo de T.
No caso em que $Y = \mathbb{K}$, T é dito um funcional linear.

Definição 2.6. *Sejam X e Y espaços normados sobre $\mathbb{C}$ e $T : D(T) \longrightarrow Y$ um operador, onde $D(T) \subset X$. T é dito ser um operador antilinear se para quaisquer $x, y \in D(T)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$,*

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \quad e \quad T(\alpha x) = \overline{\alpha}\, T(x).$$

Definição 2.7. *Sejam X e Y espaços normados e $T : D(T) \longrightarrow Y$ um operador linear, onde $D(T) \subset X$. O operador T é dito ser limitado se existir um número real positivo c tal que para todo $x \in D(A)$,*

$$\|T(x)\|_Y \leq c\|x\|_X.$$

Nestas condições, a norma do operador T será dada por

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \,\in\, D(T) \\ x \,\neq\, 0}} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}$$

Observação. Denota-se por $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço vetorial dos operadores lineares e limitados $T : X \longrightarrow Y$. Quando $Y = \mathbb{K}$, representa-se $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ por X' e diz-se que X' é o espaço dual topológico de X. Além disto, escreve-se apenas $\mathcal{L}(X)$ para o caso $\mathcal{L}(X, X)$.

Teorema 2.8. *Sejam X e Y espaços normados e $T : D(T) \subset X \longrightarrow Y$ um operador linear. Então:*

(a) *T é contínuo se e somente se T é limitado.*

(b) *Se T é contínuo em um único ponto, então T é contínuo.*

Demonstração. Ver [10], página 97, Teorema 2.7-9. ■

Definição 2.9. *Seja X um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um produto interno em X é uma função*

$$\big(\cdot\,,\,\cdot\big)_X : X \times X \quad \longrightarrow \quad \mathbb{K}$$

tal que para quaisquer $x, y, z \in X$ e todo escalar $\alpha \in \mathbb{K}$,

(P1) $\big(x+y, z\big)_X = \big(x, z\big)_X + \big(y, z\big)_X$,

(P2) $\big(\alpha x, y\big)_X = \alpha\big(x, y\big)_X$,

(P3) $\big(x, y\big)_X = \overline{\big(y, x\big)_X}$,

(P4) $\big(x, x\big)_X \geq 0$ *e* $\big(x, x\big)_X = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$.

Observação. Produtos cartesianos de conjuntos da forma $X \times X$ serão usualmente denotados por X^2.

Observação. A partir do produto interno, pode-se definir uma norma em X, como sendo

$$\|x\|_X = \sqrt{\big(x, x\big)_X}.$$

Assim, diz-se que $\|\cdot\|_X$ é uma norma induzida pelo produto interno $\big(\cdot\,,\,\cdot\big)_X$.

Definição 2.10. *Um isomorfismo de um espaço vetorial normado X em um espaço normado $\tilde{X}$ é um operador linear bijetivo $T : X \longrightarrow \tilde{X}$ que preserva a norma, isto é, para todo $x \in X$,*

$$\|T(x)\|_{\tilde{X}} = \|x\|_X.$$

Assim, X e $\tilde{X}$ são ditos espaços normados isomorfos e de um ponto de vista abstrato, X e $\tilde{X}$ são idênticos. Neste caso, usa-se a notação $X \cong \tilde{X}$.

Definição 2.11. *Um espaço vetorial com produto interno é dito um espaço de Hilbert se for completo em relação à norma induzida pelo produto interno.*

Lema 2.12. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço com produto interno. Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências em $\mathcal{H}$ tais que*

$$x_n \longrightarrow 0 \quad \textit{em} \;\; \mathcal{H} \quad \textit{e} \quad \|y_n\|_{\mathcal{H}} \leq c, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

para algum $c > 0$, então

$$\big(x_n, y_n\big)_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0 \quad \textit{em} \;\; \mathbb{C}.$$

Demonstração. Por hipótese, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$ então

$$\|x_n\|_{\mathcal{H}} < \frac{\epsilon}{c}.$$

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz segue que

$$\big|\big(x_n, y_n\big)_{\mathcal{H}}\big| \leq \|x_n\|_{\mathcal{H}} \|y_n\|_{\mathcal{H}} < \epsilon,$$

desde que $n > n_0$. ■

Teorema 2.13. *(Representação de Riesz) Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$. Então, cada funcional linear limitado f definido em $\mathcal{H}$ pode ser representado em termos de produto interno, ou seja,*

$$f(x) = \big(x, z\big)_{\mathcal{H}}, \quad \forall\, x \in \mathcal{H},$$

onde z é unicamente determinado por f e ainda

$$\|f\|_{\mathcal{H}'} = \|z\|_{\mathcal{H}}.$$

Demonstração. Ver [10], página 188, Teorema 3.8-1. ■

Teorema 2.14. *Sejam X um espaço vetorial normado sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $x \in X$ um vetor fixo. Então,*

$$\begin{aligned} \phi_x : X' &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto \langle \phi_x, f \rangle = f(x) \end{aligned}$$

é um funcional linear limitado em X', isto é, $\phi_x \in (X')' = X''$. Além disto, $\|\phi_x\|_{X''} = \|x\|_X$.

Demonstração. Ver [10], página 240, Lema 4.6-1. ∎

Observação. No Teorema 2.14 emprega-se a notação $\langle \phi_x, f \rangle$ ao invés de $\phi_x(f)$. Isso ocorrerá sempre que o objeto de estudo for um funcional linear (ou antilinear).

Observação. O espaço vetorial X'' é comumente chamado de bidual de X.

Definição 2.15. *Um espaço normado X é dito reflexivo se a aplicação*

$$\begin{aligned} C : X &\longrightarrow X'' \\ x &\longmapsto \phi_x \end{aligned}$$

for sobrejetiva, isto é, $\operatorname{Im}(C) = X''$. A aplicação C é denominada aplicação canônica de X em X''.

Teorema 2.16. *Todo espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é reflexivo.*

Demonstração. Ver [10], página 242, Teorema 4.4-6. ∎

Definição 2.17. *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$. Uma forma sesquilinear em $X \times Y$ é uma aplicação*

$$h : X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}$$

tal que para quaisquer x_1, $x_2 \in X$ e y_1, $y_1 \in Y$ e todo escalar α, $\beta \in \mathbb{K}$, tem-se

(S1) $h\big(x_1 + x_2, y_1\big) = h\big(x_1, y_1\big) + h\big(x_2, y_1\big)$,

(S2) $h\big(x_1, y_1 + y_2\big) = h\big(x_1, y_1\big) + h\big(x_1, y_2\big)$,

(S3) $h\big(\alpha x_1, y_1\big) = \alpha h\big(x_1, y_1\big)$,

(S4) $h\big(x_1, \beta y_1\big) = \overline{\beta} h\big(x_1, y_1\big)$.

No caso em que X e Y são vetoriais reais, isto é, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, diz-se que h é uma forma bilinear.

Definição 2.18. *Sejam X e Y espaços normados e h uma forma sesquilinear em $X \times Y$. Se existir um número real c tal que*

$$\big|h\big(x,y\big)\big| \leq c\|x\|_X\|y\|_Y,$$

para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$, então h é dita uma forma sesquilinear contínua (ou limitada) e o número

$$\|h\| = \sup_{\substack{x \,\in\, X,\, x \neq 0 \\ y \,\in\, Y,\, y \neq 0}} \frac{\big|h\big(x,y\big)\big|}{\|x\|_X\|y\|_Y}$$

é denominado a norma de h.

Definição 2.19. *Uma forma sesquilinear $h : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ é dita coerciva se existir uma constante positiva c, tal que*

$$\operatorname{Re}\big[h\big(x,x\big)\big] \geq c\|x\|_X^2, \quad \forall\, x \in X.$$

Teorema 2.20. *(Lax-Milgram) Sejam X um espaço de Hilbert e $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear contínua e coerciva. Então, para cada funcional antilinear contínuo $\zeta : X \longrightarrow \mathbb{C}$ existe um único elemento $u \in X$ tal que*

$$a(u,v) = \zeta(v), \quad \forall\, v \in X.$$

Demonstração. Ver [13], página 529, Corolário 6.6.2. ∎

Teorema 2.21. *Sejam X um espaço de Banach e $S \in \mathcal{L}(X)$ um operador invertível tal que $S^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Se $B \in \mathcal{L}(X)$ é um operador tal que*

$$\|B\|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{1}{\|S^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}},$$

então $S + B$ é um operador linear, limitado e invertível.

Demonstração. Ver [18], página 90, Lema 2.12.1. ∎

Definição 2.22. *Sejam X e Y espaços normados e $T : D(T) \longrightarrow Y$ um operador linear com domínio $D(T) \subset X$. Diz-se que T é um operador linear fechado se o gráfico*

$$G(T) = \{(x,y) \mid x \in D(T),\, y = T(x)\}$$

for um subconjunto fechado de $X \times Y$.

Teorema 2.23. *(Gráfico Fechado) Sejam X e Y espaços de Banach e $T : D(T) \longrightarrow Y$ um operador linear fechado, onde $D(T) \subset X$. Se $D(T)$ é fechado em X, então o operador T é limitado.*

Demonstração. Ver [10], página 292, Teorema 4.13-2. ∎

Teorema 2.24. *(Operador Linear Fechado) Sejam X e Y espaços normados e $T : D(T) \longrightarrow Y$ um operador linear com domínio $D(T) \subset X$. Então T é um operador linear fechado se, e somente se possuir a seguinte propriedade: se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ é tal que $x_n \longrightarrow x$ e $T(x_n) \longrightarrow y$, então $x \in D(T)$ e $y = T(x)$.*

Demonstração. Ver [10], página 293, Teorema 4.13-3. ∎

Teorema 2.25. *Se o inverso T^{-1} de um operador linear fechado existe, então T^{-1} é fechado.*

Demonstração. Sejam X e Y espaços normados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador fechado invertível, isto é, bijetivo. Considere $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ uma sequência tal que

$$y_n \longrightarrow y \qquad \text{e} \qquad T^{-1}(y_n) \longrightarrow x. \tag{2.1}$$

Afirma-se que $T^{-1}(y) = x$. De fato, usando a bijetividade de T, tem-se que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe único $x_n \in X$ tal que

$$T(x_n) = y_n \Longleftrightarrow x_n = T^{-1}(y_n),$$

consequentemente, de (2.1) vem que

$$x_n \longrightarrow x \qquad \text{e} \qquad T(x_n) \longrightarrow y.$$

Ora, T é um operador fechado, e portanto, $T(x) = y$. Por conseguinte, segue que $T^{-1}(y) = x$ e de acordo com o Teorema do Operador Linear Fechado (veja 2.24) tem-se que T^{-1} é fechado. ∎

Teorema 2.26. *Sejam X e Y espaços normados. Se $T_1 : X \longrightarrow Y$ é um operador linear fechado e $T_2 : X \longrightarrow Y$ é um operador linear limitado, isto é, $T_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$, então $T_1 + T_2$ é um operador fechado.*

Demonstração. Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X tal que

$$x_n \longrightarrow x \qquad \text{e} \qquad (T_1 + T_2)(x_n) \longrightarrow y.$$

Note inicialmente que como $T_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$ vem que $T_2(x_n) \longrightarrow T_2(x)$. Nestas condições, afirma-se que $T_1(x_n) \longrightarrow y - T_2(x)$. Com efeito, da Desigualdade Triangular pode-se obter

$$\|T_1(x_n) - y + T_2(x)\|_Y \leq \|(T_1 + T_2)(x_n) - y\|_Y + \|T_2(x_n - x)\|_Y \longrightarrow 0.$$

Desta forma, como T_1 é fechado, segue do Teorema do Operador Linear Fechado (veja 2.24) que

$$T_1(x) = y - T_2(x) \Longrightarrow (T_1 + T_2)(x) = y,$$

como desejado. ■

2.2 ESPAÇOS L^p

Nas discussões abordadas nas próximas seções, considere I como sendo um intervalo (a, b) não necessariamente limitado.

Definição 2.27. *Sejam $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$. Define-se o espaço $L^p(I)$ como*

$$L^p(I) = \left\{ f : I \longrightarrow \mathbb{K} \quad | \quad f \text{ é Lebesgue mensurável e } \int_I |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

Este espaço é munido com a norma

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_I |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.2}$$

Quando $p = 2$, tem-se que $L^2(I)$ é equipado com o produto interno

$$\big(f, g\big)_{L^2} = \int_I f(x)\overline{g(x)} \, dx.$$

Definição 2.28. *Define-se $L^\infty(I)$ como o espaço das funções Lebesgue mensuráveis que são limitadas quase sempre por uma constante, isto é,*

$$L^\infty(I) = \left\{ f : I \longrightarrow \mathbb{K} \quad \middle| \quad \begin{array}{l} f \text{ é Lebesgue mensurável e existe uma constante} \\ C \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ quase sempre em } I \end{array} \right\}.$$

Este espaço é munido da norma

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \big\{ C \geq 0 \quad | \quad |f(x)| \leq C \text{ quase sempre em } I \big\}. \tag{2.3}$$

Lema 2.29. *Se $1 \leq p < \infty$ e $a, b \geq 0$, então*

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Demonstração. Ver [1], página 23, Lema 2.2. ■

Lema 2.30. *(Desigualdade de Young) Sejam $1 < p < \infty$ e q tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Se A e B são números reais não-negativos, então*

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}.$$

Demonstração. Ver [4], página 120, Observação 4.51. ■

Lema 2.31. *(Desigualdade de Young com ε) Sejam A e B são números reais não-negativos e ε positivo, então*

$$AB \leq \varepsilon A^2 + \frac{B^2}{4\varepsilon}.$$

Demonstração. Sejam $a,\, b \geq 0$. Segue de $(a-b)^2 \geq 0$ que

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, considerando

$$a = A\sqrt{2\varepsilon} \quad \text{e} \quad b = \frac{B}{\sqrt{2\varepsilon}}$$

o resultado segue. ■

Teorema 2.32. *(Desigualdade de Hölder) Sejam $f \in L^p(I)$ e $g \in L^q(I)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então, o produto $fg \in L^1(I)$ e*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Demonstração. Ver [3], página 92, Teorema 4.6. ■

Observação. Nas notações do Teorema 2.32, quando $p = q = 2$ pode-se obter a conhecida Desigualdade de Cauchy-Schwarz, ou melhor dizendo

$$\left|\big(f, g\big)_{L^2}\right| \leq \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}.$$

Teorema 2.33. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Então $L^p(I)$ é um espaço de Banach com as normas $\|\cdot\|_{L^p}$ e $\|\cdot\|_{L^\infty}$ definidas em* (2.2) *e* (2.3)*. Consequentemente, $L^2(I)$ é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Ver [9], página 240, Teorema 13.14. ■

Teorema 2.34. *(Representação de Riesz para L^p) Sejam $1 < p < \infty$ e $\phi \in \big[L^p(I)\big]'$. Então, existe uma única função $u \in L^q(I)$ tal que*

$$\langle \phi, f \rangle = \int_I u(x) f(x)\, dx, \quad \forall\, f \in L^p(I).$$

Mais ainda,

$$\|u\|_{L^q} = \|\phi\|_{[L^p]'}.$$

Demonstração. Ver [3], página 97, Teorema 4.11. ■

Observação. O Teorema 2.34 permite dizer que $L^2(I)$ é isomorfo ao seu espaço dual topológico $\big[L^2(I)\big]'$, isto é, $L^2(I) \cong \big[L^2(I)\big]'$.

Teorema 2.35. *Suponha que $|I| < \infty$ e $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Se $u \in L^q(I)$, então $u \in L^p(I)$ e*

$$\|u\|_{L^p} \leq |I|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|u\|_{L^q}.$$

Consequentemente,

$$L^q(I) \hookrightarrow L^p(I).$$

Se $u \in L^\infty(I)$, então

$$\lim_{p\to\infty} \|u\|_{L^p} = \|u\|_{L^\infty}.$$

Finalmente, se $u \in L^p(I)$ para $1 \leq p < \infty$ e se existe uma constante K tal que para todo p

$$\|u\|_{L^p} \leq K,$$

então $u \in L^\infty(I)$ e

$$\|u\|_{L^\infty} \leq K.$$

Demonstração. Ver [1], página 28, Teorema 2.14. ■

Definição 2.36. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Denota-se por $L^2_*(I)$ o espaço das funções de média nula dado por*

$$L^2_*(I) = \left\{ u \in L^2(I) \quad \middle| \quad \frac{1}{|I|}\int_I u(x)\,dx = 0 \right\}.$$

Proposição 2.37. *Se I for um intervalo limitado, então o espaço $L^2_*(I)$ é Banach. Consequentemente, $L^2_*(I)$ é um espaço de Hilbert com o produto de $L^2(I)$.*

Demonstração. Seja $u \in \overline{L^2_*(I)}$, assim existe uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2_*(I)$, tal que

$$u_n \longrightarrow u, \quad \text{em } L^2(I). \tag{2.4}$$

Consequentemente, note que

$$\int_I u(x)\,dx = \int_I u(x)\,dx - \int_I u_n(x)\,dx = \int_I u(x) - u_n(x)\,dx,$$

e portanto, usando propriedades para integrais, vem que

$$\left|\int_I u(x)\,dx\right| = \left|\int_I u(x) - u_n(x)\,dx\right| \leq \int_I |u(x) - u_n(x)|\,dx. \tag{2.5}$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder, tem-se que

$$\int_I |u(x) - u_n(x)|\,dx \leq \left(\int_I |u(x) - u_n(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I dx\right)^{\frac{1}{2}} = |I|^{\frac{1}{2}}\|u - u_n\|_{L^2}. \tag{2.6}$$

Substituindo (2.6) em (2.5) e usando (2.4), seque que

$$\left|\int_I u(x)\,dx\right| \leq |I|^{\frac{1}{2}}\|u-u_n\|_{L^2} \longrightarrow 0,$$

logo

$$\int_I u(x)\,dx = 0.$$

Deste modo, fica provado que $L^2_*(I)$ é um subespaço fechado de $L^2(I)$, consequentemente, pelo Teorema 2.4 tem-se que $L^2_*(I)$ é Banach. ■

Definição 2.38. *Diz-se que uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ pertence ao espaço $L^1_{loc}(I)$ se a função $1_K f$ pertence a $L^1(I)$ para todo subconjunto compacto K de I, isto é,*

$$\int_I |1_K(x)\,f(x)|dx = \int_K |f(x)|\,dx < \infty,$$

para qualquer compacto $K \subset I$.

Observação. Na definição anterior, 1_K denota a função característica (ou indicadora) do conjunto K, ou seja, $1_K : I \longrightarrow \mathbb{R}$ onde

$$x \longmapsto 1_K(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in K, \\ 0, & \text{se } x \notin K. \end{cases}$$

Definição 2.39. *O suporte de uma função contínua $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ é o conjunto*

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in I \mid f(x) \neq 0\}}^I.$$

Denota-se por $C_0(I)$ o espaço das funções contínuas com suporte compacto. Por sua vez, $C^1_0(I)$ é espaço das funções com suporte compacto, diferenciáveis e com derivada contínua em I.

2.3 Espaços de Sobolev Unidimensionais

Definição 2.40. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. O espaço de Sobolev $W^{1,p}(I)$ é definido por*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I) \;\middle|\; \exists\, g \in L^p(I);\ \int_I u(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_I g(x)\varphi(x)\,dx,\ \forall\, \varphi \in C^1_0(I) \right\}.$$

Quando existir, a função g mencionada é denominada derivada fraca de u e será denotada por $g = u'$. Além disso, no caso em que $p = 2$ escreve-se

$$H^1(I) = W^{1,p}(I).$$

O espaço $W^{1,p}(I)$ *é munido da norma*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}, \tag{2.7}$$

ou ainda,

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left(\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.8}$$

As normas definidas em (2.7) *e* (2.8) *são equivalentes.*

Teorema 2.41. *Se* $1 \leq p \leq \infty$*, então* $W^{1,p}(I)$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Ver [3], página 203, Proposição 8.1. ■

Teorema 2.42. *O espaço* $H^1(I)$ *é um espaço de Hilbert munido do produto interno*

$$\big(u, v\big)_{H^1} = \big(u, v\big)_{L^2} + \big(u', v'\big)_{L^2}.$$

Demonstração. Ver [3], página 203, Proposição 8.1. ■

Teorema 2.43. *Seja* $u \in W^{1,p}(I)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$*. Então, existe uma função* $\tilde{u} \in C(\overline{I})$ *tal que* $u = \tilde{u}$ *quase sempre em* I *e*

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)\, dt, \quad \forall\, x,\, y \in \overline{I}.$$

Demonstração. Ver [3], página 204, Teorema 8.2. ■

Observação. A função $\tilde{u}$ mencionada no Teorema 2.43 é dita representante contínua da função u em $\overline{I}$ e, no decorrer do trabalho, também será denotada por u

Teorema 2.44. *Seja* $g \in L^1_{loc}(I)$*. Para* y_0 *fixo em* I *a função*

$$v(x) = \int_{y_0}^x g(t)\, dt, \quad x \in I, \tag{2.9}$$

é contínua e

$$\int_I v(x)\varphi'(x)\, dx = -\int_I g(x)\varphi(x)\, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^1(I).$$

Demonstração. Ver [3], página 205, Lema 8.2. ■

Corolário 2.45. *Sejam* $g \in L^p(I)$ *e* $y_0 \in I$*. Então, a função* $v : I \longrightarrow \mathbb{K}$ *definida em* (2.9) *pertence ao espaço* $W^{1,p}(I)$*.*

Demonstração. Basta lembrar que devido ao Teorema 2.35 tem-se que

$$L^p(I) \hookrightarrow L^1(I) \subset L^1_{loc}(I)$$

e aplicar o Teorema 2.44. ■

Definição 2.46. *Dado $1 \leq p < \infty$, denota-se por $W_0^{1,p}(I)$ o fecho de $C_0^1(I)$ em $W^{1,p}(I)$, isto é,*

$$W_0^{1,p}(I) = \overline{C_0^1(I)}^{W^{1,p}(I)}.$$

Quando $p = 2$, então

$$H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I).$$

Considera-se $W_0^{1,p}(I)$ equipado com a norma de $W^{1,p}(I)$, assim como $H_0^1(I)$ munido com o produto interno de $H^1(I)$.

Teorema 2.47. *Seja $u \in W^{1,p}(I)$. Então, $u \in W_0^{1,p}(I)$ se e somente se $\tilde{u} = 0$ em ∂I.*

Demonstração. Ver [3], página 217, Teorema 8.12. ■

Teorema 2.48. *O espaço $W_0^{1,p}(I)$ é espaço de Banach para $1 \leq p < \infty$. Em particular, $H_0^1(I)$ é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Basta notar que, por definição, $W_0^{1,p}(I)$ é um subespaço fechado de $W^{1,p}(I)$, portanto, pelo Teorema 2.4 é Banach. ■

Teorema 2.49. *(Desigualdade de Poincaré) Suponha que I seja um intervalo limitado. Então,*

$$\|u\|_{L^p} \leq |I| \|u'\|_{L^p}, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(I). \tag{2.10}$$

Em outras palavras, a função $u \longmapsto \|u'\|_{L^p}$ define uma norma em $W_0^{1,p}(I)$ que é equivalente a norma de $W^{1,p}(I)$.

Demonstração. Seja $u \in W_0^{1,p}(I)$ com $I = (a, b)$. Devido ao Teorema 2.47, tem-se que

$$\tilde{u}(a) = \tilde{u}(b) = 0,$$

consequentemente,

$$\tilde{u}(x) = \tilde{u}(x) - \tilde{u}(a) = \int_a^x u'(t)\, dt, \quad \forall\, x \in \overline{I}.$$

Logo, utilizando propriedades para integrais, resulta que

$$|\tilde{u}(x)| = \left| \int_a^x u'(t)\, dt \right| \leq \int_a^x |u'(t)|\, dt \leq \int_I |u'(t)|\, dt, \quad \forall\, x \in \overline{I}. \tag{2.11}$$

Visto que o Teorema 2.43 garante que $u = \tilde{u}$ quase sempre em I, a expressão (2.11) pode ser reescrita como

$$|u(x)| \leq \int_I |u'(t)|\, dt,$$

quase sempre em $\overline{I}$, ou ainda,

$$|u(x)|^p \leq \left(\int_I |u'(t)| \, dt \right)^p. \tag{2.12}$$

Seja q um número real tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, pela Desigualdade de Hölder (veja Teorema 2.32), tem-se que

$$\left(\int_I |u'(t)| \, dt \right)^p \leq \left[\left(\int_I |u'(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_I dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]^p = |I|^{\frac{p}{q}} \|u'\|_{L^p}^p, \tag{2.13}$$

isto é, usando (2.13) em (2.12),

$$|u(x)|^p \leq |I|^{\frac{p}{q}} \|u'\|_{L^p}^p,$$

quase sempre em $\overline{I}$. Finalmente, integrando em I, segue que

$$\|u\|_{L^p}^p = \int_I |u(x)|^p \, dx \leq |I|^{\frac{p}{q}} \|u'\|_{L^p}^p \int_I dx = |I|^{\frac{p}{q}+1} \|u'\|_{L^p}^p = |I|^p \|u'\|_{L^p}^p,$$

isto é,

$$\|u\|_{L^p} \leq |I| \|u'\|_{L^p}, \quad \forall \, u \in W_0^{1,p}(I),$$

como desejado. ■

Notação 2.50. *Seja $1 \leq p < \infty$. O espaço dual topológico de $W_0^{1,p}(I)$ será denotado por $W^{-1,q}(I)$, onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Além disso, o espaço dual topológico de $H_0^1(I)$ será representado por $H^{-1}(I)$.*

Definição 2.51. *Denota-se por $W_*^{1,p}(I)$ o espaço*

$$W_*^{1,p}(I) = \left\{ u \in W^{1,p}(I) \quad \middle| \quad \frac{1}{|I|} \int_I u(x) \, dx = 0 \right\}.$$

Quando $p = 2$, escreve-se

$$H_*^1(I) = W_*^{1,2}(I).$$

Proposição 2.52. *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e I um intervalo limitado. Então, $W_*^{1,p}(I)$ é um espaço de Banach. Consequentemente, $H_*^1(I)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno induzido por $H^1(I)$.*

Demonstração. Seja $u \in \overline{W_*^{1,p}(I)}$, então existe uma sequência $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset W_*^{1,p}(I)$, tal que

$$\|u_n - u\|_{W^{1,p}} = \|u_n - u\|_{L^p} + \|u_n' - u'\|_{L^p} \longrightarrow 0. \tag{2.14}$$

Usando que $u_n \in W_*^{1,p}(I)$, pode-se escrever

$$\int_I u(x)\, dx = \int_I u(x) - u_n(x)\, dx,$$

o que implica em

$$\left| \int_I u(x)\, dx \right| = \left| \int_I u(x) - u_n(x)\, dx \right| \leq \int_I |u(x) - u_n(x)|\, dx. \tag{2.15}$$

Todavia, considere q um número real tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, assim pela Desigualdade de Hölder (veja Teorema 2.32), vem que

$$\int_I |u(x) - u_n(x)|\, dx \leq \left(\int_I |u(x) - u_n(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_I dx \right)^{\frac{1}{q}} = |I|^{\frac{1}{q}} \|u - u_n\|_{L^p}. \tag{2.16}$$

Desta forma, substituindo (2.16) em (2.15) e usando (2.14), segue que

$$\left| \int_I u(x)\, dx \right| \leq |I|^{\frac{1}{q}} \|u - u_n\|_{L^p} \longrightarrow 0,$$

daí segue o resultado. ■

Teorema 2.53. *(Desigualdade de Poincaré para espaço de média nula) Suponha que I seja um intervalo limitado. Então,*

$$\|u\|_{L^p} \leq |I| \|u'\|_{L^p}, \quad \forall\, u \in W_*^{1,p}(I).$$

Em outras palavras, a função $u \longmapsto \|u'\|_{L^p}$ define uma norma em $W_*^{1,p}(I)$ que é equivalente a norma de $W^{1,p}(I)$.

Demonstração. Seja $u \in W_*^{1,p}(I)$ com $I = (a, b)$. Pelo Teorema 2.43, tem-se que existe uma função $\tilde{u} \in C(\overline{I})$ tal que $u = \tilde{u}$ quase sempre em I e

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)\, dt, \quad \forall\, x,\, y \in \overline{I}. \tag{2.17}$$

Integrando (2.17) em I com respeito a y, vem que

$$\tilde{u}(x) \int_I dy - \int_I \tilde{u}(y)\, dy = \int_I \int_y^x u'(t)\, dt\, dy,$$

todavia, como $u = \tilde{u}$ quase sempre em I e u tem média nula, segue que

$$\tilde{u}(x)|I| = \int_I \int_y^x u'(t)\, dt\, dy, \quad \forall\, x,\, y \in \overline{I}. \tag{2.18}$$

Tomando o módulo da expressão (2.18) e utilizando propriedades de integrais, resulta que

$$|\tilde{u}(x)||I| = \left|\int_I \int_y^x u'(t)\,dt\,dy\right| \leq \int_I \int_y^x |u'(t)|\,dt\,dy \leq \int_I \int_I |u'(t)|\,dt\,dy = |I| \int_I |u'(t)|\,dt,$$

ou seja,

$$|\tilde{u}(x)| \leq \int_I |u'(t)|\,dt, \quad \forall\, x \in \overline{I}. \tag{2.19}$$

Além disso, a expressão (2.19) permite escrever

$$|\tilde{u}(x)|^p \leq \left(\int_I |u'(t)|\,dt\right)^p, \quad \forall\, x \in \overline{I},$$

e ainda, ao integrar em I lembrando que $u = \tilde{u}$ quase sempre em I, segue que

$$\int_I |u(x)|^p\,dx = \int_I |\tilde{u}(x)|^p\,dx \leq \int_I dx \left(\int_I |u'(t)|\,dt\right)^p = |I| \left(\int_I |u'(t)|\,dt\right)^p. \tag{2.20}$$

Seja q um número real tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, da Desigualdade de Hölder (veja Teorema 2.32) vem que

$$\left(\int_I |u'(t)|\,dt\right)^p \leq \left[\left(\int_I |u'(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_I dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]^p = |I|^{\frac{p}{q}} \|u'\|_{L^p}^p. \tag{2.21}$$

Desta forma, substituindo (2.21) em (2.20), pode-se obter

$$\int_I |u(x)|^p\,dx \leq |I|^{\frac{p}{q}+1} \|u'\|_{L^p}^p = |I|^p \|u'\|_{L^p}^p,$$

donde segue o resultado. ∎

Proposição 2.54. *Seja I um intervalo limitado. Então, $H_*^1(I) \hookrightarrow L^2(I)$.*

Demonstração. Evidentemente tem-se que $H_*^1(I) \subset L^2(I)$. Além disto, veja que para qualquer $u \in H_*^1(I)$ a Desigualdade de Poincaré (veja Teorema 2.53) permite escrever

$$\|u\|_{L^2} \leq |I| \|u'\|_{L^2} = |I| \|u\|_{H_*^1},$$

donde segue a continuidade da aplicação inclusão. ∎

Definição 2.55. *Sejam $m \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$ e $I \subset \mathbb{R}$. Os espaços de Sobolev $W^{m,p}(I)$ são definidos por*

$$W^{m,p}(I) = \left\{u \in L^p(I) \quad \middle| \quad \exists\, u',\, u'',\, \ldots,\, u^{(m)} \in L^p(I)\right\}.$$

As funções u', u'', $\ldots$, $u^{(m)}$ mencionadas são as derivadas fracas de ordem 1, 2, $\ldots$, m da *função u. Quando $p = 2$ denota-se*

$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$

Teorema 2.56. *O espaço $W^{m,p}(I)$ é um espaço de Banach e $H^m(I)$ é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Ver [1], página 60, Teorema 3.3. ■

Definição 2.57. *Sejam X um espaço vetorial normado, $1 \leq p < \infty$ e g uma função positiva tal que $g \in C^1(\mathbb{R}^+_*) \cap L^1(\mathbb{R}^+)$. Define-se o espaço com peso g como*

$$L^p_g\big(\mathbb{R}^+, X\big) = \left\{ \eta : \mathbb{R}^+ \longrightarrow X \quad \Big| \quad \int_0^\infty g(s)\|\eta(s)\|^p_X \, ds < \infty \right\},$$

o qual é um espaço de Banach com a norma

$$\|\eta\|_{L^p_g(X)} = \left(\int_0^\infty g(s)\|\eta(s)\|^p_X \, ds \right)^{\frac{1}{p}},$$

sempre que X for Banach. Mais ainda, se X for um espaço de Hilbert e $p = 2$, então $L^2_g\big(\mathbb{R}^+, X\big)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$\big(\eta, \zeta\big)_{L^2_g(X)} = \int_0^\infty g(s)\big(\eta(s), \zeta(s)\big)_X \, ds.$$

Proposição 2.58. *Considere o espaço $L^2_g\big(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l)\big)$, cuja norma é dada por*

$$\|\eta\|_{L^2_g(H^1_0)} = \left(\int_0^\infty g(s)\|\eta_x(s)\|^2_{L^2} \, ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Suponha que a função peso g satisfaz as hipóteses

$$\begin{gathered} g \in C(\mathbb{R}^+) \cap C^1(\mathbb{R}^+_*) \cap L^1(\mathbb{R}^+), \quad g(s) > 0, \quad b_0 := \int_0^\infty g(s)\, ds \in (0, b), \\ \exists\ k_1 > 0 \ \big|\ g'(s) \leq -k_1 g(s), \ \ \forall\, s \geq 0. \end{gathered} \tag{2.22}$$

Se $\eta \in L^2_g\big(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l)\big)$ é tal que $\eta_s \in L^2_g\big(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l)\big)$, então

$$\int_0^\infty g(s)\eta_s(x,s)\, ds = -\int_0^\infty g'(s)\eta(x,s)\, ds, \quad x \in [0,l].$$

Demonstração. Seja $\tilde{x}$ fixo, porém arbitrário em $[0,l]$. Utilizando integração por partes, vem que

$$\int_0^\infty g(s)\eta_s(\tilde{x},s)\, ds = \lim_{y\to\infty} g(y)\eta(\tilde{x},y) - \lim_{y\to 0} g(y)\eta(\tilde{x},y) - \int_0^\infty g'(s)\eta(\tilde{x},s)\, ds. \tag{2.23}$$

Assim, usando que $\eta(0,y)=0$ para todo $y\geq 0$, vem que

$$|g(y)\eta(\tilde{x},y)| = g(y)\,|\eta(\tilde{x},y)| = g(y)\left|\int_0^{\tilde{x}} \eta_x(x,y)\,dx\right|.$$

Aplicando propriedades de integrais, seque que

$$|g(y)\eta(\tilde{x},y)| \leq g(y)\int_0^{\tilde{x}} |\eta_x(x,y)|\,dx \leq g(y)\int_0^{l} |\eta_x(x,y)|\,dx.$$

Todavia, note que da definição do espaço $L^2_g\big(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l)\big)$ vem que para cada y, a função $x \longmapsto \eta_x(x,y)$ pertence ao espaço $L^2(0,l)$. Por conseguinte, aplicando a Desigualdade de Hölder (veja Teorema 2.32) resulta que

$$|g(y)\eta(\tilde{x},y)| \leq g(y)\left(\int_0^l |\eta_x(x,y)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^l dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{l}g(y)\|\eta_x(y)\|_{L^2}. \tag{2.24}$$

Com isso em mente, note que

$$\int_0^\infty g(y)\|\eta_x(y)\|_{L^2}\,dy \leq \sqrt{b_0}\left(\int_0^\infty g(y)\|\eta_x(y)\|^2_{L^2}\,dy\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b_0}\|\eta\|_{L^2_g(H^1_0)} < \infty,$$

isto é, $\phi(y)=g(y)\|\eta_x(y)\|_{L^2}$ é uma função positiva e integrável em $\mathbb{R}^+$, consequentemente de (2.24) vem que

$$\lim_{y\to\infty} g(y)\eta(\tilde{x},y) = 0. \tag{2.25}$$

Por outro lado, usando propriedades para integrais decorre que para qualquer y positivo, vale

$$g(y)\|\eta_x(y)\|^2_{L^2} = g(y)\left\|\int_0^y \eta_{xs}(s)\,ds\right\|^2_{L^2} \leq g(y)\left(\int_0^y \|\eta_{xs}(s)\|_{L^2}\,ds\right)^2,$$

mais ainda, ao usar que g é não-crescente, como descrito em (2.22), vem que

$$g(y)\|\eta_x(y)\|^2_{L^2} \leq \left(\int_0^y \big[g(y)\big]^{1/2}\|\eta_{xs}(s)\|_{L^2}\,ds\right)^2 \leq \left(\int_0^y \big[g(s)\big]^{1/2}\|\eta_{xs}(s)\|_{L^2}\,ds\right)^2.$$

Usando a Desigualdade de Hölder, segue que

$$g(y)\|\eta_x(y)\|^2_{L^2} \leq y\int_0^y g(s)\,\|\eta_{sx}(s)\|^2_{L^2}\,ds \leq y\int_0^\infty g(s)\,\|\eta_{sx}(s)\|^2_{L^2}\,ds = y\|\eta_s\|^2_{L^2_g(H^1_0)}.$$

Por fim,

$$0 \leq \lim_{y\to 0} g(y)\|\eta_x(y)\|^2_{L^2} \leq \lim_{y\to 0} y\|\eta_s\|^2_{L^2_g(H^1_0)} = 0, \tag{2.26}$$

visto que $\eta_s \in L^2_g\big(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l)\big)$. De (2.26) pode-se concluir ainda que

$$\lim_{y\to 0} \sqrt{g(y)}\|\eta_x(y)\|_{L^2} = 0.$$

Além disso, como $\lim_{y\to 0} \sqrt{g(y)} = \sqrt{g(0)}$, resulta que

$$\lim_{y\to 0} g(y)\|\eta_x(y)\|_{L^2} = \lim_{y\to 0} \sqrt{g(y)} \lim_{y\to 0} \sqrt{g(y)}\|\eta_x(y)\|_{L^2} = 0. \tag{2.27}$$

Finalmente, usando (2.27) em (2.24), vem que

$$\lim_{y\to 0} |g(y)\eta(\tilde{x}, y)| \leq \lim_{y\to 0} \sqrt{l} g(y)\|\eta_x(y)\|_{L^2} = 0,$$

isto é,

$$\lim_{y\to 0} g(y)\eta(\tilde{x}, y) = 0. \tag{2.28}$$

Portanto, usando (2.25) e (2.28) em (2.23), obtém-se

$$\int_0^\infty g(s)\eta_s(\tilde{x}, s)\, ds = -\int_0^\infty g'(s)\eta(\tilde{x}, s)\, ds, \quad x \in [0, l].$$

■

2.4 Semigrupos de Operadores Lineares

Definição 2.59. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear. O conjunto resolvente de A é o conjunto de todos os números complexos λ para o qual o operador $(\lambda I - A)^{-1}$ existe, $(\lambda I - A)$ é invertível, limitado e tem domínio denso em X. O conjunto resolvente de A será denotado por $\varrho(A)$.*

Definição 2.60. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Diz-se que um operador $A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é dissipativo se*

$$\operatorname{Re}\big(AU, U\big)_{\mathcal{H}} \leq 0, \quad U \in D(A).$$

Teorema 2.61. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ um operador linear e dissipativo. Se $\operatorname{Im}(\lambda_0 I - A) = \mathcal{H}$ para algum $\lambda_0 > 0$, então $\operatorname{Im}(\lambda I - A) = \mathcal{H}$ para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração. Ver [14], página 15, Teorema 4.5-(a). ■

Teorema 2.62. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador dissipativo com $\operatorname{Im}(I - A) = X$. Se X é reflexivo, então $\overline{D(A)} = X$.*

Demonstração. Ver [14], página 16, Teorema 4.6. ■

Definição 2.63. *Uma família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares limitados em um espaço de Banach X é chamada de semigrupo, se satisfaz*

(i) $S(t+s) = S(t)S(s), \quad \forall\, t, s \geq 0,$

(ii) $S(0) = I.$

Se além dos itens (i) e (ii), tiver que

$$\lim_{t\to 0} S(t)x = x, \quad \forall\, x \in X,$$

diz-se que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo (ou fortemente contínuo).

Definição 2.64. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo em X. O operador A definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in X \;\middle|\; \lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

e

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - x}{t}, \quad x \in D(A)$$

é o gerador infinitesimal do semigrupo $S(t)$. Neste caso, o semigrupo $S(t)$ pode ser denotado por e^{At}.

Teorema 2.65. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo em um espaço de Banach X. Então, existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\omega t}, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Demonstração. Ver [14], página 4, Teorema 2.2. ■

Nas condições do Teorema 2.65, se $\omega = 0$ diz-se que $S(t)$ é uniformemente limitado. No caso em que $\omega = 0$ e $M = 1$, $S(t)$ é chamado de C_0-semigrupo de contrações.

Teorema 2.66. *Se $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo, então para cada $x \in X$ a função de $\mathbb{R}^+$ em X dada por $t \longmapsto S(t)x$ é uma função contínua.*

Demonstração. Ver [14], página 4, Corolário 2.3. ■

Teorema 2.67. *Se A é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $S(t)$, então o domínio do operador A é denso em X e A é um operador linear fechado.*

Demonstração. Ver [14], página 5, Corolário 2.5. ■

Teorema 2.68. *(Lumer-Phillips) Seja A um operador linear com domínio denso em X.*

(i) Se A é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que $\operatorname{Im}(\lambda_0 I - A) = X$, então A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações.

(ii) Se A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações sobre X, então o operador A é dissipativo e $\mathrm{Im}(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$.

Demonstração. Ver [14], página 14, Teorema 4.3. ■

Teorema 2.69. *(Hille-Yosida) Seja A um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $S(t) := e^{At}$ em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então, dado $U_0 \in D(A)$ existe uma única função*

$$U \in C^1\big([0,\infty); \mathcal{H}\big) \cap C\big([0,\infty); D(A)\big),$$

satisfazendo

$$\begin{cases} U_t = AU, \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{2.29}$$

Além disso,

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \|U_0\|_{\mathcal{H}} \quad e \quad \|U_t(t)\|_{\mathcal{H}} = \|AU(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \|AU_0\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Demonstração. Ver [3], página 185, Teorema 7.4. ■

No Teorema 2.69, a solução U mencionada é dada por

$$U(t) = S(t)U_0 := e^{At}U_0.$$

Teorema 2.70. *(Solução Generalizada) Seja A um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $S(t) := e^{At}$ em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então, dado $U_0 \in \mathcal{H}$ existe uma única função na classe*

$$U \in C\big([0,\infty); \mathcal{H}\big),$$

satisfazendo o problema de Cauchy abstrato (2.29).

Demonstração. Ver [6], página 111, Proposição 6.4. ■

Definição 2.71. *Diz-se que um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ em um espaço de Banach X é exponencialmente estável, quando existem constantes $\alpha > 0$ e $M \geq 1$ satisfazendo*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{-\alpha t}, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Teorema 2.72. *(Prüss) Seja $S(t) := e^{At}$ um C_0-semigrupo de contrações em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então, $S(t)$ é dito exponencialmente estável se, e somente se, as seguintes condições se verificam*

(i) $i\mathbb{R} := \{i\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \varrho(A)$,

(ii) $\limsup\limits_{|\lambda|\to\infty} \big\|(i\lambda I - A)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty.$

Demonstração. Ver [11], página 4, Teorema 1.3.2. ■

Observação. Embora, neste trabalho, o Teorema 2.72 seja designado como Teorema de Prüss, vale ressaltar que o mesmo é uma variação dos resultados apresentados por Prüss em [15] e Gearhart em [8].

Definição 2.73. *Diz-se que um semigrupo $S(t) := e^{At}$ em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é polinomialmente estável, quando existem constantes $\alpha > 0$ e $C > 0$ tais que para todo $U \in D(A)$*

$$\|S(t)U\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{\alpha}}\|U\|_{D(A)}, \quad \forall\, t > 0.$$

Observação. Na Definição 2.73, $\|\cdot\|_{D(A)}$ representa a norma do gráfico do operador A em $D(A) \subset \mathcal{H}$, isto é,

$$\|u\|_{D(A)} = \|u\|_{\mathcal{H}} + \|A(u)\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall\, u \in D(A).$$

Notação 2.74. *Denota-se por*

$$f = o(g), \quad \textit{quando} \quad x \longrightarrow x_0,$$

desde que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

Notação 2.75. *Escreve-se*

$$f = \mathcal{O}(g), \quad \textit{quando} \quad \lambda \longrightarrow \lambda_0,$$

desde que exista uma constante positiva c tal que

$$|f(\lambda)| \leq c|g(\lambda)|$$

para todo λ suficientemente perto de λ_0.

Teorema 2.76. *(Borichev & Tomilov) Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo uniformemente limitado em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ com gerador infinitesimal A tal que $i\mathbb{R} \subset \varrho(A)$. Então, para alguma constante fixada $\alpha > 0$ as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\left\|(i\lambda I - A)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \mathcal{O}(|\lambda|^{\alpha}), \quad \lambda \longrightarrow \infty,$

(ii) $\left\|S(t)(-A)^{-\alpha}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \mathcal{O}(t^{-1}), \quad t \longrightarrow \infty,$

(iii) $\left\|S(t)(-A)^{-\alpha}u\right\|_{\mathcal{H}} = o(t^{-1}), \quad t \longrightarrow \infty,\ u \in \mathcal{H},$

(iv) $\left\|S(t)A^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \mathcal{O}(t^{-1/\alpha}), \quad t \longrightarrow \infty,$

(v) $\|S(t)A^{-1}u\|_{\mathcal{H}} = o(t^{-1/\alpha}), \quad t \longrightarrow \infty,\ u \in \mathcal{H}.$

Demonstração. Ver [2], página 459, Teorema 2.4. ■

3 ORIGEM DOS PROBLEMAS

O sistema de Timoshenko é um sistema de equações diferenciais parciais que descreve a vibração de uma viga considerando o deslocamento transversal e o ângulo de rotação. A primeira versão deste sistema, apresentada pelo engenheiro Sthephen Prokofievich Timoshenko em [22], é dada por

$$\rho A \varphi_{tt} = S_x, \tag{3.1}$$
$$\rho I \psi_{tt} = M_x - S, \tag{3.2}$$

onde $\varphi = \varphi(x,t)$ e $\psi = \psi(x,t)$ denotam, respectivamente, o deslocamento vertical e o ângulo de rotação da viga na posição x e no instante t. Além disso, ρ é uma constante de densidade de massa, A representa a área de uma seção transversal da viga, I o momento de inércia dessa seção, S a força de cisalhamento e M o momento fletor. Considere a Lei Constitutiva Termoviscoelástica para o momento fletor M e a Lei Constitutiva Elástica para a força de cisalhamento S, dadas respectivamente por

$$M = EI\psi_x - \int_0^\infty g(s)\psi_x(t-s)\,ds - \delta\theta \quad \text{e} \quad S = \tilde{k}GA(\varphi_x + \psi), \tag{3.3}$$

em que $\tilde{k}$ representa um fator de correção de cisalhamento, G e E denotam os módulos de cisalhamento e elasticidade de Young, respectivamente; δ é uma constante de acoplamento térmico, $\theta = \theta(x,t)$ representa a variação de temperatura na coordenada x e no instante t e, por fim, g é conhecida como núcleo de memória. Substituindo (3.3) em (3.1) e (3.2) e denotando

$$\rho_1 = \rho A, \quad \rho_2 = \rho I, \quad k = \tilde{k}GA \quad \text{e} \quad b = EI,$$

obtém-se o seguinte sistema de Timoshenko com memória

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x &= 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\psi_{xx}(t-s)\,ds + k(\varphi_x+\psi) + \delta\theta_x &= 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Neste momento, dispõe-se de um sistema com duas equações e três funções incógnitas, portanto, faz-se necessário adicionar uma nova equação. Dessarte, considere a equação de propagação de calor

$$\rho_3\theta_t + q_x + \delta\psi_{xt} = 0, \tag{3.5}$$

na qual, a função $q = q(x,t)$ designa o fluxo de calor. Por ora, considere também uma equação que descreve a relação entre o fluxo de calor q e a temperatura θ, mais precisamente, a Lei Térmica de Fourier dada por $q = -\tilde{\beta}\theta_x$. Consequentemente, substituindo esta expressão em

(3.5), vem que

$$\rho_3\theta_t - \tilde{\beta}\theta_{xx} + \delta\psi_{xt} = 0, \tag{3.6}$$

e portanto, obtém-se o sistema

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x &= 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\psi_{xx}(t-s)\,ds + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x &= 0, \\ \rho_3\theta_t - \tilde{\beta}\theta_{xx} + \delta\psi_{xt} &= 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Note que a segunda equação do sistema é não-autônoma, o que impossibilita a aplicação imediata da teoria de semigrupos lineares. Deste modo, será utilizado um argumento introduzido por Dafermos (veja [5]) para transformar este sistema em um problema autônomo equivalente. Para isso, defina a variável

$$\eta(x,t,s) = \psi(x,t) - \psi(x,t-s), \quad x \in (0,l), \quad t \geq 0, \quad s > 0, \tag{3.8}$$

também conhecida como história de deslocamento relativo. Consequentemente, pode-se escrever

$$\int_0^\infty g(s)\psi_{xx}(t-s)\,ds = b_0\psi_{xx} - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(t,s)\,ds,$$

onde $b_0 = \int_0^\infty g(s)\,ds$. Em vista disso, é possível reformular o sistema (3.7) como

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x &= 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - \tilde{b}\psi_{xx} - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x &= 0, \\ \rho_3\theta_t - \tilde{\beta}\theta_{xx} + \delta\psi_{xt} &= 0, \\ \eta_t + \eta_s - \psi_t &= 0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde $\tilde{b} = b - b_0$, e ainda, a última equação é obtida pela soma das derivadas de (3.8) em relação a t e s. Em face ao exposto, enfatiza-se que problema (3.9) é conhecido como sistema de Timoshenko com história e Lei de Fourier, e ainda, todas as constantes apresentadas são positivas.

Outro objeto de estudos deste trabalho é obtido considerando a Lei de Cattaneo para o fluxo de calor, a saber

$$\tau q_t + \beta q + \theta_x = 0,$$

neste caso, o sistema obtido é dado por

$$
\begin{aligned}
\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x &= 0,\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\psi_{xx}(t-s)\,ds + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x &= 0,\\
\rho_3\theta_t + q_x + \delta\psi_{xt} &= 0,\\
\tau q_t + \beta q + \theta_x &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Adotando novamente a mudança de variável (3.8), o problema (3.10) pode ser reescrito como

$$
\begin{aligned}
\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x &= 0,\\
\rho_2\psi_{tt} - \tilde{b}\psi_{xx} - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x &= 0,\\
\rho_3\theta_t + q_x + \delta\psi_{xt} &= 0,\\
\tau q_t + \beta q + \theta_x &= 0,\\
\eta_t + \eta_s - \psi_t &= 0,
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

problema este que é conhecido como sistema de Timoshenko com história e Lei de Cattaneo e será abordado no Capítulo 5. Mais especificamente, nas próximas páginas inicia-se um estudo do sistema (3.9) considerando condições de fronteira do tipo Dirichlet-Neumann, buscando a princípio, verificar os resultados de existência e unicidade de solução apresentados em [21]. Para tal propósito, os resultados apresentados no Capítulo 2 serão essenciais.

4 SISTEMA DE TIMOSHENKO COM HISTÓRIA E LEI DE FOURIER

O objetivo deste capítulo é realizar uma apresentação detalhada dos resultados demonstrados em [21] que dizem respeito ao sistema de Timoshenko com história e Lei de Fourier, a saber, o sistema a ser estudado é

$$
\begin{cases}
\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 & \text{em } (0,l)\times(0,\infty),\\
\rho_2\psi_{tt} - \tilde{b}\psi_{xx} - \displaystyle\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds + k(\varphi_x+\psi) + \delta\theta_x = 0 & \text{em } (0,l)\times(0,\infty),\\
\rho_3\theta_t - \tilde{\beta}\theta_{xx} + \delta\psi_{xt} = 0 & \text{em } (0,l)\times(0,\infty),\\
\eta_t + \eta_s - \psi_t = 0 & \text{em } (0,l)\times(0,\infty)^2,
\end{cases}
\tag{4.1}
$$

com condições iniciais

$$
\begin{aligned}
\varphi(\cdot\,,0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(\cdot\,,0) = \varphi_1, \quad \psi(\cdot\,,0) = \psi_0, \quad \psi_t(\cdot\,,0) = \psi_1,\\
\theta(\cdot\,,0) = \theta_0, \quad \eta(\cdot\,,0,s) = \psi_0 - \psi(\cdot\,,-s) =: \eta_0(\cdot\,,s) \quad \text{em} \quad (0,l),
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

e condições de fronteira

$$
\begin{aligned}
\varphi_x(0,\cdot\,) = \varphi_x(l,\cdot\,) = \psi(0,\cdot\,) = \psi(l,\cdot\,) = \theta_x(0,\cdot\,) = \theta_x(l,\cdot\,) = 0 \quad \text{em} \quad (0,\infty),\\
\eta(0,\cdot\,,\cdot\,) = \eta(l,\cdot\,,\cdot\,) = 0 \quad \text{em} \quad (0,\infty)^2,\\
\eta(\cdot\,,\cdot\,,0) = \lim_{s\to 0}\eta(\cdot\,,\cdot\,,s) = 0 \quad \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty).
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Mais especificamente, serão apresentados resultados de existência e unicidade de solução contidos em [21], além de explicitar uma condição necessária e suficiente para que o semigrupo associado ao problema seja exponencialmente estável. Neste caso, a demonstração foi realizada com a ausência de algumas hipóteses assumidas originalmente sobre a função núcleo de memória g, a saber,

$$
\exists\, k_0, k_2 > 0 \quad \Big| \quad -\,k_0\, g(s) \le g'(s) \quad \text{e} \quad |g''(s)| \le k_2\, g(s),
$$

configurando uma melhoria nos resultados apresentados até então. Por fim, na última seção deste capítulo é provado que a solução do problema decai polinomialmente independentemente de relações entre os coeficientes do sistema, complementando os resultados descritos em [21].

4.1 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO

O objetivo inicial desta seção é escrever o problema de valor inicial e de fronteira (4.1)-(4.3) como um problema de Cauchy abstrato. Para tanto, considere o espaço de fase

$$\mathcal{H}_1 = H^1_*(0,l) \times L^2_*(0,l) \times H^1_0(0,l) \times L^2(0,l) \times L^2_*(0,l) \times L^2_g\big(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l)\big),$$

munido da norma induzida pelo sistema, a saber

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}_1} = \rho_1\|\Phi\|^2_{L^2} + \rho_2\|\Psi\|^2_{L^2} + \tilde{b}\|\psi_x\|^2_{L^2} + k\|\varphi_x+\psi\|^2_{L^2} + \rho_3\|\theta\|^2_{L^2} + \|\eta\|^2_{L^2_g(H^1_0)},$$

que é proveniente do produto interno

$$\begin{aligned}\big(U,\tilde{U}\big)_{\mathcal{H}_1} = \rho_1\big(\Phi,\tilde{\Phi}\big)_{L^2} + \rho_2\big(\Psi,\tilde{\Psi}\big)_{L^2} + \tilde{b}\big(\psi_x,\tilde{\psi_x}\big)_{L^2} + k\big(\varphi_x+\psi,\tilde{\varphi_x}+\tilde{\psi}\big)_{L^2}\\ +\rho_3\big(\theta,\tilde{\theta}\big)_{L^2} + \big(\eta,\tilde{\eta}\big)_{L^2_g(H^1_0)},\end{aligned}$$

para todo $U = (\varphi,\Phi,\psi,\Psi,\theta,\eta)$ e $\tilde{U} = (\tilde{\varphi},\tilde{\Phi},\tilde{\psi},\tilde{\Psi},\tilde{\theta},\tilde{\eta})$ em $\mathcal{H}_1$. Será provado mais adiante (veja Apêndice A.1) que $\mathcal{H}_1$ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$ e Hilbert com o produto interno $\big(\cdot,\cdot\big)_{\mathcal{H}_1}$.

Neste instante, considere as notações $\varphi_t = \Phi$, $\psi_t = \Psi$ e $U = (\varphi,\Phi,\psi,\Psi,\theta,\eta)$ e defina

$$U_t = \begin{pmatrix} \Phi \\ \dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x \\ \Psi \\ \dfrac{\tilde{b}}{\rho_2}\psi_{xx} + \dfrac{1}{\rho_2}\displaystyle\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds - \dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x+\psi) - \dfrac{\delta}{\rho_2}\theta_x \\ \dfrac{\tilde{\beta}}{\rho_3}\theta_{xx} - \dfrac{\delta}{\rho_3}\Psi_x \\ \Psi - \eta_s \end{pmatrix} =: A_1\,U. \tag{4.4}$$

Finalmente, considerando $U_0 := (\varphi_0,\varphi_1,\psi_0,\psi_1,\theta_0,\eta_0)$ é possível escrever o problema (4.1)-(4.3) no seguinte problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} U_t = A_1\,U, \quad t>0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{4.5}$$

onde A_1 é o operador linear definido em (4.4), cujo domínio é dado por

$$D(A_1) = \left\{ U \in \mathcal{H}_1 \;\middle|\; \begin{array}{c} \varphi \in H^2(0,l); \quad \varphi_x, \Psi, \theta_x \in H_0^1(0,l); \quad \Phi \in H_*^1(0,l); \\ \tilde{b}\psi + \displaystyle\int_0^\infty g(s)\eta(s)\,ds \in H^2(0,l);\; \eta_s \in L_g^2\big(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,l)\big) \text{ e } \eta(0) = 0 \end{array} \right\}. \tag{4.6}$$

A partir de agora, tendo como ponto de partida os teoremas 2.69 e 2.70, os estudos estarão voltados a mostrar que o operador A_1 é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações. Para tanto, a prova se dará mediante a verificação do resultado de Lumer-Phillips, isto é, Teorema 2.68. Sobre a função núcleo de memória g, assume-se que esta satisfaz as seguintes hipóteses:

$$\begin{gathered} g \in C(\mathbb{R}^+) \cap C^1(\mathbb{R}_*^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+), \quad g(s) > 0, \quad b_0 := \int_0^\infty g(s)\,ds \in (0,b), \\ \exists\, k_1 > 0 \;\big|\; g'(s) \leq -k_1 g(s), \;\; \forall\, s \geq 0. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Apesar das condições impostas em (4.7) serem excepcionalmente exigentes, o conjunto das funções g que possuem essa regularidade não é vazio. Com efeito, um exemplo pode ser dado por

$$g(s) = e^{-\alpha s}, \quad s \geq 0,$$

para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha > 1/b$.

Lema 4.1. *Seja A_1 o operador definido em* (4.4) *e* (4.6)*. Se g é uma função que respeita as hipóteses* (4.7)*, então A_1 é um operador dissipativo em $\mathcal{H}_1$.*

Demonstração. Quer-se mostrar que

$$\operatorname{Re}\big(A_1 U, U\big)_{\mathcal{H}_1} \leq 0, \quad \forall\, U \in D(A_1).$$

Com efeito, dado $U \in D(A_1)$ tem-se que

$$\begin{aligned} \big(A_1 U, U\big)_{\mathcal{H}_1} &= k\big((\varphi_x + \psi)_x, \Phi\big)_{L^2} + \left(\tilde{b}\psi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds - k(\varphi_x + \psi) - \delta\theta_x, \Psi\right)_{L^2} \\ &\quad + \tilde{b}\big(\Psi_x, \psi_x\big)_{L^2} + k\big(\Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi\big)_{L^2} + \big(\tilde{\beta}\theta_{xx} - \delta\Psi_x, \theta\big)_{L^2} \\ &\quad + \big(\Psi - \eta_s, \eta\big)_{L_g^2(H_0^1)}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \big(A_1 U, U\big)_{\mathcal{H}_1} &= k\big((\varphi_x + \psi)_x, \Phi\big)_{L^2} + \tilde{b}\big(\psi_{xx}, \Psi\big)_{L^2} + \left(\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds, \Psi\right)_{L^2} \\ &\quad - k\big(\varphi_x + \psi, \Psi\big)_{L^2} - \delta\big(\theta_x, \Psi\big)_{L^2} + \tilde{b}\big(\Psi_x, \psi_x\big)_{L^2} + k\big(\Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi\big)_{L^2} \\ &\quad + \tilde{\beta}\big(\theta_{xx}, \theta\big)_{L^2} - \delta\big(\Psi_x, \theta\big)_{L^2} + \big(\Psi, \eta\big)_{L_g^2(H_0^1)} - \big(\eta_s, \eta\big)_{L_g^2(H_0^1)}. \end{aligned}$$

Integrando por partes e lembrando que $\varphi_x,\ \psi,\ \Psi,\ \theta_x\ \in H_0^1(0,l)$, segue que

$$\begin{aligned}
\big(A_1\,U,U\big)_{\mathcal{H}_1} &= -k\big(\varphi_x+\psi,\Phi_x+\Psi\big)_{L^2}+k\big(\Phi_x+\Psi,\varphi_x+\psi\big)_{L^2}-\tilde{b}\big(\psi_x,\Psi_x\big)_{L^2}\\
&\quad+\tilde{b}\big(\Psi_x,\psi_x\big)_{L^2}-\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds,\Psi_x\right)_{L^2}+\big(\Psi,\eta\big)_{L^2_g(H_0^1)}-\delta\big(\theta_x,\Psi\big)_{L^2}\\
&\quad+\delta\big(\Psi,\theta_x\big)_{L^2}-\big(\eta_s,\eta\big)_{L^2_g(H_0^1)}-\tilde{\beta}\|\theta_x\|^2_{L^2}. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Contudo, lembrando que para qualquer complexo z vale que $z-\overline{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$ e, tomando a parte real de (4.8), seque que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,\big(A_1\,U,U\big)_{\mathcal{H}_1} &= \mathrm{Re}\left[\big(\Psi,\eta\big)_{L^2_g(H_0^1)}-\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds,\Psi_x\right)_{L^2}\right]\\
&\quad-\mathrm{Re}\,\big(\eta_s,\eta\big)_{L^2_g(H_0^1)}-\tilde{\beta}\|\theta_x\|^2_{L^2}.
\end{aligned} \qquad (4.9)$$

Usando o Teorema de Fubini é possível escrever

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds,\Psi_x\right)_{L^2} &= \int_0^l\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds\,\overline{\Psi}_x\,dx\\
&= \int_0^\infty g(s)\big(\eta_x(s),\Psi_x\big)_{L^2}\,ds\\
&= \big(\eta,\Psi\big)_{L^2_g(H_0^1)},
\end{aligned}$$

isto é, a igualdade (4.9) se reduz a

$$\mathrm{Re}\,\big(A_1\,U,U\big)_{\mathcal{H}_1}=-\,\mathrm{Re}\,\big(\eta_s,\eta\big)_{L^2_g(H_0^1)}-\tilde{\beta}\|\theta_x\|^2_{L^2}. \qquad (4.10)$$

Finalmente, note que

$$\mathrm{Re}\,\big[\eta_{xs}(s)\,\overline{\eta}_x(s)\big]=\frac{1}{2}\big[\eta_{xs}(s)\,\overline{\eta}_x(s)+\overline{\eta}_{xs}(s)\,\eta_x(s)\big]=\frac{1}{2}\frac{d}{ds}|\eta_x(s)|^2,$$

e consequentemente,

$$\mathrm{Re}\,\big(\eta_s,\eta\big)_{L^2_g(H_0^1)}=\int_0^\infty g(s)\int_0^l \mathrm{Re}\,\big(\eta_{xs}(s)\,\overline{\eta}_x(s)\big)\,dx\,ds=\frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\frac{d}{ds}\|\eta_x(s)\|^2_{L^2}\,ds.$$

Assim, de (4.10) obtém-se

$$\mathrm{Re}\,\big(A_1\,U,U\big)_{\mathcal{H}_1}=-\frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\frac{d}{ds}\|\eta_x(s)\|^2_{L^2}\,ds-\tilde{\beta}\|\theta_x\|^2_{L^2}.$$

Integrando por partes, obtém-se

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\frac{d}{ds}\|\eta_x(s)\|_{L^2}^2\,ds &= -\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\int_y^{1/y} g(s)\frac{d}{ds}\|\eta_x(s)\|_{L^2}^2\,ds\\ &= -\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\Big(g(1/y)\|\eta_x(1/y)\|_{L^2}^2 - g(y)\|\eta_x(y)\|_{L^2}^2\Big)\\ &\quad +\frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\eta_x(s)\|_{L^2}^2\,ds.\end{aligned}$$

Defina a função $\phi(s) = g(s)\|\eta_x(s)\|_{L^2}^2$. Como $\eta \in L_g^2\big(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,l)\big)$ segue que $\phi \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Assim, tem-se

$$\lim_{y\to 0} g(1/y)\|\eta_x(1/y)\|_{L^2}^2 = \lim_{w\to\infty} g(w)\|\eta_x(w)\|_{L^2}^2 = 0. \tag{4.11}$$

Por outro lado, empregando os mesmos argumentos descritos na Proposição 2.58 para obter (2.26), conclui-se que

$$\lim_{y\to 0} g(y)\|\eta_x(y)\|_{L^2}^2 = 0. \tag{4.12}$$

Por conseguinte, resulta que

$$\operatorname{Re}\big(A_1\,U, U\big)_{\mathcal{H}_1} = -\tilde{\beta}\|\theta_x\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\eta_x(s)\|_{L^2}^2\,ds. \tag{4.13}$$

Fazendo uso das hipóteses de g, mais precisamente, usando que $g'(s) \le -k_1 g(s)$, vem que

$$\operatorname{Re}\big(A_1\,U, U\big)_{\mathcal{H}_1} \le -\tilde{\beta}\|\theta_x\|_{L^2}^2 - \frac{k_1}{2}\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}^2 \le 0, \tag{4.14}$$

donde conclui-se que A_1 é um operador dissipativo, finalizando a demonstração. ∎

Lema 4.2. *Seja $\xi \in H_0^1(0,l)$. Definindo $-\xi_{xx}$ como*

$$\begin{aligned}-\xi_{xx} : H_0^1(0,l) &\longrightarrow \mathbb{C}\\ \tilde{\psi} &\longmapsto \langle -\xi_{xx}, \tilde{\psi}\rangle = \big(\xi_x, \tilde{\psi}_x\big)_{L^2},\end{aligned}$$

tem-se que $-\xi_{xx}$ é um funcional antilinear limitado, isto é, $-\xi_{xx} \in H^{-1}(0,l)$.

Demonstração. A antilinearidade do funcional é verificada trivialmente pelas propriedades de produto interno. Em contrapartida, dado $\tilde{\psi} \in H_0^1(0,l)$, vem da Desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\big|\langle -\xi_{xx}, \tilde{\psi}\rangle\big| = \big|\big(\xi_x, \tilde{\psi}_x\big)_{L^2}\big| \le \|\xi_x\|_{L^2}\|\tilde{\psi}_x\|_{L^2} = \|\xi_x\|_{L^2}\|\tilde{\psi}\|_{H_0^1},$$

isto é, $-\xi_{xx}$ é limitado, como desejado. ∎

O próximo lema será muito útil neste e no próximo capítulo.

Lema 4.3. *Sejam* $g_1 \in L^2_*(0,l)$ *e* $g_2 \in H^{-1}(0,l)$. *Então, existe único par* (φ,ψ) *no espaço* $H^1_*(0,l) \times H^1_0(0,l)$ *que verifica as identidades*

$$\begin{aligned} -k(\varphi_x+\psi)_x &= g_1 \quad \textit{em} \quad L^2(0,l), \\ -\tilde{b}\psi_{xx} + k(\varphi_x+\psi) &= g_2 \quad \textit{em} \quad H^{-1}(0,l). \end{aligned}$$

Mais ainda, $\varphi \in H^2(0,l)$ *e* $\varphi_x \in H^1_0(0,l)$.

Demonstração. Defina a aplicação

$$\begin{aligned} a : \left[H^1_*(0,l) \times H^1_0(0,l)\right]^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \big((\varphi,\psi),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})\big) &\longmapsto \tilde{b}\big(\psi_x,\tilde{\psi}_x\big)_{L^2} + k\big(\varphi_x+\psi,\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}\big)_{L^2}. \end{aligned}$$

Evidentemente, a é uma forma sesquilinear devido as propriedades de produto interno. Será provado que a é contínua e coerciva, para tanto, considere em $H^1_*(0,l) \times H^1_0(0,l)$ a seguinte norma

$$\|(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})\|_{H^1_*\times H^1_0} = \|\tilde{\varphi}\|_{H^1_*} + \|\tilde{\psi}\|_{H^1_0} = \|\tilde{\varphi}_x\|_{L^2} + \|\tilde{\psi}_x\|_{L^2},$$

para todo par $(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})$ em $H^1_*(0,l) \times H^1_0(0,l)$. Desta forma, usando as desigualdades Triangular e de Cauchy-Schwarz, tem-se

$$\begin{aligned} \big|a\big((\varphi,\psi),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})\big)\big| &= \big|\tilde{b}\big(\psi_x,\tilde{\psi}_x\big)_{L^2} + k\big(\varphi_x+\psi,\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}\big)_{L^2}\big| \\ &\leq \tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}\|\tilde{\psi}_x\|_{L^2} + k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}\|\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}\|_{L^2} \\ &\leq \tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}\|\tilde{\psi}_x\|_{L^2} + k\big(\|\varphi_x\|_{L^2}+\|\psi\|_{L^2}\big)\big(\|\tilde{\varphi}_x\|_{L^2}+\|\tilde{\psi}\|_{L^2}\big). \end{aligned}$$

Por fim, fazendo uso da Desigualdade de Poincaré e majorando as constantes, resulta que

$$\begin{aligned} \big|a\big((\varphi,\psi),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})\big)\big| &\leq \tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}\|\tilde{\psi}_x\|_{L^2} + k\big(\|\varphi_x\|_{L^2}+l\|\psi_x\|_{L^2}\big)\big(\|\tilde{\varphi}_x\|_{L^2}+l\|\tilde{\psi}_x\|_{L^2}\big) \\ &\leq c\|(\varphi,\psi)\|_{H^1_*\times H^1_0}\|(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})\|_{H^1_*\times H^1_0}, \end{aligned}$$

onde $c = \max\{k, kl, \tilde{b}+kl^2\}$. Portanto, a é contínua.

Neste instante será mostrado que a é coerciva, isto é, que existe uma constante c positiva tal que $\operatorname{Re} a\big((\varphi,\psi),(\varphi,\psi)\big) \geq c\|(\varphi,\psi)\|^2_{H^1_*\times H^1_0}$. De fato, usando o Lema 2.29 e, as desigualdades Triangular e de Poincaré, vem que

$$
\begin{aligned}
\|(\varphi,\psi)\|^2_{H^1_*\times H^1_0} &= \big(\|\varphi_x\|_{L^2}+\|\psi_x\|_{L^2}\big)^2\\
&\le 2\|\varphi_x\|^2_{L^2}+2\|\psi_x\|^2_{L^2}\\
&\le 2\big(\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}+l\|\psi_x\|_{L^2}\big)^2+2\|\psi_x\|^2_{L^2}\\
&= \frac{4}{k}k\|\varphi_x+\psi\|^2_{L^2}+\frac{4l^2+2}{\tilde b}\tilde b\|\psi_x\|^2_{L^2}\\
&\le \frac{1}{c}\,a\big((\varphi,\psi),(\varphi,\psi)\big),
\end{aligned}
$$

com $\dfrac{1}{c}=\max\left\{\dfrac{4}{k},\ \dfrac{4l^2+2}{\tilde b}\right\}$, donde segue a coercividade de a.
Definindo

$$
\begin{aligned}
\zeta : H^1_*(0,l)\times H^1_0(0,l) &\longrightarrow \mathbb{C}\\
(\tilde\varphi,\tilde\psi) &\longmapsto \big\langle\zeta,(\tilde\varphi,\tilde\psi)\big\rangle=\big(g_1,\tilde\varphi\big)_{L^2}+\langle g_2,\tilde\psi\rangle,
\end{aligned}
$$

tem-se um funcional antilinear e contínuo. Com efeito, usando a Desigualdade Triangular, vem que

$$\big|\big\langle\zeta,(\tilde\varphi,\tilde\psi)\big\rangle\big|=\big|\big(g_1,\tilde\varphi\big)_{L^2}+\langle g_2,\tilde\psi\rangle\big|\le\big|\big(g_1,\tilde\varphi\big)_{L^2}\big|+\big|\langle g_2,\tilde\psi\rangle\big|.$$

Aplicando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e usando que g_2 é um funcional limitado, segue que

$$\big|\big\langle\zeta,(\tilde\varphi,\tilde\psi)\big\rangle\big|\le\|g_1\|_{L^2}\|\tilde\varphi\|_{L^2}+\|g_2\|_{(H^1_0)'}\|\tilde\psi\|_{H^1_0}.$$

Logo, fazendo uso da Desigualdade de Poincaré, pode-se obter

$$\big|\big\langle\zeta,(\tilde\varphi,\tilde\psi)\big\rangle\big|\le l\|g_1\|_{L^2}\|\tilde\varphi_x\|_{L^2}+\|g_2\|_{(H^1_0)'}\|\tilde\psi\|_{H^1_0}\le c\left(\|\tilde\varphi\|_{H^1_*}+\|\tilde\psi\|_{H^1_0}\right)=c\|(\tilde\varphi,\tilde\psi)\|_{H^1_*\times H^1_0},$$

onde

$$c=\max\left\{l\|g_1\|_{L^2},\ \|g_2\|_{(H^1_0)'}\right\}.$$

Assim, como consequência do Teorema de Lax-Milgram (veja Teorema 2.20), existem únicos φ e ψ em $H^1_0(0,l)$ e $H^1_*(0,l)$ respectivamente, tais que $a\big((\varphi,\psi),(\tilde\varphi,\tilde\psi)\big)=\big\langle\zeta,(\tilde\varphi,\tilde\psi)\big\rangle$ para qualquer $(\tilde\varphi,\tilde\psi)\in H^1_*(0,l)\times H^1_0(0,l)$, isto é,

$$\tilde b\big(\psi_x,\tilde\psi_x\big)_{L^2}+k\big(\varphi_x+\psi,\tilde\varphi_x+\tilde\psi\big)_{L^2}=\big(g_1,\tilde\varphi\big)_{L^2}+\langle g_2,\tilde\psi\rangle,\quad\forall\,(\tilde\varphi,\tilde\psi)\in H^1_*(0,l)\times H^1_0(0,l).\tag{4.15}$$

Em particular, considerando $\tilde{\varphi}=0$ em (4.15), tem-se

$$\tilde{b}\big(\psi_x,\tilde{\psi}_x\big)_{L^2}+k\big(\varphi_x+\psi,\tilde{\psi}\big)_{L^2}=\langle g_2,\tilde{\psi}\rangle,\quad \forall\,\tilde{\psi}\in H_0^1(0,l),$$

e ainda, do Lema 4.2 e do Teorema da Representação de Riesz (veja Teorema 2.13) pode-se reescrever a identidade acima como

$$\langle -\tilde{b}\psi_{xx}+k(\varphi_x+\psi),\tilde{\psi}\rangle=\langle -\tilde{b}\psi_{xx},\tilde{\psi}\rangle+\langle k(\varphi_x+\psi),\tilde{\psi}\rangle=\langle g_2,\tilde{\psi}\rangle,\quad \forall\,\tilde{\psi}\in H_0^1(0,l),$$

isto é,

$$-\tilde{b}\psi_{xx}+k(\varphi_x+\psi)=g_2\quad\text{em}\quad H^{-1}(0,l).$$

Por outro lado, considerando $\tilde{\psi}=0$ em (4.15), resulta que

$$k\big(\varphi_x+\psi,\tilde{\varphi}_x\big)_{L^2}=\big(g_1,\tilde{\varphi}\big)_{L^2},\quad \forall\,\tilde{\varphi}\in H_*^1(0,l). \tag{4.16}$$

Particularmente, dado $\tilde{\varphi}\in H^1(0,l)$, a igualdade (4.16) vale para

$$\xi(x)=\tilde{\varphi}(x)-\frac{1}{l}\int_0^l\tilde{\varphi}(y)\,dy,$$

uma vez que

$$\frac{1}{l}\int_0^l\xi(x)\,dx=\frac{1}{l}\int_0^l\left(\tilde{\varphi}(x)-\frac{1}{l}\int_0^l\tilde{\varphi}(y)\,dy\right)dx=\frac{1}{l}\bigg(\int_0^l\tilde{\varphi}(x)\,dx-\int_0^l\tilde{\varphi}(y)\,dy\bigg)=0,$$

isto é, $\xi\in H_*^1(0,l)$. Assim, pode-se reescrever a identidade (4.16) como

$$k\big(\varphi_x+\psi,\xi_x\big)_{L^2}=\big(g_1,\xi\big)_{L^2},\quad \forall\,\tilde{\varphi}\in H^1(0,l),$$

ou ainda, usufruindo das propriedades de produto interno e lembrando que $g_1\in L_*^2(0,l)$, tem-se

$$k\big(\varphi_x+\psi,\tilde{\varphi}_x\big)_{L^2}=\left(g_1,\tilde{\varphi}-\frac{1}{l}\int_0^l\tilde{\varphi}(y)\,dy\right)_{L^2}=\big(g_1,\tilde{\varphi}\big)_{L^2}-\frac{1}{l}\int_0^l\overline{\tilde{\varphi}}(y)\,dy\big(g_1,1\big)_{L^2}=\big(g_1,\tilde{\varphi}\big)_{L^2},$$

para todo $\tilde{\varphi}\in H^1(0,l)$. Mais precisamente, resulta que

$$\int_0^l k(\varphi_x+\psi)\overline{\tilde{\varphi}}_x\,dx=-\int_0^l -g_1\overline{\tilde{\varphi}}\,dx,\quad \forall\,\tilde{\varphi}\in H^1(0,l). \tag{4.17}$$

Em virtude disso, tem-se que a igualdade (4.17) vale em particular para toda $\tilde{\varphi}\in C_0^1(0,l)$ e assim, pela definição de derivada fraca conclui-se que

$$-k(\varphi_x+\psi)_x=g_1\quad\text{em}\quad L^2(0,l),$$

como desejado.
Com isto em mente, pode-se ainda concluir que $\varphi \in H^2(0,l)$, dado que

$$\varphi_{xx} = -\frac{1}{k}g_1 - \psi_x \in L^2(0,l). \tag{4.18}$$

Aproveitando estas condições, será mostrado mais uma regularidade da função φ, mais especificamente, da sua derivada φ_x. Para tanto, observe que integrando por partes o lado esquerdo da igualdade (4.17), obtém-se

$$k(\varphi_x + \psi)\tilde{\varphi}\Big|_0^l - \int_0^l k(\varphi_x + \psi)_x \tilde{\varphi}\, dx = \int_0^l g_1 \tilde{\varphi}\, dx, \quad \forall \tilde{\varphi} \in H^1(0,l).$$

Como $\psi \in H_0^1(0,l)$ pode-se escrever

$$k\varphi_x\tilde{\varphi}\Big|_0^l - \int_0^l k\varphi_{xx}\tilde{\varphi}\, dx = \int_0^l (g_1 + k\psi_x)\tilde{\varphi}\, dx, \quad \forall \tilde{\varphi} \in H^1(0,l),$$

e, utilizando a identidade (4.18), vem que

$$k\varphi_x\tilde{\varphi}\Big|_0^l = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi_x(l)\tilde{\varphi}(l) = \varphi_x(0)\tilde{\varphi}(0), \quad \forall \tilde{\varphi} \in H^1(0,l).$$

Particularmente, para $\tilde{\varphi}(x) = 1$ em $[0,l]$ conclui-se que $\varphi_x(l) = \varphi_x(0)$. Todavia, escolhendo $\tilde{\varphi}(x) = \dfrac{x}{l}$ em $[0,l]$ resulta que $\varphi_x(l) = 0 = \varphi_x(0)$, isto é, $\varphi_x \in H_0^1(0,l)$. ■

Lema 4.4. *Seja A_1 o operador definido em* (4.4) *e* (4.6)*. Se g é uma função que satisfaz as hipóteses* (4.7)*, então $0 \in \varrho(A_1)$.*

Demonstração. Inicialmente será mostrado que o operador $-A_1$ é sobrejetivo. Para isso, seja $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \in \mathcal{H}_1$, procura-se $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \eta) \in D(A_1)$ de modo que $(-A_1)U = F$, ou melhor,

$$\begin{aligned}
-\Phi &= f_1, & (4.19)\\
-k(\varphi_x + \psi)_x &= \rho_1 f_2, & (4.20)\\
-\Psi &= f_3, & (4.21)\\
-\tilde{b}\psi_{xx} - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\, ds + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x &= \rho_2 f_4, & (4.22)\\
-\tilde{\beta}\theta_{xx} + \delta\Psi_x &= \rho_3 f_5, & (4.23)\\
\eta_s - \Psi &= f_6. & (4.24)
\end{aligned}$$

Salienta-se que as equações (4.19)-(4.24) serão usadas para encontrar funções $\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, q$ e η que respeitem tais igualdades. Posteriormente, considerações serão feitas para concluir que

$U \in D(A_1)$. Com isto posto, veja que as equações (4.19) e (4.21) induzem a definir

$$\Phi := -f_1 \in H^1_*(0,l) \qquad \text{e} \qquad \Psi := -f_3 \in H^1_0(0,l).$$

Considere

$$\eta(s) = \int_0^s f_6(\xi)\, d\xi + s\Psi, \tag{4.25}$$

consequentemente $\eta(0) = 0$ e ainda η satisfaz a igualdade (4.24), pois, devido ao Corolário 2.45 segue que

$$\eta_s = f_6 + \Psi.$$

Neste instante será provado que η definida em (4.25) pertence a $L^2_g\big(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l)\big)$. Com efeito, se $y \in (0, +\infty)$, então usando as hipóteses impostas sobre g em (4.7) e integrando por partes, tem-se

$$\begin{aligned} \int_y^{1/y} g(s)\|\eta_x(s)\|^2_{L^2}\, ds &\leq -\frac{1}{k_1}\int_y^{1/y} g'(s)\|\eta_x(s)\|^2_{L^2}\, ds \\ &= -\frac{1}{k_1}\bigg(g(s)\|\eta_x(s)\|^2_{L^2}\bigg|_y^{1/y} - \int_y^{1/y} g(s)\frac{d}{ds}\|\eta_x(s)\|^2_{L^2}\, ds\bigg). \end{aligned} \tag{4.26}$$

Repare que, da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, resulta que

$$\frac{d}{ds}\|\eta_x(s)\|^2_{L^2} = 2\,\mathrm{Re}\,\big(\eta_x(s), \eta_{xs}(s)\big)_{L^2} \leq 2\big|\big(\eta_x(s), \eta_{xs}(s)\big)_{L^2}\big| \leq 2\|\eta_x(s)\|_{L^2}\|\eta_{xs}(s)\|_{L^2},$$

e $-g(1/y)\|\eta_x(1/y)\|^2_{L^2} \leq 0$. Consequentemente, tem-se em (4.26) que

$$\int_y^{1/y} g(s)\|\eta_x(s)\|^2_{L^2}\, ds \leq \frac{1}{k_1}g(y)\|\eta_x(y)\|^2_{L^2} + \frac{2}{k_1}\int_y^{1/y} g(s)\|\eta_x(s)\|_{L^2}\|\eta_{xs}(s)\|_{L^2}\, ds.$$

Mais ainda, utilizando a Desigualdade de Young com $\varepsilon = \dfrac{k_1}{4}$, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_y^{1/y} g(s)\|\eta_x(s)\|^2_{L^2}\, ds &\leq \frac{1}{k_1}g(y)\|\eta_x(y)\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\int_y^{1/y} g(s)\|\eta_x(s)\|^2_{L^2}\, ds \\ &\quad + \frac{2}{k_1^2}\int_y^{1/y} g(s)\|\eta_{xs}(s)\|^2_{L^2}\, ds, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\int_y^{1/y} g(s)\|\eta_x(s)\|^2_{L^2}\, ds \leq \frac{2}{k_1}g(y)\|\eta_x(y)\|^2_{L^2} + \frac{4}{k_1^2}\int_y^{1/y} g(s)\|\eta_{xs}(s)\|^2_{L^2}\, ds.$$

Como visto em (4.12), $g(y)\|\eta_x(y)\|^2_{L^2} \longrightarrow 0$ quando $y \longrightarrow 0$. Assim,

$$\int_0^\infty g(s)\|\eta_x(s)\|^2_{L^2}\,ds \leq \frac{4}{k_1^2}\int_0^\infty g(s)\|\eta_{xs}(s)\|^2_{L^2}\,ds = \frac{4}{k_1^2}\|\eta_s\|^2_{L^2_g(H^1_0)} < \infty, \tag{4.27}$$

isto é, $\eta \in L^2_g\big(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l)\big)$, como desejado. Por outro lado, veja que devido ao Corolário 2.45, a função

$$\begin{aligned} \theta(x) \;&=\; -\frac{\delta}{l\tilde{\beta}}\int_0^l\int_0^x \Psi(w)\,dw\,dx + \frac{\rho_3}{l\tilde{\beta}}\int_0^l\int_0^x\int_0^w f_5(y)\,dy\,dw\,dx \\ &\quad +\frac{\delta}{\tilde{\beta}}\int_0^x \Psi(w)\,dw - \frac{\rho_3}{\tilde{\beta}}\int_0^x\int_0^w f_5(y)\,dy\,dw, \end{aligned} \tag{4.28}$$

pertence ao espaço $H^2(0,l)$, mais ainda, tem-se que

$$\theta_x(x) = \frac{\delta}{\tilde{\beta}}\Psi(x) - \frac{\rho_3}{\tilde{\beta}}\int_0^x f_5(y)\,dy$$

e

$$\theta_{xx} = \frac{\delta}{\tilde{\beta}}\Psi_x - \frac{\rho_3}{\tilde{\beta}}f_5. \tag{4.29}$$

Consequentemente, é fácil verificar que θ definida em (4.28) é tal que

$$\frac{1}{l}\int_0^l \theta(x)\,dx = 0,$$

isto é, $\theta \in H^1_*(0,l)$. Além disso, uma vez que $\Psi \in H^1_0(0,l)$ e $f_5 \in H^1_*(0,l)$, seque que $\theta_x \in H^1_0(0,l)$.

A essa altura, restam exibir φ e ψ que satisfaçam as equações (4.20) e (4.22), e respeitem as condições exigidas pelo domínio do operador A_1. Para isto, observe inicialmente que devido ao Lema 4.2,

$$\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds \in H^{-1}(0,l),$$

e além disso,

$$\left\langle \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds, \tilde{\psi}\right\rangle = -\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)ds, \tilde{\psi}_x\right)_{L^2}, \quad \forall\, \tilde{\psi} \in H^1_0(0,l).$$

À vista disso, defina

$$g_1 = \rho_1 f_2 \in L^2_*(0,l) \quad \text{e} \quad g_2 = \rho_2 f_4 + \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds - \delta\theta_x,$$

e recorde que $H^1_0(0,l) \subset L^2(0,l) \cong \big[L^2(0,l)\big]' \subset H^{-1}(0,l)$. Por este motivo tem-se que g_2, dado por

$$\begin{aligned} g_2 : H_0^1(0,l) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \tilde{\psi} &\longmapsto \langle g_2, \tilde{\psi} \rangle = \rho_2\big(f_4, \tilde{\psi}\big)_{L^2} - \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)ds, \tilde{\psi}_x \right)_{L^2} - \delta\big(\theta_x, \tilde{\psi}\big)_{L^2}, \end{aligned}$$

é um funcional antilinear e limitado. Deste modo, segue do Lema 4.3 que existe único par de funções (φ, ψ) em $H_*^1(0,l) \times H_0^1(0,l)$ que satisfazem

$$-k(\varphi_x + \psi)_x = g_1 \quad \text{em} \quad L^2(0,l), \tag{4.30}$$

$$-\tilde{b}\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = g_2 \quad \text{em} \quad H^{-1}(0,l). \tag{4.31}$$

Além disso, o Lema 4.3 assegura que $\varphi \in H^2(0,l)$ e $\varphi_x \in H_0^1(0,l)$. Usando a igualdade (4.31), tem-se que para todo $\tilde{\psi} \in H_0^1(0,l)$ vale

$$\langle -\tilde{b}\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi), \tilde{\psi} \rangle = \langle g_2, \tilde{\psi} \rangle,$$

mais ainda, da definição de g_2 e do Teorema da Representação de Riesz para $L^2(0,l)$, obtém-se

$$\tilde{b}\big(\psi_x, \tilde{\psi}_x\big)_{L^2} + k\big(\varphi_x + \psi, \tilde{\psi}\big)_{L^2} = \rho_2\big(f_4, \tilde{\psi}\big)_{L^2} - \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\, ds, \tilde{\psi}_x \right)_{L^2} - \delta\big(\theta_x, \tilde{\psi}\big)_{L^2}, \tag{4.32}$$

para toda $\tilde{\psi}$ em $H_0^1(0,l)$. Note que, em particular, a identidade (4.32) vale para toda função $\tilde{\psi} \in C_0^1(0,l) \subset H_0^1(0,l)$, isto é,

$$\left(\tilde{b}\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\, ds, \tilde{\psi}_x \right)_{L^2} = -\big(k(\varphi_x + \psi) - \rho_2 f_4 + \delta\theta_x, \tilde{\psi}\big)_{L^2}, \quad \forall\, \tilde{\psi} \in C_0^1(0,l).$$

Consequentemente, via definição de derivada fraca segue que

$$\tilde{b}\psi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\, ds = k(\varphi_x + \psi) - \rho_2 f_4 + \delta\theta_x \quad \text{em} \quad L^2(0,l),$$

e ainda,

$$\tilde{b}\psi + \int_0^\infty g(s)\eta(s)\, ds \in H^2(0,l).$$

Portanto, conclui-se que $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \eta) \in D(A_1)$, ou seja, o operador $-A_1$ é sobrejetivo.

Até o momento, foi provado que para cada vetor F no espaço $\mathcal{H}_1$ existe pelo menos um vetor U no domínio de A_1 tal que $-A_1\, U = F$. No que segue, será mostrado que existe um único U satisfazendo tal relação, ou seja, objetiva-se provar que o operador A_1 é injetor. Para tal propósito, é suficiente provar que $\mathrm{Nuc}(-A_1) = \{0\}$, ou melhor dizendo, se $U \in D(A_1)$ é tal que $-A_1\, U = 0$, então U é o vetor nulo do espaço $\mathcal{H}_1$. Assim, escrevendo

$-A_1 U = 0$ em termos de seus componentes, tem-se

$$\begin{aligned}
-\Phi &= 0, && (4.33)\\
-k(\varphi_x + \psi)_x &= 0, && (4.34)\\
-\Psi &= 0, && (4.35)\\
-\tilde{b}\psi_{xx} - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x &= 0, && (4.36)\\
-\tilde{\beta}\theta_{xx} + \delta\Psi_x &= 0, && (4.37)\\
-\Psi + \eta_s &= 0. && (4.38)
\end{aligned}$$

Utilizando (4.35) em (4.37), vem que $\theta_{xx} = 0$ em $L^2(0,l)$. Mais ainda, da Desigualdade de Poincaré tem-se

$$\|\theta\|_{L^2} \leq l\|\theta_x\|_{L^2} \leq l^2\|\theta_{xx}\|_{L^2},$$

logo, $\theta = 0$ em $L^2_*(0,l)$. Além disso, usando que $\Psi = 0$ obtém-se da equação (4.38) que $\eta_s = 0$ em $L^2_g\big(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l)\big)$, porém, lembre que de (4.27) vem que

$$\|\eta\|^2_{L^2_g(H^1_0)} \leq \frac{4}{k_1^2}\|\eta_s\|^2_{L^2_g(H^1_0)} = 0,$$

ou seja, η é o vetor nulo de $L^2_g\big(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l)\big)$. Resta mostrar que as funções φ e ψ são os vetores nulos de seus respectivos espaços, para isso, considere $g_1 = 0 \in L^2_*(0,l)$ e $g_2 = 0$ o funcional nulo definido em $H^1_0(0,l)$, isto é, o vetor nulo de $H^{-1}(0,l)$. Assim, o Lema 4.3 garante que existem únicas φ e ψ em $H^1_*(0,l)$ e $H^1_0(0,l)$ respectivamente, que verificam as igualdades

$$-k(\varphi_x + \psi)_x = g_1 = 0 \quad \text{em} \quad L^2(0,l), \tag{4.39}$$

$$-\tilde{b}\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = g_2 = 0 \quad \text{em} \quad H^{-1}(0,l). \tag{4.40}$$

Contudo, observe que o par $(\hat{\varphi}, \hat{\psi}) = (0,0)$ satisfaz as equações (4.39)-(4.40), portanto, conclui-se da unicidade garantida pelo Lema 4.3 que $(\varphi, \psi) = (\hat{\varphi}, \hat{\psi}) = (0,0)$. Por conseguinte, tem-se que $U = 0$ e o operador $-A_1$ é injetor.

Da bijetividade do operador $-A_1$ decorre que seu inverso existe e, consequentemente, resta ser provado que $(-A_1)^{-1}$ é um operador limitado. Para tanto, é suficiente mostrar que existe uma constante C positiva tal que $\|(-A_1)^{-1}F\|_{\mathcal{H}_1} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_1}$ para todo $F \in \mathcal{H}_1$. Contudo, note que para cada $F \in \mathcal{H}_1$ existe único $U \in D(A_1)$ tal que $(-A_1)^{-1}F = U$, ou seja, provar a limitação de $(-A_1)^{-1}$ se resume a mostrar que existe uma constante C positiva tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_1} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall\, F \in \mathcal{H}_1,$$

onde U é a solução da equação resolvente $-A_1\,U = F$. Inicialmente lembre que

$$\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2 = \rho_1\|f_2\|_{L^2}^2 + \rho_2\|f_4\|_{L^2}^2 + \tilde{b}\|f_{3,x}\|_{L^2}^2 + k\|f_{1,x} + f_3\|_{L^2}^2 + \rho_3\|f_5\|_{L^2}^2 + \|f_6\|_{L_g^2(H_0^1)}^2.$$

Com isto em mente, note que a equação (4.19) fornece $-\Phi = f_1$, consequentemente, vem que $\|\Phi\|_{L^2}^2 = \|f_1\|_{L^2}^2$. Mais ainda, usando a Desigualdade de Poincaré, somando e subtraindo f_3 e aplicando a Desigualdade Triangular, segue que

$$\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 = \rho_1\|f_1\|_{L^2}^2 \leq \rho_1 l^2\|f_{1,x}\|_{L^2}^2 \leq \rho_1 l^2\big(\|f_{1,x} + f_3\|_{L^2} + l\|f_{3,x}\|_{L^2}\big)^2.$$

Fazendo uso da segunda desigualdade fornecida pelo Lema 2.29, obtém-se

$$\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 \leq 2\rho_1 l^2\|f_{1,x} + f_3\|_{L^2}^2 + 2\rho_1 l^4\|f_{3,x}\|_{L^2}^2 \leq \left[\frac{2\rho_1 l^2}{k} + \frac{2\rho_1 l^4}{\tilde{b}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2. \tag{4.41}$$

Além disso, a identidade (4.21) permite obter estimativas para $\rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2$, a saber

$$\rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 = \rho_2\|f_3\|_{L^2}^2 \leq \rho_2 l^2\|f_{3,x}\|_{L^2}^2 = \frac{\rho_2 l^2}{\tilde{b}}\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2. \tag{4.42}$$

Neste instante, será utilizada uma identidade apresentada no Lema 4.1, mais especificamente, tem-se de (4.14) que

$$\tilde{\beta}\|\theta_x\|_{L^2}^2 + \frac{k_1}{2}\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}^2 = \operatorname{Re}\big(-A_1\,U, U\big)_{\mathcal{H}_1},$$

mas, usando que $-A_1\,U = F$, $\operatorname{Re} z \leq |z|$ e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, resulta que

$$\tilde{\beta}\|\theta_x\|_{L^2}^2 + \frac{k_1}{2}\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}^2 = \operatorname{Re}\big(F, U\big)_{\mathcal{H}_1} \leq \big|\big(F, U\big)_{\mathcal{H}_1}\big| \leq \|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.$$

Consequentemente, vem que

$$\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}^2 \leq \frac{2}{k_1}\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}, \tag{4.43}$$

e da Desigualdade de Poincaré, pode-se obter

$$\|\theta\|_{L^2}^2 \leq l^2\|\theta_x\|_{L^2}^2 \leq \frac{l^2}{\tilde{\beta}}\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}. \tag{4.44}$$

Por fim, ao considerar o produto interno de (4.20) com φ em $L^2(0,l)$ e integrar por partes, obtém-se

$$-k\big((\varphi_x + \psi)_x, \varphi\big)_{L^2} = k\big(\varphi_x + \psi, \varphi_x\big)_{L^2} = \rho_1\big(f_2, \varphi\big)_{L^2}. \tag{4.45}$$

Por outro lado, tomando o produto interno de (4.22) com ψ em $L^2(0,l)$ e integrando por partes, resulta que

$$\tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, \psi_x\right)_{L^2} + k\big(\varphi_x + \psi, \psi\big)_{L^2} - \delta\big(\theta, \psi_x\big)_{L^2} = \rho_2\big(f_4, \psi\big)_{L^2}. \quad (4.46)$$

Somando (4.45) com (4.46), segue que

$$\tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, \psi_x\right)_{L^2} + k\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 - \delta\big(\theta, \psi_x\big)_{L^2} = \rho_1\big(f_2, \varphi\big)_{L^2} + \rho_2\big(f_4, \psi\big)_{L^2},$$

ou ainda,

$$\tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}^2 + k\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 = -\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, \psi_x\right)_{L^2} + \delta\big(\theta, \psi_x\big)_{L^2} + \rho_1\big(f_2, \varphi\big)_{L^2} + \rho_2\big(f_4, \psi\big)_{L^2}. \quad (4.47)$$

Considerando o módulo da identidade (4.47) e aplicando a Desigualdade Triangular, vem que

$$\begin{aligned}\tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}^2 + k\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 &\leq \left|\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, \psi_x\right)_{L^2}\right| + \delta\left|\big(\theta, \psi_x\big)_{L^2}\right| \\ &\quad + \rho_1\left|\big(f_2, \varphi\big)_{L^2}\right| + \rho_2\left|\big(f_4, \psi\big)_{L^2}\right|,\end{aligned}$$

mais ainda, das desigualdades de Cauchy-Schwarz e Hölder, resulta que

$$\begin{aligned}\tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}^2 + k\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 &\leq \sqrt{b_0}\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}\|\psi_x\|_{L^2} + \delta\|\theta\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2} \\ &\quad + \rho_1\|f_2\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} + \rho_2\|f_4\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Poincaré, somando e subtraindo ψ, obtém-se

$$\begin{aligned}\tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}^2 + k\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 &\leq \sqrt{b_0}\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}\|\psi_x\|_{L^2} + \delta\|\theta\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2} + \rho_1 l\|f_2\|_{L^2}\|\varphi_x + \psi\|_{L^2} \\ &\quad + \rho_1 l^2\|f_2\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2} + \rho_2 l\|f_4\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2} \\ &\leq \frac{\sqrt{b_0}}{\sqrt{\tilde{b}}}\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}\|U\|_{\mathcal{H}_1} + \frac{\delta}{\sqrt{\tilde{b}}}\|\theta\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}_1} \\ &\quad + \left[\frac{\sqrt{\rho_1}l}{\sqrt{k}} + \frac{\sqrt{\rho_1}l^2}{\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{\sqrt{\rho_2}l}{\sqrt{\tilde{b}}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}. \quad (4.48)\end{aligned}$$

Finalmente, usando a estimativa (4.48), vem que

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 &= \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2+\rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2+\tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}^2+k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2+\rho_3\|\theta\|_{L^2}^2+\|\eta\|_{L_g^2}^2\\ &\leq \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2+\rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2+\rho_3\|\theta\|_{L^2}^2+\|\eta\|_{L_g^2}^2+\frac{\sqrt{b_0}}{\sqrt{\tilde{b}}}\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}\|U\|_{\mathcal{H}_1}\\ &\quad+\frac{\delta}{\sqrt{\tilde{b}}}\|\theta\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}_1}+\left[\frac{\sqrt{\rho_1}l}{\sqrt{k}}+\frac{\sqrt{\rho_1}l^2}{\sqrt{\tilde{b}}}+\frac{\sqrt{\rho_2}l}{\sqrt{\tilde{b}}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.\end{aligned}$$

Utilizando a Desigualdade de Young com $\varepsilon=1/4$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 &\leq \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2+\rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2+\left[\rho_3+\frac{\delta^2}{\tilde{b}}\right]\|\theta\|_{L^2}^2+\left[1+\frac{b_0}{\tilde{b}}\right]\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}^2\\ &\quad+\left[\frac{\sqrt{\rho_1}l}{\sqrt{k}}+\frac{\sqrt{\rho_1}l^2}{\sqrt{\tilde{b}}}+\frac{\sqrt{\rho_2}l}{\sqrt{\tilde{b}}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.\end{aligned}$$

Mais ainda, fazendo uso das estimativas (4.41)-(4.44), pode-se obter

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 &\leq \left[\frac{2\rho_1l^2}{k}+\frac{2\rho_1l^4}{\tilde{b}}+\frac{\rho_2l^2}{\tilde{b}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2\\ &\quad+\left[\frac{\sqrt{\rho_1}l}{\sqrt{k}}+\frac{\sqrt{\rho_1}l^2}{\sqrt{\tilde{b}}}+\frac{\sqrt{\rho_2}l}{\sqrt{\tilde{b}}}+\frac{l^2}{\tilde{\beta}}\left(\rho_3+\frac{\delta^2}{\tilde{b}}\right)+\frac{2}{k_1}\left(1+\frac{b_0}{\tilde{b}}\right)\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.\end{aligned}$$

Aplicando mais uma vez a Desigualdade de Young com $\varepsilon=1/4$, resulta que

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 &\leq \left[\frac{2\rho_1l^2}{k}+\frac{2\rho_1l^4}{\tilde{b}}+\frac{\rho_2l^2}{\tilde{b}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2\\ &\quad+\left[\frac{\sqrt{\rho_1}l}{\sqrt{k}}+\frac{\sqrt{\rho_1}l^2}{\sqrt{\tilde{b}}}+\frac{\sqrt{\rho_2}l}{\sqrt{\tilde{b}}}+\frac{l^2}{\tilde{\beta}}\left(\rho_3+\frac{\delta^2}{\tilde{b}}\right)+\frac{2}{k_1}\left(1+\frac{b_0}{\tilde{b}}\right)\right]^2\|F\|_{\mathcal{H}_1}^2.\end{aligned}$$

Assim, fica provado que existe uma constante C positiva tal que $\|U\|_{\mathcal{H}_1}\leq C\|F\|_{\mathcal{H}_1}$, onde

$$\frac{C^2}{4}=\frac{2\rho_1l^2}{k}+\frac{2\rho_1l^4}{\tilde{b}}+\frac{\rho_2l^2}{\tilde{b}}+\left[\frac{\sqrt{\rho_1}l}{\sqrt{k}}+\frac{\sqrt{\rho_1}l^2}{\sqrt{\tilde{b}}}+\frac{\sqrt{\rho_2}l}{\sqrt{\tilde{b}}}+\frac{l^2}{\tilde{\beta}}\left(\rho_3+\frac{\delta^2}{\tilde{b}}\right)+\frac{2}{k_1}\left(1+\frac{b_0}{\tilde{b}}\right)\right]^2.$$

Com isto posto, conclui-se que o operador $(-A_1)^{-1}$ é limitado e, consequentemente, $0\in\varrho(A_1)$, como desejado. ∎

Teorema 4.5. *Se g é uma função que satisfaz as hipóteses* (4.7)*, então o operador A_1 é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações.*

Demonstração. Face ao resultado de Lumer-Phillips, basta mostrar que A_1 é linear, dissipativo,

$\overline{D(A_1)} = \mathcal{H}_1$ e que existe λ_0 positivo tal que $\mathrm{Im}(\lambda_0 I - A_1) = \mathcal{H}_1$. A linearidade é facilmente verificada, já do Lema 4.1 segue a dissipatividade do operador A_1. Deste modo, defina S como sendo o operador identidade do espaço $\mathcal{H}_1$. Obviamente S é linear, limitado e invertível com $\|S\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} = \|S^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} = 1$. Defina também $B = \lambda_0(-A_1)^{-1}$ e observe que em virtude do Lema 4.4 vem que B é linear e limitado para qualquer $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Além disso, se

$$|\lambda_0| < \frac{1}{\|(-A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}}, \tag{4.49}$$

então

$$\|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} = |\lambda_0| \|(-A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} < 1 = \frac{1}{\|S^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}}.$$

Deste modo, segue do Teorema 2.21 que se λ_0 satisfaz (4.49), então $S + B = I + \lambda_0(-A_1)^{-1}$ é um operador linear, limitado e invertível. Mais ainda, conclui-se que o operador $\lambda_0 I - A_1$ é bijetor, uma vez que pode ser escrito como a composição de operadores bijetores

$$\lambda_0 I - A_1 = -A_1\big(I + \lambda_0(-A_1)^{-1}\big).$$

Portanto, existe λ_0 real positivo e suficientemente pequeno tal que $\mathrm{Im}(\lambda_0 I - A_1) = \mathcal{H}_1$ e, como consequência do Teorema 2.61, resulta que o operador $\lambda_0 I - A_1$ é sobrejetor para qualquer λ_0 real positivo, em particular para $\lambda_0 = 1$. Assim, do Teorema 2.62 obtém-se que $\overline{D(A_1)} = \mathcal{H}_1$, encerrando a prova do Teorema 4.5. ■

Desta forma, segue o resultado mais esperado da seção.

Teorema 4.6. *(Existência e Unicidade) Se g satisfaz* (4.7) *e $U_0 \in D(A_1)$, então o problema de Cauchy abstrato* (4.5) *possui uma única solução U na classe*

$$U \in C\big([0,\infty); D(A_1)\big) \cap C^1\big([0,\infty); \mathcal{H}_1\big).$$

Além disso,

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_1} \leq \|U_0\|_{\mathcal{H}_1} \quad e \quad \|U_t(t)\|_{\mathcal{H}_1} = \|A_1 U(t)\|_{\mathcal{H}_1} \leq \|A_1 U_0\|_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Demonstração. Basta aplicar o resultado obtido no Teorema 4.5 ao Teorema 2.69 que a demonstração segue. ■

Teorema 4.7. *(Solução Generalizada) Se g satisfaz* (4.7) *e $U_0 \in \mathcal{H}_1$, então o problema de Cauchy abstrato* (4.5) *possui uma única solução U na classe*

$$U \in C\big([0,\infty); \mathcal{H}_1\big).$$

Demonstração. Segue como consequência imediata do Teorema 2.70. ■

Na próxima seção, inicia-se um estudo buscando obter informações a respeito do comportamento da solução U ao longo do tempo.

4.2 Estabilidade Exponencial

O objetivo desta seção é estabelecer uma condição necessária e suficiente para que o C_0-semigrupo de contrações associado ao sistema de Timoshenko com história e Lei de Fourier seja exponencialmente estável. Para tal propósito, as hipóteses sobre a função núcleo de memória g descritas em (4.7) serão fundamentais.

No que segue, será provado por contradição que $i\mathbb{R} \subset \varrho(A_1)$.

Lema 4.8. *Se g satisfaz as hipóteses dadas em* (4.7)*, então $i\mathbb{R} \subset \varrho(A_1)$.*

Demonstração. Note inicialmente que no Teorema 4.5 ficou provado que se $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que

$$|\lambda| < \frac{1}{\|(-A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}}, \tag{4.50}$$

então o operador $I + \lambda(-A_1)^{-1}$ é um operador linear, limitado e invertível. Consequentemente vem que o operador $\lambda I - A_1$ é invertível, uma vez que pode ser escrito como a composição de operadores bijetores

$$\lambda I - A_1 = -A_1\big(I + \lambda(-A_1)^{-1}\big).$$

Note que devido ao Teorema 2.67 tem-se que A_1 é um operador fechado, mais ainda, usando que para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$ o operador λI é limitado, vem do Teorema 2.26 que

$$\lambda I - A_1 : D(A_1) \subset \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1$$

é um operador linear fechado. Todavia, se $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfaz (4.50), segue do Teorema 2.25 que $(\lambda I - A_1)^{-1}$ também é um operador fechado definido no espaço de Banach $\mathcal{H}_1$. Como consequência do Teorema do Gráfico Fechado (veja Teorema 2.23), vem que $(\lambda I - A_1)^{-1}$ é limitado desde que (4.50) se verifique. Com isto, pode-se concluir que o subconjunto do plano complexo que consiste na bola aberta centrada em 0 e de raio

$$\nu = \frac{1}{\|(-A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}}, \tag{4.51}$$

está inteiramente contido no conjunto resolvente do operador A_1, isto é,

$$B_{\mathbb{C}}(0, \nu) \subset \varrho(A_1). \tag{4.52}$$

Suponha que $i\mathbb{R} \not\subset \varrho(A_1)$ e considere $\omega \in \mathbb{R}$ o número dado por

$$\omega = \inf\left\{|\lambda| \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } i\lambda \notin \varrho(A_1)\right\},$$

com isto, tem-se que $\{i\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } |\lambda| < \omega\} \subset \varrho(A_1)$ e mediante a conclusão obtida em (4.51), vem que $\omega \geq \nu$. Note ainda que para qualquer $\epsilon > 0$, tem-se que

$$\{i\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } |\lambda| < \omega + \epsilon\} \not\subset \varrho(A_1). \tag{4.53}$$

Afirma-se que

$$\sup_{|\lambda|<\omega} \|(i\lambda I - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} = \infty.$$

Com efeito, suponha que

$$\sup_{|\lambda|<\omega} \|(i\lambda I - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} = M < \infty,$$

então para qualquer λ_0 com $|\lambda_0| < \omega$, tem-se $i\lambda_0 \in \varrho(A_1)$ com $\|(i\lambda_0 I - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} \leq M$. Por outro lado, defina S como sendo o operador identidade de $\mathcal{H}_1$ e $B = i(\lambda - \lambda_0)(i\lambda_0 I - A_1)^{-1}$. Observe que se

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{M},$$

então

$$\|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} = |\lambda - \lambda_0| \|(i\lambda_0 I - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} < 1 = \frac{1}{\|S^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}}.$$

Deste modo, vem do Teorema 2.21 que

$$S + B = I + i(\lambda - \lambda_0)(i\lambda_0 I - A_1)^{-1}$$

é um operador linear, limitado e invertível. Segue então, que o operador

$$i\lambda I - A_1 = (i\lambda_0 I - A_1)\big(I + i(\lambda - \lambda_0)(i\lambda_0 I - A_1)^{-1}\big)$$

é um operador linear e invertível, desde que $|\lambda - \lambda_0| < 1/M$. Mais ainda, aplicando o Teorema 2.26 pode-se concluir que

$$i\lambda I - A_1 : D(A_1) \subset \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1$$

é um operador linear fechado. Portanto, se $|\lambda - \lambda_0| < 1/M$, segue do Teorema 2.25 que $(i\lambda I - A_1)^{-1}$ é um operador fechado definido no espaço de Banach $\mathcal{H}_1$. Consequentemente, resulta do Teorema do Gráfico Fechado que $(i\lambda I - A_1)^{-1}$ é limitado desde que $|\lambda - \lambda_0| < 1/M$.

Com isso, conclui-se que para todo λ_0 com $|\lambda_0| < \omega$, o conjunto dos $i\lambda$'s tais que $|\lambda - \lambda_0| < 1/M$ está contido no conjunto resolvente do operador A_1, isto é,

$$\left\{i\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{M}\right\} \subset \varrho(A_1). \tag{4.54}$$

Note que se $1/M > \omega$, então existe um $\epsilon > 0$ tal que $\omega + \epsilon < 1/M$. Assim, para $\lambda_0 = 0$ em (4.54), segue que

$$\left\{ i\lambda \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } |\lambda| < \omega + \epsilon \right\} \subset \left\{ i\lambda \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } |\lambda| < \frac{1}{M} \right\} \subset \varrho(A_1),$$

contrariando (4.53). Por outro lado, para o caso em que $1/M \leq \omega$, será provado que

$$\left\{ i\lambda \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } |\lambda| < \omega + \frac{1}{4M} \right\} \subset \varrho(A_1).$$

De fato, seja $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|\lambda| < \omega + 1/4M$. Se $|\lambda| < \omega$ então $i\lambda \in \varrho(A_1)$. Se

$$\omega \leq \lambda < \omega + \frac{1}{4M} \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \lambda - \omega < \frac{1}{4M}. \tag{4.55}$$

Aqui considere

$$\lambda_0 = \omega - \frac{1}{4M} \quad \Longrightarrow \quad \omega - \lambda_0 = \frac{1}{4M}. \tag{4.56}$$

Desta forma, segue de (4.55) e (4.56) que

$$|\lambda - \lambda_0| \leq |\lambda - \omega| + |\omega - \lambda_0| \leq \frac{1}{2M} < \frac{1}{M},$$

isto é, devido a (4.54) segue que $i\lambda \in \varrho(A_1)$. Para o caso em que $-(\omega + 1/4M) < \lambda \leq -\omega$, basta tomar $\lambda_0 = -\omega + 1/4M$ que pode-se concluir que $i\lambda \in \varrho(A_1)$. Assim, segue que

$$\left\{ i\lambda \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } |\lambda| < \omega + \frac{1}{4M} \right\} \subset \varrho(A_1),$$

o que é um absurdo. Por fim, conclui-se que

$$\sup_{|\lambda| < \omega} \|(i\lambda I - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} = \infty. \tag{4.57}$$

Afirma-se que a função

$$\begin{aligned} \Gamma : (-\omega, \omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\longmapsto \|(i\lambda I - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} \end{aligned}$$

é contínua. Com efeito, dado $\lambda_0 \in (-\omega, \omega)$, note inicialmente que para cada $\lambda \in (-\omega, \omega)$ e $F \in \mathcal{H}_1$ com $F \neq 0$, existem vetores U e $\tilde{U}$ tais que

$$(i\lambda I - A_1)^{-1} F = U \qquad \text{e} \qquad (i\lambda_0 I - A_1)^{-1} F = \tilde{U}. \tag{4.58}$$

Porém, de (4.58) pode-se obter que

$$(i\lambda I - A_1)U = F = (i\lambda_0 I - A_1)\tilde{U},$$

e consequentemente,

$$i\lambda U = i\lambda_0\tilde{U} - A_1(\tilde{U} - U). \tag{4.59}$$

Adicionando $-i\lambda_0 U$ em (4.59), segue que

$$i(\lambda - \lambda_0)U = (i\lambda_0 I - A_1)(\tilde{U} - U),$$

o que implica em

$$i(\lambda - \lambda_0)(i\lambda_0 I - A_1)^{-1}U = \tilde{U} - U.$$

Disto segue que

$$\|\tilde{U} - U\|_{\mathcal{H}_1} = |\lambda - \lambda_0|\|(i\lambda_0 I - A_1)^{-1}U\|_{\mathcal{H}_1}.$$

Todavia, $(i\lambda_0 I - A_1)^{-1}$ é um operador limitado, portanto

$$\|\tilde{U} - U\|_{\mathcal{H}_1} \leq |\lambda - \lambda_0|\|(i\lambda_0 I - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}\|U\|_{\mathcal{H}_1},$$

mais ainda, somando e subtraindo $\tilde{U}$ e aplicando a Desigualdade Triangular, vem que

$$\begin{aligned}\|\tilde{U} - U\|_{\mathcal{H}_1} \leq\ & |\lambda - \lambda_0|\|(i\lambda_0 I - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}\|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}_1} \\ & + |\lambda - \lambda_0|\|(i\lambda_0 I - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}\|\tilde{U}\|_{\mathcal{H}_1}.\end{aligned}$$

Logo, pode-se escrever

$$\left[1 - |\lambda - \lambda_0|\|(i\lambda_0 I - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}\right]\|\tilde{U} - U\|_{\mathcal{H}_1} \leq |\lambda - \lambda_0|\|(i\lambda_0 I - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}\|\tilde{U}\|_{\mathcal{H}_1}. \tag{4.60}$$

Usando que $(i\lambda_0 I - A_1)^{-1}F = \tilde{U}$, e ainda

$$\|\tilde{U}\|_{\mathcal{H}_1} = \|(i\lambda_0 I - A_1)^{-1}F\|_{\mathcal{H}_1} \leq \|(i\lambda_0 I - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}\|F\|_{\mathcal{H}_1}$$

pode-se obter de (4.60) que

$$\left[1 - |\lambda - \lambda_0|\|(i\lambda_0 I - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}\right]\|\tilde{U} - U\|_{\mathcal{H}_1} \leq |\lambda - \lambda_0|\|(i\lambda_0 I - A_1)^{-1}\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}\|F\|_{\mathcal{H}_1}. \tag{4.61}$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, seja

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{\|(i\lambda_0 I - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}},\ \frac{\epsilon}{\|(i\lambda_0 I - A_1)^{-1}\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} + \epsilon\|(i\lambda_0 I - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}}\right\}.$$

Deste modo, se $\lambda \in (-\omega, \omega)$ é tal que $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, então de (4.61) vem que

$$\frac{\|\tilde{U} - U\|_{\mathcal{H}_1}}{\|F\|_{\mathcal{H}_1}} \leq \frac{|\lambda - \lambda_0| \|(i\lambda_0 I - A_1)^{-1}\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}}{1 - |\lambda - \lambda_0| \|(i\lambda_0 I - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}}, \quad \forall F \in \mathcal{H}_1, \ F \neq 0.$$

Consequentemente, segue da definição de norma do espaço $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ e de (4.58) que

$$\|(i\lambda_0 I - A_1)^{-1} - (i\lambda I - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} \leq \frac{|\lambda - \lambda_0| \|(i\lambda_0 I - A_1)^{-1}\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}}{1 - |\lambda - \lambda_0| \|(i\lambda_0 I - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}}. \tag{4.62}$$

Por outro lado, vem da Desigualdade Triangular Inversa que

$$\big|\Gamma(\lambda_0) - \Gamma(\lambda)\big| \leq \|(i\lambda_0 I - A_1)^{-1} - (i\lambda I - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}. \tag{4.63}$$

Assim, usando que

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta \leq \frac{\epsilon}{\|(i\lambda_0 I - A_1)^{-1}\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} + \epsilon \|(i\lambda_0 I - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)}}$$

obtém-se das desigualdades (4.62) e (4.63) que

$$\big|\Gamma(\lambda_0) - \Gamma(\lambda)\big| < \epsilon,$$

isto é, Γ é contínua.

Com isto em mente, observe que de (4.57) pode-se concluir que

$$\lim_{|\lambda| \to \omega} \|(i\lambda I - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} = \infty,$$

visto que para qualquer $\delta \in (0, \omega]$, a função Γ restrita ao conjunto $[\delta - \omega, \omega - \delta]$ é contínua em um compacto, e portanto, sua imagem é limitada. Por conseguinte, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um número real λ_n com $|\lambda_n| < \omega$, tal que

$$\|(i\lambda_n I - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} > n,$$

isto é,

$$\sup_{\substack{F \in \mathcal{H}_1 \\ F \neq 0}} \frac{\|(i\lambda_n I - A_1)^{-1} F\|_{\mathcal{H}_1}}{\|F\|_{\mathcal{H}_1}} > n.$$

Mais precisamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um $F_n \in \mathcal{H}_1$ não nulo, tal que

$$\frac{\|(i\lambda_n I - A_1)^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}_1}}{\|F_n\|_{\mathcal{H}_1}} > n. \tag{4.64}$$

Seja $U_n = \tilde{U}_n / \|\tilde{U}_n\|_{\mathcal{H}_1}$, onde $\tilde{U}_n \in D(A_1)$ é a solução de $(i\lambda_n I - A_1)\tilde{U}_n = F_n$. Com estas notações, é possível reescrever (4.64) como

$$\frac{\|\tilde{U}_n\|_{\mathcal{H}_1}}{\|(i\lambda_n I - A_1)\tilde{U}_n\|_{\mathcal{H}_1}} > n, \tag{4.65}$$

o que implica em

$$\|(i\lambda_n I - A_1)U_n\|_{\mathcal{H}_1} = \frac{\|(i\lambda_n I - A_1)\tilde{U}_n\|_{\mathcal{H}_1}}{\|\tilde{U}_n\|_{\mathcal{H}_1}} < \frac{1}{n}.$$

Ora, mas a desigualdade anterior fornece que $(i\lambda_n I - A_1)U_n \longrightarrow 0$ em $\mathcal{H}_1$. Em suma, foi provado que se $i\mathbb{R} \not\subset \varrho(A_1)$, então existem um número real positivo ω, uma sequência $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $|\lambda_n| < \omega$, $|\lambda_n| \longrightarrow \omega$, e existe uma sequência de funções $U_n \in D(A_1)$ com $\|U_n\|_{\mathcal{H}_1} = 1$, tais que

$$(i\lambda_n I - A_1)U_n \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{H}_1, \tag{4.66}$$

sempre que $n \longrightarrow \infty$. Em termos de suas componentes, (4.66) pode ser escrita como

$$i\lambda_n\varphi_n - \Phi_n \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad H^1_*(0,l), \tag{4.67}$$

$$i\lambda_n\rho_1\Phi_n - k(\varphi_{n,x} + \psi_n)_x \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^2_*(0,l), \tag{4.68}$$

$$i\lambda_n\psi_n - \Psi_n \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad H^1_0(0,l), \tag{4.69}$$

$$i\lambda_n\rho_2\Psi_n - \tilde{b}\psi_{n,xx} - \int_0^\infty g(s)\eta_{n,xx}(s)\,ds + k(\varphi_{n,x} + \psi_n) + \delta\theta_{n,x} \longrightarrow 0 \ \text{em} \ L^2(0,l), \tag{4.70}$$

$$i\lambda_n\rho_3\theta_n - \tilde{\beta}\theta_{n,xx} + \delta\Psi_{n,x} \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^2_*(0,l), \tag{4.71}$$

$$i\lambda_n\eta_n + \eta_{n,s} - \Psi_n \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^2_g\big(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l)\big). \tag{4.72}$$

Inicialmente considere o produto interno de $(i\lambda_n I - A_1)U_n$ com U_n em $\mathcal{H}_1$, isto é,

$$\big(i\lambda_n U_n - A_1\, U_n, U_n\big)_{\mathcal{H}_1} = i\lambda_n\|U_n\|^2_{\mathcal{H}_1} - \big(A_1\, U_n, U_n\big)_{\mathcal{H}_1} \longrightarrow 0.$$

Tomando a parte real da sequência complexa obtida e observando a identidade dada por (4.13), conclui-se que

$$-\operatorname{Re}\big(A_1\, U_n, U_n\big)_{\mathcal{H}_1} = \tilde{\beta}\|\theta_{n,x}\|^2_{L^2} - \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\eta_{n,x}(s)\|^2_{L^2}\,ds \longrightarrow 0.$$

Visto que (4.7) fornece $g'(s) \leq 0$ para todo $s \geq 0$, vem que

$$\tilde{\beta}\|\theta_{n,x}\|^2_{L^2} \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_{n,x}(s)\|^2_{L^2}\,ds \longrightarrow 0, \tag{4.73}$$

mais ainda, usando a definição da norma de $H^1_*(0,l)$ e aplicando a hipótese imposta sobre g, obtém-se respectivamente

$$\theta_n \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad H^1_*(0,l) \quad \text{e} \quad \eta_n \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^2_g\big(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l)\big), \tag{4.74}$$

sempre que $n \longrightarrow \infty$.

Dado que $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, segue da definição da norma do espaço $\mathcal{H}_1$ que a sequência $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0,l)$. O mesmo pode-se concluir a respeito das sequências $\{\Psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\psi_{n,x}\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\varphi_{n,x}+\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no espaço $L^2(0,l)$. Com isso, resulta do Lema 2.12 que o produto interno de (4.67) com $\rho_1\Phi_n$ em $L^2(0,l)$ converge para o vetor nulo de $\mathbb{C}$, mais precisamente

$$\big(i\lambda_n\varphi_n - \Phi_n, \rho_1\Phi_n\big)_{L^2} = i\lambda_n\rho_1\big(\varphi_n,\Phi_n\big)_{L^2} - \rho_1\|\Phi_n\|^2_{L^2} \longrightarrow 0. \tag{4.75}$$

Usando o mesmo argumento para sequência definida em (4.68) com φ_n, obtém-se

$$\big(i\lambda_n\rho_1\Phi_n - k(\varphi_{n,x}+\psi_n)_x, \varphi_n\big)_{L^2} = i\lambda_n\rho_1\big(\Phi_n,\varphi_n\big)_{L^2} - k\big((\varphi_{n,x}+\psi_n)_x,\varphi_n\big)_{L^2} \longrightarrow 0,$$

onde integrando por partes e considerando que $\varphi_{n,x}$ e ψ_n pertencem ao espaço $H^1_0(0,l)$, segue que

$$i\lambda_n\rho_1\big(\Phi_n,\varphi_n\big)_{L^2} + k\big(\varphi_{n,x}+\psi_n,\varphi_{n,x}\big)_{L^2} \longrightarrow 0. \tag{4.76}$$

Somando (4.75) com (4.76), vem que

$$i\lambda_n\rho_1\Big[\big(\varphi_n,\Phi_n\big)_{L^2} + \big(\Phi_n,\varphi_n\big)_{L^2}\Big] - \rho_1\|\Phi_n\|^2_{L^2} + k\big(\varphi_{n,x}+\psi_n,\varphi_{n,x}\big)_{L^2} \longrightarrow 0.$$

Tomando a parte real e lembrando que se $z\in\mathbb{C}$, então $z+\overline{z} = 2\operatorname{Re} z$, resulta que

$$-\rho_1\|\Phi_n\|^2_{L^2} + k\operatorname{Re}\big(\varphi_{n,x}+\psi_n,\varphi_{n,x}\big)_{L^2} \longrightarrow 0. \tag{4.77}$$

Por outro lado, tomando o produto interno em $L^2(0,l)$ de (4.69) com $\rho_2\Psi_n$, obtém-se

$$\big(i\lambda_n\psi_n - \Psi_n, \rho_2\Psi_n\big)_{L^2} = i\lambda_n\rho_2\big(\psi_n,\Psi_n\big)_{L^2} - \rho_2\|\Psi_n\|^2_{L^2} \longrightarrow 0. \tag{4.78}$$

Tomando o produto interno em $L^2(0,l)$ de (4.70) com ψ_n, origina-se

$$\begin{aligned}&\left(i\lambda_n\rho_2\Psi_n - \tilde{b}\psi_{n,xx} - \int_0^\infty g(s)\eta_{n,xx}(s)\,ds + k(\varphi_{n,x}+\psi_n) + \delta\theta_{n,x}, \psi_n\right)_{L^2}\\ &= i\lambda_n\rho_2\big(\Psi_n,\psi_n\big)_{L^2} - \tilde{b}\big(\psi_{n,xx},\psi_n\big)_{L^2} - \left(\int_0^\infty g(s)\eta_{n,xx}(s)\,ds,\psi_n\right)_{L^2}\\ &\quad + k\big(\varphi_{n,x}+\psi_n,\psi_n\big)_{L^2} + \delta\big(\theta_{n,x},\psi_n\big)_{L^2} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Notando que $\psi_n \in H_0^1(0,l)$ e integrando por partes, vem que

$$i\lambda_n\rho_2\big(\Psi_n,\psi_n\big)_{L^2}+\tilde{b}\|\psi_{n,x}\|_{L^2}^2+\left(\int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(s)\,ds,\psi_{n,x}\right)_{L^2} \\ +k\big(\varphi_{n,x}+\psi_n,\psi_n\big)_{L^2}-\delta\big(\theta_n,\psi_{n,x}\big)_{L^2}\longrightarrow 0. \tag{4.79}$$

Neste momento, observe que $\displaystyle\int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(s)\,ds \longrightarrow 0$ em $L^2(0,l)$ visto que usando a Desigualdade de Hölder, obtém-se

$$\left\|\int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(s)\,ds\right\|_{L^2}\leq\int_0^\infty g(s)\|\eta_{n,x}(s)\|_{L^2}\,ds\leq\sqrt{b_0}\|\eta_n\|_{L_g^2(H_0^1)}\longrightarrow 0. \tag{4.80}$$

Com isto em mente e lembrando que $\theta_n \longrightarrow 0$ em $H_*^1(0,l)\hookrightarrow L^2(0,l)$, vem que

$$\left(\int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(s)ds,\psi_{n,x}\right)_{L^2}-\delta\big(\theta_n,\psi_{n,x}\big)_{L^2}\longrightarrow 0.$$

Assim, de (4.79) resulta que

$$i\lambda_n\rho_2\big(\Psi_n,\psi_n\big)_{L^2}+\tilde{b}\|\psi_{n,x}\|_{L^2}^2+k\big(\varphi_{n,x}+\psi_n,\psi_n\big)_{L^2}\longrightarrow 0. \tag{4.81}$$

Por fim, somando (4.78) com (4.81), obtém-se

$$i\lambda_n\rho_2\Big[\big(\psi_n,\Psi_n\big)_{L^2}+\big(\Psi_n,\psi_n\big)_{L^2}\Big]-\rho_2\|\Psi_n\|_{L^2}^2+\tilde{b}\|\psi_{n,x}\|_{L^2}^2+k\big(\varphi_{n,x}+\psi_n,\psi_n\big)_{L^2}\longrightarrow 0,$$

e tomando a parte real, segue que

$$-\rho_2\|\Psi_n\|_{L^2}^2+\tilde{b}\|\psi_{n,x}\|_{L^2}^2+k\,\mathrm{Re}\,\big(\varphi_{n,x}+\psi_n,\psi_n\big)_{L^2}\longrightarrow 0. \tag{4.82}$$

Agora, somando (4.77) com (4.82), deduz-se que

$$k\|\varphi_{n,x}+\psi_n\|_{L^2}^2+\tilde{b}\|\psi_{n,x}\|_{L^2}^2-\rho_1\|\Phi_n\|_{L^2}^2-\rho_2\|\Psi_n\|_{L^2}^2\longrightarrow 0. \tag{4.83}$$

Entretanto, usando que $\|U_n\|_{\mathcal{H}_2}=1$ e as convergências fornecidas em (4.74), vem que

$$\rho_1\|\Phi_n\|_{L^2}^2+\rho_2\|\Psi_n\|_{L^2}^2+k\|\varphi_{n,x}+\psi_n\|_{L^2}^2+\tilde{b}\|\psi_{n,x}\|_{L^2}^2\longrightarrow 1, \tag{4.84}$$

e ainda, ao somar (4.83) com (4.84) obtém-se

$$2k\|\varphi_{n,x}+\psi_n\|_{L^2}^2+2\tilde{b}\|\psi_{n,x}\|_{L^2}^2\longrightarrow 1,$$

ou melhor dizendo,

$$k\|\varphi_{n,x}+\psi_n\|_{L^2}^2+\tilde{b}\|\psi_{n,x}\|_{L^2}^2\longrightarrow \frac{1}{2}. \tag{4.85}$$

Considere para cada n a função $\zeta_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow H_0^1(0,l)$ dada por $\zeta_n(s) = \dfrac{\Psi_n}{\lambda_n^2}$. A seguir, será provado que a sequência $\{\zeta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L_g^2\big(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,l)\big)$. Para tanto, lembre que $|\lambda_n| \longrightarrow \omega$ quando $n \longrightarrow \infty$ com $\omega \neq 0$ e, consequentemente, $\dfrac{1}{|\lambda_n|} \longrightarrow \dfrac{1}{\omega}$ quando $n \longrightarrow \infty$. Portanto, existe uma uma constante r_1 positiva tal que

$$\left|\frac{1}{\lambda_n}\right| \le r_1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Além disto, de (4.69) vem que

$$i\psi_n - \frac{\Psi_n}{\lambda_n} \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad H_0^1(0,l),$$

isto é, existe uma constante r_2 positiva tal que

$$\left\| i\psi_n - \frac{\Psi_n}{\lambda_n} \right\|_{H_0^1} \le r_2, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Assim, usando a Desigualdade Triangular

$$\left\|\frac{\Psi_n}{\lambda_n}\right\|_{H_0^1} = \left\|\frac{\Psi_n}{\lambda_n} - i\psi_n + i\psi_n\right\|_{H_0^1} \le \left\|\frac{\Psi_n}{\lambda_n} - i\psi_n\right\|_{H_0^1} + \|\psi_{n,x}\|_{L^2} \le r_2 + \frac{1}{\sqrt{\tilde{b}}} =: r_3, \quad (4.86)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por fim, conclui-se que

$$\|\zeta_n\|_{L_g^2(H_0^1)} = \left\|\frac{\Psi_n}{\lambda_n^2}\right\|_{L_g^2(H_0^1)} = \left(\int_0^\infty g(s) \left\|\frac{\Psi_n}{\lambda_n^2}\right\|_{H_0^1}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \le r_1 r_3 \sqrt{b_0}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

ou seja, $\{\zeta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L_g^2\big(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,l)\big)$, como desejado. Deste modo, é pertinente tomar o produto interno de (4.72) com ζ_n em $L_g^2\big(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,l)\big)$. Assim, lembrando do Lema 2.12, segue que

$$\begin{aligned} \big(i\lambda_n\eta_n + \eta_{n,s} - \Psi_n, \zeta_n\big)_{L_g^2(H_0^1)} &= i\left(\eta_n, \frac{\Psi_n}{\lambda_n}\right)_{L_g^2(H_0^1)} + \frac{1}{\lambda_n^2}\big(\eta_{n,s}, \Psi_n\big)_{L_g^2(H_0^1)} \\ &\quad -\frac{1}{\lambda_n^2}\big(\Psi_n, \Psi_n\big)_{L_g^2(H_0^1)} \longrightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Neste instante, serão apresentados argumentos visando obter informações a respeito de (4.87). Inicialmente, observe que ao usar a definição do espaço $L_g^2\big(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,l)\big)$ e a desigualdade (4.86), conclui-se que

$$\left\|\frac{\Psi_n}{\lambda_n}\right\|_{L_g^2(H_0^1)} = \left(\int_0^\infty g(s) \left\|\frac{\Psi_n}{\lambda_n}\right\|_{H_0^1}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \le r_3 \sqrt{b_0},$$

ou seja, $\left\{\dfrac{\Psi_n}{\lambda_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2_g\big(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l)\big)$. Por conseguinte, como $\eta_n \longrightarrow 0$ no espaço em questão, segue do Lema 2.12 que

$$i\left(\eta_n, \frac{\Psi_n}{\lambda_n}\right)_{L^2_g(H^1_0)} \longrightarrow 0. \tag{4.88}$$

Além disso, pelo Teorema de Fubini e integrando por partes, tem-se

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\lambda_n^2}\big(\eta_{n,s}, \Psi_n\big)_{L^2_g(H^1_0)}\right| &= \frac{1}{\lambda_n^2}\left|\int_0^\infty g(s)\int_0^l \eta_{n,sx}(s)\overline{\Psi_n}_{,x}\,dx\,ds\right| \\ &= \frac{1}{\lambda_n^2}\left|\int_0^l\int_0^\infty g(s)\eta_{n,sx}(s)\,ds\overline{\Psi_n}_{,x}\,dx\right|\end{aligned}$$

mas, a Proposição 2.58 garante que

$$\int_0^\infty g(s)\eta_{n,s}(x,s)\,ds = -\int_0^\infty g'(s)\eta_n(x,s)\,ds,$$

consequentemente, vem que

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\lambda_n^2}\big(\eta_{n,s}, \Psi_n\big)_{L^2_g(H^1_0)}\right| &= \frac{1}{\lambda_n^2}\left|\int_0^l\int_0^\infty -g'(s)\eta_{n,x}(s)\,ds\overline{\Psi_n}_{,x}\,dx\right| \\ &= \frac{1}{\lambda_n^2}\left|\int_0^\infty -g'(s)\big(\eta_n(s), \Psi_n\big)_{H^1_0}\,ds\right|.\end{aligned}$$

Aplicando propriedades de integral e as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Hölder, resulta que

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\lambda_n^2}\big(\eta_{n,s}, \Psi_n\big)_{L^2_g(H^1_0)}\right| &\leq \frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^\infty |g'(s)|\left|\big(\eta_n(s), \Psi_n\big)_{H^1_0}\right|ds \\ &\leq \frac{1}{|\lambda_n|}\left\|\frac{\Psi_n}{\lambda_n}\right\|_{H^1_0}\int_0^\infty |g'(s)|\|\eta_n(s)\|_{H^1_0}\,ds \\ &\leq \frac{\sqrt{g(0)}}{|\lambda_n|}\left\|\frac{\Psi_n}{\lambda_n}\right\|_{H^1_0}\left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_n(s)\|^2_{H^1_0}\,ds\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{4.89}$$

Usando a limitação dada em (4.86) e a convergência (4.73), conclui-se que

$$\frac{1}{\lambda_n^2}\big(\eta_{n,s}, \Psi_n\big)_{L^2_g(H^1_0)} \longrightarrow 0. \tag{4.90}$$

Assim, combinando (4.87)-(4.90), tem-se

$$\frac{1}{\lambda_n^2}\big(\Psi_n,\Psi_n\big)_{L^2_g(H^1_0)}=\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^\infty g(s)\big(\Psi_n,\Psi_n\big)_{H^1_0}\,ds=b_0\left\|\frac{\Psi_n}{\lambda_n}\right\|^2_{H^1_0}\longrightarrow 0$$

isto é,

$$\frac{\Psi_n}{\lambda_n}\longrightarrow 0\quad\text{em}\quad H^1_0(0,l). \tag{4.91}$$

Deste modo, dividindo (4.69) por λ_n e usando (4.91), segue que

$$\psi_n\longrightarrow 0\quad\text{em}\quad H^1_0(0,l), \tag{4.92}$$

mais do que isto, de (4.85) vem que

$$k\|\varphi_{n,x}+\psi_n\|^2_{L^2}\longrightarrow\frac{1}{2}. \tag{4.93}$$

Agora, ao multiplicar (4.70) por $\big(\varphi_{n,x}+\psi_n\big)$ em $L^2(0,l)$, usar que $\theta_{n,x}\longrightarrow 0$ em $L^2(0,l)$ e integrar por partes, resulta

$$\begin{aligned}
&i\lambda_n\rho_2\big(\Psi_n,\varphi_{n,x}+\psi_n\big)_{L^2}-\left(\tilde{b}\psi_{n,xx}+\int_0^\infty g(s)\eta_{n,xx}(s)\,ds,\varphi_{n,x}+\psi_n\right)_{L^2}\\
&+k\|\varphi_{n,x}+\psi_n\|^2_{L^2}=i\lambda_n\rho_2\big(\Psi_n,\varphi_{n,x}+\psi_n\big)_{L^2}+k\|\varphi_{n,x}+\psi_n\|^2_{L^2}\\
&+\left(\tilde{b}\psi_{n,x}+\int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(s)\,ds,(\varphi_{n,x}+\psi_n)_x\right)_{L^2}\longrightarrow 0.
\end{aligned} \tag{4.94}$$

Por outro lado, veja que $\{\Theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $\Theta_n=\dfrac{1}{k}\left(\tilde{b}\psi_{n,x}+\displaystyle\int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(s)\,ds\right)$ é uma sequência limitada em $L^2(0,l)$. Com efeito, das desigualdades Triangular e Hölder, tem-se

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\tilde{b}}{k}\psi_{n,x}+\frac{1}{k}\int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(s)\,ds\right\|_{L^2} &\leq \frac{\tilde{b}}{k}\|\psi_{n,x}\|_{L^2}+\frac{1}{k}\left\|\int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(s)\,ds\right\|_{L^2}\\
&\leq \frac{\tilde{b}}{k}\|\psi_{n,x}\|_{L^2}+\frac{1}{k}\int_0^\infty g(s)\|\eta_{n,x}(s)\|_{L^2}\,ds\\
&\leq \frac{\tilde{b}}{k}\|\psi_{n,x}\|_{L^2}+\frac{\sqrt{b_0}}{k}\|\eta_n\|_{L^2_g(H^1_0)}\\
&\leq \frac{\sqrt{\tilde{b}}}{k}+\frac{\sqrt{b_0}}{k}.
\end{aligned}$$

Assim, tomando o produto interno de Θ_n com (4.68) em $L^2(0,l)$, usando o Lema 2.12, conclui-se que

$$\begin{aligned}\big(\Theta_n, i\lambda_n\rho_1\Phi_n - k(\varphi_{n,x}+\psi_n)_x\big)_{L^2} &= -\frac{i\lambda_n\rho_1}{k}\left(\tilde{b}\psi_{n,x} + \int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(s)\,ds, \Phi_n\right)_{L^2} \\ &-\left(\tilde{b}\psi_{n,x} + \int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(s)\,ds, (\varphi_{n,x}+\psi_n)_x\right)_{L^2} \longrightarrow 0.\end{aligned} \tag{4.95}$$

Somando (4.94) e (4.95)

$$i\lambda_n\rho_2\big(\Psi_n, \varphi_{n,x}+\psi_n\big)_{L^2} + k\|\varphi_{n,x}+\psi_n\|_{L^2}^2 - \frac{i\lambda_n\rho_1}{k}\left(\tilde{b}\psi_{n,x} + \int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(s)\,ds, \Phi_n\right)_{L^2} \longrightarrow 0. \tag{4.96}$$

Além disso, observe que de (4.67) é possível obter

$$i\lambda_n\varphi_{n,x} - \Phi_{n,x} \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^2(0,l),$$

e, ao multiplicar por $\rho_2\Psi_n$ em $L^2(0,l)$, resulta que

$$\big(\rho_2\Psi_n, i\lambda_n\varphi_{n,x} - \Phi_{n,x}\big)_{L^2} = -i\lambda_n\rho_2\big(\Psi_n, \varphi_{n,x}\big)_{L^2} - \rho_2\big(\Psi_n, \Phi_{n,x}\big)_{L^2} \longrightarrow 0. \tag{4.97}$$

Tomando o produto interno de (4.69) com $-i\lambda_n\rho_2\psi_n$ em $L^2(0,l)$, tem-se

$$\big(i\lambda_n\psi_n - \Psi_n, -i\lambda_n\rho_2\psi_n\big)_{L^2} = -\lambda_n^2\rho_2\|\psi_n\|_{L^2}^2 - i\lambda_n\rho_2\big(\Psi_n, \psi_n\big)_{L^2} \longrightarrow 0,$$

mas como $\psi_n \longrightarrow 0$ em $H_0^1(0,l)$, resta apenas

$$-i\lambda_n\rho_2\big(\Psi_n, \psi_n\big)_{L^2} \longrightarrow 0, \tag{4.98}$$

Olhando novamente para a norma do espaço $H_0^1(0,l)$, de (4.69) vem que

$$i\lambda_n\psi_{n,x} - \Psi_{n,x} \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^2(0,l),$$

onde, após multiplicar por $\rho_2\Phi_n$ em $L^2(0,l)$, obtém-se

$$\big(i\lambda_n\psi_{n,x} - \Psi_{n,x}, \rho_2\Phi_n\big)_{L^2} = i\lambda_n\rho_2\big(\psi_{n,x}, \Phi_n\big)_{L^2} - \rho_2\big(\Psi_{n,x}, \Phi_n\big)_{L^2} \longrightarrow 0.$$

Integrando por partes, segue que

$$-i\lambda_n\rho_2\big(\psi_n, \Phi_{n,x}\big)_{L^2} + \rho_2\big(\Psi_n, \Phi_{n,x}\big)_{L^2} \longrightarrow 0. \tag{4.99}$$

Por fim, somando (4.96), (4.97), (4.98) e (4.99), tem-se

$$k\|\varphi_{n,x}+\psi_n\|_{L^2}^2-\frac{i\lambda_n\rho_1}{k}\left(\tilde{b}\psi_{n,x}+\int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(s)\,ds,\Phi_n\right)_{L^2}-i\lambda_n\rho_2\big(\psi_n,\Phi_{n,x}\big)_{L^2}\longrightarrow 0. \tag{4.100}$$

Agora, de (4.72) é possível obter a seguinte relação

$$i\lambda_n\eta_{n,x}+\eta_{n,sx}-\Psi_{n,x}\longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^2_g\big(\mathbb{R}^+,L^2(0,l)\big),$$

assim, multiplicando por $\dfrac{\rho_1}{k}\Phi_n$ em $L^2_g\big(\mathbb{R}^+,L^2(0,l)\big)$, deduz-se que

$$\begin{aligned}\left(i\lambda_n\eta_{n,x}+\eta_{n,sx}-\Psi_{n,x},\frac{\rho_1}{k}\Phi_n\right)_{L^2_g(L^2)}&=\frac{i\lambda_n\rho_1}{k}\big(\eta_{n,x},\Phi_n\big)_{L^2_g(L^2)}\\&+\frac{\rho_1}{k}\big(\eta_{n,sx},\Phi_n\big)_{L^2_g(L^2)}-\frac{\rho_1}{k}\big(\Psi_{n,x},\Phi_n\big)_{L^2_g(L^2)}\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Contudo, note que

$$\big(\Psi_{n,x},\Phi_n\big)_{L^2_g(L^2)}=\int_0^\infty g(s)\big(\Psi_{n,x},\Phi_n\big)_{L^2}\,ds=b_0\big(\Psi_{n,x},\Phi_n\big)_{L^2},$$

e portanto,

$$\frac{i\lambda_n\rho_1}{k}\big(\eta_{n,x},\Phi_n\big)_{L^2_g(L^2)}+\frac{\rho_1}{k}\big(\eta_{n,sx},\Phi_n\big)_{L^2_g(L^2)}-\frac{\rho_1 b_0}{k}\big(\Psi_{n,x},\Phi_n\big)_{L^2}\longrightarrow 0. \tag{4.101}$$

Aplicando argumentos análogos aos descritos em (4.89), segue que

$$\left|\frac{\rho_1}{k}\big(\eta_{n,sx},\Phi_n\big)_{L^2_g(L^2)}\right| \leq \frac{\rho_1\sqrt{g(0)}}{k}\|\Phi_n\|_{L^2}\left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_n(s)\|_{H_0^1}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}},$$

à vista disso, usando (4.73), conclui-se

$$\frac{\rho_1}{k}\big(\eta_{n,sx},\Phi_n\big)_{L^2_g(L^2)}\longrightarrow 0.$$

Mais do que isto, lembrando que $\eta_n\longrightarrow 0$ em $L^2_g\big(\mathbb{R}^+,H_0^1(0,l)\big)$, vem que $\eta_{n,x}\longrightarrow 0$ em $L^2_g\big(\mathbb{R}^+,L^2(0,l)\big)$, assim

$$\big(\eta_{n,x},\Phi_n\big)_{L^2_g(L^2)}\longrightarrow 0,$$

e consequentemente, de (4.101) é possível obter

$$\frac{\rho_1 b_0}{k}\big(\Psi_{n,x},\Phi_n\big)_{L^2}\longrightarrow 0. \tag{4.102}$$

Observe também que de (4.69) pode-se chegar a

$$i\lambda_n \psi_{n,x} - \Psi_{n,x} \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^2(0,l),$$

desta forma, tomando o produto interno com $\dfrac{\rho_1 b_0}{k}\Phi_n$ em $L^2(0,l)$ e integrando por partes, resulta que

$$\left(i\lambda_n \psi_{n,x} - \Psi_{n,x}, \frac{\rho_1 b_0}{k}\Phi_n\right)_{L^2} = -\frac{i\lambda_n \rho_1 b_0}{k}\big(\psi_n, \Phi_{n,x}\big)_{L^2} - \frac{\rho_1 b_0}{k}\big(\Psi_{n,x}, \Phi_n\big)_{L^2} \longrightarrow 0,$$

mas, ao usar (4.102) conclui-se

$$\frac{i\lambda_n \rho_1 b_0}{k}\big(\psi_n, \Phi_{n,x}\big)_{L^2} \longrightarrow 0. \tag{4.103}$$

Finalmente, usando (4.80), (4.92) e (4.103) em (4.100), segue que

$$k\|\varphi_{n,x} + \psi_n\|_{L^2}^2 \longrightarrow 0,$$

o que é um absurdo, pois contradiz (4.93). ■

Neste instante, objetiva-se obter resultados que facilitem a verificação do segundo item do Teorema de Prüss (veja Teorema 2.72). Com isto em mente, sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $F \in \mathcal{H}_1$, considere a equação resolvente

$$(i\lambda I - A_1)U = F, \tag{4.104}$$

a qual, em termos de suas componentes pode ser escrita como

$$i\lambda\varphi - \Phi = f_1 \quad \text{em} \quad H_*^1(0,l), \tag{4.105}$$

$$i\lambda\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi)_x = \rho_1 f_2 \quad \text{em} \quad L_*^2(0,l), \tag{4.106}$$

$$i\lambda\psi - \Psi = f_3 \quad \text{em} \quad H_0^1(0,l), \tag{4.107}$$

$$i\lambda\rho_2\Psi - \tilde{b}\psi_{xx} - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x = \rho_2 f_4 \ \text{em} \ L^2(0,l), \tag{4.108}$$

$$i\lambda\rho_3\theta - \tilde{\beta}\theta_{xx} + \delta\Psi_x = \rho_3 f_5 \quad \text{em} \quad L_*^2(0,l), \tag{4.109}$$

$$i\lambda\eta + \eta_s - \Psi = f_6 \quad \text{em} \quad L_g^2\big(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,l)\big). \tag{4.110}$$

Lema 4.9. *Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $U \in D(A_1)$ a solução da equação resolvente* (4.104)*. Se g satisfaz* (4.7)*, então existe uma constante c_1 positiva tal que*

$$\|\theta_x\|_{L^2}^2 + \|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}^2 \leq c_1\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.$$

Demonstração. Considerando o produto interno de F com U em $\mathcal{H}_1$ e usando a equação resolvente (4.104), obtém-se

$$\big(F, U\big)_{\mathcal{H}_1} = i\lambda \|U\|^2_{\mathcal{H}_1} - \big(A_1\, U, U\big)_{\mathcal{H}_1}. \tag{4.111}$$

Considerando a parte real de (4.111), segue que

$$\operatorname{Re}\big(F, U\big)_{\mathcal{H}_1} = -\operatorname{Re}\big(A_1\, U, U\big)_{\mathcal{H}_1}.$$

Pela identidade (4.13), do fato que $\operatorname{Re} z \leq |z|$ e da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, conclui-se que

$$\tilde{\beta}\|\theta_x\|^2_{L^2} - \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\eta_x(s)\|^2_{L^2}\, ds = \operatorname{Re}\big(F, U\big)_{\mathcal{H}_1} \leq \|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}. \tag{4.112}$$

Lembrando que $g'(s) \leq -k_1\, g(s)$, resulta que

$$\tilde{\beta}\|\theta_x\|^2_{L^2} + \frac{k_1}{2}\|\eta\|^2_{L^2_g(H^1_0)} \leq \|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1},$$

e consequentemente

$$\|\theta_x\|^2_{L^2} + \|\eta\|^2_{L^2_g(H^1_0)} \leq c_1\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1},$$

com $c_1 = \dfrac{1}{\tilde{\beta}} + \dfrac{2}{k_1}$. ■

Uma consequência simples e útil do Lema 4.9 é a existência de uma constante positiva c_2 tal que

$$\rho_3\|\theta\|^2_{L^2} + \|\eta\|^2_{L^2_g(H^1_0)} \leq c_2\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}. \tag{4.113}$$

A identidade (4.113) pode ser obtida aplicando a Desigualdade de Poincaré e c_2 é dada por $c_2 = \dfrac{l\rho_3}{\tilde{\beta}} + \dfrac{2}{k_1}$.

Lema 4.10. *Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $U \in D(A_1)$ a solução da equação resolvente* (4.104). *Então*

$$\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|^2_{L^2}\, ds \leq 2\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.$$

Demonstração. Consequência imediata da desigualdade (4.112). ■

Note que do Lema 4.10 pode-se concluir que a função $x \longmapsto \displaystyle\int_0^\infty g'(s)\eta_x(x,s)\, ds$, pertence ao espaço $L^2(0,l)$. Com efeito, aplicando a Desigualdade de Hölder, vem que

$$\left\| \int_0^\infty g'(s)\eta_x(s)\, ds \right\|_{L^2} \leq \int_0^\infty |g'(s)|\, \|\eta_x(s)\|_{L^2}\, ds \leq \sqrt{g(0)}\left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|^2_{L^2}\, ds\right)^{\frac{1}{2}},$$

que, evidentemente, é finito.

Lema 4.11. *Sejam* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $U \in D(A_1)$ *a solução da equação resolvente* (4.104). *Se* g *satisfaz* (4.7)*, então existe uma constante* c_3 *positiva tal que*

$$\rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 \leq c_3\left[\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\big(\|\psi_x\|_{L^2}+\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}\big)+\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}\right].$$

Demonstração. Tomando o produto interno de (4.108) com $\int_0^\infty g(s)\eta(s)\,ds$ em $L^2(0,l)$ e integrando por partes, segue que

$$\left(i\lambda\rho_2\Psi-\tilde{b}\psi_{xx}-\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds+k(\varphi_x+\psi)+\delta\theta_x,\int_0^\infty g(s)\eta(s)\,ds\right)_{L^2}=$$

$$\underbrace{i\lambda\rho_2\left(\Psi,\int_0^\infty g(s)\eta(s)\,ds\right)_{L^2}}_{=:I_1}+\tilde{b}\left(\psi_x,\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds\right)_{L^2}+\left\|\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds\right\|_{L^2}^2$$
$$+k\left(\varphi_x+\psi,\int_0^\infty g(s)\eta(s)\,ds\right)_{L^2}-\delta\left(\theta,\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds\right)_{L^2}=\rho_2\left(f_4,\int_0^\infty g(s)\eta(s)\,ds\right)_{L^2}. \tag{4.114}$$

Mas veja que I_1 pode ser reescrito usando a equação (4.110), como

$$\begin{aligned}I_1 &= -\rho_2\left(\Psi,\int_0^\infty g(s)i\lambda\eta(s)\,ds\right)_{L^2}=-\rho_2\left(\Psi,\int_0^\infty g(s)\big[\Psi-\eta_s(s)+f_6(s)\big]\,ds\right)_{L^2}\\ &= -\rho_2 b_0\|\Psi\|_{L^2}^2+\rho_2\left(\Psi,\int_0^\infty g(s)\eta_s(s)\,ds\right)_{L^2}-\rho_2\left(\Psi,\int_0^\infty g(s)f_6(s)\,ds\right)_{L^2},\end{aligned}$$

e ainda, integrando por partes usando a Proposição 2.58, obtém-se

$$I_1 = -\rho_2 b_0\|\Psi\|_{L^2}^2-\rho_2\left(\Psi,\int_0^\infty g'(s)\eta(s)\,ds\right)_{L^2}-\rho_2\left(\Psi,\int_0^\infty g(s)f_6(s)\,ds\right)_{L^2} \tag{4.115}$$

Substituindo (4.115) em (4.114), vem que

$$-\rho_2 b_0\|\Psi\|_{L^2}^2-\rho_2\left(\Psi,\int_0^\infty g'(s)\eta(s)\,ds\right)_{L^2}-\rho_2\left(\Psi,\int_0^\infty g(s)f_6(s)\,ds\right)_{L^2}$$
$$+\tilde{b}\left(\psi_x,\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds\right)_{L^2}+\left\|\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds\right\|_{L^2}^2+k\left(\varphi_x+\psi,\int_0^\infty g(s)\eta(s)\,ds\right)_{L^2}$$
$$-\delta\left(\theta,\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds\right)_{L^2}=\rho_2\left(f_4,\int_0^\infty g(s)\eta(s)\,ds\right)_{L^2},$$

ou melhor,

$$
\begin{aligned}
\rho_2 b_0\|\Psi\|_{L^2}^2 = -\rho_2\Big(\Psi, \int_0^\infty g'(s)\eta(s)\,ds\Big)_{L^2} - \rho_2\Big(\Psi, \int_0^\infty g(s)f_6(s)\,ds\Big)_{L^2} \\
+\tilde{b}\Big(\psi_x, \int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds\Big)_{L^2} + \Big\|\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds\Big\|_{L^2}^2 + k\Big(\varphi_x+\psi, \int_0^\infty g(s)\eta(s)\,ds\Big)_{L^2} \\
-\delta\Big(\theta, \int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds\Big)_{L^2} - \rho_2\Big(f_4, \int_0^\infty g(s)\eta(s)\,ds\Big)_{L^2}.
\end{aligned}
\tag{4.116}
$$

Tomando a parte real da igualdade (4.116), em seguida usando que $\operatorname{Re} z \leq |z|$ para qualquer z complexo e ainda usando a Desigualdade Triangular, segue que

$$
\begin{aligned}
\rho_2 b_0\|\Psi\|_{L^2}^2 \leq \rho_2\left|\Big(\Psi, \int_0^\infty g'(s)\eta(s)\,ds\Big)_{L^2}\right| + \rho_2\left|\Big(\Psi, \int_0^\infty g(s)f_6(s)\,ds\Big)_{L^2}\right| \\
+\tilde{b}\left|\Big(\psi_x, \int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds\Big)_{L^2}\right| + \Big\|\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds\Big\|_{L^2}^2 + k\left|\Big(\varphi_x+\psi, \int_0^\infty g(s)\eta(s)\,ds\Big)_{L^2}\right| \\
+\delta\left|\Big(\theta, \int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds\Big)_{L^2}\right| + \rho_2\left|\Big(f_4, \int_0^\infty g(s)\eta(s)\,ds\Big)_{L^2}\right|.
\end{aligned}
$$

Fazendo uso da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, resulta que

$$
\begin{aligned}
\rho_2 b_0\|\Psi\|_{L^2}^2 \leq \rho_2\|\Psi\|_{L^2}\Big\|\int_0^\infty g'(s)\eta(s)\,ds\Big\|_{L^2} + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}\Big\|\int_0^\infty g(s)f_6(s)\,ds\Big\|_{L^2} \\
+\tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}\Big\|\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds\Big\|_{L^2} + \Big\|\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds\Big\|_{L^2}^2 + k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}\Big\|\int_0^\infty g(s)\eta(s)\,ds\Big\|_{L^2} \\
+\delta\|\theta\|_{L^2}\Big\|\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds\Big\|_{L^2} + \rho_2\|f_4\|_{L^2}\Big\|\int_0^\infty g(s)\eta(s)\,ds\Big\|_{L^2}.
\end{aligned}
\tag{4.117}
$$

Contudo, veja que das propriedades de integrais e das desigualdades de Hölder e Poincaré, pode-se fazer as seguintes estimativas,

$$
\Big\|\int_0^\infty g'(s)\eta(s)\,ds\Big\|_{L^2} \leq \int_0^\infty |g'(s)|\,\|\eta(s)\|_{L^2}\,ds \leq l\sqrt{g(0)}\,\left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|_{L^2}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}
\tag{4.118}
$$

e

$$
\Big\|\int_0^\infty g(s)f_6(s)\,ds\Big\|_{L^2} \leq l\sqrt{b_0}\,\left(\int_0^\infty g(s)\|f_{6,x}(s)\|_{L^2}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} = l\sqrt{b_0}\,\|f_6\|_{L_g^2(H_0^1)}.
\tag{4.119}
$$

Utilizando o argumento empregado em (4.119) na desigualdade (4.117), segue que

$$
\begin{aligned}
\rho_2 b_0\|\Psi\|_{L^2}^2 &\leq \rho_2 l\sqrt{g(0)}\|\Psi\|_{L^2}\left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|_{L^2}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} + \rho_2 l\sqrt{b_0}\|\Psi\|_{L^2}\|f_6\|_{L_g^2(H_0^1)} \\
&\quad + \tilde{b}\sqrt{b_0}\|\psi_x\|_{L^2}\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)} + b_0\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}^2 + kl\sqrt{b_0}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)} \\
&\quad + \delta\sqrt{b_0}\|\theta\|_{L^2}\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)} + \rho_2 l\sqrt{b_0}\|f_4\|_{L^2}\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)} \\
&\leq \rho_2 l\sqrt{g(0)}\|\Psi\|_{L^2}\left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|_{L^2}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} + \tilde{b}\sqrt{b_0}\|\psi_x\|_{L^2}\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)} \\
&\quad + b_0\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}^2 + kl\sqrt{b_0}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)} + \delta l\sqrt{b_0}\|\theta_x\|_{L^2}\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)} \\
&\quad + 2l\sqrt{\rho_2}\sqrt{b_0}\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.
\end{aligned}
$$

Aplicando a Desigualdade de Young com $\varepsilon = \rho_2 b_0/2$ e usando o Lema 4.9, vem que

$$
\begin{aligned}
\rho_2 b_0\|\Psi\|_{L^2}^2 &\leq \frac{\rho_2 b_0}{2}\|\Psi\|_{L^2}^2 + \frac{\rho_2 g(0) l^2}{2b_0}\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|_{L^2}^2\,ds \\
&\quad + \tilde{b}\sqrt{b_0}\sqrt{c_1}\|\psi_x\|_{L^2}\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}} + kl\sqrt{b_0}\sqrt{c_1}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left[2l\sqrt{\rho_2}\sqrt{b_0} + b_0 c_1 + \delta l c_1\sqrt{b_0}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.
\end{aligned}
$$

Finalmente usando o Lema 4.10, tem-se

$$
\begin{aligned}
\frac{\rho_2 b_0}{2}\|\Psi\|_{L^2}^2 &\leq \tilde{b}\sqrt{b_0}\sqrt{c_1}\|\psi_x\|_{L^2}\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}} + kl\sqrt{b_0}\sqrt{c_1}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left[2l\sqrt{\rho_2}\sqrt{b_0} + b_0 c_1 + \delta l c_1\sqrt{b_0} + \frac{\rho_2 g(0) l^2}{b_0}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1},
\end{aligned}
$$

ou ainda,

$$
\rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 \leq c_3\left[\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\big(\|\psi_x\|_{L^2} + \|\varphi_x+\psi\|_{L^2}\big) + \|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}\right],
$$

onde

$$
c_3 = \frac{2}{b_0}\max\left\{\tilde{b}\sqrt{b_0}\sqrt{c_1},\ kl\sqrt{b_0}\sqrt{c_1},\ 2l\sqrt{\rho_2}\sqrt{b_0} + b_0 c_1 + \delta l c_1\sqrt{b_0} + \frac{\rho_2 g(0) l^2}{b_0}\right\}.
$$

$\blacksquare$

Lema 4.12. *Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $U \in D(A_1)$ a solução da equação resolvente* (4.104). *Se g satisfaz*

(4.7), *então para cada ε_1 positivo existe uma constante c_4 (dependendo de ε_1) positiva tal que*

$$\tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon_1\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + c_4\left[\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2} + \|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}\right].$$

Demonstração. Considere o produto interno da equação (4.108) com ψ em $L^2(0,l)$, mais precisamente

$$\left(i\lambda\rho_2\Psi - \tilde{b}\psi_{xx} - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds + k(\varphi_x+\psi) + \delta\theta_x, \psi\right)_{L^2} = i\lambda\rho_2\big(\Psi,\psi\big)_{L^2}$$
$$-\tilde{b}\big(\psi_{xx},\psi\big)_{L^2} - \left(\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds,\psi\right)_{L^2} + k\big(\varphi_x+\psi,\psi\big)_{L^2} + \delta\big(\theta_x,\psi\big)_{L^2} = \rho_2\big(f_4,\psi\big)_{L^2}.$$

Integrando por partes e usando que $\psi(0)=\psi(l)=0$, obtém-se

$$\begin{aligned}&\underbrace{i\lambda\rho_2\big(\Psi,\psi\big)_{L^2}}_{=:I_2} + \tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)ds,\psi_x\right)_{L^2}\\ &\quad + k\big(\varphi_x+\psi,\psi\big)_{L^2} - \delta\big(\theta,\psi_x\big)_{L^2} = \rho_2\big(f_4,\psi\big)_{L^2}.\end{aligned} \tag{4.120}$$

Mas, fazendo uso da identidade (4.107), pode-se escrever I_2 como

$$I_2 = -\rho_2\big(\Psi,i\lambda\psi\big)_{L^2} = -\rho_2\big(\Psi,\Psi+f_3\big)_{L^2} = -\rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 - \rho_2\big(\Psi,f_3\big)_{L^2},$$

e ao substituir em (4.120) segue que

$$\begin{aligned}&-\rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 - \rho_2\big(\Psi,f_3\big)_{L^2} + \tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)ds,\psi_x\right)_{L^2}\\ &\quad + k\big(\varphi_x+\psi,\psi\big)_{L^2} - \delta\big(\theta,\psi_x\big)_{L^2} = \rho_2\big(f_4,\psi\big)_{L^2}.\end{aligned} \tag{4.121}$$

Por outro lado, multiplicando (4.106) por $\int_0^x \overline{\psi}\,dy$ e integrando em $[0,l]$, vem que

$$i\lambda\rho_1\int_0^l \Phi\int_0^x \overline{\psi}\,dy\,dx - k\int_0^l (\varphi_x+\psi)_x\int_0^x \overline{\psi}\,dy\,dx = \rho_1\int_0^l f_2\int_0^x \overline{\psi}\,dy\,dx,$$

integrando por partes, resulta que

$$\underbrace{i\lambda\rho_1\int_0^l \Phi\int_0^x \overline{\psi}\,dy\,dx}_{=:I_3} + k\int_0^l (\varphi_x+\psi)\overline{\psi}\,dx = \rho_1\int_0^l f_2\int_0^x \overline{\psi}\,dy\,dx. \tag{4.122}$$

Contudo, note que a igualdade (4.107) permite escrever

$$\begin{aligned} I_3 &= -\rho_1 \int_0^l \Phi \int_0^x \overline{i\lambda\psi}\, dy\, dx = -\rho_1 \int_0^l \Phi \int_0^x \left[\overline{\Psi} + \overline{f_3}\right] dy\, dx \\ &= -\rho_1 \int_0^l \Phi \int_0^x \overline{\Psi}\, dy\, dx - \rho_1 \int_0^l \Phi \int_0^x \overline{f_3}\, dy\, dx. \end{aligned} \tag{4.123}$$

Substituindo (4.123) em (4.122), seque que

$$-\rho_1 \int_0^l \Phi \int_0^x \overline{\Psi}\, dy\, dx - \rho_1 \int_0^l \Phi \int_0^x \overline{f_3}\, dy\, dx + k\big(\varphi_x + \psi, \psi\big)_{L^2} = \rho_1 \int_0^l f_2 \int_0^x \overline{\psi}\, dy\, dx,$$

isto é,

$$k\big(\varphi_x + \psi, \psi\big)_{L^2} = \rho_1 \int_0^l \Phi \int_0^x \overline{\Psi}\, dy\, dx + \rho_1 \int_0^l \Phi \int_0^x \overline{f_3}\, dy\, dx + \rho_1 \int_0^l f_2 \int_0^x \overline{\psi}\, dy\, dx. \tag{4.124}$$

Usando a identidade (4.124) em (4.121), obtém-se

$$\begin{aligned} -\rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 - \rho_2\big(\Psi, f_3\big)_{L^2} + \tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)ds, \psi_x\right)_{L^2} + \rho_1 \int_0^l \Phi \int_0^x \overline{\Psi}\, dy\, dx \\ +\rho_1 \int_0^l \Phi \int_0^x \overline{f_3}\, dy\, dx + \rho_1 \int_0^l f_2 \int_0^x \overline{\psi}\, dy\, dx - \delta\big(\theta, \psi_x\big)_{L^2} = \rho_2\big(f_4, \psi\big)_{L^2}, \end{aligned}$$

o que implica em

$$\begin{aligned} \tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}^2 &= \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_2\big(\Psi, f_3\big)_{L^2} - \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)ds, \psi_x\right)_{L^2} - \rho_1 \int_0^l \Phi \int_0^x \overline{\Psi}\, dy\, dx \\ &\quad -\rho_1 \int_0^l \Phi \int_0^x \overline{f_3}\, dy\, dx - \rho_1 \int_0^l f_2 \int_0^x \overline{\psi}\, dy\, dx + \delta\big(\theta, \psi_x\big)_{L^2} + \rho_2\big(f_4, \psi\big)_{L^2}. \end{aligned} \tag{4.125}$$

Tomando a parte real de (4.125) e usando $\operatorname{Re} z \leq |z|$ seguida da Desigualdade Triangular, resulta que

$$\begin{aligned} \tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}^2 \leq \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_2\left|\big(\Psi, f_3\big)_{L^2}\right| + \left|\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)ds, \psi_x\right)_{L^2}\right| + \rho_1\left|\int_0^l \Phi \int_0^x \overline{\Psi}\, dy\, dx\right| \\ +\rho_1\left|\int_0^l \Phi \int_0^x \overline{f_3}\, dy\, dx\right| + \rho_1\left|\int_0^l f_2 \int_0^x \overline{\psi}\, dy\, dx\right| + \delta\left|\big(\theta, \psi_x\big)_{L^2}\right| + \rho_2\left|\big(f_4, \psi\big)_{L^2}\right|. \end{aligned} \tag{4.126}$$

Mas, veja que aplicando a Desigualdade de Hölder duas vezes, é possível fazer a seguinte estimativa,

$$\rho_1 \left| \int_0^l \Phi \int_0^x \overline{\Psi}\, dy\, dx \right| \leq \rho_1 \int_0^l |\Phi| \int_0^l |\Psi|\, dy\, dx \leq \rho_1 \sqrt{l} \|\Psi\|_{L^2} \int_0^l |\Phi|\, dx \leq \rho_1 l \|\Phi\|_{L^2} \|\Psi\|_{L^2}.$$

Empregando este mesmo argumento e usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Poincaré em (4.126), segue que

$$\begin{aligned}
\tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}^2 &\leq \rho_2 \|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_2 l \|\Psi\|_{L^2} \|f_{3,x}\|_{L^2} + \sqrt{b_0} \|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)} \|\psi_x\|_{L^2} + \rho_1 l \|\Phi\|_{L^2} \|\Psi\|_{L^2} + \\
&\quad \rho_1 l^2 \|\Phi\|_{L^2} \|f_{3,x}\|_{L^2} + \rho_1 l^2 \|f_2\|_{L^2} \|\psi_x\|_{L^2} + \delta l \|\theta_x\|_{L^2} \|\psi_x\|_{L^2} + \rho_2 l \|f_4\|_{L^2} \|\psi_x\|_{L^2} \\
&\leq \rho_2 \|\Psi\|_{L^2}^2 + \sqrt{b_0} \|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)} \|\psi_x\|_{L^2} + \rho_1 l \|\Phi\|_{L^2} \|\Psi\|_{L^2} + \delta l \|\theta_x\|_{L^2} \|\psi_x\|_{L^2} \\
&\quad + \left[\frac{2\sqrt{\rho_1} l^2}{\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{2\sqrt{\rho_2} l}{\sqrt{\tilde{b}}} \right] \|F\|_{\mathcal{H}_1} \|U\|_{\mathcal{H}_1}.
\end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Young com $\varepsilon = \tilde{b}/4$, pode-se obter

$$\begin{aligned}
\tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}^2 &\leq \rho_2 \|\Psi\|_{L^2}^2 + \frac{b_0}{\tilde{b}} \|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}^2 + \frac{\tilde{b}}{4} \|\psi_x\|_{L^2}^2 + \rho_1 l \|\Phi\|_{L^2} \|\Psi\|_{L^2} + \frac{\tilde{b}}{4} \|\psi_x\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \frac{\delta^2 l^2}{\tilde{b}} \|\theta_x\|_{L^2}^2 + \left[\frac{2\sqrt{\rho_1} l^2}{\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{2\sqrt{\rho_2} l}{\sqrt{\tilde{b}}} \right] \|F\|_{\mathcal{H}_1} \|U\|_{\mathcal{H}_1}.
\end{aligned} \tag{4.127}$$

Usando o Lema 4.9, vem que a desigualdade (4.127) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{b}}{2} \|\psi_x\|_{L^2}^2 &\leq \rho_2 \|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_1 l \|\Phi\|_{L^2} \|\Psi\|_{L^2} \\
&\quad + \left[\frac{2\sqrt{\rho_1} l^2}{\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{2\sqrt{\rho_2} l}{\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{\delta^2 l^2 c_1}{\tilde{b}} + \frac{b_0 c_1}{\tilde{b}} \right] \|F\|_{\mathcal{H}_1} \|U\|_{\mathcal{H}_1}.
\end{aligned} \tag{4.128}$$

Para $\varepsilon_1 > 0$, aplicando a Desigualdade de Young em (4.128) com $\varepsilon = \varepsilon_1 \rho_1 / 4$, vem que

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{b}}{2} \|\psi_x\|_{L^2}^2 &\leq \left[\rho_2 + \frac{\rho_1 l^2}{\varepsilon_1} \right] \|\Psi\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon_1 \rho_1}{4} \|\Phi\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \left[\frac{2\sqrt{\rho_1} l^2}{\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{2\sqrt{\rho_2} l}{\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{\delta^2 l^2 c_1}{\tilde{b}} + \frac{b_0 c_1}{\tilde{b}} \right] \|F\|_{\mathcal{H}_1} \|U\|_{\mathcal{H}_1}.
\end{aligned}$$

Finalmente, usando o Lema 4.11

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{b}}{2}\|\psi_x\|_{L^2}^2 \ \leq\ & \frac{\varepsilon_1\rho_1}{4}\|\Phi\|_{L^2}^2 + \left[c_3 + \frac{\rho_1 l^2 c_3}{\varepsilon_1\rho_2}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|\psi_x\|_{L^2} \\ & + \left[c_3 + \frac{\rho_1 l^2 c_3}{\varepsilon_1\rho_2}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|\varphi_x + \psi\|_{L^2} \\ & + \left[\frac{2\sqrt{\rho_1}l^2}{\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{2\sqrt{\rho_2}l}{\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{\delta^2 l^2 c_1}{\tilde{b}} + \frac{b_0 c_1}{\tilde{b}} + c_3 + \frac{\rho_1 l^2 c_3}{\varepsilon_1\rho_2}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1},\end{aligned}$$

e ainda, da Desigualdade Young com $\varepsilon = \tilde{b}/4$

$$\frac{\tilde{b}}{2}\|\psi_x\|_{L^2}^2 \leq \frac{\varepsilon_1\rho_1}{4}\|\Phi\|_{L^2}^2 + \frac{\tilde{b}}{4}\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \left[c_3 + \frac{\rho_1 l^2 c_3}{\varepsilon_1\rho_2}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}$$

$$+\left[\frac{2\sqrt{\rho_1}l^2}{\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{2\sqrt{\rho_2}l}{\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{\delta^2 l^2 c_1}{\tilde{b}} + \frac{b_0 c_1}{\tilde{b}} + c_3 + \frac{\rho_1 l^2 c_3}{\varepsilon_1\rho_2} + \frac{1}{\tilde{b}}\left(c_3 + \frac{\rho_1 l^2 c_3}{\varepsilon_1\rho_2}\right)^2\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1},$$

o que implica em

$$\tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon_1\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + 4\left[c_3 + \frac{\rho_1 l^2 c_3}{\varepsilon_1\rho_2}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}$$

$$+4\left[\frac{2\sqrt{\rho_1}l^2}{\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{2\sqrt{\rho_2}l}{\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{\delta^2 l^2 c_1}{\tilde{b}} + \frac{b_0 c_1}{\tilde{b}} + c_3 + \frac{\rho_1 l^2 c_3}{\varepsilon_1\rho_2} + \frac{1}{\tilde{b}}\left(c_3 + \frac{\rho_1 l^2 c_3}{\varepsilon_1\rho_2}\right)^2\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.$$

Mais precisamente, o Lema 4.12 fica provado com c_4 dada por

$$c_4 = 4\left[\frac{2\sqrt{\rho_1}l^2}{\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{2\sqrt{\rho_2}l}{\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{\delta^2 l^2 c_1}{\tilde{b}} + \frac{b_0 c_1}{\tilde{b}} + c_3 + \frac{\rho_1 l^2 c_3}{\varepsilon_1\rho_2} + \frac{1}{\tilde{b}}\left(c_3 + \frac{\rho_1 l^2 c_3}{\varepsilon_1\rho_2}\right)^2\right].$$

■

Neste instante, faz-se necessário introduzir a relação entre os coeficientes do sistema que implicam na estabilidade exponencial da solução. Para tanto, denote por χ a seguinte diferença

$$\chi = \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}, \tag{4.129}$$

e observe que $\chi = 0$ implica na igualdade de velocidade de propagação de ondas, a saber

$$\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}. \tag{4.130}$$

Lema 4.13. *Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $U \in D(A_1)$ a solução da equação resolvente* (4.104). *Se g satisfaz* (4.7)*, então para cada ε_2 positivo existe uma constante c_5 (dependendo de ε_1 e ε_2) positiva tal* *que*

$$k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 \le 2b|\chi|\left|\big(\Psi_x,\Phi\big)_{L^2}\right| + (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + c_5\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1},$$

onde ε_1 *é a constante dada no Lema 4.12 e* χ *foi definido em* (4.129).

Demonstração. Considere inicialmente o produto interno de (4.108) com $\varphi_x+\psi$ em $L^2(0,l)$, isto é,

$$\left(i\lambda\rho_2\Psi - \tilde{b}\psi_{xx} - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds + k(\varphi_x+\psi) + \delta\theta_x, \varphi_x+\psi\right)_{L^2} =$$
$$i\lambda\rho_2\big(\Psi,\varphi_x+\psi\big)_{L^2} - \left(\tilde{b}\psi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds, \varphi_x+\psi\right)_{L^2}$$
$$+k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 + \delta\big(\theta_x,\varphi_x+\psi\big)_{L^2} = \rho_2\big(f_4,\varphi_x+\psi\big)_{L^2}.$$

Integrando por partes, vem que

$$\begin{aligned} & i\lambda\rho_2\big(\Psi,\varphi_x+\psi\big)_{L^2} + \underbrace{\left(\tilde{b}\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, (\varphi_x+\psi)_x\right)_{L^2}}_{=:I_4} \\ & +k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 + \delta\big(\theta_x,\varphi_x+\psi\big)_{L^2} = \rho_2\big(f_4,\varphi_x+\psi\big)_{L^2}. \end{aligned} \tag{4.131}$$

Contudo, note que a igualdade (4.106) fornece $k(\varphi_x+\psi)_x = i\lambda\rho_1\Phi - \rho_1 f_2$, consequentemente

$$I_4 = \frac{1}{k}\left(\tilde{b}\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, i\lambda\rho_1\Phi - \rho_1 f_2\right)_{L^2} = -\frac{i\lambda\rho_1\tilde{b}}{k}\big(\psi_x,\Phi\big)_{L^2}$$
$$-\frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(\psi_x,f_2\big)_{L^2} - \frac{i\lambda\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds,\Phi\right)_{L^2} - \frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, f_2\right)_{L^2},$$

mas, de (4.107) segue que

$$-\frac{i\lambda\rho_1\tilde{b}}{k}\big(\psi_x,\Phi\big)_{L^2} = -\frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(\Psi_x+f_{3,x},\Phi\big)_{L^2} = -\frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(\Psi_x,\Phi\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(f_{3,x},\Phi\big)_{L^2}.$$

Desta forma, pode-se escrever

$$\begin{aligned} I_4 = & -\frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(\Psi_x,\Phi\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(f_{3,x},\Phi\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(\psi_x,f_2\big)_{L^2} \\ & -\frac{i\lambda\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds,\Phi\right)_{L^2} - \frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, f_2\right)_{L^2}. \end{aligned} \tag{4.132}$$

Usando (4.132) em (4.131), resulta que

$$\begin{aligned}
&\underbrace{i\lambda\rho_2\big(\Psi,\varphi_x+\psi\big)_{L^2}}_{=:I_5}-\frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(\Psi_x,\Phi\big)_{L^2}-\frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(f_{3,x},\Phi\big)_{L^2}-\frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(\psi_x,f_2\big)_{L^2}\\
&\underbrace{-\frac{i\lambda\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds,\Phi\right)_{L^2}}_{=:I_6}-\frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds,f_2\right)_{L^2}\\
&+k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2+\delta\big(\theta_x,\varphi_x+\psi\big)_{L^2}=\rho_2\big(f_4,\varphi_x+\psi\big)_{L^2}.
\end{aligned}\tag{4.133}$$

Fazendo uso das identidades (4.105) e (4.107), vem que

$$\begin{aligned}
I_5 &= -\rho_2\big(\Psi,i\lambda\varphi_x\big)_{L^2}-\rho_2\big(\Psi,i\lambda\psi\big)_{L^2}=-\rho_2\big(\Psi,\Phi_x+f_{1,x}\big)_{L^2}-\rho_2\big(\Psi,\Psi+f_3\big)_{L^2}\\
&= \rho_2\big(\Psi_x,\Phi\big)_{L^2}-\rho_2\big(\Psi,f_{1,x}\big)_{L^2}-\rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2-\rho_2\big(\Psi,f_3\big)_{L^2}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, integrando por partes e usando a igualdade (4.110), obtém-se

$$\begin{aligned}
I_6 &= \frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)i\lambda\eta(s)\,ds,\Phi_x\right)_{L^2}=\frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)\big[\Psi-\eta_s(s)+f_6(s)\big]ds,\Phi_x\right)_{L^2}\\
&= \frac{\rho_1 b_0}{k}\big(\Psi,\Phi_x\big)_{L^2}+\frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g'(s)\eta(s)\,ds,\Phi_x\right)_{L^2}+\frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)f_6(s)\,ds,\Phi_x\right)_{L^2}\\
&= -\frac{\rho_1 b_0}{k}\big(\Psi_x,\Phi\big)_{L^2}-\frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g'(s)\eta_x(s)\,ds,\Phi\right)_{L^2}-\frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)f_{6,x}(s)\,ds,\Phi\right)_{L^2}.
\end{aligned}$$

Com isto, ao substituir I_5 e I_6 em (4.133), vem que

$$\begin{aligned}
&\rho_2\big(\Psi_x,\Phi\big)_{L^2}-\rho_2\big(\Psi,f_{1,x}\big)_{L^2}-\rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2-\rho_2\big(\Psi,f_3\big)_{L^2}-\frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(\Psi_x,\Phi\big)_{L^2}-\frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(f_{3,x},\Phi\big)_{L^2}\\
&-\frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(\psi_x,f_2\big)_{L^2}-\frac{\rho_1 b_0}{k}\big(\Psi_x,\Phi\big)_{L^2}-\frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g'(s)\eta_x(s)\,ds,\Phi\right)_{L^2}-\frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)f_{6,x}(s)\,ds,\Phi\right)_{L^2}\\
&-\frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds,f_2\right)_{L^2}+k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2+\delta\big(\theta_x,\varphi_x+\psi\big)_{L^2}=\rho_2\big(f_4,\varphi_x+\psi\big)_{L^2},
\end{aligned}$$

ou melhor, lembrando que $\tilde{b} = b - b_0$, tem-se

$$\left[\rho_2 - \frac{\rho_1 b}{k}\right]\big(\Psi_x, \Phi\big)_{L^2} - \rho_2\big(\Psi, f_{1,x}\big)_{L^2} - \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 - \rho_2\big(\Psi, f_3\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(f_{3,x}, \Phi\big)_{L^2}$$

$$-\frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(\psi_x, f_2\big)_{L^2} - \frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g'(s)\eta_x(s)\,ds, \Phi\right)_{L^2} - \frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)f_{6,x}(s)\,ds, \Phi\right)_{L^2}$$

$$-\frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, f_2\right)_{L^2} + k\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 + \delta\big(\theta_x, \varphi_x + \psi\big)_{L^2} = \rho_2\big(f_4, \varphi_x + \psi\big)_{L^2}.$$

Além disto, observando a definição de χ em (4.129), pode-se reescrever a identidade acima como

$$\begin{aligned} k\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 &= b\chi\big(\Psi_x, \Phi\big)_{L^2} + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_2\big(\Psi, f_{1,x} + f_3\big)_{L^2} + \frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(f_{3,x}, \Phi\big)_{L^2} \\ &+\frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(\psi_x, f_2\big)_{L^2} + \frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g'(s)\eta_x(s)\,ds, \Phi\right)_{L^2} + \frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)f_{6,x}(s)\,ds, \Phi\right)_{L^2} \\ &+\frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, f_2\right)_{L^2} - \delta\big(\theta_x, \varphi_x + \psi\big)_{L^2} + \rho_2\big(f_4, \varphi_x + \psi\big)_{L^2}. \end{aligned} \tag{4.134}$$

Finalmente, tomando a parte real de (4.134), usando que para todo número complexo z vale que $\operatorname{Re} z \leq |z|$ e em seguida aplicando a Desigualdade Triangular, resulta que

$$\begin{aligned} k\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 \;\leq\;& b|\chi|\left|\big(\Psi_x, \Phi\big)_{L^2}\right| + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \delta\left|\big(\theta_x, \varphi_x + \psi\big)_{L^2}\right| \\ &+\frac{\rho_1}{k}\left|\left(\int_0^\infty g'(s)\eta_x(s)\,ds, \Phi\right)_{L^2}\right| + \rho_2\left|\big(\Psi, f_{1,x} + f_3\big)_{L^2}\right| \\ &+\frac{\rho_1}{k}\left|\left(\int_0^\infty g(s)f_{6,x}(s)\,ds, \Phi\right)_{L^2}\right| + \frac{\rho_1}{k}\left|\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, f_2\right)_{L^2}\right| \\ &+\frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\left|\big(f_{3,x}, \Phi\big)_{L^2}\right| + \frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\left|\big(\psi_x, f_2\big)_{L^2}\right| + \rho_2\left|\big(f_4, \varphi_x + \psi\big)_{L^2}\right|. \end{aligned}$$

Além disso, utilizando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e os argumentos empregados em

(4.118) e (4.119), segue que

$$
\begin{aligned}
k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 \leq\ & b|\chi|\left|\left(\Psi_x,\Phi\right)_{L^2}\right| + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \delta\|\theta_x\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2} \\
& + \frac{\rho_1\sqrt{g(0)}}{k}\left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta(s)\|_{L^2}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\|\Phi\|_{L^2} + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}\|f_{1,x}+f_3\|_{L^2} \\
& + \frac{\rho_1\sqrt{b_0}}{k}\|f_6\|_{L_g^2(H_0^1)}\|\Phi\|_{L^2} + \frac{\rho_1\sqrt{b_0}}{k}\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}\|f_2\|_{L^2} + \frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\|f_{3,x}\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2} \\
& + \frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\|\psi_x\|_{L^2}\|f_2\|_{L^2} + \rho_2\|f_4\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2} \\
\leq\ & b|\chi|\left|\left(\Psi_x,\Phi\right)_{L^2}\right| + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \delta\|\theta_x\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2} \\
& + \frac{\rho_1\sqrt{g(0)}}{k}\left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta(s)\|_{L^2}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\|\Phi\|_{L^2} \\
& + \left[\frac{2\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{k}} + \frac{2\sqrt{\rho_1}\sqrt{b_0}}{k} + \frac{2\sqrt{\rho_1}\sqrt{\tilde{b}}}{k}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.
\end{aligned}
$$

Aplicando o Lema 4.11, resulta que

$$
\begin{aligned}
k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 \leq\ & b|\chi|\left|\left(\Psi_x,\Phi\right)_{L^2}\right| + c_3\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|\psi_x\|_{L^2} + c_3\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2} \\
& + \delta\|\theta_x\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2} + \frac{\rho_1\sqrt{g(0)}}{k}\left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta(s)\|_{L^2}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\|\Phi\|_{L^2} \\
& + \left[\frac{2\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{k}} + \frac{2\sqrt{\rho_1}\sqrt{b_0}}{k} + \frac{2\sqrt{\rho_1}\sqrt{\tilde{b}}}{k} + c_3\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.
\end{aligned}
\tag{4.135}
$$

Usando a Desigualdade de Young com $\varepsilon = \tilde{b}/2$, pode-se obter a seguinte estimativa

$$
c_3\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|\psi_x\|_{L^2} \leq \frac{\tilde{b}}{2}\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \frac{c_3^2}{2\tilde{b}}\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1},
$$

portanto, de (4.135) vem que

$$
\begin{aligned}
k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 \leq\ & b|\chi|\left|\left(\Psi_x,\Phi\right)_{L^2}\right| + \frac{\tilde{b}}{2}\|\psi_x\|_{L^2}^2 + c_3\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2} \\
& + \delta\|\theta_x\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2} + \frac{\rho_1\sqrt{g(0)}}{k}\left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta(s)\|_{L^2}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\|\Phi\|_{L^2} \\
& + \left[\frac{2\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{k}} + \frac{2\sqrt{\rho_1}\sqrt{b_0}}{k} + \frac{2\sqrt{\rho_1}\sqrt{\tilde{b}}}{k} + c_3 + \frac{c_3^2}{2\tilde{b}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.
\end{aligned}
$$

Agora, veja que ao usar o Lema 4.12, obtém-se

$$
\begin{aligned}
k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 \quad \leq \quad & b|\chi|\left|\big(\Psi_x,\Phi\big)_{L^2}\right| + \frac{\varepsilon_1\rho_1}{2}\|\Phi\|_{L^2}^2 + \left[\frac{c_4}{2}+c_3\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2} \\
& +\delta\|\theta_x\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2} + \frac{\rho_1\sqrt{g(0)}}{k}\left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta(s)\|_{L^2}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\|\Phi\|_{L^2} \\
& + \left[\frac{2\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{k}} + \frac{2\sqrt{\rho_1}\sqrt{b_0}}{k} + \frac{2\sqrt{\rho_1}\sqrt{\tilde{b}}}{k} + c_3 + \frac{c_3^2}{2\tilde{b}} + \frac{c_4}{2}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.
\end{aligned}
$$

Fazendo uso mais uma vez da Desigualdade de Young com $\varepsilon = k/4$ e usando o Lema 4.9, pode-se obter

$$
\begin{aligned}
\frac{k}{2}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 \leq\, & b|\chi|\left|\big(\Psi_x,\Phi\big)_{L^2}\right| + \frac{\varepsilon_1\rho_1}{2}\|\Phi\|_{L^2}^2 + \frac{\rho_1\sqrt{g(0)}}{k}\left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta(s)\|_{L^2}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\|\Phi\|_{L^2} \\
& + \left[\frac{2\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{k}} + \frac{2\sqrt{\rho_1}\sqrt{b_0}}{k} + \frac{2\sqrt{\rho_1}\sqrt{\tilde{b}}}{k} + c_3 + \frac{c_3^2}{2\tilde{b}} + \frac{c_4}{2} + \frac{1}{k}\left(\frac{c_4}{2}+c_3\right)^2 + \frac{\delta^2 c_1}{k}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.
\end{aligned}
$$

Por fim, usando Young com $\varepsilon_2 > 0$ e o Lema 4.10, vem que

$$
\begin{aligned}
\frac{k}{2}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 \quad \leq \quad & b|\chi|\left|\big(\Psi_x,\Phi\big)_{L^2}\right| + \frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\rho_1}{2}\|\Phi\|_{L^2}^2 + \left[\frac{2\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{k}} + \frac{2\sqrt{\rho_1}\sqrt{b_0}}{k} + \frac{2\sqrt{\rho_1}\sqrt{\tilde{b}}}{k}\right. \\
& \left. +c_3 + \frac{c_3^2}{2\tilde{b}} + \frac{c_4}{2} + \frac{1}{k}\left(\frac{c_4}{2}+c_3\right)^2 + \frac{\delta^2 c_1}{k} + \frac{\rho_1 g(0)}{\varepsilon_2 k^2}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1},
\end{aligned}
$$

ou ainda,

$$
k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 \quad \leq \quad 2b|\chi|\left|\big(\Psi_x,\Phi\big)_{L^2}\right| + (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + c_5\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1},
$$

onde

$$
\frac{c_5}{2} = \frac{2\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{k}} + \frac{2\sqrt{\rho_1}\sqrt{b_0}}{k} + \frac{2\sqrt{\rho_1}\sqrt{\tilde{b}}}{k} + c_3 + \frac{c_3^2}{2\tilde{b}} + \frac{c_4}{2} + \frac{1}{k}\left(\frac{c_4}{2}+c_3\right)^2 + \frac{\delta^2 c_1}{k} + \frac{\rho_1 g(0)}{\varepsilon_2 k^2}.
$$

Isto conclui a prova do Lema 4.13. ■

Lema 4.14. *Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $U \in D(A_1)$ a solução da equação resolvente* (4.104). *Então, existe uma constante c_6 positiva tal que*

$$
\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 \leq 4k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 + c_6\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.
$$

Demonstração. Considere o produto interno de (4.106) com φ em $L^2(0,l)$, ou seja,

$$\big(i\lambda\rho_1\Phi - k(\varphi_x+\psi)_x,\varphi\big)_{L^2} = i\lambda\rho_1\big(\Phi,\varphi\big)_{L^2} - k\big((\varphi_x+\psi)_x,\varphi\big)_{L^2} = \rho_1\big(f_2,\varphi\big)_{L^2}.$$

Integrando por partes e notando que $(\varphi_x+\psi)(0) = (\varphi_x+\psi)(l) = 0$, obtém-se

$$i\lambda\rho_1\big(\Phi,\varphi\big)_{L^2} + k\big(\varphi_x+\psi,\varphi_x\big)_{L^2} = \rho_1\big(f_2,\varphi\big)_{L^2}. \tag{4.136}$$

Contudo, observe que a identidade (4.105) permite escrever

$$i\lambda\rho_1\big(\Phi,\varphi\big)_{L^2} = -\rho_1\big(\Phi,i\lambda\varphi\big)_{L^2} = -\rho_1\big(\Phi,\Phi+f_1\big)_{L^2} = -\rho_1\|\Phi\|^2_{L^2} - \rho_1\big(\Phi,f_1\big)_{L^2},$$

consequentemente, em (4.136) obtém-se que

$$-\rho_1\|\Phi\|^2_{L^2} - \rho_1\big(\Phi,f_1\big)_{L^2} + k\big(\varphi_x+\psi,\varphi_x\big)_{L^2} = \rho_1\big(f_2,\varphi\big)_{L^2},$$

ou melhor, somando e subtraindo ψ, tem-se

$$\rho_1\|\Phi\|^2_{L^2} = -\rho_1\big(\Phi,f_1\big)_{L^2} + k\|\varphi_x+\psi\|^2_{L^2} - k\big(\varphi_x+\psi,\psi\big)_{L^2} - \rho_1\big(f_2,\varphi\big)_{L^2}. \tag{4.137}$$

Assim, tomando a parte real da identidade (4.137), usando que $\operatorname{Re} z \leq |z|$ e em seguida a Desigualdade Triangular, resulta que

$$\rho_1\|\Phi\|^2_{L^2} \leq \rho_1\left|\big(\Phi,f_1\big)_{L^2}\right| + k\|\varphi_x+\psi\|^2_{L^2} + k\left|\big(\varphi_x+\psi,\psi\big)_{L^2}\right| + \rho_1\left|\big(f_2,\varphi\big)_{L^2}\right|.$$

Mais ainda, das desigualdades de Cauchy-Schwarz e Poincaré, vem que

$$\rho_1\|\Phi\|^2_{L^2} \leq \rho_1 l\|\Phi\|_{L^2}\|f_{1,x}\|_{L^2} + k\|\varphi_x+\psi\|^2_{L^2} + kl\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2} + \rho_1 l\|f_2\|_{L^2}\|\varphi_x\|_{L^2}.$$

Somando e subtraindo ψ e f_3 nas parcelas convenientes, usando a Desigualdade Triangular, segue que

$$\begin{aligned}\rho_1\|\Phi\|^2_{L^2} &\leq \rho_1 l\|\Phi\|_{L^2}\|f_{1,x}+f_3\|_{L^2} + \rho_1 l^2\|\Phi\|_{L^2}\|f_{3,x}\|_{L^2} + k\|\varphi_x+\psi\|^2_{L^2}\\ &\quad + kl\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2} + \rho_1 l\|f_2\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2} + \rho_1 l^2\|f_2\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2}\\ &\leq k\|\varphi_x+\psi\|^2_{L^2} + kl\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2} + \left[\frac{2\sqrt{\rho_1}l}{\sqrt{k}} + \frac{2\sqrt{\rho_1}l^2}{\sqrt{\tilde b}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Young com $\varepsilon = k/2$, obtém-se

$$\rho_1\|\Phi\|^2_{L^2} \leq \frac{3k}{2}\|\varphi_x+\psi\|^2_{L^2} + \frac{kl^2}{2}\|\psi_x\|^2_{L^2} + \left[\frac{2\sqrt{\rho_1}l}{\sqrt{k}} + \frac{2\sqrt{\rho_1}l^2}{\sqrt{\tilde b}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.$$

Aplicando o Lema 4.12 com $\varepsilon_1 = \tilde{b}/kl^2$, resulta a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 &\leq \frac{3k}{2}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 + \frac{\rho_1}{2}\|\Phi\|_{L^2}^2 + \frac{kl^2c_4}{2\tilde{b}}\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}\\ &+\left[\frac{2\sqrt{\rho_1}l}{\sqrt{k}} + \frac{2\sqrt{\rho_1}l^2}{\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{kl^2c_4}{2\tilde{b}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1},\end{aligned}$$

ou ainda, usando mais uma vez a Desigualdade de Young com $\varepsilon = k/2$, vem que

$$\frac{\rho_1}{2}\|\Phi\|_{L^2}^2 \leq 2k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 + \left[\frac{2\sqrt{\rho_1}l}{\sqrt{k}} + \frac{2\sqrt{\rho_1}l^2}{\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{kl^2c_4}{2\tilde{b}} + \frac{kl^4c_4^2}{8\tilde{b}^2}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.$$

Mais precisamente, tem-se

$$\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 \leq 4k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 + c_6\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1},$$

onde,

$$c_6 = \frac{4\sqrt{\rho_1}l}{\sqrt{k}} + \frac{4\sqrt{\rho_1}l^2}{\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{kl^2c_4}{\tilde{b}} + \frac{kl^4c_4^2}{4\tilde{b}^2}.$$

■

Teorema 4.15. *Seja g uma função que satisfaz* (4.7). *Se $\chi = 0$, então o C_0-semigrupo de contrações $S(t) = e^{A_1 t}$ associado ao sistema Timoshenko com história e Lei de Fourier é exponencialmente estável.*

Demonstração. A prova será realizada mediante caracterização oferecida pelo Teorema de Prüss (veja Teorema 2.72). Com efeito, usando a desigualdade (4.113), obtém-se

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 &= \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}^2 + k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 + \rho_3\|\theta\|_{L^2}^2 + \|\eta\|_{L_g^2}^2\\ &\leq \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}^2 + k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 + c_2\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 4.11, vem que

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 &\leq \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + c_3\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|\psi_x\|_{L^2} + c_3\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}\\ &+\tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}^2 + k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 + [c_2+c_3]\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.\end{aligned} \tag{4.138}$$

Utilizando a Desigualdade de Young com $\varepsilon = \tilde{b}$ e posteriormente com $\varepsilon = k$, pode-se obter, respectivamente

$$c_3\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|\psi_x\|_{L^2} \leq \tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \frac{c_3^2}{4\tilde{b}}\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}, \tag{4.139}$$

e

$$c_3\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2} \leq k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2+\frac{c_3^2}{4k}\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}. \tag{4.140}$$

Substituindo (4.139)-(4.140) em (4.138), resulta que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2+2\tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}^2+2k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2+\left[c_2+c_3+\frac{c_3^2}{4\tilde{b}}+\frac{c_3^2}{4k}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.$$

Utilizando o Lema 4.12, pode-se escrever

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq\;& \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2+2\varepsilon_1\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2+2c_4\|F\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^{\frac{1}{2}}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}\\ &+2k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2+\left[c_2+c_3+\frac{c_3^2}{4\tilde{b}}+\frac{c_3^2}{4k}+2c_4\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.\end{aligned}$$

Aplicando novamente a Desigualdade de Young com $\varepsilon = k$, segue que

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq\;& \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2+2\varepsilon_1\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2+3k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2\\ &+\left[c_2+c_3+\frac{c_3^2}{4\tilde{b}}+\frac{c_3^2}{4k}+2c_4+\frac{c_4^2}{k}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1},\end{aligned}$$

além disso, do Lema 4.14, resulta que

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq\;& 7k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2+2\varepsilon_1\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2\\ &+\left[c_2+c_3+\frac{c_3^2}{4\tilde{b}}+\frac{c_3^2}{4k}+2c_4+\frac{c_4^2}{k}+c_6\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.\end{aligned} \tag{4.141}$$

Observe que o Lema 4.13 fornece

$$7k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 \leq 14b|\chi|\left|\left(\Psi_x,\Phi\right)_{L^2}\right|+7(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2+7c_5\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}, \tag{4.142}$$

para quaisquer $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 > 0$. Logo, substituindo (4.142) em (4.141), obtém-se

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq\;& 14b|\chi|\left|\left(\Psi_x,\Phi\right)_{L^2}\right|+(9\varepsilon_1+7\varepsilon_2)\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2\\ &+\left[c_2+c_3+\frac{c_3^2}{4\tilde{b}}+\frac{c_3^2}{4k}+2c_4+\frac{c_4^2}{k}+c_6+7c_5\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.\end{aligned}$$

Usando que $\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 \leq \|U\|_{\mathcal{H}_1}^2$, escolhendo $\varepsilon_1 = 1/36$ e $\varepsilon_2 = 1/28$, segue que

$$\frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq 14b|\chi|\left|\left(\Psi_x,\Phi\right)_{L^2}\right|+\left[c_2+c_3+\frac{c_3^2}{4\tilde{b}}+\frac{c_3^2}{4k}+2c_4+\frac{c_4^2}{k}+c_6+7c_5\right]\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}. \tag{4.143}$$

Usando a hipótese $\chi = 0$,resulta que

$$\frac{1}{2}\|U\|^2_{\mathcal{H}_1} \leq \left[c_2 + c_3 + \frac{c_3^2}{4\tilde{b}} + \frac{c_3^2}{4k} + 2c_4 + \frac{c_4^2}{k} + c_6 + 7c_5\right] \|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1},$$

mais ainda, ao aplicar a Desigualdade de Young com $\varepsilon = 1/4$, obtém-se

$$\frac{1}{4}\|U\|^2_{\mathcal{H}_1} \leq \left[c_2 + c_3 + \frac{c_3^2}{4\tilde{b}} + \frac{c_3^2}{4k} + 2c_4 + \frac{c_4^2}{k} + c_6 + 7c_5\right]^2 \|F\|^2_{\mathcal{H}_1}.$$

Portanto, conclui-se que existe uma constante positiva c tal que $\|U\|_{\mathcal{H}_1} \leq c\|F\|_{\mathcal{H}_1}$, onde

$$c = 2\left[c_2 + c_3 + \frac{c_3^2}{4\tilde{b}} + \frac{c_3^2}{4k} + 2c_4 + \frac{c_4^2}{k} + c_6 + 7c_5\right],$$

com $U \in D(A_1)$ a solução da equação resolvente $(i\lambda I - A_1)U = F$. Consequentemente, vem que

$$\|(i\lambda I - A_1)^{-1}F\|_{\mathcal{H}_1} \leq c\|F\|_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall\, F \in \mathcal{H}_1,$$

portanto, tem-se que para qualquer λ real

$$\left\|(i\lambda I - A_1)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} \leq c,$$

e ainda

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} \left\|(i\lambda I - A_1)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} < \infty. \tag{4.144}$$

Finalmente, aplicando a propriedade obtida em (4.144) e o Lema 4.7 ao Teorema de Prüss (veja Teorema 2.72) segue que o semigrupo $S(t) = e^{A_1 t}$ é exponencialmente estável, isto é, existem constantes $\alpha > 0$ e $M \geq 1$ satisfazendo

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} = \|e^{A_1 t}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} \leq Me^{-\alpha t}, \quad t \geq 0, \tag{4.145}$$

como desejado. ■

Nesta parte da seção será demonstrado que a igualdade de velocidade de propagação de ondas é uma condição necessária para que o semigrupo associado ao problema (4.1)-(4.3) seja exponencialmente estável. Para tal propósito, um resultado auxiliar apresentado originalmente em [17] será muito útil, a saber.

Lema 4.16. *Suponha que g satisfaz as condições* (4.7). *Então, existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$\left|\lambda \int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda s}\, ds\right| \leq c,$$

para todo $\lambda \geq 0$.

Demonstração. Note inicialmente que

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} g(s)e^{-i\lambda s}\,ds &= \int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g(s)e^{-i\lambda s}\,ds + \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} g(s)e^{-i\lambda s}\,ds \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g(s)e^{-i\lambda s}\,ds + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} g(s)e^{-i\lambda s}\,ds + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} g(s)e^{-i\lambda s}\,ds\end{aligned} \tag{4.146}$$

Lembrando que $e^{i\pi} = -1$, pode-se escrever

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} g(s)e^{-i\lambda s}\,ds = -\frac{e^{i\pi}}{2}\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} g(s)e^{-i\lambda s}\,ds = -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} g(s)e^{-i\lambda(s-\pi/\lambda)}\,ds,$$

e ainda, fazendo a mudança de variável $u = s - \pi/\lambda$, vem que

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} g(s)e^{-i\lambda s}\,ds = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} g\big(u+\pi/\lambda\big)e^{-i\lambda u}\,du. \tag{4.147}$$

Substituindo (4.147) em (4.146), resulta que

$$\int_0^{\infty} g(s)e^{-i\lambda s}\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g(s)e^{-i\lambda s}\,ds + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} g(s)e^{-i\lambda s}\,ds - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} g\big(s+\pi/\lambda\big)e^{-i\lambda s}\,ds,$$

ou então, escrevendo

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\infty} g\big(s+\pi/\lambda\big)e^{-i\lambda s}\,ds = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g\big(s+\pi/\lambda\big)e^{-i\lambda s}\,ds - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} g\big(s+\pi/\lambda\big)e^{-i\lambda s}\,ds,$$

tem-se

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} g(s)e^{-i\lambda s}\,ds &= \int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g(s)e^{-i\lambda s}\,ds - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g\big(s+\pi/\lambda\big)e^{-i\lambda s}\,ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} e^{-i\lambda s}\left[g\big(s+\pi/\lambda\big) - g(s)\right]\,ds.\end{aligned} \tag{4.148}$$

A partir deste instante inicia-se estimativas para os termos apresentados a direita da expressão (4.148), para tanto, defina inicialmente a função

$$\zeta_1(\lambda) = \sup_{s\in(0,\frac{\pi}{\lambda})} \sqrt{s}\,g(s).$$

Com isto em mente, usando propriedades de integrais e que g é positiva, segue que

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g(s)e^{-i\lambda s}\,ds\right| \le \int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g(s)\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} \frac{\sqrt{s}\,g(s)}{\sqrt{s}}\,ds.$$

Da definição de ζ_1 resulta que

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g(s)e^{-i\lambda s}\,ds\right| \leq \zeta_1(\lambda)\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} \frac{1}{\sqrt{s}}\,ds = 2\zeta_1(\lambda)\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}. \tag{4.149}$$

Por fim, veja que como g é decrescente e que $s \longmapsto \sqrt{s}$ é crescente, vem que

$$\zeta_1(\lambda) \leq \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\,g(0). \tag{4.150}$$

Usando (4.150) em (4.149), pode-se obter a estimativa

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g(s)e^{-i\lambda s}\,ds\right| \leq \frac{2\pi g(0)}{\lambda}. \tag{4.151}$$

Analogamente, defina

$$\zeta_2(\lambda) = \sup_{s\in(0,\frac{\pi}{\lambda})} \sqrt{s}\,g\big(s+\pi/\lambda\big),$$

e note que

$$\zeta_2(\lambda) \leq \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\,g\big(\pi/\lambda\big). \tag{4.152}$$

Assim, usando propriedades de integrais, pode-se escrever

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g\big(s+\pi/\lambda\big)e^{-i\lambda s}\,ds\right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g\big(s+\pi/\lambda\big)\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} \frac{\sqrt{s}\,g\big(s+\pi/\lambda\big)}{\sqrt{s}}\,ds,$$

ou ainda,

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g\big(s+\pi/\lambda\big)e^{-i\lambda s}\,ds\right| \leq \zeta_2(\lambda)\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} \frac{1}{\sqrt{s}}\,ds = 2\zeta_2(\lambda)\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}. \tag{4.153}$$

Fazendo uso da majoração (4.152) em (4.153), segue que

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g\big(s+\pi/\lambda\big)e^{-i\lambda s}\,ds\right| \leq \frac{2\pi g\big(\pi/\lambda\big)}{\lambda}. \tag{4.154}$$

Finalmente o último termo de (4.148) será analisado. Utilizando propriedades de integrais, pode-se escrever

$$\left|\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} e^{-i\lambda s}\left[g\big(s+\pi/\lambda\big)-g(s)\right]\,ds\right| \leq \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} \left|g\big(s+\pi/\lambda\big)-g(s)\right|\,ds, \tag{4.155}$$

mas devido as condições (4.7), tem-se que g é decrescente, portanto, como $\lambda > 0$,

$$\left|g\big(s+\pi/\lambda\big)-g(s)\right| = g(s) - g\big(s+\pi/\lambda\big).$$

Assim (4.155) pode ser reescrito como

$$\left|\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} e^{-i\lambda s}\left[g\big(s+\pi/\lambda\big)-g(s)\right]\,ds\right| \leq \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} g(s)\,ds - \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} g\big(s+\pi/\lambda\big)\,ds. \tag{4.156}$$

Todavia, fazendo a substituição de variável $u = s + \pi/\lambda$, vem que

$$-\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} g\big(s+\pi/\lambda\big)\,ds = -\int_{\frac{2\pi}{\lambda}}^{\infty} g\big(u\big)\,du. \tag{4.157}$$

Consequentemente, substituindo (4.157) em (4.156) e usando que $\lambda > 0$,

$$\left|\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} e^{-i\lambda s}\left[g\big(s+\pi/\lambda\big)-g(s)\right]\,ds\right| \leq \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} g(s)\,ds - \int_{\frac{2\pi}{\lambda}}^{\infty} g(s)\,ds = \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\frac{2\pi}{\lambda}} g(s)\,ds.$$

Considere $u = \lambda s$, assim

$$\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\frac{2\pi}{\lambda}} g(s)\,ds = \frac{1}{\lambda}\int_{\pi}^{2\pi} g\big(u/\lambda\big)\,du,$$

logo,

$$\left|\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} e^{-i\lambda s}\left[g\big(s+\pi/\lambda\big)-g(s)\right]\,ds\right| \leq \frac{1}{\lambda}\int_{\pi}^{2\pi} g\big(s/\lambda\big)\,ds.$$

Usando, por fim, a hipótese $g'(s) \leq -k_1 g(s)$, chega-se que

$$\left|\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} e^{-i\lambda s}\left[g\big(s+\pi/\lambda\big)-g(s)\right]\,ds\right| \leq -\frac{1}{\lambda k_1}\int_{\pi}^{2\pi} g'\big(s/\lambda\big)\,ds = -\frac{1}{\lambda k_1}\left[g\big(2\pi/\lambda\big)-g\big(\pi/\lambda\big)\right] \tag{4.158}$$

Desta forma, multiplicando (4.148) por λ, tomando o módulo e usando a Desigualdade Triangular, segue que

$$\begin{aligned}\left|\lambda\int_{0}^{\infty} g(s)e^{-i\lambda s}\,ds\right| \;&\leq\; \left|\lambda\int_{0}^{\frac{\pi}{\lambda}} g(s)e^{-i\lambda s}\,ds\right| + \left|\frac{\lambda}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{\lambda}} g\big(s+\pi/\lambda\big)e^{-i\lambda s}\,ds\right| \\ &\quad + \left|\frac{\lambda}{2}\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} e^{-i\lambda s}\left[g\big(s+\pi/\lambda\big)-g(s)\right]\,ds\right|.\end{aligned}$$

Usando as estimativas (4.151), (4.154) e (4.158), vem que

$$\begin{aligned}\left|\lambda\int_{0}^{\infty} g(s)e^{-i\lambda s}\,ds\right| \;&\leq\; \lambda\frac{2\pi g(0)}{\lambda} + \frac{\lambda}{2}\frac{2\pi g\big(\pi/\lambda\big)}{\lambda} - \frac{\lambda}{2}\frac{1}{\lambda k_1}\left[g\big(2\pi/\lambda\big)-g\big(\pi/\lambda\big)\right] \\ &\leq\; 2\pi g(0) + \pi g\big(\pi/\lambda\big) - \frac{1}{2k_1}\left[g\big(2\pi/\lambda\big)-g\big(\pi/\lambda\big)\right].\end{aligned}$$

Consequentemente, veja que

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left|\lambda\int_0^{\infty} g(s)e^{-i\lambda s}\,ds\right| \leq 3\pi g(0),$$

assim, o resultado segue. ■

A versão original do Lema 4.16 foi provada por Rivera & Sare e pode ser encontrada em [17]. Embora a demonstração recém exibida tenha utilizado as mesmas ideias que a dos autores apontados, adaptações foram feitas buscando manter a proposta dita no início do capítulo, remover hipóteses da função núcleo de memória g.

Com isto, tem-se o seguinte resultado.

Teorema 4.17. *Seja* g *uma função que satisfaz* (4.7). *Se o* C_0*-semigrupo de contrações* $S(t) = e^{A_1 t}$ *associado ao sistema Timoshenko com história e Lei de Fourier é exponencialmente estável, então* $\chi = 0$.

Demonstração. A prova seguirá ao observar que o segundo item do Teorema de Prüss (veja Teorema 2.72) não se verifica quando

$$\chi = \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \neq 0. \tag{4.159}$$

Mais especificamente, será provado que (4.159) implica em

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} \left\|(i\lambda I - A_1)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} = \infty.$$

Para isso, basta mostrar que existe uma sequência de números reais $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{|n|\to\infty} |\lambda_n| = \infty,$$

e uma sequência não nula e limitada $F_n = (f_n^1, f_n^2, f_n^3, f_n^4, f_n^5, f_n^6) \in \mathcal{H}_1$, com

$$\lim_{n\to\infty} \left\|(i\lambda_n I - A_1)^{-1} F_n\right\|_{\mathcal{H}_1} = \infty.$$

Desta forma, para cada $n \in \mathbb{N}$ considere

$$F_n = \Bigg(0, \underbrace{\rho_1^{-1}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}_{=:f_n^2}, 0, 0, 0, 0\Bigg),$$

Mediante a continuidade da função cosseno, tem-se que $f_n^2 \in L^2(0,l)$. Mais ainda, note que

$$\int_0^l f_n^2(x)\,dx = \int_0^l \frac{1}{\rho_1}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\,dx = \frac{l}{\rho_1 n\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\Big|_0^l = 0,$$

ou seja, $f_n^2 \in L_*^2(0,l)$. Além disto, usando as identidades trigonométricas

$$\cos^2(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2u) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}^2(u) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2u),$$

pode-se obter

$$\|F_n\|_{\mathcal{H}_1}^2 = \rho_1 \|f_n^2\|_{L^2}^2 = \rho_1 \int_0^l |f_n^2(x)|^2\,dx = \frac{1}{\rho_1}\int_0^l \cos^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{l}{2\rho_1}, \tag{4.160}$$

isto é, F_n é uma sequência limitada em $\mathcal{H}_1$. Por outro lado, note que $i\mathbb{R} \subset \varrho(A_1)$ independentemente de (4.159), por isso, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um único $U_n \in D(A_1)$ solução de

$$(i\lambda_n I - A_1)U_n = F_n. \tag{4.161}$$

Em termos de suas componentes, a solução U_n de (4.161) satisfaz

$$i\lambda_n\varphi_n - \Phi_n = 0, \tag{4.162}$$

$$i\lambda_n\rho_1\Phi_n - k\varphi_{n,xx} - k\psi_{n,x} = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{4.163}$$

$$i\lambda_n\psi_n - \Psi_n = 0, \tag{4.164}$$

$$i\lambda_n\rho_2\Psi_n - \tilde{b}\psi_{n,xx} - \int_0^\infty g(s)\eta_{n,xx}(s)\,ds + k\varphi_{n,x} + k\psi_n + \delta\theta_{n,x} = 0, \tag{4.165}$$

$$i\lambda_n\rho_3\theta_n - \tilde{\beta}\theta_{n,xx} + \delta\Psi_{n,x} = 0, \tag{4.166}$$

$$i\lambda_n\eta_n + \eta_{n,s} - \Psi_n = 0. \tag{4.167}$$

Multiplicando a identidade (4.167) por $e^{i\lambda_n s}$, pode-se obter

$$\frac{d}{ds}\big(\eta_n e^{i\lambda_n s}\big) = i\lambda_n\eta_n e^{i\lambda_n s} + \eta_{n,s}e^{i\lambda_n s} = \Psi_n e^{i\lambda_n s}.$$

Integrando de 0 a s, vem que

$$\eta_n(s)e^{i\lambda_n s} = \Psi_n\int_0^s e^{i\lambda_n s}\,ds = \frac{\Psi_n}{i\lambda_n}\big(e^{i\lambda_n s} - 1\big),$$

ou seja,

$$\eta_n(s) = \frac{\Psi_n}{i\lambda_n}\big(1 - e^{-i\lambda_n s}\big), \quad s \geq 0. \tag{4.168}$$

Usando (4.162), (4.164) e (4.168) nas identidades (4.163), (4.165) e (4.166) e, lembrando que $\tilde{b} = b - b_0$, segue que a solução de (4.161) satisfaz

$$-\lambda_n^2\rho_1\varphi_n - k\varphi_{n,xx} - k\psi_{n,x} = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{4.169}$$

$$-\lambda_n^2\rho_2\psi_n - b\psi_{n,xx} + \int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds\,\psi_{n,xx} + k\varphi_{n,x} + k\psi_n + \delta\theta_{n,x} = 0, \tag{4.170}$$

$$i\lambda_n\rho_3\theta_n - \tilde{\beta}\theta_{n,xx} + i\lambda_n\delta\psi_{n,x} = 0, \tag{4.171}$$

Devido as condições de fronteira, pressupõe-se que

$$\varphi_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

$$\psi_n(x) = B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

$$\theta_n(x) = C_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

onde A_n, B_n e C_n serão determinados na sequência. Então, substituindo φ_n, ψ_n e θ_n em (4.169)-(4.171) observa-se que obter a solução do sistema (4.162)-(4.167) é equivalente a encontrar soluções A_n, B_n e C_n para o sistema

$$\left[-\lambda_n^2\rho_1 + k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right]A_n - k\left(\frac{n\pi}{l}\right)B_n = 1, \tag{4.172}$$

$$-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)A_n + \left[-\lambda_n^2\rho_2 + b\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds + k\right]B_n - \delta\left(\frac{n\pi}{l}\right)C_n = 0, \tag{4.173}$$

$$i\lambda_n\delta\left(\frac{n\pi}{l}\right)B_n + \left[i\lambda_n\rho_3 + \tilde{\beta}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right]C_n = 0. \tag{4.174}$$

Seja d um número real não nulo que será fixado posteriormente e considere $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como a seguinte sequência de números reais positivos

$$\lambda_n = \begin{cases} \left[\dfrac{k}{\rho_1}\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2 - \dfrac{d}{\rho_1}\right]^{\frac{1}{2}} & \text{se} \quad n^2 \geq \dfrac{dl^2}{k\pi^2}, \\ 0 & \text{se} \quad n^2 < \dfrac{dl^2}{k\pi^2}. \end{cases} \tag{4.175}$$

Com isto, garante-se que $|\lambda_n| \longrightarrow \infty$. Desta forma, para $n^2 \geq dl^2/k\pi^2$, a igualdade (4.172) pode ser reformulada como

$$dA_n - k\left(\frac{n\pi}{l}\right)B_n = 1,$$

e consequentemente,

$$B_n = \left(\frac{d}{k}A_n - \frac{1}{k}\right)\left(\frac{l}{n\pi}\right). \tag{4.176}$$

Utilizando a definição de λ_n, vem que

$$\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 = \frac{\rho_1\lambda_n^2}{k} + \frac{d}{k}, \tag{4.177}$$

consequentemente, da identidade (4.174) pode-se obter que

$$C_n = -\frac{i\lambda_n\delta}{i\lambda_n\rho_3 + \tilde{\beta}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}\left(\frac{n\pi}{l}\right)B_n = -\frac{i\lambda_n\delta}{i\lambda_n\rho_3 + \frac{\tilde{\beta}\rho_1\lambda_n^2}{k} + \frac{\tilde{\beta}d}{k}}\left(\frac{n\pi}{l}\right)B_n. \tag{4.178}$$

Substituindo (4.176) em (4.178), vem que

$$C_n = -\frac{i\lambda_n\delta d}{i\lambda_n\rho_3 k + \tilde{\beta}\rho_1\lambda_n^2 + \tilde{\beta}d}A_n + \frac{i\lambda_n\delta}{i\lambda_n\rho_3 k + \tilde{\beta}\rho_1\lambda_n^2 + \tilde{\beta}d} \tag{4.179}$$

Usando novamente (4.177), a identidade (4.173) pode ser reescrita como

$$\left[-\lambda_n^2\rho_2 + b\left(\frac{\rho_1\lambda_n^2}{k} + \frac{d}{k}\right) - \left(\frac{\rho_1\lambda_n^2}{k} + \frac{d}{k}\right)\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds + k\right]B_n$$
$$-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)A_n - \delta\left(\frac{n\pi}{l}\right)C_n = 0,$$

ou ainda

$$\begin{aligned}\left[-\lambda_n^2\rho_2 + \frac{\rho_1 b\lambda_n^2}{k} + \frac{bd}{k} - \frac{\rho_1\lambda_n^2}{k}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds - \frac{d}{k}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds + k\right]B_n \\ -k\left(\frac{n\pi}{l}\right)A_n - \delta\left(\frac{n\pi}{l}\right)C_n = 0.\end{aligned} \tag{4.180}$$

Substituindo as expressões (4.176) e (4.179) em (4.180), segue que

$$\begin{aligned}&\left[-\lambda_n^2\rho_2 + \frac{\rho_1 b\lambda_n^2}{k} + \frac{bd}{k} - \frac{\rho_1\lambda_n^2}{k}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds - \frac{d}{k}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds + k\right]\frac{d}{k}\left(\frac{l}{n\pi}\right)A_n \\ &-\left[-\lambda_n^2\rho_2 + \frac{\rho_1 b\lambda_n^2}{k} + \frac{bd}{k} - \frac{\rho_1\lambda_n^2}{k}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds - \frac{d}{k}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds + k\right]\frac{1}{k}\left(\frac{l}{n\pi}\right) \\ &-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)A_n + \frac{i\lambda_n\delta^2 d}{i\lambda_n\rho_3 k + \tilde{\beta}\rho_1\lambda_n^2 + \tilde{\beta}d}\left(\frac{n\pi}{l}\right)A_n - \frac{i\lambda_n\delta^2}{i\lambda_n\rho_3 k + \tilde{\beta}\rho_1\lambda_n^2 + \tilde{\beta}d}\left(\frac{n\pi}{l}\right) = 0.\end{aligned}$$

Multiplicando a igualdade anterior por $k\left(\frac{n\pi}{l}\right)$, obtém-se

$$\begin{aligned}&\left[b\chi\lambda_n^2 + \frac{bd}{k} - \frac{\rho_1\lambda_n^2}{k}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds - \frac{d}{k}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds + k - \frac{\rho_1 k\lambda_n^2}{d} - k + kK_n\right]dA_n \\ &= b\chi\lambda_n^2 + \frac{bd}{k} - \frac{\rho_1\lambda_n^2}{k}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds - \frac{d}{k}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds + k + kK_n,\end{aligned} \tag{4.181}$$

onde

$$K_n = \frac{i\lambda_n\delta^2}{i\lambda_n\rho_3 k + \tilde{\beta}\rho_1\lambda_n^2 + \tilde{\beta}d}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2. \tag{4.182}$$

Uma vez que, por hipótese, $\chi \neq 0$, considere $d = \dfrac{\rho_1 k}{b\chi}$. Com isto, segue que

$$b\chi\lambda_n^2 - \frac{\rho_1 k \lambda_n^2}{d} = 0.$$

Por conseguinte, tem-se que (4.181) se resume a

$$\left[\frac{bd}{k} - \frac{\rho_1\lambda_n^2}{k}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds - \frac{d}{k}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds + kK_n\right] dA_n$$
$$= b\chi\lambda_n^2 + \frac{bd}{k} - \frac{\rho_1\lambda_n^2}{k}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds - \frac{d}{k}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds + k + kK_n,$$

ou ainda,

$$P_n dA_n = b\chi\lambda_n^2 + k + P_n,$$

onde

$$P_n = \frac{bd}{k} - \frac{\rho_1\lambda_n^2}{k}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds - \frac{d}{k}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds + kK_n.$$

Por outro lado, observe que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{kK_n}{\lambda_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{i\lambda_n\delta^2 k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}{\lambda_n\left[i\lambda_n\rho_3 k + \tilde{\beta}\rho_1\lambda_n^2 + \tilde{\beta}d\right]} = \lim_{n\to\infty}\frac{i\delta^2(\rho_1\lambda_n^2 + d)}{i\lambda_n\rho_3 k + \tilde{\beta}\rho_1\lambda_n^2 + \tilde{\beta}d} = \frac{i\delta^2}{\tilde{\beta}}, \tag{4.183}$$

isto é, existe uma constante $c_7 > 0$ tal que

$$\frac{k|K_n|}{|\lambda_n|} \leq c_7, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{4.184}$$

Afirma-se que o subconjunto dos naturais dado por

$$\mathbb{N}' = \{n \in \mathbb{N} \quad | \quad P_n \neq 0 \text{ e } n^2 \geq dl^2/k\pi^2\}$$

contém infinitos elementos. Com efeito, se $P_n \neq 0$ para apenas um número finito de n's, vem que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica em

$$P_n = \frac{bd}{k} - \frac{\rho_1\lambda_n^2}{k}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds - \frac{d}{k}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds + kK_n = 0.$$

Além disso, se $n > n_0$ e $n^2 \geq dl^2/k\pi^2$, então

$$\frac{P_n}{\lambda_n} = \frac{bd}{k\lambda_n} - \frac{\rho_1\lambda_n}{k}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds - \frac{d}{k\lambda_n}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds + \frac{kK_n}{\lambda_n} = 0. \tag{4.185}$$

Por outro lado, usando as desigualdades Triangular e para integrais, pode-se obter

$$\left|\frac{bd}{k\lambda_n} - \frac{d}{k\lambda_n}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds\right| \leq \frac{b|d|}{k|\lambda_n|} + \frac{b_0|d|}{k|\lambda_n|},$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{bd}{k\lambda_n} - \frac{d}{k\lambda_n}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds = 0. \tag{4.186}$$

Consequentemente, usando (4.185), (4.186) e (4.183),vem que

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{\rho_1\lambda_n}{k}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds = -\frac{i\delta^2}{\tilde{\beta}},$$

ou equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds = \frac{ik\delta^2}{\rho_1\tilde{\beta}}. \tag{4.187}$$

A expressão (4.187) deve ser satisfeita para qualquer função g que respeita as hipóteses (4.7), particularmente para

$$g(s) = e^{-\alpha s}, \quad s \geq 0,$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha > 1/b$. Assim, se $g(s) = e^{-\alpha s}$, então

$$\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds = \int_0^\infty e^{-(\alpha+i\lambda_n)s}\,ds = \lim_{s\to 0}\frac{e^{-(\alpha+i\lambda_n)s}}{\alpha+i\lambda_n} - \lim_{s\to\infty}\frac{e^{-(\alpha+i\lambda_n)s}}{\alpha+i\lambda_n} = \frac{1}{\alpha+i\lambda_n},$$

portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds = \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{\alpha+i\lambda_n} = -i. \tag{4.188}$$

Da positividade das constantes k, ρ_1, $\tilde{\beta}$, segue que (4.188) contradiz (4.187). Logo, $\mathbb{N}'$ possui infinitos elementos.

Com isso em mente, vem que para $n \in \mathbb{N}'$, o coeficiente A_n é dado por

$$A_n = \frac{b\chi\lambda_n^2 + k}{P_n d} + \frac{P_n}{P_n d} = \frac{b\chi\lambda_n^2 + k}{P_n d} + \frac{1}{d}$$

Como consequência, afirma-se que existe uma constante $c_8 > 0$ tal que

$$\left|\frac{P_n}{\lambda_n}\right| \leq c_8, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}'. \tag{4.189}$$

Com efeito, da Desigualdade Triangular vem que

$$\left|\frac{P_n}{\lambda_n}\right| \leq \frac{b|d|}{k|\lambda_n|} + \frac{\rho_1}{k}\left|\lambda_n\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds\right| + \frac{b_0|d|}{k|\lambda_n|} + \frac{k|K_n|}{|\lambda_n|}.$$

A existência da constante c_8 segue de forma imediata ao aplicar o Lema 4.16, utilizar (4.184) e

observar que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{b|d|}{k|\lambda_n|} + \frac{b_0|d|}{k|\lambda_n|} = 0.$$
Portanto, tem-se da Desigualdade Triangular Inversa que
$$|A_n| \geq \left|\frac{b\chi\lambda_n^2 + k}{P_n d}\right| - \left|\frac{1}{d}\right|,$$
além disso, (4.189) permite escrever $|P_n| \leq c_8|\lambda_n|$, logo
$$|A_n| \geq \frac{|b\chi\lambda_n^2 + k|}{c_8|d||\lambda_n|} - \frac{1}{|d|}.$$
Aplicando mais uma vez a Desigualdade Triangular Inversa, segue que
$$|A_n| \geq \frac{|b\chi\lambda_n^2| - k}{c_8|d||\lambda_n|} - \frac{1}{|d|} = |\lambda_n|\left(\frac{b|\chi|}{c_8|d|} - \frac{k}{c_8|d|\lambda_n^2} - \frac{1}{|d||\lambda_n|}\right).$$
Uma vez que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{k}{c_8|d|\lambda_n^2} + \frac{1}{|d||\lambda_n|} = 0,$$
segue que para todo $\epsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}'$ tal que se $n > n_1$, então
$$\frac{k}{c_8|d|\lambda_n^2} + \frac{1}{|d||\lambda_n|} < \epsilon.$$
Particularmente, escolhendo $\epsilon = b|\chi|/2c_8|d| > 0$, resulta que para $n \in \mathbb{N}'$ com $n > n_1$, então
$$|A_n| > c|\lambda_n|, \tag{4.190}$$
onde $c = b|\chi|/2c_8|d|$. Finalmente, lembrando que $\Phi_n = i\lambda_n\varphi_n$, pode-se obter
$$\|U_n\|_{\mathcal{H}_1} \geq \sqrt{\rho_1}\|\Phi_n\|_{L^2} = \sqrt{\rho_1}\left(\int_0^l |i\lambda_n\varphi_n(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\rho_1}|\lambda_n A_n|\left(\int_0^l \cos^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$
Fazendo uso da identidade trigonométrica $2\cos^2(u) = 1 + \cos(2u)$, vem que
$$\|U_n\|_{\mathcal{H}_1} \geq \frac{\sqrt{\rho_1}\sqrt{l}}{\sqrt{2}}|\lambda_n A_n|.$$
Por conseguinte, utilizando a desigualdade (4.190) vem que para para $n \in \mathbb{N}'$ com $n > n_1$, vale
$$\|(i\lambda_n I - A_1)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_1} = \|U_n\|_{\mathcal{H}_1} > \frac{\sqrt{\rho_1}\sqrt{l}\,c}{\sqrt{2}}|\lambda_n|^2.$$

Assim, visto que F_n é uma sequência limitada em $\mathcal{H}_1$, resulta que

$$\left\|(i\lambda_n I - A_1)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} \geq \frac{\|(i\lambda_n I - A_1)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_1}}{\|F_n\|_{\mathcal{H}_1}} \longrightarrow \infty,$$

finalizando a demonstração. ■

Com base nos teoremas 4.15 e 4.17, tem-se que a igualdade de velocidade de propagação de ondas é uma condição necessária e suficiente para que a solução do problema possua decaimento exponencial. Assim, torna-se razoável o questionamento em respeito ao comportamento da solução quando $\chi \neq 0$. À vista disso, na próxima seção será provado que a solução do sistema decai na mesma taxa que uma função do tipo polinomial independentemente de relações entre as constantes do sistema.

4.3 Estabilidade Polinomial

Nesta seção será provado que independentemente de relações entre os coeficientes, o sistema de Timoshenko com história e Lei de Fourier é polinomialmente estável. Mais precisamente, para cada dado inicial U_0 no domínio de A_1, resultará que a solução do sistema garantida pelo Teorema 4.6 decai para zero com taxa ótima $1/\sqrt{t}$. A prova será realizada mediante a verificação do item (i) do Teorema de Borichev & Tomilov (veja Teorema 2.76).

Considere inicialmente a equação resolvente

$$(i\lambda I - A_1)U = F, \tag{4.191}$$

a qual, em termos de suas componentes pode ser escrita como

$$i\lambda\varphi - \Phi = f_1 \quad \text{em} \quad H^1_*(0,l), \tag{4.192}$$

$$i\lambda\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi)_x = \rho_1 f_2 \quad \text{em} \quad L^2_*(0,l), \tag{4.193}$$

$$i\lambda\psi - \Psi = f_3 \quad \text{em} \quad H^1_0(0,l), \tag{4.194}$$

$$i\lambda\rho_2\Psi - \tilde{b}\psi_{xx} - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x = \rho_2 f_4 \text{ em } L^2(0,l), \tag{4.195}$$

$$i\lambda\rho_3\theta - \tilde{\beta}\theta_{xx} + \delta\Psi_x = \rho_3 f_5 \quad \text{em} \quad L^2_*(0,l), \tag{4.196}$$

$$i\lambda\eta + \eta_s - \Psi = f_6 \quad \text{em} \quad L^2_g\big(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l)\big). \tag{4.197}$$

Teorema 4.18. *Seja g uma função que satisfaz* (4.7)*. Se $\chi \neq 0$, então o C_0-semigrupo de contrações $S(t) = e^{A_1 t}$ associado ao sistema Timoshenko com história e Lei de Fourier é polinomialmente estável com taxa ótima de decaimento $1/\sqrt{t}$.*

Demonstração. Observe inicialmente que a desigualdade (4.143) é obtida independentemente de relações entre os coeficientes do sistema, assim, tem-se que existe uma constante positiva c_7

tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq c_7|\chi|\left|\big(\Psi_x, \Phi\big)_{L^2}\right| + c_7\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}, \tag{4.198}$$

onde c_7 é dada por

$$c_7 = \max\left\{28b,\ 2c_2 + 2c_3 + \frac{c_3^2}{2\tilde{b}} + \frac{c_3^2}{2k} + 4c_4 + \frac{2c_4^2}{k} + 2c_6 + 14c_5\right\}.$$

A partir deste momento, serão feitas estimativas para o produto interno que encontra-se em (4.198). Para tanto, observe que a identidade (4.196) fornece $\delta\Psi_x = -i\lambda\rho_3\theta + \tilde{\beta}\theta_{xx} + \rho_3 f_5$, portanto

$$\big(\Psi_x, \Phi\big)_{L^2} = \frac{1}{\delta}\big(-i\lambda\rho_3\theta + \tilde{\beta}\theta_{xx} + \rho_3 f_5, \Phi\big)_{L^2} = -\frac{i\lambda\rho_3}{\delta}\big(\theta, \Phi\big)_{L^2} + \frac{\tilde{\beta}}{\delta}\big(\theta_{xx}, \Phi\big)_{L^2} + \frac{\rho_3}{\delta}\big(f_5, \Phi\big)_{L^2}.$$

Integrando por partes e lembrando que $\theta_x \in H_0^1(0,l)$, segue que

$$\big(\Psi_x, \Phi\big)_{L^2} = \underbrace{-\frac{i\lambda\rho_3}{\delta}\big(\theta, \Phi\big)_{L^2}}_{=:I_7} \underbrace{-\frac{\tilde{\beta}}{\delta}\big(\theta_x, \Phi_x\big)_{L^2}}_{=:I_8} + \frac{\rho_3}{\delta}\big(f_5, \Phi\big)_{L^2}. \tag{4.199}$$

Usando (4.193), I_7 pode ser reescrito como

$$I_7 = \frac{\rho_3}{\delta}\big(\theta, i\lambda\Phi\big)_{L^2} = \frac{\rho_3}{\delta\rho_1}\big(\theta, k(\varphi_x + \psi)_x + \rho_1 f_2\big)_{L^2} = \frac{\rho_3 k}{\delta\rho_1}\big(\theta, (\varphi_x + \psi)_x\big)_{L^2} + \frac{\rho_3}{\delta}\big(\theta, f_2\big)_{L^2},$$

integrando por partes, obtém-se

$$I_7 = -\frac{\rho_3 k}{\delta\rho_1}\big(\theta_x, \varphi_x + \psi\big)_{L^2} + \frac{\rho_3}{\delta}\big(\theta, f_2\big)_{L^2}. \tag{4.200}$$

Por outro lado, da identidade (4.192), vem que $\Phi_x = i\lambda\varphi_x - f_{1,x}$, consequentemente

$$I_8 = -\frac{\tilde{\beta}}{\delta}\big(\theta_x, i\lambda\varphi_x - f_{1,x}\big)_{L^2} = \frac{i\lambda\tilde{\beta}}{\delta}\big(\theta_x, \varphi_x\big)_{L^2} + \frac{\tilde{\beta}}{\delta}\big(\theta_x, f_{1,x}\big)_{L^2}. \tag{4.201}$$

Substituindo as expressões (4.200) e (4.201) em (4.199), segue que

$$\begin{aligned}\big(\Psi_x, \Phi\big)_{L^2} \quad = \quad & -\frac{\rho_3 k}{\delta\rho_1}\big(\theta_x, \varphi_x + \psi\big)_{L^2} + \frac{\rho_3}{\delta}\big(\theta, f_2\big)_{L^2} + \frac{i\lambda\tilde{\beta}}{\delta}\big(\theta_x, \varphi_x\big)_{L^2} \\ & + \frac{\tilde{\beta}}{\delta}\big(\theta_x, f_{1,x}\big)_{L^2} + \frac{\rho_3}{\delta}\big(f_5, \Phi\big)_{L^2},\end{aligned}$$

ou ainda, somando e subtraindo ψ e f_3 nos termos convenientes, tem-se

$$
\begin{aligned}
\big(\Psi_x,\Phi\big)_{L^2} &= -\frac{\rho_3 k}{\delta\rho_1}\big(\theta_x,\varphi_x+\psi\big)_{L^2}+\frac{\rho_3}{\delta}\big(\theta,f_2\big)_{L^2}+\frac{i\lambda\tilde{\beta}}{\delta}\big(\theta_x,\varphi_x+\psi\big)_{L^2}-\frac{i\lambda\tilde{\beta}}{\delta}\big(\theta_x,\psi\big)_{L^2}\\
&\quad+\frac{\tilde{\beta}}{\delta}\big(\theta_x,f_{1,x}+f_3\big)_{L^2}-\frac{\tilde{\beta}}{\delta}\big(\theta_x,f_3\big)_{L^2}+\frac{\rho_3}{\delta}\big(f_5,\Phi\big)_{L^2}. \qquad (4.202)
\end{aligned}
$$

Por fim, considerando o módulo da identidade (4.202) e usando a Desigualdade Triangular, vem que

$$
\begin{aligned}
\left|\big(\Psi_x,\Phi\big)_{L^2}\right| &\leq \frac{\rho_3 k}{\delta\rho_1}\left|\big(\theta_x,\varphi_x+\psi\big)_{L^2}\right|+\frac{\rho_3}{\delta}\left|\big(\theta,f_2\big)_{L^2}\right|+\frac{|\lambda|\tilde{\beta}}{\delta}\left|\big(\theta_x,\varphi_x+\psi\big)_{L^2}\right|\\
&\quad+\frac{|\lambda|\tilde{\beta}}{\delta}\left|\big(\theta_x,\psi\big)_{L^2}\right|+\frac{\tilde{\beta}}{\delta}\left|\big(\theta_x,f_{1,x}+f_3\big)_{L^2}\right|+\frac{\tilde{\beta}}{\delta}\left|\big(\theta_x,f_3\big)_{L^2}\right|+\frac{\rho_3}{\delta}\left|\big(f_5,\Phi\big)_{L^2}\right|.
\end{aligned}
$$

Aplicando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Poincaré, obtém-se

$$
\begin{aligned}
\left|\big(\Psi_x,\Phi\big)_{L^2}\right| &\leq \frac{\rho_3 k}{\delta\rho_1}\|\theta_x\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}+\frac{\rho_3}{\delta}\|\theta\|_{L^2}\|f_2\|_{L^2}+\frac{|\lambda|\tilde{\beta}}{\delta}\|\theta_x\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}\\
&\quad+\frac{|\lambda|\tilde{\beta}l}{\delta}\|\theta_x\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2}+\frac{\tilde{\beta}}{\delta}\|\theta_x\|_{L^2}\|f_{1,x}+f_3\|_{L^2}+\frac{\tilde{\beta}l}{\delta}\|\theta_x\|_{L^2}\|f_{3,x}\|_{L^2}\\
&\quad+\frac{\rho_3}{\delta}\|f_5\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2}\\
&\leq \frac{\rho_3\sqrt{k}}{\delta\rho_1}\|\theta_x\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}_1}+\frac{|\lambda|\tilde{\beta}}{\delta\sqrt{k}}\|\theta_x\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}_1}+\frac{|\lambda|\tilde{\beta}l}{\delta\sqrt{\tilde{b}}}\|\theta_x\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}_1}\\
&\quad+\frac{\tilde{\beta}}{\delta\sqrt{k}}\|\theta_x\|_{L^2}\|F\|_{\mathcal{H}_1}+\frac{\tilde{\beta}l}{\delta\sqrt{\tilde{b}}}\|\theta_x\|_{L^2}\|F\|_{\mathcal{H}_1}+\frac{2\sqrt{\rho_3}}{\delta\sqrt{\rho_1}}\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.
\end{aligned}
$$

Usando a Desigualdade de Young com $\varepsilon/3$, vem que

$$
\begin{aligned}
\left|\big(\Psi_x,\Phi\big)_{L^2}\right| &\leq \frac{\varepsilon}{3}\|U\|^2_{\mathcal{H}_1}+\frac{3\rho_3^2 k}{4\varepsilon\delta^2\rho_1^2}\|\theta_x\|^2_{L^2}+\frac{\varepsilon}{3}\|U\|^2_{\mathcal{H}_1}+\frac{3|\lambda|^2\tilde{\beta}^2}{4\varepsilon\delta^2 k}\|\theta_x\|^2_{L^2}\\
&\quad+\frac{\varepsilon}{3}\|U\|^2_{\mathcal{H}_1}+\frac{3|\lambda|^2\tilde{\beta}^2 l^2}{4\varepsilon\delta^2\tilde{b}}\|\theta_x\|^2_{L^2}\\
&\quad+\frac{\tilde{\beta}}{\delta\sqrt{k}}\|\theta_x\|_{L^2}\|F\|_{\mathcal{H}_1}+\frac{\tilde{\beta}l}{\delta\sqrt{\tilde{b}}}\|\theta_x\|_{L^2}\|F\|_{\mathcal{H}_1}+\frac{2\sqrt{\rho_3}}{\delta\sqrt{\rho_1}}\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}\\
&= \varepsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_1}+\left[\frac{3\rho_3^2 k}{4\varepsilon\delta^2\rho_1^2}+\frac{3|\lambda|^2\tilde{\beta}^2}{4\varepsilon\delta^2 k}+\frac{3|\lambda|^2\tilde{\beta}^2 l^2}{4\varepsilon\delta^2\tilde{b}}\right]\|\theta_x\|^2_{L^2}\\
&\quad+\frac{\tilde{\beta}}{\delta\sqrt{k}}\|\theta_x\|_{L^2}\|F\|_{\mathcal{H}_1}+\frac{\tilde{\beta}l}{\delta\sqrt{\tilde{b}}}\|\theta_x\|_{L^2}\|F\|_{\mathcal{H}_1}+\frac{2\sqrt{\rho_3}}{\delta\sqrt{\rho_1}}\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.
\end{aligned}
$$

Aplicando novamente a Desigualdade de Young, porém, com $\tilde{\varepsilon} = 1/2$, resulta que

$$
\begin{aligned}
\left|\left(\Psi_x, \Phi\right)_{L^2}\right| &\leq \varepsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|F\|^2_{\mathcal{H}_1} + \frac{2\sqrt{\rho_3}}{\delta\sqrt{\rho_1}}\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1} \\
&\quad + \left[\frac{3\rho_3^2 k}{4\varepsilon\delta^2\rho_1^2} + \frac{3|\lambda|^2\tilde{\beta}^2}{4\varepsilon\delta^2 k} + \frac{3|\lambda|^2\tilde{\beta}^2 l^2}{4\varepsilon\delta^2\tilde{b}} + \frac{\tilde{\beta}^2}{2\delta^2 k} + \frac{\tilde{\beta}^2 l^2}{2\delta^2\tilde{b}}\right]\|\theta_x\|^2_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Além disso, se $|\lambda| \geq 1$ segue do Lema 4.9 que

$$
\begin{aligned}
\left|\left(\Psi_x, \Phi\right)_{L^2}\right| &\leq \varepsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|F\|^2_{\mathcal{H}_1} + \frac{2\sqrt{\rho_3}}{\delta\sqrt{\rho_1}}\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1} \\
&\quad + c_1\left[\frac{3\rho_3^2 k}{4\varepsilon\delta^2\rho_1^2} + \frac{3\tilde{\beta}^2}{4\varepsilon\delta^2 k} + \frac{3\tilde{\beta}^2 l^2}{4\varepsilon\delta^2\tilde{b}} + \frac{\tilde{\beta}^2}{2\delta^2 k} + \frac{\tilde{\beta}^2 l^2}{2\delta^2\tilde{b}}\right]|\lambda|^2\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1} \\
&\leq \varepsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|F\|^2_{\mathcal{H}_1} + c_8|\lambda|^2\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}, \qquad (4.203)
\end{aligned}
$$

onde

$$
c_8 = \frac{2\sqrt{\rho_3}}{\delta\sqrt{\rho_1}} + c_1\left(\frac{3\rho_3^2 k}{4\varepsilon\delta^2\rho_1^2} + \frac{3\tilde{\beta}^2}{4\varepsilon\delta^2 k} + \frac{3\tilde{\beta}^2 l^2}{4\varepsilon\delta^2\tilde{b}} + \frac{\tilde{\beta}^2}{2\delta^2 k} + \frac{\tilde{\beta}^2 l^2}{2\delta^2\tilde{b}}\right).
$$

Usando (4.203) em (4.198), pode-se obter

$$
\|U\|^2_{\mathcal{H}_1} \leq \varepsilon c_7|\chi|\|U\|^2_{\mathcal{H}_1} + c_7|\chi|\|F\|^2_{\mathcal{H}_1} + c_8 c_7|\chi||\lambda|^2\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1} + c_7\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.
$$

Escolhendo $\varepsilon = 1/4c_7|\chi|$, tem-se que para $|\lambda| \geq 1$ vale

$$
\frac{3}{4}\|U\|^2_{\mathcal{H}_1} \leq c_7|\chi|\|F\|^2_{\mathcal{H}_1} + \left[c_8 c_7|\chi| + c_7\right]|\lambda|^2\|F\|_{\mathcal{H}_1}\|U\|_{\mathcal{H}_1}.
$$

Aplicando Young com $\varepsilon = 1/4$ e usando que $|\lambda| \geq 1$, vem que

$$
\frac{1}{2}\|U\|^2_{\mathcal{H}_1} \leq c_7|\chi|\|F\|^2_{\mathcal{H}_1} + \left[c_8 c_7|\chi| + c_7\right]^2|\lambda|^4\|F\|^2_{\mathcal{H}_1} \leq \left[c_7|\chi| + \left(c_8 c_7|\chi| + c_7\right)^2\right]|\lambda|^4\|F\|^2_{\mathcal{H}_1},
$$

e portanto,

$$
\|U\|^2_{\mathcal{H}_1} \leq 2\left[c_7|\chi| + \left(c_8 c_7|\chi| + c_7\right)^2\right]|\lambda|^4\|F\|^2_{\mathcal{H}_1}.
$$

Mais ainda, denotando por

$$
c^2 = 2\left[c_7|\chi| + \left(c_8 c_7|\chi| + c_7\right)^2\right],
$$

resulta que existe uma constante positiva c tal que $\|U\|_{\mathcal{H}_1} \leq c|\lambda|^2\|F\|_{\mathcal{H}_1}$, com $U \in D(A_1)$ solução da equação resolvente $(i\lambda I - A_1)U = F$. Consequentemente, vem que

$$
\|(i\lambda I - A_1)^{-1}F\|_{\mathcal{H}_1} \leq c|\lambda|^2\|F\|_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall\, F \in \mathcal{H}_1,
$$

desde que $|\lambda| \geq 1$. Mais precisamente, se $|\lambda| \geq 1$ tem-se

$$\left\|(i\lambda I - A_1)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} \leq c|\lambda|^2, \tag{4.204}$$

ou ainda, usando a Notação 2.75, pode-se se escrever (4.204) como

$$\left\|(i\lambda I - A_1)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} = \mathcal{O}(|\lambda|^2), \quad \lambda \longrightarrow \infty.$$

Desta forma, aplicando o resultado de Borichev & Tomilov (veja Teorema 2.76), obtém-se

$$\|S(t)A_1^{-1}u\|_{\mathcal{H}_1} = o(t^{-1/2}), \quad t \longrightarrow \infty,\, u \in \mathcal{H}_1,$$

isto é,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\|S(t)A_1^{-1}u\|_{\mathcal{H}_1}}{t^{-1/2}} = 0, \quad u \in \mathcal{H}_1.$$

Da definição de limite no infinito, tem-se que para $\epsilon = 1$ existe $t_0 > 0$ tal que, se $t > t_0$, então

$$\frac{\|S(t)A_1^{-1}u\|_{\mathcal{H}_1}}{t^{-1/2}} < 1, \quad u \in \mathcal{H}_1,$$

ou melhor,

$$\|S(t)A_1^{-1}u\|_{\mathcal{H}_1} < \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad u \in \mathcal{H}_1.$$

Para cada dado inicial $U_0 \in D(A_1)$, considere

$$u = \frac{A_1U_0}{\|U_0\|_{D(A_1)}},$$

disto vem que se $t > t_0$, então

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}_1} < \frac{\|U_0\|_{D(A_1)}}{\sqrt{t}}.$$

Com isto em mente, seja $M = \max\left\{1, \sqrt{t_0}\right\}$. Assim, para $t \in (0, t_0]$ tem-se

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}_1} \leq \|U_0\|_{D(A_1)} \leq \frac{M\|U_0\|_{D(A_1)}}{\sqrt{t_0}} \leq \frac{M\|U_0\|_{D(A_1)}}{\sqrt{t}}.$$

Portanto, como $M \geq 1$, segue que

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}_1} \leq \frac{M\|U_0\|_{D(A_1)}}{\sqrt{t}}, \quad t > 0, \tag{4.205}$$

ou seja, semigrupo $S(t) = e^{A_1t}$ decai polinomialmente com taxa $1/\sqrt{t}$.

A partir deste instante, será provado que a taxa $1/\sqrt{t}$ não pode ser melhorada.

De fato, suponha que existe um número $\gamma > 0$ e alguma constante $M > 0$ tais que para todo $U_0 \in D(A_1)$

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}_1} \leq \frac{M\|U_0\|_{D(A_1)}}{t^{\frac{1}{2-\gamma}}}, \quad t > 0. \tag{4.206}$$

Visto que $0 \in \varrho(A_1)$, vem que para cada $U_0 \in D(A_1)$ existe único $F \in \mathcal{H}_1$ de tal forma que

$$A_1 U_0 = F \quad \Longleftrightarrow \quad U_0 = A_1^{-1}F. \tag{4.207}$$

Usando (4.207), segue que (4.206) pode ser reescrito como

$$\|S(t)A_1^{-1}F\|_{\mathcal{H}_1} \leq \frac{M\|U_0\|_{D(A_1)}}{t^{\frac{1}{2-\gamma}}}, \quad t > 0.$$

Todavia, lembrando que A_1^{-1} é um operador limitado, vem da definição de norma de $D(A_1)$ que

$$M\|U_0\|_{D(A_1)} = M\big(\|A_1^{-1}F\|_{\mathcal{H}_1} + \|F\|_{\mathcal{H}_1}\big) \leq M\big(\|A_1^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} + 1\big)\|F\|_{\mathcal{H}_1},$$

consequentemente,

$$\frac{\|S(t)A_1^{-1}F\|_{\mathcal{H}_1}}{\|F\|_{\mathcal{H}_1}} \leq \frac{M\big(\|A_1^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} + 1\big)}{t^{\frac{1}{2-\gamma}}}, \quad t > 0,$$

para todo $F \in \mathcal{H}_1$. Da definição de norma do espaço $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$, obtém-se que

$$\|S(t)A_1^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} \leq \frac{M\big(\|A_1^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} + 1\big)}{t^{\frac{1}{2-\gamma}}}, \quad t > 0,$$

ou ainda

$$\|S(t)A_1^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} = \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2-\gamma}}), \quad t \longrightarrow \infty.$$

Devido as equivalências oferecidas pelo Teorema de Borichev & Tomilov, seque que

$$\|(i\lambda I - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} = \mathcal{O}(|\lambda|^{2-\gamma}), \quad \lambda \longrightarrow \infty,$$

isto é, existe uma constante positiva $\hat{c}$, tal que para $|\lambda|$ suficientemente grande

$$\|(i\lambda I - A_1)^{-1}F\|_{\mathcal{H}_1} \leq \hat{c}|\lambda|^{2-\gamma}\|F\|_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall\, F \in \mathcal{H}_1. \tag{4.208}$$

Contudo, (4.208) implica em

$$|\lambda|^{\gamma-2}\,\|(i\lambda I - A_1)^{-1}F\|_{\mathcal{H}_1} \leq \hat{c}\|F\|_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall\, F \in \mathcal{H}_1. \tag{4.209}$$

Neste momento, recorde que no Teorema 4.17 da Seção 4.2 ficou provado que existe uma sequência de números reais $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e uma sequência $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{H}_1$, tais que

$$\|(i\lambda_n I - A_1)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_1} > \frac{\sqrt{\rho_1}\sqrt{l}\,c}{\sqrt{2}}|\lambda_n|^2 \longrightarrow \infty, \tag{4.210}$$

mais ainda, da expressão (4.160) tem-se que F_n é limitada com

$$\|F_n\|_{\mathcal{H}_1} = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{2}\sqrt{\rho_1}}.$$

Consequentemente, a desigualdade (4.210) pode ser reescrita como

$$\|(i\lambda_n I - A_1)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_1} > \rho_1 c|\lambda_n|^2\|F_n\|_{\mathcal{H}_1},$$

ou melhor, multiplicando a desigualdade por $|\lambda_n|^{\gamma-2}$, segue que

$$|\lambda_n|^{\gamma-2}\|(i\lambda_n I - A_1)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_1} > \rho_1 c|\lambda_n|^{\gamma}\|F_n\|_{\mathcal{H}_1} \longrightarrow \infty. \tag{4.211}$$

Por outro lado, a identidade (4.209) é satisfeita em particular para λ_n e F_n, ou seja,

$$|\lambda_n|^{\gamma-2}\,\|(i\lambda_n I - A_1)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_1} \leq \hat{c}\|F_n\|_{\mathcal{H}_1}, \tag{4.212}$$

o que contradiz (4.211), visto que F_n é uma sequência limitada em $\mathcal{H}_1$. Logo, a taxa $1/\sqrt{t}$ é ótima, como desejado. ■

Vale frisar que em [21] os autores não discutem o comportamento da solução quando $\chi \neq 0$ e, além disso, resultados equivalentes ao Teorema 4.18 não foram encontrados na literatura.

Dado o exposto, encerram-se as discussões acerca do problema de Timoshenko com história e Lei de Fourier. No capítulo seguinte resultados similares serão exibidos para o caso em que a Lei de Cattaneo é considerada para o fluxo de calor. Vale ressaltar que as notações adotadas para representar termos ou constantes no presente capítulo serão reempregadas em outras partes do trabalho sem que existam relações entre as mesmas.

5 SISTEMA DE TIMOSHENKO COM HISTÓRIA E LEI DE CATTANEO

O objetivo deste capítulo é fazer um estudo detalhado dos resultados de existência e unicidade de solução apresentados em [21]. Posteriormente, serão exibidos resultados sobre o comportamento assintótico da solução. Para tal propósito, as ideias indicadas em [7] foram fundamentais. De forma mais precisa, o sistema a ser estudado é

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x+\psi)_x = 0 & \text{em } (0,l)\times(0,\infty), \\ \rho_2\psi_{tt} - \tilde{b}\psi_{xx} - \displaystyle\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds + k(\varphi_x+\psi) + \delta\theta_x = 0 & \text{em } (0,l)\times(0,\infty), \\ \rho_3\theta_t + q_x + \delta\psi_{xt} = 0 & \text{em } (0,l)\times(0,\infty), \\ \tau q_t + \beta q + \theta_x = 0 & \text{em } (0,l)\times(0,\infty), \\ \eta_t + \eta_s - \psi_t = 0 & \text{em } (0,l)\times(0,\infty)^2, \end{cases} \tag{5.1}$$

com condições iniciais dadas por

$$\begin{gathered} \varphi(\cdot,0)=\varphi_0, \quad \varphi_t(\cdot,0)=\varphi_1, \quad \psi(\cdot,0)=\psi_0, \quad \psi_t(\cdot,0)=\psi_1, \quad \theta(\cdot,0)=\theta_0, \\ q(\cdot,0)=q_0, \quad \eta(\cdot,0,s)=\psi_0-\psi(\cdot,-s)=:\eta_0(\cdot,s) \quad \text{em} \quad (0,l), \end{gathered} \tag{5.2}$$

e condições de fronteira do tipo Dirichlet-Neumann, a saber

$$\begin{gathered} \varphi_x(0,\cdot)=\varphi_x(l,\cdot)=\psi(0,\cdot)=\psi(l,\cdot)=q(0,\cdot)=q(l,\cdot)=0 \ \text{ em } \ (0,\infty), \\ \eta(0,\cdot\,,\cdot\,)=\eta(l,\cdot\,,\cdot\,)=0 \ \text{ em } \ (0,\infty)^2, \\ \eta(\cdot\,,\cdot\,,0)=\lim_{s\to 0}\eta(\cdot\,,\cdot\,,s)=0 \ \text{ em } (0,l)\times(0,\infty). \end{gathered} \tag{5.3}$$

Cabe observar que uma vez imposta a condição de fronteira para a função q, obtém-se como consequência da quarta equação do sistema que θ possui condição de fronteira do tipo Neumann, isto é, $\theta_x(0,\cdot)=\theta_x(l,\cdot)=0$.

Na Seção 5.1, mostra-se a existência e unicidade de solução do problema (5.1)-(5.3) assim como feito em [21]. Na Seção 5.2 será apresentada uma condição necessária e suficiente para que a solução tenha decaimento exponencial, para tanto, os argumentos introduzidos em [7] foram adaptados para a condição de fronteira (5.3). Por fim, na Seção 5.3 é exibido um resultado garantindo que, em um cenário onde a condição descrita na Seção 5.2 não é satisfeita, a solução decai polinomialmente. Ressalta-se mais uma vez que os resultados serão exibidos com a ausência de algumas hipóteses sobre a função núcleo de memória g que normalmente são adotadas na literatura, a saber,

$$\exists\, k_0, k_2 > 0 \quad \Big| \quad -k_0\, g(s) \le g'(s) \quad \text{e} \quad |g''(s)| \le k_2\, g(s).$$

5.1 Existência e Unicidade de Solução

Inicialmente, objetiva-se reescrever o problema (5.1)-(5.3) como um problema de Cauchy abstrato. Para tanto, considere o espaço de fase

$$\mathcal{H}_2 = H^1_*(0,l) \times L^2_*(0,l) \times H^1_0(0,l) \times L^2(0,l) \times L^2_*(0,l) \times L^2(0,l) \times L^2_g\big(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l)\big),$$

o qual, será munido com o produto interno

$$\begin{aligned} \big(U,\tilde{U}\big)_{\mathcal{H}_2} = \rho_1\big(\Phi,\tilde{\Phi}\big)_{L^2} + \rho_2\big(\Psi,\tilde{\Psi}\big)_{L^2} + \tilde{b}\big(\psi_x,\tilde{\psi_x}\big)_{L^2} + k\big(\varphi_x+\psi,\tilde{\varphi_x}+\tilde{\psi}\big)_{L^2} \\ +\rho_3\big(\theta,\tilde{\theta}\big)_{L^2} + \tau\big(q,\tilde{q}\big)_{L^2} + \big(\eta,\tilde{\eta}\big)_{L^2_g(H^1_0)} \end{aligned} \tag{5.4}$$

e norma

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}_2} = \rho_1\|\Phi\|^2_{L^2} + \rho_2\|\Psi\|^2_{L^2} + \tilde{b}\|\psi_x\|^2_{L^2} + k\|\varphi_x+\psi\|^2_{L^2} + \rho_3\|\theta\|^2_{L^2} + \tau\|q\|^2_{L^2} + \|\eta\|^2_{L^2_g(H^1_0)}, \tag{5.5}$$

para quaisquer $U = (\varphi,\Phi,\psi,\Psi,\theta,q,\eta)$ e $\tilde{U} = (\tilde{\varphi},\tilde{\Phi},\tilde{\psi},\tilde{\Psi},\tilde{\theta},\tilde{q},\tilde{\eta})$ em $\mathcal{H}_2$. Considere a notação $\varphi_t = \Phi$, $\psi_t = \Psi$ e $U = (\varphi,\Phi,\psi,\Psi,\theta,q,\eta)$ e defina

$$U_t = \begin{pmatrix} \Phi \\ \dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x \\ \Psi \\ \dfrac{\tilde{b}}{\rho_2}\psi_{xx} + \dfrac{1}{\rho_2}\displaystyle\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds - \dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x+\psi) - \dfrac{\delta}{\rho_2}\theta_x \\ -\dfrac{1}{\rho_3}q_x - \dfrac{\delta}{\rho_3}\Psi_x \\ -\dfrac{\beta}{\tau}q - \dfrac{1}{\tau}\theta_x \\ \Psi - \eta_s \end{pmatrix} =: A_2\,U. \tag{5.6}$$

Considerando $U_0 := (\varphi_0,\varphi_1,\psi_0,\psi_1,\theta_0,q_0,\eta_0)$, é possível escrever o problema (5.1)-(5.3) no seguinte problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} U_t = A_2\,U, \quad t>0 \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{5.7}$$

onde A_2 é o operador linear definido em (5.6) e cujo domínio é dado por

$$D(A_2) = \left\{ U \in \mathcal{H}_2 \;\middle|\; \begin{array}{c} \varphi \in H^2(0,l); \quad \varphi_x,\Psi,q \in H^1_0(0,l); \quad \Phi,\theta \in H^1_*(0,l); \\ \tilde{b}\psi + \displaystyle\int_0^\infty g(s)\eta(s)\,ds \in H^2(0,l);\ \eta_s \in L^2_g\big(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l)\big) \text{ e } \eta(0)=0 \end{array} \right\}. \tag{5.8}$$

No que segue, serão demonstrados alguns resultados preliminares para garantir a existência e unicidade de solução para o problema dado. Para tanto, faz-se necessário assumir as seguintes hipóteses relativas ao núcleo de memória g:

$$\begin{gathered} g \in C(\mathbb{R}^+) \cap C^1(\mathbb{R}^+_*) \cap L^1(\mathbb{R}^+), \quad g(s) > 0, \quad b_0 := \int_0^\infty g(s)\, ds \in (0, b), \\ \exists\, k_1 > 0 \;\big|\; g'(s) \leq -k_1 g(s), \;\; \forall\, s \geq 0. \end{gathered} \tag{5.9}$$

Lema 5.1. *Seja A_2 o operador definido em* (5.6) *e* (5.8)*. Se g é uma função que satisfaz as hipóteses* (5.9)*, então A_2 é um operador dissipativo em $\mathcal{H}_2$.*

Demonstração. Dado $U \in D(A_2)$, tem-se

$$\begin{aligned} \big(A_2 U, U\big)_{\mathcal{H}_2} &= \left(\tilde{b}\psi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\, ds - k(\varphi_x + \psi) - \delta\theta_x, \Psi\right)_{L^2} + \\ &\quad k\big((\varphi_x + \psi)_x, \Phi\big)_{L^2} + \tilde{b}\big(\Psi_x, \psi_x\big)_{L^2} + k\big(\Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi\big)_{L^2} \\ &\quad -\big(q_x + \delta\Psi_x, \theta\big)_{L^2} - \big(\beta q + \theta_x, q\big)_{L^2} + \big(\Psi - \eta_s, \eta\big)_{L^2_g(H^1_0)}. \end{aligned}$$

Integrando por partes, usando as propriedades de produto interno e observando o domínio do operador A_2, obtém-se

$$\begin{aligned} \big(A_2 U, U\big)_{\mathcal{H}_2} &= k\big(\Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi\big)_{L^2} - k\big(\varphi_x + \psi, \Phi_x + \Psi\big)_{L^2} + \delta\big(\theta, \Psi_x\big)_{L^2} \\ &\quad -\delta\big(\Psi_x, \theta\big)_{L^2} + \tilde{b}\big(\Psi_x, \psi_x\big)_{L^2} - \tilde{b}\big(\psi_x, \Psi_x\big)_{L^2} + \big(q, \theta\big)_{L^2} - \big(\theta, q\big)_{L^2} \\ &\quad +\big(\Psi_x, \eta_x\big)_{L^2_g(H^1_0)} - \big(\eta_x, \Psi_x\big)_{L^2_g(H^1_0)} - \beta\|q\|^2_{L^2} - \int_0^\infty g(s)\big(\eta_{sx}(s), \eta_x(s)\big)_{L^2} ds. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Tomando a parte real da identidade (5.10) e notando que

$$\operatorname{Re}\big(\eta_{sx}(s), \eta_x(s)\big)_{L^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|\eta_x(s)\|^2_{L^2},$$

adquire-se

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\big(A_2 U, U\big)_{\mathcal{H}_2} &= -\beta\|q\|^2_{L^2} - \int_0^\infty g(s)\operatorname{Re}\big(\eta_{sx}(s), \eta_x(s)\big)_{L^2} ds \\ &= -\beta\|q\|^2_{L^2} - \frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\frac{d}{ds}\|\eta_x(s)\|^2_{L^2} ds. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Integrando por partes e usando os mesmos argumentos apresentados em (4.11) e (4.12), pode-se reescrever (5.11) como

$$\operatorname{Re}\big(A_2 U, U\big)_{\mathcal{H}_2} = -\beta\|q\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\eta_x(s)\|^2_{L^2} ds, \tag{5.12}$$

das hipóteses sobre g prescritas em (5.9), segue que

$$\operatorname{Re}\big(A_2 U, U\big)_{\mathcal{H}_2} \leq -\beta\|q\|_{L^2}^2 - \frac{k_1}{2}\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}^2 \leq 0, \tag{5.13}$$

o que encerra a prova do Lema 5.1. ■

Para demonstrar o próximo resultado, o Lema 4.3 será fortemente usado.

Lema 5.2. *Seja A_2 o operador definido em* (5.6) *e* (5.8). *Se g é uma função que satisfaz as hipóteses* (5.9)*, então* $0 \in \varrho(A_2)$.

Demonstração. Inicialmente será provado a sobrejetividade do operador $-A_2$, para tanto, considere $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7) \in \mathcal{H}_2$, procura-se $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, q, \eta) \in D(A_2)$ tal que $(-A_2)U = F$, ou ainda,

$$\begin{aligned}
-\Phi &= f_1, && (5.14)\\
-k(\varphi_x + \psi)_x &= \rho_1 f_2, && (5.15)\\
-\Psi &= f_3 && (5.16)\\
-\tilde{b}\psi_{xx} - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x &= \rho_2 f_4, && (5.17)\\
q_x + \delta\Psi_x &= \rho_3 f_5, && (5.18)\\
\beta q + \theta_x &= \tau f_6, && (5.19)\\
\eta_s - \Psi &= f_7. && (5.20)
\end{aligned}$$

Veja que as equações (5.14) e (5.16) induzem a definir

$$\Phi := -f_1 \in H_*^1(0,l) \qquad \text{e} \qquad \Psi := -f_3 \in H_0^1(0,l).$$

Além disso, considere

$$\eta(s) = \int_0^s f_7(\xi)\,d\xi + s\Psi, \tag{5.21}$$

evidentemente segue que $\eta(0) = 0$ e como consequência do Corolário 2.45 vem que

$$\eta_s = f_7 + \Psi. \tag{5.22}$$

Por outro lado, η_s dada em (5.22) pertence ao espaço $L_g^2\big(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,l)\big)$, pois, $f_7 \in L_g^2\big(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,l)\big)$ e $\Psi \in H_0^1(0,l)$. Utilizando os mesmos argumentos empregados para obtenção de (4.27), conclui-se que

$$\int_0^\infty g(s)\|\eta_x(s)\|_{L^2}^2\,ds \leq \frac{4}{k_1^2}\|\eta_s\|_{L_g^2(H_0^1)}^2 < \infty, \tag{5.23}$$

isto é, η definida em (5.21) pertence a $L^2_g\big(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l)\big)$. Em contrapartida, definindo

$$q(x) = \rho_3 \int_0^x f_5(y)\,dy - \delta\Psi(x),$$

logra-se que $q(l) = q(0) = 0$, já que $f_5 \in L^2_*(0,l)$ e $\Psi \in H^1_0(0,l)$. Mais ainda, face ao Corolário 2.45 tem-se que $q \in H^1_0(0,l)$ e

$$q_x = \rho_3 f_5 - \delta\Psi_x,$$

ou seja, a igualdade (5.18) é satisfeita. Novamente devido ao Corolário 2.45, vem que θ dada por

$$\theta(x) = \int_0^x \big[\tau f_6(y) - \beta q(y)\big]\,dy - \frac{1}{l}\int_0^l \int_0^x \big[\tau f_6(y) - \beta q(y)\big]\,dy\,dx,$$

pertence ao espaço $H^1(0,l)$. Mais ainda, não é difícil notar que esta função possui media nula, ou seja, $\theta \in H^1_*(0,l)$.

Neste momento, resta apenas encontrar funções φ e ψ que respeitem as condições impostas em $D(A_2)$ e, que satisfaçam as equações (5.15) e (5.17). Para tanto, observe inicialmente que devido ao Lema 4.2, tem-se $\displaystyle\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds \in H^{-1}(0,l)$. Além disso, vem que

$$\left\langle \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds, \tilde{\psi} \right\rangle = -\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, \tilde{\psi}_x \right)_{L^2},$$

para toda $\tilde{\psi}$ em $H^1_0(0,l)$. À vista disso, defina

$$g_1 = \rho_1 f_2 \in L^2_*(0,l) \quad \text{e} \quad g_2 = \rho_2 f_4 + \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds - \delta\theta_x \in H^{-1}(0,l),$$

onde g_2 é um funcional antilinear e contínuo, definido por

$$\begin{aligned} g_2 : H^1_0(0,l) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \tilde{\psi} &\longmapsto \langle g_2, \tilde{\psi}\rangle = \rho_2\big(f_4, \tilde{\psi}\big)_{L^2} - \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, \tilde{\psi}_x \right)_{L^2} - \delta\big(\theta_x, \tilde{\psi}\big)_{L^2}. \end{aligned}$$

Deste modo, o Lema 4.3 garante que existe único par de funções (φ, ψ) em $H^1_*(0,l) \times H^1_0(0,l)$ que satisfaz

$$-k(\varphi_x + \psi)_x = g_1 \quad \text{em} \quad L^2(0,l), \tag{5.24}$$

$$-\tilde{b}\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = g_2 \quad \text{em} \quad H^{-1}(0,l). \tag{5.25}$$

Usando a igualdade (5.25), tem-se

$$\langle -\tilde{b}\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi), \tilde{\psi}\rangle = \langle g_2, \tilde{\psi}\rangle, \quad \forall\, \tilde{\psi} \in H^1_0(0,l),$$

mais ainda, da definição de g_2 e do Teorema da Representação de Riesz para $L^2(0,l)$ obtém-se

$$\tilde{b}\big(\psi_x, \tilde{\psi}_x\big)_{L^2} + k\big(\varphi_x + \psi, \tilde{\psi}\big)_{L^2} = \rho_2\big(f_4, \tilde{\psi}\big)_{L^2} - \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\, ds, \tilde{\psi}_x\right)_{L^2} - \delta\big(\theta_x, \tilde{\psi}\big)_{L^2}$$

ou ainda,

$$\left(\tilde{b}\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\, ds, \tilde{\psi}_x\right)_{L^2} = -\big(k(\varphi_x + \psi) - \rho_2 f_4 + \delta\theta_x, \tilde{\psi}\big)_{L^2}, \quad \forall\, \tilde{\psi} \in H_0^1(0,l).$$

Como $C_0^1(0,l) \subset H_0^1(0,l)$, segue da definição de derivada fraca que

$$\tilde{b}\psi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\, ds = k(\varphi_x + \psi) - \rho_2 f_4 + \delta\theta_x \quad \text{em} \quad L^2(0,l),$$

e ainda,

$$\tilde{b}\psi + \int_0^\infty g(s)\eta(s)\, ds \in H^2(0,l).$$

Uma vez que o Lema 4.3 assegura que $\varphi \in H^2(0,l)$ e $\varphi_x \in H_0^1(0,l)$, pode-se concluir que $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, q, \eta) \in D(A_2)$ e, consequentemente, o operador $-A_2$ é sobrejetor.

Para verificar a injetividade do operador $-A_2$ será mostrado que seu núcleo é composto apenas pelo vetor nulo, isto é, $\mathrm{Nuc}(-A_2) = \{0\}$. De forma mais precisa, basta provar que se $U \in D(A_2)$ é tal que $-A_2\, U = 0$, então U é o vetor nulo do espaço $\mathcal{H}_2$. Assim, escrevendo $-A_2\, U = 0$ em termos de suas componentes tem-se

$$-\Phi = 0, \tag{5.26}$$

$$-k(\varphi_x + \psi)_x = 0, \tag{5.27}$$

$$-\Psi = 0, \tag{5.28}$$

$$-\tilde{b}\psi_{xx} - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\, ds + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x = 0, \tag{5.29}$$

$$q_x + \delta\Psi_x = 0, \tag{5.30}$$

$$\beta q + \theta_x = 0, \tag{5.31}$$

$$\eta_s - \Psi = 0, \tag{5.32}$$

e imediatamente conclui-se de (5.26) e (5.28) que $\Phi = 0 = \Psi$. Com isto em mente, a equação (5.30) fornece $q_x = 0$ em $L^2(0,l)$. Visto que $q \in H_0^1(0,l)$, segue da Desigualdade de Poincaré que $q = 0$ em $L^2(0,l)$. Usando o mesmo argumento com a igualdade (5.31), conclui-se que $\theta = 0$ em $L^2(0,l)$. De (5.32) segue que $\eta_s = 0$, assim, da desigualdade (5.23) resulta que $\eta = 0$ em $L_g^2\big(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,l)\big)$. Resta mostrar que as funções φ e ψ são nulas, para tanto, considere $g_1 = 0 \in L_*^2(0,l)$ e $g_2 = 0 \in H^{-1}(0,l)$. Assim, o Lema 4.3 garante que existem únicas φ e ψ

em $H^1_*(0,l)$ e $H^1_0(0,l)$ respectivamente, que verificam as igualdades

$$\begin{aligned} -k(\varphi_x+\psi)_x = g_1 = 0 \quad &\text{em} \quad L^2(0,l),\\ -\tilde{b}\psi_{xx} + k(\varphi_x+\psi) = g_2 = 0 \quad &\text{em} \quad H^{-1}(0,l). \end{aligned}$$

Contudo, observe que o par $(0,0)$ satisfaz tais equações e, portanto, conclui-se da unicidade garantida pelo Lema 4.3 que $\varphi = 0 = \psi$. Assim, $U = 0$ e o operador $-A_2$ é injetor.

Visto que o operador $(-A_2)^{-1}$ existe, será provado que o mesmo é limitado. Para tal propósito, é suficiente mostrar que existe uma constante C positiva tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_2}, \quad \forall\, F \in \mathcal{H}_2,$$

onde $U \in D(A_2)$ é a solução de $(-A_2)^{-1}F = U$. Com efeito, de posse da equação (5.14), tem-se $\|\Phi\|^2_{L^2} = \|f_1\|^2_{L^2}$ e, usando as desigualdades Triangular e de Poincaré, juntamente com o Lema 2.29 pode-se obter a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \rho_1\|\Phi\|^2_{L^2} &\leq \rho_1 l^2\big(\|f_{1,x}+f_3\|_{L^2} + l\|f_{3,x}\|_{L^2}\big)^2\\ &\leq 2\rho_1 l^2\|f_{1,x}+f_3\|^2_{L^2} + 2\rho_1 l^4\|f_{3,x}\|^2_{L^2}\\ &\leq \left[\frac{2\rho_1 l^2}{k} + \frac{2\rho_1 l^4}{\tilde{b}}\right]\|F\|^2_{\mathcal{H}_2}. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Utilizando (5.16), obtém-se

$$\rho_2\|\Psi\|^2_{L^2} = \rho_2\|f_3\|^2_{L^2} \leq \rho_2 l^2\|f_{3,x}\|^2_{L^2} \leq \frac{\rho_2 l^2}{\tilde{b}}\|F\|^2_{\mathcal{H}_2}, \tag{5.34}$$

Agora, observe que da identidade (5.13), adquire-se

$$\beta\|q\|^2_{L^2} + \frac{k_1}{2}\|\eta\|^2_{L^2_g(H^1_0)} = \operatorname{Re}\big(-A_2\,U, U\big)_{\mathcal{H}_2} \leq \|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2},$$

usando que $\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z|$ e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Portanto, tem-se

$$\|q\|^2_{L^2} \leq \frac{1}{\beta}\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}, \tag{5.35}$$

e

$$\|\eta\|^2_{L^2_g(H^1_0)} \leq \frac{2}{k_1}\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}. \tag{5.36}$$

Da igualdade (5.19), tem-se $\theta_x = \tau f_6 - \beta q$. Deste modo, usando as desigualdades Triangular, Poincaré e o Lema 2.29, vem que

$$\|\theta\|^2_{L^2} \leq l^2\|\tau f_6 - \beta q\|^2_{L^2} \leq l^2\big(\tau\|f_6\|_{L^2} + \beta\|q\|_{L^2}\big)^2 \leq 2l^2\tau^2\|f_6\|^2_{L^2} + 2l^2\beta^2\|q\|^2_{L^2}.$$

Aplicando a estimativa obtida em (5.35), vem que

$$\|\theta\|_{L^2}^2 \leq 2l^2\tau\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2 + 2l^2\beta\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}. \tag{5.37}$$

Para estimar $\tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}^2 + k\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2$ toma-se o produto interno de (5.15) com φ, de (5.17) com ψ em $L^2(0,l)$ e integra-se por partes, obtendo

$$\begin{aligned} k\big(\varphi_x + \psi, \varphi_x\big)_{L^2} &= \rho_1\big(f_2, \varphi\big)_{L^2}, \\ \tilde{b}\big(\psi_x, \psi_x\big)_{L^2} + \big(\eta, \psi\big)_{L_g^2(H_0^1)} + k\big(\varphi_x + \psi, \psi\big)_{L^2} - \delta\big(\theta, \psi_x\big)_{L^2} &= \rho_2\big(f_4, \psi\big)_{L^2}. \end{aligned}$$

Somando estas igualdades e empregando os mesmos argumentos descritos em na Seção 4.1 para a obtenção da estimativa (4.48), vem que

$$\begin{aligned} \tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}^2 + k\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 \leq\ & \frac{\sqrt{b_0}}{\sqrt{\tilde{b}}}\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}\|U\|_{\mathcal{H}_2} + \frac{\delta}{\sqrt{\tilde{b}}}\|\theta\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \\ & + \left[\frac{\sqrt{\rho_1}l}{\sqrt{k}} + \frac{\sqrt{\rho_1}l^2}{\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{\sqrt{\rho_2}l}{\sqrt{\tilde{b}}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}. \end{aligned} \tag{5.38}$$

De posse dessas estimativas, pode-se avaliar a norma de U e assim concluir a limitação do operador $(-A_2)^{-1}$. Com efeito, de (5.38) vem que

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}^2 + k\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 + \rho_3\|\theta\|_{L^2}^2 + \tau\|q\|_{L^2}^2 + \|\eta\|_{L_g^2}^2 \\ &\leq \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_3\|\theta\|_{L^2}^2 + \tau\|q\|_{L^2}^2 + \|\eta\|_{L_g^2}^2 + \frac{\sqrt{b_0}}{\sqrt{\tilde{b}}}\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \\ &\quad + \frac{\delta}{\sqrt{\tilde{b}}}\|\theta\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} + \left[\frac{\sqrt{\rho_1}l}{\sqrt{k}} + \frac{\sqrt{\rho_1}l^2}{\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{\sqrt{\rho_2}l}{\sqrt{\tilde{b}}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}, \end{aligned}$$

aplicando a Desigualdade de Young com $\varepsilon = 1/4$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 \leq\ & \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \left[\rho_3 + \frac{\delta^2}{\tilde{b}}\right]\|\theta\|_{L^2}^2 + \tau\|q\|_{L^2}^2 + \left[1 + \frac{b_0}{\tilde{b}}\right]\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}^2 \\ & + \left[\frac{\sqrt{\rho_1}l}{\sqrt{k}} + \frac{\sqrt{\rho_1}l^2}{\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{\sqrt{\rho_2}l}{\sqrt{\tilde{b}}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}. \end{aligned}$$

Utilizando as estimativas (5.33)-(5.37), pode-se obter

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 \leq\ & \left[\frac{2\rho_1 l^2}{k} + \frac{2\rho_1 l^4}{\tilde{b}} + \frac{\rho_2 l^2}{\tilde{b}} + 2l^2\tau\rho_3 + \frac{2l^2\tau\delta^2}{\tilde{b}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2 \\ + & \left[\frac{\sqrt{\rho_1}l}{\sqrt{k}} + \frac{\sqrt{\rho_1}l^2}{\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{\sqrt{\rho_2}l}{\sqrt{\tilde{b}}} + 2l^2\beta\rho_3 + \frac{2l^2\beta\delta^2}{\tilde{b}} + \frac{\tau}{\beta} + \frac{2}{k_1} + \frac{2b_0}{\tilde{b}k_1}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}. \end{aligned}$$

Por fim, aplicando mais uma vez a Desigualdade de Young com $\varepsilon = 1/4$, resulta que

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 &\leq \left[\frac{2\rho_1 l^2}{k} + \frac{2\rho_1 l^4}{\tilde{b}} + \frac{\rho_2 l^2}{\tilde{b}} + 2l^2\tau\rho_3 + \frac{2l^2\tau\delta^2}{\tilde{b}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2 \\ &+ \left[\frac{\sqrt{\rho_1} l}{\sqrt{k}} + \frac{\sqrt{\rho_1} l^2}{\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{\sqrt{\rho_2} l}{\sqrt{\tilde{b}}} + 2l^2\beta\rho_3 + \frac{2l^2\beta\delta^2}{\tilde{b}} + \frac{\tau}{\beta} + \frac{2}{k_1} + \frac{2b_0}{\tilde{b}k_1}\right]^2 \|F\|_{\mathcal{H}_2}^2.\end{aligned}$$

Denotando por C^2 a constante

$$\begin{aligned}C^2 &= 4\left[\frac{2\rho_1 l^2}{k} + \frac{2\rho_1 l^4}{\tilde{b}} + \frac{\rho_2 l^2}{\tilde{b}} + 2l^2\tau\rho_3 + \frac{2l^2\tau\delta^2}{\tilde{b}}\right] \\ &+4\left[\frac{\sqrt{\rho_1} l}{\sqrt{k}} + \frac{\sqrt{\rho_1} l^2}{\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{\sqrt{\rho_2} l}{\sqrt{\tilde{b}}} + 2l^2\beta\rho_3 + \frac{2l^2\beta\delta^2}{\tilde{b}} + \frac{\tau}{\beta} + \frac{2}{k_1} + \frac{2b_0}{\tilde{b}k_1}\right]^2,\end{aligned}$$

tem-se que existe $C > 0$ tal que $\|(-A_2)^{-1}F\|_{\mathcal{H}_2} = \|U\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_2}$ para qualquer $F \in \mathcal{H}_2$, isto é, $(-A_2)^{-1}$ é um operador limitado e portanto $0 \in \varrho(A_2)$. ■

Desta forma, pode-se enunciar e provar um resultado essencial para garantir a existência e unicidade de solução do problema.

Teorema 5.3. *Se g é uma função que satisfaz as hipóteses* (5.9)*, então o operador A_2 é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações.*

Demonstração. Face ao Teorema de Lumer-Phillips (veja Teorema 2.68), é suficiente mostrar que A_2 é um operador dissipativo, que existe λ_0 positivo tal que $\mathrm{Im}(\lambda_0 I - A_2) = \mathcal{H}_2$ e $\overline{D(A_2)} = \mathcal{H}_2$. Segue do Lema 5.1 a dissipatividade do operador A_2. Além disso, utilizando os mesmos argumentos empregados no Teorema 4.5 pode-se escrever $\lambda_0 I - A_2$ como a composições de operadores bijetores para λ_0 suficientemente pequeno. Mais ainda, do Teorema 2.61 resulta que o operador $\lambda_0 I - A_2$ é sobrejetor para qualquer λ_0 real positivo, em particular para $\lambda_0 = 1$. Consequentemente, o Teorema 2.62 fornece que $\overline{D(A_2)} = \mathcal{H}_2$, encerrando a prova do Teorema 5.3. ■

Assim, segue o teorema mais almejado desta seção.

Teorema 5.4. *(Existência e Unicidade) Se g satisfaz* (5.9) *e $U_0 \in D(A_2)$, então o problema de Cauchy abstrato* (5.7) *possui uma única solução*

$$U \in C\big([0,\infty); D(A_2)\big) \cap C^1\big([0,\infty); \mathcal{H}_2\big).$$

Além disso,

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \|U_0\|_{\mathcal{H}_2} \quad e \quad \|U_t(t)\|_{\mathcal{H}_2} = \|A_2 U(t)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \|A_2 U_0\|_{\mathcal{H}_2}, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Demonstração. Consequência imediata dos teoremas 2.69 e 5.3. ■

Teorema 5.5. *(Solução Generalizada) Se g satisfaz* (5.9) *e $U_0 \in \mathcal{H}_2$, então o problema de Cauchy abstrato* (5.7) *possui uma única solução na classe*

$$U \in C\big([0,\infty);\mathcal{H}_2\big).$$

Demonstração. Consequência do Teorema 2.70. ■

5.2 Estabilidade Exponencial

Nesta seção será estabelecida uma condição necessária e suficiente para que o C_0-semigrupo de contrações associado ao sistema de Timoshenko com história e Lei de Cattaneo seja exponencialmente estável. Como consequência, será possível concluir que a solução do sistema mencionado possui estabilidade exponencial. Para tanto, o ponto de partida da seção é o resultado de Prüss (Teorema 2.72) e, faz-se necessário assumir as hipóteses sobre a função núcleo de memória g mencionadas na Seção 5.1, a saber,

$$\begin{gathered} g \in C(\mathbb{R}^+) \cap C^1(\mathbb{R}^+_*) \cap L^1(\mathbb{R}^+), \quad g(s) > 0, \quad b_0 := \int_0^\infty g(s)\,ds \in (0,b), \\ \exists\ k_1 > 0 \ \big|\ g'(s) \leq -k_1 g(s), \ \ \forall\, s \geq 0. \end{gathered} \tag{5.39}$$

No que segue, será provado por contradição que $i\mathbb{R} \subset \varrho(A_2)$.

Lema 5.6. *Se g satisfaz as hipóteses dadas em* (5.39)*, então $i\mathbb{R} \subset \varrho(A_2)$.*

Demonstração. Utilizando os mesmos argumentos apresentados no Lema 4.8, pode-se concluir que se $i\mathbb{R} \not\subset \varrho(A_2)$, então existem um número real positivo ω, uma sequência de números reais $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \varrho(A_2)$ tal que $|\lambda_n| \longrightarrow \omega$ e $|\lambda_n| < \omega$, e existe uma sequência de funções $U_n = (\varphi_n, \Phi_n, \psi_n, \Psi_n, \theta_n, q_n, \eta_n) \in D(A_2)$ com $\|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = 1$ tal que

$$(i\lambda_n I - A_2)U_n \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{H}_2, \quad \text{sempre que} \quad n \longrightarrow \infty, \tag{5.40}$$

a qual, em termos de suas componentes, pode ser escrita como

$$i\lambda_n\varphi_n - \Phi_n \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad H^1_*(0,l), \tag{5.41}$$

$$i\lambda_n\rho_1\Phi_n - k(\varphi_{n,x} + \psi_n)_x \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^2_*(0,l), \tag{5.42}$$

$$i\lambda_n\psi_n - \Psi_n \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad H^1_0(0,l), \tag{5.43}$$

$$i\lambda_n\rho_2\Psi_n - \tilde{b}\psi_{n,xx} - \int_0^\infty g(s)\eta_{n,xx}(s)\,ds + k(\varphi_{n,x} + \psi_n) + \delta\theta_{n,x} \longrightarrow 0 \ \text{em} \ L^2(0,l), \tag{5.44}$$

$$i\lambda_n\rho_3\theta_n + q_{n,x} + \delta\Psi_{n,x} \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^2_*(0,l), \tag{5.45}$$

$$i\lambda_n\tau q_n + \beta q_n + \theta_{n,x} \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^2(0,l), \tag{5.46}$$

$$i\lambda_n\eta_n + \eta_{n,s} - \Psi_n \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^2_g\big(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l)\big). \tag{5.47}$$

Inicialmente considere o produto interno de $(i\lambda_n I - A_2)U_n$ com U_n em $\mathcal{H}_2$, isto é,

$$\big(i\lambda_n U_n - A_2\, U_n, U_n\big)_{\mathcal{H}_2} = i\lambda_n\|U_n\|^2_{\mathcal{H}_2} - \big(A_2\, U_n, U_n\big)_{\mathcal{H}_2} \longrightarrow 0,$$

tomando a parte real da sequência complexa obtida e observando a identidade dada por (5.12), conclui-se que

$$-\operatorname{Re}\big(A_2\, U_n, U_n\big)_{\mathcal{H}_2} = \beta\|q_n\|^2_{L^2} - \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\eta_{n,x}(s)\|^2_{L^2}\, ds \longrightarrow 0.$$

Visto que (5.39) fornece $g'(s) \leq 0$, vem que

$$\beta\|q_n\|^2_{L^2} \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_{n,x}(s)\|^2_{L^2}\, ds \longrightarrow 0, \tag{5.48}$$

mais ainda, aplicando a hipótese imposta sobre g, obtém-se

$$q_n \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^2(0,l) \quad \text{e} \quad \eta_n \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^2_g\big(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l)\big), \tag{5.49}$$

sempre que $n \longrightarrow \infty$. Disto, decorre que

$$i\lambda_n\tau q_n \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad \beta q_n \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^2(0,l),$$

e, por conseguinte, de (5.46) segue que

$$\theta_{n,x} \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^2(0,l).$$

Da norma do espaço $H^1_*(0,l)$, resulta que

$$\theta_n \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad H^1_*(0,l).$$

Note que neste momento todos os argumentos descritos a partir da convergência (4.74) do Lema 4.8 podem ser empregados. Por este motivo, as contas serão ocultas e o Lema 5.6 fica provado. ∎

Neste momento, será provado uma série de lemas que auxiliarão no resultado principal desta seção. Para tanto, sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $F \in \mathcal{H}_2$, logo existe $U \in D(A_2)$ satisfazendo a equação resolvente

$$(i\lambda I - A_2)U = F, \tag{5.50}$$

a qual, em termos de suas componentes pode ser descrita por

$$i\lambda\varphi - \Phi = f_1 \quad \text{em} \quad H^1_*(0,l), \tag{5.51}$$

$$i\lambda\rho_1\Phi - k(\varphi_x+\psi)_x = \rho_1 f_2 \quad \text{em} \quad L^2_*(0,l), \tag{5.52}$$

$$i\lambda\psi - \Psi = f_3 \quad \text{em} \quad H^1_0(0,l), \tag{5.53}$$

$$i\lambda\rho_2\Psi - \tilde{b}\psi_{xx} - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds + k(\varphi_x+\psi) + \delta\theta_x = \rho_2 f_4 \ \text{em} \ L^2(0,l), \tag{5.54}$$

$$i\lambda\rho_3\theta + q_x + \delta\Psi_x = \rho_3 f_5 \quad \text{em} \quad L^2_*(0,l), \tag{5.55}$$

$$i\lambda\tau q + \beta q + \theta_x = \tau f_6 \quad \text{em} \quad L^2(0,l), \tag{5.56}$$

$$i\lambda\eta + \eta_s - \Psi = f_7 \quad \text{em} \quad L^2_g\big(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l)\big). \tag{5.57}$$

Lema 5.7. *Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $U \in D(A_2)$ a solução da equação resolvente* (5.50)*. Se g satisfaz* (5.39)*, então existe uma constante c_1 positiva tal que*

$$\|q\|^2_{L^2} + \|\eta\|^2_{L^2_g(H^1_0)} \leq c_1\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}.$$

Demonstração. Tomando o produto interno de F com U em $\mathcal{H}_2$ e usando a igualdade (5.50), obtém-se

$$\big(F,U\big)_{\mathcal{H}_2} = i\lambda\|U\|^2_{\mathcal{H}_2} - \big(A_2U,U\big)_{\mathcal{H}_2}. \tag{5.58}$$

Considerando a parte real da identidade (5.58) e usando a identidade (5.12), vem que

$$\operatorname{Re}\big(F,U\big)_{\mathcal{H}_2} = -\operatorname{Re}\big(A_2U,U\big)_{\mathcal{H}_2} = \beta\|q\|^2_{L^2} - \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\eta_x(s)\|^2_{L^2}\,ds. \tag{5.59}$$

Lembrando que $g'(s) \leq -k_1 g(s)$, usando $\operatorname{Re} z \leq |z|$ e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, resulta que

$$\beta\|q\|^2_{L^2} + \frac{k_1}{2}\|\eta\|^2_{L^2_g(H^1_0)} \leq \|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2},$$

consequentemente,

$$\|q\|^2_{L^2} + \|\eta\|^2_{L^2_g(H^1_0)} \leq c_1\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2},$$

onde, $c_1 = \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{2}{k_1}$. ∎

Lema 5.8. *Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $U \in D(A_2)$ a solução da equação resolvente* (5.50)*. Então,*

$$\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|^2_{L^2}\,ds \leq 2\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}.$$

Demonstração. Segue de forma imediata da igualdade (5.59). ∎

Lema 5.9. *Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $U \in D(A_2)$ a solução da equação resolvente* (5.50)*. Se g satisfaz* (5.39)*, então existe uma constante c_2 positiva tal que*

$$\|\theta\|^2_{L^2} \leq c_2\Big[\|q\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + \|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}\Big].$$

Demonstração. Integrando (5.56) de 0 a x, tem-se

$$\int_0^x \big[i\lambda\tau q + \beta q + \theta_x\big]\, dy = i\lambda\tau \int_0^x q\, dy + \beta \int_0^x q\, dy + \theta(x) - \theta(0) = \tau \int_0^x f_6\, dy. \quad (5.60)$$

Multiplicando (5.60) por $\overline{\theta}$ e integrando em $[0,l]$, vem que

$$\begin{aligned}\tau \int_0^l \int_0^x f_6\, dy\, \overline{\theta}\, dx &= i\lambda\tau \int_0^l \int_0^x q\, dy\, \overline{\theta}\, dx + \beta \int_0^l \int_0^x q\, dy\, \overline{\theta}\, dx \\ &\quad + \int_0^l |\theta|^2 dx - \theta(0) \int_0^l \overline{\theta}\, dx,\end{aligned}$$

mas $\theta \in H^1_*(0,l)$, o que implica em

$$\|\theta\|^2_{L^2} = \underbrace{-i\lambda\tau \int_0^l \int_0^x q\, dy\, \overline{\theta}\, dx}_{=:I_1} - \beta \int_0^l \int_0^x q\, dy\, \overline{\theta}\, dx + \tau \int_0^l \int_0^x f_6\, dy\, \overline{\theta}\, dx. \quad (5.61)$$

Fazendo uso de (5.55), integrando por partes e usando que $q, \Psi \in H^1_0(0,l)$, pode-se obter

$$\begin{aligned} I_1 &= \tau \int_0^l \int_0^x q\, dy\, \overline{i\lambda\theta}\, dx = \frac{\tau}{\rho_3} \int_0^l \int_0^x q\, dy \left[-\overline{q}_x - \delta\overline{\Psi}_x + \rho_3 \overline{f_5}\right] dx \\ &= -\frac{\tau}{\rho_3} \int_0^l \int_0^x q\, dy\, \overline{q}_x\, dx - \frac{\tau\delta}{\rho_3} \int_0^l \int_0^x q\, dy\, \overline{\Psi}_x\, dx + \tau \int_0^l \int_0^x q\, dy\, \overline{f_5}\, dx \\ &= \frac{\tau}{\rho_3} \|q\|^2_{L^2} + \frac{\tau\delta}{\rho_3} \big(q, \Psi\big)_{L^2} + \tau \int_0^l \int_0^x q\, dy\, \overline{f_5}\, dx. \end{aligned}$$

Portanto, substituindo em (5.61), segue que

$$\begin{aligned} \|\theta\|^2_{L^2} &= \frac{\tau}{\rho_3} \|q\|^2_{L^2} + \frac{\tau\delta}{\rho_3} \big(q, \Psi\big)_{L^2} + \tau \int_0^l \int_0^x q\, dy\, \overline{f_5}\, dx \\ &\quad - \beta \int_0^l \int_0^x q\, dy\, \overline{\theta}\, dx + \tau \int_0^l \int_0^x f_6\, dy\, \overline{\theta}\, dx, \end{aligned}$$

tomando a parte real, usando o fato que $\mathrm{Re}\,(z) \leq |z|$ e a Desigualdade Triangular, resulta que

$$\begin{aligned} \|\theta\|^2_{L^2} &\leq \frac{\tau}{\rho_3} \|q\|^2_{L^2} + \frac{\tau\delta}{\rho_3} \left|\big(q, \Psi\big)_{L^2}\right| + \tau \left| \int_0^l \int_0^x q\, dy\, \overline{f_5}\, dx \right| \\ &\quad + \beta \left| \int_0^l \int_0^x q\, dy\, \overline{\theta}\, dx \right| + \tau \left| \int_0^l \int_0^x f_6\, dy\, \overline{\theta}\, dx \right|, \end{aligned} \quad (5.62)$$

mas, por Hölder

$$\tau\left|\int_0^l\int_0^x q\,dy\,\overline{f_5}\,dx\right|\leq\tau\int_0^l\int_0^l|q|\,dy\,|f_5|\,dx\leq\tau\sqrt{l}\|q\|_{L^2}\int_0^l|f_5|\,dx\leq\tau l\|f_5\|_{L^2}\|q\|_{L^2}.$$

Aplicando o mesmo argumento nos dois últimos termos de (5.62), vem que

$$\|\theta\|_{L^2}^2\leq\frac{\tau}{\rho_3}\|q\|_{L^2}^2+\frac{\tau\delta}{\rho_3}\|q\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2}+\tau l\|f_5\|_{L^2}\|q\|_{L^2}+\beta l\|q\|_{L^2}\|\theta\|_{L^2}+\tau l\|f_6\|_{L^2}\|\theta\|_{L^2}.$$

Usando o Lema 5.7 e as estimativas provenientes da definição da norma do espaço $\mathcal{H}_2$, obtém-se

$$\|\theta\|_{L^2}^2\leq\frac{\tau\delta}{\rho_3}\|q\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2}+\beta l\|q\|_{L^2}\|\theta\|_{L^2}+\left[\frac{\tau\,c_1}{\rho_3}+\frac{2\sqrt{\tau}l}{\sqrt{\rho_3}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2},$$

mas, da Desigualdade de Young com $\varepsilon=1/2$

$$\frac{1}{2}\|\theta\|_{L^2}^2\leq\frac{\tau\delta}{\rho_3}\|q\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2}+\frac{\beta^2l^2}{2}\|q\|_{L^2}^2+\left[\frac{\tau\,c_1}{\rho_3}+\frac{2\sqrt{\tau}l}{\sqrt{\rho_3}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}.$$

Finalmente, do Lema 5.7, vem que

$$\|\theta\|_{L^2}^2\leq\frac{2\tau\delta}{\rho_3}\|q\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2}+2\left[\frac{\beta^2l^2\,c_1}{2}+\frac{\tau\,c_1}{\rho_3}+\frac{2\sqrt{\tau}l}{\sqrt{\rho_3}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2},$$

isto é,

$$\|\theta\|_{L^2}^2\leq c_2\Big[\|q\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2}+\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}\Big]$$

com

$$c_2=2\max\left\{\frac{\tau\delta}{\rho_3},\ \frac{\beta^2l^2\,c_1}{2}+\frac{\tau\,c_1}{\rho_3}+\frac{2\sqrt{\tau}l}{\sqrt{\rho_3}}\right\}.$$

■

Lema 5.10. *Sejam $\lambda\in\mathbb{R}$ e $U\in D(A_2)$ a solução da equação resolvente* (5.50). *Se g satisfaz* (5.39)*, então existe uma constante c_3 positiva tal que*

$$\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2\leq c_3\Big[\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2+\|\psi_x\|_{L^2}^2+\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}\Big].$$

Demonstração. Tomando o produto interno de (5.52) com φ em $L^2(0,l)$, vem que

$$i\lambda\rho_1\big(\Phi,\varphi\big)_{L^2}-k\big((\varphi_x+\psi)_x,\varphi\big)_{L^2}=\rho_1\big(f_2,\varphi\big)_{L^2},$$

contudo, ao integrar por partes, somar e subtrair ψ, segue que

$$i\lambda\rho_1\big(\Phi,\varphi\big)_{L^2}-k\big((\varphi_x+\psi)_x,\varphi\big)_{L^2}=i\lambda\rho_1\big(\Phi,\varphi\big)_{L^2}+k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2-k\big(\varphi_x+\psi,\psi\big)_{L^2},$$

logo,

$$\underbrace{i\lambda\rho_1\big(\Phi,\varphi\big)_{L^2}}_{=:I_2}+k\|\varphi_x+\psi\|^2_{L^2}-k\big(\varphi_x+\psi,\psi\big)_{L^2}=\rho_1\big(f_2,\varphi\big)_{L^2}. \tag{5.63}$$

Todavia, usando propriedades de produto interno e a identidade (5.51), vem que

$$I_2=-\rho_1\big(\Phi,i\lambda\varphi\big)_{L^2}=-\rho_1\big(\Phi,\Phi+f_1\big)_{L^2}=-\rho_1\|\Phi\|^2_{L^2}-\rho_1\big(\Phi,f_1\big)_{L^2}.$$

Substituindo esta expressão em (5.63), resulta que

$$-\rho_1\|\Phi\|^2_{L^2}-\rho_1\big(\Phi,f_1\big)_{L^2}+k\|\varphi_x+\psi\|^2_{L^2}-k\big(\varphi_x+\psi,\psi\big)_{L^2}=\rho_1\big(f_2,\varphi\big)_{L^2},$$

ou ainda,

$$\rho_1\|\Phi\|^2_{L^2}=-\rho_1\big(\Phi,f_1\big)_{L^2}+k\|\varphi_x+\psi\|^2_{L^2}-k\big(\varphi_x+\psi,\psi\big)_{L^2}-\rho_1\big(f_2,\varphi\big)_{L^2}.$$

Tomando a parte real, módulo, usando as desigualdades Triangular e de Cauchy-Schwarz, segue que

$$\begin{aligned}\rho_1\|\Phi\|^2_{L^2} &\leq \rho_1\|f_1\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2}+k\|\varphi_x+\psi\|^2_{L^2}+k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}+\rho_1\|f_2\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}\\ &\leq \rho_1 l\|f_{1,x}+f_3\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2}+\rho_1 l^2\|f_{3,x}\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2}+k\|\varphi_x+\psi\|^2_{L^2}\\ &\quad +kl\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2}+\rho_1 l\|f_2\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}+\rho_1 l^2\|f_2\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2}\\ &\leq k\|\varphi_x+\psi\|^2_{L^2}+kl\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2}+\left[\frac{2\sqrt{\rho_1}l}{\sqrt{k}}+\frac{2\sqrt{\rho_1}l^2}{\sqrt{\tilde{b}}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}.\end{aligned}$$

Finalmente, usando a Desigualdade de Young com $\varepsilon=k$, segue que

$$\rho_1\|\Phi\|^2_{L^2}\leq 2k\|\varphi_x+\psi\|^2_{L^2}+\frac{kl^2}{4}\|\psi_x\|^2_{L^2}+\left[\frac{2\sqrt{\rho_1}l}{\sqrt{k}}+\frac{2\sqrt{\rho_1}l^2}{\sqrt{\tilde{b}}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2},$$

ou ainda,

$$\rho_1\|\Phi\|^2_{L^2}\leq c_3\Big[\|\varphi_x+\psi\|^2_{L^2}+\|\psi_x\|^2_{L^2}+\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}\Big],$$

onde,

$$c_3=\max\left\{2k,\ \frac{kl^2}{4},\ \frac{2\sqrt{\rho_1}l}{\sqrt{k}}+\frac{2\sqrt{\rho_1}l^2}{\sqrt{\tilde{b}}}\right\}.$$

■

Lema 5.11. *Sejam $\lambda\in\mathbb{R}$ e $U\in D(A_2)$ a solução da equação resolvente* (5.50). *Se g satisfaz*

(5.39) *e* $|\lambda| \geq 1$*, então existe uma constante* c_4 *positiva tal que*

$$\|\psi_x\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{|\lambda|^2}\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 + c_4\left[\|\Psi\|_{L^2}^2 + \|\theta\|_{L^2}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}\right].$$

Demonstração. Multiplicando (5.54) por ψ em $L^2(0,l)$, vem que

$$i\lambda\rho_2\big(\Psi,\psi\big)_{L^2} - \left(\tilde{b}\psi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds, \psi\right)_{L^2} + k\big(\varphi_x + \psi, \psi\big)_{L^2} + \delta\big(\theta_x, \psi\big)_{L^2} = \rho_2\big(f_4,\psi\big)_{L^2}. \tag{5.64}$$

Como $\psi \in H_0^1(0,l)$, integrando (5.64) por partes, resulta que

$$\begin{aligned}\tilde{b}\|\psi_x\|_{L^2}^2 \;&=\; \underbrace{-i\lambda\rho_2\big(\Psi,\psi\big)_{L^2}}_{=:I_3} - \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, \psi_x\right)_{L^2} \\ &\quad \underbrace{-k\big(\varphi_x+\psi,\psi\big)_{L^2}}_{=:I_4} + \delta\big(\theta,\psi_x\big)_{L^2} + \rho_2\big(f_4,\psi\big)_{L^2}.\end{aligned}$$

Todavia, usando (5.53), obtém-se

$$I_3 = \rho_2\big(\Psi, i\lambda\psi\big)_{L^2} = \rho_2\big(\Psi, \Psi + f_3\big)_{L^2} = \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_2\big(\Psi, f_3\big)_{L^2},$$

e

$$I_4 = \frac{k}{i\lambda}\big(\varphi_x + \psi, \Psi + f_3\big)_{L^2} = \frac{k}{i\lambda}\big(\varphi_x + \psi, \Psi\big)_{L^2} + \frac{k}{i\lambda}\big(\varphi_x + \psi, f_3\big)_{L^2},$$

consequentemente,

$$\begin{aligned}\|\psi_x\|_{L^2}^2 \;&=\; \frac{\rho_2}{\tilde{b}}\|\Psi\|_{L^2}^2 + \frac{\rho_2}{\tilde{b}}\big(\Psi, f_3\big)_{L^2} - \frac{1}{\tilde{b}}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, \psi_x\right)_{L^2} + \frac{\rho_2}{\tilde{b}}\big(f_4,\psi\big)_{L^2} \\ &\quad + \frac{k}{i\lambda\tilde{b}}\big(\varphi_x+\psi,\Psi\big)_{L^2} + \frac{k}{i\lambda\tilde{b}}\big(\varphi_x + \psi, f_3\big)_{L^2} + \frac{\delta}{\tilde{b}}\big(\theta,\psi_x\big)_{L^2}.\end{aligned} \tag{5.65}$$

Desta forma, tomando a parte real da identidade (5.65), usando que $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$, e as desigualdades Triangular, Cauchy-Schwarz e Poincaré, vem que

$$
\begin{aligned}
\|\psi_x\|_{L^2}^2 &\leq \frac{\rho_2}{\tilde{b}}\|\Psi\|_{L^2}^2 + \frac{\rho_2}{\tilde{b}}\left|\big(\Psi, f_3\big)_{L^2}\right| + \frac{1}{\tilde{b}}\left|\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, \psi_x\right)_{L^2}\right| + \frac{\rho_2}{\tilde{b}}\left|\big(f_4, \psi\big)_{L^2}\right| \\
&\quad + \frac{k}{|\lambda|\tilde{b}}\left|\big(\varphi_x + \psi, \Psi\big)_{L^2}\right| + \frac{k}{|\lambda|\tilde{b}}\left|\big(\varphi_x + \psi, f_3\big)_{L^2}\right| + \frac{\delta}{\tilde{b}}\left|\big(\theta, \psi_x\big)_{L^2}\right| \\
&\leq \frac{\rho_2}{\tilde{b}}\|\Psi\|_{L^2}^2 + \frac{\rho_2 l}{\tilde{b}}\|f_{3,x}\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + \frac{1}{\tilde{b}}\left\|\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds\right\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2} \\
&\quad + \frac{\rho_2 l}{\tilde{b}}\|f_4\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2} + \frac{k}{|\lambda|\tilde{b}}\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + \frac{kl}{|\lambda|\tilde{b}}\|f_{3,x}\|_{L^2}\|\varphi_x + \psi\|_{L^2} \\
&\quad + \frac{\delta}{\tilde{b}}\|\theta\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2},
\end{aligned}
$$

ou melhor, usando $|\lambda| \geq 1$, segue que

$$
\begin{aligned}
\|\psi_x\|_{L^2}^2 &\leq \frac{\rho_2}{\tilde{b}}\|\Psi\|_{L^2}^2 + \frac{k}{|\lambda|\tilde{b}}\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + \frac{\sqrt{b_0}}{\tilde{b}}\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}\|\psi_x\|_{L^2} \\
&\quad + \frac{\delta}{\tilde{b}}\|\theta\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2} + \left[\frac{2\sqrt{\rho_2}l}{\sqrt{\tilde{b}^3}} + \frac{\sqrt{k}l}{\sqrt{\tilde{b}^3}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}.
\end{aligned}
$$

Usando a Desigualdade de Young com $\varepsilon = 1/4$ nos dois termos que aparece $\|\psi_x\|_{L^2}$, tem-se

$$
\begin{aligned}
\|\psi_x\|_{L^2}^2 &\leq \frac{\rho_2}{\tilde{b}}\|\Psi\|_{L^2}^2 + \frac{k}{|\lambda|\tilde{b}}\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + \frac{1}{4}\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \frac{b_0}{\tilde{b}^2}\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \frac{\delta^2}{\tilde{b}^2}\|\theta\|_{L^2}^2 + \left[2\frac{\sqrt{\rho_2}l}{\sqrt{\tilde{b}^3}} + \frac{\sqrt{k}l}{\sqrt{\tilde{b}^3}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2},
\end{aligned}
$$

o que implica, usando o Lema 5.7, em

$$
\begin{aligned}
\|\psi_x\|_{L^2}^2 &\leq \frac{2\rho_2}{\tilde{b}}\|\Psi\|_{L^2}^2 + \frac{2k}{|\lambda|\tilde{b}}\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + \frac{2\delta^2}{\tilde{b}^2}\|\theta\|_{L^2}^2 \\
&\quad + 2\left[\frac{2\sqrt{\rho_2}l}{\sqrt{\tilde{b}^3}} + \frac{\sqrt{k}l}{\sqrt{\tilde{b}^3}} + \frac{b_0\,c_1}{\tilde{b}^2}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}.
\end{aligned}
$$

Por fim, usando novamente a Desigualdade de Young com $\varepsilon = 1$, vem que

$$
\begin{aligned}
\|\psi_x\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1}{|\lambda|^2}\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 + \left[\frac{2\rho_2}{\tilde{b}} + \frac{k^2}{\tilde{b}^2}\right]\|\Psi\|_{L^2}^2 + \frac{2\delta^2}{\tilde{b}^2}\|\theta\|_{L^2}^2 \\
&\quad + 2\left[\frac{2\sqrt{\rho_2}l}{\sqrt{\tilde{b}^3}} + \frac{\sqrt{k}l}{\sqrt{\tilde{b}^3}} + \frac{b_0 c_1}{\tilde{b}^2}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}.
\end{aligned}
$$

Mais precisamente, o resultado segue escolhendo c_4 como

$$c_4 = \max\left\{\frac{2\rho_2}{\tilde{b}} + \frac{k^2}{\tilde{b}^2},\ \frac{2\delta^2}{\tilde{b}^2},\ \frac{4\sqrt{\rho_2}l}{\sqrt{\tilde{b}^3}} + \frac{2\sqrt{k}l}{\sqrt{\tilde{b}^3}} + \frac{2b_0\,c_1}{\tilde{b}^2}\right\}.$$

$\blacksquare$

Lema 5.12. *Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $U \in D(A_2)$ a solução da equação resolvente* (5.50). *Se g satisfaz* (5.39) *e $|\lambda| \geq 1$, então para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno existe uma constante c_5 (dependendo de ε) positiva tal que*

$$\|\Psi\|_{L^2}^2 \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 + c_5\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}.$$

Demonstração. Multiplicando a igualdade (5.55) por $\displaystyle\int_0^x \overline{\Psi}\,dy$ e em seguida integrando em $[0,l]$, vem que

$$i\lambda\rho_3\int_0^l \theta\int_0^x \overline{\Psi}\,dy\,dx + \int_0^l q_x\int_0^x \overline{\Psi}\,dy\,dx + \delta\int_0^l \Psi_x\int_0^x \overline{\Psi}\,dy\,dx = \rho_3\int_0^l f_5\int_0^x \overline{\Psi}\,dy\,dx.$$

Integrando por partes, é possível escrever

$$\delta\|\Psi\|_{L^2}^2 = \underbrace{i\lambda\rho_3\int_0^l \theta\int_0^x \overline{\Psi}\,dy\,dx}_{=:I_5} - \big(q,\Psi\big)_{L^2} - \rho_3\int_0^l f_5\int_0^x \overline{\Psi}\,dy\,dx. \tag{5.66}$$

Contudo, ao usar a identidade (5.54), resulta que I_5 pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
I_5 &= -\frac{\rho_3}{\rho_2}\int_0^l \theta\int_0^x \left[\tilde{b}\overline{\psi}_{xx} + \int_0^\infty g(s)\overline{\eta}_{xx}(s)\,ds - k(\overline{\varphi}_x + \overline{\psi}) - \delta\overline{\theta}_x + \rho_2\overline{f_4}\right]dy\,dx \\
&= -\frac{\rho_3\tilde{b}}{\rho_2}\int_0^l \theta\int_0^x \overline{\psi}_{xx}\,dy\,dx - \frac{\rho_3}{\rho_2}\int_0^l \theta\int_0^x\int_0^\infty g(s)\overline{\eta}_{xx}(s)\,ds\,dy\,dx \\
&\quad + \frac{\rho_3 k}{\rho_2}\int_0^l \theta\int_0^x (\overline{\varphi}_x + \overline{\psi})\,dy\,dx + \frac{\rho_3\delta}{\rho_2}\int_0^l \theta\int_0^x \overline{\theta}_x\,dy\,dx - \rho_3\int_0^l \theta\int_0^x \overline{f_4}\,dy\,dx \\
&= -\frac{\rho_3\tilde{b}}{\rho_2}\big(\theta,\psi_x\big)_{L^2} + \frac{\rho_3\tilde{b}}{\rho_2}\int_0^l \theta\,dx\,\overline{\psi}_x(0) - \frac{\rho_3}{\rho_2}\left(\theta,\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds\right)_{L^2} \\
&\quad + \frac{\rho_3}{\rho_2}\int_0^l \theta\,dx\int_0^\infty g(s)\overline{\eta}_x(0,s)\,ds + \frac{\rho_3 k}{\rho_2}\int_0^l \theta\int_0^x (\overline{\varphi}_x + \overline{\psi})\,dy\,dx \\
&\quad + \frac{\rho_3\delta}{\rho_2}\|\theta\|_{L^2}^2 - \frac{\rho_3\delta}{\rho_2}\int_0^l \theta\,dx\,\overline{\theta}(0) - \rho_3\int_0^l \theta\int_0^x \overline{f_4}\,dy\,dx
\end{aligned}$$

Mas, note que $\theta \in H^1_*(0,l)$ e, portanto $\int_0^l \theta\, dx = 0$, então

$$\begin{aligned} I_5 &= -\frac{\rho_3\tilde{b}}{\rho_2}\big(\theta,\psi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_3}{\rho_2}\bigg(\theta, \int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds\bigg)_{L^2} + \frac{\rho_3\delta}{\rho_2}\|\theta\|^2_{L^2} \\ &\quad \underbrace{+\frac{\rho_3 k}{\rho_2}\int_0^l \theta \int_0^x (\overline{\varphi}_x + \overline{\psi})\,dy\,dx}_{=:I_6} - \rho_3\int_0^l \theta\int_0^x \overline{f_4}\,dy\,dx. \end{aligned} \tag{5.67}$$

Observe que usando as equações (5.51), (5.53) e o fato que $\theta \in H^1_*(0,l)$ é possível escrever

$$\begin{aligned} I_6 &= -\frac{\rho_3 k}{i\lambda\rho_2}\int_0^l \theta\int_0^x (\overline{\Phi}_x + \overline{f_{1,x}} + \overline{\Psi} + \overline{f_3})\,dy\,dx \\ &= -\frac{\rho_3 k}{i\lambda\rho_2}\big(\theta,\Phi\big)_{L^2} - \frac{\rho_3 k}{i\lambda\rho_2}\int_0^l \theta\int_0^x \overline{\Psi}\,dy\,dx - \frac{\rho_3 k}{i\lambda\rho_2}\int_0^l \theta\int_0^x (\overline{f_{1,x}} + \overline{f_3})\,dy\,dx, \end{aligned}$$

e portanto, substituindo I_6 em (5.67), segue que

$$\begin{aligned} I_5 &= -\frac{\rho_3\tilde{b}}{\rho_2}\big(\theta,\psi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_3}{\rho_2}\bigg(\theta, \int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds\bigg)_{L^2} + \frac{\rho_3\delta}{\rho_2}\|\theta\|^2_{L^2} - \frac{\rho_3 k}{i\lambda\rho_2}\big(\theta,\Phi\big)_{L^2} \\ &\quad -\frac{\rho_3 k}{i\lambda\rho_2}\int_0^l \theta\int_0^x \overline{\Psi}\,dy\,dx - \frac{\rho_3 k}{i\lambda\rho_2}\int_0^l \theta\int_0^x (\overline{f_{1,x}} + \overline{f_3})\,dy\,dx, -\rho_3\int_0^l \theta\int_0^x \overline{f_4}\,dy\,dx. \end{aligned} \tag{5.68}$$

Finalmente, usando (5.68) em (5.66), vem que

$$\begin{aligned} \delta\|\Psi\|^2_{L^2} &= -\frac{\rho_3\tilde{b}}{\rho_2}\big(\theta,\psi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_3}{\rho_2}\bigg(\theta, \int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds\bigg)_{L^2} + \frac{\rho_3\delta}{\rho_2}\|\theta\|^2_{L^2} - \frac{\rho_3 k}{i\lambda\rho_2}\big(\theta,\Phi\big)_{L^2} \\ &\quad -\big(q,\Psi\big)_{L^2} - \frac{\rho_3 k}{i\lambda\rho_2}\int_0^l \theta\int_0^x \overline{\Psi}\,dy\,dx - \frac{\rho_3 k}{i\lambda\rho_2}\int_0^l \theta\int_0^x (\overline{f_{1,x}} + \overline{f_3})\,dy\,dx \\ &\quad -\rho_3\int_0^l \theta\int_0^x \overline{f_4}\,dy\,dx - \rho_3\int_0^l f_5\int_0^x \overline{\Psi}\,dy\,dx. \end{aligned} \tag{5.69}$$

Assim, tomando a parte real da identidade (5.69), usando que $\mathrm{Re}\,(z) \leq |z|$ e a Desigualdade Triangular, obtém-se

$$\begin{aligned} \delta\|\Psi\|^2_{L^2} &\leq \frac{\rho_3\tilde{b}}{\rho_2}\left|\big(\theta,\psi_x\big)_{L^2}\right| + \frac{\rho_3}{\rho_2}\left|\bigg(\theta, \int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds\bigg)_{L^2}\right| + \frac{\rho_3\delta}{\rho_2}\|\theta\|^2_{L^2} + \frac{\rho_3 k}{|\lambda|\rho_2}\left|\big(\theta,\Phi\big)_{L^2}\right| \\ &\quad + \left|\big(q,\Psi\big)_{L^2}\right| + \frac{\rho_3 k}{|\lambda|\rho_2}\left|\int_0^l \theta\int_0^x \overline{\Psi}\,dy\,dx\right| + \frac{\rho_3 k}{|\lambda|\rho_2}\left|\int_0^l \theta\int_0^x (\overline{f_{1,x}} + \overline{f_3})\,dy\,dx\right| \\ &\quad +\rho_3\left|\int_0^l \theta\int_0^x \overline{f_4}\,dy\,dx\right| + \rho_3\left|\int_0^l f_5\int_0^x \overline{\Psi}\,dy\,dx\right|. \end{aligned}$$

Mais ainda, aplicando as desigualdades de Hölder e Cauchy-Schwarz e usando que $|\lambda| \geq 1$, chega-se a

$$\begin{aligned}
\delta\|\Psi\|_{L^2}^2 &\leq \frac{\rho_3\tilde{b}}{\rho_2}\|\theta\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2} + \frac{\rho_3\sqrt{b_0}}{\rho_2}\|\theta\|_{L^2}\|\eta\|_{L^2_g(H_0^1)} + \frac{\rho_3\delta}{\rho_2}\|\theta\|_{L^2}^2 + \|q\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} \\
&\quad + \frac{\rho_3 k}{|\lambda|\rho_2}\|\theta\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2} + \frac{\rho_3 kl}{|\lambda|\rho_2}\|\theta\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + \frac{\rho_3 kl}{|\lambda|\rho_2}\|f_{1,x} + f_3\|_{L^2}\|\theta\|_{L^2} \\
&\quad + \rho_3 l\|f_4\|_{L^2}\|\theta\|_{L^2} + \rho_3 l\|f_5\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} \\
&\leq \frac{\rho_3\tilde{b}}{\rho_2}\|\theta\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2} + \frac{\rho_3\sqrt{b_0}}{\rho_2}\|\theta\|_{L^2}\|\eta\|_{L^2_g(H_0^1)} + \frac{\rho_3\delta}{\rho_2}\|\theta\|_{L^2}^2 + \|q\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + \\
&\quad \frac{1}{|\lambda|}\left[\frac{\rho_3 k}{\rho_2\sqrt{\rho_1}} + \frac{\rho_3 kl}{\sqrt{\rho_2^3}}\right]\|\theta\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} + \left[\frac{\sqrt{\rho_3}\sqrt{k}\,l}{\rho_2} + \frac{2\sqrt{\rho_3}\,l}{\sqrt{\rho_2}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}.
\end{aligned} \tag{5.70}$$

Multiplicando (5.70) por δ^{-1} e usando a Desigualdade de Young com $\varepsilon = 1$ e $\varepsilon = 1/2$, resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|\Psi\|_{L^2}^2 &\leq \frac{\rho_3\tilde{b}}{\rho_2\delta}\|\theta\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2} + \frac{\rho_3 b_0}{4\rho_2\delta^2}\|\eta\|_{L^2_g(H_0^1)}^2 + \frac{2\rho_3}{\rho_2}\|\theta\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\delta^2}\|q\|_{L^2}^2 + \\
&\quad \frac{1}{|\lambda|}\left[\frac{\rho_3 k}{\rho_2\delta\sqrt{\rho_1}} + \frac{\rho_3 kl}{\delta\sqrt{\rho_2^3}}\right]\|\theta\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} + \left[\frac{\sqrt{\rho_3}\sqrt{k}\,l}{\rho_2\delta} + \frac{2\sqrt{\rho_3}\,l}{\delta\sqrt{\rho_2}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}.
\end{aligned}$$

Usando o Lema 5.7, segue que

$$\begin{aligned}
\|\Psi\|_{L^2}^2 &\leq \frac{2\rho_3\tilde{b}}{\rho_2\delta}\|\theta\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2} + \frac{4\rho_3}{\rho_2}\|\theta\|_{L^2}^2 + \frac{1}{|\lambda|}\left[\frac{2\rho_3 k}{\rho_2\delta\sqrt{\rho_1}} + \frac{2\rho_3 kl}{\delta\sqrt{\rho_2^3}}\right]\|\theta\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \\
&\quad + \left[\frac{c_1}{\delta^2} + \frac{\rho_3 b_0 c_1}{2\rho_2\delta^2} + \frac{2\sqrt{\rho_3}\sqrt{k}\,l}{\rho_2\delta} + \frac{4\sqrt{\rho_3}\,l}{\delta\sqrt{\rho_2}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}.
\end{aligned}$$

Novamente usando Young com $\varepsilon > 0$ arbitrário, obtém-se

$$\begin{aligned}
\|\Psi\|_{L^2}^2 &\leq \frac{\varepsilon k}{8}\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{8|\lambda|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \left[\frac{c_1}{\delta^2} + \frac{\rho_3 b_0 c_1}{2\rho_2\delta^2} + \frac{2\sqrt{\rho_3}\sqrt{k}\,l}{\rho_2\delta} + \frac{4\sqrt{\rho_3}\,l}{\delta\sqrt{\rho_2}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \\
&\quad + \left[\frac{8\rho_3^2\,\tilde{b}^2}{\varepsilon k\rho_2^2\,\delta^2} + \frac{4\rho_3}{\rho_2} + \frac{2}{\varepsilon}\left(\frac{2\rho_3 k}{\rho_2\delta\sqrt{\rho_1}} + \frac{2\rho_3 kl}{\delta\sqrt{\rho_2^3}}\right)^2\right]\|\theta\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Do Lema 5.11, resulta que

$$
\begin{aligned}
\|\Psi\|_{L^2}^2 \;\leq\; & \frac{\varepsilon k}{8}\left[\frac{1}{|\lambda|^2}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 + c_4\|\Psi\|_{L^2}^2 + c_4\|\theta\|_{L^2}^2 + c_4\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}\right] \\
& + \frac{\varepsilon}{8|\lambda|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \left[\frac{c_1}{\delta^2} + \frac{\rho_3 b_0 c_1}{2\rho_2\delta^2} + \frac{2\sqrt{\rho_3}\sqrt{k}\,l}{\rho_2\delta} + \frac{4\sqrt{\rho_3}\,l}{\delta\sqrt{\rho_2}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \\
& + \left[\frac{8\rho_3^2\,\tilde{b}^2}{\varepsilon k\rho_2^2\,\delta^2} + \frac{4\rho_3}{\rho_2} + \frac{2}{\varepsilon}\left(\frac{2\rho_3 k}{\rho_2\delta\sqrt{\rho_1}} + \frac{2\rho_3 kl}{\delta\sqrt{\rho_2^3}}\right)^2\right]\|\theta\|_{L^2}^2 \\
= \; & \frac{\varepsilon k}{8|\lambda|^2}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon k c_4}{8}\|\Psi\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{8|\lambda|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 \\
& + \left[\frac{\varepsilon k c_4}{8} + \frac{8\rho_3^2\,\tilde{b}^2}{\varepsilon k\rho_2^2\,\delta^2} + \frac{4\rho_3}{\rho_2} + \frac{2}{\varepsilon}\left(\frac{2\rho_3 k}{\rho_2\delta\sqrt{\rho_1}} + \frac{2\rho_3 kl}{\delta\sqrt{\rho_2^3}}\right)^2\right]\|\theta\|_{L^2}^2 \\
& + \left[\frac{\varepsilon k c_4}{8} + \frac{c_1}{\delta^2} + \frac{\rho_3 b_0 c_1}{2\rho_2\delta^2} + \frac{2\sqrt{\rho_3}\sqrt{k}\,l}{\rho_2\delta} + \frac{4\sqrt{\rho_3}\,l}{\delta\sqrt{\rho_2}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2},
\end{aligned}
$$

e ainda, lembrando que $k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 \leq \|U\|_{\mathcal{H}_2}^2$, pode-se escrever

$$
\begin{aligned}
\|\Psi\|_{L^2}^2 \;\leq\; & \frac{\varepsilon k c_4}{8}\|\Psi\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{4|\lambda|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 \\
& + \left[\frac{\varepsilon k c_4}{8} + \frac{8\rho_3^2\,\tilde{b}^2}{\varepsilon k\rho_2^2\,\delta^2} + \frac{4\rho_3}{\rho_2} + \frac{2}{\varepsilon}\left(\frac{2\rho_3 k}{\rho_2\delta\sqrt{\rho_1}} + \frac{2\rho_3 kl}{\delta\sqrt{\rho_2^3}}\right)^2\right]\|\theta\|_{L^2}^2 \\
& + \left[\frac{\varepsilon k c_4}{8} + \frac{c_1}{\delta^2} + \frac{\rho_3 b_0 c_1}{2\rho_2\delta^2} + \frac{2\sqrt{\rho_3}\sqrt{k}\,l}{\rho_2\delta} + \frac{4\sqrt{\rho_3}\,l}{\delta\sqrt{\rho_2}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}.
\end{aligned}
$$

Por fim, aplicando o Lema 5.9, vem que

$$
\begin{aligned}
\|\Psi\|_{L^2}^2 \;\leq\; & \frac{\varepsilon k c_4}{8}\|\Psi\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{4|\lambda|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 \\
& + c_2\left[\frac{\varepsilon k c_4}{8} + \frac{8\rho_3^2\,\tilde{b}^2}{\varepsilon k \rho_2^2\,\delta^2} + \frac{4\rho_3}{\rho_2} + \frac{2}{\varepsilon}\left(\frac{2\rho_3 k}{\rho_2\delta\sqrt{\rho_1}} + \frac{2\rho_3 k l}{\delta\sqrt{\rho_2^3}}\right)^2\right]\|q\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} \\
& + c_2\left[\frac{\varepsilon k c_4}{8} + \frac{8\rho_3^2\,\tilde{b}^2}{\varepsilon k \rho_2^2\,\delta^2} + \frac{4\rho_3}{\rho_2} + \frac{2}{\varepsilon}\left(\frac{2\rho_3 k}{\rho_2\delta\sqrt{\rho_1}} + \frac{2\rho_3 k l}{\delta\sqrt{\rho_2^3}}\right)^2\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \\
& + \left[\frac{\varepsilon k c_4}{8} + \frac{c_1}{\delta^2} + \frac{\rho_3 b_0 c_1}{2\rho_2\delta^2} + \frac{2\sqrt{\rho_3}\sqrt{k}\,l}{\rho_2\delta} + \frac{4\sqrt{\rho_3}\,l}{\delta\sqrt{\rho_2}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}.
\end{aligned}
$$

Usando a Desigualdade de Young com $\hat{\varepsilon} = \varepsilon k c_4/8$ com $\varepsilon > 0$ arbitrário, obtém-se

$$
\begin{aligned}
\|\Psi\|_{L^2}^2 \;\leq\; & \frac{\varepsilon k c_4}{4}\|\Psi\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{4|\lambda|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 \\
& + \frac{2c_2^2}{\varepsilon k c_4}\left[\frac{\varepsilon k c_4}{8} + \frac{8\rho_3^2\,\tilde{b}^2}{\varepsilon k \rho_2^2\,\delta^2} + \frac{4\rho_3}{\rho_2} + \frac{2}{\varepsilon}\left(\frac{2\rho_3 k}{\rho_2\delta\sqrt{\rho_1}} + \frac{2\rho_3 k l}{\delta\sqrt{\rho_2^3}}\right)^2\right]^2\|q\|_{L^2}^2 \\
& + c_2\left[\frac{\varepsilon k c_4}{8} + \frac{8\rho_3^2\,\tilde{b}^2}{\varepsilon k \rho_2^2\,\delta^2} + \frac{4\rho_3}{\rho_2} + \frac{2}{\varepsilon}\left(\frac{2\rho_3 k}{\rho_2\delta\sqrt{\rho_1}} + \frac{2\rho_3 k l}{\delta\sqrt{\rho_2^3}}\right)^2\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \\
& + \left[\frac{\varepsilon k c_4}{8} + \frac{c_1}{\delta^2} + \frac{\rho_3 b_0 c_1}{2\rho_2\delta^2} + \frac{2\sqrt{\rho_3}\sqrt{k}\,l}{\rho_2\delta} + \frac{4\sqrt{\rho_3}\,l}{\delta\sqrt{\rho_2}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2},
\end{aligned}
$$

logo, aplicando o Lema 5.7 segue que

$$
\begin{aligned}
\|\Psi\|_{L^2}^2 \;\leq\; & \frac{\varepsilon k c_4}{4}\|\Psi\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{4|\lambda|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 \\
& + \frac{2c_1c_2^2}{\varepsilon k c_4}\left[\frac{\varepsilon k c_4}{8} + \frac{8\rho_3^2\,\tilde{b}^2}{\varepsilon k \rho_2^2\,\delta^2} + \frac{4\rho_3}{\rho_2} + \frac{2}{\varepsilon}\left(\frac{2\rho_3 k}{\rho_2\delta\sqrt{\rho_1}} + \frac{2\rho_3 k l}{\delta\sqrt{\rho_2^3}}\right)^2\right]^2\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \\
& + c_2\left[\frac{\varepsilon k c_4}{8} + \frac{8\rho_3^2\,\tilde{b}^2}{\varepsilon k \rho_2^2\,\delta^2} + \frac{4\rho_3}{\rho_2} + \frac{2}{\varepsilon}\left(\frac{2\rho_3 k}{\rho_2\delta\sqrt{\rho_1}} + \frac{2\rho_3 k l}{\delta\sqrt{\rho_2^3}}\right)^2\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \\
& + \left[\frac{\varepsilon k c_4}{8} + \frac{c_1}{\delta^2} + \frac{\rho_3 b_0 c_1}{2\rho_2\delta^2} + \frac{2\sqrt{\rho_3}\sqrt{k}\,l}{\rho_2\delta} + \frac{4\sqrt{\rho_3}\,l}{\delta\sqrt{\rho_2}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}.
\end{aligned}
$$

Tomando $0 < \varepsilon \leq 3/kc_4$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\|\Psi\|_{L^2}^2 \;\leq\; & \frac{2c_1c_2^2}{\varepsilon kc_4}\left[\frac{\varepsilon kc_4}{8} + \frac{8\rho_3^2\,\tilde{b}^2}{\varepsilon k\rho_2^2\,\delta^2} + \frac{4\rho_3}{\rho_2} + \frac{2}{\varepsilon}\left(\frac{2\rho_3 k}{\rho_2\delta\sqrt{\rho_1}} + \frac{2\rho_3 kl}{\delta\sqrt{\rho_2^3}}\right)^2\right]^2 \|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \\
& + c_2\left[\frac{\varepsilon kc_4}{8} + \frac{8\rho_3^2\,\tilde{b}^2}{\varepsilon k\rho_2^2\,\delta^2} + \frac{4\rho_3}{\rho_2} + \frac{2}{\varepsilon}\left(\frac{2\rho_3 k}{\rho_2\delta\sqrt{\rho_1}} + \frac{2\rho_3 kl}{\delta\sqrt{\rho_2^3}}\right)^2\right] \|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \\
& + \left[\frac{\varepsilon kc_4}{8} + \frac{c_1}{\delta^2} + \frac{\rho_3 b_0 c_1}{2\rho_2\delta^2} + \frac{2\sqrt{\rho_3}\sqrt{k}\,l}{\rho_2\delta} + \frac{4\sqrt{\rho_3}\,l}{\delta\sqrt{\rho_2}}\right] \|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} + \frac{\varepsilon}{4|\lambda|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2,
\end{aligned}$$

o que implica em

$$\begin{aligned}
\|\Psi\|_{L^2}^2 \;\leq\; & \frac{8c_1c_2^2}{\varepsilon kc_4}\left[\frac{\varepsilon kc_4}{8} + \frac{8\rho_3^2\,\tilde{b}^2}{\varepsilon k\rho_2^2\,\delta^2} + \frac{4\rho_3}{\rho_2} + \frac{2}{\varepsilon}\left(\frac{2\rho_3 k}{\rho_2\delta\sqrt{\rho_1}} + \frac{2\rho_3 kl}{\delta\sqrt{\rho_2^3}}\right)^2\right]^2 \|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \\
& + 4c_2\left[\frac{\varepsilon kc_4}{8} + \frac{8\rho_3^2\,\tilde{b}^2}{\varepsilon k\rho_2^2\,\delta^2} + \frac{4\rho_3}{\rho_2} + \frac{2}{\varepsilon}\left(\frac{2\rho_3 k}{\rho_2\delta\sqrt{\rho_1}} + \frac{2\rho_3 kl}{\delta\sqrt{\rho_2^3}}\right)^2\right] \|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \\
& + 4\left[\frac{\varepsilon kc_4}{8} + \frac{c_1}{\delta^2} + \frac{\rho_3 b_0 c_1}{2\rho_2\delta^2} + \frac{2\sqrt{\rho_3}\sqrt{k}\,l}{\rho_2\delta} + \frac{4\sqrt{\rho_3}\,l}{\delta\sqrt{\rho_2}}\right] \|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} + \frac{\varepsilon}{|\lambda|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\|\Psi\|_{L^2}^2 \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 + c_5\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2},$$

onde

$$\begin{aligned}
c_5 \;=\; & \frac{8c_1c_2^2}{\varepsilon kc_4}\left[\frac{\varepsilon kc_4}{8} + \frac{8\rho_3^2\,\tilde{b}^2}{\varepsilon k\rho_2^2\,\delta^2} + \frac{4\rho_3}{\rho_2} + \frac{2}{\varepsilon}\left(\frac{2\rho_3 k}{\rho_2\delta\sqrt{\rho_1}} + \frac{2\rho_3 kl}{\delta\sqrt{\rho_2^3}}\right)^2\right]^2 \\
& + 4c_2\left[\frac{\varepsilon kc_4}{8} + \frac{8\rho_3^2\,\tilde{b}^2}{\varepsilon k\rho_2^2\,\delta^2} + \frac{4\rho_3}{\rho_2} + \frac{2}{\varepsilon}\left(\frac{2\rho_3 k}{\rho_2\delta\sqrt{\rho_1}} + \frac{2\rho_3 kl}{\delta\sqrt{\rho_2^3}}\right)^2\right] \\
& + 4\left[\frac{\varepsilon kc_4}{8} + \frac{c_1}{\delta^2} + \frac{\rho_3 b_0 c_1}{2\rho_2\delta^2} + \frac{2\sqrt{\rho_3}\sqrt{k}\,l}{\rho_2\delta} + \frac{4\sqrt{\rho_3}\,l}{\delta\sqrt{\rho_2}}\right].
\end{aligned}$$

■

Neste momento faz-se necessário definir χ_0, conhecido como “número de estabilidade”. Trata-se de uma relação entre os coeficientes introduzidas inicialmente por Santos et al. em [20]. Mais precisamente, considere

$$\chi_0 = \left(\tau - \frac{\rho_1}{\rho_3 k}\right)\left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{k}\right) - \frac{\tau\rho_1\delta^2}{\rho_3 k} \qquad \text{e} \qquad \chi_1 = \tau - \frac{\rho_1}{\rho_3 k}. \tag{5.71}$$

Lema 5.13. *Sejam* $\lambda \in \mathbb{R}$*,* $U \in D(A_2)$ *a solução da equação resolvente* (5.50) *e* g *uma função que satisfaz* (5.39)*.*

(i) *Se* $\chi_1 \neq 0$ *e* $|\lambda| \geq \max\{1, c_0\}$ *onde*

$$c_0^2 = \frac{2}{k|\chi_1|}\left[\frac{1}{2} + \frac{\rho_1 \tilde{b}}{\rho_3 k}\right].$$

Então, existe uma constante c_6 *positiva tal que*

$$\begin{aligned}\frac{k|\chi_1|}{2}\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 \quad &\leq \quad |\chi_0|\left|\big(\Psi, \Phi_x\big)_{L^2}\right| + c_6\Bigg[\|\Psi\|_{L^2}^2 + \|q\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} + \|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \\ &\quad + \left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|_{L^2}^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_2} + \|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}\Bigg],\end{aligned}$$

onde χ_0 *e* χ_1 *estão definidos em* (5.71)*.*

(ii) *Existe uma constante* $\tilde{c}_6$ *positiva tal que*

$$\begin{aligned}k\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 \quad &\leq \quad \tilde{c}_6\Bigg[\left|\big(\Psi, \Phi_x\big)_{L^2}\right| + \|\Psi\|_{L^2}^2 + |\lambda|\|\theta\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \\ &\quad + \left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|_{L^2}^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_2} + \|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}\Bigg].\end{aligned}$$

Demonstração. Inicialmente será provado o item ***(i)***. Tomando o produto interno de (5.54) com $\varphi_x + \psi$ em $L^2(0, l)$, vem que

$$\begin{aligned}i\lambda\rho_2\big(\Psi, \varphi_x + \psi\big)_{L^2} - \tilde{b}\big(\psi_{xx}, \varphi_x + \psi\big)_{L^2} - \left(\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\, ds, \varphi_x + \psi\right)_{L^2} \\ + k\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 + \delta\big(\theta_x, \varphi_x + \psi\big)_{L^2} = \rho_2\big(f_4, \varphi_x + \psi\big)_{L^2}.\end{aligned}$$

Contudo, observe que $\varphi_x + \psi \in H_0^1(0, l)$, portanto, ao integrar por partes vem que

$$\begin{aligned}\underbrace{i\lambda\rho_2\big(\Psi, \varphi_x + \psi\big)_{L^2}}_{=:I_7} + \underbrace{\tilde{b}\big(\psi_x, (\varphi_x + \psi)_x\big)_{L^2}}_{=:I_8} + \underbrace{\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\, ds, (\varphi_x + \psi)_x\right)_{L^2}}_{=:I_9} \\ + k\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 \underbrace{-\delta\big(\theta, (\varphi_x + \psi)_x\big)_{L^2}}_{=:I_{10}} = \rho_2\big(f_4, \varphi_x + \psi\big)_{L^2}.\end{aligned} \tag{5.72}$$

A partir deste momento, os estudos serão voltados para a análise dos termos I_7, I_8, I_9 e I_{10}.

Com efeito, das identidades (5.51) e (5.53), segue que

$$\begin{aligned} I_7 &= -\rho_2\big(\Psi, i\lambda\varphi_x + i\lambda\psi\big)_{L^2} = -\rho_2\big(\Psi, \Phi_x + f_{1,x} + \Psi + f_3\big)_{L^2} \\ &= -\rho_2\big(\Psi, \Phi_x\big)_{L^2} - \rho_2\|\Psi\|^2_{L^2} - \rho_2\big(\Psi, f_{1,x} + f_3\big)_{L^2}. \end{aligned} \tag{5.73}$$

De (5.52), pode-se obter

$$I_8 = \frac{\tilde{b}}{k}\big(\psi_x, i\lambda\rho_1\Phi - \rho_1 f_2\big)_{L^2} = -\frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(i\lambda\psi_x, \Phi\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(\psi_x, f_2\big)_{L^2},$$

mas, da igualdade (5.53) vem que $i\lambda\psi_x = \Psi_x + f_{3,x}$, consequentemente

$$\begin{aligned} I_8 &= -\frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(\Psi_x + f_{3,x}, \Phi\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(\psi_x, f_2\big)_{L^2} \\ &= -\frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(\Psi_x, \Phi\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(f_{3,x}, \Phi\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(\psi_x, f_2\big)_{L^2}. \end{aligned}$$

Integrando por partes e lembrando que $\Psi \in H^1_0(0, l)$, chega-se a

$$I_8 = \frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(\Psi, \Phi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(f_{3,x}, \Phi\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(\psi_x, f_2\big)_{L^2}. \tag{5.74}$$

Além disso, usando (5.52) vem que

$$\begin{aligned} I_9 &= \frac{1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, i\lambda\rho_1\Phi - \rho_1 f_2\right)_{L^2} \\ &= -\frac{i\lambda\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, \Phi\right)_{L^2} - \frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, f_2\right)_{L^2} \end{aligned}$$

e ao integrar por partes e usar a identidade (5.57), obtém-se

$$\begin{aligned} I_9 &= \frac{i\lambda\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta(s)\,ds, \Phi_x\right)_{L^2} - \frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, f_2\right)_{L^2} \\ &= \frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)\big[-\eta_s(s) + \Psi + f_7(s)\big]\,ds, \Phi_x\right)_{L^2} - \frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, f_2\right)_{L^2} \\ &= -\frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_s(s)\,ds, \Phi_x\right)_{L^2} + \frac{\rho_1 b_0}{k}\big(\Psi, \Phi_x\big)_{L^2} + \frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)f_7(s)\,ds, \Phi_x\right)_{L^2} \\ &\quad -\frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, f_2\right)_{L^2}. \end{aligned}$$

Aplicando a Proposição 2.58 e integrando por partes, resulta que

$$\begin{aligned} I_9 &= -\frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g'(s)\eta_x(s)\,ds,\Phi\right)_{L^2} + \frac{\rho_1 b_0}{k}\big(\Psi,\Phi_x\big)_{L^2} \\ &\quad -\frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)f_{7,x}(s)\,ds,\Phi\right)_{L^2} - \frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, f_2\right)_{L^2}. \end{aligned} \tag{5.75}$$

Agora, veja que a equação (5.52) permite escrever I_{10} como

$$I_{10} = -\frac{\delta}{k}\big(\theta, i\lambda\rho_1\Phi - \rho_1 f_2\big)_{L^2} = \frac{i\lambda\rho_1\delta}{k}\big(\theta,\Phi\big)_{L^2} + \frac{\rho_1\delta}{k}\big(\theta,f_2\big)_{L^2}. \tag{5.76}$$

Substituindo (5.73)-(5.76) em (5.72), obtém-se

$$\begin{gathered} -\rho_2\big(\Psi,\Phi_x\big)_{L^2} - \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 - \rho_2\big(\Psi, f_{1,x}+f_3\big)_{L^2} + \frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(\Psi,\Phi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(f_{3,x},\Phi\big)_{L^2} \\ -\frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(\psi_x,f_2\big)_{L^2} - \frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g'(s)\eta_x(s)\,ds,\Phi\right)_{L^2} + \frac{\rho_1 b_0}{k}\big(\Psi,\Phi_x\big)_{L^2} \\ -\frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)f_{7,x}(s)\,ds,\Phi\right)_{L^2} - \frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds,f_2\right)_{L^2} + k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 \\ +\frac{i\lambda\rho_1\delta}{k}\big(\theta,\Phi\big)_{L^2} + \frac{\rho_1\delta}{k}\big(\theta,f_2\big)_{L^2} = \rho_2\big(f_4,\varphi_x+\psi\big)_{L^2}, \end{gathered}$$

e ainda, lembrando que $\tilde{b} = b - b_0$, segue que

$$\begin{gathered} -\left[\rho_2 - \frac{\rho_1 b}{k}\right]\big(\Psi,\Phi_x\big)_{L^2} - \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 - \rho_2\big(\Psi,f_{1,x}+f_3\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(f_{3,x},\Phi\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(\psi_x,f_2\big)_{L^2} \\ -\frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g'(s)\eta_x(s)\,ds,\Phi\right)_{L^2} - \frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)f_{7,x}(s)\,ds,\Phi\right)_{L^2} - \frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds,f_2\right)_{L^2} \\ +k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 + \frac{i\lambda\rho_1\delta}{k}\big(\theta,\Phi\big)_{L^2} + \frac{\rho_1\delta}{k}\big(\theta,f_2\big)_{L^2} = \rho_2\big(f_4,\varphi_x+\psi\big)_{L^2}. \end{gathered} \tag{5.77}$$

Além disso, a igualdade (5.77) por ser resumida como

$$k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 = \left[\rho_2 - \frac{\rho_1 b}{k}\right]\big(\Psi,\Phi_x\big)_{L^2} \underbrace{-\frac{i\lambda\rho_1\delta}{k}\big(\theta,\Phi\big)_{L^2}}_{=:I_{11}} + R_0, \tag{5.78}$$

denotando por R_0 o seguinte termo

$$
\begin{aligned}
R_0 &= \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_2\big(\Psi, f_{1,x} + f_3\big)_{L^2} + \frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(\psi_x, f_2\big)_{L^2} + \frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g'(s)\eta_x(s)\,ds, \Phi\right)_{L^2} \\
&+\frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)f_{7,x}(s)\,ds, \Phi\right)_{L^2} + \frac{\rho_1}{k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, f_2\right)_{L^2} \\
&+\frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\big(f_{3,x}, \Phi\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\delta}{k}\big(\theta, f_2\big)_{L^2} + \rho_2\big(f_4, \varphi_x + \psi\big)_{L^2}.
\end{aligned} \tag{5.79}
$$

Em I_{11}, será usado a equação (5.55), bem como integração por partes, notando que Ψ e q pertencem ao espaço $H_0^1(0,l)$, assim tem-se

$$
\begin{aligned}
I_{11} &= -\frac{\rho_1\delta}{k}\big(i\lambda\theta, \Phi\big)_{L^2} = -\frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\big(-q_x - \delta\Psi_x + \rho_3 f_5, \Phi\big)_{L^2} \\
&= \frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\big(q_x, \Phi\big)_{L^2} + \frac{\rho_1\delta^2}{\rho_3 k}\big(\Psi_x, \Phi\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\delta}{k}\big(f_5, \Phi\big)_{L^2} \\
&= -\frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\big(q, \Phi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\delta^2}{\rho_3 k}\big(\Psi, \Phi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\delta}{k}\big(f_5, \Phi\big)_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Mas, note que a identidade (5.51) fornece $\Phi_x = i\lambda\varphi_x - f_{1,x}$, logo

$$
\begin{aligned}
I_{11} &= -\frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\big(q, i\lambda\varphi_x - f_{1,x}\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\delta^2}{\rho_3 k}\big(\Psi, \Phi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\delta}{k}\big(f_5, \Phi\big)_{L^2} \\
&= \underbrace{\frac{i\lambda\rho_1\delta}{\rho_3 k}\big(q, \varphi_x\big)_{L^2}}_{=:I_{12}} + \frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\big(q, f_{1,x}\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\delta^2}{\rho_3 k}\big(\Psi, \Phi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\delta}{k}\big(f_5, \Phi\big)_{L^2}.
\end{aligned} \tag{5.80}
$$

Ademais, veja que da equação (5.56), vem que

$$
\begin{aligned}
I_{12} &= \frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\big(i\lambda q, \varphi_x\big)_{L^2} = \frac{\rho_1\delta}{\tau\rho_3 k}\big(-\beta q - \theta_x + \tau f_6, \varphi_x\big)_{L^2} \\
&= -\frac{\rho_1\delta\beta}{\tau\rho_3 k}\big(q, \varphi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\delta}{\tau\rho_3 k}\big(\theta_x, \varphi_x\big)_{L^2} + \frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\big(f_6, \varphi_x\big)_{L^2},
\end{aligned} \tag{5.81}
$$

e assim, substituindo (5.81) em (5.80), obtém-se

$$
\begin{aligned}
I_{11} &= -\frac{\rho_1\delta\beta}{\tau\rho_3 k}\big(q, \varphi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\delta}{\tau\rho_3 k}\big(\theta_x, \varphi_x\big)_{L^2} + \frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\big(f_6, \varphi_x\big)_{L^2} \\
&+\frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\big(q, f_{1,x}\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\delta^2}{\rho_3 k}\big(\Psi, \Phi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\delta}{k}\big(f_5, \Phi\big)_{L^2},
\end{aligned}
$$

ou melhor,

$$I_{11} = -\frac{\rho_1\delta\beta}{\tau\rho_3 k}\big(q,\varphi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\delta}{\tau\rho_3 k}\big(\theta_x,\varphi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\delta^2}{\rho_3 k}\big(\Psi,\Phi_x\big)_{L^2} + R_1, \tag{5.82}$$

onde

$$R_1 = \frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\big(f_6,\varphi_x\big)_{L^2} + \frac{\rho_1\delta}{\rho_3 k}\big(q,f_{1,x}\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\delta}{k}\big(f_5,\Phi\big)_{L^2}.$$

Substituindo (5.82) em (5.78), pode-se escrever

$$\begin{aligned} k\|\varphi_x+\psi\|^2_{L^2} = &\left[\rho_2 - \frac{\rho_1 b}{k} - \frac{\rho_1\delta^2}{\rho_3 k}\right]\big(\Psi,\Phi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\delta\beta}{\tau\rho_3 k}\big(q,\varphi_x\big)_{L^2} \\ &\underbrace{-\frac{\rho_1\delta}{\tau\rho_3 k}\big(\theta_x,\varphi_x\big)_{L^2}}_{=:I_{13}} + R_0 + R_1. \end{aligned} \tag{5.83}$$

Note que da igualdade (5.54) vem que

$$\delta\theta_x = -i\lambda\rho_2\Psi + \tilde{b}\psi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds - k(\varphi_x+\psi) + \rho_2 f_4,$$

por conseguinte

$$\begin{aligned} I_{13} &= -\frac{\rho_1}{\tau\rho_3 k}\left(-i\lambda\rho_2\Psi + \tilde{b}\psi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds - k(\varphi_x+\psi) + \rho_2 f_4, \varphi_x\right)_{L^2} \\ &= \underbrace{\frac{i\lambda\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k}\big(\Psi,\varphi_x\big)_{L^2}}_{=:I_{14}} - \frac{\rho_1\tilde{b}}{\tau\rho_3 k}\big(\psi_{xx},\varphi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1}{\tau\rho_3 k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds, \varphi_x\right)_{L^2} \\ &\quad + \frac{\rho_1}{\tau\rho_3}\big(\varphi_x+\psi,\varphi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k}\big(f_4,\varphi_x\big)_{L^2}. \end{aligned} \tag{5.84}$$

Porém, de (5.51) tem-se

$$I_{14} = -\frac{\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k}\big(\Psi,i\lambda\varphi_x\big)_{L^2} = -\frac{\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k}\big(\Psi,\Phi_x+f_{1,x}\big)_{L^2} = -\frac{\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k}\big(\Psi,\Phi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k}\big(\Psi,f_{1,x}\big)_{L^2},$$

logo, a identidade (5.84) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} I_{13} &= -\frac{\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k}\big(\Psi,\Phi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k}\big(\Psi,f_{1,x}\big)_{L^2} - \frac{\rho_1}{\tau\rho_3 k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds, \varphi_x\right)_{L^2} \\ &\quad - \frac{\rho_1\tilde{b}}{\tau\rho_3 k}\big(\psi_{xx},\varphi_x\big)_{L^2} + \frac{\rho_1}{\tau\rho_3}\big(\varphi_x+\psi,\varphi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k}\big(f_4,\varphi_x\big)_{L^2}. \end{aligned}$$

Somando e subtraindo ψ em termos convenientes, segue que

$$\begin{aligned}
I_{13} &= -\frac{\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k}\big(\Psi,\Phi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k}\big(\Psi,f_{1,x}\big)_{L^2} - \frac{\rho_1}{\tau\rho_3 k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds,\varphi_x+\psi-\psi\right)_{L^2} \\
&\quad -\frac{\rho_1\tilde{b}}{\tau\rho_3 k}\big(\psi_{xx},\varphi_x+\psi-\psi\big)_{L^2} + \frac{\rho_1}{\tau\rho_3}\big(\varphi_x+\psi,\varphi_x+\psi-\psi\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k}\big(f_4,\varphi_x\big)_{L^2} \\
&= -\frac{\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k}\big(\Psi,\Phi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k}\big(\Psi,f_{1,x}\big)_{L^2} - \frac{\rho_1}{\tau\rho_3 k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds,\varphi_x+\psi\right)_{L^2} \\
&\quad +\frac{\rho_1}{\tau\rho_3 k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds,\psi\right)_{L^2} - \frac{\rho_1\tilde{b}}{\tau\rho_3 k}\big(\psi_{xx},\varphi_x+\psi\big)_{L^2} + \frac{\rho_1\tilde{b}}{\tau\rho_3 k}\big(\psi_{xx},\psi\big)_{L^2} \\
&\quad +\frac{\rho_1}{\tau\rho_3}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 - \frac{\rho_1}{\tau\rho_3}\big(\varphi_x+\psi,\psi\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k}\big(f_4,\varphi_x\big)_{L^2}.
\end{aligned}$$

Neste momento, note que $\varphi_x,\ \psi \in H_0^1(0,l)$, consequentemente ao integrar por partes segue que

$$\begin{aligned}
I_{13} &= -\frac{\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k}\big(\Psi,\Phi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k}\big(\Psi,f_{1,x}\big)_{L^2} + \frac{\rho_1}{\tau\rho_3 k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_{x}(s)\,ds,(\varphi_x+\psi)_x\right)_{L^2} \\
&\quad -\frac{\rho_1}{\tau\rho_3 k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_{x}(s)\,ds,\psi_x\right)_{L^2} + \frac{\rho_1\tilde{b}}{\tau\rho_3 k}\big(\psi_{x},(\varphi_x+\psi)_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\tilde{b}}{\tau\rho_3 k}\|\psi_x\|_{L^2}^2 \\
&\quad +\frac{\rho_1}{\tau\rho_3}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 - \frac{\rho_1}{\tau\rho_3}\big(\varphi_x+\psi,\psi\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k}\big(f_4,\varphi_x\big)_{L^2}. \qquad (5.85)
\end{aligned}$$

Da igualdade (5.52) vem que $k(\varphi_x+\psi)_x = i\lambda\rho_1\Phi - \rho_1 f_2$, portanto, usando em (5.85) vem

$$\begin{aligned}
I_{13} &= -\frac{\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k}\big(\Psi,\Phi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k}\big(\Psi,f_{1,x}\big)_{L^2} + \underbrace{\frac{\rho_1}{\tau\rho_3 k^2}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_{x}(s)\,ds,i\lambda\rho_1\Phi-\rho_1 f_2\right)_{L^2}}_{=:I_{15}} \\
&\quad -\frac{\rho_1}{\tau\rho_3 k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_{x}(s)\,ds,\psi_x\right)_{L^2} + \underbrace{\frac{\rho_1\tilde{b}}{\tau\rho_3 k^2}\big(\psi_{x},i\lambda\rho_1\Phi-\rho_1 f_2\big)_{L^2}}_{=:I_{16}} - \frac{\rho_1\tilde{b}}{\tau\rho_3 k}\|\psi_x\|_{L^2}^2 \\
&\quad +\frac{\rho_1}{\tau\rho_3}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 - \frac{\rho_1}{\tau\rho_3}\big(\varphi_x+\psi,\psi\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k}\big(f_4,\varphi_x\big)_{L^2}. \qquad (5.86)
\end{aligned}$$

No entanto, lembre que a identidade (5.57) fornece a igualdade $i\lambda\eta_x = -\eta_{sx} + \Psi_x + f_{7,x}$ em $L_g^2\big(\mathbb{R}^+,L^2(0,l)\big)$, consequentemente, ao usar as propriedades de produto interno e integrar por partes, segue que

$$\begin{aligned}
I_{15} &= -\frac{\rho_1^2}{\tau\rho_3 k^2}\left(\int_0^\infty g(s)i\lambda\eta_x(s)\,ds,\Phi\right)_{L^2} - \frac{\rho_1^2}{\tau\rho_3 k^2}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, f_2\right)_{L^2}\\
&= -\frac{\rho_1^2}{\tau\rho_3 k^2}\left(\int_0^\infty g(s)[\Psi_x - \eta_{sx}(s) + f_{7,x}(s)]\,ds,\Phi\right)_{L^2} - \frac{\rho_1^2}{\tau\rho_3 k^2}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, f_2\right)_{L^2}\\
&= \frac{\rho_1^2 b_0}{\tau\rho_3 k^2}\big(\Psi,\Phi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1^2}{\tau\rho_3 k^2}\left(\int_0^\infty g'(s)\eta_x(s)\,ds,\Phi\right)_{L^2} - \frac{\rho_1^2}{\tau\rho_3 k^2}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, f_2\right)_{L^2}\\
&\quad -\frac{\rho_1^2}{\tau\rho_3 k^2}\left(\int_0^\infty g(s)f_{7,x}(s)\,ds,\Phi\right)_{L^2}. \qquad (5.87)
\end{aligned}$$

Mais ainda, usando (5.53), vem que $i\lambda\psi_x = \Psi_x + f_{3,x}$ em $L^2(0,l)$ e, portanto

$$\begin{aligned}
I_{16} &= -\frac{\rho_1^2\tilde{b}}{\tau\rho_3 k^2}\big(i\lambda\psi_x,\Phi\big)_{L^2} - \frac{\rho_1^2\tilde{b}}{\tau\rho_3 k^2}\big(\psi_x, f_2\big)_{L^2}\\
&= -\frac{\rho_1^2\tilde{b}}{\tau\rho_3 k^2}\big(\Psi_x + f_{3,x},\Phi\big)_{L^2} - \frac{\rho_1^2\tilde{b}}{\tau\rho_3 k^2}\big(\psi_x, f_2\big)_{L^2}\\
&= \frac{\rho_1^2\tilde{b}}{\tau\rho_3 k^2}\big(\Psi,\Phi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1^2\tilde{b}}{\tau\rho_3 k^2}\big(f_{3,x},\Phi\big)_{L^2} - \frac{\rho_1^2\tilde{b}}{\tau\rho_3 k^2}\big(\psi_x, f_2\big)_{L^2}. \qquad (5.88)
\end{aligned}$$

Substituindo (5.87) e (5.88) em (5.86), vem que

$$\begin{aligned}
I_{13} &= -\frac{\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k}\big(\Psi,\Phi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k}\big(\Psi, f_{1,x}\big)_{L^2} + \frac{\rho_1^2 b_0}{\tau\rho_3 k^2}\big(\Psi,\Phi_x\big)_{L^2}\\
&\quad -\frac{\rho_1^2}{\tau\rho_3 k^2}\left(\int_0^\infty g'(s)\eta_x(s)\,ds,\Phi\right)_{L^2} - \frac{\rho_1^2}{\tau\rho_3 k^2}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, f_2\right)_{L^2}\\
&\quad -\frac{\rho_1^2}{\tau\rho_3 k^2}\left(\int_0^\infty g(s)f_{7,x}(s)\,ds,\Phi\right)_{L^2} - \frac{\rho_1}{\tau\rho_3 k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds,\psi_x\right)_{L^2}\\
&\quad +\frac{\rho_1^2\tilde{b}}{\tau\rho_3 k^2}\big(\Psi,\Phi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1^2\tilde{b}}{\tau\rho_3 k^2}\big(f_{3,x},\Phi\big)_{L^2} - \frac{\rho_1^2\tilde{b}}{\tau\rho_3 k^2}\big(\psi_x, f_2\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\tilde{b}}{\tau\rho_3 k}\|\psi_x\|_{L^2}^2\\
&\quad +\frac{\rho_1}{\tau\rho_3}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 - \frac{\rho_1}{\tau\rho_3}\big(\varphi_x+\psi,\psi\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k}\big(f_4,\varphi_x\big)_{L^2},
\end{aligned}$$

mais precisamente, usando que $b = \tilde{b} + b_0$, pode-se obter

$$\begin{aligned}
I_{13} &= \left[-\frac{\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k} + \frac{\rho_1^2 b}{\tau\rho_3 k^2}\right]\big(\Psi,\Phi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\tilde{b}}{\tau\rho_3 k}\|\psi_x\|_{L^2}^2\\
&\quad +\frac{\rho_1}{\tau\rho_3}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 - \frac{\rho_1}{\tau\rho_3}\big(\varphi_x+\psi,\psi\big)_{L^2} + R_2, \qquad (5.89)
\end{aligned}$$

onde

$$
\begin{aligned}
R_2 &= -\frac{\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k}\big(\Psi, f_{1,x}\big)_{L^2} - \frac{\rho_1^2}{\tau\rho_3 k^2}\left(\int_0^\infty g'(s)\eta_x(s)\,ds, \Phi\right)_{L^2} - \frac{\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k}\big(f_4, \varphi_x\big)_{L^2} \\
&\quad -\frac{\rho_1^2}{\tau\rho_3 k^2}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, f_2\right)_{L^2} - \frac{\rho_1^2}{\tau\rho_3 k^2}\left(\int_0^\infty g(s)f_{7,x}(s)\,ds, \Phi\right)_{L^2} \\
&\quad -\frac{\rho_1}{\tau\rho_3 k}\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, \psi_x\right)_{L^2} - \frac{\rho_1^2\tilde{b}}{\tau\rho_3 k^2}\big(f_{3,x}, \Phi\big)_{L^2} - \frac{\rho_1^2\tilde{b}}{\tau\rho_3 k^2}\big(\psi_x, f_2\big)_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Substituindo (5.89) em (5.83)

$$
\begin{aligned}
k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 &= \left[\rho_2 - \frac{\rho_1 b}{k} - \frac{\rho_1\delta^2}{\rho_3 k} - \frac{\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k} + \frac{\rho_1^2 b}{\tau\rho_3 k^2}\right]\big(\Psi, \Phi_x\big)_{L^2} + \frac{\rho_1}{\tau\rho_3}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 \\
&\quad -\frac{\rho_1\tilde{b}}{\tau\rho_3 k}\|\psi_x\|_{L^2}^2 - \frac{\rho_1\delta\beta}{\tau\rho_3 k}\big(q, \varphi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1}{\tau\rho_3}\big(\varphi_x+\psi, \psi\big)_{L^2} + R_0 + R_1 + R_2,
\end{aligned}
$$

ou ainda,

$$
\begin{aligned}
\left[k - \frac{\rho_1}{\tau\rho_3}\right]\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 &= \left[\rho_2 - \frac{\rho_1 b}{k} - \frac{\rho_1\delta^2}{\rho_3 k} - \frac{\rho_1\rho_2}{\tau\rho_3 k} + \frac{\rho_1^2 b}{\tau\rho_3 k^2}\right]\big(\Psi, \Phi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\tilde{b}}{\tau\rho_3 k}\|\psi_x\|_{L^2}^2 \\
&\quad -\frac{\rho_1\delta\beta}{\tau\rho_3 k}\big(q, \varphi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1}{\tau\rho_3}\big(\varphi_x+\psi, \psi\big)_{L^2} + R_0 + R_1 + R_2.
\end{aligned}
\tag{5.90}
$$

Multiplicando (5.90) por τ e observando a definição de χ_0 e χ_1,vem que

$$
\begin{aligned}
k\chi_1\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 &= \chi_0\big(\Psi, \Phi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\tilde{b}}{\rho_3 k}\|\psi_x\|_{L^2}^2 - \frac{\rho_1\delta\beta}{\rho_3 k}\big(q, \varphi_x\big)_{L^2} \\
&\quad -\frac{\rho_1}{\rho_3}\big(\varphi_x+\psi, \psi\big)_{L^2} + \tau\big(R_0 + R_1 + R_2\big),
\end{aligned}
$$

tomando a parte real, obtém-se

$$
\begin{aligned}
k\chi_1\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 &= \chi_0 \operatorname{Re}\big(\Psi, \Phi_x\big)_{L^2} - \frac{\rho_1\tilde{b}}{\rho_3 k}\|\psi_x\|_{L^2}^2 \underbrace{-\frac{\rho_1\delta\beta}{\rho_3 k}\operatorname{Re}\big(q, \varphi_x\big)_{L^2}}_{=:I_{17}} \\
&\quad \underbrace{-\frac{\rho_1}{\rho_3}\operatorname{Re}\big(\varphi_x+\psi, \psi\big)_{L^2}}_{=:I_{18}} + \tau\operatorname{Re}\big(R_0 + R_1 + R_2\big).
\end{aligned}
\tag{5.91}
$$

Somando e subtraindo ψ em I_{17}, pode-se obter

$$
I_{17} = -\frac{\rho_1\delta\beta}{\rho_3 k}\operatorname{Re}\big(q, \varphi_x+\psi\big)_{L^2} + \frac{\rho_1\delta\beta}{\rho_3 k}\operatorname{Re}\big(q, \psi\big)_{L^2}.
$$

Visto que para qualquer número complexo z vale que $\operatorname{Re} z \leq |z|$, segue das desigualdades de

Cauchy-Schwarz e Poincaré a seguinte estimativa

$$I_{17} \leq \frac{\rho_1\delta\beta}{\rho_3 k}\|q\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}+\frac{\rho_1\delta\beta l}{\rho_3 k}\|q\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2} \leq \left[\frac{\rho_1\delta\beta}{\rho_3\sqrt{k^3}}+\frac{\rho_1\delta\beta l}{\rho_3 k\sqrt{\tilde{b}}}\right]\|q\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}. \tag{5.92}$$

Além disso, usando a igualdade (5.53) em I_{18}, segue que

$$\begin{aligned} I_{18} &= \frac{\rho_1}{i\lambda\rho_3}\operatorname{Re}\big(\varphi_x+\psi,\Psi+f_3\big)_{L^2} \\ &= \frac{\rho_1}{i\lambda\rho_3}\operatorname{Re}\big(\varphi_x+\psi,\Psi\big)_{L^2}+\frac{\rho_1}{i\lambda\rho_3}\operatorname{Re}\big(\varphi_x+\psi,f_3\big)_{L^2}, \end{aligned}$$

como consequência das desigualdades de Cauchy-Schwarz e Poincaré, vem que

$$\begin{aligned} I_{18} &\leq \frac{\rho_1}{|\lambda|\rho_3}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2}+\frac{\rho_1 l}{|\lambda|\rho_3}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}\|f_{3,x}\|_{L^2} \\ &\leq \frac{\rho_1}{|\lambda|\rho_3}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2}+\frac{\rho_1 l}{|\lambda|\rho_3\sqrt{k}\sqrt{\tilde{b}}}\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}. \end{aligned}$$

Usando que $|\lambda| \geq 1$ e a Desigualdade de Young com $\varepsilon = 1/2$, segue que

$$I_{18} \leq \frac{1}{2|\lambda|^2}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2+\frac{\rho_1^2}{2\rho_3^2}\|\Psi\|_{L^2}^2+\frac{\rho_1 l}{\rho_3\sqrt{k}\sqrt{\tilde{b}}}\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}. \tag{5.93}$$

Desta forma, tomando o módulo em (5.91), a Desigualdade Triangular e as estimativas (5.92) e (5.93), obtém-se

$$\begin{aligned} k|\chi_1|\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 \leq\ & |\chi_0|\left|\big(\Psi,\Phi_x\big)_{L^2}\right|+\frac{\rho_1\tilde{b}}{\rho_3 k}\|\psi_x\|_{L^2}^2+\frac{1}{2|\lambda|^2}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2+\frac{\rho_1^2}{2\rho_3^2}\|\Psi\|_{L^2}^2 \\ &+\left[\frac{\rho_1\delta\beta}{\rho_3\sqrt{k^3}}+\frac{\rho_1\delta\beta l}{\rho_3 k\sqrt{\tilde{b}}}\right]\|q\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}+\frac{\rho_1 l}{\rho_3\sqrt{k}\sqrt{\tilde{b}}}\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \\ &+\tau\big(|R_0|+|R_1|+|R_2|\big). \end{aligned} \tag{5.94}$$

Neste momento, serão feitas estimativas para $\tau|R_0|$, $\tau|R_1|$ e $\tau|R_2|$. Com efeito, das desigualdades Triangular, Cauchy-Schwarz e Hölder, segue que

$$
\begin{aligned}
\tau|R_0| \;\leq\;& \tau\rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \tau\rho_2\left|\big(\Psi, f_{1,x}+f_3\big)_{L^2}\right| + \frac{\tau\rho_1\tilde{b}}{k}\left|\big(\psi_x, f_2\big)_{L^2}\right| + \frac{\tau\rho_1\delta}{k}\left|\big(\theta, f_2\big)_{L^2}\right| \\
&+\frac{\tau\rho_1}{k}\left|\left(\int_0^\infty g'(s)\eta_x(s)\,ds, \Phi\right)_{L^2}\right| + \frac{\tau\rho_1}{k}\left|\left(\int_0^\infty g(s)f_{7,x}(s)\,ds, \Phi\right)_{L^2}\right| \\
&+\frac{\tau\rho_1}{k}\left|\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds, f_2\right)_{L^2}\right| + \frac{\tau\rho_1\tilde{b}}{k}\left|\big(f_{3,x}, \Phi\big)_{L^2}\right| + \tau\rho_2\left|\big(f_4, \varphi_x+\psi\big)_{L^2}\right| \\
\leq\;& \tau\rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \tau\rho_2\|\Psi\|_{L^2}\|f_{1,x}+f_3\|_{L^2} + \frac{\tau\rho_1\tilde{b}}{k}\|\psi_x\|_{L^2}\|f_2\|_{L^2} + \frac{\tau\rho_1\delta}{k}\|\theta\|_{L^2}\|f_2\|_{L^2} \\
&+\frac{\tau\rho_1\sqrt{g(0)}}{k}\left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|_{L^2}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\|\Phi\|_{L^2} + \frac{\tau\rho_1\sqrt{b_0}}{k}\|f_7\|_{L_g^2(H_0^1)}\|\Phi\|_{L^2} \\
&+\frac{\tau\rho_1\sqrt{b_0}}{k}\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}\|f_2\|_{L^2} + \frac{\tau\rho_1\tilde{b}}{k}\|f_{3,x}\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2} + \tau\rho_2\|f_4\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2} \\
\leq\;& \tau\rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \frac{\tau\sqrt{\rho_1}\sqrt{g(0)}}{k}\left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|_{L^2}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \\
&+\left[\frac{2\tau\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{k}} + \frac{2\tau\sqrt{\rho_1}\sqrt{\tilde{b}}}{k} + \frac{\tau\sqrt{\rho_1}\delta}{k\sqrt{\rho_3}} + \frac{2\tau\sqrt{\rho_1}\sqrt{b_0}}{k}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2},
\end{aligned}
$$

ou ainda,

$$
\tau|R_0| \;\leq\; d_0\left[\|\Psi\|_{L^2}^2 + \left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|_{L^2}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_2} + \|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}\right], \tag{5.95}
$$

onde

$$
d_0 = \max\left\{\tau\rho_2,\ \frac{\tau\sqrt{\rho_1}\sqrt{g(0)}}{k},\ \frac{2\tau\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{k}} + \frac{2\tau\sqrt{\rho_1}\sqrt{\tilde{b}}}{k} + \frac{\tau\sqrt{\rho_1}\delta}{k\sqrt{\rho_3}} + \frac{2\tau\sqrt{\rho_1}\sqrt{b_0}}{k}\right\}.
$$

Por outro lado, somando e subtraindo ψ e f_3 em termos convenientes e usando os mesmos argumentos da estimativa para $\tau|R_0|$, vem que

$$\begin{aligned}
\tau|R_1| \;&\leq\; \frac{\tau\rho_1\delta}{\rho_3 k}\left|\big(f_6,\varphi_x+\psi\big)_{L^2}\right| + \frac{\tau\rho_1\delta}{\rho_3 k}\left|\big(f_6,\psi\big)_{L^2}\right| + \frac{\tau\rho_1\delta}{\rho_3 k}\left|\big(q,f_3\big)_{L^2}\right| \\
&\quad + \frac{\tau\rho_1\delta}{\rho_3 k}\left|\big(q,f_{1,x}+f_3\big)_{L^2}\right| + \frac{\tau\rho_1\delta}{k}\left|\big(f_5,\Phi\big)_{L^2}\right| \\
&\leq\; \frac{\tau\rho_1\delta}{\rho_3 k}\|f_6\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2} + \frac{\tau\rho_1\delta l}{\rho_3 k}\|f_6\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2} + \frac{\tau\rho_1\delta l}{\rho_3 k}\|q\|_{L^2}\|f_{3,x}\|_{L^2} \\
&\quad + \frac{\tau\rho_1\delta}{\rho_3 k}\|q\|_{L^2}\|f_{1,x}+f_3\|_{L^2} + \frac{\tau\rho_1\delta}{k}\|f_5\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2} \\
&\leq\; \left[\frac{2\sqrt{\tau}\rho_1\delta}{\rho_3\sqrt{k^3}} + \frac{2\sqrt{\tau}\rho_1\delta l}{\rho_3 k\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{\tau\sqrt{\rho_1}\delta}{k\sqrt{\rho_3}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\tau|R_1| \;\leq\; d_1\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}, \tag{5.96}$$

com

$$d_1 = \frac{2\sqrt{\tau}\rho_1\delta}{\rho_3\sqrt{k^3}} + \frac{2\sqrt{\tau}\rho_1\delta l}{\rho_3 k\sqrt{\tilde{b}}} + \frac{\tau\sqrt{\rho_1}\delta}{k\sqrt{\rho_3}}.$$

Agora será feito estimativas para $\tau|R_2|$ empregando os mesmos argumentos descritos para obter as estimativas de $\tau|R_0|$ e $\tau|R_1|$, mais precisamente

$$\begin{aligned}
\tau|R_2| \;&\leq\; \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_3 k}\left|\big(\Psi,f_{1,x}+f_3\big)_{L^2}\right| + \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_3 k}\left|\big(\Psi,f_3\big)_{L^2}\right| + \frac{\rho_1^2}{\rho_3 k^2}\left|\left(\int_0^\infty g'(s)\eta_x(s)\,ds,\Phi\right)_{L^2}\right| \\
&\quad + \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_3 k}\left|\big(f_4,\varphi_x+\psi\big)_{L^2}\right| + \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_3 k}\left|\big(f_4,\psi\big)_{L^2}\right| + \frac{\rho_1^2}{\rho_3 k^2}\left|\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds,f_2\right)_{L^2}\right| \\
&\quad + \frac{\rho_1^2}{\rho_3 k^2}\left|\left(\int_0^\infty g(s)f_{7,x}(s)\,ds,\Phi\right)_{L^2}\right| + \frac{\rho_1}{\rho_3 k}\left|\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)\,ds,\psi_x\right)_{L^2}\right| \\
&\quad + \frac{\rho_1^2\tilde{b}}{\rho_3 k^2}\left|\big(f_{3,x},\Phi\big)_{L^2}\right| + \frac{\rho_1^2\tilde{b}}{\rho_3 k^2}\left|\big(\psi_x,f_2\big)_{L^2}\right| \\
&\leq\; \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_3 k}\|\Psi\|_{L^2}\|f_{1,x}+f_3\|_{L^2} + \frac{\rho_1\rho_2 l}{\rho_3 k}\|\Psi\|_{L^2}\|f_{3,x}\|_{L^2} + \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_3 k}\|f_4\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2} \\
&\quad + \frac{\rho_1^2\sqrt{g(0)}}{\rho_3 k^2}\left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|_{L^2}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\|\Phi\|_{L^2} + \frac{\rho_1\rho_2 l}{\rho_3 k}\|f_4\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2} \\
&\quad + \frac{\rho_1^2\sqrt{b_0}}{\rho_3 k^2}\|\eta\|_{L^2_g(H^1_0)}\|f_2\|_{L^2} + \frac{\rho_1^2\sqrt{b_0}}{\rho_3 k^2}\|f_7\|_{L^2_g(H^1_0)}\|\Phi\|_{L^2} + \frac{\rho_1\sqrt{b_0}}{\rho_3 k}\|\eta\|_{L^2_g(H^1_0)}\|\psi_x\|_{L^2} \\
&\quad + \frac{\rho_1^2\tilde{b}}{\rho_3 k^2}\|f_{3,x}\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2} + \frac{\rho_1^2\tilde{b}}{\rho_3 k^2}\|\psi_x\|_{L^2}\|f_2\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Deste modo, vem que

$$\begin{aligned}\tau|R_2| &\leq \frac{\sqrt{\rho_1^3}\sqrt{g(0)}}{\rho_3 k^2}\left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|_{L^2}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_2}+\frac{\rho_1\sqrt{b_0}}{\rho_3 k\sqrt{\tilde{b}}}\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}\|U\|_{\mathcal{H}_2}\\&+\left[\frac{2\rho_1\sqrt{\rho_2}}{\rho_3\sqrt{k^3}}+\frac{2\rho_1\sqrt{\rho_2}l}{\rho_3 k\sqrt{\tilde{b}}}+\frac{2\sqrt{\rho_1^3}\sqrt{b_0}}{\rho_3 k^2}+\frac{2\sqrt{\rho_1^3}\sqrt{\tilde{b}}}{\rho_3 k^2}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2},\end{aligned}$$

ou melhor,

$$\tau|R_2|\leq d_2\left[\left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|_{L^2}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_2}+\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}\|U\|_{\mathcal{H}_2}+\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}\right],\tag{5.97}$$

onde

$$d_2=\max\left\{\frac{\sqrt{\rho_1^3}\sqrt{g(0)}}{\rho_3 k^2},\,\frac{\rho_1\sqrt{b_0}}{\rho_3 k\sqrt{\tilde{b}}},\,\frac{2\rho_1\sqrt{\rho_2}}{\rho_3\sqrt{k^3}}+\frac{2\rho_1\sqrt{\rho_2}l}{\rho_3 k\sqrt{\tilde{b}}}+\frac{2\sqrt{\rho_1^3}\sqrt{b_0}}{\rho_3 k^2}+\frac{2\sqrt{\rho_1^3}\sqrt{\tilde{b}}}{\rho_3 k^2}\right\}.$$

Por conseguinte, substituindo (5.95)-(5.97) em (5.94), pode-se obter

$$\begin{aligned}k|\chi_1|\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 &\leq |\chi_0|\left|\left(\Psi,\Phi_x\right)_{L^2}\right|+\frac{\rho_1\tilde{b}}{\rho_3 k}\|\psi_x\|_{L^2}^2+\frac{1}{2|\lambda|^2}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2\\&+\left[\frac{\rho_1^2}{2\rho_3^2}+d_0\right]\|\Psi\|_{L^2}^2+\left[\frac{\rho_1\delta\beta}{\rho_3\sqrt{k^3}}+\frac{\rho_1\delta\beta l}{\rho_3 k\sqrt{\tilde{b}}}\right]\|q\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}\\&+d_2\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}\|U\|_{\mathcal{H}_2}+\left[d_0+d_2\right]\left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|_{L^2}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_2}\\&+\left[\frac{\rho_1 l}{\rho_3\sqrt{k}\sqrt{\tilde{b}}}+d_0+d_1+d_2\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}.\end{aligned}$$

Fazendo uso do Lema 5.11, resulta que

$$\begin{aligned}k|\chi_1|\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 &\leq |\chi_0|\left|\left(\Psi,\Phi_x\right)_{L^2}\right|+\frac{1}{|\lambda|^2}\left[\frac{1}{2}+\frac{\rho_1\tilde{b}}{\rho_3 k}\right]\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2+\frac{\rho_1\tilde{b}c_4}{\rho_3 k}\|\theta\|_{L^2}^2\\&+\left[\frac{\rho_1^2}{2\rho_3^2}+d_0+\frac{\rho_1\tilde{b}c_4}{\rho_3 k}\right]\|\Psi\|_{L^2}^2+\left[\frac{\rho_1\delta\beta}{\rho_3\sqrt{k^3}}+\frac{\rho_1\delta\beta l}{\rho_3 k\sqrt{\tilde{b}}}\right]\|q\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}\\&+d_2\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}\|U\|_{\mathcal{H}_2}+\left[d_0+d_2\right]\left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|_{L^2}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_2}\\&+\left[\frac{\rho_1 l}{\rho_3\sqrt{k}\sqrt{\tilde{b}}}+d_0+d_1+d_2+\frac{\rho_1\tilde{b}c_4}{\rho_3 k}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}.\end{aligned}$$

Por outro lado, usando o Lema 5.9, vem que

$$\begin{aligned} k|\chi_1|\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 &\leq |\chi_0|\left|\left(\Psi,\Phi_x\right)_{L^2}\right| + \frac{1}{|\lambda|^2}\left[\frac{1}{2}+\frac{\rho_1\tilde{b}}{\rho_3 k}\right]\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 + \frac{\rho_1\tilde{b}c_2c_4}{\rho_3 k}\|q\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} \\ &+ \left[\frac{\rho_1^2}{2\rho_3^2}+d_0+\frac{\rho_1\tilde{b}c_4}{\rho_3 k}\right]\|\Psi\|_{L^2}^2 + \left[\frac{\rho_1\delta\beta}{\rho_3\sqrt{k^3}}+\frac{\rho_1\delta\beta l}{\rho_3 k\sqrt{\tilde{b}}}\right]\|q\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \\ &+ d_2\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}\|U\|_{\mathcal{H}_2} + \left[d_0+d_2\right]\left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|_{L^2}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \\ &+ \left[\frac{\rho_1 l}{\rho_3\sqrt{k}\sqrt{\tilde{b}}}+d_0+d_1+d_2+\frac{\rho_1\tilde{b}c_4}{\rho_3 k}+\frac{\rho_1\tilde{b}c_2c_4}{\rho_3 k}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}. \end{aligned}$$

e aplicando a Desigualdade de Young com $\varepsilon = 1/2$ seguido do Lema 5.7, segue que

$$\begin{aligned} k|\chi_1|\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 \leq |\chi_0|\left|\left(\Psi,\Phi_x\right)_{L^2}\right| &+ \left[\frac{\rho_1^2}{2\rho_3^2}+d_0+\frac{\rho_1\tilde{b}c_4}{\rho_3 k}+\frac{\rho_1\tilde{b}c_2c_4}{2\rho_3 k}\right]\|\Psi\|_{L^2}^2 \\ +\frac{1}{|\lambda|^2}\left[\frac{1}{2}+\frac{\rho_1\tilde{b}}{\rho_3 k}\right]\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 &+ \left[\frac{\rho_1\delta\beta}{\rho_3\sqrt{k^3}}+\frac{\rho_1\delta\beta l}{\rho_3 k\sqrt{\tilde{b}}}\right]\|q\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \\ +d_2\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}\|U\|_{\mathcal{H}_2} &+ \left[d_0+d_2\right]\left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|_{L^2}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \\ +\left[\frac{\rho_1 l}{\rho_3\sqrt{k}\sqrt{\tilde{b}}}+d_0+d_1+d_2+\frac{\rho_1\tilde{b}c_4}{\rho_3 k}\right. &\left.+\frac{\rho_1\tilde{b}c_2c_4}{\rho_3 k}+\frac{\rho_1\tilde{b}c_1c_2c_4}{2\rho_3 k}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}, \end{aligned}$$

ou, adotando a notação

$$c_6 = \max\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\rho_1^2}{2\rho_3^2}+d_0+\dfrac{\rho_1\tilde{b}c_4}{\rho_3 k}+\dfrac{\rho_1\tilde{b}c_2c_4}{2\rho_3 k},\ \dfrac{\rho_1\delta\beta}{\rho_3\sqrt{k^3}}+\dfrac{\rho_1\delta\beta l}{\rho_3 k\sqrt{\tilde{b}}}, \\ \dfrac{\rho_1 l}{\rho_3\sqrt{k}\sqrt{\tilde{b}}}+d_0+d_1+d_2+\dfrac{\rho_1\tilde{b}c_4}{\rho_3 k}+\dfrac{\rho_1\tilde{b}c_2c_4}{\rho_3 k}+\dfrac{\rho_1\tilde{b}c_1c_2c_4}{2\rho_3 k} \end{array}\right\},$$

pode-se escrever

$$\begin{aligned} k|\chi_1|\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 &\leq |\chi_0|\left|\left(\Psi,\Phi_x\right)_{L^2}\right| + c_6\left[\|\Psi\|_{L^2}^2+\|q\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}+\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}\|U\|_{\mathcal{H}_2}\right. \\ &\left.+\left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|_{L^2}^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_2}+\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}\right] \\ &+\frac{1}{|\lambda|^2}\left[\frac{1}{2}+\frac{\rho_1\tilde{b}}{\rho_3 k}\right]\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Contudo, lembre que

$$|\lambda|^2 \geq c_0^2 = \frac{2}{k|\chi_1|}\left[\frac{1}{2} + \frac{\rho_1 \tilde{b}}{\rho_3 k}\right], \quad \text{o que implica em} \quad \left[\frac{1}{2} + \frac{\rho_1 \tilde{b}}{\rho_3 k}\right] \leq \frac{|\lambda|^2 k|\chi_1|}{2}$$

consequentemente, segue que

$$\begin{aligned} \frac{k|\chi_1|}{2}\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 \ \leq \ & |\chi_0|\left|\big(\Psi, \Phi_x\big)_{L^2}\right| + c_6\Bigg[\|\Psi\|_{L^2}^2 + \|q\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} + \|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \\ & + \left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|_{L^2}^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_2} + \|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}\Bigg], \end{aligned}$$

finalizando a prova do segundo item do Lema 5.13.

Neste instante, o item ***(ii)*** será demonstrado. Com efeito, lembre que a identidade (5.78) fornece

$$k\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 = \left[\rho_2 - \frac{\rho_1 b}{k}\right]\big(\Psi, \Phi_x\big)_{L^2} - \frac{i\lambda\rho_1\delta}{k}\big(\theta, \Phi\big)_{L^2} + R_0, \tag{5.98}$$

onde R_0 é descrito em (5.79). Com isto, tomando o módulo de (5.98) e aplicando as desigualdades Triangular e de Cauchy-Schwarz, vem que

$$\begin{aligned} k\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 \ \leq \ & \left[\rho_2 + \frac{\rho_1 b}{k}\right]\left|\big(\Psi, \Phi_x\big)_{L^2}\right| + \frac{\rho_1\delta|\lambda|}{k}\|\theta\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2} + |R_0| \\ \leq \ & \left[\rho_2 + \frac{\rho_1 b}{k}\right]\left|\big(\Psi, \Phi_x\big)_{L^2}\right| + \frac{\sqrt{\rho_1}\delta|\lambda|}{k}\|\theta\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} + |R_0|. \end{aligned}$$

Todavia, de (5.95) tem-se que

$$|R_0| \ \leq \ \frac{d_0}{\tau}\left[\|\Psi\|_{L^2}^2 + \left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|_{L^2}^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_2} + \|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}\right],$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} k\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 \ \leq \ & \tilde{c}_6\Bigg[\left|\big(\Psi, \Phi_x\big)_{L^2}\right| + \|\Psi\|_{L^2}^2 + |\lambda|\|\theta\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \\ & + \left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|_{L^2}^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_2} + \|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}\Bigg], \end{aligned}$$

onde

$$\tilde{c}_6 = \max\left\{\frac{d_0}{\tau},\ \rho_2 + \frac{\rho_1 b}{k},\ \frac{\sqrt{\rho_1}\delta}{k}\right\},$$

como desejado. ■

Deste modo, tem-se o principal resultado desta seção:

Teorema 5.14. *Se g satisfaz* (5.39) *e* $\chi_0 = 0$*, então o* C_0*-semigrupo de contrações* $S(t) = e^{A_2 t}$ *associado ao sistema Timoshenko com história e Lei de Cattaneo é exponencialmente estável.*

Demonstração. Pelo Lema 5.10 obtém-se que

$$\begin{aligned}\|U\|^2_{\mathcal{H}_2} &= \rho_1\|\Phi\|^2_{L^2} + \rho_2\|\Psi\|^2_{L^2} + \tilde{b}\|\psi_x\|^2_{L^2} + k\|\varphi_x + \psi\|^2_{L^2} + \rho_3\|\theta\|^2_{L^2} + \tau\|q\|^2_{L^2} + \|\eta\|^2_{L^2_g} \\ &\leq \big(c_3 + k\big)\|\varphi_x + \psi\|^2_{L^2} + \big(c_3 + \tilde{b}\big)\|\psi_x\|^2_{L^2} + \rho_2\|\Psi\|^2_{L^2} + \rho_3\|\theta\|^2_{L^2} + \tau\|q\|^2_{L^2} + \|\eta\|^2_{L^2_g} \\ &\quad + c_3\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}.\end{aligned}$$

Agora, usando os lemas 5.7 e 5.11 e fato de que $|\lambda| \geq 1$, obtém-se

$$\begin{aligned}\|U\|^2_{\mathcal{H}_2} &\leq \Big[2c_3 + k + \tilde{b}\Big]\|\varphi_x + \psi\|^2_{L^2} + \Big[c_4\big(c_3 + \tilde{b}\big) + \rho_2\Big]\|\Psi\|^2_{L^2} + \Big[c_4\big(c_3 + \tilde{b}\big) + \rho_3\Big]\|\theta\|^2_{L^2} \\ &\quad + \Big[c_4\big(c_3 + \tilde{b}\big) + c_3 + c_1\big(\tau + 1\big)\Big]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2},\end{aligned}$$

ou melhor,

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}_2} \leq c_7\Big[\|\varphi_x + \psi\|^2_{L^2} + \|\Psi\|^2_{L^2} + \|\theta\|^2_{L^2} + \|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}\Big], \tag{5.99}$$

onde

$$c_7 = \max\Big\{2c_3 + k + \tilde{b},\, c_4\big(c_3 + \tilde{b}\big) + \rho_2,\, c_4\big(c_3 + \tilde{b}\big) + \rho_3,\, c_4\big(c_3 + \tilde{b}\big) + c_3 + c_1\big(\tau + 1\big)\Big\}.$$

Note que $\chi_0 = 0$ implica em $\chi_1 \neq 0$, por conseguinte, do primeiro item do Lema 5.13 vem que

$$\begin{aligned}\|\varphi_x + \psi\|^2_{L^2} &\leq \frac{2c_6}{k|\chi_1|}\Big[\|\Psi\|^2_{L^2} + \|q\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} + \|\eta\|_{L^2_g(H^1_0)}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \\ &\quad + \left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|^2_{L^2}\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_2} + \|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}\Big],\end{aligned}$$

substituindo em (5.99), resulta que

$$\begin{aligned}\|U\|^2_{\mathcal{H}_2} &\leq \left[\frac{2c_6c_7}{k|\chi_1|} + c_7\right]\|\Psi\|^2_{L^2} + \frac{2c_6c_7}{k|\chi_1|}\|q\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} + \frac{2c_6c_7}{k|\chi_1|}\|\eta\|_{L^2_g(H^1_0)}\|U\|_{\mathcal{H}_2} + c_7\|\theta\|^2_{L^2} \\ &\quad + \frac{2c_6c_7}{k|\chi_1|}\left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|^2_{L^2}\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}_2} + \left[\frac{2c_6c_7}{k|\chi_1|} + c_7\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}.\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Young com $\varepsilon = 1/6$, deduz-se que

$$
\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 \ \leq \ & \left[\frac{2c_6c_7}{k|\chi_1|} + c_7\right] \|\Psi\|_{L^2}^2 + \frac{1}{6}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \frac{6c_6^2c_7^2}{k^2|\chi_1|^2}\|q\|_{L^2}^2 + \frac{1}{6}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \frac{6c_6^2c_7^2}{k^2|\chi_1|^2}\|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}^2 \\
& + c_7\|\theta\|_{L^2}^2 + \frac{1}{6}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \frac{6c_6^2c_7^2}{k^2|\chi_1|^2}\left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|_{L^2}^2\, ds\right) \\
& + \left[\frac{2c_6c_7}{k|\chi_1|} + c_7\right] \|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2},
\end{aligned}
$$

o que implica em

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 \ \leq \ & \left[\frac{2c_6c_7}{k|\chi_1|} + c_7\right] \|\Psi\|_{L^2}^2 + \frac{6c_6^2c_7^2}{k^2|\chi_1|^2}\left[\|q\|_{L^2}^2 + \|\eta\|_{L_g^2(H_0^1)}^2\right] + c_7\|\theta\|_{L^2}^2 \\
& + \frac{6c_6^2c_7^2}{k^2|\chi_1|^2}\left(\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|_{L^2}^2\, ds\right) + \left[\frac{2c_6c_7}{k|\chi_1|} + c_7\right] \|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}.
\end{aligned}
$$

Mais ainda, usando novamente o Lema 5.7 seguido do Lema 5.8, segue que

$$
\frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 \leq \left[\frac{2c_6c_7}{k|\chi_1|} + c_7\right] \|\Psi\|_{L^2}^2 + c_7\|\theta\|_{L^2}^2 + \left[\frac{2c_6c_7}{k|\chi_1|} + c_7 + \frac{6c_6^2c_7^2c_1}{k^2|\chi_1|^2} + \frac{12c_6^2c_7^2}{k^2|\chi_1|^2}\right] \|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}. \tag{5.100}
$$

Lembre que o Lema 5.9 fornece

$$
\|\theta\|_{L^2}^2 \leq c_2\|q\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + c_2\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2},
$$

assim, combinando a Desigualdade de Young com $\varepsilon = 1/2$ e o Lema 5.7, vem que

$$
\|\theta\|_{L^2}^2 \leq \frac{c_2}{2}\|\Psi\|_{L^2}^2 + \left[\frac{c_1c_2}{2} + c_2\right] \|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}. \tag{5.101}
$$

Substituindo (5.101) em (5.100), obtém-se

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 \ \leq \ & \left[\frac{2c_6c_7}{k|\chi_1|} + c_7 + \frac{c_2c_7}{2}\right] \|\Psi\|_{L^2}^2 \\
& + \left[\frac{2c_6c_7}{k|\chi_1|} + c_7 + \frac{6c_6^2c_7^2c_1}{k^2|\chi_1|^2} + \frac{12c_6^2c_7^2}{k^2|\chi_1|^2} + \frac{c_1c_2c_7}{2} + c_2c_7\right] \|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2},
\end{aligned}
$$

ou melhor, denotando

$$
c_8 = \max\left\{\frac{2c_6c_7}{k|\chi_1|} + c_7 + \frac{c_2c_7}{2}, \frac{2c_6c_7}{k|\chi_1|} + c_7 + \frac{6c_6^2c_7^2c_1}{k^2|\chi_1|^2} + \frac{12c_6^2c_7^2}{k^2|\chi_1|^2} + \frac{c_1c_2c_7}{2} + c_2c_7\right\},
$$

pode-se escrever

$$
\frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 \leq c_8\|\Psi\|_{L^2}^2 + c_8\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}.
$$

Aplicando o Lema 5.12 para $\varepsilon \leq 3/kc_4$ a determinar, segue que

$$\frac{1}{2}\|U\|^2_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{c_8\varepsilon}{|\lambda|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}_2} + \big[c_8 + c_5c_8\big]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}.$$

Mais ainda, usando que $|\lambda| \geq 1$ e escolhendo $\varepsilon = \min\left\{\dfrac{3}{kc_4}, \dfrac{1}{4c_8}\right\}$, vem que

$$\frac{1}{4}\|U\|^2_{\mathcal{H}_2} \leq \big[c_8 + c_5c_8\big]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}.$$

Aplicando a Desigualdade de Young com $\varepsilon = 1/8$, obtém-se

$$\frac{1}{4}\|U\|^2_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{1}{8}\|U\|^2_{\mathcal{H}_2} + 2\big[c_8 + c_5c_8\big]^2\|F\|^2_{\mathcal{H}_2},$$

isto é,

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}_2} \leq 16\big[c_8 + c_5c_8\big]^2\|F\|^2_{\mathcal{H}_2}.$$

Portanto, foi provado que se $|\lambda| \geq \max\{1, c_0\}$, então existe uma constante c positiva tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_2} \leq c\|F\|_{\mathcal{H}_2}, \quad \forall\, F \in \mathcal{H}_2,$$

com $U \in D(A_2)$ a solução da equação resolvente $(i\lambda I - A_2)U = F$. Mais precisamente, tem-se

$$\|(i\lambda I - A_2)^{-1}F\|_{\mathcal{H}_2} = \|U\|_{\mathcal{H}_2} \leq c\|F\|_{\mathcal{H}_2}, \quad \forall\, F \in \mathcal{H}_2,$$

ou seja, se $|\lambda| \geq \max\{1, c_0\}$, então

$$\big\|(i\lambda I - A_2)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} \leq c,$$

o que implica em

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} \big\|(i\lambda I - A_2)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} < \infty.$$

Desta forma, pelo Teorema de Prüss (veja Teorema 2.72) tem-se que o C_0-semigrupo de contrações $S(t) = e^{A_2 t}$ é exponencialmente estável, ou melhor, existem constantes $\alpha > 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} = \|e^{A_2 t}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} \leq Me^{-\alpha t}, \quad t \geq 0, \tag{5.102}$$

como desejado. ■

Nesta parte da seção será provado que $\chi_0 = 0$ é uma condição necessária para o semigrupo associado ao problema (5.1)-(5.3) decair exponencialmente. Mais especificamente, tem-se o resultado:

Teorema 5.15. *Seja g uma função que satisfaz* (5.39). *Se o C_0-semigrupo de contrações $S(t) = e^{A_2 t}$ associado ao sistema Timoshenko com história e Lei de Cattaneo é exponencialmente estável, então $\chi_0 = 0$.*

Demonstração. A demonstração será realizada por contraposição, isto é, se

$$\chi_0 = \left(\tau - \frac{\rho_1}{\rho_3 k}\right)\left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{k}\right) - \frac{\tau\rho_1\delta^2}{\rho_3 k} \neq 0.$$

então o semigrupo $S(t) = e^{A_2 t}$ não é exponencialmente estável. Para tanto, basta mostrar que existe uma sequência de números reais $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{|n|\to\infty} |\lambda_n| = \infty,$$

e uma sequência não nula e limitada $F_n = (f_n^1, f_n^2, f_n^3, f_n^4, f_n^5, f_n^6, f_n^7) \in \mathcal{H}_2$, com

$$\lim_{n\to\infty} \left\|(i\lambda_n I - A_2)^{-1} F_n\right\|_{\mathcal{H}_2} = \infty.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, considere

$$F_n = \Bigg(0, \underbrace{\rho_1^{-1}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}_{=:f_n^2}, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0\Bigg),$$

e veja que $F_n \in \mathcal{H}_2$, pois f_n^2 é contínua em $(0, l)$ e além disso,

$$\int_0^l f_n^2(x)\,dx = \int_0^l \frac{1}{\rho_1}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\,dx = \frac{l}{\rho_1 n\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\Bigg|_0^l = 0,$$

ou seja, $f_n^2 \in L^2_*(0, l)$. Mais ainda, usando a identidade trigonométrica $2\cos^2(u) = 1 + \cos(2u)$, vem que

$$\|F_n\|^2_{\mathcal{H}_2} = \rho_1\|f_n^2\|^2_{L^2} = \rho_1\int_0^l |f_n^2(x)|^2\,dx = \frac{1}{\rho_1}\int_0^l \cos^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \frac{l}{2\rho_1}, \tag{5.103}$$

isto é, F_n é uma sequência limitada em $\mathcal{H}_2$. Além disto, observe que $i\mathbb{R} \subset \varrho(A_2)$ independentemente de considerações a respeito de χ_0, por isso, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma única solução $U_n = (\varphi_n, \Phi_n, \psi_n, \Psi_n, \theta_n, q_n, \eta_n) \in D(A_2)$ da equação resolvente

$$(i\lambda_n I - A_2)U_n = F_n. \tag{5.104}$$

Reescrevendo (5.104) em termos de suas componentes, obtém-se

$$i\lambda_n\varphi_n - \Phi_n = 0, \tag{5.105}$$

$$i\lambda_n \rho_1 \Phi_n - k(\varphi_{n,x} + \psi_n)_x = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{5.106}$$

$$i\lambda_n \psi_n - \Psi_n = 0, \tag{5.107}$$

$$i\lambda_n \rho_2 \Psi_n - \tilde{b}\psi_{n,xx} - \int_0^\infty g(s)\eta_{n,xx}(s)\, ds + k(\varphi_{n,x} + \psi_n) + \delta\theta_{n,x} = 0, \tag{5.108}$$

$$i\lambda_n \rho_3 \theta_n + q_{n,x} + \delta\Psi_{n,x} = 0, \tag{5.109}$$

$$i\lambda_n \tau q_n + \beta q_n + \theta_{n,x} = 0, \tag{5.110}$$

$$i\lambda_n \eta_n + \eta_{n,s} - \Psi_n = 0. \tag{5.111}$$

Note que empregando os mesmos argumentos descritos em (4.168), pode-se obter da equação (5.111) que

$$\eta_n(s) = \frac{\Psi_n}{i\lambda_n}\big(1 - e^{-i\lambda_n s}\big),$$

ou ainda, da identidade (5.107), pode-se escrever

$$\eta_n(s) = \psi_n\big(1 - e^{-i\lambda_n s}\big), \quad s \geq 0. \tag{5.112}$$

Além disso, usando (5.110), vem que

$$q_n = -\frac{1}{(i\lambda_n \tau + \beta)}\theta_{n,x}. \tag{5.113}$$

Desta forma, fazendo uso das identidades (5.105), (5.107), (5.112) e (5.113) nas igualdades (5.106), (5.108) e (5.109) tem-se que a solução U_n da equação resolvente (5.104) satisfaz

$$-\lambda_n^2 \rho_1 \varphi_n - k\varphi_{n,xx} - k\psi_{n,x} = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{5.114}$$

$$-\lambda_n^2 \rho_2 \psi_n - b\psi_{n,xx} + \int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\, ds\, \psi_{n,xx} + k\varphi_{n,x} + k\psi_n + \delta\theta_{n,x} = 0, \tag{5.115}$$

$$i\lambda_n \rho_3 \theta_n - \frac{1}{(i\lambda_n \tau + \beta)}\theta_{n,xx} + i\lambda_n \delta\psi_{n,x} = 0. \tag{5.116}$$

Com base nas condições de fronteira e do domínio do operador A_2, pressupõe-se que

$$\varphi_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

$$\psi_n(x) = B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

$$\theta_n(x) = C_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

com A_n, B_n e C_n a serem determinados. Por conseguinte, encontrar o vetor solução $(\varphi_n, \psi_n, \theta_n)$ do sistema (5.114)-(5.116) se resume determinar os parâmetros A_n, B_n e C_n mediante o sistema numérico

$$-\lambda_n^2\rho_1 A_n + k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 A_n - k\left(\frac{n\pi}{l}\right)B_n = 1,$$

$$-\lambda_n^2\rho_2 B_n + b\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 B_n - \int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 B_n - k\left(\frac{n\pi}{l}\right)A_n + kB_n - \delta\left(\frac{n\pi}{l}\right)C_n = 0,$$

$$i\lambda_n\rho_3 C_n + \frac{1}{i\lambda_n\tau+\beta}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 C_n + i\lambda_n\delta\left(\frac{n\pi}{l}\right)B_n = 0,$$

ou equivalentemente,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \Upsilon_1 & -k\left(\frac{n\pi}{l}\right) & 0 \\ -k\left(\frac{n\pi}{l}\right) & \Upsilon_2 & -\delta\left(\frac{n\pi}{l}\right) \\ 0 & i\lambda_n\delta\left(\frac{n\pi}{l}\right) & \Upsilon_3 \end{pmatrix}}_{=:M_n}\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.117}$$

onde os Υ_i's são dados por

$$\Upsilon_1 = -\lambda_n^2\rho_1 + k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \tag{5.118}$$

$$\Upsilon_2 = -\lambda_n^2\rho_2 + b\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 - \int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + k, \tag{5.119}$$

e

$$\Upsilon_3 = \frac{i\lambda_n\rho_3(i\lambda_n\tau+\beta) + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}{i\lambda_n\tau+\beta}. \tag{5.120}$$

Observe que

$$\Upsilon_3 = \frac{\left[i\lambda_n\rho_3(i\lambda_n\tau+\beta) + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right](\beta - i\lambda_n\tau)}{(i\lambda_n\tau+\beta)(\beta-i\lambda_n\tau)} = \frac{\beta\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + i\left[\lambda_n\rho_3(\lambda_n^2\tau^2+\beta^2) - \lambda_n\tau\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right]}{\lambda_n^2\tau^2+\beta^2},$$

isto é, da positividade da constante β, segue que

$$\mathrm{Re}(\Upsilon_3) = \frac{\beta\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}{\lambda_n^2\tau^2+\beta^2} \neq 0, \tag{5.121}$$

ou seja, $\Upsilon_3 \neq 0$. Seja d um número real que será fixado posteriormente e considere $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de tal forma que $\Upsilon_1 = d$, mais precisamente

$$\lambda_n = \begin{cases} \left[\dfrac{k}{\rho_1}\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2 - \dfrac{d}{\rho_1}\right]^{\frac{1}{2}} & \text{se} \quad n^2 \geq \dfrac{dl^2}{k\pi^2}, \\ 0 & \text{se} \quad n^2 < \dfrac{dl^2}{k\pi^2}. \end{cases} \tag{5.122}$$

Com isto, garante-se que $\lambda_n \in \mathbb{R}$ para todo n natural e ainda $|\lambda_n| \longrightarrow \infty$. Observe que o sistema

(5.117) terá única solução apenas para os naturais n tais que $\det M_n \neq 0$. Nestas ocasiões, ao usar a Regra de Cramer, a seguinte expressão pode ser obtida para A_n,

$$A_n = \frac{\Upsilon_2\Upsilon_3 + i\lambda_n\delta^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}{\det M_n} = \frac{\Upsilon_2\Upsilon_3 + i\lambda_n\delta^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}{\Upsilon_1\Upsilon_2\Upsilon_3 + i\lambda_n\delta^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\Upsilon_1 - k^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\Upsilon_3}, \tag{5.123}$$

ou ainda, denotando

$$K_n = \frac{\Upsilon_2\Upsilon_3 + i\lambda_n\delta^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}{\Upsilon_3} = \Upsilon_2 + \frac{i\lambda_n\delta^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}{\Upsilon_3}, \tag{5.124}$$

pode-se escrever

$$\det M_n = \Upsilon_1\left[\Upsilon_2\Upsilon_3 + i\lambda_n\delta^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right] - k^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\Upsilon_3 = \left[\Upsilon_1 K_n - k^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right]\Upsilon_3. \tag{5.125}$$

Consequentemente, (5.123) pode ser reescrito como

$$A_n = \frac{\Upsilon_3 K_n}{\Upsilon_1\Upsilon_3 K_n - k^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\Upsilon_3} = \frac{K_n}{\Upsilon_1 K_n - k^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}. \tag{5.126}$$

Neste instante, faz-se necessário dividir a prova em dois casos, a saber:
<u>1º caso:</u> $\chi_1 = \tau - \dfrac{\rho_1}{\rho_3 k} = 0$. Aqui, considere $d = \Upsilon_1 = 0$ em (5.122), assim,

$$\lambda_n^2 = \frac{k}{\rho_1}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,$$

e consequentemente

$$\det M_n = -k^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\Upsilon_3 = -k\rho_1\lambda_n^2\Upsilon_3.$$

Usando (5.121), segue que

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(\det M_n) = -\frac{\rho_1^2\beta\lambda_n^4}{\lambda_n^2\tau^2 + \beta^2} = -\infty.$$

Desta forma, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que se $n > n_0$, então $\det M_n \neq 0$. Por conseguinte, para $n > n_0$ tem-se que

$$K_n = \Upsilon_2 + \frac{\delta^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2(i\lambda_n\beta - \lambda_n^2\tau)}{i\lambda_n\rho_3\beta - \frac{k\rho_3\tau}{\rho_1}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2} = \Upsilon_2 + \frac{\delta^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2(i\lambda_n\beta - \lambda_n^2\tau)}{i\lambda_n\rho_3\beta + \left(1 - \frac{k\rho_3\tau}{\rho_1}\right)\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}.$$

Contudo, note que $\chi_1 = 0$ implica em $k\rho_3\tau/\rho_1 = 1$, logo

$$K_n = \Upsilon_2 + \frac{\delta^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2(i\lambda_n\beta - \lambda_n^2\tau)}{i\lambda_n\rho_3\beta} = \Upsilon_2 + \frac{\delta^2}{\rho_3}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{i\lambda_n\tau\delta^2}{\rho_3\beta}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2.$$

Substituindo Υ_2 dado em (5.119), vem que

$$
\begin{aligned}
K_n &= -\lambda_n^2\rho_2 + b\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 - \int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + k + \frac{\delta^2}{\rho_3}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{i\lambda_n\tau\delta^2}{\rho_3\beta}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \\
&= \left[-\frac{k\rho_2}{\rho_1} + b - \int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds + k\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 + \frac{\delta^2}{\rho_3} + \frac{i\lambda_n\tau\delta^2}{\rho_3\beta}\right]\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Voltando em (5.126) e lembrando que $d = 0 = \Upsilon_1$, segue que

$$
\begin{aligned}
A_n &= -\frac{K_n}{k^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2} = -\frac{1}{k^2}\left[-\frac{k\rho_2}{\rho_1} + b - \int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds + k\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 + \frac{\delta^2}{\rho_3} + \frac{i\lambda_n\tau\delta^2}{\rho_3\beta}\right] \\
&= \frac{\rho_2}{\rho_1 k} - \frac{b}{k^2} + \frac{1}{k^2}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds - \frac{1}{k}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 - \frac{\delta^2}{\rho_3 k^2} - \frac{i\lambda_n\tau\delta^2}{\rho_3\beta k^2}.
\end{aligned}
$$

Consequentemente, da Desigualdade Triangular Inversa

$$
\begin{aligned}
|A_n| &= \left|\frac{\rho_2}{\rho_1 k} - \frac{b}{k^2} + \frac{1}{k^2}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds - \frac{1}{k}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 - \frac{\delta^2}{\rho_3 k^2} - \frac{i\lambda_n\tau\delta^2}{\rho_3\beta k^2}\right| \\
&\geq \frac{|\lambda_n|\tau\delta^2}{\rho_3\beta k^2} - \underbrace{\left|\frac{\rho_2}{\rho_1 k} - \frac{b}{k^2} + \frac{1}{k^2}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds - \frac{1}{k}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 - \frac{\delta^2}{\rho_3 k^2}\right|}_{=:D_n}.
\end{aligned}
$$

Em contra partida, veja que

$$
\begin{aligned}
|D_n| &= \left|\frac{\rho_2}{\rho_1 k} - \frac{b}{k^2} + \frac{1}{k^2}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds - \frac{1}{k}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 - \frac{\delta^2}{\rho_3 k^2}\right| \\
&\leq \frac{\rho_2}{\rho_1 k} + \frac{b}{k^2} + \frac{1}{k^2}\left|\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds\right| + \frac{1}{k}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 + \frac{\delta^2}{\rho_3 k^2},
\end{aligned}
$$

usando propriedades de integrais e o fato que $|e^{ix}| = 1$, tem-se que existe uma constante c_9 positiva tal que $|D_n| \leq c_9$, mais especificamente,

$$
c_9 = \frac{\rho_2}{\rho_1 k} + \frac{b}{k^2} + \frac{b_0}{k^2} + \frac{l^2}{k\pi^2} + \frac{\delta^2}{\rho_3 k^2}.
$$

Portanto,

$$
|A_n| \geq \frac{|\lambda_n|\tau\delta^2}{\rho_3\beta k^2} - |D_n| \geq \frac{|\lambda_n|\tau\delta^2}{\rho_3\beta k^2} - c_9 = |\lambda_n|\left(\frac{\tau\delta^2}{\rho_3\beta k^2} - \frac{c_9}{|\lambda_n|}\right). \tag{5.127}
$$

Dado que $c_9/|\lambda_n| \longrightarrow 0$, tem-se que para todo ϵ positivo, existe n_1 natural tal que $n > \max\{n_0,\, n_1\}$ implica em $c_9/|\lambda_n| < \epsilon$. Em particular, escolhendo $\epsilon = \tau\delta^2/2\rho_3\beta k^2$ vem que para todo

$n > \max\{n_0,\, n_1\}$, vale a desigualdade

$$\frac{c_9}{|\lambda_n|} < \frac{\tau\delta^2}{2\rho_3\beta k^2}.$$

Com isto em mente, segue de (5.127) que

$$|A_n| > |\lambda_n|\left(\frac{\tau\delta^2}{\rho_3\beta k^2} - \frac{\tau\delta^2}{2\rho_3\beta k^2}\right) = \frac{\tau\delta^2}{2\rho_3\beta k^2}|\lambda_n|, \tag{5.128}$$

sempre que $n > \max\{n_0,\, n_1\}$.
2º caso: $\chi_1 = \tau - \dfrac{\rho_1}{\rho_3 k} \neq 0$. Aqui, defina

$$\chi_2 = -\frac{\rho_3 k\chi_1}{\rho_1} = 1 - \frac{\rho_3 k\tau}{\rho_1}.$$

Usando a definição de Υ_3 descrita em (5.120), na expressão obtida para K_n dada em (5.124), vem que

$$K_n = \Upsilon_2 + \frac{i\lambda_n\delta^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2(i\lambda_n\tau+\beta)}{i\lambda_n\rho_3(i\lambda_n\tau+\beta)+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2} = \Upsilon_2 + \frac{\delta^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2(i\lambda_n\beta-\lambda_n^2\tau)}{i\lambda_n\rho_3\beta-\lambda_n^2\rho_3\tau+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}. \tag{5.129}$$

Por outro lado, observe que usando

$$\lambda_n^2 = \frac{k}{\rho_1}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 - \frac{d}{\rho_1}$$

pode-se obter da igualdade (5.129) que

$$\begin{aligned}
K_n &= \Upsilon_2 + \delta^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \frac{i\lambda_n\beta - \frac{\tau k}{\rho_1}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{\tau d}{\rho_1}}{i\lambda_n\rho_3\beta - \frac{\rho_3\tau k}{\rho_1}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{\rho_3\tau d}{\rho_1} + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2} \\
&= \Upsilon_2 + \delta^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \frac{i\lambda_n\beta - \frac{\tau k}{\rho_1}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{\tau d}{\rho_1}}{i\lambda_n\rho_3\beta + \left(1-\frac{\rho_3\tau k}{\rho_1}\right)\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{\rho_3\tau d}{\rho_1}} \\
&= \Upsilon_2 + \delta^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \frac{i\lambda_n\beta - \frac{\tau k}{\rho_1}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{\tau d}{\rho_1}}{i\lambda_n\rho_3\beta + \chi_2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{\rho_3\tau d}{\rho_1}}.
\end{aligned}$$

Visto que $\chi_2 \neq 0$, a identidade anterior pode ser escrita como

$$\begin{aligned} K_n &= \Upsilon_2 + \delta^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \frac{\rho_1\chi_2\left[i\lambda_n\beta - \frac{\tau k}{\rho_1}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{\tau d}{\rho_1}\right]}{\rho_1\chi_2\left[i\lambda_n\rho_3\beta + \chi_2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{\rho_3\tau d}{\rho_1}\right]} \\ &= \Upsilon_2 + \delta^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \frac{i\lambda_n\rho_1\beta\chi_2 - \tau k\chi_2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \tau d\chi_2}{\rho_1\chi_2\left[i\lambda_n\rho_3\beta + \chi_2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{\rho_3\tau d}{\rho_1}\right]}. \end{aligned}$$

Usando a definição de χ_2, segue que

$$\begin{aligned} K_n &= \Upsilon_2 + \delta^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \frac{i\lambda_n\rho_1\beta(1-\frac{\rho_3 k\tau}{\rho_1}) - \tau k\chi_2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \tau d(1-\frac{\rho_3 k\tau}{\rho_1})}{\rho_1\chi_2\left[i\lambda_n\rho_3\beta + \chi_2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{\rho_3\tau d}{\rho_1}\right]} \\ &= \Upsilon_2 + \delta^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \frac{i\lambda_n\rho_1\beta - i\lambda_n\rho_3 k\tau\beta - \tau k\chi_2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \tau d - \frac{\rho_3 k\tau^2 d}{\rho_1}}{\rho_1\chi_2\left[i\lambda_n\rho_3\beta + \chi_2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{\rho_3\tau d}{\rho_1}\right]} \\ &= \Upsilon_2 + \delta^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \frac{i\lambda_n\rho_1\beta + \tau d - \tau k\left[i\lambda_n\rho_3\beta + \chi_2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{\rho_3\tau d}{\rho_1}\right]}{\rho_1\chi_2\left[i\lambda_n\rho_3\beta + \chi_2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{\rho_3\tau d}{\rho_1}\right]} \\ &= \Upsilon_2 + \delta^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \frac{i\lambda_n\rho_1\beta + \tau d}{\rho_1\chi_2\left[i\lambda_n\rho_3\beta + \chi_2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{\rho_3\tau d}{\rho_1}\right]} - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\frac{\tau k\delta^2}{\rho_1\chi_2}. \end{aligned}$$

Da definição de Υ_2, vem que

$$\begin{aligned} K_n &= -\lambda_n^2\rho_2 + b\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 - \int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + k - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\frac{\tau k\delta^2}{\rho_1\chi_2} \\ &\quad +\delta^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \frac{i\lambda_n\rho_1\beta + \tau d}{\rho_1\chi_2\left[i\lambda_n\rho_3\beta + \chi_2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{\rho_3\tau d}{\rho_1}\right]} \\ &= -\frac{k\rho_2}{\rho_1}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{d\rho_2}{\rho_1} + b\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 - \int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + k \\ &\quad -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\frac{\tau k\delta^2}{\rho_1\chi_2} + \delta^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \frac{i\lambda_n\rho_1\beta + \tau d}{\rho_1\chi_2\left[i\lambda_n\rho_3\beta + \chi_2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{\rho_3\tau d}{\rho_1}\right]} \\ &= \left[b - \frac{k\rho_2}{\rho_1} - \int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds - \frac{\tau k\delta^2}{\rho_1\chi_2} + \delta^2 F_n + \left(\frac{d\rho_2}{\rho_1} + k\right)\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\right]\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \end{aligned}$$

onde

$$F_n = \frac{i\lambda_n\rho_1\beta + \tau d}{\rho_1\chi_2\left[i\lambda_n\rho_3\beta + \chi_2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{\rho_3\tau d}{\rho_1}\right]}.$$

Além disto, note que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\lambda_n F_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{i\lambda_n^2\rho_1\beta+\lambda_n\tau d}{\rho_1\chi_2\left[i\lambda_n\rho_3\beta+\chi_2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2+\frac{\rho_3\tau d}{\rho_1}\right]}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{i\lambda_n^2\rho_1\beta+\lambda_n\tau d}{\rho_1\chi_2\left[i\lambda_n\rho_3\beta+\frac{\lambda_n^2\rho_1\chi_2}{k}+\frac{d\chi_2}{k}+\frac{\rho_3\tau d}{\rho_1}\right]}\\
&= \frac{i\beta k}{\rho_1\chi_2^2}. \qquad (5.130)
\end{aligned}$$

Neste instante, considere d como de tal forma que

$$\left(b-\frac{\tau k\delta^2}{\rho_1\chi_2}-\frac{k\rho_2}{\rho_1}\right)d=k^2,$$

isto é,

$$d=\frac{k^2}{b-\frac{\tau k\delta^2}{\rho_1\chi_2}-\frac{k\rho_2}{\rho_1}}=-\frac{\rho_1 k\chi_1}{\chi_0}\neq 0.$$

Com isto, pode-se escrever K_n como

$$K_n = \left[\frac{k^2}{d}-\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds+\delta^2F_n+\left(\frac{d\rho_2}{\rho_1}+k\right)\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\right]\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2. \qquad (5.131)$$

Por outro lado, uma vez que $\Upsilon_1=d$, tem-se de (5.125) que

$$\det M_n=\left[dK_n-k^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right]\Upsilon_3.$$

Com isto, afirma-se que o subconjunto de $\mathbb{N}$, dado por

$$\mathbb{N}'=\left\{n\in\mathbb{N}\;\middle|\; dK_n-k^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\neq 0 \text{ e } n^2\geq dl^2/k\pi^2\right\},$$

possui infinitos elementos. De fato, se $\mathbb{N}'$ possuir um número finito de elementos, então para algum $n_2\in\mathbb{N}$, $n>n_2$ implicará em

$$dK_n-k^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2=0.$$

ou seja, usando a expressão obtida para K_n dada em (5.131), vem que

$$\begin{aligned} 0 &= d\left[\frac{k^2}{d} - \int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds + \delta^2 F_n + \left(\frac{d\rho_2}{\rho_1}+k\right)\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\right]\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 - k^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \\ &= -d\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds + d\delta^2 F_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + d\left(\frac{d\rho_2}{\rho_1}+k\right). \end{aligned}$$

Lembrando que

$$\lambda_n^2 = \frac{k}{\rho_1}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 - \frac{d}{\rho_1},$$

segue que para $n > n_2$, vale

$$0 = -d\left(\frac{\rho_1\lambda_n^2}{k}+\frac{d}{k}\right)\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds + d\delta^2 F_n\left(\frac{\rho_1\lambda_n^2}{k}+\frac{d}{k}\right) + d\left(\frac{d\rho_2}{\rho_1}+k\right). \tag{5.132}$$

Com maior razão, da expressão (5.132) pode-se obter que

$$0 = -\frac{d}{\lambda_n}\left(\frac{\rho_1\lambda_n^2}{k}+\frac{d}{k}\right)\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds + \frac{d\delta^2 F_n}{\lambda_n}\left(\frac{\rho_1\lambda_n^2}{k}+\frac{d}{k}\right) + \frac{d}{\lambda_n}\left(\frac{d\rho_2}{\rho_1}+k\right),$$

e consequentemente,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\Bigg[&-\frac{d\rho_1\lambda_n}{k}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds - \frac{d^2}{k\lambda_n}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds \\ &+\frac{d\delta^2 F_n}{\lambda_n}\left(\frac{\rho_1\lambda_n^2}{k}+\frac{d}{k}\right) + \frac{d}{\lambda_n}\left(\frac{d\rho_2}{\rho_1}+k\right)\Bigg] = 0. \end{aligned} \tag{5.133}$$

Ora, mas devido a (5.130), pode-se concluir que

$$\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{d^2}{\lambda_n k}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds + \frac{d\delta^2 F_n}{\lambda_n}\left(\frac{\rho_1\lambda_n^2}{k}+\frac{d}{k}\right) + \frac{d}{\lambda_n}\left(\frac{d\rho_2}{\rho_1}+k\right)\right] = \frac{i\beta d\delta^2}{\chi_2^2}. \tag{5.134}$$

Assim, usando (5.134) em (5.133), segue que

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{d\rho_1\lambda_n}{k}\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds = -\frac{i\beta d\delta^2}{\chi_2^2},$$

ou ainda,

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\,ds = \frac{ik\beta\delta^2}{\rho_1\chi_2^2}. \tag{5.135}$$

A expressão (5.135) deve ser satisfeita para qualquer função g que respeita as hipóteses (5.9), particularmente para

$$g(s) = e^{-\alpha s}, \quad s \geq 0,$$

com $\alpha > 1/b$. Deste modo, ao fixar $g(s) = e^{-\alpha s}$ e fazer as mesmas contas apresentadas na

Seção 4.2 para obtenção de (4.188), vem que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n \int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\, ds = -i, \tag{5.136}$$

o que implica, juntamente com (5.135), que

$$\frac{k\beta\delta^2}{\rho_1\chi_2^2} = -1,$$

contradizendo a positividade das constantes k, β e ρ_1. Portanto, o conjunto $\mathbb{N}'$ contém infinitos elementos. Com isto em mente, conclui-se que se $n \in \mathbb{N}'$, então o coeficiente A_n pode ser determinado. Mais precisamente, A_n é dado pela expressão (5.126), ou ainda, usando a identidade (5.131), vem que para $n \in \mathbb{N}'$, A_n é dado por

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\left[\frac{k^2}{d} - \int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\, ds + \delta^2 F_n + \left(\frac{d\rho_2}{\rho_1} + k\right)\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\right]}{d\left[\frac{k^2}{d} - \int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\, ds + \delta^2 F_n + \left(\frac{d\rho_2}{\rho_1} + k\right)\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\right] - k^2} \\ &= \frac{\frac{k^2}{d} - \int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\, ds + \delta^2 F_n + \left(\frac{d\rho_2}{\rho_1} + k\right)\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2}{d\left[- \int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\, ds + \delta^2 F_n + \left(\frac{d\rho_2}{\rho_1} + k\right)\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\right]} \\ &= \frac{k^2}{d^2\left[- \int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\, ds + \delta^2 F_n + \left(\frac{d\rho_2}{\rho_1} + k\right)\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\right]} + \frac{1}{d}. \end{aligned}$$

Para $n \in \mathbb{N}'$, segue que A_n pode ser escrito da forma

$$A_n = \frac{\lambda_n k^2}{d^2\left[-\lambda_n \int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\, ds + \delta^2 \lambda_n F_n + \lambda_n\left(\frac{d\rho_2}{\rho_1} + k\right)\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\right]} + \frac{1}{d} = \lambda_n\left(\frac{k^2}{d^2 G_n} + \frac{1}{d\lambda_n}\right),$$

onde

$$G_n = -\lambda_n \int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\, ds + \delta^2 \lambda_n F_n + \lambda_n\left(\frac{d\rho_2}{\rho_1} + k\right)\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2.$$

Por conseguinte,

$$|G_n| \leq \left|\lambda_n \int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda_n s}\, ds\right| + \delta^2|\lambda_n F_n| + |\lambda_n|\left(\frac{d\rho_2}{\rho_1} + k\right)\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2,$$

mais ainda,

$$|\lambda_n|\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 = \sqrt{\lambda_n^2\left(\frac{l}{n\pi}\right)^4} \longrightarrow 0,$$

portanto, tem-se do Lema 4.16 e do limite (5.130) que existe uma constante c_{10} tal que

$$|G_n| \leq c_{10}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{5.137}$$

Utilizando a Desigualdade Triangular Inversa,

$$|A_n| \geq |\lambda_n| \left(\frac{k^2}{d^2|G_n|} - \frac{1}{|d\lambda_n|} \right). \tag{5.138}$$

Visto que $1/|d\lambda_n| \longrightarrow 0$, tem-se que para todo ϵ positivo, existe n_3 natural tal que se $n > n_3$ implica em $1/|d\lambda_n| < \epsilon$. Particularmente, para $\epsilon = k^2/2d^2c_{10}$ vem que

$$\frac{1}{|d\lambda_n|} < \frac{k^2}{2d^2c_{10}}. \tag{5.139}$$

Com isto, usando (5.137) e (5.139) em (5.138), tem-se que para $n \in \mathbb{N}'$ com $n > n_3$ vale

$$|A_n| > |\lambda_n| \left(\frac{k^2}{d^2c_{10}} - \frac{k^2}{2d^2c_{10}} \right) = \frac{k^2}{2d^2c_{10}}|\lambda_n|, \tag{5.140}$$

o que encerra a discussão do segundo caso.

Finalmente, note das desigualdades (5.128) e (5.140) vem que existe uma constante positiva c tal que $|A_n| > c|\lambda_n|$ para pelo menos um subconjunto com infinitos elementos de $\mathbb{N}$. Portanto, da definição de norma do espaço $\mathcal{H}_2$, vem que

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}_2} \geq \sqrt{\rho_1}\|\Phi_n\|_{L^2} = \sqrt{\rho_1} \left(\int_0^l |i\lambda_n \varphi_n(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\rho_1}|\lambda_n A_n| \left(\int_0^l \cos^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Fazendo uso da identidade trigonométrica $2\cos^2(u) = 1 + \cos(2u)$, pode-se obter

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}_2} \geq \frac{\sqrt{\rho_1}\sqrt{l}}{\sqrt{2}}|\lambda_n A_n|,$$

o que implica em

$$\|(i\lambda_n I - A_2)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_2} = \|U_n\|_{\mathcal{H}_2} > \frac{\sqrt{\rho_1}\sqrt{l}\,c}{\sqrt{2}}|\lambda_n|^2 \longrightarrow \infty. \tag{5.141}$$

Por conseguinte, conclui-se que

$$\lim_{n\to\infty} \|(i\lambda_n I - A_2)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_2} = \lim_{n\to\infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = \infty.$$

Mais precisamente, usando que F_n é uma sequência limitada em $\mathcal{H}_2$, segue que

$$\left\|(i\lambda_n I - A_2)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} \geq \frac{\|(i\lambda_n I - A_2)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_2}}{\|F_n\|_{\mathcal{H}_2}} \longrightarrow \infty,$$

o que finaliza a prova do Teorema 5.15. ■

Corolário 5.16. *Seja g uma função que satisfaz* (5.39). *Se o C_0-semigrupo de contrações $S(t) = e^{A_2 t}$ associado ao sistema Timoshenko com história e Lei de Cattaneo é exponencialmente estável, então $\chi \neq 0$.*

Demonstração. Basta notar que $\chi_0 = 0$ implica em

$$\chi = \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \neq 0,$$

e aplicar o Teorema 5.15. ■

O resultado oferecido pelo Corolário 5.16 é um tanto quanto curioso, visto que, a relação $\chi = 0$ implica na falta de decaimento exponencial do semigrupo associado ao problema. Ocorre que em diversos sistemas de Timoshenko, a igualdade de velocidade de propagação de ondas é uma condição necessária e suficiente para que o decaimento exponencial seja garantido. Um exemplo foi discutido no Capitulo 4.

5.3 Estabilidade Polinomial

O objetivo desta seção é apresentar resultados que garantam que se $\chi_0 \neq 0$, então a solução decai em uma taxa polinomial. Vale ressaltar que em [7] os autores apresentam apenas uma versão equivalente ao item *(i)* do Lema 5.13, consequentemente, o decaimento polinomial apresentado no artigo fica restrito ao caso $\chi_1 \neq 0$. Para contornar esta situação, o resultado de decaimento polinomial desta seção utilizará a estimativa dada no item *(ii)* do Lema 5.13.

Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $F \in \mathcal{H}_2$, então existe único $U \in D(A_2)$ solução para a equação resolvente

$$(i\lambda I - A_2)U = F, \tag{5.142}$$

a qual, em termos de suas componentes pode ser descrita por

$$i\lambda\varphi - \Phi = f_1 \quad \text{em} \quad H^1_*(0,l), \tag{5.143}$$

$$i\lambda\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi)_x = \rho_1 f_2 \quad \text{em} \quad L^2_*(0,l), \tag{5.144}$$

$$i\lambda\psi - \Psi = f_3 \quad \text{em} \quad H^1_0(0,l), \tag{5.145}$$

$$i\lambda\rho_2\Psi - \tilde{b}\psi_{xx} - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)\,ds + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x = \rho_2 f_4 \ \text{em} \ L^2(0,l), \tag{5.146}$$

$$i\lambda\rho_3\theta + q_x + \delta\Psi_x = \rho_3 f_5 \quad \text{em} \quad L^2_*(0,l), \tag{5.147}$$

$$i\lambda\tau q + \beta q + \theta_x = \tau f_6 \quad \text{em} \quad L^2(0,l), \tag{5.148}$$

$$i\lambda\eta + \eta_s - \Psi = f_7 \quad \text{em} \quad L^2_g\big(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l)\big). \tag{5.149}$$

Teorema 5.17. *Seja g uma função que satisfaz* (5.39). *Se $\chi_0 \neq 0$, então o C_0-semigrupo de contrações $S(t) = e^{A_2 t}$ associado ao sistema Timoshenko com história e Lei de Cattaneo é polinomialmente estável com taxa ótima de decaimento $1/\sqrt{t}$.*

Demonstração. Lembre inicialmente da desigualdade (5.99) apresentada durante a prova do Teorema 5.14 na Seção 5.2, a saber

$$\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 \leq c_7 \Big[\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 + \|\Psi\|_{L^2}^2 + \|\theta\|_{L^2}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \Big], \tag{5.150}$$

onde c_7 representa uma constante positiva que depende apenas dos coeficientes do sistema. Porém, de acordo com o segundo item do Lema 5.13, vem que

$$\begin{aligned}\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 \quad \leq \quad & \frac{\tilde{c}_6}{k} \Big[\big| \big(\Psi, \Phi_x\big)_{L^2} \big| + \|\Psi\|_{L^2}^2 + |\lambda| \|\theta\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}_2} \\ & + \left(\int_0^\infty -g'(s) \|\eta_x(s)\|_{L^2}^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \|U\|_{\mathcal{H}_2} + \|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} \Big]. \end{aligned} \tag{5.151}$$

Substituindo (5.151) em (5.150), resulta que

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 \quad \leq \quad & \frac{\tilde{c}_6 c_7}{k} \big| \big(\Psi, \Phi_x\big)_{L^2} \big| + \left[c_7 + \frac{\tilde{c}_6 c_7}{k} \right] \|\Psi\|_{L^2}^2 + \frac{\tilde{c}_6 c_7}{k} |\lambda| \|\theta\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}_2} + c_7 \|\theta\|_{L^2}^2 \\ & + \frac{\tilde{c}_6 c_7}{k} \left(\int_0^\infty -g'(s) \|\eta_x(s)\|_{L^2}^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \|U\|_{\mathcal{H}_2} + \left[c_7 + \frac{\tilde{c}_6 c_7}{k} \right] \|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}, \end{aligned}$$

e ainda, aplicando a Desigualdade de Young com $\varepsilon = 1/4$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 \quad \leq \quad & \frac{\tilde{c}_6 c_7}{k} \big| \big(\Psi, \Phi_x\big)_{L^2} \big| + \left[c_7 + \frac{\tilde{c}_6 c_7}{k} \right] \|\Psi\|_{L^2}^2 + \left[\frac{\tilde{c}_6^2 c_7^2}{k^2} |\lambda|^2 + c_7 \right] \|\theta\|_{L^2}^2 \\ & + \frac{\tilde{c}_6^2 c_7^2}{k^2} \int_0^\infty -g'(s) \|\eta_x(s)\|_{L^2}^2 \, ds + \left[c_7 + \frac{\tilde{c}_6 c_7}{k} \right] \|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}. \end{aligned}$$

Fazendo uso do Lema 5.8, pode-se obter que para $|\lambda| \geq 1$, vale

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 \quad \leq \quad & \frac{\tilde{c}_6 c_7}{k} \big| \big(\Psi, \Phi_x\big)_{L^2} \big| + \left[c_7 + \frac{\tilde{c}_6 c_7}{k} \right] \|\Psi\|_{L^2}^2 + \left[\frac{\tilde{c}_6^2 c_7^2}{k^2} + c_7 \right] |\lambda|^2 \|\theta\|_{L^2}^2 \\ & + \left[c_7 + \frac{\tilde{c}_6 c_7}{k} + \frac{2\tilde{c}_6^2 c_7^2}{k^2} \right] \|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}. \end{aligned} \tag{5.152}$$

Neste instante, observe que devido a equação (5.143), tem-se que $\Phi_x = i\lambda\varphi_x - f_{1,x}$ em $L^2(0,l)$, mais ainda, usando a identidade (5.145), pode-se escrever

$$\Phi_x = i\lambda\varphi_x - f_{1,x} + i\lambda\psi - \Psi - f_3 = i\lambda(\varphi_x + \psi) - (f_{1,x} + f_3) - \Psi,$$

consequentemente,

$$\big(\Psi, \Phi_x\big)_{L^2} = -i\lambda\big(\Psi, \varphi_x + \psi\big)_{L^2} - \big(\Psi, f_{1,x} + f_3\big)_{L^2} - \|\Psi\|_{L^2}^2. \tag{5.153}$$

Tomando o módulo da expressão (5.153) e utilizando a Desigualdade Triangular, vem que

$$\left|\big(\Psi, \Phi_x\big)_{L^2}\right| \leq |\lambda| \left|\big(\Psi, \varphi_x + \psi\big)_{L^2}\right| + \left|\big(\Psi, f_{1,x} + f_3\big)_{L^2}\right| + \|\Psi\|_{L^2}^2.$$

Aplicando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, resulta que

$$\begin{aligned}\left|\big(\Psi, \Phi_x\big)_{L^2}\right| &\leq |\lambda|\|\Psi\|_{L^2}\|\varphi_x + \psi\|_{L^2} + \|\Psi\|_{L^2}\|f_{1,x} + f_3\|_{L^2} + \|\Psi\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{k}}|\lambda|\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} + \|\Psi\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\sqrt{\rho_2}\sqrt{k}}\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}.\end{aligned}$$

Da Desigualdade de Young com ε, pode-se obter

$$\left|\big(\Psi, \Phi_x\big)_{L^2}\right| \leq \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \left[\frac{|\lambda|^2}{4\varepsilon k} + 1\right]\|\Psi\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\sqrt{\rho_2}\sqrt{k}}\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2},$$

ou ainda, se $|\lambda| \geq 1$, então

$$\left|\big(\Psi, \Phi_x\big)_{L^2}\right| \leq \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \left[\frac{1}{4\varepsilon k} + 1\right]|\lambda|^2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\sqrt{\rho_2}\sqrt{k}}\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}. \tag{5.154}$$

Usando a estimativa (5.154) em (5.152) e escolhendo $\varepsilon = k/8\tilde{c}_6 c_7$, vem que para $|\lambda| \geq 1$

$$\begin{aligned}\frac{3}{8}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 \;\leq\; & \left[c_7 + \frac{\tilde{c}_6 c_7}{k} + \frac{\tilde{c}_6 c_7}{k}\left(\frac{2\tilde{c}_6 c_7}{k^2} + 1\right)\right]|\lambda|^2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \left[\frac{\tilde{c}_6^2 c_7^2}{k^2} + c_7\right]|\lambda|^2\|\theta\|_{L^2}^2 \\ & + \left[c_7 + \frac{\tilde{c}_6 c_7}{k} + \frac{2\tilde{c}_6^2 c_7^2}{k^2} + \frac{\tilde{c}_6 c_7}{\sqrt{\rho_2}\sqrt{k^3}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}.\end{aligned}$$

Agora, lembre que o Lema 5.9 garante a existência de uma constante c_2 positiva tal que

$$\|\theta\|_{L^2}^2 \leq c_2\|q\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + c_2\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2},$$

portanto,

$$\begin{aligned}\frac{3}{8}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 \;\leq\; & \left[c_7 + \frac{\tilde{c}_6 c_7}{k} + \frac{\tilde{c}_6 c_7}{k}\left(\frac{2\tilde{c}_6 c_7}{k^2} + 1\right)\right]|\lambda|^2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \left[\frac{c_2\tilde{c}_6^2 c_7^2}{k^2} + c_2 c_7\right]|\lambda|^2\|q\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} \\ & + \left[c_7 + \frac{\tilde{c}_6 c_7}{k} + \frac{2\tilde{c}_6^2 c_7^2}{k^2} + \frac{\tilde{c}_6 c_7}{\sqrt{\rho_2}\sqrt{k^3}} + \frac{c_2\tilde{c}_6^2 c_7^2}{k^2} + c_2 c_7\right]|\lambda|^2\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}.\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Young com $\varepsilon = 1/2$, pode-se escrever

$$|\lambda|^2\|q\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} \leq \frac{1}{2}|\lambda|^2\|q\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}|\lambda|^2\|\Psi\|_{L^2},$$

consequentemente,

$$\begin{aligned}
\frac{3}{8}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 \quad \leq \quad & \left[c_7 + \frac{\tilde{c}_6c_7}{k} + \frac{\tilde{c}_6c_7}{k}\left(\frac{2\tilde{c}_6c_7}{k^2}+1\right) + \frac{c_2\tilde{c}_6^2c_7^2}{2k^2} + \frac{c_2c_7}{2}\right]|\lambda|^2\|\Psi\|_{L^2}^2 \\
& + \left[\frac{c_2\tilde{c}_6^2c_7^2}{2k^2} + \frac{c_2c_7}{2}\right]|\lambda|^2\|q\|_{L^2}^2 \\
& + \left[c_7 + \frac{\tilde{c}_6c_7}{k} + \frac{2\tilde{c}_6^2c_7^2}{k^2} + \frac{\tilde{c}_6c_7}{\sqrt{\rho_2}\sqrt{k^3}} + \frac{c_2\tilde{c}_6^2c_7^2}{k^2} + c_2c_7\right]|\lambda|^2\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}.
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 5.7, tem-se que

$$\frac{3}{8}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 \leq \left[c_7 + \frac{\tilde{c}_6c_7}{k} + \frac{\tilde{c}_6c_7}{k}\left(\frac{2\tilde{c}_6c_7}{k^2}+1\right) + \frac{c_2\tilde{c}_6^2c_7^2}{2k^2} + \frac{c_2c_7}{2}\right]|\lambda|^2\|\Psi\|_{L^2}^2$$

$$+\left[c_7 + \frac{\tilde{c}_6c_7}{k} + \frac{2\tilde{c}_6^2c_7^2}{k^2} + \frac{\tilde{c}_6c_7}{\sqrt{\rho_2}\sqrt{k^3}} + \frac{c_2\tilde{c}_6^2c_7^2}{k^2} + c_2c_7 + \frac{c_1c_2\tilde{c}_6^2c_7^2}{2k^2} + \frac{c_1c_2c_7}{2}\right]|\lambda|^2\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}.$$

Por fim, usando o Lema 5.12 com $\varepsilon > 0$ dado por

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{3}{kc_4},\ \frac{1}{8}\left[c_7 + \frac{\tilde{c}_6c_7}{k} + \frac{\tilde{c}_6c_7}{k}\left(\frac{2\tilde{c}_6c_7}{k^2}+1\right) + \frac{c_2\tilde{c}_6^2c_7^2}{2k^2} + \frac{c_2c_7}{2}\right]^{-1}\right\},$$

segue que

$$\frac{1}{4}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 \leq c_5\left[c_7 + \frac{\tilde{c}_6c_7}{k} + \frac{\tilde{c}_6c_7}{k}\left(\frac{2\tilde{c}_6c_7}{k^2}+1\right) + \frac{c_2\tilde{c}_6^2c_7^2}{2k^2} + \frac{c_2c_7}{2}\right]|\lambda|^2\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}$$

$$+\left[c_7 + \frac{\tilde{c}_6c_7}{k} + \frac{2\tilde{c}_6^2c_7^2}{k^2} + \frac{\tilde{c}_6c_7}{\sqrt{\rho_2}\sqrt{k^3}} + \frac{c_2\tilde{c}_6^2c_7^2}{k^2} + c_2c_7 + \frac{c_1c_2\tilde{c}_6^2c_7^2}{2k^2} + \frac{c_1c_2c_7}{2}\right]|\lambda|^2\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2},$$

o que implica, devido a Desigualdade de Young com $\varepsilon = 1/16$, em

$$\frac{1}{8}\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 \leq 4c_5^2\left[c_7 + \frac{\tilde{c}_6c_7}{k} + \frac{\tilde{c}_6c_7}{k}\left(\frac{2\tilde{c}_6c_7}{k^2}+1\right) + \frac{c_2\tilde{c}_6^2c_7^2}{2k^2} + \frac{c_2c_7}{2}\right]^2|\lambda|^4\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2$$

$$+4\left[c_7 + \frac{\tilde{c}_6c_7}{k} + \frac{2\tilde{c}_6^2c_7^2}{k^2} + \frac{\tilde{c}_6c_7}{\sqrt{\rho_2}\sqrt{k^3}} + \frac{c_2\tilde{c}_6^2c_7^2}{k^2} + c_2c_7 + \frac{c_1c_2\tilde{c}_6^2c_7^2}{2k^2} + \frac{c_1c_2c_7}{2}\right]^2|\lambda|^4\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2.$$

Portanto, existe uma constante c positiva tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_2} \leq c|\lambda|^2\|F\|_{\mathcal{H}_2},$$

onde

$$\begin{aligned}\frac{c^2}{8} &= 4c_5^2\left[c_7+\frac{\tilde{c}_6c_7}{k}+\frac{\tilde{c}_6c_7}{k}\left(\frac{2\tilde{c}_6c_7}{k^2}+1\right)+\frac{c_2\tilde{c}_6^2c_7^2}{2k^2}+\frac{c_2c_7}{2}\right]^2\\ &+4\left[c_7+\frac{\tilde{c}_6c_7}{k}+\frac{2\tilde{c}_6^2c_7^2}{k^2}+\frac{\tilde{c}_6c_7}{\sqrt{\rho_2}\sqrt{k^3}}+\frac{c_2\tilde{c}_6^2c_7^2}{k^2}+c_2c_7+\frac{c_1c_2\tilde{c}_6^2c_7^2}{2k^2}+\frac{c_1c_2c_7}{2}\right]^2.\end{aligned}$$

Visto que $U \in D(A_2)$ é solução da equação resolvente $(i\lambda I - A_2)U = F$, segue que

$$\|(i\lambda I - A_2)^{-1}F\|_{\mathcal{H}_2} \leq c|\lambda|^2\|F\|_{\mathcal{H}_2}, \quad \forall\, F \in \mathcal{H}_2,$$

desde que $|\lambda| \geq 1$. Por conseguinte, tem-se

$$\left\|(i\lambda I - A_2)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} \leq c|\lambda|^2,$$

ou equivalentemente,

$$\left\|(i\lambda I - A_2)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} = \mathcal{O}(|\lambda|^2), \quad \lambda \longrightarrow \infty.$$

Assim, devido ao Teorema de Borichev & Tomilov (veja Teorema 2.76), vem que

$$\|S(t)A_2^{-1}u\|_{\mathcal{H}_2} = o(t^{-1/2}), \quad t \longrightarrow \infty,\, u \in \mathcal{H}_2,$$

isto é,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\|S(t)A_2^{-1}u\|_{\mathcal{H}_2}}{t^{-1/2}} = 0, \quad u \in \mathcal{H}_2.$$

Usando a definição de limite no infinito, tem-se que para $\epsilon = 1$ existe $t_0 > 0$ tal que se $t > t_0$, então

$$\frac{\|S(t)A_2^{-1}u\|_{\mathcal{H}_2}}{t^{-1/2}} < 1, \quad u \in \mathcal{H}_2,$$

ou melhor,

$$\|S(t)A_2^{-1}u\|_{\mathcal{H}_2} < \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad u \in \mathcal{H}_2.$$

Para cada $U_0 \in D(A_2)$, considere

$$u = \frac{A_2U_0}{\|U_0\|_{D(A_2)}} \in \mathcal{H}_2,$$

segue que se $t > t_0$, então

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}_2} < \frac{\|U_0\|_{D(A_2)}}{\sqrt{t}}.$$

Com isto em mente, seja $M = \max\{1, \sqrt{t_0}\}$. Assim, para $t \in (0, t_0]$ tem-se

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \|U_0\|_{D(A_2)} \leq \frac{M\|U_0\|_{D(A_2)}}{\sqrt{t_0}} \leq \frac{M\|U_0\|_{D(A_2)}}{\sqrt{t}}.$$

Portanto, como $M \geq 1$, segue que

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{M\|U_0\|_{D(A_2)}}{\sqrt{t}}, \quad t > 0, \tag{5.155}$$

ou seja, o semigrupo decai polinomialmente com taxa $1/\sqrt{t}$.

Neste momento, objetiva-se mostrar que a taxa $1/\sqrt{t}$ não pode ser melhorada. Com efeito, suponha que existe um número $\gamma > 0$ e alguma constante $M > 0$ tais que para todo $U_0 \in D(A_2)$

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{M\|U_0\|_{D(A_2)}}{t^{\frac{1}{2-\gamma}}}, \quad t > 0. \tag{5.156}$$

Uma vez que $0 \in \varrho(A_2)$, vem que para cada $U_0 \in D(A_2)$ existe único $F \in \mathcal{H}_2$ de tal forma que

$$A_2U_0 = F \quad \Longleftrightarrow \quad U_0 = A_2^{-1}F. \tag{5.157}$$

Fazendo uso de (5.157), segue que (5.156) pode ser reescrito como

$$\|S(t)A_2^{-1}F\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{M\|U_0\|_{D(A_2)}}{t^{\frac{1}{2-\gamma}}}, \quad t > 0.$$

Todavia, lembrando que A_2^{-1} é um operador limitado, vem da definição de norma de $D(A_2)$ que

$$M\|U_0\|_{D(A_2)} = M\big(\|A_2^{-1}F\|_{\mathcal{H}_2} + \|F\|_{\mathcal{H}_2}\big) \leq M\big(\|A_2^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} + 1\big)\|F\|_{\mathcal{H}_2},$$

consequentemente,

$$\frac{\|S(t)A_2^{-1}F\|_{\mathcal{H}_2}}{\|F\|_{\mathcal{H}_2}} \leq \frac{M\big(\|A_2^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} + 1\big)}{t^{\frac{1}{2-\gamma}}}, \quad t > 0,$$

para todo $F \in \mathcal{H}_2$. Da definição de norma do espaço $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$, obtém-se que

$$\|S(t)A_2^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} \leq \frac{M\big(\|A_2^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} + 1\big)}{t^{\frac{1}{2-\gamma}}}, \quad t > 0,$$

ou ainda,

$$\|S(t)A_2^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} = \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2-\gamma}}), \quad t \longrightarrow \infty.$$

Face as equivalências oferecidas pelo Teorema de Borichev & Tomilov, seque que

$$\|(i\lambda I - A_2)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} = \mathcal{O}(|\lambda|^{2-\gamma}), \quad \lambda \longrightarrow \infty,$$

isto é, existe uma constante positiva $\hat{c}$ tal que para $|\lambda|$ suficientemente grande

$$\|(i\lambda I - A_2)^{-1}F\|_{\mathcal{H}_2} \leq \hat{c}|\lambda|^{2-\gamma}\|F\|_{\mathcal{H}_2}, \quad \forall\, F \in \mathcal{H}_2, \tag{5.158}$$

o que implica em

$$|\lambda|^{\gamma-2}\,\|(i\lambda I - A_2)^{-1}F\|_{\mathcal{H}_2} \leq \hat{c}\|F\|_{\mathcal{H}_2}, \quad \forall\, F \in \mathcal{H}_2. \tag{5.159}$$

Agora lembre que no Teorema 5.15 da Seção 5.2 foi provado que existe uma sequência de números reais $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e outra sequência $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{H}_2$, tais que

$$\|(i\lambda_n I - A_2)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_2} > \frac{\sqrt{\rho_1}\sqrt{l}\,c}{\sqrt{2}}|\lambda_n|^2 \longrightarrow \infty. \tag{5.160}$$

(veja a desigualdade (5.141)). Mais ainda, ficou provado em (5.103) que

$$\|F_n\|^2_{\mathcal{H}_2} = \frac{l}{2\rho_1},$$

portanto, (5.160) pode ser reescrito como

$$\|(i\lambda_n I - A_2)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_2} > \rho_1\, c|\lambda_n|^2\|F_n\|_{\mathcal{H}_2} \longrightarrow \infty, \tag{5.161}$$

ou ainda

$$|\lambda_n|^{\gamma-2}\,\|(i\lambda_n I - A_2)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_2} > \rho_1\, c|\lambda_n|^{\gamma}\|F_n\|_{\mathcal{H}_2} \longrightarrow \infty. \tag{5.162}$$

Contudo, veja que (5.159) deve ser satisfeita particularmente para λ_n e F_n, isto é,

$$|\lambda_n|^{\gamma-2}\,\|(i\lambda_n I - A_2)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_2} \leq \hat{c}\|F_n\|_{\mathcal{H}_2}. \tag{5.163}$$

Lembrando que $\|F_n\|_{\mathcal{H}_2}$ é constante, as expressões (5.162) e (5.163) geram uma contradição, consequentemente, a taxa $1/\sqrt{t}$ é ótima. $\blacksquare$

A APÊNDICE

A.1 UM ESPAÇO DE HILBERT

Os resultados aqui apresentados dizem respeito a equivalência de normas nos espaços de fase dos problemas, mais especificamente, será provado que a norma definida em (5.5) é equivalente à norma usual do espaço $\mathcal{H}_2$. Com isto em mente, tem-se o seguinte resultado

Proposição A.1. *A norma* $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_2}$ *definida em* (5.5) *é equivalente à norma usual* $|\cdot|_{\mathcal{H}_2}$.

Demonstração. Dado $U=(u^1,u^2,u^3,u^4,u^5,u^6,u^7)\in\mathcal{H}_2$, usando as desigualdades Triangular, Poincaré e o Lema 2.29, vem que

$$k\|u_x^1+u^3\|_{L^2}^2 \le k\big(\|u_x^1\|_{L^2}+l\|u_x^3\|_{L^2}\big)^2 \le 2k\|u_x^1\|_{L^2}^2+2kl^2\|u_x^3\|_{L^2}^2.$$

Consequentemente, obtém-se

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \rho_1\|u^2\|_{L^2}^2+\rho_2\|u^4\|_{L^2}^2+\tilde{b}\|u_x^3\|_{L^2}^2+k\|u_x^1+u^3\|_{L^2}^2\\
&\quad+\rho_3\|u^5\|_{L^2}^2+\tau\|u^6\|_{L^2}^2+\|u^7\|_{L_g^2}^2\\
&\le 2k\|u_x^1\|_{L^2}^2+\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2+\big(\tilde{b}+2kl^2\big)\|u_x^3\|_{L^2}^2+\rho_2\|u^4\|_{L^2}^2\\
&\quad+\rho_3\|u^5\|_{L^2}^2+\tau\|u^6\|_{L^2}^2+\|u^7\|_{L_g^2}^2\\
&\le c^2\big(\|u_x^1\|_{L^2}^2+\|u^2\|_{L^2}^2+\|u_x^3\|_{L^2}^2+\|u^4\|_{L^2}^2+\|u^5\|_{L^2}^2+\|u^6\|_{L^2}^2+\|u^7\|_{L_g^2}^2\big),
\end{aligned}$$

onde

$$c^2=\max\Big\{2k,\ \rho_1,\ \tilde{b}+2kl^2,\ \rho_2,\ \rho_3,\ \tau,\ 1\Big\}.$$

Observe agora que $a^2+b^2\le(a+b)^2$, portanto pode-se escrever

$$\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2\le c^2\big(\|u_x^1\|_{L^2}+\|u^2\|_{L^2}+\|u_x^3\|_{L^2}+\|u^4\|_{L^2}+\|u^5\|_{L^2}+\|u^6\|_{L^2}+\|u^7\|_{L_g^2}\big)^2=c^2|U|_{\mathcal{H}_2}^2$$

e finalmente, conclui-se que $\|U\|_{\mathcal{H}_2}\le c|U|_{\mathcal{H}_2}$. Por outro lado, usando o Lema 2.29 repetidas vezes obtém-se

$$\begin{aligned}
|U|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \big(\|u_x^1\|_{L^2}+\|u^2\|_{L^2}+\|u_x^3\|_{L^2}+\|u^4\|_{L^2}+\|u^5\|_{L^2}+\|u^6\|_{L^2}+\|u^7\|_{L_g^2}\big)^2\\
&\le 2\|u_x^1\|_{L^2}^2+4\|u^2\|_{L^2}^2+8\|u_x^3\|_{L^2}^2+16\|u^4\|_{L^2}^2+32\|u^5\|_{L^2}^2+64\|u^6\|_{L^2}^2+64\|u^7\|_{L_g^2}^2.
\end{aligned}$$

Além do mais, das desigualdades Triangular e Poincaré, vem que

$$2\|u_x^1\|_{L^2}^2\le 2\big(\|u_x^1+u^3\|_{L^2}+l\|u_x^3\|_{L^2}\big)^2\le 4\|u_x^1+u^3\|_{L^2}^2+4l^2\|u_x^3\|_{L^2}^2,$$

o que implica em

$$\begin{aligned} |U|^2_{\mathcal{H}_2} &\leq 4\|u^1_x + u^3\|^2_{L^2} + \big(4l^2+8\big)\|u^3_x\|^2_{L^2} + 4\|u^2\|^2_{L^2} + 16\|u^4\|^2_{L^2} \\ &\quad +32\|u^5\|^2_{L^2} + 64\|u^6\|^2_{L^2} + 64\|u^7\|^2_{L^2_g} \\ &\leq c^2\big(\rho_1\|u^2\|^2_{L^2} + \rho_2\|u^4\|^2_{L^2} + \tilde{b}\|u^3_x\|^2_{L^2} + k\|u^1_x + u^3\|^2_{L^2} \\ &\quad +\rho_3\|u^5\|^2_{L^2} + \tau\|u^6\|^2_{L^2} + \|u^7\|^2_{L^2_g}\big), \end{aligned}$$

com

$$c^2 = \max\left\{\frac{4}{k}, \frac{4l^2+8}{\tilde{b}}, \frac{4}{\rho_1}, \frac{16}{\rho_2}, \frac{32}{\rho_3}, \frac{64}{\tau}, 64\right\}.$$

Portanto, existe $c > 0$ tal que $|U|_{\mathcal{H}_2} \leq c\|U\|_{\mathcal{H}_2}$, isto é, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_2}$ é equivalente à norma $|\cdot|_{\mathcal{H}_2}$. ∎

Assim sendo, visto que os espaços $L^2(0,l)$, $L^2_*(0,l)$, $H^1_0(0,l)$, $H^1_*(0,l)$, e $L^2_g\big(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l)\big)$ são de Banach, o exposto acima permite afirmar que

$$\mathcal{H}_2 = H^1_*(0,l) \times L^2_*(0,l) \times H^1_0(0,l) \times L^2(0,l) \times L^2_*(0,l) \times L^2(0,l) \times L^2_g\big(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l)\big)$$

é um espaço de Banach com a norma (5.5) e Hilbert com o produto interno definido em (5.4). Observe ainda que os mesmos argumentos podem ser empregados para obter conclusões semelhantes em relação ao espaço $\mathcal{H}_1$.

REFERÊNCIAS

[1] ADAMS, ROBERT A.; FOURNIER, J. J. F. *Sobolev spaces*, vol. 140. Elsevier, 2003.

[2] BORICHEV, A.; TOMILOV, Y. Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups. *Mathematische Annalen 347*, 2 (2010), 455–478.

[3] BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.

[4] CAVALHEIRO, A. C. *Introdução à Análise Matemática*, vol. 1. Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2014.

[5] DAFERMOS, C. M. Asymptotic stability in viscoelasticity. *Archive for rational mechanics and analysis 37*, 4 (1970), 297–308.

[6] ENGEL, K.-J., AND NAGEL, R. *A short course on operator semigroups*. Springer Science & Business Media, 2006.

[7] FATORI, L. H.; MONTEIRO, R. N., AND SARE, H. D. F. The Timoshenko system with history and Cattaneo law. *Applied Mathematics and Computation 228* (2014), 128–140.

[8] GEARHART, L. Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert space. *Transactions of the American Mathematical Society 236* (1978), 385–394.

[9] ISNARD, C. *Introdução à medida e integração*. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2013.

[10] KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*, vol. 1. Wiley New York, 1978.

[11] LIU, Z.; ZHENG, S. *Semigroups associated with dissipative systems*, vol. 398. CRC Press, 1999.

[12] MA, Z. Y. Polynomial stability for Timoshenko-Type System with Past History. *Applied Mechanics and Materials 623* (2014), 78–85.

[13] ODEN, J. T.; DEMKOWICZ, L. *Applied Functional Analysis*, 2 ed. Taylor & Francis, Florida, 2010.

[14] PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer, New York, 1983.

[15] PRÜSS, J. On the spectrum of c_0-semigroups. *Transactions of the American Mathematical Society 284*, 2 (1984), 847–857.

[16] RAPOSO, C. A., FERREIRA, J., SANTOS, M., AND CASTRO, N. Exponential stability for the Timoshenko system with two weak dampings. *Applied Mathematics Letters 18*, 5 (2005), 535–541.

[17] RIVERA, J. E. M.; SARE, H. D. F. Stability of Timoshenko systems with past history. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 339*, 1 (2008), 482–502.

[18] RIVERA, J. E. M. *Estabilização de Semigrupos e Aplicações*. Série de Métodos Matemáticos, 2008.

[19] RIVERA, J. E. M., AND RACKE, R. Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems–global existence and exponential stability. *J. Math. Anal. Appl 276* (2002), 248–278.

[20] SANTOS, M. L.; JÚNIOR, D. S. A., AND RIVERA, J. E. M. The stability number of the Timoshenko system with second sound. *Journal of Differential Equations 253*, 9 (2012), 2715–2733.

[21] SARE, H. D. F.; RACKE, R. On the stability of damped Timoshenko systems: Cattaneo versus Fourier law. *Archive for Rational Mechanics and Analysis 194*, 1 (2009), 221–251.

[22] TIMOSHENKO, S. P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 41*, 245 (1921), 744–746.