UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

THAÍS GUINAMI PEREIRA ALVES

VARIEDADES DE RECOBRIMENTO

Londrina
2018

THAÍS GUINAMI PEREIRA ALVES

VARIEDADES DE RECOBRIMENTO

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Bruno Mendonça Rey dos Santos

Londrina
2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Alves, Thaís Guinami Pereira.
Variedades de Recobrimento / Thaís Guinami Pereira Alves. - Londrina, 2018.
130 f.

Orientador: Bruno Mendonça Rey dos Santos.
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, , 2018.
Inclui bibliografia.

1. Aplicação de recobrimento diferenciável - Tese. 2. Levantamento - Tese. 3. Existência do recobrimento universal para variedades diferenciáveis - Tese. I. Santos, Bruno Mendonça Rey dos. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. . III. Título.

THAÍS GUINAMI PEREIRA ALVES

VARIEDADES DE RECOBRIMENTO

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. Bruno Mendonça Rey dos Santos
Universidade Estadual de Londrina - UEL

____
Prof. Dr. Fernando Manfio
Universidade de São Paulo - USP/ ICMC- São Carlos

____
Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka
Universidade Estadual de Maringá - UEM

Londrina, 25 de Maio de 2018.

O sucesso parece ser, em grande parte, uma questão de persistir quando os outros desistiram.
– William Feather.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus pelo dom da vida, por me dar força, ânimo e discernimento para seguir firme em meus objetivos.

Agradeço ao meu esposo Daniel pelo companheirismo, por estar presente em todos os momentos da minha caminhada, ajudando, apoiando, incentivando, por nunca deixar eu pensar em desistir e acima de tudo por entender e compreender as minhas escolhas e fazer do meu sonho o seu.

Agradeço aos meus pais que tanto amo, por todo o amor, apoio, orações e incentivo durante toda minha vida, por entenderem todas as vezes que eu estive ausente por conta dos meus estudos e compromissos. Eles são meu alicerce por toda a vida!

Agradeço aos meus professores da graduação e do mestrado por toda contribuição na minha formação acadêmica. Em especial, agradeço ao professor Bruno, a quem muito considero e admiro, por sua orientação durante esse trabalho, por suas correções, sugestões e pelos valiosos ensinamentos.

Aos meus familiares e amigas verdadeiras Suellen, Aline, Chriziane, Fernanda, Ariane e Elizangela que me acompanharam e acreditaram em mim.

Agradeço à Capes, pelo apoio financeiro.

ALVES,Thaís Guinami Pereira. **VARIEDADES DE RECOBRIMENTO**. 2018. 130. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

RESUMO

Neste trabalho foram estudados conceitos de variedades de recobrimento tais como: aplicação de recobrimento diferenciável, propriedades de levantamento e a existência do recobrimento universal para variedades diferenciáveis.

Palavras-chave: Variedades de recobrimento, aplicação de recobrimento diferenciável, levantamento, recobrimento universal.

ALVES,Thaís Guinami Pereira. **COVERING MANIFOLDS**. 2018. 130. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

ABSTRACT

In this work we study topics about of covering manifolds such as: smooth covering maps, lifting properties and the existence of universal covering for smooth manifolds.

Keywords: Covering manifolds, smooth covering map, lifting, universal covering smooth manifolds.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A ideia principal desse trabalho é definir e apresentar resultados de variedades de recobrimento, aplicações de recobrimento, existência do recobrimento universal e alguns resultados relacionados, do ponto de vista das variedades diferenciáveis.

O estudo foi dividido em quatro partes. Primeiro foi estudado alguns conceitos de Homotopia e Grupo fundamental, em seguida Espaços de Recobrimento topológicos, posteriormente foi abordado os conceitos de Variedades Diferenciáveis e por fim o estudo de variedades de recobrimento, aplicações de recobrimento diferenciáveis e demais resultados do ponto de vista diferenciável.

O primeiro capítulo é destinado para o estudo de conceitos preliminares que serão utilizados no desenvolvimento deste trabalho. O capítulo foi dividido em 3 seções, sendo a primeira de Topologia geral, a segunda de Álgebra e a terceira seção de Cálculo Avançado. Os resultados expostos nesse capítulo que não foram demonstrados terão referências citadas onde tais demonstrações poderão ser consultadas.

No capítulo 2 são abordados resultados de homotopia, homotopia por caminhos e grupo fundamental que serão de suma importância para o conteúdo desenvolvido no capítulo 3, que trata-se de espaços de recobrimento, aplicações de recobrimento, levantamento de caminhos, grupo de recobrimento, homomorfismo de recobrimento e a existência do Espaço de Recobrimento Universal.

Os capítulos 4 e 5 são sobre variedades diferenciáveis. No capítulo 4 destaca-se as definições de variedade topológica, cartas coordenadas, atlas e variedade diferenciável. Nesse mesmo capítulo são apresentadas algumas propriedades topológicas das variedades e um dos principais resultados está na Seção 4.2, mostrando que o grupo fundamental de uma variedade topológica é enumerável. Já no capítulo 5 são abordados conceitos a respeito de aplicações diferenciáveis entre variedades, diferencial de uma aplicação diferenciável, curvas na variedade, teorema da função inversa, teorema do posto, forma local das imersões, forma local das submersões, subvariedades e mergulho.

Por fim, o capítulo 6 é sobre variedades de recobrimento, no qual retomamos resultados apresentados no capítulo 3 porém agora incluindo a diferenciabilidade. Na primeira seção é definido aplicação de recobrimento diferenciável e explorado algumas propriedades básicas. A segunda seção aborda propriedades de levantamento, a terceira e quarta sessões tratam-se de transformações de recobrimento diferenciáveis e homomorfismo de recobrimento diferenciável, e na última seção é provado a existência do recobrimento universal entre variedades.

1 PRELIMINARES

1.1 Topologia Geral

Nesta seção iremos apresentar algumas definições e resultados no âmbito da topologia geral os quais são utilizados no decorrer deste trabalho.

Proposição 1.1. *Se X é um espaço topológico segundo enumerável, então toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura enumerável.*

Demonstração. Ver [9]. □

Lema 1.2. *Seja X um espaço topológico e suponha que X que admite uma cobertura enumerável aberta $\{U_i\}$, tal que cada conjunto U_i é segundo enumerável na topologia do subespaço. Então X é segundo enumerável.*

Demonstração. [9] □

Lema 1.3. *Sejam X e Y espaços topológicos e $\varphi : X \longrightarrow Y$ um homeomorfismo. Se β é uma base de X, então $\varphi(\beta) := \{\varphi(B);\ B \in \beta\}$ é uma base de Y.*

Demonstração. Suponha que β é uma base de X e sejam A um aberto de Y e $p \in A$. Como φ é um homeomorfismo temos que $\varphi^{-1}(A)$ é um aberto de X e que $\varphi^{-1}(p) \in \varphi^{-1}(A)$. Por hipótese, β é base de X, logo existe $B \in \beta$ de forma que $\varphi^{-1}(p) \in B \subset \varphi^{-1}(A)$. Dessa forma, $p \in \varphi(B) \subset A$ e $\varphi(B) \in \varphi(\beta)$. Portanto $\varphi(\beta) = \{\varphi(B);\ B \in \beta\}$ é uma base de Y. □

Conexidade e Componentes

Definição 1.4. *Um **caminho** em um espaço topológico X é uma aplicação contínua $f : I \to X$ onde $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$. Os pontos $p = f(0)$ e $q = f(1)$ são chamados, respectivamente, **ponto inicial** e **ponto final** do caminho f. Dizemos também que f é um caminho de p para q.*

Definição 1.5. *Dado um X espaço topológico, dizemos que ele é:*

1. ***conexo** se não existir dois subconjuntos abertos, disjuntos e não vazios de X, cuja união é X.*

2. ***conexo por caminhos** se cada par de pontos em X pode ser ligado por um caminho em X.*

3. ***localmente conexo por caminhos em $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$*** *se, para cada vizinhança U de x, existir uma vizinhança conexa por caminhos V de x contida em U. Se X é localmente conexo por caminhos em cada um de seus pontos, então X é dito ser* ***localmente conexo por caminhos****.*

Lema 1.6. *Se X é um espaço topológico que possui uma base β de conjuntos conexo por caminhos, então X é localmente conexo por caminhos.*

Demonstração. Dado $x \in X$ e U uma vizinhança aberta de x, uma vez que β é uma base para X, existe um aberto básico B, conexo por caminhos, de forma que $x \in B \subset U$. Portanto, X é localmente conexo por caminhos. □

Lema 1.7. *Se X é um espaço topológico localmente conexo por caminhos e $A \subset X$ é aberto, então A munido com a topologia do subespaço é localmente conexo por caminhos.*

Demonstração. Dado $a \in A$ e U uma vizinhança aberta de a em A, segue que U é uma vizinhança aberta de a em X. Como X é localmente conexo por caminhos, existe uma vizinhança V de a em X, conexa por caminhos, de forma que $a \in V \subset U$. Além disso, em particular, $V = V \cap A$ o qual é um aberto em A e portanto A é localmente conexo por caminhos. □

Definição 1.8. *Dado um espaço topológico X, definimos uma relação de equivalência em X, por $x \sim y$ se existir um subespaço conexo de X contendo x e y. As classes de equivalência são ditas ser as* ***componentes conexas*** *(ou simplesmente* ***componentes****) de X.*

De forma semelhante, temos uma caracterização por classes de equivalência para conexidade por caminhos.

Definição 1.9. *Definimos uma nova relação de equivalência em X, por $x \approx y$ se existir um caminho em X contendo x e y. As classes de equivalência são chamadas de* ***componentes conexas por caminhos*** *(ou simplesmente componentes por caminhos) de X.*

Definidos esses conceitos, segue o resultado:

Proposição 1.10. *Seja X um espaço topológico localmente conexo por caminhos. Então:*

1. *As componentes de X são abertas em X.*

2. *As componentes conexas por caminhos coincidem com as componentes conexas.*

3. *X é conexo se, e somente se, é conexo por caminhos.*

4. *Todo subconjunto aberto de X é localmente conexo por caminhos.*

Demonstração. Ver [9]. □

Compacidade, Pré-compacidade, Compacidade Local e Paracompacidade

Definição 1.11. *Um espaço topológico X é dito ser **compacto**, se toda cobertura aberta de X admite uma subcobertura finita. Um subconjunto de X é dito ser **pré-compacto** (ou totalmente limitado) se seu fecho em X é um conjunto compacto.*

Lema 1.12. *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, para cada subconjunto A de X, $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.*

Demonstração. Ver [9]. □

Lema 1.13 (Continuidade é um aspecto local)**.** *Se $f : X \to Y$ é uma aplicação entre espaços topológicos tal que cada ponto $p \in X$ possui uma vizinhança U de forma que $f|_U$ é contínua, então f é uma aplicação contínua.*

Demonstração. Ver [9] □

Compacidade é um invariante topológico, dessa forma podemos enunciar o seguinte lema:

Lema 1.14. *Sejam X e Y espaços topológicos e $\varphi : X \to Y$ um homeomorfismo. Então, $B \subset X$ é pré-compacto se, e somente se, $\varphi(B) \subset Y$ é pré-compacto.*

Definição 1.15. *Um espaço topológico X é dito ser **localmente compacto** se todo ponto de X tem uma vizinhança contida em um subconjunto compacto de X*

Proposição 1.16. *Se X é um espaço de Hausdorff, então são equivalentes:*

1. *X é localmente compacto.*
2. *Cada ponto de X tem uma vizinhança pré-compacta.*
3. *X possui uma base de subconjuntos abertos pré-compactos.*

Demonstração. Ver [9]. □

Definição 1.17. *Uma coleção χ de subconjuntos de um espaço topológico X é dita ser **localmente finita** se cada ponto de X tem uma vizinhança que intercepta no máximo uma quantidade finita de conjuntos em χ.*

Definição 1.18. *Seja X um espaço topológico. Dadas coberturas abertas $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ de X, $\mathcal{V}$ é dita ser um **refinamento** de $\mathcal{U}$ se para cada $V \in \mathcal{V}$ existir algum $U \in \mathcal{U}$, tal que $V \subset U$.*

*X é dito ser **paracompacto** se toda cobertura aberta de X admite um refinamento aberto localmente finito.*

Lema 1.19. *Suponha que χ é uma coleção localmente finita de subconjuntos de um espaço topológico X. Então:*

1. *A coleção* $\overline{\chi} = \left\{\overline{Y};\ Y \in \chi\right\}$ *é também localmente finita.*

2. $\overline{\bigcup_{Y\in\chi} Y} = \bigcup_{Y\in\chi} \overline{Y}$.

Demonstração. 1. Dado $x \in X$ e U uma vizinhança de x em X, mostremos que para qualquer $Y \in \chi$, $U \cap Y = \varnothing$ se, e somente se, $U \cap \overline{Y} = \varnothing$.

Seja $Y \in \chi$ e suponha que $U \cap \overline{Y} = \varnothing$. Como $Y \subset \overline{Y}$, então $U \cap Y = \varnothing$. Reciprocamente, suponha que $Y \in \chi$ é tal que, $\varnothing \neq U \cap \overline{Y} = U \cap (Y \cup Y') = (U \cap Y) \cup (U \cap Y')$, em que Y' é o conjunto dos pontos de acumulação de Y. Se $U \cap Y' \neq \varnothing$, temos que existe $y \in U \cap Y'$, isto é, U é uma vizinhança do ponto de acumulação y de Y. Assim, $\varnothing \neq U \cap (Y - \{y\}) \subset U \cap Y$.

Portanto, χ é localmente finita se, e somente se, $\overline{\chi}$ é localmente finita.

2. Para cada $\widehat{Y} \in \chi$, temos que $\widehat{Y} \subset \bigcup_{Y\in\chi} Y$, logo $\overline{\widehat{Y}} \subset \overline{\bigcup_{Y\in\chi} Y}$, e assim, $\bigcup_{Y\in\chi} \overline{Y} \subset \overline{\bigcup_{Y\in\chi} Y}$. Por outro lado, dado $x \in \overline{\bigcup_{Y\in\chi} Y}$, mostremos que existe algum $\widehat{Y} \in \chi$ de forma que $x \in \overline{\widehat{Y}}$ e assim, $x \in \bigcup_{Y\in\chi} \overline{Y}$.

Como $x \in \overline{\bigcup_{Y\in\chi} Y}$, então temos que $x \in \bigcup_{Y\in\chi} Y$ ou $x \in \left(\bigcup_{Y\in\chi} Y\right)'$, isto é, $x \in \bigcup_{Y\in\chi} Y$ ou $U_x \bigcap \left(\left(\bigcup_{Y\in\chi} Y\right) - \{x\}\right) \neq \varnothing$, para toda vizinhança U_x de x em X.

Caso 1: $x \in \bigcup_{Y\in\chi} Y$. Neste caso $x \in \widehat{Y}$, para algum $\widehat{Y} \in \chi$, logo $x \in \overline{\widehat{Y}}$.

Caso 2: $x \in \left(\bigcup_{Y\in\chi} Y\right)'$. Como χ é localmente finito, existe uma vizinhança U de x em X e $Y_{\alpha_1}, \ldots, Y_{\alpha_t} \in \chi$, tal que $U \cap Y_{\alpha_i} \neq \varnothing$, para todo $i = 1, \ldots, t$ e $U \cap Y = \varnothing$, para todo $Y \neq Y_{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, t$. Assim,

$$U \cap \left(\bigcup_{Y\in\chi} Y - \{x\}\right) = U \cap \left(\left(\bigcup_{i=1}^{t} Y_{\alpha_i}\right) - \{x\}\right). \tag{1.1}$$

Afirmação: $x \in Y'_{\alpha_i} \subset \overline{Y_{\alpha_i}}$, para algum $i = 1, \ldots, t$.

Com efeito, sem perda da generalidade, suponha que $x \notin (Y_{\alpha_i})'$, $i = 1, \ldots, t-1$. Logo, para cada $i = 1, \ldots, t-1$ existe uma vizinhança U_{α_i} de x em X, de forma que $U_{\alpha_i} \cap (Y_{\alpha_i} - \{x\}) = \varnothing$. Considere a vizinhança $V = \bigcap_{i=1}^{t-1} U_{\alpha_i}$ de x em X. Logo,

$$V \cap \left(\left(\bigcup_{i=1}^{t-1} Y_{\alpha_i}\right) - \{x\}\right) = \varnothing. \tag{1.2}$$

Além disso, como U e V são vizinhanças de $x \in \left(\bigcup_{Y \in \chi} Y\right)'$, por 1.1 e 1.2 $V_x = U \cap V$ é uma vizinhança de x satisfazendo:

$$\varnothing \neq V_x \cap \left(\left(\bigcup_{Y \in \chi} Y\right) - \{x\}\right) \overset{(1.1)}{=} V_x \cap \left(\left(\bigcup_{i=1}^{t} Y_{\alpha_i}\right) - \{x\}\right) \overset{(1.2)}{=} V_x \cap (Y_{\alpha_t} - \{x\}) \,. \tag{1.3}$$

Dessa forma, dado uma vizinhança arbitrária U_x de x em X, por 1.3, temos que $U_x \cap V_x$ é uma vizinhança de x tal que:

$$\varnothing \neq (U_x \cap V_x) \cap \left(\left(\bigcup_{Y \in \chi} Y\right) - \{x\}\right) \overset{(1.3)}{=} (U_x \cap V_x) \cap (Y_{\alpha_t} - \{x\}) \subset U_x \cap (Y_{\alpha_t} - \{x\}).$$

Portanto, $x \in (Y_{\alpha_t})' \subset \overline{Y_{\alpha_t}}$, como queríamos.

□

Definição 1.20. *Uma sequência $(K_i)_{i=1}^{\infty}$ de subconjuntos compactos em X é dito ser uma **exaustão** de X por subconjuntos compactos se $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ e $K_i \subseteq \text{int}K_{i+1}$, para cada $i = 1, 2, \cdots$.*

Proposição 1.21. *Todo espaço de Hausdorff, localmente compacto e segundo enumerável admite uma exaustão por conjuntos compactos.*

Demonstração. Ver [9]. □

Definição 1.22. *Sejam X e Y espaços topológicos e $p : X \to Y$ uma aplicação sobrejetiva. Dizemos que p é uma **aplicação quociente**, se para cada $U \subset Y$, U é aberto em Y se, e somente se, $p^{-1}(U)$ é aberto em X.*

Definição 1.23. *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \to Y$ é dita ser um **mergulho topológico**, se $f : X \to f(X)$ é um homeomorfismo, considerando $f(X)$ munido com a topologia do subespaço.*

Teorema 1.24. *Sejam X e Y espaços topológicos e $F : X \to Y$ uma aplicação contínua, aberta ou fechada.*

1. *Se F é sobrejetora, então F é uma aplicação quociente.*

2. *Se F é injetora, então F é um mergulho topológico.*

3. *Se F é bijetora, então F é um homeomorfismo.*

Demonstração. Ver [9]. □

Teorema 1.25 (Lema da colagem)**.** *Considere $X = A \cup B$, onde A e B são fechados em X e sejam $f : A \to Y$ e $g : B \to Y$ funções contínuas. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$, então $h : X \to Y$ definida por:*

$$h(x) := \begin{cases} f(x), & \textit{se} \quad x \in A; \\ g(x), & \textit{se} \quad x \in B; \end{cases}$$

está bem definida e é contínua.

Demonstração. Ver [9]. □

Lema 1.26 (Número de Lebesgue)**.** *Seja $\mathcal{A}$ uma cobertura aberta do espaço métrico (X, d). Se X é compacto, então existe um $\delta > 0$ tal que para cada subconjunto $Y \subset X$ de diâmetro menor do que δ, existe um elemento de $\mathcal{A}$ contendo Y.*

*Esse número δ é chamado um **número de Lebesgue** da cobertura $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Ver [9]. □

Definição 1.27. *Dizemos que uma aplicação $f : X \to Y$ é **própria** se para todo compacto $C \subset Y$, $f^{-1}(C)$ compacto em X.*

Teorema 1.28. *Seja X um espaço topológico e Y um espaço de Hausdorff localmente compacto. Então toda aplicação contínua e própria $F : X \to Y$ é fechada.*

Demonstração. Ver [9]. □

Definição 1.29. *Seja $\pi : X \to Y$ uma aplicação, dado $q \in Y$, uma **fibra** de π sobre q é o conjunto $\pi^{-1}(q)$.*

Teorema 1.30. *Seja $\pi : X \to Y$ uma aplicação quociente, B um espaço topológico e $F : X \to B$ uma aplicação contínua que é constante na fibra de π (isto é $\pi(p) = \pi(q)$ implica que $F(p) = F(q)$). Então existe uma única aplicação contínua $\tilde{F} : Y \to B$ tal que $F = \tilde{F} \circ \pi$.*

1.2 ÁLGEBRA

Nesta seção iremos introduzir alguns conceitos de álgebra que utilizaremos no decorrer deste trabalho, as demonstrações e detalhes podem ser encontradas em [2].

Utilizaremos a notação $\approx$ sempre que que dois grupos forem isomorfos.

Teorema 1.31 (Teorema do Isomorfismo)**.** *Sejam G e H grupos e $f : G \to H$ um homomorfismo. Então $\mathrm{Im}(f)$ é um subgrupo de H, $\ker(f)$ é um subgrupo normal de G e $\frac{G}{\ker(f)} \approx \mathrm{Im}(f)$.*

Demonstração. Ver [2]. □

Lema 1.32. *Sejam G e H grupos e $f : G \to H$ um homomorfismo. Se f é injetiva, então G é isomorfo a* $\mathrm{Im}(f)$.

Demonstração. Consequência direta do Teorema 1.31. □

Teorema 1.33. *Se $H \subset G$, então H é um subgrupo de G se, e somente se:*
i) *$H \neq \varnothing$ e*
ii) *$\forall a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$.*

Demonstração. Ver [2]. □

Definição 1.34. *Sejam G um grupo e H, H' subgrupos de G. Dizemos que H e H' são **conjugados** se existir $g \in G$ tal que $H' = g \cdot H \cdot g^{-1}$.*

Definição 1.35. *Um subgrupo H de G é dito ser **normal** se $H = g \cdot H \cdot g^{-1}$, para todo $g \in G$.*

Definição 1.36. *Sejam G um grupo e $H \subset G$ um subgrupo de G. O **normalizador** de H em G, é o conjunto $N(H) := \{g \in G; g^{-1}Hg = H\}$.*

Lema 1.37.
1. *$N(H)$ é um subgrupo de G.*
2. *$H \subset N(H)$.*
3. *H é um subgrupo normal de $N(H)$.*
4. *$N(H)$ é o maior subgrupo de G contendo H como um subgrupo normal.*

Demonstração. 1. Note que $N(H) \neq \varnothing$ pois $e_G \in N(H)$, uma vez que $e_G^{-1}He_G = H$. Agora tome $g_1, g_2 \in N(H)$, mostraremos que $g_1g_2^{-1} \in N(H)$.

De fato, $(g_1g_2{}^{-1})^{-1}Hg_1g_2^{-1} = g_2g_1^{-1}Hg_1g_2^{-1} = g_2Hg_2^{-1} = g_2(g_2^{-1}Hg_2)g_2^{-1}$ $= e_GHe_G = H$. Dessa forma $g_1g_2^{-1} \in N(H)$. Portanto, pelo Teorema 1.33 $N(H)$ é um subgrupo de G.
2. Tome $h \in H$, mostremos que $h^{-1}Hh = H$.

É claro que $h^{-1}Hh \subset H$. Por outro lado, tome $h' \in H$, logo $hh'h^{-1} \in H$ e assim $h^{-1}(hh'h^{-1})h = eh'e = h'$. Portanto $h^{-1}Hh = H$.
3. Segue direto da Definição 1.35.
4. De fato, tome K um subgrupo de G tal que H é um subgrupo normal de K. Dado $k \in K$ segue que $k^{-1}Hk = H$, mas, pela Definição 1.36, $k \in N(H)$, ou seja, $K \subset N(H)$. □

Definição 1.38. *Dizemos que um grupo G é um **grupo topológico**, se G está munido com uma topologia de forma que as aplicações*

$$\begin{array}{rccc} \mu: & G \times G & \to & G \\ & (g_1, g_2) & \mapsto & \mu(g_1, g_2) = g_1g_2 \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} i: & G & \to & G \\ & g & \mapsto & g^{-1} \end{array}$$

*são funções contínuas. Um **grupo discreto** é um grupo topológico munido com a topologia discreta.*

Definição 1.39. *Sejam G um grupo e X um conjunto. Uma **ação à esquerda** do grupo G no conjunto X é uma aplicação*

$$\begin{array}{rccc} * : & G \times X & \to & X \\ & (g, x) & \mapsto & g * x \end{array}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

1. *Para todo $x \in X$ e para quaisquer $g_1, g_2 \in G$, $g_1 * (g_2 * x) = (g_1 g_2) * x$.*

2. *Para todo $x \in X$, $e_g * x = x$, onde e_g é o elemento neutro de grupo G.*

*De maneira análoga, uma **ação à direita** do grupo G no conjunto X é uma aplicação*

$$\begin{array}{rccc} * : & X \times G & \to & X \\ & (x, g) & \mapsto & x * g \end{array}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

1. *Para todo $x \in X$ e para qualquer $g_1, g_2 \in G$, $(x * g_1) * g_2 = x * (g_1 g_2)$.*

2. *Para todo $x \in X$, $x * e_g = x$, onde e_g é o elemento neutro de grupo G.*

Definição 1.40. *Se G é um grupo topológico, uma ação à esquerda (à direita) de G em X é **contínua**, se a aplicação $* : G \times X \to X$ ($* : X \times G \to X$) é contínua.*

Proposição 1.41. *Se G é um grupo topológico discreto, então a ação à esquerda (à direita) é contínua se, e somente se, cada aplicação $L_g : X \to X$ ($R_g : X \to X$), dada por $L_g(x) = g * x$ ($R_g(x) = x * g$) é contínua.*

Demonstração. $\Leftarrow$) Note que para todo $(g, x) \in G \times X$ o conjunto $\{g\} \times X$ é uma vizinhança aberta de (g, x) em $G \times X$ e $*|_{\{g\} \times X} = L_g \circ \pi_2 : \{g\} \times X \to X$, onde $\pi_2 : \{g\} \times X \to X$ é a projeção na segunda componente. Logo, o resultado segue do Lema 1.13.
$\Rightarrow$) Para cada $y \in X$, temos que se $(g, x) \in \left(*|_{\{g\} \times X}\right)^{-1}(y)$, então $*|_{\{g\} \times X}(g, x) = y$ e assim $g * x = y$, logo $L_g(x) = y$, ou seja, $x \in L_g{}^{-1}(y)$. Dessa forma, dado um subconjunto aberto U de X, temos que $\pi_2\left(\left(*|_{\{g\} \times X}\right)^{-1}(U)\right) = L_g{}^{-1}(U)$. Uma vez que $*$ é contínua e $\{g\} \times X$ é aberto, segue que $\left(*|_{\{g\} \times X}\right)^{-1}(U)$ é aberto em $\{g\} \times X$. Como π_2 é uma aplicação aberta temos que $\pi_2\left(\left(*|_{\{g\} \times X}\right)^{-1}(U)\right) = L_g{}^{-1}(U)$ é aberto em X. Portanto L_g é contínua. □

Definição 1.42. *Dada uma ação a esquerda de G em X e $x \in X$, o conjunto $O(x) := \{g * x;\ g \in G\}$ é denominado **órbita** de x. Além disso, a ação é **transitiva** se para todo $x \in X$ tivermos $G * x = X$, isto é, dado $y \in X$ existe $g \in G$ de forma que $y = g * x$.*

*A ação é **livre**, ou G **age livremente** em X, se o único elemento de G que possui um ponto fixo é o elemento neutro, ou seja, se $g * x = x$, para algum $x \in X$, então $g = e_g$.*

Lema 1.43. *Sejam V, W e X espaços vetoriais de dimensão finita e $S : V \to W$ e $T : W \to X$ aplicações lineares. Então* $\operatorname{posto}(T \circ S) \leqslant \operatorname{posto}(S)$ *e a igualdade é satisfeita se, e somente se,* $\Im(S) \cap \ker(T) = \{0\}$.

Demonstração. Dado $x \in \ker(S)$, temos que $(T \circ S)(x) = T(S(x)) = T(0) = 0$, ou seja, $\ker(S) \subset \ker(T \circ S)$. Dessa forma, $\dim(\ker S) \leqslant \dim(\ker(T \circ S))$, assim $\operatorname{posto}(T \circ S) = \dim(V) - \dim(\ker(T \circ S)) \leqslant \dim(V) - \dim(\ker(S)) = \operatorname{posto}(S)$.

Note que $\operatorname{posto}(T \circ S) = \operatorname{posto}(S)$ se, e somente se, $\dim(\ker(T \circ S)) = \dim(\ker(S))$, como $\ker(S) \subset \ker(T \circ S)$, ou seja, $\operatorname{posto}(T \circ S) = \operatorname{posto}(S)$ se, e somente se, $\ker(S) = \ker(T \circ S)$.

Suponha que $\operatorname{posto}(T \circ S) = \operatorname{posto}(S)$ e seja $x \in \Im(S) \cap \ker(T)$, logo existe $y \in V$ tal que $S(y) = x$ e $T(x) = 0$, assim $0 = T(x) = T(S(y)) = (T \circ S)(y)$, ou seja, $y \in \ker(T \circ S) = \ker(S)$. Daí $0 = S(y) = x$.

Por outro lado, suponha que $\Im(S) \cap \ker(T) = \{0\}$. Dado $x \in \ker(T \circ S)$, segue que $0 = (T \circ S)(x) = T(S(x))$, assim $S(x) \in \Im(S) \cap \ker(T) = \{0\}$, o que implica que $x \in \ker(S)$, ou seja, $\ker(T \circ S) \subset \ker(S)$. Portanto $\operatorname{posto}(T \circ S) = \operatorname{posto}(S)$. □

1.3 Cálculo Avançado

Nessa seção serão enunciados alguns importantes Teoremas de Cálculo avançado, suas demonstrações podem ser consultadas em [5].

Teorema 1.44 (Teorema da Função Inversa). *Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^k definida em um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. A função f é um difeomorfismo local de classe C^k em uma vizinhança de p se, e somente se,* $\det\left[\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p)\right] \neq 0$.

Teorema 1.45 (Forma Local das Imersões). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}^{m+n}$ uma função de classe C^k. Se $df_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n}$ é injetora no ponto $p \in U$, então existem abertos V, W, Z e um difeomorfismo $h : Z \to V \times W$ de classe C^k tais que $p \in V \subset U$, $f(p) \in Z \subset \mathbb{R}^{m+n}$, $0 \in W \subset \mathbb{R}^n$ e $(h \circ f|_V)(x) = (x, 0)$, para cada $x \in V$.*

Teorema 1.46 (Forma Local das Submersões). *Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^{m+n}$ e $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^k e suponha que $df_p : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ seja sobrejetora no ponto $p \in U$. Nessas condições, existem abertos V, W, Z e um difeomorfismo C^k $h : V \times W \to Z$ tais que:*

1. *$p \in Z \subset U$*
2. *$V \subset \mathbb{R}^m$, $f(p) \in W \subset \mathbb{R}^n$ e,*
3. *$(f \circ h)(x, y) = y$, $\forall (x, y) \in V \times W$.*

Teorema 1.47 (Teorema do Posto Constante). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}^{m+s}$ uma função de classe C^k. Se f tem posto constante m em todos os pontos de U, então para* *todo* $p \in U$ *existem abertos* $U_p \subset \mathbb{R}^{m+n}$, $V_{f(p)} \subset \mathbb{R}^{m+s}$, $V \subset \mathbb{R}^m$, $W \subset \mathbb{R}^n$ *e* $Z \subset \mathbb{R}^s$, *e existem difeomorfismos de classe* C^k $H\colon V \times W \to U_p$ *e* $G\colon V_{f(p)} \to V \times Z$ *tais que* $p \in U_p \subset U$, $f(p) \in V_{f(p)}$ *e* $(G \circ f \circ H)(x, y) = (x, 0)$, *para todo par* $(x, y) \in V \times W$.

2 HOMOTOPIA E GRUPO FUNDAMENTAL

Neste capítulo faremos uma abordagem de alguns resultados de homotopia e grupo fundamental. O capítulo está dividido em 2 seções. Na primeira seção é definido o que é uma homotopia e abordado dois lemas sobre o assunto. A segunda seção é a respeito de grupo fundamental, onde é definido caminhos homotópicos, laços, homomorfismo induzido e alguns resultados relacionados. Os detalhes desse capítulo podem ser vistos em [4] e [9].

2.1 HOMOTOPIA

Definição 2.1. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$ funções contínuas. Uma* ***homotopia*** *de f para g é uma função contínua $H : X \times I \to Y$, com $I = [0,1]$ tal que $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$, $\forall x \in X$.*

Se existir uma homotopia de f para g, dizemos que f e g são ***homotópicas*** *e denotamos por $f \simeq g$. Além disso, se $H : X \times I \to Y$ é uma homotopia tal que $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$, $\forall x \in X$, denotamos por $H : f \simeq g$.*

Lema 2.2. *A relação $\simeq$ é de equivalência.*

Demonstração. De fato, sejam $f, g, h : X \to Y$ funções contínuas.
1. $f \simeq f$:

Considere a aplicação contínua $H : X \times I \to Y$ dada por $H(x,t) = f(x)$, logo $H(x,0) = f(x) = H(x,1)$, $\forall x \in X$, assim $H : f \simeq f$.
2. Se $f \simeq g$ então $g \simeq f$:

Seja $H : X \times I \to Y$ uma homotopia de f para g, ou seja, $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$. Defina $G : X \times I \to Y$ por $G(x,t) := H(x, 1-t)$, assim $G(x,0) = H(x, 1-0) = H(x,1) = g(x)$ e $G(x,1) = H(x,0) = f(x)$, portanto G é uma homotopia de g para f, isto é, $g \simeq f$.
3. Se $f \simeq g$ e $g \simeq h$ então $f \simeq h$:

Dados $H : f \simeq g$ e $H' : g \simeq h$, considere $\overline{H}$ dada por:

$$\overline{H}(x,t) := \begin{cases} H(x,2t), & \text{se } \ 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}; \\ H'(x,2t-1), & \text{se } \ \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Note que para $t = \frac{1}{2}$ temos que $H(x,1) = g(x) = H'(x,0) = \overline{H}\left(x, \frac{1}{2}\right)$, ou seja, $\overline{H}$ está bem definida. Além disso $H(x,2t)$ e $H'(x,2t-1)$ são contínuas nos fechados $X \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ e $X \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, respectivamente. Pelo Teorema 1.25, segue que $\overline{H}$ é contínua em $X \times [0,1]$. Observe que $\overline{H}(x,0) = f(x)$ e $\overline{H}(x,1) = h(x)$, isto é $\overline{H} : f \simeq h$. $\square$

Lema 2.3. *Se $f_0, f_1 : X \to Y$ e $g_0, g_1 : Y \to Z$ são funções contínuas com $f_0 \simeq f_1$ e $g_0 \simeq g_1$ então $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.*

Demonstração. Com efeito, sejam $F : f_0 \simeq f_1$ e $G : g_0 \simeq g_1$ homotopias e defina a função $H : X \times I \to Z$ por $H(x,t) = G(F(x,t),t)$. Note que H é contínua (pois é composição de funções contínuas) e $H(x,0) = G(F(x,0),0) = G(f_0(x),0) = g_0(f_0(x))$ e $H(x,1) = G(F(x,1),1) = G(f_1(x),1) = g_1(f_1(x))$. Portanto, $H : g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$. □

2.2 Grupo Fundamental

Definição 2.4. *Dois caminhos $f, g : I \to X$ são **homotópicos por caminhos**, se $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$ e existe uma homotopia $H : f \simeq g$ tal que $H(0,t) = f(0)$ e $H(1,t) = f(1)$, $\forall t \in I$.*
Notação: *$H : f \simeq_p g$.*

Observações 2.5. *1. Chamamos H de homotopia de caminhos entre f e g e escrevemos $f \simeq_p g$ para dizer que os caminhos f,g são homotópicos por caminho.*

2. A relação homotopia por caminho é uma relação de equivalência.

3. A classe de f será denotada por $[f]$, ou seja, $[f] = \{g : I \to X; g \simeq_p f\}$.

Podemos considerar uma operação entre caminhos, denominada operação produto, sempre que um caminho terminar aonde o outro estiver iniciando, conforme a próxima definição.

Definição 2.6. *Seja f um caminho em X de x_0 para x_1 e g um caminho em X de x_1 para x_2, definimos o produto $f \cdot g$ de f e g como sendo o caminho h dado por*

$$h(t) = \begin{cases} f(2t), & \textit{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}; \\ g(2t-1), & \textit{se } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Uma vez que $f(1) = x_1 = g(0)$ e $f(2t)$ e $g(2t-1)$ são aplicações contínuas nos intervalos fechado $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, respectivamente, segue pelo Teorema 1.25 que h é contínua em $[0,1]$.

Observações 2.7. *Considerando a operação $\cdot$ dada na definição anterior:*

1. *Podemos estender essa operação para as classes de homotopia de caminhos, isto é, podemos definir $[f] \cdot [g] := [f \cdot g]$.*

   De fato, mostremos que a operação . está bem definido para o produto de classe de homotopia por caminho.

Tome $F : f \simeq_p f'$ e $G : g \simeq_p g'$ e considere

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t), & \text{se } 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}; \\ G(2s-1,t), & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1, \end{cases}$$

como $\left[0, \frac{1}{2}\right] \times [0,1]$ e $\left[\frac{1}{2}, 1\right] \times [0,1]$ são fechados e $F(2 \cdot \frac{1}{2}, t) = F(1,t) = f(1) = x_1 = g(0) = G(0,t) = G(2 \cdot \frac{1}{2} - 1, t)$ em todo $t \in [0,1]$, segue pelo Teorema 1.25 que H está bem definida e é contínua em $[0,1] \times [0,1]$. Note que para $t = 0$,

$$H(s,0) = \begin{cases} F(2s,0), & \text{se } 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}; \\ G(2s-1,0), & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases} = \begin{cases} f(2s), & \text{se } 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}; \\ g(2s-1), & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Logo $H(s,0) = (f \cdot g)(s)$. Já para $t = 1$ temos que:

$$H(s,1) = \begin{cases} F(2s,1), & \text{se } 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}; \\ G(2s-1,1), & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases} = \begin{cases} f'(2s), & \text{se } 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}; \\ g'(2s-1), & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

$$= \left(f' \cdot g'\right)(s).$$

Assim, $H : f \cdot g \simeq_p f' \cdot g'$. Portanto a operação $\cdot$ está bem definida.

2. *Note que $f \cdot g$ só faz sentido se $f(1) = g(0)$.*

Lema 2.8. *Sejam $f, g : I \to X$ caminhos em X, com $f(1) = x_1 = g(0)$ e $h : X \to Y$ uma função contínua, então $h \circ (f \cdot g) = (h \circ f) \cdot (h \circ g)$.*

Demonstração. De fato,

$$(h \circ (f \cdot g))(t) = \begin{cases} h(f(2t)), & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}; \\ h(g(2t-1)), & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Portanto $h \circ (f \cdot g) = (h \circ f) \cdot (h \circ g)$. □

Lema 2.9. *Sejam $f, g : I \to X$ caminhos em X, com $H : f \simeq_p g$ e $\theta : X \to Y$ uma função contínua, então $(\theta \circ H) : \theta \circ f \simeq_p \theta \circ g$.*

Demonstração. Com efeito, como θ e H são funções contínuas, segue que $\theta \circ H : I \times I \to Y$ é uma função contínua e se $f(0) = x_0 = g(0)$, $f(1) = x_1 = g(1)$ temos:
a) $(\theta \circ H)(t,0) = \theta(H(t,0)) = \theta(f(t)) = (\theta \circ f)(t)$;
b) $(\theta \circ H)(t,1) = \theta(H(t,1)) = \theta(g(t)) = (\theta \circ g)(t)$;
c) $(\theta \circ H)(0,s) = \theta(H(0,s)) = \theta(x_0)$;
d) $(\theta \circ H)(1,s) = \theta(H(1,s)) = \theta(x_1)$.

Portanto, $(\theta \circ H) : \theta \circ f \simeq_p \theta \circ g$. □

Teorema 2.10. *A operação $\cdot$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. ***(Associativa)*** *Se $[f]\cdot([g]\cdot[h])$ está definida, então $([f]\cdot[g])\cdot[h]$ também está definida e são iguais.*

2. ***(Identidade à direita e à esquerda)*** *Dado $x \in X$, seja c_x o caminho constante igual x. Se f é um caminho em X de x_0 a x_1, então $[f]\cdot[c_{x_1}] = [f]$ e $[c_{x_0}]\cdot[f] = [f]$.*

3. ***(Inverso)*** *Dado um caminho f em X de x_0 a x_1, o caminho f^{-1} definido por $f^{-1}(t) = f(1-t)$ é chamado de caminho inverso de f e satisfaz $[f]\cdot[f^{-1}] = [c_{x_0}]$ e $[f^{-1}]\cdot[f] = [c_{x_1}]$.*

Demonstração. 1. Como a operação produto está bem definida nas classes de homotopias por caminhos, basta mostrarmos que $f\cdot(g\cdot h) \simeq_p (f\cdot g)\cdot h$, para caminhos f, g e h em X satisfazendo $f(1) = g(0)$ e $g(1) = h(0)$. Assim, por definição

$$(f\cdot g)\cdot h(s) = \begin{cases} (f\cdot g)(2s), \text{se } 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}; \\ h(2s-1), \text{ se } \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases} = \begin{cases} f(4s), \quad \text{se } 0 \leqslant 2s \leqslant \frac{1}{2}; \\ g(4s-1), \text{se } \frac{1}{2} \leqslant 2s \leqslant 1; \\ h(2s-1), \text{ se } \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(4s), \quad \text{se } 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{4}; \\ g(4s-1), \text{se } \frac{1}{4} \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}; \\ h(2s-1), \text{se } \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Por outro lado,

$$f\cdot(g\cdot h)(s) = \begin{cases} f(2s), \quad \text{se } 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}; \\ (g\cdot h)(2s-1), \text{ se } \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases} = \begin{cases} f(2s), \quad \text{se } 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}; \\ g(4s-2), \text{ se } \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant \frac{3}{4}; \\ h(4s-3), \text{ se } \frac{3}{4} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

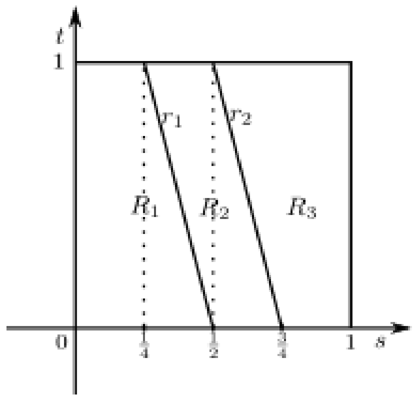
Mostraremos que a aplicação H definida por:

$$H(s,t) = \begin{cases} f\left(\frac{4s}{2-t}\right), \quad \text{se } 0 \leqslant s \leqslant \frac{2-t}{4}; \\ g(4s-2+t), \text{ se } \frac{2-t}{4} \leqslant s \leqslant \frac{3-t}{4}; \\ h\left(\frac{4s-3+t}{1+t}\right), \text{ se } \frac{3-t}{4} \leqslant s \leqslant 1, \end{cases}$$

é uma homotopia de caminhos entre os caminhos $f\cdot(g\cdot h)$ e $(f\cdot g)\cdot h$.

Mostremos que H é contínua. Para isso, considerem $R_1 = \left\{(s,t) \in I \times I; s \leqslant \frac{2-t}{4}\right\}$, $R_2 = \left\{(s,t) \in I \times I; \frac{2-t}{4} \leqslant s \leqslant \frac{3-t}{4}\right\}$, $R_3 = \left\{(s,t) \in I \times I; s \leqslant \frac{3-t}{4}\right\}$ e sejam $\varphi_1 : R_1 \to X$, $\varphi_2 : R_2 \to X$ e $\varphi_3 : R_3 \to X$ dadas por $\varphi_1(s,t) = f\left(\frac{4s}{2-t}\right)$, $\varphi_2(s,t) = g(4s-2+t)$ e $\varphi_3(s,t) = h\left(\frac{4s-3+t}{1+t}\right)$, respectivamente, conforme a Figura 2.1.

Se $(s,t) \in R_1 \cap R_2 = r_1$, segue que, $s = \frac{2-t}{4}$. Dessa forma, $\varphi_1(s,t) = f\left(\frac{4s}{2-t}\right) = f\left(\frac{2-t}{2-t}\right) = f(1) = g(0) = g(2-t-2+t) = g(4s-2+t) = \varphi_2(s,t)$. Por outro



$$r_1 : s = \frac{2-t}{4} \qquad r_2 : s = \frac{3-t}{4}$$

$$R_1 = \{(s,t) \in I \times I;\ s \leqslant \tfrac{2-t}{4}\}$$

$$R_2 = \{(s,t) \in I \times I;\ \tfrac{2-t}{4} \leqslant s \leqslant \tfrac{3-t}{4}\}$$

$$R_3 = \{(s,t) \in I \times I;\ s \geqslant \tfrac{3-t}{4}\}$$

Figura 2.1

lado, se $(s,t) \in R_2 \cap R_3 = r_2$, temos que $s = \frac{3-t}{4}$, e assim, $\varphi_2(s,t) = g(4s-2-t) = g(3-t-2+t) = g(1) = h(0) = h\left(\frac{3-t-3+t}{1+t}\right) = h\left(\frac{4s-3+t}{1+t}\right) = \varphi_3(s,t)$. Como R_1, R_2 e R_3 são fechados, pelo Teorema 1.25, $H(s,t)$ é contínua. Além disso,

$$H(s,0) = \begin{cases} f(2s), & \text{se } 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}; \\ g(4s-2), & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant \frac{3}{4}; \\ h(4s-3), & \text{se } \frac{3}{4} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases} = (f \cdot (g \cdot h))(s),$$

$$H(s,1) = \begin{cases} f(4s), & \text{se } 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{4}; \\ g(4s-3), & \text{se } \frac{1}{4} \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}; \\ h(2s-1), & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases} = ((f \cdot g) \cdot h)(s),$$

$$(f \cdot (g \cdot h))(0) = f(0) = ((f \cdot g) \cdot h)(0)\ ,\ (f \cdot (g \cdot h))(1) = f(1) = ((f \cdot g) \cdot h)(1),$$

$$H(0,t) = f\left(\frac{4 \cdot 0}{2 \cdot t}\right) = f(0) = ((f \cdot g) \cdot h)(0) \text{ e } H(1,t) = h\left(\frac{4 \cdot 1 - 3 + t}{1+t}\right) = h(1)$$

$= ((f \cdot g) \cdot h)(1)$.

Portanto $H : f \cdot (g \cdot h) \simeq_p (f \cdot g) \cdot h$.

2. Para verificarmos que $[c_{x_0}] \cdot [f] = [f]$, basta verificarmos que $c_{x_0} \cdot f \simeq_p f$. Sendo assim, sejam $Id_I : I \to I$ e $c_0 : I \to I$, o caminho identidade e o caminho constante nulo em I, respectivamente. Uma vez que $I \times I$ é convexo, considerando o produto $c_0 \cdot Id_I$ (conforme Figura 2.2), temos que a aplicação $H(s,t) = (1-t)Id_I(s) + t \cdot (c_0 \cdot Id_I)(s)$ satisfaz $H : Id_I \simeq_p (c_0 \cdot Id_I)$. Logo, pelo Lema 2.9, temos que $f \circ H : (f \circ Id_I) \simeq_p f \circ (c_0 \cdot Id_I)$, e assim, pelo Lema 2.8, $f \simeq_p (f \circ c_0) \cdot (f \circ Id_I) = c_{x_0} \cdot f$.

De forma análoga, para mostrar que $[f] \cdot [c_{x_1}] = [f]$, consideramos $c_1 : I \to I$ o caminho constante igual a 1 em I e a homotopia de caminhos $H(s,t) = (1-t)Id_I(s) + t \cdot$

$(Id_I \cdot c_1)(s)$ do caminho Id_I para o caminho $Id_I \cdot c_1$. Assim,

$$f \circ H : (f \circ Id_I) \simeq_p f \circ (Id_I \cdot c_1) \Longrightarrow f \simeq_p (f \circ Id_I) \cdot (f \circ c_1) = f \cdot c_{x_1}.$$

Portanto, $[f] \cdot [c_{x_1}] = [f]$.

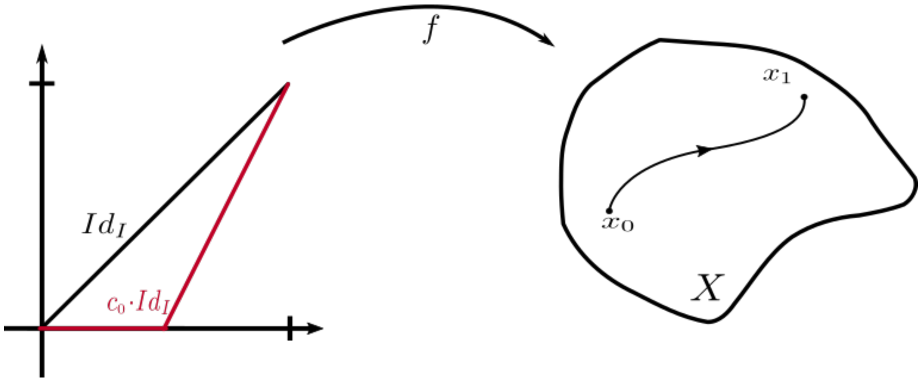


Figura 2.2

3. Devemos mostrar que $f \cdot f^{-1} \simeq_p c_{x_0}$ e $f^{-1} \cdot f \simeq_p c_{x_1}$. Para isto, consideremos novamente o caminho $Id_I : I \to I$ identidade em I e o caminho $e : I \to I$ em I dado por $e(t) = 1 - t$. Assim, o produto $Id_I \cdot e$ (Figura 2.3) é um caminho em I iniciando e terminando no ponto 0. Uma vez que $I \times I$ é convexo, a aplicação $H(s,t) = (1-t)c_0(s) + t \cdot (Id_I \cdot e)(s)$ é uma homotopia de caminhos do caminho c_0 para o caminho $Id_I \cdot e$. Assim,

$$f \circ H : f \circ c_0 \simeq_p f \circ (Id_I \cdot e) \Longrightarrow c_{x_0} \simeq_p (f \circ Id_I) \cdot (f \circ e) = f \cdot f^{-1}.$$

Da mesma forma, considerando o produto $e \cdot Id_I$ o qual é um caminho em I iniciando e terminando em 1, temos que $H(s,t) = (1-t)c_1(s) + t \cdot (e \cdot Id_I)(s)$ é uma homotopia de caminhos do caminho c_1 para o caminho $e \cdot Id_I$. Logo,

$$f \circ H : f \circ c_1 \simeq_p f \circ (e \cdot Id_I) \Longrightarrow c_{x_1} \simeq_p (f \circ e) \cdot (f \circ Id_I) = f^{-1} \cdot f.$$

Portanto, temos que $[f] \cdot [f^{-1}] = [c_{x_0}]$ e $[f^{-1}] \cdot [f] = [c_{x_1}]$.

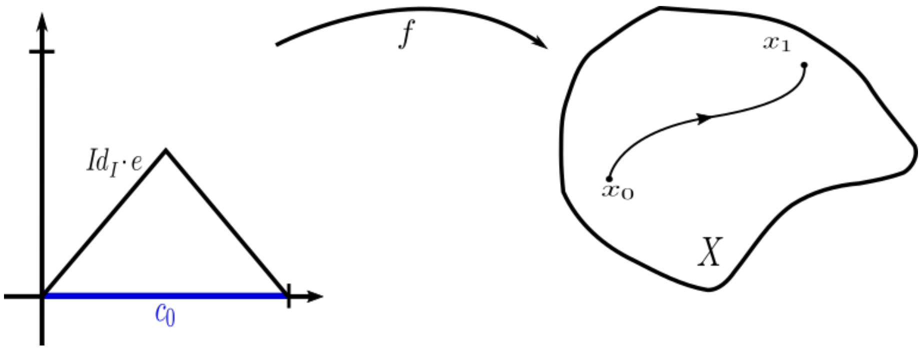


Figura 2.3

□

Definição 2.11. *Dado um espaço topológico X, um* **laço** *de X em $x \in X$ é um caminho em X iniciando em x e terminando em x, isto é, é um caminho f em X tal que $f(0) = f(1) = x$, também se diz que f é um caminho em X baseado em x. O conjunto de todos os laços em X baseado em x é chamado de grupo fundamental de X baseado em x e é denotado por $\pi_1(X, x)$.*

Note que, pelo Teorema 2.10, o conjunto $\pi_1(X, x)$ é de fato um grupo. Além disso, dado um caminho α em X de x_0 a x_1, podemos considerar uma aplicação entre os grupos $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ dado por $\varphi_\alpha([f]) = [\alpha^{-1}] \cdot [f] \cdot [\alpha]$.

Lema 2.12. *A aplicação $\varphi_\alpha : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ é um isomorfismo de grupos.*

Demonstração. Com efeito, dados $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$, temos que $\varphi_\alpha([f] \cdot [g]) = [\alpha^{-1}] \cdot ([f] \cdot [g]) \cdot [\alpha] = [\alpha^{-1}] \cdot ([f] \cdot [c_{x_0}]) \cdot [g] \cdot [\alpha] = [\alpha^{-1}] \cdot [f] \cdot [\alpha] \cdot [\alpha^{-1}] \cdot [g] \cdot [\alpha] = \varphi_\alpha([f]) \cdot \varphi_\alpha([g])$. Logo, φ_α é um homomorfismo de grupos.

Agora, considerando a aplicação $\varphi_{\alpha^{-1}} : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$ dado por $\varphi_{\alpha^{-1}}([h]) = [\alpha] \cdot [h] \cdot [\alpha^{-1}]$, obtemos,

$(\varphi_{\alpha^{-1}} \circ \varphi_\alpha)([f]) = \varphi_{\alpha^{-1}}(\varphi_\alpha([f])) = \varphi_{\alpha^{-1}}([\alpha^{-1}] \cdot [f] \cdot [\alpha]) = [\alpha] \cdot [\alpha^{-1}] \cdot [f] \cdot [\alpha] \cdot [\alpha^{-1}]$
$= [c_{x_0}] \cdot [f] \cdot [c_{x_0}] = [f]$, e
$(\varphi_\alpha \circ \varphi_{\alpha^{-1}})([h]) = \varphi_\alpha(\varphi_{\alpha^{-1}}([h])) = \varphi_\alpha([\alpha] \cdot [h] \cdot [\alpha^{-1}]) = [\alpha^{-1}] \cdot [\alpha] \cdot [h] \cdot [\alpha^{-1}] \cdot [\alpha]$
$= [c_{x_1}] \cdot [h] \cdot [c_{x_1}] = [h]$.

Logo, $\varphi_{\alpha^{-1}} \circ \varphi_\alpha = Id_{\pi_1(X, x_0)}$ e $\varphi_\alpha \circ \varphi_{\alpha^{-1}} = Id_{\pi_1(X, x_1)}$ e assim, $\varphi_\alpha : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ é uma bijeção e portanto é um isomorfismo de grupos. □

Note que para $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ serem isomorfos é suficiente que exista em X um caminho de x_0 para x_1, assim obtemos como um resultado imediato:

Corolário 2.13. *Se X é conexo por caminhos e $x_0, x_1 \in X$, então $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são isomorfos.*

Definição 2.14. *Um espaço topológico X é dito ser* **simplesmente conexo** *se ele for conexo por caminhos e se $\pi_1(X, x) = \{[c_x]\}$, para algum $x \in X$.*

Observação 2.15. *Se X é simplesmente conexo, obtemos do Corolário 2.13 que para todo $x \in X$, $\pi_1(X, x) = \{[c_x]\}$, ou seja, os grupos fundamentais em X são triviais.*

Lema 2.16. *Em um espaço simplesmente conexo X, qualquer dois caminhos que possuem o mesmo ponto inicial e final são homotópicos.*

Demonstração. Sejam $f, g : I \to X$ caminhos em X de x_0 para x_1. Uma vez que $f \cdot g^{-1}$ é um laço em x_0 e X é simplesmente conexo, segue que $[f \cdot g^{-1}] = [c_{x_0}]$. Assim,

$$[f] = [f] \cdot [c_{x_1}] = [f] \cdot [g^{-1}] \cdot [g] = [f \cdot g^{-1}] \cdot [g] = [c_{x_0}] \cdot [g] = [g].$$

Portanto, $f \simeq_p g$. □

Se X e Y são espaços topológicos, denotaremos por $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ uma aplicação de X em Y, tal que $h(x_0) = y_0$, com $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$.

Se $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ é uma aplicação contínua, dado $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ temos que $h \circ f : I \to Y$ é um caminho em Y satisfazendo $h(f(0)) = h(x_0) = h(f(1))$, isto é, $h \circ f$ é um laço em Y baseado em y_0. Além disso, pelo Lema 2.3, segue que $[h \circ f] = [h \circ g]$, para todo $g \in [f]$.

Dessa forma podemos definir uma aplicação induzida por h.

Definição 2.17. *Seja $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ uma aplicação contínua. A aplicação $h_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ dada por $h_*([f]) = [h \circ f]$ é chamada de* ***homomorfismo induzido*** *por h.*

Observação 2.18. *A aplicação h_* é de fato um homomorfismo entre os grupos $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(Y, y_0)$, pois dados $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$, temos que,*

$$h_*([f] \cdot [g]) = h_*([f \cdot g]) = [h \circ (f \cdot g)] = [(h \circ f) \cdot (h \circ g)] = [h \circ f] \cdot [h \circ g] = h_*([f]) \cdot h_*([g]).$$

Lema 2.19. *Se $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ e $k : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ são contínuas, então $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$. Se $i : (X, x_0) \to (X, x_0)$ é aplicação identidade, então i_* é o homomorfismo identidade.*

Demonstração. Tome $[f] \in \pi_1(X, x_0)$, logo $(k \circ h)_*([f]) = [k \circ h \circ f] = [k \circ (h \circ f)] = k_*([h \circ f]) = k_*(h_*([f])) = (k_* \circ h_*)([f])$. Como $[f]$ é arbitrário, segue que $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$. Além disso, $i_*([f]) = [i \circ f] = [f]$. Portanto, $i_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ é o homomorfismo identidade. □

Corolário 2.20. *Se $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ é um homeomorfismo de X em Y, então h_* é um isomorfismo de $\pi_1(X, x_0)$ em $\pi_1(Y, x_0)$.*

Demonstração. Por hipótese h é um homeomorfismo, dessa forma h possui inversa contínua. Considere $k : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ a inversa de h, mostremos que h_* é uma bijeção.

De fato, temos que $(k_* \circ h_*) = (k \circ h)_* = (i_X)_*$ e por outro lado $(h_* \circ k_*) = (h \circ k)_* = (i_Y)_*$, dessa forma ${h_*}^{-1} = k_*$. Portanto, h_* é um isomorfismo. □

3 ESPAÇOS DE RECOBRIMENTO

Os objetivos principais deste capítulo é demonstrar algumas propriedades de levantamento e a existência do recobrimento universal. O capítulo será dividido em cinco sessões. Na primeira sessão é definido aplicações de recobrimento e abordado algumas propriedades que decorrem da definição. Na segunda sessão defini-se levantamento e é demonstrado algumas propriedades de levantamento. A terceira e quarta sessões abordam grupo de recobrimento e homomorfismo de recobrimento. Por fim, na ultima sessão é demonstrado a existência do recobrimento universal.

3.1 ALGUMAS PROPRIEDADES BÁSICAS

Definição 3.1. *Sejam X e $\tilde{X}$ espaços topológicos e $p : \tilde{X} \to X$ uma aplicação contínua. Um subconjunto $U \subset X$ é dito ser* ***uniformemente recoberto*** *por p se U é aberto, conexo e cada componente de $p^{-1}(U)$ é um conjunto aberto que é aplicado homeomorficamente em U por p.*

Definição 3.2. *Uma* ***aplicação de recobrimento*** *é uma aplicação $p : \tilde{X} \to X$ contínua, sobrejetiva, com $\tilde{X}$ conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos, tal que cada ponto $q \in X$ tem uma vizinhança uniformemente recoberta por p.*

Se $p : \tilde{X} \to X$ é uma aplicação de recobrimento dizemos que $\tilde{X}$ é um ***espaço de recobrimento*** *de X e X é a base do recobrimento.*

A seguir apresentamos quatro propriedades diretas de uma aplicação de recobrimento.

Lema 3.3. *Toda aplicação de recobrimento é um homeomorfismo local.*

Demonstração. Seja $p : \tilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento. Tome $q \in \tilde{X}$, dessa forma $p(q) \in X$ e assim existe uma vizinhança U de $p(q)$ tal que cada componente conexa de $p^{-1}(U)$ é um aberto de $\tilde{X}$ que é aplicado homeomorficamente em U por p. Considere U_q a componente conexa de $p^{-1}(U)$ que contém q, logo $p|_{U_q} : U_q \to U$ é um homeomorfismo Portanto, toda aplicação de recobrimento é um homeomorfismo local. □

Lema 3.4. *Toda aplicação de recobrimento é uma aplicação aberta.*

Demonstração. De fato, seja $p : \tilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento e $A \subset \tilde{X}$ um subconjunto aberto. Tome $x \in p(A) \subset X$, dessa forma, existe uma vizinhança U de x tal que cada componente conexa de $p^{-1}(U)$ é um aberto de $\tilde{X}$ que é aplicada homeomorficamente em U por p. Seja $y \in A$, tal que $p(y) = x$ e seja U_α a componente conexa de $p^{-1}(U)$ que contém y. Como U_α é aberto, segue que $U_\alpha \cap A$ é um aberto em $\tilde{X}$, e assim, com a topologia do subespaço, $U_\alpha \cap A$ é um aberto em U_α e do fato de $p|_{U_\alpha} : U_\alpha \to U$ ser um homeomorfismo, segue que

$p(U_\alpha \cap A)$ é um aberto em $U \subset X$. Portanto $p(U_\alpha \cap A)$ é um aberto em X. Logo existe uma vizinhança $V = p(U_\alpha \cap A)$ de forma que $x \in V \subset p(A)$, assim $P(A)$ é aberto. □

Lema 3.5. *Toda aplicação de recobrimento é uma aplicação quociente.*

Demonstração. Seja $p : \tilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento, por definição p é contínua e sobrejetora e pelo Lema 3.4 p é aberta, logo pelo item **1** do Teorema 1.24, p é uma aplicação quociente. □

Lema 3.6. *Uma aplicação de recobrimento bijetora é um homeomorfismo.*

Demonstração. Segue pelo item **3** do Teorema 1.24. □

Definição 3.7. *Seja $\pi : M \to N$ uma aplicação contínua, uma* ***seção*** *de π é uma inversa à direita contínua para π, isto é, uma aplicação contínua $\sigma : N \to M$ tal que $\pi \circ \sigma = Id_N$.*

Uma ***seção local*** *de π é uma aplicação contínua $\sigma : U \to M$, definida em algum aberto $U \subset N$, satisfazendo $\pi \circ \sigma = Id_U$*

Lema 3.8 (Existência e Unicidade das seções locais)**.** *Seja $p : \tilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento. Dados qualquer subconjunto $U \subset X$ uniformemente recoberto, $q \in U$ e $\tilde{q} \in p^{-1}(q)$, então existe uma única seção local $\sigma : U \to \tilde{X}$ tal que $\sigma(q) = \tilde{q}$.*

Demonstração. Sejam $U \subset X$ um subconjunto uniformemente recoberto, $q \in U$ e $\tilde{q} \in p^{-1}(q)$. Logo cada componente conexa de $p^{-1}(U)$ é aplicada homeomorficamente em U por p. Considere $\tilde{U}$ a componente conexa de $p^{-1}(U)$ que contém $\tilde{q}$, dessa forma, $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to U$ é um homeomorfismo. Considere $\sigma = (p|_{\tilde{U}})^{-1} : U \to \tilde{U}$, note que σ é contínua, bijetora e $p|_{\tilde{U}} \circ \sigma = Id_U$. Portanto σ é uma seção local tal que $\sigma(q) = \tilde{q}$.

Suponha agora que $\sigma_1 : U \to \tilde{X}$ seja uma seção local de forma que $\sigma_1(q) = \tilde{q}$. Logo $(p \circ \sigma_1)(x) = x$, para todo $x \in U$, e disso segue que $\sigma_1(U) \subset p^{-1}(U)$. Como U é conexo, σ_1 é contínua e $\tilde{q} \in \sigma_1(U)$, então $\sigma_1(U)$ é conexo e $\sigma_1(U) \subset \tilde{U}$.

Mas $p|_{\tilde{U}} \circ \sigma_1 = Id|_U = p|_{\tilde{U}} \circ \sigma$ e $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to U$ é bijetora, logo $\sigma_1 = \sigma$. □

Ao longo do trabalho iremos utilizar a notação $\#$ para indicar a cardinalidade de um conjunto.

Proposição 3.9. *Para qualquer aplicação de recobrimento $p : \tilde{X} \to X$, todas as fibras $p^{-1}(q)$ têm a mesma cardinalidade.*

Demonstração. Tome $q \in X$, como p é aplicação de recobrimento, segue que existe uma vizinhança $U \subset X$ de q uniformemente recoberta por p.

Afirmação 1: Cada componente de $p^{-1}(U)$ contém exatamente um ponto de cada fibra de $p^{-1}(q')$ para todo $q' \in U$.

De fato, seja $\tilde{U}$ uma componente conexa de $p^{-1}(U)$, assim $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to U$ é um homeomorfismo, logo é uma bijeção, ou seja, para cada ponto $q' \in U$ existe um único ponto

$u \in \tilde{U}$ tal que $p(u) = q'$, isto é, cada componente conexa de $p^{-1}(U)$ pode ser identificada por um ponto na fibra de $p^{-1}(q')$, ou seja, existe uma bijeção do conjunto das componentes conexas de $p^{-1}(U)$ com os pontos da fibra de $p^{-1}(q')$.

Como q' é qualquer, temos que dados $q', q'' \in U$ segue que, $\#p^{-1}(q') = \#\{$ componentes conexas de $p^{-1}(U)\} = \#p^{-1}(q'')$.

Considere agora $A = \{x \in X; \#(p^{-1}(x)) = \#(p^{-1}(q))\}$.

Afirmação 2: A é aberto.

De fato, tome $q' \in A \subset X$, logo existe uma vizinhança $U_{q'}$ de q' tal que as componentes de $p^{-1}(U_{q'})$ são aplicadas homeomorficamente em $U_{q'}$ por p. Logo, pelo visto acima, para todo $x \in U_{q'}$ temos que $\#(p^{-1}(x)) = \#(p^{-1}(q')) = \#(p^{-1}(q))$, assim $U_{q'} \subset A$ e dessa forma

$$\bigcup_{q' \in A} U_{q'} \subset A \implies A = \bigcup_{q' \in A} U_{q'}.$$

Como A é união de abertos, segue que A é aberto.

Afirmação 3: $X \backslash A$ é aberto.

Para o caso $X \backslash A = \emptyset$ não há o que mostrar. Mostremos a afirmação para o caso $X \backslash A \neq \emptyset$.

Sejam $\overline{q} \in X \backslash A$ e $B = \{x \in X; \#p^{-1}(x) = \#p^{-1}(\overline{q})\}$. Prova-se que B é aberto de forma análoga ao feito para A. Assim, $x \in B$ implica que $\#p^{-1}(x) = \#p^{-1}(\overline{q}) \neq \#p^{-1}(q)$. Portanto $\overline{q} \in B \subset X \backslash A$, ou seja, $X \backslash A$ é aberto.

Uma vez que X é conexo temos que os únicos conjuntos que são abertos e fechados são o conjunto vazio e o próprio X, mas note que $A \neq \emptyset$ pois $q \in A$, logo $A = X$. $\square$

Definição 3.10. *Se $p : \tilde{X} \to X$ é uma aplicação de recobrimento, a cardinalidade de qualquer fibra é chamada de **número de folhas do recobrimento**.*

3.2 Propriedades de Levantamento

As principais ferramentas técnicas para trabalhar com espaços de recobrimento são as propriedades de levantamento. Apresentaremos nessa seção três propriedades de levantamento.

Definição 3.11. *Seja $p : \tilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento e $\varphi : B \to X$ uma aplicação contínua, um **levantamento** de φ é uma aplicação contínua $\tilde{\varphi} : B \to \tilde{X}$ tal que $p \circ \tilde{\varphi} = \varphi$.*

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"] \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowleft"] & X \end{tikzcd}$$

Figura 3.1

Proposição 3.12. *Seja $p : \tilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento. Suponha que B é conexo, $\varphi : B \to X$ é uma aplicação contínua e $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 : B \to \tilde{X}$ são levantamentos de φ que coincidem em algum ponto de B. Então $\tilde{\varphi}_1 \equiv \tilde{\varphi}_2$.*

Demonstração. Considere $S = \{b \in B; \tilde{\varphi}_1(b) = \tilde{\varphi}_2(b)\}$, mostremos que S é aberto e fechado em B.

Note que $S \neq \emptyset$ pois por hipótese $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ coincidem em algum ponto de S, sendo assim, tome $b \in S$, logo $\varphi(b) \in X$ e como p é uma aplicação se recobrimento, existe uma vizinhança $U \subset X$ de $\varphi(b)$ uniformemente recoberta por p. Seja U_0 a componente conexa de $p^{-1}(U)$ que contém $\tilde{\varphi}_1(b) = \tilde{\varphi}_2(b)$. Como $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ são aplicações contínuas temos que $\tilde{\varphi}_1{}^{-1}(U_0)$ e $\tilde{\varphi}_2{}^{-1}(U_0)$ são abertos em B, logo $V = \tilde{\varphi}_1{}^{-1}(U_0) \cap \tilde{\varphi}_2{}^{-1}(U_0)$ é uma vizinhança de b, tal que $\varphi|_V = p|_{U_0} \circ \tilde{\varphi}_1|_V = p|_{U_0} \circ \tilde{\varphi}_2|_V$. Como $p|_{U_0}$ é injetiva temos que $\tilde{\varphi}_1|_V = \tilde{\varphi}_2|_V$, assim S é aberto.

Mostremos agora que $B \backslash S$ é aberto.

Tome $b \in B\backslash S$. Logo $\tilde{\varphi}_1(b) \neq \tilde{\varphi}_2(b)$. Do fato de $b \in B$, temos que $\varphi(b) \in X$ e pela definição de aplicação de recobrimento temos que existe uma vizinhança U de $\varphi(b)$ uniformemente recoberta por p. Sejam U_1 e U_2 as componentes conexas que contém $\tilde{\varphi}_1(b)$ e $\tilde{\varphi}_2(b)$, respectivamente, de forma que $p|_{U_1} : U_1 \to U$ e $p|_{U_2} : U_2 \to U$ são homeomorfismos. Considerando $V = \tilde{\varphi}_1{}^{-1}(U_1) \cap \tilde{\varphi}_2{}^{-1}(U_2)$ uma vizinhança de b, temos que $\tilde{\varphi}_1 \neq \tilde{\varphi}_2$ em V, pois dado $v \in V$ segue que $\tilde{\varphi}_1(v) \in U_1$ e $\tilde{\varphi}_2(v) \in U_2$. Uma vez que U_1 e U_2 são disjuntas, temos que $\tilde{\varphi}_1(v) \neq \tilde{\varphi}_2(v)$. Logo $b \in V \subset B\backslash S$, assim S é fechado.

Uma vez que B é conexo, segue que os únicos conjuntos que são abertos e fechados são o conjunto vazio e o próprio B, como $S \neq \emptyset$ temos que $S = B$. □

Proposição 3.13. *(Levantamento de caminho) Seja $p : \tilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento. Suponha que $f : I \to X$ é um caminho qualquer e $\overline{q} \in \tilde{X}$ é um ponto na fibra de p sobre $f(0)$. Então existe um único levantamento $\tilde{f} : I \to \tilde{X}$ de f tal que $\tilde{f}(0) = \overline{q}$.*

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Figura 3.2

Demonstração. Mostraremos primeiro a existência.

Tome $t \in [0,1]$. Como p é uma aplicação de recobrimento, segue que existe uma vizinhança conexa $U_t := U_{f(t)}$ de $f(t)$ tal que cada componente conexa de $p^{-1}(U_t)$ é aplicada homeomorficamente em U_t por p. Para cada $t \in [0,1]$ considere a sua vizinhança $V_t = f^{-1}(U_t)$. Dessa forma $\{V_t\}_{t \in I}$ é uma cobertura aberta de $[0,1]$ o qual é compacto, e pelo Lema 1.26, existe $\delta > 0$ tal que para cada subconjunto $A \subset [0,1]$, se $d(A) < \delta$ então, $A \subset V_t$, para algum $t \in [0,1]$. Escolhendo n suficientemente grande de forma que $\frac{1}{n} < \delta$, para cada

$k \in \{1, \cdots, n\}$, $d\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right) = \frac{1}{n} < \delta$, e dessa forma existe $V'_k \in \{V_t\}_{t \in I}$, com $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right] \subset V'_k$. Assim, $f\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right) \subset f(V'_k) \subset U'_k \in \{U_t\}_{t \in I}$.

Note que $f\left(\frac{k}{n}\right) \in f\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right] \cap f\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \subset U'_k \cap U'_{k+1}$, para todo $k \in \{1, \cdots, n-1\}$. Além disso, dado $\overline{q} \in p^{-1}(f(0))$, como $f(0) \in U'_1$ segue pela Proposição 3.8 que existe uma única seção local $\sigma_1 : U'_1 \to \tilde{X}$ tal que $\sigma_1(f(0)) = \overline{q}$.

Definindo a aplicação $\tilde{f}_1 := \sigma_1 \circ f|_{\left[0, \frac{1}{n}\right]} : \left[0, \frac{1}{n}\right] \to \tilde{X}$, temos que $p \circ \tilde{f}_1 = p \circ \sigma_1 \circ f|_{\left[0, \frac{1}{n}\right]} = f|_{\left[0, \frac{1}{n}\right]}$, uma vez que $p \circ \sigma_1 = \mathrm{Id}_{U'_1}$.

O levantamento do caminho f em todo I será construído em cada subintervalo $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ a partir do levantamento de f no subintervalo anterior, isto é, ele sera construído como na seguinte afirmação:

Afirmação 1: Existem n funções contínuas $\tilde{f}_1 : \left[0, \frac{1}{n}\right] \to \tilde{X}, \cdots, \tilde{f}_k : \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right] \to \tilde{X}, \cdots, \tilde{f}_n : \left[\frac{n-1}{n}, 1\right] \to \tilde{X}$ tais que:

1. $p \circ \tilde{f}_k = f|_{\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]}$.

2. $\tilde{f}_{k-1}\left(\frac{k-1}{n}\right) = \tilde{f}_k\left(\frac{k-1}{n}\right)$.

Além disso, obtida a $(k-1)$-ésima função, existe uma única função $\tilde{f}_k$ satisfazendo **1** e **2**.

Mostraremos a afirmação pelo processo de indução.

- Para $k = 2$, seja $q_1 = \tilde{f}_1\left(\frac{1}{n}\right)$. Logo $p(q_1) = p\left(\tilde{f}_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) = p\left(\sigma_1\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = f\left(\frac{1}{n}\right)$, ou seja, $q_1 \in p^{-1}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, e assim, existe uma única seção local $\sigma_2 : U'_2 \to \tilde{X}$ tal que $\sigma_2\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right) = q_1$. Considere a aplicação contínua $\tilde{f}_2 := \sigma_2 \circ f|_{\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]} : \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \to \tilde{X}$. Assim $p \circ \tilde{f}_2 = p \circ \sigma_2 \circ f|_{\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]} = f|_{\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]}$, uma vez que $p \circ \sigma_2 = \mathrm{Id}_{U'_2}$, e $\tilde{f}_2\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\sigma_2 \circ f|_{\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]}\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \sigma_2\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right) = q_1 = \tilde{f}_1\left(\frac{1}{n}\right)$.

- Agora, suponha que a afirmação seja válida para $k-1$ e seja $\tilde{f}_{k-1} : \left[\frac{k-2}{n}, \frac{k-1}{n}\right] \to \tilde{X}$ satisfazendo **1** e **2**. Considere $q_{k-1} = \tilde{f}_{k-1}\left(\frac{k-1}{n}\right)$, logo $p(q_{k-1}) = p\left(\tilde{f}_{k-1}\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)$ e por **1** $p\left(\tilde{f}_{k-1}\left(\frac{k-1}{n}\right)\right) = f\left(\frac{k-1}{n}\right)$, assim $q_{k-1} \in p^{-1}\left(f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)$, logo existe uma seção local $\sigma_k : U'_k \to \tilde{X}$ tal que $\sigma_k\left(f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right) = q_{k-1}$. Defina a aplicação contínua $\tilde{f}_k := \sigma_k \circ f|_{\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]} : \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right] \to \tilde{X}$, logo $p \circ \tilde{f}_k = p \circ \sigma_k \circ f|_{\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]} = \mathrm{Id}_{U'_k} \circ f|_{\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]} = f|_{\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]}$ e $\tilde{f}_k\left(\frac{k-1}{n}\right) = \left(\sigma_k \circ f|_{\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]}\right)\left(\frac{k-1}{n}\right) = \sigma_k\left(f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right) = q_{k-1} = \tilde{f}_{k-1}\left(\frac{k-1}{n}\right)$. O que prova a afirmação.

Considere a aplicação $\tilde{f} : [0, 1] \to \tilde{X}$, definida por

$$\tilde{f}(t) := \begin{cases} \tilde{f}_1(t), & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{n}; \\ \vdots & \\ \tilde{f}_k(t), & \dfrac{k-1}{n} \leqslant t \leqslant \dfrac{k}{n}; \\ \vdots & \\ \tilde{f}_n(t), & \dfrac{n-1}{n} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Note que $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \cdots, \tilde{f}_n$ são aplicações contínuas. Logo pelo Teorema 1.25, segue que $\tilde{f}$ é contínua. Além disso, para cada $t \in [0,1]$, existe um $k \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ e $\left(p \circ \tilde{f}\right)(t) = p\left(\tilde{f}_k(t)\right) = p(\sigma_k(f(t))) = f(t)$. Logo $\tilde{f}$ é um levantamento de f.

Para mostrarmos a unicidade, considere $\tilde{g} : I \to \tilde{X}$ um levantamento de f tal que $\tilde{g}(0) = \overline{q} = \tilde{f}(0)$. Pela Proposição 3.12 segue que $\tilde{g} \equiv \tilde{f}$, pois $[0,1]$ é conexo. □

Proposição 3.14 (Levantamento de Homotopia)**.** *Seja $p : \tilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento e $H : f_0 \simeq_p f_1$ uma homotopia por caminhos de f_0 para f_1. Nessas condições, dado um levantamento $\tilde{f}_0$ de f_0, existe uma única aplicação contínua $\tilde{H} : I \times I \to \tilde{X}$ tal que $p \circ \tilde{H} = H$ e $\tilde{H}(0,0) = \tilde{f}_0(0)$.*

Demonstração. Seja $H : f_0 \simeq_p f_1$ uma homotopia por caminhos. Assim, para cada $(s,t) \in I \times I$, $H(s,t) \in X$ e (do fato de p ser uma aplicação de recobrimento) existe uma vizinhança $U_{(s,t)}$ de $H(s,t)$ que é uniformemente recoberta por p.

Para cada $(s,t) \in I \times I$, seja $V_{(s,t)} = H^{-1}(U_{(s,t)})$, logo $\{V_{(s,t)}; (s,t) \in I \times I\}$ é uma cobertura aberta do conjunto compacto $I \times I$ e $(s,t) \in V_{(s,t)}$. Seja então $\delta > 0$ o número de Lebesgue dessa cobertura (ver Lema 1.26). Assim, escolhendo n natural tal que $\frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$, segue que $d\left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]\right) = \frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$, $\forall i, j \in \{0, \cdots, n-1\}$. E disso segue que, $\forall i, j \in \{0, \cdots, n-1\}$, existe $V'_{(i,j)} \in \{V_{(s,t)}; (s,t) \in I \times I\}$ tal que $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \in V'_{(i,j)}$.

Para cada $i, j \in \{0, \cdots, n-1\}$, seja $U'_{(i,j)} \in \{U_{(s,t)}; (s,t) \in I \times I\}$ tal que $V'_{(i,j)} = H^{-1}(U_{(i,j)})$ e denotemos $S_{ij} := \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$. Logo $H(S_{ij}) \subset H(V'_{(i,j)}) \subset U'_{(i,j)}$, $\forall i, j \in \{0, \cdots, n-1\}$.

Temos que $f_0(0) = H(0,0) \in H(S_{00}) \subset U'_{(0,0)}$, assim considerando o levantamento $\tilde{f}_0$ de f_0 segue que $\left(p \circ \tilde{f}_0\right)(0) = f_0(0) = H(0,0)$, dessa forma $\tilde{f}_0(0) \in p^{-1}(f_0(0))$, assim pelo Lema 3.8, existe uma única seção local $\sigma_{(0,0)} : U'_{(0,0)} \to \tilde{X}$ tal que $\sigma_{(0,0)}(f_0(0)) = \tilde{f}_0(0)$.

Defina $\tilde{H}_{(0,0)} := \sigma_{(0,0)} \circ H|_{S_{00}} : S_{00} \to \tilde{X}$, logo $p \circ \tilde{H}_{(0,0)} = p \circ \sigma_{(0,0)} \circ H|_{S_{00}} = Id_{U'_{(0,0)}} \circ H|_{S_{00}} = H|_{S_{00}}$.

Afirmação 1: Existem funções $\tilde{H}_{(1,0)}, \tilde{H}_{(2,0)}, \cdots, \tilde{H}_{(n-1,0)}$, com $\tilde{H}_{(i,0)} : S_{i0} \to \tilde{X}$ satisfazendo:

1. $p \circ \tilde{H}_{(i,0)} = H|_{S_{i0}}$,
2. Para cada $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, $\tilde{H}_{(i,0)}\left(\frac{i}{n}, t\right) = \tilde{H}_{(i-1,0)}\left(\frac{i}{n}, t\right)$, $\forall t \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$.

Seja $q_{10} = \tilde{H}_{(0,0)}\left(\frac{1}{n}, 0\right)$, logo $p(q_{10}) = p\left(\tilde{H}_{(0,0)}\left(\frac{1}{n}, 0\right)\right) = H\left(\frac{1}{n}, 0\right) \in U'_{(1,0)}$, assim $q_{10} \in p^{-1}\left(H\left(\frac{1}{n}, 0\right)\right)$, então pelo Lema 3.8 existe uma única seção local $\sigma_{(1,0)} : U'_{(1,0)} \to \tilde{X}$ tal que $\sigma_{(1,0)}\left(H\left(\frac{1}{n}, 0\right)\right) = q_{10}$. Defina $\tilde{H}_{(1,0)} := \sigma_{(1,0)} \circ H|_{S_{10}} : S_{10} \to \tilde{X}$, observe que $p \circ \tilde{H}_{(1,0)} = p \circ \sigma_{(1,0)} \circ H|_{S_{10}} = Id_{U'_{(1,0)}} \circ H|_{S_{10}} = H|_{S_{10}}$.

Além disso, temos que $\tilde{H}_{(1,0)}\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \left(\sigma_{(1,0)} \circ H|_{S_{10}}\right)\left(\frac{1}{n}, 0\right)$
$= \sigma_{(1,0)}\left(H\left(\frac{1}{n}, 0\right)\right) = q_{10} = \tilde{H}_{(0,0)}\left(\frac{1}{n}, 0\right)$.

Agora, considere o conexo $B = \left\{\frac{1}{n}\right\} \times \left[0, \frac{1}{n}\right]$, assim $\tilde{H}_{(0,0)}|_B : B \to \tilde{X}$,

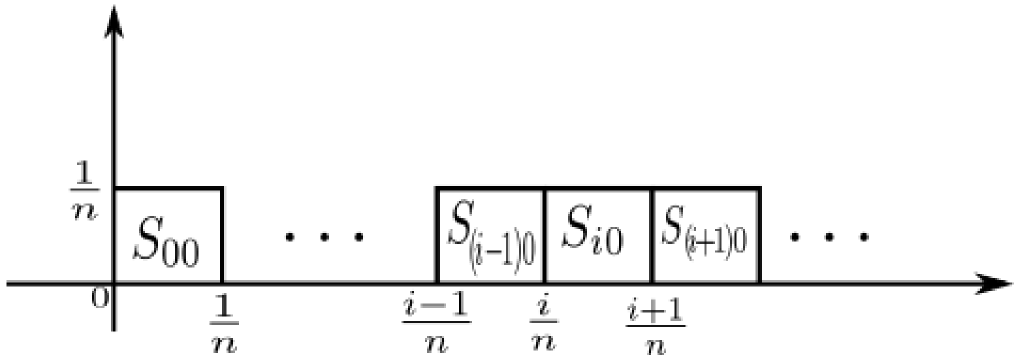


Figura 3.3

$\tilde{H}_{(1,0)}|_B : B \to \tilde{X}$, satisfazem $p \circ \tilde{H}_{(0,0)}|_B = H|_B = p \circ \tilde{H}_{(1,0)}|_B$, logo $\tilde{H}_{(0,0)}|_B$ e $\tilde{H}_{(1,0)|_B}$ são levantamentos de $H|_B$ que coincidem no ponto $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$. Pela Proposição 3.12, segue que $\tilde{H}_{(0,0)}|_B \equiv \tilde{H}_{(1,0)}|_B$. Portanto $\tilde{H}_{(0,0)}\left(\frac{1}{n}, t\right) = \tilde{H}_{(1,0)}\left(\frac{1}{n}, t\right)$, $\forall t \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$.

Suponha por indução que existam $\tilde{H}_{(1,0)}, \cdots, \tilde{H}_{(i-1,0)}$ satisfazendo **1** e **2** da Afirmação **1**. Mostremos que existe $\tilde{H}_{(i,0)}$ satisfazendo **1** e **2** da Afirmação **1**.

Considere $q_{i0} = \tilde{H}_{(i-1,0)}\left(\frac{i}{n}, 0\right)$, logo $p(q_{i0}) = p\left(\tilde{H}_{(i-1,0)}\left(\frac{i}{n}, 0\right)\right) = H(\frac{i}{n}, 0)$ $\in U'_{(i,0)}$ e assim $q_{i0} \in p^{-1}\left(H\left(\frac{i}{n}, 0\right)\right)$, então (pelo Lema 3.8) existe uma única seção local $\sigma_{(i,0)} : U'_{(i,0)} \to \tilde{X}$ tal que $\sigma_{(i,0)}\left(H\left(\frac{1}{n}, 0\right)\right) = q_{i0}$. Defina $\tilde{H}_{(i,0)} := \sigma_{(i,0)} \circ H|_{S_{i0}} : S_{i0} \to \tilde{X}$, logo $p \circ \tilde{H}_{(i,0)} = p \circ \sigma_{(i,0)} \circ H|_{S_{i0}} = Id_{U'_{(i,0)}} \circ H|_{S_{i0}} = H|_{S_{i0}}$.

Além disso, considerando o conexo $B = \left\{\frac{i}{n}\right\} \times \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $\tilde{H}_{(i-1,0)}|_B : B \to \tilde{X}, \tilde{H}_{(i,0)}|_B : B \to \tilde{X}$, que satisfaz $p \circ \tilde{H}_{(i-1,0)}|_B = H|_B = p \circ \tilde{H}_{(i,0)}|_B$, segue que $\tilde{H}_{(i-1,0)}|_B$ e $\tilde{H}_{(i,0)|_B}$ são levantamentos de $H|_B$ mas $\tilde{H}_{(i,0)}\left(\frac{i}{n}, 0\right) = (\sigma_{(i,0)} \circ H|_{S_{i0}})\left(\frac{i}{n}, 0\right) = \sigma_{(i,0)}\left(H\left(\frac{i}{n}, 0\right)\right)$ $= q = \tilde{H}_{(i-1,0)}\left(\frac{i}{n}, 0\right)$. Portanto, pela Proposição 3.12, segue que $\tilde{H}_{(i-1,0)}|_B = \tilde{H}_{(i,0)}|_B$. Logo a Afirmação 1 é verificada.

Afirmação 2: Existem funções $\tilde{H}_{(0,1)}, \tilde{H}_{(0,2)}, \cdots, \tilde{H}_{(0,n-1)}$, com $\tilde{H}_{(0,j)} : S_{0j} \to \tilde{X}$ satisfazendo:

1. $p \circ \tilde{H}_{(0,j)} = H|_{S_{0j}}$,

2. Para cada $j \in \{1, \cdots, n-1\}$ temos que $\tilde{H}_{(0,j)}\left(t, \frac{j}{n}\right) = \tilde{H}_{(0,j-1)}\left(t, \frac{j}{n}\right)$ $\forall t \in [0, \frac{1}{n}]$.

Primeiro faremos o caso em que $j = 1$.

Considere $q_{01} = \tilde{H}_{(0,0)}\left(0, \frac{1}{n}\right)$, dessa forma $p(q_{01}) = p\left(\tilde{H}_{(0,0)}\left(0, \frac{1}{n}\right)\right) =$ $H\left(0, \frac{1}{n}\right) \in U'_{(0,1)}$, logo $q_{01} \in p^{-1}\left(H\left(0, \frac{1}{n}\right)\right)$, então, pelo Lema 3.8, existe uma única seção local $\sigma_{(0,1)} : U'_{(0,1)} \to \tilde{X}$ tal que $\sigma_{(0,1)}\left(H\left(0, \frac{1}{n}\right)\right) = q_{01}$. Defina $\tilde{H}_{(0,1)} := \sigma_{(0,1)} \circ H|_{S_{01}} : S_{01} \to \tilde{X}$. Note que $p \circ \tilde{H}_{(0,1)} = p \circ \sigma_{(0,1)} \circ H|_{S_{01}} = Id_{U'_{(0,1)}} \circ H|_{S_{01}} = H|_{S_{01}}$.

Dado o conexo $B = \left[0, \frac{1}{n}\right] \times \left\{\frac{1}{n}\right\}$, temos que $p \circ \tilde{H}_{(0,1)}|_B = H|_B = p \circ \tilde{H}_{(0,0)}|_B$, além disso $\tilde{H}_{(0,1)}\left(0, \frac{1}{n}\right) = (\sigma_{(0,1)} \circ H|_{S_{01}})\left(0, \frac{1}{n}\right) = \sigma_{(0,1)}\left(H\left(0, \frac{1}{n}\right)\right) = q_{01} = \tilde{H}_{(0,0)}\left(0, \frac{1}{n}\right)$. Logo, pela Proposição 3.12, segue que $\tilde{H}_{(0,0)}|_B \equiv \tilde{H}_{(0,1)}|_B$.

Suponha por indução que existam $\tilde{H}_{(0,1)}, \cdots, \tilde{H}_{(0,j-1)}$ satisfazendo os itens **1** e **2** da Afirmação **2**. Mostremos que existe $\tilde{H}_{(0,j)}$ satisfazendo os itens **1** e **2** da Afirmação **2**.

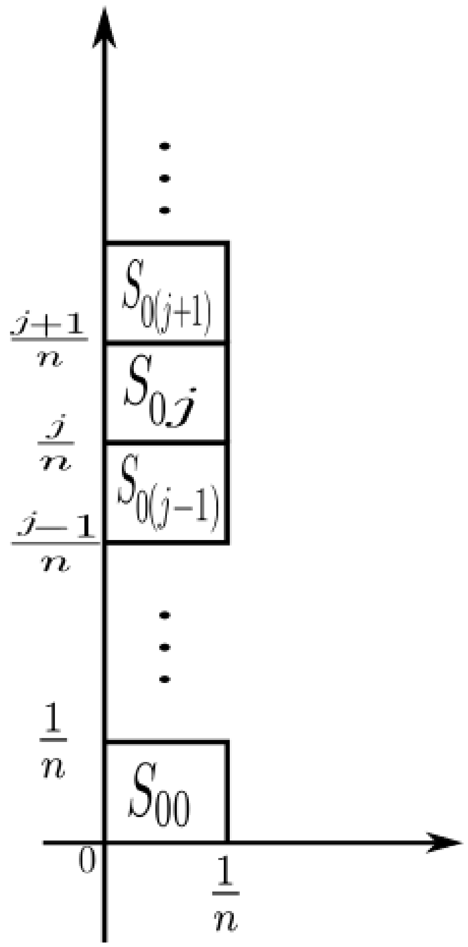


Figura 3.4

Seja $q_{0j} = \tilde{H}_{(0,j-1)}\left(0, \frac{j}{n}\right)$, logo $p(q_{0j}) = p\left(\tilde{H}_{(0,j-1)}\left(0, \frac{j}{n}\right)\right) = H(0, \frac{j}{n}) \in U'_{(0,j)}$ e assim $q_{0j} \in p^{-1}\left(H\left(0, \frac{j}{n}\right)\right)$, então, pelo Lema 3.8, existe uma única seção local $\sigma_{(0,j)} : U'_{(0,j)} \to \tilde{X}$ tal que $\sigma_{(o,j)}\left(H\left(0, \frac{j}{n}\right)\right) = q_{0j}$.

Defina $\tilde{H}_{(0,j)} := \sigma_{(0,j)} \circ H|_{S_{0j}} : S_{0j} \to \tilde{X}$, assim $p \circ \tilde{H}_{(0,j)} = p \circ \sigma_{(0,j)} \circ H|_{S_{0j}} = H|_{S_{0j}}$.

Considere o conexo $B = \left[0, \frac{1}{n}\right] \times \left\{\frac{j}{n}\right\}$, logo $p \circ \tilde{H}_{(0,j-1)}|_B = H|_B = p \circ \tilde{H}_{(0,j)}|_B$ e $\tilde{H}_{(0,j)}\left(0, \frac{j}{n}\right) = (\sigma_{(0,j)} \circ H|_{S_{0j}})\left(0, \frac{j}{n}\right) = q_{0j} = \tilde{H}_{(0,j-1)}\left(0, \frac{j}{n}\right)$. Portanto, pela Proposição 3.12, segue que $\tilde{H}_{(0,j-1)}|_B \equiv \tilde{H}_{(0,j)}|_B$. Isso prova a **Afirmação 2**.

Por fim, mostremos a afirmação.

Afirmação 3: Para cada $j \in \{1, \cdots, n-1\}$ existem funções $\tilde{H}_{(1,j)}, \tilde{H}_{(2,j)}, \cdots, \tilde{H}_{(n-1,j)}$, com $\tilde{H}_{(i,j)} : S_{ij} \to \tilde{X}$ satisfazendo:

1. $p \circ \tilde{H}_{(i,j)} = H|_{S_{ij}}$,

2. $\tilde{H}_{(i,j)}\left(\frac{i}{n}, t\right) = \tilde{H}_{(i-1,j)}\left(\frac{i}{n}, t\right), \forall t \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$,

3. $\tilde{H}_{(i,j)}\left(t, \frac{j}{n}\right) = \tilde{H}_{(i,j-1)}\left(t, \frac{j}{n}\right), \forall t \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$.

Para $j = 1$:

Seja $q_{11} = \tilde{H}_{(0,1)}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, logo $p(q_{11}) = p\left(\tilde{H}_{(0,1)}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right) = H\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \in U'_{(1,1)}$, assim $q_{11} \in p^{-1}\left(H\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right)$, então, pelo Lema 3.8, existe uma única seção local $\sigma_{(1,1)} : U'_{(1,1)} \to \tilde{X}$ tal que $\sigma_{(1,1)}\left(H\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right) = q_{11}$. Defina $\tilde{H}_{(1,1)} := \sigma_{(1,1)} \circ H|_{S_{11}} : S_{11} \to \tilde{X}$, observe que $p \circ \tilde{H}_{(1,1)} = p \circ \sigma_{(1,1)} \circ H|_{S_{11}} = Id_{U'_{(1,1)}} \circ H|_{S_{11}} = H|_{S_{11}}$.

Além disso, temos que $\tilde{H}_{(1,1)}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \left(\sigma_{(1,1)} \circ H|_{S_{11}}\right)\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $= \sigma_{(1,1)}\left(H\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right) = q_{11} = \tilde{H}_{(0,1)}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$.

Agora, considere o conexo $B = \left\{\frac{1}{n}\right\} \times \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$, assim $\tilde{H}_{(0,1)}|_B : B \to \tilde{X}, \tilde{H}_{(1,1)}|_B : B \to \tilde{X}$ satisfazem $p \circ \tilde{H}_{(0,1)}|_B = H|_B = p \circ \tilde{H}_{(1,1)}|_B$, logo $\tilde{H}_{(0,1)}|_B$ e $\tilde{H}_{(1,1)|_B}$ são levantamentos de $H|_B$ que coincidem no ponto $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Pela Proposição 3.12, segue que $\tilde{H}_{(0,1)}|_B \equiv \tilde{H}_{(1,1)}|_B$. Portanto $\tilde{H}_{(0,1)}\left(\frac{1}{n}, t\right) = \tilde{H}_{(1,1)}\left(\frac{1}{n}, t\right)\ \forall t \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$.

Pela **Afirmação 1** temos que $\tilde{H}_{(1,0)}$ coincide com $\tilde{H}_{(0,0)}$ no conexo $S_{00} \cap S_{10}$, e em particular, $\tilde{H}_{(1,0)}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \tilde{H}_{(0,0)}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Pela **Afirmação 2** temos que, $\tilde{H}_{(0,1)}$ coincide com $\tilde{H}_{(0,0)}$ em todo conexo $S_{01} \cap S_{00}$, e em particular $\tilde{H}_{(0,1)}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \tilde{H}_{0,0}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Assim $\tilde{H}_{(1,1)}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \tilde{H}_{(1,0)}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, como $p \circ \tilde{H}_{(1,1)} = H|_{S_{11}}$ e $p \circ \tilde{H}_{(1,0)} = H|_{S_{10}}$, segue que $p \circ \tilde{H}_{(1,1)}|_A = H|_A = p \circ \tilde{H}_{(1,0)}|_A$, onde $A = S_{11} \cap S_{10}$ é conexo. Pelo Lema 3.12, segue que $\tilde{H}_{(1,1)}\left(t, \frac{1}{n}\right) = \tilde{H}_{(1,0)}\left(t, \frac{1}{n}\right), \forall t \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$.

Suponha por indução que existam $\tilde{H}_{(1,1)}, \cdots, \tilde{H}_{(i-1,1)}$ satisfazendo **1**, **2** e **3** da Afirmação **3**. Mostremos que existe $\tilde{H}_{(i,1)}$ satisfazendo **1**, **2** e **3** da Afirmação **3**.

Considere $q_{i1} = \tilde{H}_{(i-1,1)}\left(\frac{i}{n}, \frac{1}{n}\right)$, logo $p(q_{i1}) = p\left(\tilde{H}_{(i-1,1)}\left(\frac{i}{n}, \frac{1}{n}\right)\right)$ $= H\left(\frac{i}{n}, \frac{1}{n}\right) \in U'_{(i,1)}$ e assim $q_{i1} \in p^{-1}\left(H\left(\frac{i}{n}, \frac{1}{n}\right)\right)$, então (pelo Lema 3.8) existe uma única seção local $\sigma_{(i,1)} : U'_{(i,1)} \to \tilde{X}$ tal que $\sigma_{(i,1)}\left(H\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right) = q_{i1}$. Defina $\tilde{H}_{(i,1)} := \sigma_{(i,1)} \circ H|_{S_{ij}} : S_{i1} \to \tilde{X}$, logo $p \circ \tilde{H}_{(i,1)} = p \circ \sigma_{(i,1)} \circ H|_{S_{i1}} = Id_{U'(i,1)} \circ H|_{S_{i1}} = H|_{S_{i1}}$.

Além disso, considerando o conexo $B = \left\{\frac{i}{n}\right\} \times \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$, $\tilde{H}_{(i-1,1)}|_B : B \to \tilde{X}, \tilde{H}_{(i,1)}|_B : B \to \tilde{X}$ que satisfaz $p \circ \tilde{H}_{(i-1,1)}|_B = H|_B = p \circ \tilde{H}_{(i,1)}|_B$, segue que $\tilde{H}_{(i-1,1)}|_B$ e $\tilde{H}_{(i,1)|_B}$ são levantamentos de $H|_B$ mas $\tilde{H}_{(i,1)}\left(\frac{i}{n}, \frac{1}{n}\right) = \left(\sigma_{(i,1)} \circ H|_{S_{i1}}\right)\left(\frac{i}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $= \sigma_{(i,1)}\left(H\left(\frac{i}{n}, \frac{1}{n}\right)\right) = q_{i1} = \tilde{H}_{(i-1,1)}\left(\frac{i}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Portanto, pela Proposição 3.12, segue que $\tilde{H}_{(i-1,1)}|_B = \tilde{H}_{(i,1)}|_B$.

Segue da **Afirmação 1** que $\tilde{H}_{(i,0)}$ coincide com $\tilde{H}_{(i-1,0)}$ no conexo $S_{(i-1)0} \cap S_{i0}$, e em particular, $\tilde{H}_{(i,0)}\left(\frac{i}{n}, \frac{1}{n}\right) = \tilde{H}_{(i-1,0)}\left(\frac{i}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Assumindo que a afirmação é válida para $j = 1$ e $i - 1$, temos que, $\tilde{H}_{(i-1,1)}$ coincide com $\tilde{H}_{(i-1,0)}$ em todo conexo $S_{(i-1)1} \cap S_{(i-1)0}$, e em particular $\tilde{H}_{(i-1,1)}\left(\frac{i}{n}, \frac{1}{n}\right) = \tilde{H}_{i-1,0}\left(\frac{i}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Assim $\tilde{H}_{(i,1)}\left(\frac{i}{n}, \frac{1}{n}\right) = \tilde{H}_{(i,0)}\left(\frac{i}{n}, \frac{1}{n}\right)$, como $p \circ \tilde{H}_{(i,1)} = H|_{S_{i1}}$ e $p \circ \tilde{H}_{(i,0)} = H|_{S_{i0}}$, segue que $p \circ \tilde{H}_{(i,1)}|_A = H|_A = p \circ \tilde{H}_{(i,0)}|_A$, onde $A = S_{i1} \cap S_{i0}$ que é conexo. Pelo Lema 3.12, segue que $\tilde{H}_{(i,1)}\left(t, \frac{1}{n}\right) = \tilde{H}_{(i,0)}\left(t, \frac{1}{n}\right), \forall t \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$, o que completa a afirmação para a linha $j = 1$.

Suponha agora que existam $\tilde{H}_{(1,1)}, \cdots, \tilde{H}_{(n-1,1)}, \tilde{H}_{(1,2)}, \cdots, \tilde{H}_{(n-1,2)}, \cdots, \tilde{H}_{(1,j-1)}, \cdots, \tilde{H}_{(n-1,j-1)}$, satisfazendo **1**, **2** e **3** da Afirmação **3**. Mostremos que existem aplicações $\tilde{H}_{(1,j)}, \cdots, \tilde{H}_{(n-1,j)}$ satisfazendo **1**, **2** e **3** da Afirmação **3**.

Para $i = 1$ temos que

Seja $q_{1j} = \tilde{H}_{(0,j)}\left(\frac{1}{n}, \frac{j}{n}\right)$, logo $p(q_{1j}) = p\left(\tilde{H}_{(0,j)}\left(\frac{1}{n}, \frac{j}{n}\right)\right) = H\left(\frac{1}{n}, \frac{j}{n}\right) \in$

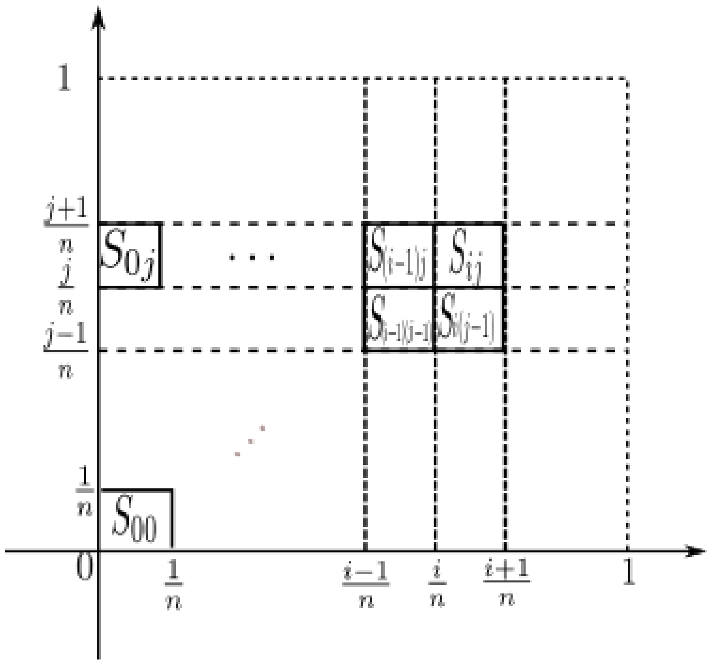


Figura 3.5

$U'_{(1,j)}$, assim $q_{1j} \in p^{-1}\left(H\left(\frac{1}{n}, \frac{j}{n}\right)\right)$. Pelo Lema 3.8, existe uma única seção local $\sigma_{(1,j)} : U'_{(1,j)} \to \tilde{X}$ tal que $\sigma_{(1,j)}\left(H\left(\frac{1}{n}, \frac{j}{n}\right)\right) = q_{1j}$. Defina $\tilde{H}_{(1,j)} := \sigma_{(1,j)} \circ H|_{S_{1j}} : S_{1j} \to \tilde{X}$, observe que $p \circ \tilde{H}_{(1,j)} = p \circ \sigma_{(1,j)} \circ H|_{S_{1j}} = Id_{U'_{(1,j)}} \circ H|_{S_{1j}} = H|_{S_{1j}}$.

Além disso, $\tilde{H}_{(1,j)}\left(\frac{1}{n}, \frac{j}{n}\right) = \left(\sigma_{(1,j)} \circ H|_{S_{1j}}\right)\left(\frac{1}{n}, \frac{j}{n}\right) = \sigma_{(1,j)}\left(H\left(\frac{1}{n}, \frac{j}{n}\right)\right) = q_{1j} = \tilde{H}_{(0,j)}\left(\frac{1}{n}, \frac{j}{n}\right)$.

Agora, considere o conexo $B = \left\{\frac{1}{n}\right\} \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$, assim $\tilde{H}_{(0,j)}|_B : B \to \tilde{X}, \tilde{H}_{(1,j)}|_B : B \to \tilde{X}$ $p \circ \tilde{H}_{(0,j)}|_B = H|_B = p \circ \tilde{H}_{(1,j)}|_B$, logo $\tilde{H}_{(0,j)}|_B$ e $\tilde{H}_{(1,j)|_B}$ são levantamentos de $H|_B$ que coincidem no ponto $\left(\frac{1}{n}, \frac{j}{n}\right)$. Pela Proposição 3.12, segue que $\tilde{H}_{(0,j)}|_B \equiv \tilde{H}_{(1,j)}|_B$. Portanto $\tilde{H}_{(0,j)}\left(\frac{1}{n}, t\right) = \tilde{H}_{(1,j)}\left(\frac{1}{n}, t\right)$ $\forall t \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$.

Uma vez que a afirmação é válida para $\tilde{H}_{(i,j-1)}$, $i = 1, \cdots, n-1$, temos que $\tilde{H}_{(1,j-1)}$ coincide com $\tilde{H}_{(0,j-1)}$ no conexo $S_{0(j-1)} \cap S_{1(j-1)}$, e em particular, $\tilde{H}_{(1,j-1)}\left(\frac{1}{n}, \frac{j}{n}\right) = \tilde{H}_{(0,j-1)}\left(\frac{1}{n}, \frac{j}{n}\right)$. Pela Afirmação **2** temos que, $\tilde{H}_{(0,j)}$ coincide com $\tilde{H}_{(0,j-1)}$ em todo conexo $S_{0j} \cap S_{0(j-1)}$, e em particular $\tilde{H}_{(0,j)}\left(\frac{1}{n}, \frac{j}{n}\right) = \tilde{H}_{0,j-1}\left(\frac{1}{n}, \frac{j}{n}\right)$. Assim $\tilde{H}_{(1,j)}\left(\frac{1}{n}, \frac{j}{n}\right) = \tilde{H}_{(1,j-1)}\left(\frac{1}{n}, \frac{j}{n}\right)$, como $p \circ \tilde{H}_{(1,j)} = H|_{S_{1j}}$ e $p \circ \tilde{H}_{(1,j-1)} = H|_{S_{1(j-1)}}$, segue que $p \circ \tilde{H}_{(1,j)}|_A = H|_A = p \circ \tilde{H}_{(1,j-1)}|_A$, onde $A = S_{1j} \cap S_{1(j-1)}$ é conexo. Pelo Lema 3.12, segue que $\tilde{H}_{(1,j)}\left(t, \frac{j}{n}\right) = \tilde{H}_{(1,j-1)}\left(t, \frac{j}{n}\right)$, $\forall t \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$.

Por fim, suponha que existam $\tilde{H}_{(1,1)}, \cdots, \tilde{H}_{(n-1,1)}, \tilde{H}_{(1,2)}, \cdots, \tilde{H}_{(n-1,2)}, \cdots, \tilde{H}_{(1,j-1)}, \cdots, \tilde{H}_{(n-1,j-1)}, \tilde{H}_{(1,j)}, \cdots, \tilde{H}_{(i-1,j)}$ satisfazendo **1**, **2** e **3** da Afirmação **3**. Mostremos que existe $\tilde{H}_{(i,j)}$ satisfazendo **1**, **2** e **3** da Afirmação **3**..

Seja $q_{ij} = \tilde{H}_{(i-1,j)}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$, logo $p(q_{ij}) = p\left(\tilde{H}_{(i-1,j)}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)\right) = H\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) \in U'_{(i,j)}$ e assim $q_{ij} \in p^{-1}\left(H\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)\right)$. Pelo Lema 3.8, existe uma única seção local $\sigma_{(i,j)} : U'_{(i,j)} \to \tilde{X}$ tal que $\sigma_{(i,j)}\left(H\left(\frac{1}{n}, \frac{j}{n}\right)\right) = q_{ij}$. Defina $\tilde{H}_{(i,j)} := \sigma_{(i,j)} \circ H|_{S_{ij}} : S_{ij} \to \tilde{X}$, logo $p \circ \tilde{H}_{(i,j)} = p \circ \sigma_{(i,j)} \circ H|_{S_{ij}} = Id_{U'(i,j)} \circ H|_{S_{ij}} = H|_{S_{ij}}$.

Além disso, considerando o conexo $B = \left\{\frac{i}{n}\right\} \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$, $\tilde{H}_{(i-1,j)}|_B : B \to \tilde{X}$, $\tilde{H}_{(i,j)}|_B : B \to \tilde{X}$ que satisfaz $p \circ \tilde{H}_{(i-1,j)}|_B = H|_B = p \circ \tilde{H}_{(i,j)}|_B$, segue que $\tilde{H}_{(i-1,j)}|_B$ e $\tilde{H}_{(i,j)|_B}$ são levantamentos de $H|_B$ mas $\tilde{H}_{(i,j)}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = (\sigma_{(i,j)} \circ H|_{S_{ij}})\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \sigma_{(i,j)}\left(H\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)\right) = q_{ij} = \tilde{H}_{(i-1,j)}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$. Portanto (pela Proposição 3.12) $\tilde{H}_{(i-1,j)}|_B = \tilde{H}_{(i,j)}|_B$.

Como a afirmação é válida para $\tilde{H}_{(i,j-1)}$, temos que $\tilde{H}_{(i,j-1)}$ coincide com $\tilde{H}_{(i-1,j-1)}$ no conexo $S_{(i-1)(j-1)} \cap S_{i(j-1)}$, e em particular, $\tilde{H}_{(i,j-1)}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \tilde{H}_{(i-1,j-1)}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$. Assumindo que para $\tilde{H}_{(i-1,j)}$ a afirmação é válida, temos que, $\tilde{H}_{(i-1,j)}$ coincide com $\tilde{H}_{(i-1,j-1)}$ em todo conexo $S_{(i-1)j} \cap S_{(i-1)(j-1)}$, em particular $\tilde{H}_{(i-1,j)}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \tilde{H}_{i-1,j-1}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$. E assim $\tilde{H}_{(i,j)}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \tilde{H}_{(i,j-1)}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$. Como $p \circ \tilde{H}_{(i,j)} = H|_{S_{ij}}$ e $p \circ \tilde{H}_{(i,j-1)} = H|_{S_{i(j-1)}}$, segue que $p \circ \tilde{H}_{(i,j)}|_A = H|_A = p \circ \tilde{H}_{(i,j-1)}|_A$, onde $A = S_{ij} \cap S_{i(j-1)}$ que é conexo. Pelo Lema 3.12, segue que $\tilde{H}_{(i,j)}\left(t, \frac{j}{n}\right) = \tilde{H}_{(i,j-1)}\left(t, \frac{j}{n}\right)$, $\forall t \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$, o que completa a Afirmação **3**.

Considere a aplicação $\tilde{H} : I \times I \to X$, definida por $\tilde{H}((s,t)) = \tilde{H}_{(i,j)}(s,t)$, se $(s,t) \in S_{ij}$. Uma vez que as **Afirmações** foram verificadas, segue do Lema 1.25 que $\tilde{H}$ está bem definida e é contínua, sendo $p \circ \tilde{H} = H$, o que mostra a existência do levantamento.

Seja agora $\overline{H} : I \times I \to \tilde{X}$, um levantamento de H tal que $\overline{H}(0,0) = \tilde{f}_0(0)$. Assim, $\overline{H}(0,0) = \tilde{H}(0,0)$ e $I \times I$ é conexo, então $\overline{H} = \tilde{H}$, pela Proposição 3.12. □

Corolário 3.15 (Levantamento de caminhos homotópicos)**.** *Seja $p : \tilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento. Suponha que $H : f_0 \simeq_p f_1$ seja uma homotopia por caminhos de f_0 para f_1 e que $\tilde{f}_0$ e $\tilde{f}_1$sejam levantamentos de f_0 e f_1, respectivamente, tais que $\tilde{f}_0(0) = \tilde{f}_1(0)$. Nessas condições, existe um único levantamento $\tilde{H}$ de H tal que $\tilde{H} : \tilde{f}_0 \simeq_p \tilde{f}_1$.*

Demonstração. Sejam f_0, f_1 caminhos homotópicos e $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1$ levantamentos de f_0 e f_1, respectivamente, de forma que $\tilde{f}_0(0) = \tilde{f}_1(0)$ e seja $H : f_0 \simeq_p f_1$ uma homotopia de caminhos de f_0 para f_1, ou seja, $H(s,0) = f_0(s), H(s,1) = f_1(s), H(0,t) = f_0(0) = f_1(0)$ e $H(1,t) = f_0(1) = f_1(1)$.

Pelo Teorema 3.15, existe um único levantamento $\tilde{H}$ de H tal que $\tilde{H}(0,0) = \tilde{f}_0(0)$. Para cada $t \in I$, seja $\tilde{H}_t : I \to \tilde{X}$ dada por $\tilde{H}_t(s) = \tilde{H}(s,t)$.

Assim, para $t = 0$ temos que $\left(p \circ \tilde{H}_0\right)(s) = \left(p \circ \tilde{H}\right)(s,0) = H(s,0) = f_0(s)$, dessa forma, $\tilde{H}_0$ é um levantamento de f_0 e além disso (pelo Teorema 3.14) $\tilde{H}_0(0) = \tilde{H}(0,0) = \tilde{f}_0(0)$, assim (pela Proposição 3.12) segue que $\tilde{f}_0(s) = \tilde{H}_0(s) = \tilde{H}(s,0)$, para todo $s \in I$.

Agora, para cada s defina a aplicação $\tilde{h}_s : I \to \tilde{X}$ dada por $\tilde{h}_s(t) = \tilde{H}(s,t)$.

Para $s = 0$, $\left(p \circ \tilde{h}_0\right)(t) = \left(p \circ \tilde{H}\right)(0,t) = H(0,t) = f_0(0) = f_1(0)$, dessa forma, $\tilde{h}_0$ é um levantamento do laço constante $c_{f_0(0)} = c_{f_1(0)}$. Em particular, para $s = t = 0$ segue $\tilde{h}_0(0) = \tilde{H}(0,0) = \tilde{f}_0(0) = \tilde{f}_1(0)$. Como $c_{\tilde{f}_0(0)} = c_{\tilde{f}_1(0)}$ também é um levantamento do laço constante $c_{f_0(0)} = c_{f_1(0)}$, e $\tilde{h}_0(0) = c_{\tilde{f}_0(0)}$, então (pelo Teorema 3.12) segue que $\tilde{h}_0(t) = c_{\tilde{f}_0}(0)$, $\forall t \in I$. Logo $\tilde{H}(0,t) = \tilde{f}_0(0)$, $\forall t \in I$.

Considerando $t = 1$ temos que $\left(p \circ \tilde{H}_1\right)(s) = \left(p \circ \tilde{H}\right)(s,1) = H(s,1) =$

$f_1(s)$, dessa forma, $\tilde{H}_1$ é um levantamento de f_1. Como $\forall t \in I$, $\tilde{H}(0,t) = \tilde{f}_1(0)$, em particular, $\tilde{H}_1(0) = \tilde{H}(0,1) = \tilde{f}_1(0)$, assim, pela Proposição 3.12, $\tilde{f}_1(s) = \tilde{H}_1(s) = \tilde{H}(s,1)$, $\forall s \in I$.

Por fim, para $s = 1$, $\left(p \circ \tilde{h}_1\right)(t) = \left(p \circ \tilde{H}\right)(1,t) = H(1,t) = f_0(1) = f_1(1)$, dessa forma $p \circ \tilde{h}_1 = c_{f_0(1)} = p \circ c_{\tilde{f}_0(1)}$. Mas $\tilde{h}_1(0) = \tilde{H}(1,0) = \tilde{H}_0(1) = \tilde{f}_0(1) = c_{\tilde{f}_0(1)}(0)$, assim $\tilde{h}_1$ e $c_{\tilde{f}_0(1)}$ são levantamentos de $c_{f_0(1)}$ que coincidem no ponto $t = 0$, logo, pela Proposição 3.12, segue que $\tilde{H}(1,t) = \tilde{h}_1(t) = c_{\tilde{f}_0(1)}(t) = \tilde{f}_0(1)$, $\forall t \in I$. Em particular, $\tilde{f}_1(1) = \tilde{H}_1(1) = \tilde{H}(1,1) = \tilde{h}_1(1) = c_{\tilde{f}_0(1)} = \tilde{f}_0(1)$. Logo $\tilde{f}_1(1) = \tilde{f}_0(1)$.

Resumindo o que temos: $\tilde{H}_0 = \tilde{f}_0$, $\tilde{H}_1 = \tilde{f}_1$, $\tilde{H}(0,t) = \tilde{f}_0(0) = \tilde{f}_1(0)$ e $\tilde{H}(1,t) = \tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1)$, para todo $t \in I$. Portanto $\tilde{H} : \tilde{f}_0 \simeq \tilde{f}_1$ □

Corolário 3.16. *Seja $p : \tilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento. Suponha que f_0 e f_1 são caminhos homotópicos por caminho em X, e $\tilde{f}_0$, $\tilde{f}_1$ são levantamentos de f_0 e f_1, respectivamente, começando no mesmo ponto. Então $\tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1)$.*

Demonstração. Segue direto do Corolário 3.15. □

Teorema 3.17. *Seja $p : \tilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento. Para qualquer ponto $\tilde{q} \in \tilde{X}$, o homomorfismo induzido $p_* : \pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right) \to \pi_1(X, p(\tilde{q}))$ é injetivo.*

Demonstração. Tome $[f] \in \pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right)$ e suponha que $[f] \in \text{Nuc}(p_*)$, ou seja, $p_*([f]) = [c_{p(\tilde{q})}]$, dessa forma, $[p \circ f] = [c_{p(\tilde{q})}]$, segue assim que $p \circ f \simeq_p c_{p(\tilde{q})}$ em X. Pelo Teorema 3.15, qualquer levantamento de $p \circ f$ e de $c_{p(\tilde{q})}$ que começam no mesmo ponto são homotópicos por caminho em $\tilde{X}$. Assim, f é um levantamento de $p \circ f$, que começa em $\tilde{q}$ e o laço constante $c_{\tilde{q}}$ é um levantamento de $c_{p(\tilde{q})}$, começando também em $\tilde{q}$, logo $f \simeq_p c_{\tilde{q}}$ em $\tilde{X}$, ou seja, $[f] = [c_{\tilde{q}}]$. □

Observação 3.18. *Segue desse teorema e do item **2** do Teorema 2.10 que $\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right) \approx Im(p_*)$ que é um subgrupo de $\pi_1(X, p(\tilde{q}))$.*

Lema 3.19. *Sejam $p : \tilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento e sejam $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ dois caminhos tais que $\alpha(1) = \beta(0)$. Nessas condições, se $\tilde{\alpha}$ é um levantamento de α, $\tilde{\beta}$ é um levantamento de β e $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(0)$, então $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}$ é um levantamento de $\alpha \cdot \beta$.*

Demonstração. De fato, pela Definição 2.6, dado $t \in [0,1]$ temos que

$$\left(p \circ \left(\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}\right)\right)(t) = \begin{cases} p(\tilde{\alpha}(2t)), & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}; \\ p(\tilde{\beta}(2t-1)), & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}; \\ \beta(2t-1), & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

$$= (\alpha \cdot \beta)(t),$$

uma vez que $\tilde{\alpha}$ é um levantamento de α e $\tilde{\beta}$ é um levantamento de β. Dessa forma, $p\left(\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}\right) = \alpha \cdot \beta$. Portanto $\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}$ é um levantamento de $\alpha \cdot \beta$. □

Lema 3.20. *Seja $p : \tilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento e seja $\gamma : [0,1] \to X$ um caminho. Se $\tilde{\gamma}$ é um levantamento de γ, então para todo $t \in [0,1]$, $\tilde{\gamma}_t$ é um levantamento de γ_t, em que $\gamma_t : [0,1] \to X$ é definida por $\gamma_t(s) = \gamma(s \cdot t)$ e $\tilde{\gamma}_t : [0,1] \to \tilde{X}$ é definida por $\tilde{\gamma}_t(s) = \tilde{\gamma}(s \cdot t)$*

Demonstração. De fato, $\tilde{\gamma}_t$ é contínua e $(p \circ \tilde{\gamma}_t)(s) = p(\tilde{\gamma}(s \cdot t)) = \gamma(s \cdot t) = \gamma_t(s)$. Portanto $\tilde{\gamma}_t$ é um levantamento de γ_t. □

Teorema 3.21 (Critério de Levantamento)**.** *Suponha que $p : \tilde{X} \to X$ é uma aplicação de recobrimento. Seja Y um espaço conexo e localmente conexo por caminhos e $\varphi : Y \to X$ uma aplicação contínua. Dados quaisquer pontos $y \in Y$ e $\tilde{q} \in \tilde{X}$ tais que $p(\tilde{q}) = \varphi(y)$, φ tem um levantamento $\tilde{\varphi} : Y \to \tilde{X}$ satisfazendo $\tilde{\varphi}(y) = \tilde{q}$ se, e somente se, o subgrupo $\varphi_*(\pi_1(Y,y))$ de $\pi_1(X,\varphi(y))$ está contido em $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right)$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Sejam $y \in Y$ e $\tilde{q} \in \tilde{X}$ tal que $p(\tilde{q}) = \varphi(y)$ e suponha que $\tilde{\varphi} : Y \to \tilde{X}$ é um levantamento de φ que satisfaz $\tilde{\varphi}(y) = \tilde{q}$. Note que, $\varphi : (Y,y) \to (X,\varphi(y))$, $p : \left(\tilde{X},\tilde{q}\right) \to (X,\varphi(y))$, $\tilde{\varphi} : (Y,y) \to \left(\tilde{X},\tilde{q}\right)$ são contínuas, logo por definição temos os seguintes homomorfismos induzidos: $\varphi_* : \pi_1(Y,y) \to \pi_1(X,\varphi(y))$, $p_* : \pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right) \to \pi_1(X,\varphi(y))$, $\tilde{\varphi}_* : \pi_1(Y,y) \to \pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)$. (Conforme a Figura 3.6).

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right) \arrow[d, "p_*"] \\
\pi_1(Y,y) \arrow[ur, "\tilde{\varphi}_*"] \arrow[r, "\varphi_*"'] \arrow[ur, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowleft"] & \pi_1(X,\varphi(y))
\end{tikzcd}$$

Figura 3.6

Desde que $\tilde{\varphi}_*(\pi_1(Y,y))$ é um subgrupo de $\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)$ e $p_*\left(\tilde{\varphi}_*\left(\pi_1(Y,y)\right)\right) = \varphi_*(\pi_1(Y,y))$, logo $p_*\left(\tilde{\varphi}_*\left(\pi_1(Y,y)\right)\right) = \varphi_*(\pi_1(Y,y)) \subset p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right)$.

$\Leftarrow$) Seja $y \in Y$ um ponto fixado e tome $\tilde{q} \in \tilde{X}$ tal que $p(\tilde{q}) = \varphi(y)$. Para cada $z \in Y$, seja $\gamma : [0,1] \to Y$ um caminho tal que $\gamma(0) = y$ e $\gamma(1) = z$. Dessa forma, $\varphi \circ \gamma : [0,1] \to X$ é um caminho tal que $(\varphi \circ \gamma)(0) = \varphi(y) = p(\tilde{q})$. Assim, existe um único levantamento $l(\varphi \circ \gamma) : [0,1] \to \tilde{X}$ de $\varphi \circ \gamma$ tal que $l(\varphi \circ \gamma)(0) = \tilde{q}$.

Definamos $\tilde{\varphi} : Y \to \tilde{X}$ por $\tilde{\varphi}(z) := l(\varphi \circ \gamma)(1)$ em que γ é um caminho ligando y a z e $l(\varphi \circ \gamma)$ é o único levantamento de $\varphi \circ \gamma$ tal que $l(\varphi \circ \gamma)(0) = \tilde{q}$.

Afirmação 1: $\tilde{\varphi}$ está bem definida.

Dado $z \in Y$, sejam α e β dois caminhos ligando y a z. Dessa forma, precisamos mostrar que $l(\varphi \circ \alpha)(1) = l(\varphi \circ \beta)(1)$.

Mas $\alpha \cdot \beta^{-1}$ é um laço baseado em y, ou seja, $[\alpha \cdot \beta^{-1}] \in \pi_1(Y,y)$. Logo $\varphi_*\left([\alpha \cdot \beta^{-1}]\right) \in \varphi_*(\pi_1(Y,y)) \subset p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right)$ e disso segue que $[\varphi \circ (\alpha \cdot \beta^{-1})] = [p \circ g]$

para algum laço g de $\tilde{X}$ baseado em $\tilde{q}$. Assim $[p \circ g] = [\varphi \circ (\alpha \cdot \beta^{-1})] = [(\varphi \circ \alpha) \cdot (\varphi \circ \beta^{-1})] = [\varphi \circ \alpha] \cdot [\varphi \circ \beta]^{-1}$.

Logo $[p \circ g] \cdot [\varphi \circ \beta] = [\varphi \circ \alpha]$ o que implica que $(p \circ g) \cdot (\varphi \circ \beta) \simeq_p (\varphi \circ \alpha)$.

Pelo Corolário 3.16, os levantamentos dos caminhos $(p \circ g) \cdot (\varphi \circ \beta)$ e $(\varphi \circ \alpha)$ possuem o mesmo ponto final, ou seja, $l((p \circ g) \cdot (\varphi \circ \beta))(1) = l(\varphi \circ \alpha)(1)$. Por outro lado, como g é um levantamento de $p \circ g$ e $l(\varphi \circ \beta)$ é um levantamento de $\varphi \circ \beta$, então pelo Lema 3.19 $g \cdot l(\varphi \circ \beta)$ é um levantamento de $(p \circ g) \cdot (\varphi \circ \beta)$ com $(g \cdot l(\varphi \circ \beta))(0) = g(0) = \tilde{q}$, ou seja, $l((p \circ g) \cdot (\varphi \circ \beta)) = g \cdot l(\varphi \circ \beta)$. Portanto $l(\varphi \circ \alpha)(1) = (g \cdot l(\varphi \circ \beta))(1) = l(\varphi \circ \beta)(1)$, ou seja, $\tilde{\varphi}$ está bem definida.

Afirmação 2: Se $\gamma : [0,1] \to Y$ é um caminho com $\gamma(0) = y$, então $\tilde{\varphi} \circ \gamma = l(\varphi \circ \gamma)$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\
I \arrow[urr, "\tilde{\varphi}\circ\gamma"] \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[rr, bend right, "\varphi\circ\gamma"'] & Y \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] \arrow[r, "\varphi"'] & X
\end{tikzcd}
$$

Figura 3.7

De fato, para cada $t \in [0,1]$, considere o caminho $\gamma_t : [0,1] \to Y$, dado por $\gamma_t(s) = \gamma(s \cdot t)$. Assim γ_t liga y a $\gamma(t)$ e

$$\tilde{\varphi}(\gamma(t)) = l(\varphi \circ \gamma_t)(1). \tag{3.1}$$

Além disso, $(\varphi \circ \gamma_t)(s) = \varphi(\gamma_t(s)) = \varphi(\gamma(s \cdot t)) = (\varphi \circ \gamma)(s \cdot t) = (\varphi \circ \gamma)_t(s)$. Portanto

$$\varphi \circ \gamma_t = (\varphi \circ \gamma)_t. \tag{3.2}$$

Pelo Lema 3.20, como $l(\varphi \circ \gamma)$ é um levantamento de $\varphi \circ \gamma$, então $(l(\varphi \circ \gamma))_t$ é um levantamento de $(\varphi \circ \gamma)_t$. Além disso, $(l(\varphi \circ \gamma))_t(0) = l(\varphi \circ \gamma)(0 \cdot t) = l(\varphi \circ \gamma)(0) = \tilde{q}$. Portanto

$$(l(\varphi \circ \gamma))_t = l(\varphi \circ \gamma)_t. \tag{3.3}$$

Dessa forma,

$$(\tilde{\varphi} \circ \gamma)(t) \overset{3.1}{=} l(\varphi \circ \gamma_t)(1) \overset{3.2}{=} l((\varphi \circ \gamma)_t)(1) \overset{3.3}{=} (l(\varphi \circ \gamma))_t(1) = l(\varphi \circ \gamma)(t).$$

Portanto $\tilde{\varphi} \circ \gamma = l(\varphi \circ \gamma)$.

Afirmação 3: Sejam $y_1, y_2 \in Y$ e $\beta : [0,1] \to Y$ um caminho ligando y_1 a y_2. Então $\tilde{\varphi} \circ \beta$ é um levantamento de $\varphi \circ \beta$.

Seja $\alpha : [0,1] \to Y$ um caminho ligando y a y_1. Assim $\alpha \cdot \beta$ é um caminho ligando y a y_2 e, pela a **Afirmação 2**, $\tilde{\varphi} \circ (\alpha \cdot \beta) = l(\varphi \circ (\alpha \cdot \beta))$. Assim, $\tilde{\varphi}(\beta(t)) = \tilde{\varphi}\left((\alpha \cdot \beta)\left(\frac{t+1}{2}\right)\right) = l(\varphi \circ (\alpha \cdot \beta))\left(\frac{t+1}{2}\right)$.

Por outro lado, $\varphi \circ (\alpha \cdot \beta) = (\varphi \circ \alpha) \cdot (\varphi \circ \beta)$ e, pelo Lema 3.19, $l(\varphi \circ (\alpha \cdot \beta)) = l(\varphi \circ \alpha) \cdot \tilde{\beta}$, em que $\tilde{\beta}$ é um levantamento de $\varphi \circ \beta$ com $\tilde{\beta}(0) = l(\varphi \circ \alpha)(1)$. Logo, $\tilde{\varphi}(\beta(t)) = \left(l\,(\varphi \circ \alpha) \cdot \tilde{\beta}\right)(\frac{t+1}{2}) = \tilde{\beta}(t)$.

Portanto $\tilde{\varphi} \circ \beta = \tilde{\beta}$, ou seja, $\tilde{\varphi} \circ \beta$ é um levantamento de β.

Afirmação 4: $\tilde{\varphi}$ leva conjuntos conexos por caminhos em conjuntos conexos por caminhos.

De fato, seja $U \subset Y$ um conjunto conexo por caminhos e sejam $\tilde{y_1}, \tilde{y_2} \in \tilde{\varphi}(U)$. Dessa forma, existem $y_1, y_2 \in U$ tais que $\tilde{\varphi}(y_1) = \tilde{y_1}$ e $\tilde{\varphi}(y_2) = \tilde{y_2}$.

Como U é conexo por caminhos, existe um caminho $\gamma : [0,1] \to U$ ligando y_1 a y_2 e, pela **Afirmação 3**, $\tilde{\varphi} \circ \gamma$ é um levantamento do caminho $\varphi \circ \gamma$.

Dessa forma, $\tilde{\varphi} \circ \gamma$ é um caminho, $(\tilde{\varphi} \circ \gamma)(0) = \tilde{\varphi}(y_1) = \tilde{y_1}$ e $(\tilde{\varphi} \circ \gamma)(1) = \tilde{\varphi}(y_2) = \tilde{y_2}$.

Afirmação 5: $p \circ \tilde{\varphi} = \varphi$.

Seja $z \in Y$ e γ um caminho ligando y a z, logo $(p \circ \tilde{\varphi})(z) = p(l(\varphi \circ \gamma)(1)) = (\varphi \circ \gamma)(1) = \varphi(z)$.

Portanto $p \circ \tilde{\varphi} = \varphi$.

Para provarmos que $\tilde{\varphi}$ é contínua, mostraremos que para todo ponto $z \in Y$ existe um aberto U de Y tal que $z \in U$ e $\tilde{\varphi}|_U$ é contínua.

Seja então $z \in Y$ e tome $\varphi(z) \in X$. Seja V uma vizinhança de $\varphi(z)$ tal que p leva cada componente conexa de $p^{-1}(V)$ homeomorficamente em V.

Uma vez que Y é localmente conexo por caminhos e $\varphi^{-1}(V)$ é um aberto em Y, segue que φ^{-1} é também localmente conexo por caminhos. Assim dado U a componente conexa por caminhos de $\varphi^{-1}(V)$ que contém z, pela Proposição 1.10, U é um subconjunto aberto de $\varphi^{-1}(V)$, e consequentemente, U é um aberto em Y.

Pela **Afirmação 4**, $\tilde{\varphi}(U)$ é conexo por caminhos em $\tilde{X}$ assim, se $\tilde{V}$ é a componente conexa de $p^{-1}(V)$ que contém $\tilde{\varphi}(z)$, então $\tilde{\varphi}(U) \subset \tilde{V}$.

Seja $\sigma : V \to \tilde{V}$ uma seção local de p, assim $p \circ \sigma = \mathrm{Id}_V$, ou seja, $\sigma = p^{-1}|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \to V$. Dessa forma, pela **Afirmação 5**, $p \circ \tilde{\varphi} = \varphi$, logo $p|_{\tilde{V}} \circ \tilde{\varphi}|_U = \varphi|_U$, assim $\tilde{\varphi}|_U = \sigma \circ \varphi|_U$.

Portanto $\tilde{\varphi}$ é contínua e (pela **Afirmação 5**) é um levantamento de φ. □

Corolário 3.22. *Se $p : \tilde{X} \to X$ é uma aplicação de recobrimento e Y é simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos, então toda aplicação contínua $\varphi : Y \to X$ tem um levantamento para $\tilde{X}$.*

Demonstração. Segue da Definição 2.14 e do Teorema 3.21. □

Corolário 3.23. *Sejam $p : \tilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento e $\tilde{X}$ simplesmente conexo. Para qualquer espaço Y conexo e localmente conexo por caminhos, uma aplicação contínua $\varphi : Y \to X$ tem um levantamento para $\tilde{X}$ se, e somente se, φ_* é um homomorfismo trivial para todo ponto base $y_0 \in Y$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que $\tilde{\varphi} : Y \to \tilde{X}$ seja um levantamento de φ, logo dado $y \in Y$ temos $(p \circ \tilde{\varphi})(y) = \varphi(y)$ e assim tomando $\tilde{q} = \tilde{\varphi}(y) \in \tilde{X}$ segue que $p(\tilde{q}) = \varphi(y)$ e assim pelo Critério de Levantamento 3.21 temos que $\varphi_*(\pi_1(Y,y))$ é um subgrupo de $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right)$. Por outro lado, como $\tilde{X}$ é simplesmente conexo, segue que $\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right) = \{[c_{\tilde{q}}]\}$, e dessa forma, $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right) = \{[c_{p(\tilde{q})}]\} = \{[c_{\varphi(y)}]\}$. Assim, $\varphi_*(\pi_1(Y,y)) = \{[c_{\varphi(y)}]\}$, logo φ_* é o homomorfismo trivial.

$\Leftarrow$) Suponha que $\varphi_* : \pi_1(Y,y) \to \pi_1(X,\varphi(y))$ seja o homomorfismo trivial para todo $y \in Y$. Seja $y \in Y$ e $\tilde{q} \in p^{-1}(\varphi(y)) \in \tilde{X}$, isto é, $p(\tilde{q}) = \varphi(y)$. Como $\tilde{X}$ é simplesmente conexo e φ_* é o homomorfismo trivial segue que $\varphi_*(\pi_1(Y,y)) = \{[c_{\varphi(y)}]\} = \{[c_{p(\tilde{q})}]\} = p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right)$. Em particular, $\varphi_*(\pi_1(Y,y))$ é um subgrupo de $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right)$ e, pelo Critério de Levantamento 3.21, existe um levantamento $\tilde{\varphi} : Y \to \tilde{X}$ de φ que satisfaz $\tilde{\varphi}(y) = \tilde{q}$. $\square$

Teorema 3.24. *Seja $p : \tilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento. Dado $q \in X$ e $\tilde{q} \in p^{-1}(q)$, um subgrupo H de $\pi_1(X,q)$ é conjugado a $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right)$ se, e somente se, $H = p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}_0\right)\right)$ para algum $\tilde{q}_0 \in p^{-1}(q)$.*

Demonstração. $\Leftarrow$) Tome $\tilde{q}_0 \in p^{-1}(q)$, logo $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}_0\right)\right)$ é um subgrupo de $\pi_1(X,q)$. Considere $\tilde{g} : I \to \tilde{X}$ um caminho de $\tilde{q}$ para $\tilde{q}_0$. Assim $g = p \circ \tilde{g} : I \to X$ é um laço de X baseado em q, pois $g = p \circ \tilde{g}$ é contínua, $p(\tilde{g}(0)) = p(\tilde{q}) = q$ e $p(\tilde{g}(1)) = p(\tilde{q}_0) = q$ (Figura 3.8).

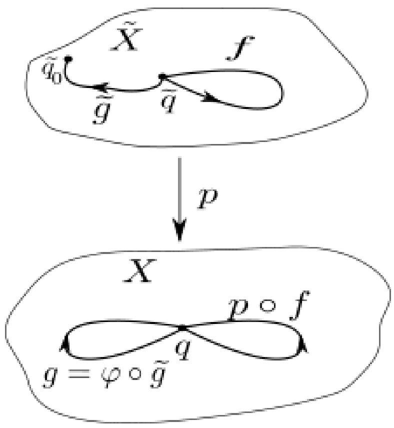


Figura 3.8

Defina as aplicações:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{\tilde{g}}: & \pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right) & \longrightarrow & \pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}_0\right) \\ & [f] & \longmapsto & [\tilde{g}]^{-1}\cdot[f]\cdot[\tilde{g}] \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \varphi_g: & \pi_1(X,q) & \longrightarrow & \pi_1(X,q) \\ & [f] & \longmapsto & [g]^{-1}\cdot[f]\cdot[g] \end{array},$$

as quais são isomorfismos de grupo pelo Lema 2.12.

Afirmação 1: O diagrama abaixo comuta.

De fato, tome $[f] \in \pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)$, assim, $(p_* \circ \varphi_{\tilde{g}})([f]) = p_*\left([\tilde{g}]^{-1}\cdot[f]\cdot[\tilde{g}]\right) = p_*\left([\tilde{g}^{-1}\cdot(f\cdot\tilde{g})]\right) = [p\circ(\tilde{g}^{-1}\cdot(f\cdot\tilde{g}))] = [p\circ\tilde{g}^{-1}]\cdot[p\circ f]\cdot[p\circ\tilde{g}] = [g^{-1}]\cdot p_*([f])\cdot[g] =$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right) \arrow[r, "\varphi_{\tilde{g}}"] \arrow[d, "p_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}_0\right) \arrow[d, "p*"] \\
\pi_1(X,q) \arrow[r, "\varphi_g"'] & \pi_1(X,q)
\end{tikzcd}$$

Diagrama 3.9

$(\varphi_g \circ p_*)([f])$.

Note que φ_g aplica os elementos de $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right)$ em $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}_0\right)\right)$, obtemos assim um novo diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right) \arrow[r, "\varphi_{\tilde{g}}"] \arrow[d, "p_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}_0\right) \arrow[d, "p*"] \\
p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right) \arrow[r, "\varphi_g"'] & p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}_0\right)\right)
\end{tikzcd}$$

Diagrama 3.10

Como $\varphi_{\tilde{g}} : \pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right) \to \pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}_0\right)$, $p_* : \pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right) \to p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right)$, $p_* : \pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}_0\right) \to p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}_0\right)\right)$ são isomorfismo de grupos, logo $\varphi_g : p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right) \to p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}_0\right)\right)$ é um isomorfismo de grupo, assim $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}_0\right)\right) = \varphi_g\left(p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right)\right)$ $= [g]^{-1} \cdot p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right) \cdot [g]$. Portanto, $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}_0\right)\right)$ e $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right)$ são conjugados em $\pi_1(X,q)$.

$\Rightarrow$) Seja H um subgrupo de $\pi_1(X,q)$ conjugado a $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right)$, logo existe um laço g em X baseado em q tal que $H = [g]^{-1} \cdot p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right) \cdot [g]$. Como $\tilde{q} \in p^{-1}(q)$ e g é um caminho tal que $g(0) = q$, considere $\tilde{g}$ um levantamento de g, tal que $\tilde{g}(0) = \tilde{q}$. Seja $\tilde{q}_0 = \tilde{g}(1)$, assim $H = p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}_0\right)\right)$, pois pela primeira parte da demonstração segue que $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}_0\right)\right) =$ $\varphi_g\left(p_*\left(\pi_1(\tilde{X},\tilde{q})\right)\right) = [g]^{-1} \cdot p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right) \cdot [g] = H$. $\square$

Definição 3.25. *$p : \tilde{X} \to X$ é dito ser um **recobrimento normal** se $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right)$ é um subgrupo normal de $\pi_1\left(X, p\left(\tilde{q}\right)\right)$ para cada $\tilde{q} \in \tilde{X}$, ou seja, $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right) = p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}_0\right)\right)$ para todo $\tilde{q}_0, \tilde{q} \in p^{-1}(q)$.*

Lema 3.26. *Seja $p : \tilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento e suponha que o subgrupo induzido por p é normal para algum ponto $\tilde{q} \in \tilde{X}$. Então p é normal.*

Demonstração. Suponha que $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right)$ é um subgrupo normal de $\pi_1(X,q)$ onde $\tilde{q} \in p^{-1}(q)$. Tome $\tilde{q}_0 \in p^{-1}(q_0)$ onde $q_0 \in X$, devemos mostrar $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}_0\right)\right)$ é um subgrupo normal de $\pi_1(X,q_0)$.

Considere $\tilde{g} : I \to \tilde{X}$ um caminho de $\tilde{q}$ para $\tilde{q_0}$ e $g = p \circ \tilde{g} : I \to \tilde{X}$ um caminho de $p(\tilde{q}) = q$ para $p(\tilde{q_0}) = q_0$. De forma análoga ao feito no Teorema 3.24, segue que $\varphi_{\tilde{g}} : \pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right) \to \pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q_0}\right)$ está bem definido e o diagrama 3.11 comuta.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right) \arrow[r, "\varphi_{\tilde{g}}"] \arrow[d, "p_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q_0}\right) \arrow[d, "p*"] \\
p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right)\right) \arrow[r, "\varphi_g"'] & p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q_0}\right)\right)
\end{tikzcd}$$

Diagrama 3.11

Como $\varphi_{\tilde{g}} : \pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right) \to \pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q_0}\right)$, $p_* : \pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right) \to p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right)\right)$, $p_* : \pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q_0}\right) \to p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q_0}\right)\right)$ são isomorfismos de grupo, segue que, $\varphi_g : p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right)\right) \to p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q_0}\right)\right)$ é um isomorfismo, e como isomorfismo leva subgrupo normal em grupo subnormal e $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right)\right)$ é um subgrupo normal de $\pi_1(X, q)$ segue que $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q_0}\right)\right)$ é um subgrupo normal de $\pi_1(X, q_0)$. □

Teorema 3.27. *(Ação do grupo fundamental na fibra) Seja $p : \tilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento e $q \in X$. Então existe uma ação transitiva (Definição 1.42) à direita de $\pi_1(X, q)$ na fibra $p^{-1}(q)$ dada por $\tilde{q} * [f] = \tilde{f}(1)$, onde $\tilde{f}$ é o levantamento de f começando em $\tilde{q} \in p^{-1}(q)$.*

Demonstração. Mostremos que

$$\begin{array}{rccc}
* : & p^{-1}(q) \times \pi_1(X, q) & \longrightarrow & p^{-1}(q) \\
 & (\tilde{q}, [f]) & \longmapsto & (\tilde{q} * [f]) = \tilde{f}(1)
\end{array}$$

está bem definida.

Tome $\tilde{q} \in p^{-1}(q)$ e $f : I \to X$ um laço baseado em q. Pelo Teorema do Levantamento de Caminho, existe um único levantamento $\tilde{f} : I \to \tilde{X}$ de forma que $\tilde{f}(0) = \tilde{q}$. Pelo Corolário 3.16, se $g \in [f]$ e $\tilde{g}$ um levantamento de g começando em $\tilde{q}$, então $\tilde{g}(1) = \tilde{f}(1)$, logo $\tilde{q} * [f] = \tilde{f}(1)$ está bem definida.

Verifiquemos agora que a operação é uma ação de grupo.

i) $\tilde{q} * [c_q] = \tilde{q}$.

Note que $\tilde{q} * [c_q] = c_{\tilde{q}}(1) = \tilde{q}$.

ii) $(\tilde{q} * [f]) * [g] = \tilde{q} * ([f] \cdot [g])$.

Suponha que f e g sejam laços baseados em q e sejam $\tilde{f}$ o levantamento de f começando em $\tilde{q}$ e $\tilde{g}$ o levantamento de g começando em $\tilde{f}(1)$. Dessa forma, seque que $(\tilde{q} * [f]) * [g] = \tilde{f}(1) * [g] = \tilde{g}(1)$. Por outro lado, temos que $\tilde{f} \cdot \tilde{g}$ é o levantamento de $f \cdot g$ começando em $\tilde{q}$, ou seja, $\tilde{q} * ([f] \cdot [g]) = \tilde{q} * ([f \cdot g]) = \left(\tilde{f} \cdot \tilde{g}\right)(1) = \tilde{g}(1)$.

Por fim, mostremos que essa ação é transitiva.

Tome $\tilde{q}, \tilde{q}' \in p^{-1}(q)$ e seja $\tilde{f} : I \to \tilde{X}$ um caminho de $\tilde{q}$ para $\tilde{q}'$. Considere $f = p \circ \tilde{f}$, segue que $\tilde{f}$ é um levantamento de f que começa em $\tilde{q}$, logo $\tilde{q} * [f] = \tilde{f}(1) = \tilde{q}'$. □

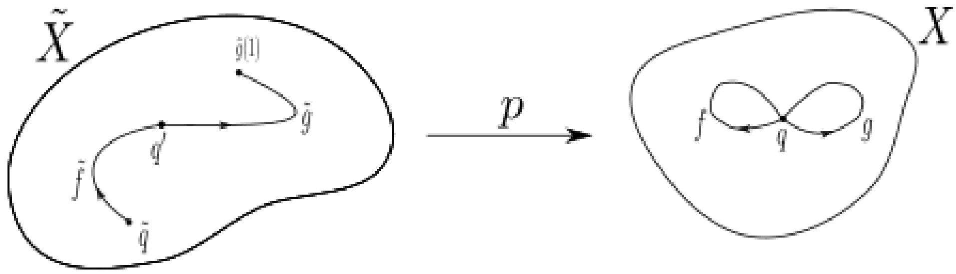


Figura 3.12

Corolário 3.28. *Seja $p : \tilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento e suponha que $\tilde{X}$ seja simplesmente conexo. O número de folhas do recobrimento é igual á cardinalidade do grupo fundamental.*

Demonstração. Sejam q um ponto base em X, $\tilde{q} \in p^{-1}(q)$ e a aplicação $\Theta_{\tilde{q}} : \pi_1(X, q) \to p^{-1}(q)$ dada por $\Theta_{\tilde{q}}([f]) = \tilde{q} * [f]$. Note que $\Theta_{\tilde{q}}$ é sobrejetora, pois a ação do grupo fundamental $\pi_1(X, q)$ em $p^{-1}(q)$ é transitiva, isto é, dado $\tilde{q}' \in p^{-1}(q)$ existe $[f] \in \pi_1(X, q)$ de forma que $\tilde{q} * [f] = \tilde{q}'$. Além disso, dados $[f], [g] \in \pi_1(X, q)$ de forma que $\Theta_{\tilde{q}}([f]) = \Theta_{\tilde{q}}([g])$, temos que $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$, onde $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são levantamentos de f e g, respectivamente, iniciando em $\tilde{q}$. Como $\tilde{X}$ é simplesmente conexo, $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) = \tilde{q}$ e $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$ segue pelo Lema 2.16 que $\tilde{f} \simeq_p \tilde{g}$. Dessa forma, $[f] = p_*\left(\left[\tilde{f}\right]\right) = p_*([\tilde{g}]) = [g]$. Assim $\Theta_{\tilde{q}}$ é injetiva e portanto uma bijeção, isto é, para todo $q \in X$ segue que $\#\pi_1(X, q) = \#p^{-1}(q)$. □

Corolário 3.29. *Se X é simplesmente conexo, qualquer aplicação de recobrimento $p : \tilde{X} \to X$ é um homeomorfismo.*

Demonstração. Como X é simplesmente conexo, segue que $\pi_1(X, q) = \{[c_q]\}$ para todo $q \in X$, e como $p_* : \pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right) \to p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right)\right) \subset \pi_1(X, q)$ é um isomorfismo para todo $\tilde{q} \in p^{-1}(q)$ temos que $\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right) = \{[c_{\tilde{q}}]\}$, logo $\tilde{X}$ é simplesmente conexo. Pelo Corolário 3.28, $\#p^{-1}(q) = \#\pi_1(X, q) = 1$ para todo $q \in X$, assim p é injetiva. Como p é sobrejetora por definição, temos que p é uma bijeção.

Note que como p é uma aplicação de recobrimento segue que p é contínua e para cada $q \in X$ existe uma vizinhança U de q tal que $p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \to U$ é um homeomorfismo, em particular, $p^{-1}|_U : U \to p^{-1}(U)$ é contínua. Logo pelo Lema 1.13, p^{-1} é contínua. □

3.3 O Grupo de Recobrimento

Nessa seção vamos definir os conceitos de transformação de recobrimento, afim de introduzir o conceito de grupo de transformações de recobrimento de um espaço de recobrimento para estabelecer relações do grupo fundamental com o espaço de recobrimento.

Definição 3.30. *Seja $p : \tilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento. Um homeomorfismo $\varphi : \tilde{X} \to \tilde{X}$ é chamado **transformação de recobrimento** se $p \circ \varphi = p$.*

*O conjunto $\mathsf{C_p}(\tilde{X}) = \left\{\varphi : \tilde{X} \to \tilde{X}; \varphi \text{ é um homeomorfismo com } p \circ \varphi = p\right\}$ é chamado **grupo de recobrimento**.*

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \tilde{X} \arrow[dl, "p"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Figura 3.13

Observe que o conjunto $\mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right)$ é de fato um grupo munido com a operação composição.

De fato, $\mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right) \neq \varnothing$ pois $\mathrm{Id}_{\tilde{X}} : \tilde{X} \to \tilde{X}$ é um homeomorfismo e $p \circ \mathrm{Id}_{\tilde{X}} = p$. Além disso, dado $\varphi, \psi \in \mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right)$ temos que $\varphi \circ \psi : \tilde{X} \to \tilde{X}$ é um homeomorfismo e $p \circ (\varphi \circ \psi) = (p \circ \varphi) \circ \psi = p \circ \psi = p$, logo $\varphi \circ \psi \in \mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right)$.

1. (**elemento neutro**) $\varphi = \varphi \circ \mathrm{Id}_{\tilde{X}} = \mathrm{Id}_{\tilde{X}} \circ \varphi$, portanto $\mathrm{Id}_{\tilde{X}}$ é o elemento neutro de $\mathsf{C_p}(\tilde{X})$.

2. (**elemento inverso**) Como φ é um homeomorfismo, $\varphi^{-1} : \tilde{X} \to \tilde{X}$ é um homeomorfismo satisfazendo $p \circ \varphi^{-1} = p$, pois $p = p \circ \varphi$. Assim $\varphi^{-1} \in \mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right)$ e $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{Id}_{\tilde{X}} = \varphi^{-1} \circ \varphi$.

3. (**Associativa**) A composição de função é uma operação associativa.

   Portanto, $\mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right)$ é um grupo com a operação composição.

De acordo com a Definição 1.38 temos que $\mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right)$ é um grupo discreto.

Lema 3.31.

1. $\begin{array}{rccc} * : & \mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right) \times \tilde{X} & \longrightarrow & \tilde{X} \\ & (\varphi, \tilde{q}) & \longmapsto & \varphi * \tilde{q} = \varphi(\tilde{q}) \end{array}$ *é uma ação a esquerda de $\mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right)$ em $\tilde{X}$.*

2. *$O(\tilde{q}) \subset p^{-1}(q)$ para um único $q \in X$, em que $O(\tilde{q})$ é a órbita de $\tilde{q}$.*

Demonstração. 1. De fato, a aplicação $*$ está bem definida e temos que:

- $Id_{\tilde{X}} * \tilde{q} = Id_{\tilde{X}}(\tilde{q}) = \tilde{q}$, para todo $q \in X$.

- $(\varphi \circ \psi) * \tilde{q} = (\varphi \circ \psi)(\tilde{q}) = \varphi(\psi(\tilde{q})) = \varphi * \psi(\tilde{q}) = \varphi * (\psi * \tilde{q})$.

Portanto $*$ é uma ação.

2. Seja $q = p(\tilde{q})$ e $y \in O(\tilde{q})$. Assim $y = \varphi(\tilde{q})$, para algum $\varphi \in \mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right)$. Logo $p(y) = p(\varphi(\tilde{q})) = p(\tilde{q}) = q$. Portanto $O(\tilde{q}) \subset p^{-1}(q)$.

Seja agora $x \in X$ tal que $O(\tilde{q}) \subset p^{-1}(x)$. Dessa forma, $\tilde{q} \in O(\tilde{q}) \subset p^{-1}(x)$, ou seja, $p(\tilde{q}) = x$ e assim $q = x$. □

Proposição 3.32 (Propriedades do Grupo de Recobrimento)**.** *Seja $p : \tilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento.*

1. *Se duas transformações de recobrimento coincidem em um ponto, elas são idênticas.*

2. *O grupo de recobrimento age livremente e continuamente (Definição 1.41) em $\tilde{X}$.*

3. *Para qualquer $q \in X$, cada transformação de recobrimento permuta os pontos da fibra de $p^{-1}(q)$.*

4. *Para qualquer conjunto aberto uniformemente recoberto $U \subset X$, cada transformação de recobrimento permuta as componentes de $p^{-1}(U)$.*

Demonstração. 1. Uma transformação de recobrimento $\varphi \in \mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right)$ é um levantamento de p, pois φ é contínua e $p \circ \varphi = p$. Pela Proposição 3.12, segue que se $\varphi(\tilde{q}) = \psi(\tilde{q})$ para algum $\tilde{q} \in \tilde{X}$, que é conexo, então $\varphi \equiv \psi$.
2. Seja $\varphi \in \mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right)$ tal que $\varphi(\tilde{q}) = \tilde{q}$ para algum $\tilde{q} \in \tilde{X}$. Como $Id_{\tilde{X}} \in \mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right)$ e $Id_{\tilde{X}}(\tilde{q}) = \tilde{q}$, segue pelo item **1)** que $\varphi \equiv Id_{\tilde{X}}$, ou seja, o grupo de recobrimento age livremente à esquerda de X. Além disso, dado $\varphi \in \mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right)$ a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \tilde{X} & \longrightarrow & \tilde{X} \\ & \tilde{q} & \longmapsto & \varphi * \tilde{q} = \varphi(\tilde{q}) \end{array}$$

é contínua, logo, pela Proposição 1.41, segue que $*$ é contínua.
3. Devemos mostrar que dados $q \in X$ e $\varphi \in \mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right)$ então φ é uma bijeção de $p^{-1}(q)$ em $p^{-1}(q)$.

Seja $\tilde{q} \in p^{-1}(q)$, logo $(p \circ \varphi)(\tilde{q}) = p(\tilde{q}) = q$, assim $\varphi(\tilde{q}) \in p^{-1}(q)$. Dessa forma $\varphi|_{p^{-1}(q)} : p^{-1}(q) \to p^{-1}(q)$ está bem definida. Por outro lado, dados $\tilde{q} \in p^{-1}(q)$ e $\overline{q} = \varphi^{-1}(\tilde{q})$, sabemos que $\varphi(\overline{q}) = \tilde{q}$ e $(p \circ \varphi)(\overline{q}) = p(\tilde{q}) = q$. Mas $p \circ \varphi = p$, logo $p(\overline{q}) = q$ e $\overline{q} \in p^{-1}(q)$. Dessa forma $\varphi|_{p^{-1}(q)} : p^{-1}(q) \to p^{-1}(q)$ é bijetora e $(\varphi|_{p^{-1}(q)})^{-1} = \varphi^{-1}|_{p^{-1}(q)} : p^{-1}(q) \to p^{-1}(q)$.
4. Devemos mostrar que dados $\varphi \in \mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right)$ e $U \subset X$ uma vizinhança uniformemente recoberta, com $p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{\alpha \in J} U_\alpha$ em que U_α são as componentes conexas de $p^{-1}(U)$, então para cada $\alpha \in J$ existem $\beta, \gamma \in J$ tais que $\varphi(U_\alpha) = U_\beta$ e $\varphi(U_\gamma) = U_\alpha$, ou seja, φ leva componente conexa em componente conexa e vice versa.

Seja U_α uma componente conexa de $p^{-1}(U)$, assim $(p \circ \varphi)(U_\alpha) = p(U_\alpha) \subset U$, logo $\varphi(U_\alpha) \subset p^{-1}(U)$. Mas φ é contínua e U_α é conexo, dessa forma $\varphi(U_\alpha)$ é um subconjunto conexo de $p^{-1}(U)$, ou seja, $\varphi(U_\alpha) \subset U_\beta$ para algum $\beta \in J$. De forma análoga $\varphi^{-1} \in \mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right)$, então $\varphi^{-1}(U_\beta) \subset U_{\beta'}$ para algum $\beta' \in J$.

Como φ^{-1} é uma bijeção segue que $U_\alpha = \varphi^{-1}(\varphi(U_\alpha)) \subset \varphi^{-1}(U_\beta) \subset U_{\beta'}$, logo como ambos são componentes conexas, segue que $U_\alpha = U_{\beta'}$ e $\varphi^{-1}(U_\beta) \subset U_{\beta'} = U_\alpha$, daí

$U_\beta = \varphi(\varphi^{-1}(U_\beta)) \subset \varphi(U_\alpha)$, ou seja, $\varphi(U_\alpha) = U_\beta$. De forma análoga, $\varphi^{-1}(U_\alpha) = U_\gamma$ para algum $\gamma \in J$, logo $U_\alpha = \varphi(\varphi^{-1}(U_\alpha)) = \varphi(U_\gamma)$. □

Proposição 3.33 (Critério da Órbita)**.** *Seja $p : \tilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento. Dessa forma:*

1. *Se $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2 \in \tilde{X}$ são dois pontos da mesma fibra $p^{-1}(q)$, então existe uma transformação de recobrimento que leva $\tilde{q}_1$ em $\tilde{q}_2$ se, e somente se, os subgrupos induzidos $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}_1\right)\right)$ e $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}_2\right)\right)$ são iguais.*

2. *$\mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right)$ age transitivamente (ver Definição 1.42) em cada fibra se, e somente se, p é um recobrimento normal.*

Demonstração. 1. $\Rightarrow$) Suponha que existe uma transformação de recobrimento φ tal que $\varphi(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_2$. Pela Definição 3.30, segue que φ é um homeomorfismo, logo $\varphi_* : \pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}_1\right) \to \pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}_2\right)$ é um homomorfismo induzido pela φ. Pelo Corolário 2.20, segue que φ_* é um isomorfismo, portanto $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}_2\right)\right) = (p \circ \varphi)_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}_1\right)\right) = (p_* \circ \varphi_*)\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}_1\right)\right) = p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}_1\right)\right)$.

$\Leftarrow$) Note que $\tilde{X}$ é um espaço conexo e localmente conexo por caminhos e $p : \tilde{X} \to X$ é uma aplicação contínua. Sejam $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2 \in \tilde{X}$ tais que $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}_1\right)\right) = p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}_2\right)\right)$, em particular $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}_1\right)\right) \subset p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}_2\right)\right)$. Logo, pelo Teorema 3.21, p tem um levantamento $\tilde{p} : \tilde{X} \to \tilde{X}$ satisfazendo $p \circ \tilde{p} = p$ e $\tilde{p}(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_2$. Agora, como $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}_2\right)\right) \subset p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}_1\right)\right)$ existe, de forma análoga, um levantamento $\tilde{p_2} : \tilde{X} \to \tilde{X}$ satisfazendo $p \circ \tilde{p_2} = p$ e $\tilde{p}(\tilde{q}_2) = \tilde{q}_1$.

Afirmação: $\tilde{p}$ e $\tilde{p_2}$ são inversas uma da outra.

De fato, observe que $\tilde{p_2} \circ \tilde{p}$ e $Id_{\tilde{X}}$ são levantamentos de p, levando $\tilde{q}_1$ em $\tilde{q}_1$, pois $(\tilde{p_2} \circ \tilde{p})(\tilde{q}_1) = \tilde{p_2}(\tilde{p}(\tilde{q}_1)) = \tilde{p_2}(\tilde{q}_2) = \tilde{q}_1$ e $Id_{\tilde{X}}(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_1$. Como $\tilde{p_2} \circ \tilde{p}$ e $Id_{\tilde{X}}$ coincidem no ponto $\tilde{q}_1$ e $\tilde{X}$ é conexo, pelo Teorema 3.12, segue que $\tilde{p_2} \circ \tilde{p} \equiv Id_{\tilde{X}}$. De forma similar, $\tilde{p} \circ \tilde{p_2} = Id_{\tilde{X}}$. Segue assim que $\tilde{p}$ é uma bijeção contínua com inversa $\tilde{p_2}$ contínua.

Portanto $\tilde{p}$ é uma transformação de recobrimento.

2. $\Leftarrow$) Suponha que p seja um recobrimento normal, pela Definição 3.25, $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}_1\right)\right) = p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}_2\right)\right)$ para todo $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2 \in p^{-1}(q)$. Logo, pelo item **1** da Proposição 3.33, existe uma transformação de recobrimento φ tal que $\varphi(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_2$.

$\Rightarrow$) Suponha que $\mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right)$ age transitivamente em cada fibra $p^{-1}(q)$, assim dado $q \in X$, para cada $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2 \in p^{-1}(q)$ existe uma transformação de recobrimento φ de forma que $\varphi(\tilde{q}_1)\tilde{q}_2$. Pelo item **1** da Proposição 3.33, $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}_1\right)\right) = p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}_2\right)\right)$. Portanto p é normal. □

Teorema 3.34. *Seja $p : \tilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento e $\tilde{q} \in \tilde{X}$. O grupo de recobrimento $\mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right)$ é isomorfo ao quociente $\frac{N\left(p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right)\right)}{p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right)}$. O isomorfismo é induzido pela* *aplicação* $\alpha : N\left(p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right)\right) \to \mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right)$ *que envia* $[f]$ *para uma única transformação de recobrimento* φ *que leva* $\tilde{q}$ *em* $\tilde{q}\cdot[f]$.

Demonstração. Considere $H = p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right) \subset \pi_1(X,q)$. Tome $[f] \in N(H)$ e $\tilde{q}_2 = \tilde{q}\cdot[f] = \tilde{f}(1)$, onde $\tilde{f}$ é o levantamento de f começando em $\tilde{q}$.

Afirmação 1: Existe uma única transformação de recobrimento $\varphi \in \mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right)$ tal que $\varphi(\tilde{q}) = \tilde{q}_2$.

Pelo item **1** da Proposição 3.33, é suficiente mostrarmos que $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}_2\right)\right) = H$. Considere $\Phi : \pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right) \to \pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}_2\right)$ dada por $\Phi([g]) = \left[\tilde{f}\right]^{-1}\cdot[g]\cdot\left[\tilde{f}\right]$. Pelo Lema 2.12, Φ é um isomorfismo, além disso, pela demonstração do Teorema 3.24 segue que o diagrama 3.14 comuta.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right) \arrow[r, "\Phi_{\tilde{f}}"] \arrow[d, "p_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}_2\right) \arrow[d, "p*"] \\
p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right) \arrow[r, "\Phi_f"'] & p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}_2\right)\right)
\end{tikzcd}$$

Diagrama 3.14

Dessa forma,

$$p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}_2\right)\right) = p_*\left(\Phi_{\tilde{f}}\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right)\right) = \Phi_f\left(p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right)\right) = [f]^{-1}\cdot H\cdot[f] = H,$$

uma vez que $[f] \in N(H)$. Portanto, existe uma transformação de recobrimento φ tal que $\varphi(\tilde{q}) = \tilde{q}_2$ e pelo item **a)** da Proposição 3.32 ela é única.

Dessa forma, a aplicação $\alpha : N(H) \to \mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right)$ que leva $[f]$ em uma única transformação de recobrimento satisfazendo $\varphi(\tilde{q}) = \tilde{q}_2 = \tilde{q}\cdot[f]$ está bem definida.

Afirmação 2: α é um homomorfismo de grupos.

De fato, tome $[g_1],[g_2] \in N(H)$ e sejam $\varphi_1,\varphi_2 \in \mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right)$ tais que $\varphi_1(\tilde{q}) = \tilde{q}\cdot[g_1] = \tilde{g}_1(1)$ e $\varphi_2(\tilde{q}) = \tilde{q}\cdot[g_2] = \tilde{g}_2(1)$, isto é, $\alpha([g_1]) = \varphi_1$ e $\alpha([g_2]) = \varphi_2$.

Considere $\varphi_{12} = \alpha([g_1\cdot g_2]) = \alpha([g_1]\cdot[g_2])$ a transformação de recobrimento satisfazendo $\varphi_{12}(\tilde{q}) = \tilde{q}\cdot[g_1\cdot g_2] = \widetilde{g_1\cdot g_2}(1)$. Devemos mostrar que $\varphi_{12} = \varphi_1\circ\varphi_2$, para isso, basta mostrarmos que φ_{12} e $\varphi_1\circ\varphi_2$ coincidem em $\tilde{q} \in \tilde{X}$, isto é, $\varphi_{12}(\tilde{q}) = (\varphi_1\circ\varphi_2)(\tilde{q})$, de forma equivalente, $\widetilde{g_1\cdot g_2}(1) = \varphi_1(\tilde{g}_2(1))$.

O levantamento $\tilde{g}_2$ de g_2 é um caminho em $\tilde{X}$ começando em $\tilde{q}$. Como $p\circ\varphi_1 = p$, segue que $g_2 = p\circ\tilde{g}_2 = (p\circ\varphi_1)\circ\tilde{g}_2 = p\circ(\varphi_1\circ\tilde{g}_2)$, logo $(\varphi_1\circ\tilde{g}_2)$ é um levantamento de g_2 iniciando em $\varphi_1(\tilde{g}_2(0)) = \varphi_1(\tilde{q}) = \tilde{g}_1(1)$.

Assim, $\tilde{g}_1\cdot(\varphi_1\circ\tilde{g}_2)$ faz sentido e é um levantamento de $g_1\cdot g_2$ iniciando em $\tilde{q}$. Dessa forma,

$$\varphi_{12}(\tilde{q}) = \widetilde{g_1\cdot g_2}(1) = \tilde{g}_1\cdot(\varphi_1\circ\tilde{g}_2)(1) = (\varphi_1\circ\tilde{g}_2)(1) = \varphi_1(\varphi_2(\tilde{q})) = (\varphi_1\circ\varphi_2)(\tilde{q}).$$

Portanto α é um homomorfismo.

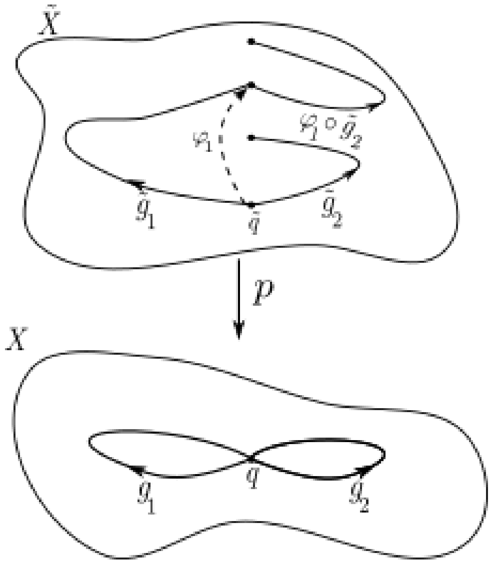


Figura 3.15

Afirmação 3: α é sobrejetor.

De fato, tome $\varphi \in \mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right)$ e seja $\tilde{q}_1 = \varphi(\tilde{q})$, pelo item **3** da Proposição 3.32 segue que $q = p(\tilde{q}) = p(\tilde{q}_1)$. Tome $\tilde{g}$ um caminho em $\tilde{X}$ de $\tilde{q}$ para $\tilde{q}_1$, então $g = p \circ \tilde{g}$ é um laço em X baseado em q. Além disso, pelo item **1** da Proposição 3.33 segue que $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right)\right) = p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}_1\right)\right)$.

Por outro lado, pelo Diagrama 3.14, segue que $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}_1\right)\right) = [g]^{-1} \cdot p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right)\right) \cdot [g]$. Desde que $H = p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right)\right) = p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}_1\right)\right)$, temos que $H = [g]^{-1} \cdot H \cdot [g]$, ou seja, $[g] \in N(H)$. Considerando $\psi = \alpha([g]) \in \mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right)$ que satisfaz $\psi(\tilde{q}) = \tilde{q} \cdot [g] = \tilde{g}(1) = \tilde{q}_1 = \varphi(\tilde{q})$, segue que $\psi \equiv \varphi$. Portanto α é sobrejetor.

Afirmação 4: $\ker(\alpha) = H$.

Tome $[g] \in \ker(\alpha)$, logo $\alpha([g]) = Id_{\tilde{X}}$. Seja $\tilde{g}$ o levamtamento de g iniciando em $\tilde{q}$, assim $\tilde{q} = Id_{\tilde{X}}(\tilde{q}) = \tilde{g}(1)$. Dessa forma $\tilde{g}$ é um laço em $\tilde{X}$ baseado em $\tilde{q}$, logo $[\tilde{g}] \in \pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right)$ e daí $[g] = [p \circ \tilde{g}] \in p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right)\right) = H$. Assim $\ker(\alpha) \subset H$.

Agora tome $[g] \in H = p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right)\right)$, logo existe $\tilde{g} \in \pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right)$ tal que $[g] = p_*([\tilde{g}]) = [p \circ \tilde{g}]$. Assim $\tilde{g}$ é um levantamento de g iniciando em $\tilde{q}$ e terminando em $\tilde{q}$. Logo se $\varphi = \alpha([g])$ então $\varphi([\tilde{g}]) = \tilde{g}(1) = \tilde{q}$, segue assim que $\varphi = Id_{\tilde{X}}$. Logo, $H \subset \ker(\alpha)$. Portanto, pelo Teorema do Isomorfismo, $\frac{N(H)}{\ker(\alpha)} \approx Im(\alpha)$, ou seja, $\frac{N(H)}{H} \approx \mathsf{C_p}(\tilde{X})$. $\square$

Enunciaremos agora dois corolários que são imediatos do Teorema 3.34.

Corolário 3.35. *Se $p : \tilde{X} \to X$ é um recobrimento normal, $\tilde{q} \in \tilde{X}$ e $q = p(\tilde{q})$, então $\mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right)$ é isomorfo a $\frac{\pi_1(X,q)}{p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right)}$.*

Demonstração. Sabendo que p é um recobrimento normal, segue pela Definição 3.25, que $N\left(p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right)\right)\right) = \pi_1(X, q)$ e assim $\mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right) \approx \frac{N\left(p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right)\right)}{p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right)} = \frac{\pi_1(X,q)}{p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right)}$. $\square$

Corolário 3.36. *Se $p : \tilde{X} \to X$ é uma aplicação de recobrimento e $\tilde{X}$ é simplesmente conexo, então para qualquer $\tilde{q} \in \tilde{X}$ a aplicação α do Teorema 3.34 é um isomorfismo de $\pi_1(X, q)$ para $\mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right)$, onde $q = p(\tilde{q})$.*

Demonstração. Como $\tilde{X}$ é simplesmente conexo, segue que $\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right) = \{[c_{\tilde{q}}]\}$, dessa forma $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right)\right) = \{[c_q]\}$. Assim $\mathsf{C_p}\left(\tilde{X}\right) \approx \frac{N\left(p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right)\right)}{p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right)} \approx \frac{N(\{[c_q]\})}{\{[c_q]\}} \approx \pi_1(X, q)$. □

3.4 HOMOMORFISMO DE RECOBRIMENTO

Definição 3.37. *Seja X um espaço topológico e $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$, $p_2 : \tilde{X}_2 \to X$ aplicações de recobrimento em X. Um **homomorfismo de recobrimento** de p_1 para p_2 é uma aplicação contínua $\varphi : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ tal que $p_2 \circ \varphi = p_1$. Além disso, um homomorfismo de recobrimento é dito ser um **isomorfismo de recobrimento** se ele é um homeomorfismo, ou seja, φ é um homeomorfismo e $p_1 \circ \varphi^{-1} = p_2$.*

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{X}_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\
& X &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\tilde{X}_1 \arrow[dr, "p_1"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \tilde{X}_2 \arrow[ll, "\varphi^{-1}"'] \arrow[dl, "p_2"] \\
& X &
\end{tikzcd}
$$

Figura 3.16

Observações 3.38.
1. *Dizemos que duas aplicações de recobrimento sobre X são isomorfas se existir um isomorfismo de recobrimento entre elas.*
2. *Os isomorfismo entre o mesmo espaço de recobrimento são exatamente as transformações de recobrimento.*

Lema 3.39. *Sejam $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$ e $p_2 : \tilde{X}_2 \to X$ aplicações de recobrimento de X e seja φ um homomorfismo de recobrimento de p_1 para p_2. Então φ é uma aplicação de recobrimento.*

Demonstração. **Afirmação 1:** φ é sobrejetora.

Tome $\tilde{q} \in \tilde{X}_2$ e $\tilde{q}_1 \in \tilde{X}_1$, considere $\tilde{q}_2 = \varphi(\tilde{q}_1) \in \tilde{X}_2$ e $q = p_1(\tilde{q}_1) = (p_2 \circ \varphi)(\tilde{q}_1) = p_2(\tilde{q}_2) \in X$. Como $\tilde{X}_2$ é conexo por caminhos, existe um caminho $\tilde{g} : I \to \tilde{X}_2$ de $\tilde{q}_2$ para $\tilde{q}$. Seja $f = p_2 \circ \tilde{g}$ um caminho em X iniciando em q, uma vez que $(p_2 \circ \tilde{g})(0) = p_2(\tilde{q}_2) = q$, e seja $\tilde{f}$ o único levantamento de f em $\tilde{X}_1$ começando em $\tilde{q}_1$.

Considere agora o caminho $\varphi \circ \tilde{f} : I \to \tilde{X}_2$ em $\tilde{X}_2$. Note que $\left(\varphi \circ \tilde{f}\right)(0) = \varphi(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_2$ e satisfaz $p_2 \circ \varphi \circ \tilde{f} = p_1 \circ \tilde{f} = f$. Assim, $\varphi \circ \tilde{f}$ é um levantamento de f em $\tilde{X}_2$ começando em $\tilde{q}_2$. Logo pela unicidade do levantamento 3.12, segue que $\varphi \circ \tilde{f} = \tilde{g}$, assim $\varphi\left(\tilde{f}(1)\right) = \tilde{g}(1) = \tilde{q}$. Portanto φ é sobrejetora.

Mostremos que φ é uma aplicação de recobrimento. Dado $\tilde{q} \in \tilde{X}_2$, $q = p_2(\tilde{q})$, U_q^1 e U_q^2 vizinhanças de q uniformemente recobertas por p_1 e p_2, respectivamente, obtemos que a vizinhança $U_q = U_q^1 \cap U_q^2$ de q é uniformemente recoberta por p_1 e p_2.

Seja $V_{\tilde{q}}$ a componente conexa de ${p_2}^{-1}(U_q)$ que contém $\tilde{q}$.

Como $p_2 \circ \varphi = p_1$, então $p_1^{-1}(U_q) = \varphi^{-1}(p_2^{-1}(U_q))$. Assim, como $V_{\tilde{q}} \subset {p_2}^{-1}(U_q)$, então $\varphi^{-1}(V_{\tilde{q}}) \subset \varphi^{-1}({p_2}^{-1}(U_q)) = {p_1}^{-1}(U_q)$.

Tome W uma componente conexa de $\varphi^{-1}(V_{\tilde{q}})$, o qual é um subconjunto aberto de $\tilde{X}_1$, assim pelo Lema 1.7, segue que W é aberto em $\tilde{X}_1$. Se mostrarmos que $\varphi : W \to V_{\tilde{q}}$ é um homeomorfismo, então $V_{\tilde{q}}$ é uniformemente recoberto por φ.

Como W é uma componente conexa de $\varphi^{-1}(V_{\tilde{q}})$ e $\varphi^{-1}(V_{\tilde{q}}) \subset \varphi^{-1}({p_2}^{-1}(U_q))$ $= {p_1}^{-1}(U_q)$, então $W \subset \tilde{W}$ em que $\tilde{W}$ é uma componente conexa de ${p_1}^{-1}(U_q)$.

Afirmação 2: $W = \tilde{W}$.

Como $\tilde{W}$ é conexa, segue que $\varphi\left(\tilde{W}\right)$ é conexa. Mas $\tilde{W} \subset {p_1}^{-1}(U_q) = \varphi^{-1}({p_2}^{-1}(U_q))$ o que implica que $\varphi\left(\tilde{W}\right) \subset {p_2}^{-1}(U_q)$. Dessa forma, $\varphi\left(\tilde{W}\right)$ está contida em alguma componente conexa de ${p_2}^{-1}(U_q)$.

Seja $x \in W$ um ponto qualquer, dessa forma $\varphi(x) \in \varphi(W) \cap \varphi\left(\tilde{W}\right)$. Logo $\varphi\left(\tilde{W}\right)$ e $\varphi(W)$ estão contidos na mesma componente conexa de ${p_2}^{-1}(U_q)$. Como $\varphi(W) \subset V_{\tilde{q}}$, então $\varphi\left(\tilde{W}\right) \subset V_{\tilde{q}}$, implicando $\tilde{W} \subset \varphi^{-1}\left(\varphi\left(\tilde{W}\right)\right) \subset \varphi^{-1}\left(V_{\tilde{q}}\right)$.

Dessa forma, $\tilde{W}$ está contido em uma componente conexa de $\varphi^{-1}(V_{\tilde{q}})$. Como W é uma componente conexa de $\varphi^{-1}(V_{\tilde{q}})$ e $\tilde{W} \cap W \neq \emptyset$, então $\tilde{W} \subset W$, ou seja, $\tilde{W} = W$.

Como $\tilde{W} = W$, então $p_1 : W \to U_q$ é um homeomorfismo. Logo $p_1|_W = (p_2 \circ \varphi)|_W = p_2|_{V_{\tilde{q}}} \circ \varphi|_W$ é um homeomorfismo de W em U_q, portanto $\varphi|_W = (p_2|_{V_{\tilde{q}}})^{-1} \circ p_1|_W$ é um homeomorfismo de W em $V_{\tilde{q}}$.

Portanto φ é uma aplicação de recobrimento. □

Teorema 3.40 (Critério de Homomorfismo de Recobrimento)**.** *Sejam $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$ e $p_2 : \tilde{X}_2 \to X$ aplicações de recobrimento de X e $\tilde{q}_1 \in \tilde{X}_1$, $\tilde{q}_2 \in \tilde{X}_2$ pontos bases tais que $p_1(\tilde{q}_1) = p_2(\tilde{q}_2) = q \in X$. Então existe um homomorfismo de recobrimento de p_1 para p_2 levando $\tilde{q}_1$ para $\tilde{q}_2$ se, e somente se, $p_{1*}\left(\pi_1\left(\tilde{X}_1, \tilde{q}_1\right)\right) \subset p_{2*}\left(\pi_1\left(\tilde{X}_2, \tilde{q}_2\right)\right)$.*

Demonstração. Temos que um homomorfismo de recobrimento de p_1 para p_2 pode ser visto como um levantamento de p_1, pois $p_2 \circ \varphi = p_1$. Assim, pelo Teorema 3.21 segue o desejado. □

Teorema 3.41 (Isomorfismo de Recobrimento)**.** *Duas aplicações de recobrimento $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$ e $p_2 : \tilde{X}_2 \to X$ são isomorfas se, e somente se, dado $q \in X$ e pontos bases $\tilde{q}_1 \in p_1^{-1}(q)$ e $\tilde{q}_2 \in p_2^{-1}(q)$, os subgrupos induzidos $p_{1*}\left(\pi_1\left(\tilde{X}_1, \tilde{q}_1\right)\right)$ e $p_{2*}\left(\pi_1\left(\tilde{X}_2, \tilde{q}_2\right)\right)$ são conjugados em $\pi_1(X, q)$. Se esse é o caso, então os subgrupos são conjugados $\forall \tilde{q}_1 \in p_1^{-1}(q)$ e $\forall \tilde{q}_2 \in p_2^{-1}(q)$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Supondo que existe um isomorfismo de recobrimento $\varphi : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$, dado $q \in X$ tome $\tilde{q}_1 \in p^{-1}(q)$ e considere $\tilde{q}_2 = \varphi(\tilde{q}_1)$. Aplicando o Teorema 3.40 em φ

segue que $p_{1*}\left(\pi_1\left(\tilde{X}_1,\tilde{q}_1\right)\right) \subset p_{2*}\left(\pi_1\left(\tilde{X}_2,\tilde{q}_2\right)\right)$. Agora fazendo o mesmo para φ^{-1} obtemos que o subgrupo $p_{2*}\left(\pi_1\left(\tilde{X}_2,\tilde{q}_2\right)\right) \subset p_{1*}\left(\pi_1\left(\tilde{X}_1,\tilde{q}_1\right)\right)$, ou seja, $p_{1*}\left(\pi_1\left(\tilde{X}_1,\tilde{q}_1\right)\right) = p_{2*}\left(\pi_1\left(\tilde{X}_2,\tilde{q}_2\right)\right)$. Assim, pelo Teorema 3.24, dado qualquer $\tilde{q}_2{}' \in p_2^{-1}(q)$, temos que $p_{2*}\left(\pi_1\left(\tilde{X}_2,\tilde{q}_2\right)\right)$ e $p_{2*}\left(\pi_1\left(\tilde{X}_2,\tilde{q}_2{}'\right)\right)$ são conjugados, logo $p_{1*}\left(\pi_1\left(\tilde{X}_1,\tilde{q}_1\right)\right)$ e $p_{2*}\left(\pi_1\left(\tilde{X}_2,\tilde{q}_2{}'\right)\right)$ são conjugados.

$\Leftarrow$) Seja $q \in X$ tal que $\tilde{q}_1 \in p_1^{-1}(q)$ e $\tilde{q}_2 \in p_2^{-1}(q)$, com $p_{1*}\left(\pi_1\left(\tilde{X}_1,\tilde{q}_1\right)\right)$ e $p_{2*}\left(\pi_1\left(\tilde{X}_2,\tilde{q}_2\right)\right)$ conjugados. Pelo Teorema 3.24 podemos tomar um novo ponto base $\tilde{q}_2{}' \in p_2^{-1}(q)$ tal que $p_{2*}\left(\pi_1\left(\tilde{X}_2,\tilde{q}_2{}'\right)\right) = p_{1*}\left(\pi_1\left(\tilde{X}_1,\tilde{q}_1\right)\right)$. Logo pelo Teorema 3.40 existem homomorfismos φ de p_1 para p_2 e ψ de p_2 para p_1, com $\varphi(\tilde{q}_1) = \tilde{q}_2{}'$ e $\psi\left(\tilde{q}_2{}'\right) = \tilde{q}_1$. Note que $\psi \circ \varphi$ é uma transformação de recobrimento de p_1, pois $\psi \circ \varphi$ é contínua e $p_1 \circ \psi \circ \varphi = p_2 \circ \varphi = p_1$. Note que $(\psi \circ \varphi)(\tilde{q}_1) = \psi(\varphi(\tilde{q}_1)) = \psi\left(\tilde{q}_2{}'\right) = \tilde{q}_1$, ou seja, $\psi \circ \varphi$ tem um ponto fixo, portanto $\psi \circ \varphi = Id_{\tilde{X}_1}$. De forma análoga, $\varphi \circ \psi$ é uma transformação de recobrimento de p_2 que fixa o ponto $\tilde{q}_2{}'$, logo $\varphi \circ \psi = Id_{\tilde{X}_2}$. Portanto φ é um homeomorfismo e assim é um isomorfismo de recobrimento. □

3.5 O ESPAÇO DE RECOBRIMENTO UNIVERSAL

Proposição 3.42 (Propriedades de Recobrimento simplesmente conexo)**.**

1. *Seja $p : \tilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento com $\tilde{X}$ simplesmente conexo. Se $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$ é um recobrimento qualquer, então existe uma aplicação de recobrimento $\tilde{p} : \tilde{X} \to \tilde{X}_1$ tal que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X}_1 \arrow[d, "p_1"] \\ \tilde{X} \arrow[ur, "\tilde{p}"] \arrow[r, "p"'] & X \end{tikzcd}$$

Figura 3.17

2. *Além disso, se $\tilde{X}_1$ é também um espaço de recobrimento simplesmente conexo de X, então $\tilde{X}$ e $\tilde{X}_1$ são isomorfos.*

Demonstração. 1. Como $\tilde{X}$ é simplesmente conexo segue que $\pi\left(\tilde{X},\tilde{q}\right) = \{[c_{\tilde{q}}]\}$ para todo $\tilde{q} \in \tilde{X}$. Dado $\tilde{q} \in \tilde{X}$, considere $q = p(\tilde{q}) \in X$ e tome $\tilde{q}_1 \in p_1{}^{-1}(q)$, dessa forma $p_1(\tilde{q}_1) = q = p(\tilde{q})$. Note que $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right) = p_*(\{[c_{\tilde{q}}]\}) = \{[c_q]\}$ e assim $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X},\tilde{q}\right)\right)$ está contido em $p_{1*}\left(\pi_1\left(\tilde{X}_1,\tilde{q}_1\right)\right)$, logo, pelo Teorema 3.40, existe um homomorfismo de recobrimento $\tilde{p} : \tilde{X} \to \tilde{X}_1$ tal que $\tilde{p}(\tilde{q}) = \tilde{q}_1$. Além disso, segue da definição 3.37 que $p = p_1 \circ \tilde{p}$. Portanto o diagrama comuta.

2. Dado $\tilde{q} \in \tilde{X}$, considere $q = p(\tilde{q})$ e $\tilde{q}_1 \in p_1^{-1}(q)$, temos que $\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right) = \{[c_{\tilde{q}}]\}$ e $\pi_1\left(\tilde{X}_1, \tilde{q}_1\right) = \{[c_{\tilde{q}_1}]\}$. Pelo item **1** seque que $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right)\right) \subset p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}_1, \tilde{q}_1\right)\right)$ e de forma análoga, $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}_1, \tilde{q}_1\right)\right) \subset p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right)\right)$, assim $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right)\right) = p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}_1, \tilde{q}_1\right)\right)$. Uma vez que $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right)\right)$ e $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}_1, \tilde{q}_1\right)\right)$ são conjugados, segue pelo Teorema 3.41 que $\tilde{X}$ e $\tilde{X}_1$ são isomorfos. □

Observe que um espaço de recobrimento simplesmente conexo recobre todo espaço de recobrimento de X.

Definição 3.43. *Se $p : \tilde{X} \to X$ é uma aplicação de recobrimento com $\tilde{X}$ simplesmente conexo, então dizemos que p é um **recobrimento universal** e $\tilde{X}$ é chamado **Espaço de recobrimento universal de** X.*

Note que, pelo item **2** da proposição 3.42, todos os espaços de recobrimento universal de X são isomorfos.

Definição 3.44. *Um espaço X é **localmente simplesmente conexo** se ele possuir uma base de conjuntos abertos simplesmente conexo.*

Teorema 3.45 (Existência do Recobrimento Universal)**.** *Todo espaço topológico conexo e localmente simplesmente conexo (em particular, toda variedade conexa) tem um espaço de recobrimento universal.*

Demonstração. Seja X um espaço topológico conexo e localmente simplesmente conexo, logo X possui uma base de conjuntos abertos simplesmente conexos, em particular possui uma base de conjuntos abertos conexos por caminhos (Definição 2.14) e assim, pelo Lema 1.6 temos que X é localmente conexo por caminho, dessa forma X é conexo por caminhos (Proposição 1.10). Tome q_0 e defina $\tilde{X} = \bigcup\limits_{q \in X} A_q$, em que $A_q = \{[f]; f$ é um caminho de q_0 para $q\}$, considere a aplicação $p : \tilde{X} \to X$ definida por $p([f]) = f(1)$.

Note que p está bem definida pois dado $[f] \in A_q$ e $f_1, f_2 \in [f]$ temos que $p([f_1]) = f_1(1) = q = f_2(1) = p([f_2])$, pois f_1, f_2 são homotópicos por caminho. Vamos mostrar que $\tilde{X}$ é o espaço de recobrimento universal de X.

Afirmação 1: $\tilde{X}$ é um espaço topológico.

Para definir uma topologia em $\tilde{X}$ vamos construir uma base para $\tilde{X}$.

Para cada $[f] \in \tilde{X}$ e qualquer conjunto aberto simplesmente conexo $U \subset X$ contendo $f(1)$, defina o conjunto $[f \cdot U] \subset \tilde{X}$ como segue:

$$[f \cdot U] := \{[f \cdot a]; a \text{ é um caminho em } U \text{ começando em } f(1)\}.$$

Seja β a coleção de todos os conjuntos $[f \cdot U]$. Mostremos que β é uma base de $\tilde{X}$.

i) Como X é localmente simplesmente conexo, dado $[f] \in \tilde{X}$, existe um conjunto aberto e simplesmente conexo $U \subset X$ tal que $f(1) \in U$, logo $[f] = [f \cdot c_{f(1)}] \in [f \cdot U]$.
ii) Tome $[h] \in \tilde{X}$ com $[h] \in [f \cdot U] \cap [g \cdot V]$, dessa forma $[h] \in [f \cdot U]$ e $[h] \in [g \cdot V]$ e assim existe um caminho a em U e um caminho b em V tais que $f \cdot a \simeq_p h \simeq_p g \cdot b$. Tome W uma vizinhança simplesmente conexa de $h(1)$ contida em $U \cap V$. Observe que W existe do fato de X possuir uma base de conjuntos abertos simplesmente conexos. Seja $[h \cdot c] \in [h \cdot W]$, então $[h \cdot c] = [(f \cdot a) \cdot c] \in [f \cdot U]$. De forma análoga $[h \cdot c] = [(g \cdot b) \cdot c] \in [g \cdot V]$. Portanto, $[h \cdot W]$ é um elemento básico contido em $[f \cdot U] \cap [g \cdot V]$ e $[h] \in [h \cdot W]$.

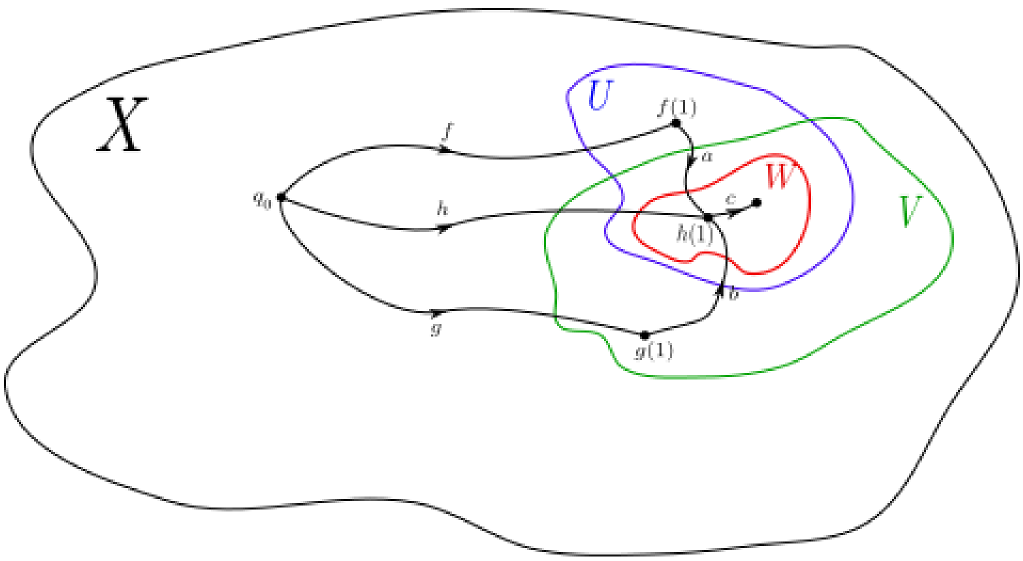


Figura 3.18

Portanto β é uma base de $\tilde{X}$ e assim $\tilde{X}$ é um espaço topológico gerado pela base β.
Afirmação 2: $\tilde{X}$ é conexo por caminhos.

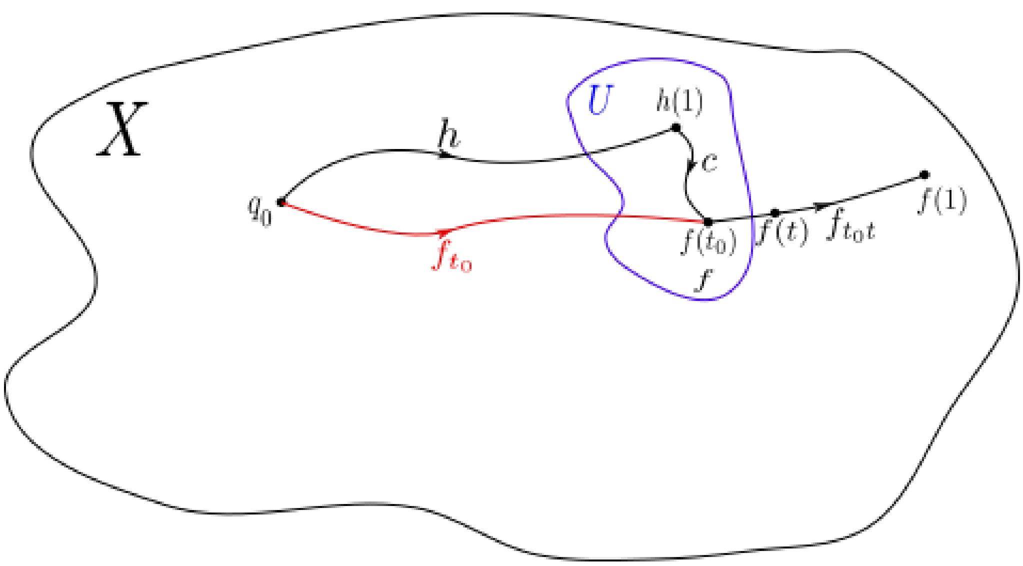


Figura 3.19

Tome $[f] \in \tilde{X}$. Vamos mostrar que existe um caminho em $\tilde{X}$ de $\tilde{q_0}$ para $[f]$, onde $\tilde{q_0} = [c_{q_0}]$.

Defina $f_t : I \to X$ dada por $f_t(s) = f(t \cdot s)$ para cada $0 \leqslant t \leqslant 1$, conforme a Figura 3.19. Note que f_t é contínua pois é composta de funções contínuas, $f_t(0) = f(t \cdot 0) = f(0) = q_0$ e $f_t(1) = f(t \cdot 1) = f(t)$, logo f_t é um caminho em X de q_0 para $f(t)$.

Agora, defina $\tilde{f} : I \to \tilde{X}$ dada por $\tilde{f}(t) = [f_t]$. Note que $\tilde{f}(0) = [f_0] = [c_{q_0}] = \tilde{q_0}$ e $\tilde{f}(1) = [f_1] = [f]$. Resta mostrarmos que $\tilde{f}$ é contínua e para isso vamos mostrar que $\tilde{f}^{-1}([h \cdot U])$ é aberto em I para todo $[h \cdot U] \in \beta$.

De fato, seja $[h \cdot U] \in \beta$. Se $\tilde{f}^{-1}([h \cdot U]) = \varnothing$, segue que $\tilde{f}^{-1}([h \cdot U])$ é aberto. Suponha agora que $\tilde{f}^{-1}([h \cdot U]) \neq \varnothing$ e tome $t_0 \in \tilde{f}^{-1}([h \cdot U]) \subset I$, isto é, $\tilde{f}(t_0) \in [h \cdot U]$, ou seja, $[f_{t_0}] \in [h \cdot U]$.

Como $[f_{t_0}] \in [h \cdot U]$, existe um caminho c em U tal que $c(0) = h(1)$ e $c(1) = f(t_0) = f_{t_0}(1)$, com $f_{t_0} \simeq_p h \cdot c$.

Para cada $0 \leqslant t \leqslant 1$, defina a aplicação $f_{t_0 t} : I \to X$ dada por $f_{t_0 t}(s) = f(t_0 + s(t - t_0))$. Note que $f_{t_0 t}$ é contínua e assim é um caminho de $f(t_0)$ para $f(t)$, logo $H : f_t \simeq_p f_{t_0} \cdot f_{t_0 t}$, onde $H : I \times I \to X$ é dada por $H(u, v) = (1 - v) f_t(u) + v[(f_{t_0} \cdot f_{t_0 t})(u)]$.

Do fato de f ser contínua existe um $\delta > 0$ tal que $f((t_0 - \delta, t_0 + \delta)) \subset U$. Assim, para cada $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ temos que $f_{t_0 t}$ é um caminho em U e $\tilde{f}(t) = [f_t] = [f_{t_0} \cdot f_{t_0 t}] = [(h \cdot c) \cdot f_{t_0 t}] \in [h \cdot U]$. Logo $\tilde{f}((t_0 - \delta, t_0 + \delta)) \subset [h \cdot U]$, ou seja, $t_0 \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset \tilde{f}^{-1}([h \cdot U])$. Portanto $\tilde{f}^{-1}([h \cdot U])$ é aberto.

Afirmação 3: p é uma aplicação de recobrimento.

Seja $q_1 \in X$ e U um aberto simplesmente conexo que contém q_1. Mostremos que U é uniformemente recoberto.

Seja $[f]$ uma classe de caminhos de q_0 para q_1 e considere um caminho a em U iniciando em $q_1 = f(1)$, logo $p([f \cdot a]) = a(1) \in U$ e assim $p([f \cdot U]) \subset U$.

Por outro lado, tome $x \in U$. Como U é conexo por caminhos existe um caminho a em U ligando $f(1)$ à x. Assim, $x = a(1) = (f \cdot a)(1) = p([f \cdot a]) \in p([f \cdot U])$. Dessa forma $p([f \cdot U]) = U$.

Em particular p é uma aplicação aberta, pois aplica aberto básico de $\tilde{X}$ em aberto básico de X.

Mostraremos agora que $p^{-1}(U) = \dot{\bigcup\limits_{[f] \in J}} [f \cdot U]$, onde $J = \{[f] \in \tilde{X}; f(0) = q_0 \text{ e } f(1) = q_1\}$.

A união é de fato disjunta, pois tomando f, g caminhos de q_0 em q_1, tais que $[f \cdot U] \cap [g \cdot U] \neq \varnothing$, existem caminhos a, b em U iniciando em q_1 e terminando em q_2 tais que $f \cdot a \simeq_p g \cdot b$. Uma vez que U é simplesmente conexo, segue pelo Lema 2.16 que $a \simeq_p b$ e assim $g \cdot b \simeq_p g \cdot a$. Dessa forma $f \cdot a \simeq_p g \cdot b \simeq_p g \cdot a$, logo $f \simeq_p (f \cdot a) \cdot a^{-1} \simeq_p (g \cdot a) \cdot a^{-1} \simeq_p g$. Portanto $[f \cdot U] = [g \cdot U]$.

Uma vez que $p([f \cdot U]) \subset U$, segue que, $[f \cdot U] \subset p^{-1}(U)$, dessa forma,

$\dot{\bigcup\limits_{[f]\in J}} [f \cdot U] \subset p^{-1}(U)$. Além disso, dado $[g] \in p^{-1}(U)$, temos que $g(1) = p([g]) \in U$. Como U é conexo por caminhos existe um caminho b de $g(1)$ para q_1 e $[g] = [(g \cdot b) \cdot b^{-1}] \in [(g \cdot b) \cdot U] \subset \dot{\bigcup\limits_{[f]\in J}} [f \cdot U]$, logo $p^{-1}(U) = \dot{\bigcup\limits_{[f]\in J}} [f \cdot U]$.

Note que p é uma aplicação contínua pois para cada elemento básico simplesmente conexo U de X temos que $p^{-1}(U)$ é aberto em $\tilde{X}$. Além disso p é sobrejetiva pois dado $q \in X$, uma vez que X é conexo por caminhos existe um caminho g de q_0 para q, assim $p([g]) = g(1) = q$.

Mostremos agora que $p|_{[f \cdot U]} : [f \cdot U] \to U$ é homeomorfismo para cada conjunto $[f \cdot U]$.

Como $U = p([f \cdot U])$, então $p|_{[f \cdot U]} : [f \cdot U] \to U$ é sobrejetora.

Para ver que $p|_{[f \cdot U]} : [f \cdot U] \to U$ é injetora, tome $[g], [g'] \in [f \cdot U]$ e suponha que $p([g]) = p([g'])$, ou seja, $g(1) = g'(1)$. Logo pela definição de $[f \cdot U]$ segue que $g \simeq_p f \cdot a$ e $g' \simeq_p f \cdot a'$ para certos caminhos $a, a' \in U$ de $f(1)$ para $g(1)$. Como U é simplesmente conexo, segue pelo Lema 2.16 que $a \simeq_p a'$ e portanto $[g] = [g']$.

Segue do fato de p ser uma aplicação aberta e $p|_{[f \cdot U]} : [f \cdot U] \to U$ ser a restrição de p a um subconjunto aberto de $\tilde{X}$ que $p|_{[f \cdot U]} : [f \cdot U] \to U$ é aberta.

Como $p|_{[f \cdot U]}$ é uma bijeção, contínua e aberta, segue que $p|_{[f \cdot U]}$ é um homeomorfismo.

Cada conjunto $[f \cdot U]$ é aberto por definição, os quais são homeomorfos a U que é conexo por caminhos, logo $[f \cdot U]$ é conexo por caminhos. Dessa forma $\tilde{X}$ é localmente conexo por caminhos. Portanto p é uma aplicação de recobrimento.

Afirmação 4: $\tilde{X}$ é simplesmente conexo.

Seja $F : I \to \tilde{X}$ um laço baseado em $\tilde{q_0}$. Considere $f = p \circ F$, logo F é um levantamento de f. Considerando $\tilde{f}(t) = [f_t]$ como na **Afirmação 2**, temos que $(p \circ \tilde{f})(t) = p([f_t]) = f_t(1) = f(t)$, logo $\tilde{f}$ é um levantamento da f começando em $\tilde{q_0}$. Pela Proposição 3.12, temos que $F = \tilde{f}$. Como F é um laço segue que $[c_{q_0}] = \tilde{q_0} = F(1) = \tilde{f}(1) = [f_1] = [f]$. Dessa forma $f \simeq_p c_{q_0}$. Como F é um levantamento de f, $c_{\tilde{q_0}}$ é um levantamento de c_{q_0}, $f \simeq_p c_{q_0}$ e $F(0) = c_{\tilde{q_0}}(0)$ então, pela Proposição 3.15, $F \simeq_p c_{\tilde{q_0}}$, como queríamos. $\square$

4 VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

4.1 VARIEDADE TOPOLÓGICA E CARTAS COORDENADAS

Nesta seção será apresentado o conceito de variedade topológica. Definiremos os conceitos básicos (que serão de suma importância no decorrer do trabalho) tais como cartas coordenadas, aplicação coordenada e bola coordenada. A referência principal utilizada foi [3].

Definição 4.1. *Seja M um espaço topológico, dizemos que M é uma* ***variedade topológica*** *de dimensão n ou n-variedade topológica se satisfizer as seguintes propriedades:*

1. *M é um espaço de Hausdorff.*
2. *Existe uma base enumerável para a topologia de M.*
3. *M é localmente Euclidiano de dimensão n, ou seja, dado $p \in M$, existem uma vizinhança $U \subset M$, um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ e um homeomorfismo $\phi : U \to V$.*

Observações 4.2. 1. *Usualmente escrevemos $\dim M = n$ (ou simplesmente M^n) para dizer que M é uma variedade topológica de dimensão n.*

Lema 4.3. *Seja M um espaço topológico. Se M é um espaço de Hausdorff, possui base enumerável e para cada $p \in M$ existir uma vizinhança U que é homeomorfa a uma bola aberta do $\mathbb{R}^n$ ou ao próprio $\mathbb{R}^n$, então M é uma variedade topológica.*

Demonstração. Se $U_0 = \mathbb{R}^n$, então não há nada a fazer. Caso contrário como M satisfaz a condição 3 da Definição 4.1, existem abertos U de M e U_0 de $\mathbb{R}^n$, com $p \in U$, e existe um homeomorfismo $\varphi : U \to U_0$.

Seja $x = \varphi(p) \in U_0 \subset \mathbb{R}^n$ e considere uma bola $B(x, \epsilon) \subset U_0$. Uma vez que φ é um homeomorfismo, então a aplicação $\varphi|_V : V \to B(x, \epsilon)$ é um homeomorfismo, em que $V = \varphi^{-1}(B)$, onde $B = B(X, \epsilon)$.

A recíproca é imediata. □

Vejamos agora alguns exemplos de variedades topológicas.

Exemplo 4.4. *O espaço $\mathbb{R}^n$.*

Note que $\mathbb{R}^n$ é Hausdorff pois é espaço métrico, o conjunto de todas as bolas abertas com centro racional e raio racional formam uma base enumerável e este é globalmente euclidiano, e em particular localmente euclidiano.

Exemplo 4.5. *Gráfico de funções contínuas.*

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $f : U \to \mathbb{R}^k$ uma função contínua. O gráfico de f é o subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ definido por $\Gamma(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k;\ x \in U \text{ e } y = f(x)\}$ com a topologia do subespaço.

Considere $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ a projeção no primeiro fator, e a restrição $\varphi := \pi_1|_{\Gamma(f)} : \Gamma(f) \to U$ dada por $\varphi(x, y) = x$. Note que φ é uma aplicação contínua, pois é a restrição de uma função contínua.

Além disso, φ é bijetiva. De fato, tome (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em $\Gamma(f)$, com $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, logo $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Observe que $x_1 \neq x_2$, pois caso contrário $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$, o que é um absurdo. Segue que $\varphi(x_1, y_1) = x_1 \neq x_2 = \varphi(x_2, y_2)$ e assim φ é injetiva.

Agora, tome $x \in U$, logo $(x, f(x)) \in \Gamma(f)$ e dessa forma, $\varphi(x, f(x)) = x$. Portanto, φ é bijetiva.

A aplicação $\psi : U \to \Gamma(f)$ dada por $\psi(x) = (x, f(x))$ é contínua pois suas funções coordenadas são contínuas. Além disso, $\varphi(\psi(x)) = \varphi(x, f(x)) = x = I_U(x)$ e $\psi(\varphi(x, f(x))) = \psi(x) = (x, f(x)) = I_{\Gamma(f)}(x, f(x))$. Logo, $\psi = \varphi^{-1}$ e portanto φ é um homeomorfismo.

A primeira e a segunda condição para variedade topológica seguem do fato de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^k$ serem Hausdorff e terem base enumerável e do fato de $\Gamma(f)$ ser subespaço de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$.

Vamos agora definir o conceito de carta local.

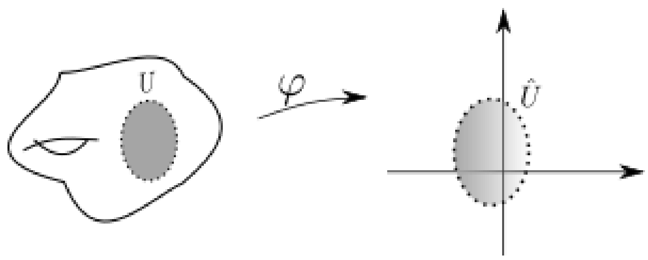


Figura 4.1

Definição 4.6. *Seja M^n uma variedade topológica. Uma* ***carta coordenada*** *(ou simplesmente* ***carta****) em M é um par (U, φ), onde U é um subconjunto aberto de M e $\varphi : U \to$ é um homeomorfismo de U para um subconjunto aberto $= \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Além disso:*

1. *O conjunto U é chamado* ***domínio coordenado****, ou* ***vizinhança coordenada*** *de cada um de seus pontos.*

2. *A aplicação φ é chamada* ***aplicação coordenada****, e as funções componentes $(x^1, \ldots, x^n)$ de φ, definidas por $\varphi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$ são chamadas* ***coordenadas locais*** *em U.*

3. *Dada uma carta (U, φ), se $\varphi(U)$ é uma bola aberta em $\mathbb{R}^n$, então U é chamado* ***bola coordenada****.*

Observações 4.7. *1. Pela terceira condição de variedade topológica, cada ponto $p \in M$ está contido em alguma carta coordenada (U, φ).*

2. *se* $\varphi(p) = 0$*, dizemos que a carta é centrada em* p*.*

3. *dada uma carta* (U, φ) *cujo domínio contém* p*, podemos obter uma nova carta centrada em* p *subtraindo o vetor constante* $\varphi(p)$*.*

Exemplo 4.8. *Todo subconjunto aberto de* M^n *é uma* n*-variedade topológica com a topologia induzida.*

De fato, seja A *um subconjunto aberto de* M*. Temos que,*

1. A *é Hausdorff pois* M *é Hausdorff;*

2. A *é localmente euclidiano. De fato, como* M *é localmente euclidiano, dado* $p \in A \subset M$*, existe uma carta* (U, φ)*, com* U *uma vizinhança de* p *em* M*. Logo,* $W = U \cap A$ *é uma vizinhança de* p *em* A *e* $\varphi|_W : W \longrightarrow \varphi(W)$ *é um homeomorfismo de* W *em* $\varphi(W)$*, logo* $(W, \varphi|_W)$ *é uma carta local em* A*, com* $p \in W$*. Portanto,* A *é localmente euclidiano.*

3. A *possuí uma base enumerável: Seja* β *uma base enumerável de* M *e considere o conjunto* $C = \{B \cap A;\ B \in \beta\}$*. Logo* C *é uma base enumerável de* A

Exemplo 4.9. *Esfera* $\mathbb{S}^n = \left\{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum\limits_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1\right\}$*.*

Para cada inteiro $n \geqslant 0$*, a* n*-esfera unitária é Hausdorff e possuí base enumerável considerando* $\mathbb{S}^n$ *com a topologia induzida em* $\mathbb{R}^{n+1}$*. Mostremos que* $\mathbb{S}^n$ *é localmente euclidiana.*

Para cada $i = 1, \ldots, n+1$ *defina os subconjuntos abertos de* $\mathbb{S}^n$*:*

$$U_i^+ = \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{S}^n;\ x^i > 0\} \quad e \quad U_i^- = \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{S}^n;\ x^i < 0\}$$

É claro que U_i^+ *e* U_i^- *são abertos em* $\mathbb{S}^n$*, já que são a interseção dos abertos em* $\mathbb{R}^{n+1}$ $A_i^+ = \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1};\ x^i > 0\}$ *e* $A_i^- = \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1};\ x^i < 0\}$ *com* $\mathbb{S}^n$*, respectivamente, e além disso,* $\mathbb{S}^n = \bigcup\limits_{i=1}^{n+1} \left(U_i^+ \cup U_i^-\right)$*.*

Seja $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ *a bola aberta* $\mathbb{B}^n = \left\{(y^1, \ldots, y^n) \in \mathbb{R}^n; \sum\limits_{i=1}^{n} (x^i)^2 < 1\right\}$ *e considere as aplicações* $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \to \mathbb{B}^n$ *definidas por:*

$$\varphi_i^\pm(x^1, \ldots, x^{n+1}) = (x^1, \ldots, x^{i-1}, \widehat{x^i}, x^{i+1}, \ldots, x^{n+1}),$$

onde $\widehat{x^i}$ *significa que omitimos essa coordenada. Note que essa aplicação está bem definida pois para cada* $x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in U_i^\pm$ *temos que* $x^i \neq 0$ *e assim,* $\varphi_i^\pm(x) \in \mathbb{B}^n$*.*

Cada uma dessas aplicações $\varphi_i^\pm$ *é uma bijeção contínua. De fato,*

- ***injetividade:*** *Dados* $x = (x^1, \ldots, x^{n+1}), y = (y^1, \ldots, y^{n+1}) \in U_i^\pm$*, tal que* $\varphi_i^\pm(x) = \varphi_i^\pm(y)$*, segue que* $(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^{n+1}) = (y^1, \ldots, y^{i-1}, y^{i+1}, \ldots, y^{n+1})$ *e como*

$\sum_{i=1}^{n+1}(x^i)^2 = 1 = \sum_{i=1}^{n+1}(y^i)^2$, *temos que* $(x^i)^2 = (y^i)^2$, *mas* x^i *e* y^i *tem a mesma paridade, já que* $x, y \in U_i^+$ *ou* $x, y \in U_i^-$. *Assim,* $x^j = y^j$, *para cada* $j = 1, \ldots, n+1$. *Portanto,* $x = y$.

- ***sobrejetividade:*** *Dado* $(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{B}^n$, *segue que* $0 \leqslant \sum_{j=1}^{n}(x^j)^2 = a < 1$ *e assim podemos tomar* $x' = \pm\sqrt{1-a}$ *o qual satisfaz* $\sum_{j=1}^{n}(x^j)^2 + (x')^2 = 1$. *Logo,* $x = (x^1, \ldots, x^{i-1}, x', x^i, \ldots, x^n) \in U_i^\pm$, *com* $\varphi_i^\pm(x) = (x^1, \ldots, x^n)$.

- ***continuidade:*** *a continuidade das aplicações* $\varphi_i^\pm$ *decorrem do fato de que cada* j*-ésima coordenada de* $\varphi_i^\pm$ *é precisamente a projeção na* j*-ésima coordenada para* $j < i$ *e a projeção na* $(j+1)$*-ésima coordenada para* $j > i$, *as quais são contínuas.*

  Observe que a aplicação inversa de $\varphi_i^\pm$ *é dada por* $(\varphi_i^\pm)^{-1} : \mathbb{B}^n \to U_i^\pm$, *onde* $(\varphi_i^\pm)^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = \left(x^1, \ldots, x^{i-1}, \pm\sqrt{1 - \sum_{j=1}^{n}(x^j)^2}, x^i, \ldots, x^n\right)$. *Uma vez que cada coordenada de* $(\varphi_i^\pm)^{-1}$ *é uma função contínua, segue que* $(\varphi_i^\pm)^{-1}$ *é uma função contínua, e portanto* $\varphi_i^\pm$ *é um homeomorfismo, para cada* $i = 1, \ldots, n+1$.

Temos que $\{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm);\ i = 1, \ldots, n+1\}$ *é um conjunto de* $2(n+1)$ *cartas* n*-dimensionais em* $\mathbb{S}^n$, *com* $\mathbb{S}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1}(U_i^+ \cup U_i^-)$. *Portanto,* $\mathbb{S}^n$ *é uma variedade topológica.*

4.2 Propriedades Topológicas das Variedades

Está seção apresentará alguns resultados topológicos herdados pelas variedades topológicas.

Lema 4.10. *Toda variedade topológica tem uma base enumerável constituída de bolas coordenadas pré-compactas.*

Demonstração. Seja M uma n-variedade topológica. Dividiremos a demonstração em dois casos:

Caso 1: M é coberta por uma única carta, nesse caso, existe um homeomorfismo $\varphi : M \longrightarrow U$, com U aberto em $\mathbb{R}^n$. Considere o conjunto enumerável $\beta = \{B(x,r) \subset \mathbb{R}^n;\ x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}$ e $\exists\ r' > r,$ com $B(x,r') \subset U\}$.

Afirmação 1: β é base para U.

Tome A um aberto de U e $p \in A$. Como U é um aberto em $\mathbb{R}^n$, então A também é um aberto em $\mathbb{R}^n$, logo existem $r' \in \mathbb{Q}$ e $x \in \mathbb{Q}^n$ tal que $p \in B(x,r') \subset A$. Seja $r \in \mathbb{Q}$, com $|p-x| < r < r'$. Logo, $B(x,r) \in \beta$ e $p \in B(x,r) \subset A$. Portanto, β é base de U.

Afirmação 2: Todo $B \in \beta$ é pré-compacto.

De fato, tome $B \in \beta$, logo existem racionais $r' > r$, tais que $B = B(x,r) \subset B(x,r') \subset U \subset \mathbb{R}^n$, dessa forma $B[x,r] = \overline{B(x,r)} \subset B(x,r') \subset \mathbb{R}^n$. Como $\overline{B(x,r)}$ é fechado e limitado, $\overline{B(x,r)}$ é compacto, desta forma, $B(x,r)$ é pré-compacto.

Assim, como φ é um homeomorfismo e M é Hausdorff, então, pelos Lemas 1.3 e 1.14, a coleção de conjuntos da forma $\varphi^{-1}(B)$, com $B \in \beta$ é uma base enumerável para M formada de bolas pré-compactas.

Caso 2: M não é coberto por uma única carta.

Como M é uma variedade topológica com base enumerável, pelo Lema 1.1 existe uma coleção enumerável de cartas (U_i, φ_i), com $M = \bigcup\limits_i U_i$.

Análogo ao feito no **Caso 1**, mostra-se que cada domínio coordenado U_i tem uma uma base enumerável β_{U_i} de bolas coordenadas pré-compactas. Mostremos que o conjunto enumerável $\beta = \bigcup\limits_i \beta_{U_i}$ é uma base para M, formada por elementos pré-compactos.

De fato, seja A um aberto de M e $p \in A$. Logo, existe alguma carta (U_i, φ_i), com $p \in U_i$ e assim, $(U_i \cap A)$ é um aberto em U_i (e em A) contendo p. Como β_{U_i} é uma base para U_i, existe $B \in \beta_{U_i} \subset \beta$, com $p \in B \subset U_i \cap A \subset A$. Logo, β é uma base para M.

Por fim, se $V \subset U_i$ é uma dessas bolas, considerando $\overline{V}_{U_i}$ o fecho de V em U_i e $\overline{V}_M$ o fecho de V em M temos que, $\overline{V}_{U_i}$ é compacto em U_i e consequentemente em M. Mas M é Hausdorff, logo $\overline{V}_{U_i}$ é fechado em M e assim, $\overline{V}_M \subset \overline{V}_{U_i}$, pois $V \subset \overline{V}_{U_i}$. Daí, $\overline{V}_M = \overline{V}_{U_i}$, e portanto, V é pré-compacto. □

Proposição 4.11. *Seja M uma variedade topológica, então:*

1. *M é localmente conexo por caminhos;*
2. *M é conexo se, e somente se, é conexo por caminhos;*
3. *As componentes conexas de M são as mesmas que suas componentes conexas por caminhos;*
4. *M tem uma quantidade enumerável de componentes conexas, cada uma das quais é um subconjunto aberto de M. Em particular são variedades topológicas conexas.*

Demonstração.

1. No Lema 4.10 vimos que M possui uma base enumerável de bolas coordenadas pré-compactas. Observe que cada uma dessas bolas é conexa por caminhos, pois é homeomorfa a uma bola de $\mathbb{R}^n$ a qual é conexa por caminhos. Logo, M possui uma cobertura aberta formada por abertos conexos por caminhos e segue que M é localmente conexo por caminhos.

Os itens 2 e 3 decorrem da Proposição 1.10.

4. Pela Proposição 1.10, temos que cada componente de M é aberto em M, dessa forma a coleção de componentes é uma cobertura aberta de M, e além disso M possui

uma base enumerável de bolas coordenadas pré-compactas, as quais são conexas por caminhos, logo conexas. Como cada bola coordenada está em uma e apenas uma componente conexa, então M possui uma quantidade enumerável de componentes. □

4.2.1 Compacidade Local e Paracompacidade

Proposição 4.12. *Toda variedade topológica M é localmente compacta.*

Demonstração. Segue diretamente do Lema 4.10 e da Proposição 1.16. □

Teorema 4.13. *Toda variedade topológica é paracompacta. De fato, dado uma variedade topológica M, uma cobertura aberta χ de M e qualquer base β para a topologia de M, existe um refinamento aberto, enumerável e localmente finito de χ consistindo de elementos de β.*

Demonstração. Dados M, χ, β como na hipótese do Teorema, seja $(K_j)_{j=1}^{\infty}$ uma exaustão (conforme a definição 1.20) de M por conjuntos compactos, cuja a existência é garantida pela Proposição 1.21.

Para cada $j \geqslant 1$, seja $V_j = K_{j+1} \backslash \text{int} K_j$ e $W_j = \text{int} K_{j+2} \backslash K_{j-1}$, considerando $K_i = \varnothing$ se $i < 1$ e $V_0 = K_1$. Então V_j ($j \geqslant 0$) é um conjunto compacto contido no subconjunto aberto W_j.

Para cada $x \in V_j$ ($j \geqslant 0$), existe um $X_x \in \chi$ contendo x e assim $x \in X_x \cap W_j$. Como β é base, existe $B_x \in \beta$ tal que $x \in B_x \subset X_x \cap W_j$, logo a coleção desses B_x com x variando em V_j formam uma cobertura aberta de V_j em M, e como V_j é compacto, tal cobertura admite uma subcobertura finita. A união dessas subcoberturas finitas variando j formam uma cobertura enumerável aberta de M que refina χ.

Afirmação: $W_j \cap W_{j'} = \varnothing$ para $j' > j + 2$.

De fato, para qualquer $i \geqslant 2$ temos que $W_{j+1+i} = \text{int} K_{j+3+i} \backslash K_{j+i}$ e $W_j = \text{int} K_{j+2} \backslash K_{j-1} \subset \text{int} K_{j+2} \subset K_{j+2} \subset \text{int} K_{j+i} \subset K_{j+i}$, logo $W_{j+1+i} \cap W_j = \varnothing$, $\forall i \geqslant 2$.

Como a subcobertura finita de V_j consiste de conjuntos contidos em W_j segue que esse refinamento é localmente finito. □

Lema 4.14. *O grupo fundamental de uma variedade topológica é enumerável.*

Demonstração. Seja M uma variedade topológica. Pelo Lema 4.10, existe uma coleção enumerável β de bolas coordenadas regulares que cobrem M.

Note que para cada par de bolas coordenadas $B, B' \in \beta$, $B \cap B'$ é uma variedade topológica, pois é um aberto em M. Logo pela Proposição 4.11, $B \cap B'$ possui uma quantidade enumerável de componentes conexas, as quais são componentes conexas por caminhos.

Para cada $B \cap B'$ (incluindo quando $B = B'$), tome um ponto x em cada uma de suas componentes conexas e considere o conjunto enumerável χ de todos esses pontos.

Dado $B \in \beta$ e para cada $x, x' \in \chi$ tal que $x, x' \in B$, considere um caminho $h^B_{x,x'}$ em B de x para x'.

Do fato de χ conter pelo menos um ponto de cada componente de M, para cada ponto em M podemos escolher um ponto base $p \in \chi$ na mesma componente conexa em M. Defina um **laço especial** como sendo um laço baseado em p dado pelo produto finito de caminhos da forma $h^B_{x,x'}$.

Note que o conjunto dos laços especiais é enumerável e a classe de homotopia de caminhos de cada um deles é um elemento de $\pi_1(M, p)$, assim para mostrar que $\pi_1(M, p)$ é enumerável é suficiente mostrar que cada elemento de $\pi_1(M, p)$ é homotópico por caminhos a um laço especial.

Seja $f : [0, 1] \to M$ um laço baseado em p. Como β cobre M segue que $\{f^{-1}(B)\}_{B \in \beta}$ é uma cobertura aberta de $[0, 1]$ e como $[0, 1]$ é compacto, pelo Lema 1.26, existe $\delta > 0$ tal que para cada subconjunto $A \subset [0, 1]$, se $d(A) < \delta$ então, $A \subset f^{-1}(B)$, para algum $B \in \beta$. Escolhendo k suficientemente grande de forma que $\frac{1}{k} < \delta$, para cada $i \in \{1, \cdots, k\}$, $d\left(\left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right]\right) = \frac{1}{k} < \delta$, dessa forma considerando $a_0 = 0, a_1 = \frac{1}{k}, \cdots, a_i = \frac{i}{k}, \ldots, a_k = \frac{k}{k} = 1$, temos que $[a_{i-1}, a_i] \subset f^{-1}(B)$, para algum $B \in \beta$.

Para cada i, seja f_i a reparametrização de $f|_{[a_{i-1}, a_i]}$, de forma que seu domínio seja o intervalo $[0, 1]$ e $B_i \in \beta$ uma bola coordenada contendo a imagem de f_i, dessa forma para cada $0 < i < k$, $f(a_i) \in B_i \cap B_{i+1}$.

Seja $x_i \in \chi$ um ponto na mesma componente conexa de $f(a_i)$ em $B_i \cap B_{i+1}$ e g_i um caminho em $B_i \cap B_{i+1}$ de x_i para $f(a_i)$.

Considerando que $x_0 = f(a_0) = f(a_k) = x_k = p$ e g_0, g_k são os caminhos constante baseados em p, uma vez que B_i é simplesmente conexo, pelo Lema 2.16, $g_i^{-1} \cdot g_i$ é homotópico por caminhos ao caminho constante, onde g_i^{-1} é o caminho inverso de g_i, temos que:

$$f \simeq_p f_1 \cdot \ldots \cdot f_k \simeq_p g_0 \cdot f_1 \cdot {g_1}^{-1} \cdot g_1 \cdot f_2 \cdot g_2^{-1} \cdot \ldots \cdot g_{k-1} \cdot f_k \cdot {g_k}^{-1} \simeq_p \tilde{f}_1 \cdot \tilde{f}_2 \cdot \ldots \cdot \tilde{f}_k,$$

onde $\tilde{f}_i = g_{i-1} \cdot f_i \cdot {g_i}^{-1}$.

Para cada i, $\tilde{f}_i$ é um caminho em B_i de x_{i-1} para x_i, e como B_i é simplesmente conexo, $\tilde{f}_i \simeq_p h^{B_i}_{x_{i-1}, x_i}$. Portanto f é homotópico por caminhos á um laço especial.

Como para todo $x \in M$, existe um $p \in \chi$ tal que $\pi_1(x, M)$ é isomorfo a $\pi_1(p, M)$ (Corolário 2.13), segue que todo grupo fundamental é enumerável. □

4.3 Estruturas diferenciáveis

Definição 4.15. *Seja M uma variedade topológica e (U, φ) , (V, ψ) cartas de M de forma que $U \cap V \neq \emptyset$,a aplicação composição $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ é chamada **aplicação transição** de φ para ψ.*

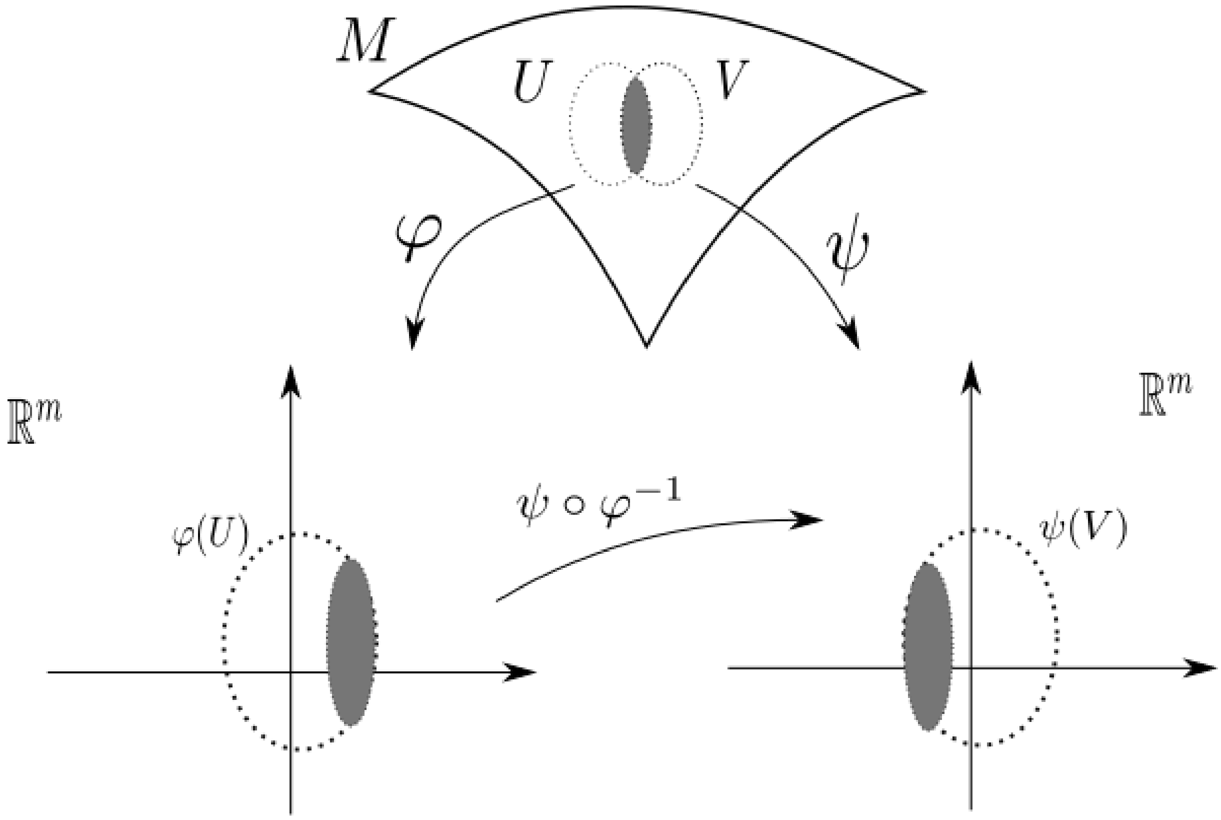


Figura 4.2

Definição 4.16. *Dizemos que duas cartas (U, φ) , (V, ψ) são **compatíveis** se $U \cap V = \emptyset$ ou se a aplicação transição $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ é um difeomorfismo de classe C^∞.*

Observações 4.17.

1. *No decorrer desse trabalho sempre que nos referirmos a aplicação transição estaremos considerando diferenciabilidade de classe C^∞.*

2. *Note que $\varphi(U \cap V)$ e $\psi(U \cap V)$ são subconjuntos abertos do $\mathbb{R}^n$ logo diferenciabilidade dessa aplicação é interpretada da forma que já conhecemos de cálculo, ou seja, ter derivadas parciais contínuas de todas as ordens.*

Definição 4.18. *Um **atlas** para M é uma coleção de cartas cujos domínios cobrem M e são duas a duas compatíveis. Um atlas $\mathcal{A}$ em M é **maximal** se não estiver contido em qualquer atlas maior.*

*Seja M uma variedade topológica, uma **estrutura diferenciável** em M é um atlas maximal. Além disso, qualquer carta (U, φ) contida no atlas maximal $\mathcal{A}$ é chamada **carta diferenciável**.*

Definição 4.19. *Uma **variedade diferenciável** é um par $(M, \mathcal{A})$, onde M é uma variedade topológica e $\mathcal{A}$ é uma estrutura diferenciável em M.*

Lema 4.20. *Toda variedade diferenciável possui uma base enumerável constituída de bolas coordenadas pré-compactas.*

Demonstração. Segue de forma análoga a demonstração do Lema 4.10, observando que restrições de cartas coordenadas a subconjuntos abertos dos domínios coordenados são também cartas coordenadas. □

Proposição 4.21. *Seja M uma variedade topológica.*

1. *Todo atlas $\mathcal{A}$ em M está contido em um único atlas maximal, chamado de estrutura diferenciável determinada por $\mathcal{A}$*

2. *Dois atlas em M determinam a mesma estrutura diferenciável se, e somente se, sua união é um atlas.*

Demonstração. 1. Seja $\mathcal{A}$ um atlas para M. Mostremos que existe um único atlas maximal contendo $\mathcal{A}$.

Existência: Considere o conjunto $\overline{\mathcal{A}}$ de todas as cartas que são compatíveis com cada carta em $\mathcal{A}$. Note que $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$, dessa forma $\overline{\mathcal{A}}$ cobre M. Sejam (U, φ) e (V, ψ) duas cartas de $\overline{\mathcal{A}}$ com $U \cap V \neq \emptyset$, mostremos que a aplicação $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ é diferenciável.

Tome $x = \varphi(p) \in \varphi(U \cap V)$ qualquer, como o domínio das cartas em $\mathcal{A}$ cobre M, então existe alguma carta $(W, \theta) \in \mathcal{A}$ tal que $p \in W$. Uma vez que toda carta em $\overline{\mathcal{A}}$ é compatível com a carta (W, θ) ambas as aplicações $\theta \circ \varphi^{-1}$ e $\psi \circ \varphi^{-1}$ são diferenciáveis. Como $p \in (U \cap V \cap W)$ segue que $\psi \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ \theta^{-1}) \circ (\theta \circ \varphi^{-1})$ é diferenciável em x, pois é composição de aplicações diferenciáveis. Portanto $\psi \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável em cada ponto $\varphi(p) \in \varphi(U \cap V)$ e dessa forma $\overline{\mathcal{A}}$ é um atlas para M.

Além disso, qualquer carta que é compatível com toda carta de $\overline{\mathcal{A}}$ é em particular compatível com toda carta de $\mathcal{A}$, logo ela já é uma carta em $\overline{\mathcal{A}}$ e portanto $\overline{\mathcal{A}}$ é maximal.

Unicidade: Suponha que $\mathcal{B}$ é um outro atlas maximal contendo $\mathcal{A}$, logo cada uma de suas cartas é compatível com cada carta de $\mathcal{A}$, assim $\mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{A}}$, mas como $\mathcal{B}$ é maximal segue que $\mathcal{B} = \overline{\mathcal{A}}$.

2. $\Rightarrow$) Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ atlas em M. Suponha que ambos determinam a mesma estrutura diferenciável, logo $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ e $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$, onde $\mathcal{C}$ é o atlas maximal. Mostremos que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ é um atlas. É claro que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ cobre M pois o domínio das cartas de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ cobrem M, agora tome (U, φ) e (V, ψ) cartas de $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Caso 1: $U \cap V = \emptyset$, logo (U, φ) e (V, ψ) são compatíveis por definição.

Caso 2: $U \cap V \neq \emptyset$ e $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$, como $\mathcal{A}$ é um atlas temos que (U, φ) e (V, ψ) são compatíveis.

Caso 3: $U \cap V \neq \emptyset$ e $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{B}$, como $\mathcal{B}$ é um atlas temos que (U, φ) e (V, ψ) são compatíveis.

Caso 4: $U \cap V \neq \emptyset$, $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ e $(V, \psi) \in \mathcal{B}$. Note que (U, φ) é compatível com as cartas de $\mathcal{C}$ e como $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ temos que (U, φ) é compatível com as cartas de $\mathcal{B}$, assim (U, φ) e (V, ψ) são compatíveis.

Portanto $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ é um atlas.

$\Leftarrow$) Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ atlas e suponha que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ é um atlas, mostremos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ determinam a mesma estrutura diferenciável. Seja $\mathcal{C}$ o atlas maximal que contém $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Por um lado $\mathcal{A} \subset (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$, logo $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$. Por outro lado, $\mathcal{B} \subset (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$, logo $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$. Pela unicidade do atlas maximal, temos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ determinam a mesma estrutura diferenciável. □

Definição 4.22. *Um conjunto $B \subset M$ é uma* ***bola coordenada regular*** *se existir uma bola coordenada $B' \supset \overline{B}$ e uma aplicação coordenada $\varphi : B' \to B(0, r') \subset \mathbb{R}^n$, tal que para algum número real positivo $r < r'$, $\varphi(B) = B(0, r), \varphi\left(\overline{B}\right) = \overline{B(0, r)}$ e $\varphi\left(B'\right) = B(0, r')$.*

Lema 4.23. *Toda bola coordenada regular é pré compacta em M.*

Demonstração. Tome $B \subset M$ uma bola coordenada regular, $B' \supset \overline{B}$, $\varphi : B' \to B(0, r')$ de forma que para algum número real positivo $r < r'$, $\varphi(B) = B(0, r), \varphi\left(\overline{B}\right) = \overline{B(0, r)}$ e $\varphi(B') = B(0, r')$, logo $\varphi|_{\overline{B}} : \overline{B} \to \varphi\left(\overline{B}\right) = \overline{B(0, r)}$ é um homeomorfismo. Uma vez que $\overline{B(0, r)}$ é compacto temos que $\overline{B}$ é compacto, portanto B é uma bola coordenada regular pré compacta. □

Proposição 4.24. *Toda variedade diferenciável tem uma base enumerável de bolas coordenadas regulares.*

Demonstração. Seja M uma variedade diferenciável. Pelo Lema 4.20, M possui uma base enumerável $\beta = \{B_i\}_{i \in J}$ de bolas coordenadas pré-compactas, assim para cada $i \in J$ existe um homeomorfismo $\varphi_i : B_i \to B(x_i, r_i) \subset \mathbb{R}^n$. Dado $i \in J$, considere os conjuntos enumeráveis $C_i = \{B(x_i, r); r < r_i \text{ e } r \in \mathbb{Q}\}$ e ${\varphi_i}^{-1}(C_i) = \{\varphi_i^{-1}(B(x_i, r)); r < r_i \text{ e } r \in \mathbb{Q})\}$.
Afirmação 1: $C = \bigcup_{i \in J} \varphi_i^{-1}(C_i)$ é uma base enumerável de M.

Com efeito, tome U aberto de M e $x \in U$. Como β é base de M, existe $B_i \in \beta$ de forma que $x \in B_i \subset U$, assim $\varphi_i(x) \in \varphi_i(B_i) = B(x_i, r_i)$, segue que $|\varphi_i(x) - x_i| = p < r_i$, tomando $r \in \mathbb{Q}$ com $p < r < r_i$ temos que $\varphi_i(x) \in B(x_i, r)$, ou seja, $x \in \varphi_i^{-1}(B(x_i, r)) \subset B_i \subset U$ com $\varphi_i^{-1}(B(x_i, r)) \in \varphi_i^{-1}(C_i) \subset C$. Portanto C é uma base de M.

Mostremos agora que cada elemento básico de C é uma bola coordenada regular.

De fato, fixado $i \in J$, tome $\varphi_i^{-1}(B(x_i, r))$ com $r < r_i$. Considere o difeomorfismo $\psi_i : B(x_i, r_i) \to B(0, r_i)$ dado por $\psi_i(x) = x - x_i$. Seja $\tilde{\varphi}_i := \psi_i \circ \varphi_i : B_i \to B(0, r_i)$. Note que $\tilde{\varphi}_i$ é um homeomorfismo, pois é composição de homeomorfismos.

Temos que:

$$\tilde{\varphi}_i\left(\tilde{\varphi}_i^{-1}(B(0, r))\right) = (\psi_i \circ \varphi_i)\left(\tilde{\varphi}_i^{-1}(B(0, r))\right) = \psi_i\left(\varphi_i\left(\tilde{\varphi}_i^{-1}\left(B(0, r)\right)\right)\right) = \psi_i(B(0, r)) =$$

$B(0, r)$.
Afirmação 2: $\tilde{\varphi}_i\left(\overline{\tilde{\varphi}_i^{-1}(B(0, r))}\right) = \overline{B(0, r)}$.

De fato, como $B(0,r) \subset \overline{B(0,r)} \subset B(0,r_i)$, segue que $\tilde{\varphi_i}^{-1}(B(0,r)) \subset \tilde{\varphi_i}^{-1}\left(\overline{B(0,r)}\right) \subset \tilde{\varphi_i}^{-1}(B(0,r_i)) = B_i$. Além disso, $\overline{B(0,r)}$ é compacto, logo $\tilde{\varphi_i}^{-1}(B(0,r))$ é compacto, e portanto fechado. Assim, $\overline{\tilde{\varphi_i}^{-1}(B(0,r))} \subset \tilde{\varphi_i}^{-1}\left(\overline{B(0,r)}\right)$.

Por outro lado, pela Proposição 1.12, $\tilde{\varphi_i}^{-1}\left(\overline{B(0,r)}\right) \subset \overline{\tilde{\varphi_i}^{-1}(B(0,r))}$. Portanto, $\tilde{\varphi_i}^{-1}\left(\overline{B(0,r)}\right) = \overline{\tilde{\varphi_i}^{-1}(B(0,r))}$, e assim, $\tilde{\varphi_i}\left(\overline{\tilde{\varphi_i}^{-1}(B(0,r))}\right) = \tilde{\varphi_i}\left(\tilde{\varphi_i}^{-1}\left(\overline{B(0,r)}\right)\right)$ $= \overline{B(0,r)}$.

Por fim, dados $\tilde{\varphi}_i = \psi_i \circ \varphi_i$ e $\tilde{\varphi}_j = \psi_j \circ \varphi_j$ temos que $\tilde{\varphi}_i \circ \tilde{\varphi}_j^{-1} = (\psi_i \circ \varphi_i) \circ (\psi_j \circ \varphi_j)^{-1} = \psi_i \circ \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \circ \psi_j^{-1}$, como $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ e $\psi_i \circ \psi_j^{-1}$ são difeomorfismos segue que $\tilde{\varphi}_i \circ \tilde{\varphi}_j^{-1}$ é difeomorfismo. Dado uma carta θ, temos que $\tilde{\varphi}_i \circ \theta^{-1} = (\psi_i \circ \varphi_i) \circ \theta^{-1} = \psi_i \circ (\varphi_i \circ \theta^{-1})$, note que $\varphi_i \circ \theta^{-1}$ é difeomorfismo, dessa forma $\tilde{\varphi}_i \circ \theta^{-1}$ é difeomorfismo.

Portanto $\tilde{\varphi}_i$ é de fato uma carta para a variedade M, logo $\tilde{\varphi}_i^{-1}(B(0,r)) = \varphi_i^{-1}\left(\psi_i^{-1}(B(0,r))\right) = \varphi_i^{-1}(B(x_i,r)) = B_i$ é uma bola coordenada regular. $\square$

Apresentaremos agora alguns exemplos de variedades diferenciáveis.

Exemplo 4.25 (Variedade 0-dimensional)**.** *Uma variedade topológica M 0-dimensional é um espaço discreto enumerável, pois para cada $p \in M$ a única vizinhança possível de p que é homeomorfa a um subconjunto aberto (não vazio) de $\mathbb{R}^0$ é o próprio p e a carta coordenada é dada por $\varphi : \{p\} \to \mathbb{R}^0$ com $\varphi(p) = 0$. Note que cada carta é trivialmente compatível.*

Exemplo 4.26 (Espaço Euclidiano)**.** *Seja $M = \mathbb{R}^n$, onde $n \geqslant 1$ e considere $Id_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Como $Id_{\mathbb{R}^n} \circ Id_{\mathbb{R}^n} = Id_{\mathbb{R}^n}$ é C^∞ temos que $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})\}$ é um atlas e portanto existe um único atlas maximal $\hat{\mathcal{A}}$ contendo $Id_{\mathbb{R}^n}$, tal que $\mathbb{R}^n$ com o atlas maximal $\hat{\mathcal{A}}$ é uma variedade diferenciável. Chamamos essa estrutura de estrutura usual do $\mathbb{R}^n$.*

Com respeito a essa estrutura diferenciável, as cartas coordenadas são exatamente as cartas (U,φ) em que φ é um difeomorfismo do aberto U para outro aberto $\hat{U} \subset \mathbb{R}^n$.

Exemplo 4.27 (Outra estrutura diferenciável em $\mathbb{R}$)**.** *Considere o homeomorfismo $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $\psi(x) = x^3$. Note que $\psi \circ \psi^{-1} = Id_{\mathbb{R}}$ onde $\psi^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, logo $\psi \circ \psi^{-1}$ é C^∞ e assim $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, \psi)\}$ é um atlas em $\mathbb{R}$, dessa forma existe um atlas maximal $\hat{\mathcal{A}}$ tal que $\mathcal{A} \subset \hat{\mathcal{A}}$ e $\left(\mathbb{R}, \hat{\mathcal{A}}\right)$ é uma variedade diferenciável.*

A estrutura diferenciável dada no exemplo 4.26 com $n = 1$ é diferente da estrutura diferenciável que contém a carta $(\mathbb{R}, \psi)$, pois se elas fossem iguais ψ e $Id_{\mathbb{R}}$ teriam que ser compatíveis, mas $Id_R \circ \psi^{-1} = \psi^{-1}$ e ψ^{-1} não é diferenciável em 0. Portanto, as cartas não são compatíveis e assim as estruturas são distintas.

Exemplo 4.28. *(Subvariedade Aberta) Seja U um subconjunto aberto de $(M, \mathcal{A})$. Note que pelo Exemplo 4.8, U é uma n-variedade topológica.*

Considere o conjunto $\mathcal{A}_U = \{(V,\varphi) \in \mathcal{A}; V \subset U\}$. Mostremos que $\mathcal{A}_U$ é um atlas de U.

Tome $p \in U$, como $U \subset M$ e $(M, \mathcal{A})$ é variedade diferenciável, então existe uma carta (W, φ) de forma que $p \in W$. Tome $V = W \cap U$, logo $(V, \varphi|_V) \in \mathcal{A}_U$ com $p \in V$, pois é a restrição de uma carta por um subconjunto aberto de W. Além disso, as cartas em $\mathcal{A}_U$ são duas a duas compatíveis pois em particular são cartas em $\mathcal{A}$.

Portanto, $\mathcal{A}_U$ é um atlas.

Logo, existe um único atlas maximal $\hat{A}$ tal que $\mathcal{A}_U \subset \hat{A}$ e $\left(U, \hat{A}\right)$ é uma variedade diferenciável de dimensão n.

Dotado com essa estrutura chamamos qualquer subconjunto aberto de subvariedade aberta de M.

Exemplo 4.29 (Gráfico de função diferenciável)**.** *Para um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $f : A \to \mathbb{R}^m$ definimos o gráfico de f por $\Gamma(f) := \{(x, f(x));\ x \in A\}$.*

Se U é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e $f : U \to \mathbb{R}^m$ é C^∞, sabemos pelo o exemplo 4.5 que o gráfico de f é uma n-variedade topológica. Note que $\Gamma(f)$ é coberto pela carta $(\Gamma(f), \varphi)$ onde $\varphi : \Gamma(f) \to U$ é definido por $\varphi((x, f(x))) = x$. Dessa forma, $\mathcal{A} = (\Gamma(f), \varphi)$ é um atlas do gráfico de f. Logo existe um atlas maximal $\hat{\mathcal{A}}$ de forma $\mathcal{A} \subset \hat{\mathcal{A}}$. Portanto, $\left(\Gamma(f), \hat{\mathcal{A}}\right)$ é uma variedade diferenciável.

Lema 4.30. *Seja M um conjunto e $\{U_\alpha\}$ uma coleção de subconjuntos de M junto com aplicações $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. *Para cada α, φ_α é uma bijeção entre U_α e o subconjunto aberto $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$.*

2. *Para cara α e β, os conjuntos $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ e $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$.*

3. *Sempre que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, a aplicação $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ é diferenciável.*

4. *M é coberto por uma quantidade enumerável de conjuntos U_α.*

5. *Sempre que p e q são pontos distintos em M, ou existe algum U_α contendo ambos, ou existem conjuntos disjuntos U_α e U_β com $p \in U_\alpha$ e $q \in U_\beta$.*

Nessas condições M possui uma única estrutura de variedade diferenciável de forma que cada $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ é uma carta diferenciável nessa estrutura.

Demonstração. Considere o conjunto $A = \{\varphi_\alpha^{-1}(V); V$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n\}$. Note que para cada α, $U_\alpha \in A$, pois $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ é um aberto em $\mathbb{R}^n$ e $U_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(U_\alpha))$.

Dado $p \in M$, uma vez que $\{U_\alpha\}$ é uma cobertura de M, existe β tal que $p \in U_\beta \subset A$. Além disso, se $p \in \varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\beta^{-1}(W) \subset U_\alpha \cap U_\beta$, com V e W abertos do $\mathbb{R}^n$, a aplicação $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ é diferenciável, em particular é contínua, dessa forma $\left(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\right)^{-1}(W)$ é um subconjunto aberto de $\varphi_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$ o qual é aberto em $\mathbb{R}^n$. Logo $\left(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\right)^{-1}(W)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, dessa forma $V \cap \left(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\right)^{-1}(W)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, e consequentemente $\varphi_\alpha^{-1}\left(V \cap \left(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\right)^{-1}(W)\right) \in A$.

Além disso, temos a seguinte afirmação:

Afirmação 1: $\varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\beta^{-1}(W) = \varphi_\alpha^{-1}\Big(V \cap (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(W)\Big)$.

De fato, temos que,

$x \in \varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\beta^{-1}(W) \Leftrightarrow \varphi_\alpha(x) \in V$ e $\varphi_\beta(x) \in W$

$\Leftrightarrow \varphi_\alpha(x) \in V$ e $\varphi_\beta\left((\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha)(x)\right) \in W$

$\Leftrightarrow \varphi_\alpha(x) \in V$ e $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})\left((\varphi_\alpha)(x)\right) \in W$

$\Leftrightarrow \varphi_\alpha(x) \in V$ e $\varphi_\alpha(x) \in (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(W)$

$\Leftrightarrow \varphi_\alpha(x) \in V \cap (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(W)$

$\Leftrightarrow x \in \varphi_\alpha^{-1}\Big(V \cap (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(W)\Big)$.

Portanto, $\varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\beta^{-1}(W) \in A$ e assim, A é uma base para M.

Afirmação 2: Para cada α a aplicação $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$ é um homeomorfismo.

Observe que φ_α é uma bijeção e é contínua, mostrando que φ_α é uma aplicação aberta, temos o desejado.

Dados α e β e um elemento básico $\varphi_\beta^{-1}(V)$, com V um aberto em $\mathbb{R}^n$. Se $\varphi_\beta^{-1}(V) \subset U_\alpha$, então $\left(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\right)(V) = (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(V)$ é um aberto em $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \varphi_\alpha(U_\alpha)$, mas $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, logo é aberto em $\varphi_\alpha(U_\alpha)$. Portanto $\varphi_\alpha\left(\varphi_\beta^{-1}(V)\right)$ é aberto em $\varphi_\alpha(U_\alpha)$.

Tome B um subconjunto aberto de U_α, em particular B é aberto em M, e assim B é uma união de intercessões finitas de abertos básicos. Uma vez que intercessões de elementos básicos é um elemento básico (visto acima), segue que $B = \bigcup\limits_\beta \varphi_\beta^{-1}(V_\beta)$, onde V_β é um aberto em $\mathbb{R}^n$, dessa forma para cada β, $\varphi_\beta^{-1}(V_\beta) \subset B \subset U_\alpha$.

Como $\varphi_\beta^{-1}(V_\beta) \subset U_\alpha$, para todo β, e φ_α é uma bijeção, segue que $\varphi_\alpha(B) = \varphi_\alpha\left(\bigcup\limits_\beta \varphi_\beta^{-1}(V_\beta)\right) = \bigcup\limits_\beta \left(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\right)(V_\beta)$ é aberto em $\varphi_\alpha(U_\alpha)$, pois cada $\varphi_\alpha\left(\varphi_\beta^{-1}(V_\beta)\right)$ é aberto em $\varphi_\alpha(U_\alpha)$.

Portanto, $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$ é uma aplicação aberta.

Agora, dado um ponto $p \in M$, como $\{U_\alpha\}$ é uma cobertura de M, segue que $p \in U_{\alpha'}$ para algum $U_{\alpha'} \subset \{U_\alpha\}$. Pela afirmação acima, $\varphi_{\alpha'} : U_{\alpha'} \to \varphi_{\alpha'}(U_{\alpha'}) \subset \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo, portanto M é localmente Euclidiano.

Para verificarmos que M é Hausdorff, tome p e q pontos distintos de M. Como $\{U_\alpha\}$ é uma cobertura de M existem U_α e U_β, de forma que $p \in U_\alpha$ e $q \in U_\beta$.

Se $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ está verificado. Suponha que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, em particular p e $q \in U_\alpha$. Uma vez que φ_α é injetora, temos que $\varphi_\alpha(p) \neq \varphi_\alpha(q)$ e como $\mathbb{R}^n$ é Hausdorff existem abertos V e $W \in \mathbb{R}^n$ tais que $\varphi_\alpha(p) \in V$, $\varphi_\alpha(q) \in W$ e $V \cap W = \emptyset$. Como φ_α é contínua, segue que $\varphi_\alpha^{-1}(V)$ e $\varphi_\alpha^{-1}(W)$ são abertos em M, além disso φ_α é bijeção, assim $\varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\alpha^{-1}(W) = \emptyset$. Portanto M é Hausdorff.

Por hipótese, M é coberto por uma quantidade enumerável de conjuntos U_α, assim pelo Lema 1.2, M é segundo enumerável. Logo M é uma variedade topológica.

Segue de **3** que a coleção $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ é um atlas diferenciável de M. Portanto

M possui uma única estrutura de variedade diferenciável tal que cada $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ é uma carta diferenciável.

Para mostrar a unicidade da estrutura, seja τ a topologia em M gerada pela base A e considere τ' uma outra topologia em M tal que cada $(U_{\alpha,\varphi_\alpha})$ é uma carta diferenciável.

Mostremos que $\tau = \tau'$

De fato, tome $\varphi_\alpha^{-1}(W)$, com W um aberto do $\mathbb{R}^n$, um aberto básico de τ. Uma vez que $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$ é um homeomorfismo na topologia τ', segue que $\varphi_\alpha^{-1}(W) \in \tau'$. Logo, $\tau \subset \tau'$.

Por outro lado, como $\{U_\alpha\}$ é uma cobertura de M, temos que $M = \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$. Dado $B \in \tau'$, segue que $B = B \cap M = B \cap \left(\bigcup\limits_\alpha U_\alpha\right) = \bigcup\limits_\alpha (B \cap U_\alpha) = \bigcup\limits_\alpha \left(\varphi_\alpha^{-1}\left(\varphi_\alpha\left(B \cap U_\alpha\right)\right)\right)$. Como φ_α é um homeomorfismo e $B \cap U_\alpha$ é aberto em M, temos que $\varphi_\alpha(B \cap U_\alpha)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$. Logo para 'cada α, $\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(B \cap U_\alpha))$ é um aberto de τ. Dessa forma $B \in \tau$, e assim $\tau' \subset \tau$.

Portanto $\tau = \tau'$. □

Exemplo 4.31 (Espaços das Matrizes)**.** *Considere $\phi : M(m \times n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{mn}$ o isomorfismo canônico. Mostremos que $M(m \times n, \mathbb{R})$ munido com a topologia*
$\tau = \{\phi^{-1}(U); U$ é aberto em $\mathbb{R}^{mn}\}$ é uma variedade diferenciável de dimensão mn.

De fato, como $\phi : M(m \times n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{mn}$ é um homeomorfismo e $\mathbb{R}^{mn}$ é uma variedade topológica, segue que $M(m \times n, \mathbb{R})$ é localmente euclidiano, Hausdorff e possui base enumerável. Logo $M(m \times n, \mathbb{R})$ é uma variedade topológica de dimensão mn.

Note que $\mathcal{A} = \{(\phi^{-1}(U), \varphi \circ \phi) ; (U, \varphi)$ é uma carta em $\mathbb{R}^{mn}\}$ é um atlas para $M(m \times n, \mathbb{R})$, pois como $\{U\}$ é uma cobertura aberta de $\mathbb{R}^{mn}$ segue que $\{\phi^{-1}(U)\}$ é uma cobertura aberta de $M(m \times n, \mathbb{R})$. Além disso, dadas as cartas (A, ψ_1) e (B, ψ_2) tal que $A \cap B \neq \varnothing$, existem cartas (U_1, φ_1) e (U_2, φ_2) em $\mathbb{R}^{mn}$ de forma que $A = \phi^{-1}(U_1)$ e $B = \phi^{-1}(U_2)$ com $\psi_1 = \varphi_1 \circ \phi$ e $\psi_2 = \varphi_2 \circ \phi$. Observe que $\psi_1(A \cap B) = \psi_1 (\phi^{-1}(U_1) \cap \phi^{-1}(U_2) = \varphi_1 \circ \phi (\phi^{-1}(U_1 \cap U_2)) = \varphi_1(U_1 \cap U_2)$, assim $\psi_2 \circ \psi_1^{-1} = \varphi_2 \circ \phi \circ (\varphi_1 \circ \phi)^{-1} = \varphi_2 \circ \phi \circ \phi^{-1} \circ \varphi_1^{-1} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ é diferenciável para todo $x \in \varphi_1(U_1 \cap U_2) = \psi_1(A \cap B)$.

Portanto, $M(m \times n, \mathbb{R})$ é uma mn- variedade diferenciável.

Exemplo 4.32 (Matrizes de posto máximo)**.** *Suponha que $m < n$ e considere $M_m(m \times n, \mathbb{R}) = \{A \in M(m \times n, \mathbb{R}); A$ tem posto $m\}$.*

Tome $B \in M_m(m \times n, \mathbb{R})$, logo B possui um menor $m \times m$ o qual o determinante é não nulo. Como a função determinante é contínua, temos que B possui uma vizinhança aberta C em $M(m \times n, \mathbb{R})$ tal que o determinante do mesmo menor não se anula para cada matriz em C, ou seja, $B \in C \subset M(m \times n, \mathbb{R})$.

Portanto $M_m(m \times n, \mathbb{R})$ é um subconjunto aberto de $M(m \times n, \mathbb{R})$, assim $M_m(m \times n, \mathbb{R})$ é uma variedade diferenciável de dimensão mn.

A seguir será apresentado um exemplo um pouco mais complexo de variedade diferenciável, conhecido como Variedade Grassman. Para construir uma estrutura diferenciável em $G_k(V)$ utilizaremos fortemente conceitos de álgebra linear para construir as cartas e em seguida aplicaremos o Lema 4.30.

Exemplo 4.33 (Variedade Grassmann)**.** *Seja V um n- espaço vetorial real. Para qualquer inteiro $0 \leqslant k \leqslant n$ seja $G_k(V)$ o conjunto de todos os subespaços lineares k-dimensionais de V. Mostremos que em $G_k(V)$ pode ser dada a estrutura de uma variedade diferenciável de dimensão $k(n-k)$. Com essa estrutura $G_k(V)$ é chamado de* ***Variedade Grassmann****. No caso especial em que $V = \mathbb{R}^n$, $G_k(\mathbb{R}^n)$ é denotado por $G_{k,n}$ ou $G_{(k,n)}$.*

Sejam P e Q subespaços quaisquer complementares de V de dimensões k e $n-k$, respectivamente, de modo que $V = P \oplus Q$.

Afirmação 1: *O gráfico de qualquer aplicação linear $X : P \to Q$ pode ser identificado como um k-subespaço $\Gamma(X) \subset V$, definido por $\Gamma(X) = \{v + Xv; v \in P\}$.*

De fato, note que $\Gamma(X)$ é um subespaço vetorial de V pois tomando $v = 0 \in P$, temos que $0 + X(0) = 0 \in \Gamma(X)$ e tomando $u, v \in P$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que $\alpha v + u \in P$, assim $\alpha(v + Xv) + (u + Xu) = (\alpha v + u) + X(\alpha v + u) \in \Gamma(X)$.

Considere $\varphi : \mathrm{gr}(X) \to \Gamma(X)$ definida por $\varphi(v, X(v)) = v + Xv$, onde $gr(X)$ é o gráfico de X. Mostremos que φ é uma bijeção.

Tome $(v_1, X(v_1)), (v_2, X(v_2)) \in gr(X)$ e suponha que $v_1 + Xv_1 = v_2 + Xv_2$, assim:

$$v_1 + Xv_1 - v_2 - Xv_2 = 0 \Leftrightarrow v_1 - v_2 + X(v_1 - v_2) = 0 \Leftrightarrow X(v_1 - v_2) = v_2 - v_1$$

$$\Leftrightarrow v_2 - v_1 \in P \cap Q = \{0\} \Leftrightarrow v_1 = v_2 \Leftrightarrow (v_1, Xv_1) = (v_2, Xv_2).$$

Logo, φ é injetora.

Para mostrar a sobrejetividade, tome $u \in \Gamma(X)$, dessa forma existe $v \in P$ tal que $u = v + Xv$, logo $u = v + Xv = \varphi(v, Xv)$.

Mostremos agora que φ é uma transformação linear.

Seja (v_1, Xv_1), $(v_2, Xv_2) \in \mathrm{gr}(X)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Temos que:

$$\varphi((v_1, Xv_1) + \lambda(v_2, Xv_2)) = \varphi(v_1 + \lambda v_2, Xv_1 + \lambda Xv_2) = v_1 + \lambda v_2 + X(v_1 + \lambda v_2)$$

$$= v_1 + Xv_1 + \lambda(v_2 + Xv_2) = \varphi(v_1, Xv_1) + \lambda\varphi(v_2, Xv_2).$$

Dessa forma φ é um isomorfismo e assim está bem identificado.

Observe que $\Gamma(X) \cap Q = \{0\}$, pois uma vez que $\Gamma(X)$ e Q são espaços vetoriais, temos que $\{0\} \subset \Gamma(X) \cap Q$. Por outro lado, dado $q \in \Gamma(X) \cap Q$, existe $v \in P$ tal que $q = v + X(v)$, logo $v = q - X(v) \in Q$, dessa forma $v \in P \cap Q = \{0\}$, assim $q = 0 + X(0) = 0$. Logo, $\Gamma(X) \cap Q \subset \{0\}$.

***Afirmação 2:** Para qualquer subespaço $S \subset V$ tal que $S \oplus Q = V$ ($\dim S = \dim P = k$), existe uma aplicação linear $X : P \to Q$, satisfazendo $S = \Gamma(X)$.*

Seja $\pi_P : V = P \oplus Q \to P$ e $\pi_Q : V = P \oplus Q \to Q$ as projeções determinadas pelas decomposições de soma direta. Mostremos que $\pi_P|_S$ é um isomorfismo de S em P.

Para isso mostremos que $\pi_P|_S : S \to P$ é injetora.

De fato, tome $s_1, s_2 \in S \subset V$, logo $s_1 = p_1 + q_1$ e $s_2 = p_2 + q_2$, onde $p_1, p_2 \in P$ e $q_1, q_2 \in Q$. Suponha que $\pi_P|_S(s_1) = \pi_P|_S(s_2)$, equivalentemente, $p_1 = p_2$. Note que $s_1 - s_2 \in S$, ou seja, $(p_1 + q_1) - (p_2 + q_2) \in S$, assim $p_1 - p_2 + q_1 - q_2 \in S$, o que implica que $q_1 - q_2 \in S$, dessa forma $q_1 - q_2 \in S \cap Q = \{0\}$, ou seja, $q_1 - q_2 = 0$, o que implica que $q_1 = q_2$. Logo $\pi(s_1) = p_1 = p_2 = \pi(s_2)$, assim $s_1 = s_2$.Portanto $\pi_P|_S$ é injetora.

Como $\dim S = \dim P = k$, segue que $\pi_P|_S$ é um isomorfismo de S em P.

Dessa forma, $X = \pi_Q \circ (\pi_P|_S)^{-1}$ é uma aplicação linear bem definida de P em Q.

Resta mostrarmos que $S = \Gamma(X)$.

Tome $s = p + q \in S \subset P \oplus Q$. Pelo isomorfismo $\pi_P|_S : S \to P$ temos que $(\pi_P|_S)^{-1}(p) = s = p + q$. Assim, $\pi_Q(s) = \pi_Q(p + q) = q$. Logo, $X(p) =$

$\left(\pi_Q \circ (\pi_P|_S)^{-1}\right)(p) = \pi_Q(p+q) = q$. *Dessa forma,* $p + X(p) = p + q = s$, *o que implica que* $s \in \Gamma(X)$. *Assim,* $S \subset \Gamma(X)$.

Seja $p + X(p) \in \Gamma(X)$, *logo* $p \in P$ *e* $X(p) \in Q$. *Temos que* $X(p) = \left(\pi_Q \circ (\pi_P|_S)^{-1}\right)(p) = \pi_Q\left((\pi_P|_S)^{-1}(p)\right) = \pi_Q(p+q) = q$. *Assim,* $p + X(p) = p + q = s \in S$, *logo* $\Gamma(X) \subset S$.

Portanto $S = \Gamma(X)$.

Considere $L(P;Q)$ *o espaço vetorial das aplicações lineares de* P *para* Q *e* U_Q *o subconjunto de* $G_k(V)$ *consistindo dos* k*- subespaços cuja a interseção com* Q *é trivial. Pelas Afirmações* ***1*** *e* ***2****, a aplicação* $\Gamma : L(P;Q) \to U_Q$ *definida por* $\Gamma(X) = \{v + X(v); v \in P\}$ *é uma bijeção.*

Escolhendo bases para P *e* Q, *podemos identificar* $L(P;Q)$ *com* $M((n-k) \times k, \mathbb{R}^n)$ *que é isomorfo a* $\mathbb{R}^{k(n-k)}$. *Seja* $\varphi_{P,Q} := \Gamma^{-1} : U_Q \to L(P;Q)$.

Note que $\varphi_{P,Q} : U_Q \to L(P;Q)$ *é uma bijeção e* $\varphi_{P,Q}(U_Q) = L(P;Q)$ *que é isomorfo ao* $\mathbb{R}^{k(n-k)}$ *que é aberto, logo a condição* ***1*** *do Lema 4.30 é satisfeita.*

Considere (P', Q') *outro par de subespaços de dimensões* k *e* $n-k$, *respectivamente, e sejam* $\pi_{P'}$, $\pi_{Q'}$ *as projeções correspondentes e* $\varphi_{P',Q'} : U_{Q'} \to L(P', Q')$ *a aplicação correspondente.*

Afirmação 3: $\varphi_{P,Q}(U_Q \cap U_{Q'}) = \{X : P \to Q; X$ *é linear e* $\Gamma(X) \cap Q' = \{0\}\}$.

De fato, tome $X \in \varphi_{P,Q}(U_Q \cap U_{Q'}) \subset L(P,Q)$, *logo* $X : P \to Q$ *é transformação linear e além disso existe* $S \in U_Q \cap U_{Q'}$ *de forma que* $\varphi_{P,Q}(S) = X$, *isto é,* S *é um subespaço* $k-$*dimensional de* V *tal que* $S \cap Q = S \cap Q' = \{0\}$. *Como* $S \in U_Q$ *existe uma transformação linear* $X' : P \to Q$ *tal que* $\Gamma(X') = S$. *Logo* $X = \varphi_{P,Q}(S) = \varphi_{P,Q}(\Gamma(X')) = \Gamma^{-1}(\Gamma(X')) = X'$. *Portanto* $\Gamma(X) = S \subset U_{Q'}$.

Por outro lado, dado $X : P \to Q$ *uma transformação linear com* $\Gamma(X) \cap Q' = \{0\}$. *Note que* $\Gamma(X) \in U_Q$, *logo* $\Gamma(X)$ *é* $k-$*dimensional. Assim* $\Gamma(X) \in U_{Q'}$, *dessa forma* $X = \Gamma^{-1}(\Gamma(X)) = \varphi_{P,Q}(\Gamma(X)) \in \varphi_{P,Q}(U_Q \cap U_{Q'})$.

Portanto $\varphi_{P,Q}(U_Q \cap U_{Q'}) = \{X : P \to Q; X$ *é linear e* $\Gamma(X) \cap Q' = \{0\}\}$.

Mostremos agora que $\varphi_{P,Q}(U_Q \cap U_{Q'})$ *é aberto em* $L(P;Q)$.

Dado $X \in L(P;Q)$ *considere a aplicação linear* $T_X : P \to V$ *definida por* $T_X(v) = v + Xv$, *a qual é uma bijeção entre* P *e* $\operatorname{Im}(T_X) = \Gamma(X)$. *Note que* $\ker(\pi_{P'}) = Q'$, *logo pela Proposição 1.43, segue que* $\Gamma(X) \cap Q' = \{0\}$ *se, e somente se,* $\pi_{P'} \circ T_X$ *tem posto máximo, assim* $X \in \varphi_{P,Q}(U_Q \cap U_{Q'})$ *se, e somente se,* $\pi_{P'} \circ T_X$ *tem posto máximo. Note* $\pi_{P'} \circ T_X : P \to P'$ *é linear (pois é composição de aplicações lineares) e escolhendo bases quaisquer para* P *e* P' *segue que as entradas da matriz de* $\pi_{P'} \circ T_X$ *dependem continuamente de* X, *assim pelo Exemplo 4.32, o conjunto de todos esses* X *é aberto em* $L(P;Q)$. *Portanto a condição* ***2*** *do Lema 4.30 está satisfeita.*

Mostremos que a aplicação transição $\varphi_{P',Q'} \circ \varphi_{P,Q}^{-1} : \varphi_{P,Q}(U_Q \cap U_{Q'}) \to \varphi_{P',Q'}(U_Q \cap U_{Q'})$ *é diferenciável em* $\varphi_{P,Q}(U_Q \cap U_{Q'})$.

Seja $X \in \varphi_{P,Q}(U_Q \cap U_{Q'}) \subset L(P;Q)$, *tomando* $S = \Gamma(X)$ *e*

$X' = \left(\varphi_{P',Q'} \circ \varphi_{P,Q}^{-1}\right)(X)$, temos que $X' = \pi_{Q'} \circ (\pi_{P'}|_S)^{-1}$. Uma vez que $T_X : P \to S$ é um isomorfismo, podemos escrever $X' = \pi_{Q'} \circ T_X \circ T_X^{-1} \circ (\pi_{P'}|_S)^{-1} = (\pi_{Q'} \circ T_X) \circ (\pi_{P'} \circ T_X)^{-1}$.

Considere agora as aplicações lineares $A : P \to P'$, $B : P \to Q'$, $C : Q \to P'$ e $D : Q \to Q'$, definidas como $A = \pi_{P'}|_P$, $B = \pi_{Q'}|_P$, $C = \pi_{P'}|_Q$ e $D = \pi_{Q'}|_Q$, respectivamente.

Dado $v \in P$ temos que $(\pi_{P'} \circ T_X)(v) = \pi_{P'}(v + Xv)$. Por outro lado, $(A + C \circ X)(v) = A(v) + (C \circ X)(v) = \pi_{P'}|_P(v) + \pi_{P'}|_Q(X(v)) = \pi_{P'}(v + Xv)$. Logo $(\pi_{P'} \circ T_X)(v) = (A + C \circ X)(v)$.

De forma análoga, temos que $(\pi_{Q'} \circ T_X)(v) = (B + D \circ X)(v)$. Assim, $X' = (B + D \circ X) \circ (A + C \circ X)^{-1}$.

*Escolhendo bases para P, Q, P' e Q' podemos representar as aplicações lineares por suas matrizes. Como as entradas da matriz $(A + C \circ X)^{-1}$ são funções racionais das entradas da matriz $(A + C \circ X)$ (Regra de Cramer), segue que as entradas das matrizes de X' dependem diferencialmente de X. Portanto $\varphi_{P',Q'} \circ \varphi_{P,Q}^{-1}$ é diferenciável, ou seja, a condição **3** do Lema 4.30 está verificada.*

Vejamos agora que $G_k(V)$ é coberto por uma quantidade finita (enumerável) de conjuntos U_Q.

De fato, seja $\beta = \{E_1, \cdots, E_n\}$ uma base de V e considere todos os Q-subespaços vetoriais de V gerados por $(n-k)$ vetores de β.

Note que, $\#\{U_Q\} = \frac{n!}{(n-k-1)!} < \infty$. Mostremos que $\{U_Q\}$ é uma cobertura aberta de $G_k(V)$.

Considere $S \in G_k(V)$, ou seja, S é um subespaço de V de dimensão k. Dada uma base $C = \{v_1, \cdots, v_k\}$ de S, podemos completar C a uma base $\{v_1, \cdots, v_k, U_{k+1}, \cdots, U_n\}$ de V por vetores de β, isto é, $U_i \in \beta$, para todo $i = k+1, \cdots, n$.

*Seja Q o subespaço de V gerado pelo conjunto $\{U_{k+1}, \cdots, U_n\}$. Assim Q é um espaço vetorial de dimensão $n - k$ e $V = S \oplus Q$. Logo $S \subset U_Q \subset \{U_Q\}$. Portanto a condição **4** do Lema 4.30 está satisfeita.*

*Por fim, para verificarmos a condição **5** do Lema 4.30, tome P e $P' \in G_k(V)$, ou seja, P e P' subespaços vetoriais de V de dimensão k e seja j a dimensão de $P \cap P'$. Se $\beta = \{v_1, \cdots, v_j\}$ é uma base para $P \cap P'$, então existem $u_{j+1}, \cdots, u_k$ e $w_{j+1}, \cdots, w_k$ de forma que $\beta_P = \{v_1, \cdots, v_j, u_{j+1}, \cdots, u_k\}$ é uma base de P e $\beta_{P'} = \{v_1, \cdots, v_j, w_{j+1}, \cdots, w_k\}$ é uma base de P'.*

Considere U e W subespaços de dimensão $k - j$ gerados por $\{u_{j+1}, \cdots, u_k\}$ e $\{w_{j+1}, \cdots, w_k\}$, respectivamente, logo $P = (P \cap P') \oplus U$.

Seja $\langle P \cup P' \rangle$ o espaço gerado por $P \cup P'$. Note que $C = \{v_1, \cdots, v_j, u_{j+1}, \cdots, u_k, w_{j+1}, \cdots, w_k\}$ gera o espaço $\langle P \cup P' \rangle$. Mostremos que C é linearmente independente.

Sejam $\alpha_i, \beta_l, \gamma_l$ escalares com $1 \leqslant i \leqslant j$ e $j+1 \leqslant l \leqslant k$ tais que

$$\sum_{i=1}^{j} \alpha_i v_i + \sum_{l=j+1}^{k} (\beta_l u_l + \gamma_l w_l) = 0. \tag{4.1}$$

Considere $w = \sum_{l=j+1}^{k} -\gamma_l w_l \in W \subset P'$. Pela Equação 4.1, $w = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i v_i + \sum_{l=j+1}^{k} \beta_l u_l \in (P \cap P') + U = P$. Logo $w \in (P \cap P') \cap W = \{0\}$, o que implica que $\gamma_{j+1} = \cdots = \gamma_k = 0$. Além disso, $0 = w = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i v_i + \sum_{l=j+1}^{k} \beta_l u_l$, como β_P é base, segue que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_{j+1} = \cdots = \beta_k = 0$.

Portanto C é linearmente independente.

Dessa forma C é uma base de $\langle P \cup P' \rangle$ e $\langle P \cup P' \rangle$ tem dimensão $k+k-j = 2k-j$.

Seja Q' um subespaço vetorial de V complementar de $\langle P \cup P' \rangle$. Observe que $\dim Q' = n - \dim \langle P \cup P' \rangle = n-(2k-j) = (n-k)-(k-j)$ e tome $D = \{z_{2k-j+1}, \cdots, z_n\}$ uma base de Q'.

Considere Q o espaço gerado pelo conjunto $E = \{z_{2k-j+1}, \cdots, z_n, u_{j+1} + w_{j+1}, \cdots, u_k + w_k\}$. Note que $\#E = [n-(2k-j)]+(k-j) = [(n-k)-(k-j)]+(k-j) = n-k$.

***Afirmação 4:** E é linearmente independente.*

De fato, sejam α_i, β_l escalares com $i = 2k-j+1, \cdots, n$ e $l = j+1, \cdots, k$ tais que:

$$\sum_{i=2k-j+1}^{n} \alpha_i z_i + \sum_{l=j+1}^{k} \beta_l (u_l + w_l) = 0.$$

Dessa forma, $z = \sum_{i=2k-j+1}^{n} (-\alpha_i) z_i = \sum_{l=j+1}^{k} \beta_l (u_l + w_l) \in \langle P \cup P' \rangle$, o que implica que $z \in Q' \cap \langle P \cup P' \rangle = \{0\}$, ou seja, $z = 0$, assim $\alpha_{2k-j+1} = \cdots = \alpha_n = 0$. Além disso, $0 = z = \sum_{i=2k-j+1}^{n} (-\alpha_i) z_i = \sum_{l=j+1}^{k} \beta_l (u_l + w_l)$, como $\{u_{j+1}, \cdots, u_k\}$ e $\{w_{j+1}, \cdots, w_k\}$ são linearmente independentes, segue que $\beta_{j+1} = \cdots = \beta_k = 0$.

Portanto E é linearmente independente e assim E é uma base para Q.

***Afirmação 5:** $P \cap Q = \{0\}$.*

Uma vez que P é um subespaço de V de dimensão k e Q é um subespaço de V de dimensão $n-k$, $P \cap Q = \{0\}$ é equivalente a $V = P \oplus Q$.

Como $P+Q$ é um subespaço de V e $\dim(P+Q) = \dim(P) + \dim(Q) - \dim(P \cap Q) = (n-k) + k - \dim(P \cap Q) = n - \dim(P \cap Q)$, segue que $P \oplus Q = V$ se, e somente se, $V \subset P+Q$.

Tome $v \in V = \langle P \cup P' \rangle \oplus Q'$, logo existem escalares $\alpha_i, \beta_l, \gamma_l$ e θ_m com

$1 \leqslant i \leqslant j$, $j+1 \leqslant l \leqslant k$ *e* $2k-j+1 \leqslant m \leqslant n$ *tal que:*

$$v = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i v_i + \sum_{l=j+1}^{k} (\beta_l u_l + \gamma_l w_l) + \sum_{m=2k-j+1}^{n} \theta_m z_m = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i v_i + \sum_{l=j+1}^{k} (\beta_l - \gamma_l) u_l$$

$$+ \sum_{l=j+1}^{k} \gamma_l (u_l + w_l) + \sum_{m=2k-j+1}^{n} \theta_m z_m \in P + Q.$$

De forma análoga $P' \cap Q = \{0\}$.

Portanto P *e* $P' \in U_Q$*, satisfazendo a condição* ***5*** *do Lema 4.30.*

Dessa forma, segue pelo Lema 4.30 que $G_k(V)$ *possui uma única estrutura de variedade diferenciável tal que cada* $(U_Q, \varphi_{P,Q})$ *é uma carta diferenciável.*

5 APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS

Neste capítulo serão estudados conceitos de aplicações entre variedades diferenciáveis, difeomorfismos, partição da unidade, espaço tangente, diferencial, derivadas parciais, imersão, submersão, mergulho, teorema do posto, teorema da função inversa e formas locais das imersões e submersões. Para mais detalhes o leitor pode consultar [3] e [11].

5.1 APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS ENTRE VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Definição 5.1. *Seja M uma variedade diferenciável. Dada uma função $f : M \to \mathbb{R}^k$ e uma carta (U, φ) para a variedade M, a função $f_\varphi : \varphi(U) \to \mathbb{R}^k$ definida por $f_\varphi(x) = (f \circ \varphi^{-1})(x)$ é chamada de* ***representação coordenada de* $\mathbf{f}$ *com relação a carta*** *(U, φ).*

Dizemos que f é ***diferenciável em*** $\mathbf{p} \in M$ *se existe uma carta (U, φ) de p em M tal que $f \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável em $\varphi(p)$.*

Dizemos que f é ***de classe*** $\mathbf{C^k}$ ***em*** $\mathbf{p} \in M$ *($k = 1, 2, \cdots, \infty$) se existe uma carta (U, φ) de p em M tal que $f \circ \varphi^{-1}$ é de classe C^k (ou C^∞) em $\varphi(p)$.*

Dizemos que $f : M \to \mathbb{R}^k$ é ***diferenciável*** *se f é diferenciável em todo ponto $p \in M$. Dizemos que $f : M \to \mathbb{R}^k$ é* ***de classe*** $\mathbf{C^k}$ *($k = 1, 2, \cdots, \infty$), se f é de classe C^k em todo ponto $p \in M$.*

O conjunto de todas as funções $f : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ é denotado por $C^\infty(M)$, o qual é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais.

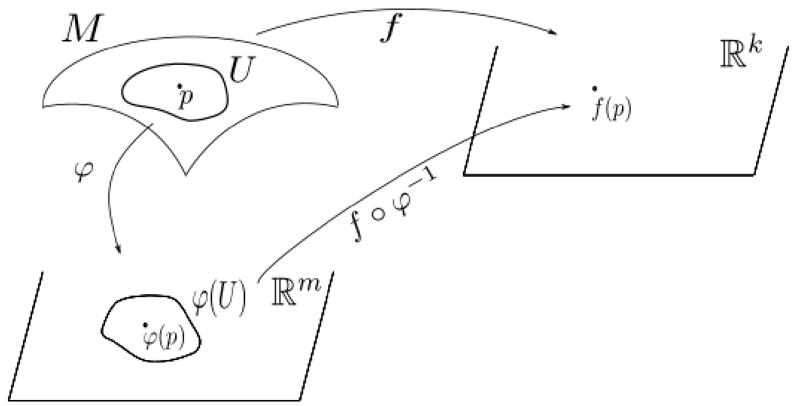


Figura 5.1

Podemos agora estender o conceito de diferenciabilidade para aplicações entre variedades, como segue.

Definição 5.2. *Se $F : M^m \to N^n$ é uma aplicação, (U, φ) e (V, ψ) são cartas para M e N, respectivamente, chamamos a aplicação $F_{\varphi,\psi} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ de* ***representação coordenada de*** $\mathbf{F}$ *com respeito as coordenadas (U, φ) e (V, ψ).*

*Dizemos que F é uma aplicação **diferenciável em** $\mathbf{p} \in M$ se existirem cartas (U, φ) de M contendo p e (V, ψ) de N contendo $F(p)$, tais que $F(U) \subset V$ e a aplicação $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ é diferenciável em $\varphi(p)$.*

*Dizemos que F é uma aplicação **de classe** $\mathbf{C^k}$ **em** $\mathbf{p} \in M$ $(k = 1, 2, \cdots, \infty)$ se existirem cartas (U, φ) de M contendo p e (V, ψ) de N contendo $F(p)$, tais que $F(U) \subset V$ e a aplicação $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ é de classe C^k em $\varphi(p)$.*

*Dizemos que $F : M \to N$ é **diferenciável** se F é diferenciável em cada $p \in M$.*

*Dizemos que $F : M \to N$ é **de classe** $\mathbf{C^k}$ $(k = 1, 2, \cdots, \infty)$ se F é de classe C^k em cada $p \in M$.*

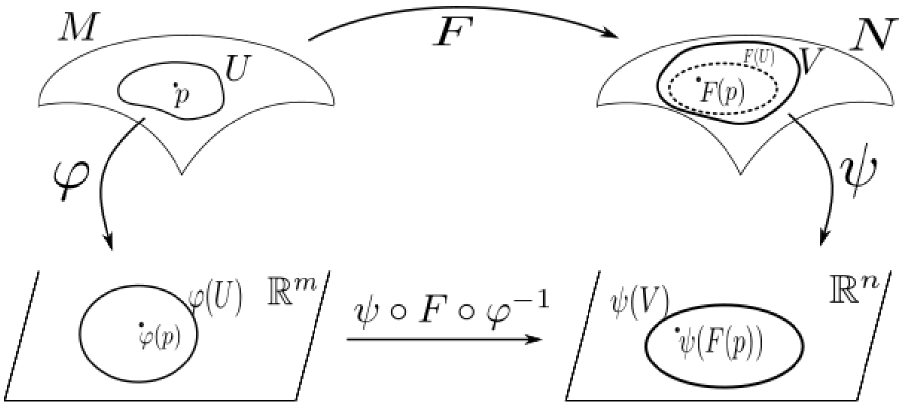


Figura 5.2

Vejamos alguns resultados de diferenciabilidade entre variedades.

Proposição 5.3. *Toda aplicação diferenciável é contínua.*

Demonstração. Sejam M e N variedades diferenciáveis e $F : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Dado $p \in M$, existem cartas (U, φ) de M em p, (V, ψ) de N em $F(p)$, com $F(U) \subset V$, de forma que $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ é C^∞, logo $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ é contínua. Como $\varphi : U \to \varphi(U)$ e $\psi : V \to \psi(V)$ são homeomorfismo, segue que $F|_U = \psi^{-1} \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1} \circ \varphi : U \to V$ é contínua pois é composições de aplicações contínuas, e assim, pelo Lema 1.13, segue que F é contínua em M. □

Proposição 5.4. *Seja $F : M \to N$ diferenciável em $p \in M$. Se (U, φ) é uma carta qualquer de M contendo p e (V, ψ) é uma carta qualquer de N contendo $F(p)$, então $F_{\varphi,\psi} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável em $\varphi(p)$.*

Demonstração. Por hipótese temos que $F : M \to N$ é diferenciável em $p \in M$, logo existem cartas (U_0, φ_0) de M em p e (V_0, ψ_0) de N em $F(p)$, com $F(U_0) \subset V_0$ tais que $\psi_0 \circ F \circ \varphi_0^{-1}$ é diferenciável em $\varphi_0(p)$. Pela compatibilidade das cartas, temos que $\varphi_0 \circ \varphi^{-1}$ é C^∞ em $\varphi(U \cap U_0)$

e $\psi\circ\psi_0^{-1}$ é C^∞ em $\psi_0(V\cap V_0)$. Desta forma, $\psi\circ F\circ\varphi^{-1} = (\psi\circ\psi_0^{-1})\circ(\psi_0\circ F\circ\varphi_0^{-1})\circ(\varphi_0\circ\varphi^{-1})$ é diferenciável em $\varphi(p)$. □

Proposição 5.5. *Seja $F : M \to N$ de classe C^k em $p \in M$. Se (U, φ) é uma carta qualquer de M contendo p e (V, ψ) é uma carta qualquer de N contendo $F(p)$, então $F_{\varphi,\psi} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ é de classe C^k em $\varphi(p)$.*

Demonstração. Análogo a Proposição 5.4. □

Proposição 5.6. *Sejam $\left(M, \tilde{\mathcal{A}}\right)$ e $\left(N, \tilde{\mathcal{B}}\right)$ variedades diferenciáveis e $F : M \to N$ uma aplicação contínua. São equivalentes:*

1. *A aplicação F é diferenciável.*
2. *Existem atlas $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{B} \subset \tilde{\mathcal{B}}$ tais que para quaisquer cartas $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ e $(V, \psi) \in \mathcal{B}$, a aplicação $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável.*
3. *Para quaisquer cartas $(U, \varphi) \in \tilde{\mathcal{A}}$ e $(V, \psi) \in \tilde{\mathcal{B}}$, a aplicação $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável.*

Demonstração. **(2)** $\implies$ **(1)**. Seja $p \in M$ e suponha que (U, φ) é uma carta em $\mathcal{A}$ contendo p e (V, ψ) é uma carta em $\mathcal{B}$ contendo $F(p)$. Por hipótese, temos que $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável em $\varphi(p)$, logo F é diferenciável em p. Como $p \in M$ foi tomado arbitrariamente, segue que F é diferenciável.
(1) $\implies$ **(3)**. Suponha que (U, φ) e (V, ψ) são cartas em M e N, respectivamente, tais que $U \cap F^{-1}(V) \neq \emptyset$. Seja $p \in U \cap F^{-1}(V)$, assim (U, φ) é uma carta de M contendo p e (V, ψ) é uma carta de N contendo $F(p)$. Pela Proposição 5.4, $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável em $\varphi(p)$. Uma vez que $\varphi(p)$ é um ponto arbitrário em de $\varphi(U \cap F^{-1}(V))$, a aplicação $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável.
(3) $\implies$ **(2)**. É imediato. □

Lema 5.7. *Sejam M e N variedades diferenciáveis e $F : M \to N$ uma aplicação entre variedades.*

1. *Se todo $p \in M$ tem uma vizinhança U tal que a restrição $F|_U$ é diferenciável, então F é diferenciável.*
2. *Se F é diferenciável, então sua restrição para todo subconjunto aberto é diferenciável.*

Demonstração. 1. Tome $p \in M$ e U uma vizinhança de p tal que $F|_U$ é diferenciável. Seja $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ uma carta de M em p, logo $((U \cap U_\alpha), \varphi_\alpha|_{(U\cap U_\alpha)}$ é uma carta de M em p, com $\varphi_\alpha|_{(U\cap U_\alpha)} : (U \cap U_\alpha) \to \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$. Além disso, dada qualquer carta (V, ψ) de N em $F(p)$, temos pela Proposição 5.4 que $\psi \circ F|_U \circ (\varphi_\alpha|_{(U\cap U_\alpha)})^{-1}$ é diferenciável em $\varphi_\alpha(p)$, mas

$\psi \circ F|_U \circ (\varphi_\alpha|_{(U\cap U_\alpha)})^{-1} = \psi \circ F \circ (\varphi_\alpha|_{(U\cap U_\alpha)})^{-1}$. Portanto, F é diferenciável em p e, como p é um ponto arbitrário, temos que F é diferenciável.
2. Seja U um aberto em M e $p \in U$. Uma vez que F é diferenciável, em particular, diferenciável em p, existem cartas (U_α, φ) de p em M e (V, ψ) de $F(p)$ em N, tal que $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável em $\varphi(p)$. Além disso, pela Proposição 5.4, considerando a carta $(U \cap U_\alpha, \varphi|_{U\cap U_\alpha})$ de p em M, $\psi \circ F \circ (\varphi|_{U\cap U_\alpha})^{-1} = \psi \circ F|_U \circ (\varphi|_{U\cap U_\alpha})^{-1}$ é diferenciável em $\varphi(p)$, logo $F|_U$ é diferenciável em p. Como $p \in U$ é arbitrário, segue que $F|_U$ é diferenciável. □

Proposição 5.8. *Valem as seguintes afirmações:*

1. *Toda aplicação constante entre variedades é diferenciável.*

2. *A aplicação identidade em uma variedade é diferenciável.*

3. *Se $F : M \to N$ e $G : N \to P$ são diferenciáveis entre variedades, então $G \circ F : M \to P$ é diferenciável.*

Demonstração. 1. Sejam $F : M \to N$ uma aplicação constante de forma que $F(x) = y$, $\forall x \in M$ e (V, ψ) uma carta de N que contém y.

Dados $p \in M$ e (U, φ) uma carta de M que contém p, segue que $(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(z) = \psi(y)$, $\forall z \in \varphi(U)$, o qual é uma aplicação constante entre espaços euclidianos, logo é diferenciável. Portanto, F é diferenciável.
2. Seja $Id_M : M \to M$ a aplicação identidade e (U, φ) uma carta de M.

Dado $p \in M$, temos que $(\varphi \circ Id_M \circ \varphi^{-1}) = Id : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ que é diferenciável. Portanto Id_M é diferenciável.
3. Sejam $F : M \to N$ e $G : N \to P$ aplicações diferenciáveis e $p \in M$. Como G é diferenciável, segue que existem cartas (V, θ) contendo $F(p)$ e (W, ψ) contendo $G(F(p))$, de forma que $G(V) \subset W$ e $\psi \circ G \circ \theta^{-1} : \theta(V) \to \psi(W)$ é diferenciável.

Uma vez que F é contínua, $F^{-1}(V)$ é uma vizinhança de p em M, dessa forma existe uma carta (U, φ) de M tal que $p \in U \subset F^{-1}(V)$.

Note que $\theta \circ F \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável de $\varphi(U)$ para $\varphi(V)$. Assim, temos que $(G \circ F)(U) \subset G(V) \subset W$ e $\psi \circ (G \circ F) \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ G \circ \theta^{-1}) \circ (\theta \circ F \circ \varphi^{-1}) : \varphi(U) \to \varphi(W)$ é diferenciável, pois é composição de aplicações diferenciáveis entre subconjuntos do R^n. □

Proposição 5.9. *Valem as seguintes afirmações:*

1. *Toda aplicação constante entre variedades é de classe C^k.*

2. *A aplicação identidade em uma variedade é de classe C^k.*

3. *Se $F : M \to N$ e $G : N \to P$ são de classe C^k entre variedades, então $G \circ F : M \to P$ é de classe C^k.*

Demonstração. Segue análogo ao feito na Proposição 5.8. □

Agora, abordaremos um exemplo o qual mostra que o produto de duas variedades diferenciáveis é uma variedade diferenciável. Tal exemplo será útil para provarmos o próximo resultado.

Exemplo 5.10. *Sejam $(M^m, \mathcal{A})$ e $(N^n, \mathcal{B})$ variedades. Note que de Topologia geral $M \times N$ é Hausdorff e possui base enumerável. Definindo $(\varphi \times \psi)(p,q) = (\varphi(p), \psi(q))$, com $(p,q) \in M \times N$. Considere o conjunto $\mathcal{C} = \{(U \times V, \varphi \times \psi); (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ e $(V, \psi) \in B\}$. Mostremos que $\mathcal{C}$ é um atlas de $M \times N$.*

Note que dado $(U \times V, \varphi \times \psi) \in \mathcal{C}$ temos que $\varphi \times \psi(U \times V) = \varphi(U) \times \psi(V)$ é um homeomorfismo do aberto $U \times V$ no aberto $\varphi(U) \times \psi(V)$ pois é produto de homeomorfismos.

Tome $(x, y) \in M \times N$, logo existem cartas (U, φ) e (V, ψ) tais que $x \in U$ e $y \in V$. Assim, $\varphi \times \psi \in \mathcal{C}$, ou seja, o domínio das cartas em $\mathcal{C}$ cobrem $M \times N$.

Mostremos agora a compatibilidade das cartas.

Tome $(U_1 \times V_1, \varphi_1 \times \psi_1)$, $(U_2 \times V_2, \varphi_2 \times \psi_2) \in \mathcal{C}$, temos que $(\varphi_2 \times \psi_2) \circ (\varphi_1 \times \psi_1)^{-1} = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) \times (\psi_2 \circ \psi_1^{-1})$ é C^∞, uma vez que $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})$ e $(\psi_2 \circ \psi_1^{-1})$ são C^∞.

Logo $\mathcal{C}$ é um atlas, assim existe um único atlas maximal $\hat{\mathcal{C}}$ tal que $\mathcal{C} \subset \hat{\mathcal{C}}$ e $(M \times N, \hat{\mathcal{C}})$ é uma variedade diferenciável.

Proposição 5.11. *Sejam M, N_1, N_2 variedades diferenciáveis. Uma aplicação $F = (F_1, F_2) : M \to N_1 \times N_2$ é diferenciável se, e somente se, as funções coordenadas $F_1 : M \to N_1$ e $F_2 : M \to N_2$ são diferenciáveis. Do mesmo modo, F é de classe C^k se, e somente se, F_1 e F_2 são de classe C^k.*

Demonstração. Mostraremos o caso diferenciável, o caso de classe C^k decorre de maneira análoga.

De fato, tome $p \in M$ e considere (U, φ) uma carta de M tal que $p \in U$ e $(V_1 \times V_2, \psi_1 \times \psi_2)$ uma carta de $N_1 \times N_2$ tal que $F(p) = (n_1, n_2) \in V_1 \times V_2$.

$$\begin{tikzcd}
U \subset M \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\varphi"'] & V_1 \times V_2 \subset N_1 \times N_2 \arrow[d, "\psi_1 \times \psi_2"] \\
\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \arrow[r, "\psi \circ F \circ \varphi^{-1}"] & \psi_1(V_1) \times \psi_2(V_2) \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}
\end{tikzcd}$$

Figura 5.3

Dessa forma temos que $(\psi_1 \times \psi_2) \circ F \circ \varphi^{-1} = (\psi_1 \circ F_1 \circ \varphi^{-1}, \psi_2 \circ F_2 \circ \varphi^{-1})$. Note que uma aplicação $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^m \supset \varphi(U) \to \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ é diferenciável se, e somente se, $F_1 : \varphi(U) \to \mathbb{R}^{n_1}$ e $F_2 : \varphi(U) \to \mathbb{R}^{n_2}$ são diferenciáveis. Logo obtemos o desejado. □

5.2 Difeomorfismo

Definição 5.12. *Sejam M e N variedades diferenciáveis. Um* ***difeomorfismo*** *de M para N é uma aplicação diferenciável bijetora $F : M \to N$ que tem inversa diferenciável. Um* ***difeomorfismo*** *de classe C^k de M para N ($k = 1, 2, \cdots, \infty$) é uma aplicação bijetora de classe C^k $F : M \to N$ que tem inversa de classe C^k. Dizemos que M e N são* ***difeomorfas (de classe $\mathbf{C^k}$)****, se existir um difeomorfismo (de classe C^k) entre elas.*

Proposição 5.13 (Propriedades de difeomorfismo).

1. *Toda composição de difeomorfismos (de classe C^k) é um difeomorfismo (de classe C^k).*
2. *Todo produto finito de difeomorfismo (de classe C^k) entre variedades é um difeomorfismo (de classe C^k).*
3. *Todo difeomorfismo (de classe C^k) é um homeomorfismo.*
4. *A restrição de um difeomorfismo (de classe C^k) a uma subvariedade aberta é um difeomorfismo (de classe C^k) sobre sua imagem.*
5. *Ser* ***difeomorfo*** *é uma relação de equivalência na classe de todas as variedades diferenciáveis.*

Demonstração. Mostraremos para os difeomorfismo. O caso de difeomorfismos de classe C^k segue de forma análoga.

1. De fato, sejam M, N e P variedades e $F : M \to N$ e $G : N \to P$ difeomorfismos. Note que a composição $G \circ F$ é uma bijeção pois é composição de aplicações bijetoras, pelo item **3** da Proposição 5.8 segue que $G \circ F$ e $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$ são C^∞.

2. Sejam $F_i : M_i \to N_i$ com $i = 1, \cdots, n$ difeomorfismos. Mostremos que $F_1 \times \cdots \times F_n : M_1 \times \cdots \times M_n \to N_1 \times \cdots \times N_n$ é difeomorfismo.

Note que $F_1 \times \cdots F_n$ é bijeção, pois é produto de aplicações bijetoras. Pela Proposição 5.11 segue que $F_1 \times \cdots \times F_n$ e $(F_1 \times \cdots \times F_n)^{-1} = F_n^{-1} \times \cdots \times F_1^{-1}$ são diferenciáveis.

3. Seja $F : M \to N$ um difeomorfismo, é imediato da Definição 5.12 que F é um homeomorfismo.

4. Sejam $F : M \to N$ um difeomorfismo e U um aberto em M. Mostremos que $F|_U : U \to F(U)$ é um difeomorfismo.

Pelo item **3** temos que $F(U)$ é um aberto em N, consideremos U e $F(U)$ as variedades, $(U, [C])$ e $(F(U), [D])$ onde $[C]$ e $[D]$ são os atlas maximais que contém, respectivamente, os atlas $\mathcal{C} = \{(U \cap V, \varphi|_{U \cap V}); (V, \varphi)$ é uma carta em $M\}$ e
$\mathcal{D} = \{(W \cap F(U), \psi|_{W \cap F(U)}); (W, \psi)$ é uma carta em $N\}$. Uma vez que F é diferenciável temos que qualquer representação $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável em $\varphi(p)$ para qualquer $p \in M$, em particular como U é um aberto em M, temos que $\psi|_{W \cap F(U)} \circ F|_U \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)}$ é diferenciável, logo $F|_U$ é diferenciável. De forma análoga $F^{-1}|_{F(U)}$ é diferenciável. Portanto $F|_U$ é difeomorfismo.

5. Sejam M, N e P variedades diferenciáveis.

- (Reflexiva) Basta considerar o difeomorfismo $Id : M \to M$, logo M é difeomorfa a M.
- (Simétrica) Suponha que M é difeomorfa a N, logo existe um difeomorfismo $F : M \to N$, dessa forma $F^{-1} : N \to M$ é difeomorfismo e assim N é difeomorfa M.
- Suponha que M é difeomorfa a N e N é difeomorfa a P, logo existem difeomorfismos $F : M \to N$ e $G : N \to P$. Como $G \circ F : M \to P$ é difeomorfismo temos que M é difeomorfa a P.

□

Proposição 5.14. *Seja M uma n-variedade. Se (U, φ) é uma carta em M, então a aplicação coordenada $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo C^∞.*

Demonstração. De fato, como φ é um homeomorfismo, temos que φ é bijetora, dessa forma resta provarmos que φ e φ^{-1} são C^∞. Note que $\{U, \varphi\}$ é um atlas em U, logo existe um único atlas maximal $\mathcal{A}$ de forma que $\{(U, \varphi)\} \subset \mathcal{A}$ tal que $(U, \mathcal{A})$ é variedade. Além disso $\{(\varphi(U), Id_{\varphi(U)})\}$ é um atlas de $\varphi(U)$, tome $\mathcal{B}$ o atlas maximal contendo $\{\varphi(U), Id_{\varphi(U)}\}$. Como para todo $p \in U$ temos que $(Id_{\varphi(U)} \circ \varphi \circ \varphi^{-1})$ é C^∞ em $\varphi(p)$, segue que φ é C^∞.

Por outro lado, como para todo $\varphi(p) \in \varphi(U)$ temos que $\varphi \circ \varphi^{-1} \circ {Id_{\varphi(U)}}^{-1}$ é C^∞ em $\varphi(p) = Id_{\varphi(U)}(\varphi(p))$ segue que φ^{-1} é C^∞.

Portanto, $\varphi : U \to \varphi(U)$ é de fato um difeomorfismo C^∞. □

Proposição 5.15. *Seja M uma n-variedade diferenciável e $U \subset M$ um aberto em M. Se $F : U \to F(U) \subset \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo de classe C^∞ sob um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, então (U, F) é uma carta na estrutura diferenciável de M.*

Demonstração. Dada uma carta (V, ψ) no atlas maximal de M, pela Proposição 5.14 temos que ψ e ψ^{-1} são C^∞, logo $\psi \circ F^{-1}$ e $F \circ \psi^{-1}$ são C^∞, isto é, o homeomorfismo $F : U \to F(U)$ é compatível com todas as cartas do atlas maximal, logo (U, F) pertence ao atlas maximal. □

Exemplo 5.16. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t^{\frac{1}{3}}$ e considere em $\mathbb{R}$ os atlas maximais $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, contendo $Id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e f^{-1}, respectivamente.*

Note que $f : (\mathbb{R}, A) \to (\mathbb{R}, B)$ é uma bijeção e para todo $p \in \mathbb{R}$ temos que $f^{-1} \circ f \circ Id_{\mathbb{R}} = Id_{\mathbb{R}}$ é C^∞ em p, dessa forma f é C^∞. De forma análoga f^{-1} é C^∞. Portanto f é um difeomorfismo de classe C^∞.

Observe que $f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{A})$ não é um difeomorfismo, pois $Id \circ f \circ Id = f$ e f não é diferenciável em $p = 0$, dessa forma f não é C^∞.

5.3 Partição da Unidade

Lema 5.17. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por* $f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leqslant 0 \end{cases}$ *é de classe C^∞.*

Demonstração.

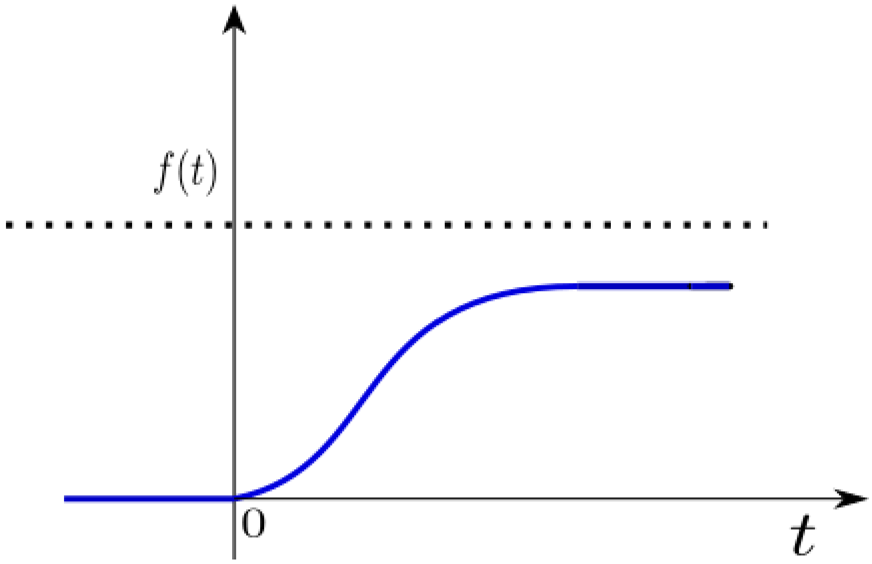


Figura 5.4

Considere as funções $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = e^x$ e $h : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = -\frac{1}{t}$. Logo $f = (g \circ h) : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $(g \circ h)(t) = g(h(t)) = g(-\frac{1}{t}) = e^{-\frac{1}{t}}$ é C^∞ em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ pois é composta de funções C^∞. Resta mostrarmos que f é C^∞ na origem.

Afirmação 1: f é contínua em 0

De fato, temos que $\lim\limits_{t\to 0^-} f(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} 0 = 0$, $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} e^{-\frac{1}{t}}$ $= \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{t}}} = 0$ e $f(0) = 0$.

Afirmação 2: $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^k} = 0, \forall k > 0$.

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^k} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^{-k}}{e^{\frac{1}{t}}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^{-k}}{e^{t^{-1}}} \overset{L'Hospital}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{-kt^{-k-1}}{-\frac{1}{t^2}e^{t^{-1}}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-kt^{-k-1}t^2}{-e^{t^{-1}}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{kt^{-k+1}}{e^{t^{-1}}}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{k(-k+1)t^{-k}}{-\frac{1}{t^2}e^{t^{-1}}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-k(k-1)t^{-k}t^2}{-e^{t^{-1}}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{k(k-1)t^{-k+2}}{e^{t^{-1}}} = \cdots = \lim_{t\to 0^+} \frac{k!}{e^{t^{-1}}}$$

$= 0$.

Afirmação 3: Para $t > 0$, a k-ésima derivada de f é da forma $f^{(k)}(t) = p_k(t)\frac{e^{\frac{-1}{t}}}{t^{2k}}$ para algum polinômio p_k de grau no máximo k.

Faremos a prova por indução.

Para $k = 0$ temos que $f^0(t) = p_0(t)\frac{e^{\frac{-1}{t}}}{t^{2\cdot 0}} = 1 \cdot e^{\frac{-1}{t}} = e^{\frac{-1}{t}}$.

Suponha que é válido para $k \geqslant 0$, temos que:

$$f^{(k+1)}(t) = p_k'(t)\frac{e^{\frac{-1}{t}}}{t^{2\cdot k}} + p_k(t)\left(\frac{e^{\frac{-1}{t}}}{t^2} \cdot t^{-2k} - 2ke^{\frac{-1}{t}} \cdot t^{-2k-1}\right)$$

$$= p_k'(t)\frac{e^{\frac{-1}{t}}}{t^{2k}} + p_k(t)\frac{e^{\frac{-1}{t}}t^{-2}}{t^{2k}} - 2kp_k(t)\frac{e^{\frac{-1}{t}}}{t^{2k+1}} = (t^2p_k'(t) + p_k(t) - 2ktp_k(t))\frac{e^{\frac{-1}{t}}}{t^{2(k+1)}}$$

como queríamos.

Afirmação 4: $f^{(k)}(0) = 0$ para cada $k \geqslant 0$.

Novamente mostraremos por indução sobre k.

Para $k = 0$, temos que $f^0(0) = 0$.

Suponha que é válido para $k \geqslant 0$. Mostrar que $f^{k+1}(0)$ existe e é zero é equivalente mostrar que f^k tem derivada pela direita e pela esquerda em $t = 0$ e são iguais.

É claro que $\lim\limits_{t\to 0^-} \frac{f^k(t)-f^k(0)}{t} = 0$. Além disso,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f^k(t) - f^k(0)}{t} \overset{\text{Af.3}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{p_k(t)\frac{e^{\frac{-1}{t}}}{t^{2k}} - 0}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{p_k(t)e^{\frac{-1}{t}}}{t^{2k+1}} \overset{\text{Af.2}}{=} 0.$$

Portanto, $f^k(0) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ e assim, f e C^∞. $\square$

Lema 5.18. *Dado quaisquer números reais r_1 e r_2 tais que $r_1 < r_2$, existe uma função C^∞ $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:*

1. *$h(t) \equiv 1$ para $t \leqslant r_1$,*
2. *$0 < h(t) < 1$ para $r_1 < t < r_2$ e,*
3. *$h(t) \equiv 0$ para $t \geqslant r_2$.*

Demonstração. Seja f a função definida no Lema 5.17 e considere $h(t) = \frac{f(r_2-t)}{f(r_2-t)+f(t-r_1)}$.

Observe que $f(r_2 - t) \geqslant 0$ e $f(t - r_1) \geqslant 0$, logo se $f(r_2 - t) = 0$ segue pela definição da função f que $r_2 - t \leqslant 0$, ou seja, $r_2 \leqslant t$. Uma vez que $r_1 < r_2 \leqslant t$, segue que $0 < t - r_1$ e assim $f(t - r_1) > 0$. Dessa forma $f(r_2 - t) + f(t - r_1) > 0$, $\forall \in t$. Assim $h(t)$ está bem definida e é C^∞ (uma vez que f é C^∞).

Se $t \leqslant r_1 < r_2$ temos que $t - r_1 \leqslant 0$, logo pela definição da f segue que $f(t - r_1) = 0$ e $h(t) = \frac{f(r_2-t)}{f(r_2-t)+f(t-r_1)} = 1$. Portanto $h(t) \equiv 1$, $\forall t \leqslant r_1$.

Se $t \geqslant r_2$, temos que $0 \geqslant r_2 - t$, logo $f(r_2 - t) = 0$ e assim $h(t) = 0$. Portanto $h(t) \equiv 0$, $\forall t \geqslant r_2$.

Agora, se $t < r_2$ segue que $0 < r - 2 - t$, assim $f(r_2 - t) > 0$. Por outro lado, se $r_1 < t$ temos que $0 < t - r_1$, logo $f(t - r_1) > 0$. Portanto $0 < \frac{f(r_2-t)}{f(r_2-t)+f(t-r_1)} = h(t) < \frac{f(r_2-t)}{f(r_2-t)} < 1$. $\square$

Definição 5.19. *Uma função com as propriedades da função h vista acima no Lema 5.18 é usualmente chamada de* ***função de corte****.*

Lema 5.20. *Dados quaisquer números reais $r_1 < r_2$, existe uma função C^∞ $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que $H \equiv 1$ em $\overline{B(0, r_1)}$, $0 < H(x) < 1$ para todo $x \in B(0, r_2)\backslash\overline{B(0, r_1)}$ e $H \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n\backslash B(0, r_2)$.*

Demonstração. Seja h a função definida no Lema 5.18 e $H(x) = h(|x|)$.

Considere $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g_1(x) = h(x)$ e $g_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $g_2(x) = |x|$. Logo $g_1 \circ g_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $(g_1 \circ g_2)(x) = g_1(g_2(x)) = g_1(|x|) = h(|x|) = H(x)$ é C^∞ em $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ pois é composta de funções C^∞.

Por outro lado, como $H \equiv 1$ no aberto $B(0, r_1)$ segue que H é C^∞ em 0. $\square$

A função H construída no Lema 5.20 é um exemplo de uma **função diferenciável bump**.

Definição 5.21. *Se f é uma função de valor real ou de valor vetorial no espaço topológico M,* ***o suporte de*** *f, denotado por $\text{supp}f$, é o fecho do conjunto de pontos onde f é não nula, ou seja, $\text{supp}f = \overline{\{p \in M; f(p) \neq 0\}}$. Se $\text{supp}f$ está contido em algum conjunto $U \subset M$, dizemos que f é* ***suportada em U****.*

Definição 5.22. *Sejam M um espaço topológico e $\mathfrak{X} = (X_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma cobertura aberta de M, onde A é um conjunto de índices. Chamamos de* ***partição da unidade*** *subordinada à $\mathfrak{X}$ uma família de funções contínuas $\psi_\alpha : M \to \mathbb{R}$, $\alpha \in A$, com as seguintes propriedades:*

1. $0 \leqslant \psi_\alpha(x) \leqslant 1$, $\forall\alpha \in A$ *e* $\forall x \in M$.

2. $\text{supp}\psi_\alpha \subseteq X_\alpha$, *para cada* $\alpha \in A$.

3. *A família de suportes $(\text{supp}\psi_\alpha)_{\alpha\in A}$ é localmente finita, ou seja, todo ponto tem uma vizinhança que intercepta apenas em uma quantidade finita de conjuntos da família.*

4. $\sum\limits_{\alpha\in A} \psi_\alpha(x) = 1, \forall x \in M.$

Observações 5.23. 1. *Pela condição* ***3*** *da Definição 5.22 temos que $(\text{supp}\psi_\alpha)_{\alpha\in A}$ é localmente finito, logo existem $\alpha_1, \cdots, \alpha_t \in A$ e uma vizinhança U_x de x tais que $U_x \cap (\text{supp}\psi_\alpha) = \varnothing$, $\forall\alpha \in A\backslash\{\alpha_1, \cdots, \alpha_t\}$, em particular, $\psi_\alpha(x) = 0, \forall\alpha \in A\backslash\{\alpha_1, \cdots, \alpha_t\}$ e assim, faz sentido a soma infinita do item* ***4*** *da definição, pois $\sum\limits_{\alpha\in A} \psi_\alpha(x) = \psi_{\alpha_1}(x) + \cdots + \psi_{\alpha_t}(x)$.*

2. *Se $(\psi_\alpha)_{\alpha\in A}$ é uma partição da unidade subordinada à $\mathfrak{X}$, onde cada $\psi_\alpha : M \to \mathbb{R}$ é C^∞, dizemos que $(\psi_\alpha)_{\alpha\in A}$ é uma partição da unidade C^∞ subordinada à $\mathfrak{X}$.*

3. *Se o item **2** dessa observação é válido, pelo item **1** dessa observação existem $\alpha_1, \cdots, \alpha_t \in A$ tais que $\sum\limits_{\alpha \in A} \psi_\alpha(x) = \psi_{\alpha_1}(x) + \cdots + \psi_{\alpha_t}(x)$. Como $\psi_{\alpha_1}, \cdots, \psi_{\alpha_t}$ são C^∞ em M, e em particular são C^∞ em x, temos que $\sum\limits_{\alpha \in A} \psi_\alpha$ é C^∞ em x, uma vez que x é arbitrário segue que $\sum\limits_{\alpha \in A} \psi_\alpha$ é C^∞.*

Teorema 5.24 (Existência da partição da unidade)**.** *Seja M uma variedade diferenciável e $\mathfrak{X} = (X_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta de M. Então existe uma partição da unidade C^∞ subordinada à $\mathfrak{X}$.*

Demonstração. Como X_α é aberto temos que X_α é uma variedade diferenciável, dessa forma pela Proposição 4.24, existe uma base β_α de bolas coordenadas regulares para X_α, note que $\beta = \bigcup\limits_{\alpha \in A} \beta_\alpha$ é uma base para M.

Como $\mathfrak{X}$ é uma cobertura aberta de M e β é uma base de M segue pelo Teorema 4.13 que $\mathfrak{X}$ admite um refinamento enumerável localmente finito $\{B_i\}_{i \in J}$ consistindo de elementos de β. Além disso, pelo Lema 1.19 temos que $\left\{\overline{B_i}\right\}_{i \in J}$ é localmente finito.

Para cada $i \in J$, como B_i é uma bola coordenada regular e $B_i \subset X_\alpha$, para algum X_α, temos que existe uma bola coordenada $B_i^{'} \subset X_\alpha$ de forma que $B_i^{'} \supset \overline{B_i}$ e existe um homeomorfismo $\varphi_i : B_i^{'} \to B\left(0, r_i^{'}\right)$ com $\varphi_i\left(\overline{B_i}\right) = \overline{B(0, r_i)}$ e $\varphi_i(B_i) = B(0, r_i)$, para algum $r_i < r_i^{'}$ (definição de bola coordenada regular).

Considere a função $f_i : M \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f_i(x) = \begin{cases} (H_i \circ \varphi_i)(x), & \text{se} \quad x \in B_i^{'}; \\ 0, & \text{se} \quad x \in M \backslash \overline{B_i}; \end{cases}$$

onde $H_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, tal que $H(t) > 0$ para $t \in B(0, r_i)$ e $H(t) = 0$ se $t \in \mathbb{R}^n \backslash B(0, r_i)$ (Lema 5.20). No conjunto $B_i^{'} \backslash \overline{B_i}$ as definições coincidem, logo f_i está bem definida e é diferenciável. Além disso, como $f_i(x) > 0$ se, e somente se, $x \in B_i$, segue que $\operatorname{supp} f_i = \overline{B_i}$.

Agora, vamos definir $f : M \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \sum\limits_i f_i(x)$.

Como $\left\{\overline{B_i} = \operatorname{supp} f_i\right\}_{i \in J}$ é uma cobertura de M localmente finita, dado $x \in M$ existe uma vizinhança U_x de x e índices $i_1, \cdots, i_t \in J$ tais que $U_x \cap \overline{B_i} = \varnothing, \forall i \neq i_j$ com $j = 1, \cdots, t$. Assim $f(x) = f_{i1}(x) + \cdots + f_{it}(x)$ e portanto f é diferenciável. Uma vez que para cada i temos que $f_i(x) \geqslant 0$ e $\{B_i\}_{i \in J}$ forma uma cobertura para M, então $x \in B_{i_j}$ para algum j, logo $f(x) > 0$.

Definindo $g_i : M \to \mathbb{R}$ por $g_i(x) = \frac{f_i(x)}{f(x)}$, temos que g_i é C^∞ com $0 \leqslant g_i \leqslant 1$ e $\sum\limits_i g_i(x) = \sum\limits_i \left(\frac{f_i(x)}{f(x)}\right) = \frac{f_{i1}(x)}{f(x)} + \cdots + \frac{f_{it}(x)}{f(x)} = \frac{f_{i1}(x) + \cdots + f_{it}(x)}{f(x)} = 1$.

Uma vez que $\{B_i^{'}\}$ é um refinamento de $\mathfrak{X}$, para cada $i \in J$ existe $\alpha \in A$ de forma que $B_i^{'} \subset X_\alpha$.

Tome $a : J \subset \mathbb{N} \to A$ uma "função escolha", isto é, $B_i' \subset X_{a(i)}$. Para cada $\alpha \in A$ defina $\psi_\alpha : M \to \mathbb{R}$ por $\psi_\alpha = \sum\limits_{i;a(i)=\alpha} g_i$. Se não existir índice i de forma que $a(i) = \alpha$ então $\psi_\alpha \equiv 0$, isto é,

$$\psi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, \text{ se não existir índice } i \text{ de forma que } a(i) = \alpha; \\ 1, \text{ se existir índice } i \text{ de forma que } a(i) = \alpha; \end{cases}$$

Logo, ψ_α é C^∞ e $0 \leqslant \psi_\alpha \leqslant 1$ para cada $\alpha \in A$.

Observe que

$$\mathrm{supp}\psi_\alpha = \overline{\{x \in M; \psi_\alpha(x) \neq 0\}} = \overline{\{x \in M; \sum_{i;a(i)=\alpha} g_i(x) \neq 0\}} = \overline{\bigcup \{x \in M; g_i(x) \neq 0\}}$$

$$= \overline{\bigcup \{x \in M; f_i(x) \neq 0\}} = \overline{\bigcup B_i} \overset{\text{Lema1.19}}{=} \bigcup \overline{B_i} \overset{\overline{B_i} \subset B_i' \subset X_\alpha}{\subset} X_\alpha.$$

Além disso, como $\{\overline{B_i}\}$ é localmente finito temos que existe uma vizinhança U_x de x em M e índices $i_1, \cdots, i_t \in J$ de forma que $U_x \cap \overline{B_i} = \varnothing, \forall i \neq i_1, \cdots, i_t$.

Dado $\alpha \in A$ com $\alpha \neq a(i_j)$ para cada $j \in 1, \cdots, t$ temos que $U_x \cap (\mathrm{supp}\psi_\alpha)$ $= U_x \cap \left(\bigcup\limits_{i;a(i)=\alpha} \overline{B_i} \right) = \bigcup\limits_{i;a(i)=\alpha} (U_x \cap \overline{B_i}) = \varnothing$. Logo $\{(\mathrm{supp}\psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ é localmente finito.

Por fim $\sum\limits_\alpha \psi_\alpha \equiv \sum\limits_i g_i = 1$.

Assim, essa é a partição da unidade desejada. □

Definição 5.25. *Sejam M e N variedades diferenciáveis e $A \subseteq M$ um subconjunto qualquer. Dizemos que uma aplicação $F : A \to N$ é* ***diferenciável em*** *A se ela possuir uma extensão diferenciável em uma vizinhança de cada ponto, isto é, se para todo $p \in A$ existe um subconjunto aberto $W \subseteq M$ contendo p e uma aplicação diferenciável $\tilde{F} : W \to N$ tal que $\tilde{F}|_{W \cap A} = F|_{W \cap A}$.*

Lema 5.26 (Extensão para funções diferenciáveis)**.** *Seja M uma variedade diferenciável, $A \subset M$ um subconjunto fechado e $f : A \to \mathbb{R}^k$ uma função diferenciável (ou C^∞). Para qualquer subconjunto aberto $U \supset A$ existe uma função diferenciável (ou C^∞) $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}^k$ tal que $\tilde{f}|_A = f$ e $\mathrm{supp}\tilde{f} \subset U$.*

Demonstração. Para cada $p \in A$, considere W_p uma vizinhança de p e $\tilde{f}_p : W_p \to \mathbb{R}^k$ uma função diferenciável tal que $\tilde{f}_p$ coincide com f em $W_p \cap A$.

Seja U um subconjunto aberto de M que contém A, dessa forma $W_p \cap U$ é um aberto em M que contém p, substituindo W_p por $W_p \cap U$, podemos assumir que $W_p \subset U$.

Note que $\{W_p; p \in A\}$ é uma cobertura de A, ou seja, $A \subset \bigcup\limits_{p \in A} W_p$, logo $\{W_p; p \in A\} \cup \{M \backslash A\}$ cobre M.

Pelo Teorema 5.24 existe uma partição da unidade diferenciável subordinada a $\{W_p; p \in A\} \cup \{M\backslash A\}$. Considere $\{W_p\}_{p\in A} \cup \{W_0\}$ uma partição da unidade subordinada a cobertura $\{W_p; p \in A\} \cup \{M\backslash A\}$ com $\text{supp}\psi_p \subset W_p$ e $\text{supp}\psi_0 \subset M\backslash A$.

Do fato de $\tilde{f}_p : W_p \to \mathbb{R}^k$ ser C^∞ em W_p e $\psi_p : M \to \mathbb{R}$ ser C^∞ em M, temos que $\tilde{f}_p \cdot \psi_p$ é diferenciável em $M \cap W_p = W_p$ e tem uma extensão diferenciável para todo M se considerarmos que $\psi_p \cdot \tilde{f}_p \equiv 0$ em $M\backslash\text{supp}\psi_p$ (A função extendida é diferenciável porque as duas definições coincidem no subconjunto aberto $W_p\backslash\text{supp}\psi_p$). Podemos definir então $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}^k$ por $\tilde{f}(x) = \sum\limits_{p\in A} \psi_p(x) \cdot \tilde{f}_p(x)$.

Pela Definição 5.22 temos que a família de suportes $\{\text{supp}\psi_p\}$ é localmente finita, ou seja, essa soma tem apenas um número finito de termos não nulos em alguma vizinhança de qualquer ponto de M, logo $\sum\limits_{p\in A} \psi_p(x) \cdot \tilde{f}_p(x)$ é diferenciável.

Tome $x \in A$, dessa forma $x \notin M\backslash A$ o que implica que $x \notin \text{supp}\psi_0 = \overline{\{x \in M;\ \psi_0(x) \neq 0\}}$, então $\psi_0(x) = 0$ e $\tilde{f}_p(x) = f(x)$ para cada p tal que $\psi_p(x) \neq 0$, assim

$$\tilde{f}(x) = \sum_{p\in A} \psi_p(x) \cdot f_p(x) = \left(\psi_0(x) + \sum_{p\in A} \psi_p(x)\right) f(x) = f(x),$$

logo $\tilde{f}$ é de fato uma extensão de f em A.

Note que, $\left\{x \in M;\ \sum\limits_{p\in A} \psi_p(x) \cdot \tilde{f}_p(x) \neq 0\right\} = \bigcup\limits_{p\in A} \{x \in M;\ x \in supp\psi_p(x)\}$ $= \bigcup\limits_{p\in A} supp\psi_p(x)$. Pelo item **2** do Lema 1.19, segue que:

$$\text{supp}\tilde{f} = \overline{\left\{x \in M;\ \sum_{p\in A} \psi_p(x) \cdot \tilde{f}_p(x) \neq 0\right\}} = \overline{\bigcup_{p\in A} supp\psi_p(x)} = \bigcup_{p\in A} \overline{\text{supp}\psi_p} = \bigcup_{p\in A} \text{supp}\psi_p \subset U.$$ □

Definição 5.27. *Sejam M um espaço topológico, $A \subset M$ um subconjunto fechado e $U \subset M$ um subconjunto aberto com $A \subset U$. Uma função $\psi : M \to \mathbb{R}$ é dita ser uma **bump function** de A suportada em U se $0 \leqslant \psi \leqslant 1$ em M, $\psi \equiv 1$ em A e $\text{supp}\psi \subseteq U$.*

Proposição 5.28. *Seja M uma variedade diferenciável. Dados um subconjunto fechado $A \subset M$ e um subconjunto aberto $U \supset A$, existe uma bump function C^∞ de A suportada em U.*

Demonstração. De fato, considere $U = U_0$ e $U_1 = M\backslash A$. Como $M = U \cup (M\backslash U) \subset U \cup (M\backslash A) = U_0 \cup U_1 \subset M$, logo $U_0 \cup U_1 = M$ e assim $\{U_0, U_1\}$ é uma cobertura aberta de M.

Pelo Teorema 5.24 existe uma partição da unidade diferenciável (ψ_0, ψ_1) subordinada à $\{U_0, U_1\}$. Como $\text{supp}\psi_1 \subset U_1 = M\backslash A$ segue que $\psi_1 \equiv 0$ em A.

Assim, para cada $a \in A$ temos que $1 = \psi_0(a) + \psi_1(a) = \psi_0(a)$, logo $\psi_0 \equiv 1$ em A, $0 \leqslant \psi_0 \leqslant 1$ e $\text{supp}\psi_0 \subset U_0 = U$. Portanto ψ_0 é a função desejada. □

5.4 Espaço tangente

Definição 5.29. *Seja M uma variedade diferenciável e $p \in M$. Uma aplicação linear $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ é chamada uma **derivação em p** se satisfazer:*

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f) \text{ para todo } f, g \in C^\infty(M).$$

Lema 5.30. *O conjunto de todas as derivações de $\in C^\infty(M)$ em p, denotado por T_pM, é um espaço vetorial chamado **espaço tangente** de M em p.*

Demonstração. De fato, note que $T_pM \neq \emptyset$ pois $0 : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ definida por $0(f) = 0$ pertence a T_pM.

Agora tome $u, v \in T_pM$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, logo dados $f, g \in C^\infty(M)$ como $\lambda u + v \in L(C^\infty(M), \mathbb{R})$, basta mostrarmos que $(\lambda u + v)$ é uma derivação em p.

Assim, $(\lambda u + v)(fg) = \lambda u(fg) + v(fg) = \lambda(f(p)u(g) + g(p)u(f)) + f(p)v(g) + g(p)v(f) = f(p)(\lambda u(g) + v(g)) + g(p)(\lambda u(f) + v(f)) = f(p)((\lambda u + v)(g)) + g(p)((\lambda u + v)(f))$. □

Um elemento de T_pM é chamado **vetor tangente** em p.

Lema 5.31. *Seja M uma variedade diferenciável, $p \in M$, $v \in T_pM$ e $f, g \in C^\infty(M)$.*

1. *Se f é uma função constante, então $v(f) = 0$.*
2. *Se $f(p) = g(p) = 0$, então $v(fg) = 0$.*

Demonstração. 1. Seja $f \equiv c$ e considere $g \equiv 1 \in C^\infty(M)$, dessa forma

$$v(f) = v(cg) = cv(g), \tag{5.1}$$

uma vez que v é transformação linear e c uma constante.

Por outro lado, $v(g) = v(gg) = g(p)v(g) + g(p)v(g) = v(g) + v(g)$, o que implica que $v(g) = 0$. Substituindo em 5.1, temos que $v(f) = c0 = 0$.
2. Suponha que $f(p) = g(p) = 0$, logo $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f) = 0$. □

5.5 A diferencial de uma aplicação diferenciável

Definição 5.32. *Sejam M, N são variedades diferenciáveis e $F : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Para cada ponto $p \in M$ definimos a aplicação $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}M$ chamada **diferencial** de F em p da seguinte maneira:*

Dado $v \in T_pM$, seja $dF_p(v)$ a derivação em $F(p)$ que age em $f \in C^\infty(N)$ pela seguinte regra: $dF_p(v)(f) = v(f \circ F)$.

Lema 5.33. *$dF_p : T_pM \to T_{F(p)}M$ é de fato uma derivação.*

Demonstração. Dados $f, g \in C^\infty(N)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, como v é linear segue que $dF_p(v)(\lambda f + g) = v((\lambda f + g) \circ F) = v(\lambda(f \circ F) + (g \circ F)) = \lambda v(f \circ F) + v(g \circ f) = \lambda dF_p(v)(f) + dF_p(v)(g)$. Logo, $dF_p(v)$ é linear.

Além disso, $dF_p(v)(f \cdot g) = v((f \cdot g) \circ F) = v((f \circ F)(g \circ F)) = (f \circ F)(p) \cdot v(g \circ F) + v(f \circ F) \cdot (g \circ F)(p) = f(F(p)) \cdot dF_p(v)(g) + dF_p(v)(f) \cdot g(F(p))$. □

Proposição 5.34. *Sejam M, N e P variedades diferenciáveis e $F : M \to N$ e $G : N \to P$ aplicações diferenciáveis em $p \in M$. Nessas condições:*

1. $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ *é linear.*
2. $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p : T_pM \to T_{G\circ F(p)}P$.
3. $d(Id_M)_p = Id_{T_pM} : T_pM \to T_pM$.
4. *Se F é um difeomorfismo, então $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ é um isomorfismo e $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$.*

Demonstração. 1. Tome $u, v \in T_pM$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in C^\infty(N)$, temos que $df_p(\lambda u + v)(f) = (\lambda u + v)(f \circ F) = \lambda u(f \circ F) + v(f \circ F) = \lambda dF_p(u)(f) + dF_p(v)(f)$.
2. Temos que $\left(dG_{F(p)} \circ dF_p\right)(v)(f) = dG_{F(p)}(dF_p(v))(f) = dF_p(v)(f \circ G) = v((f \circ G) \circ F) = v(f \circ (G \circ F)) = d(G \circ F)_p(v)(f)$, $\forall f \in C^\infty(N)$ e $\forall v \in T_pM$.

Portanto $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p : T_pM \to T_{(G\circ F)(p)}P$.
3. Temos que $d(Id_M)_p(v)(f) = v(f \circ Id_M) = v(f)$, assim $d(Id_M)_p(v) = v$, $\forall v \in T_pM$.

Portanto $d(Id_M)_p = Id_{T_pM} : T_pM \to T_pM$.
4. Suponha que F é um difeomorfismo. Pelo item **1** dessa proposição temos que dF_p é linear, logo resta mostrarmos que $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ é bijeção.

Note que $d(F^{-1})_{F(p)} \circ dF_p = d(F^{-1} \circ F)_p = d(Id_M)_p = Id_{T_pM}$. De forma análoga segue que $dF_p \circ d(F^{-1})_{F(p)} = Id_{T_{F(p)}N}$.

Portanto, $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ é um isomorfismo e $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$.

□

Proposição 5.35. *Sejam M uma variedade diferenciável, $p \in M$ e $v \in T_pM$. Se $f, g \in C^\infty(M)$ e existe uma vizinhança U_p de p com $f(x) = g(x)$, $\forall x \in U_p$, então $v(f) = v(g)$.*

Demonstração. De fato, considere $h = f - g$, logo h é uma função $C^\infty(M)$ e $h(x) = 0$, $\forall x \in U_p$.

Temos que $\operatorname{supp} h \subset M \backslash \{p\}$, pela Proposição 5.28 existe uma $\psi \in C^\infty(M)$ de forma que $\psi \equiv 1$ em $\operatorname{supp} h$, $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, com $\operatorname{supp} \psi \subset M \backslash \{p\}$, logo $\psi \cdot h = h$. Desde que $h(p) = \psi(p) = 0$, temos que $v(h) = v(\psi \cdot h) = 0$, assim $0 = v(h) = v(f - g) = v(f) - v(g)$. Portanto $v(f) = v(g)$. □

Proposição 5.36. *Sejam M e N variedades diferenciáveis, $F : M \to N$, $G : M \to N$ aplicações diferenciáveis em $p \in M$ e U_p uma vizinhança de p em M tal que $F(x) = G(x)$, $\forall x \in M$, então $dF_p = dG_p$.*

Demonstração. Dado $f \in C^\infty(N)$ temos que $f \circ F, f \circ G \in C^\infty(M)$ são tais que $(f \circ F)(x) = (f \circ G)(x)$, $\forall x \in U_p$. Pela Proposição 5.35, dado $v \in T_pM$ segue que $v(f \circ F) = v(f \circ G)$, ou seja, $dF_p(v)(f) = dG_p(v)(f)$.

Como $v \in T_pM$ e $f \in C^\infty(M)$ são arbitrários, segue que $dF_p = dG_p$. □

Proposição 5.37. *Sejam M uma variedade diferenciável, $U \subset M$ um subconjunto aberto e seja $i : U \to M$ a aplicação inclusão. Para todo $p \in U$ a diferencial $di_p : T_pU \to T_pM$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Seja $p \in U$ um ponto qualquer. Já vimos que di_p é uma transformação linear, dessa forma mostraremos que di_p é uma bijeção.

Para provarmos que di_p é injetiva, mostraremos que $\ker(di_p) = \{0\}$.

De fato, tome $v \in \ker(di_p)$, logo $di_p(v) = 0$. Seja B uma vizinhança de p de forma que $\overline{B} \subset U$ e seja $f \in C^\infty(U)$ arbitrário. O Lema 5.26 garante que existe $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ de forma que $\tilde{f} \equiv f$ em $\overline{B}$ e $\operatorname{supp}\tilde{f} \subset U$.

Como f e $\tilde{f}|_U$ são diferenciáveis em U e coincidem em uma vizinhança de p, pela Proposição 5.35 temos que $v(f) = v\left(\tilde{f}|_U\right) = v\left(\tilde{f} \circ i\right) = di_p(v)\tilde{f} = 0$. Dessa forma $v = 0$, assim di_p é injetiva.

Resta mostrarmos que di_p é sobrejetiva.

Seja $w \in T_pM$ qualquer. Defina um operador $v : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ de forma que $v(f) = w\left(\tilde{f}\right)$, onde $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ e $\tilde{f} \equiv f$ em $\overline{B}$. Note que v está bem definida pois pela Proposição 5.35 $v(f)$ independe da escolha de $\tilde{f}$.

Afirmação: v é uma derivação de $C^\infty(U)$ em p.

De fato, tome $f, g \in C^\infty(U)$, temos que $v(fg) = w\left(\widetilde{fg}\right) = \tilde{f}(p)w(\tilde{g}) + \tilde{g}(p) + w\left(\tilde{f}\right) = \tilde{f}(p)v(g) + \tilde{g}(p)v(f) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$.

Para qualquer $g \in C^\infty(M)$, temo que $di_p(v)(g) = v(g \circ i) = w\left(\widetilde{g \circ i}\right) = w(\tilde{g}|_U) = w(g)$. Portanto di_p é sobrejetiva. □

5.6 Derivadas parciais

Definição 5.38. *Sejam M uma n-variedade, (U, φ) uma carta de M e f uma função $C^\infty(M)$. Para cada $p \in U$, definimos a* ***derivada parcial*** *$\frac{\partial f}{\partial x^i}$ de f com respeito a x^i no ponto p, como sendo:*

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f := \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}(\varphi(p)) := \left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1}),$$

onde $\varphi = (x^1, \cdots, x^n)$, $(r^1, \cdots, r^n)$ são componentes do $\mathbb{R}^n$ e $x^i = r^i \circ \varphi$.

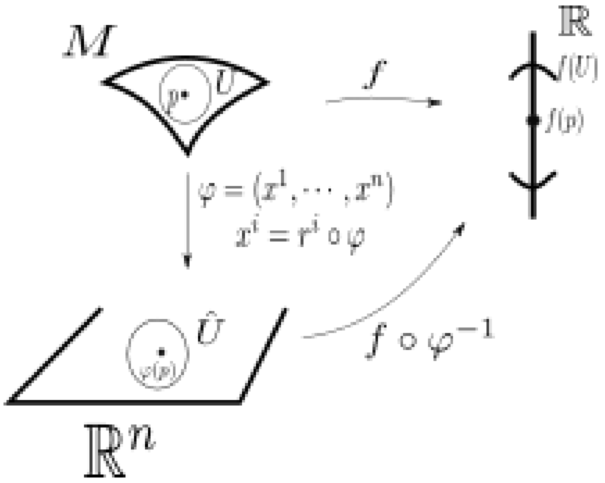


Figura 5.5

Observação 5.39. *Observe que* $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ *é* C^∞ *em* U, *pois* $\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i} \circ \varphi$ *é* C^∞ *em* $\varphi(U)$ *e* φ^{-1} *é* C^∞ *em* $\varphi(U)$.

Proposição 5.40. *Seja* $(U, x^1, \cdots, x^n)$ *uma carta na variedade* M. *Então*
$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & se \quad i \neq j; \\ 1, & se \quad i = j. \end{cases}$$

Demonstração. Tome $p \in U$, logo $\frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p) = \frac{\partial (x^i \circ \varphi^{-1})}{\partial r^j}(\varphi(p)) = \frac{\partial (r^i \circ \varphi \circ \varphi^{-1})}{\partial r^j}(\varphi(p)) = \frac{\partial r^i}{\partial r^j}(\varphi(p)) = \delta_{ij}$. □

Definição 5.41. *Seja* $F : M \to N$ *uma aplicação diferenciável, e sejam* $(U, \varphi) = (U, x^1, \cdots, x^m)$ *e* $(V, \psi) = (V, y^1, \cdots, y^n)$ *cartas em* M *e* N, *respectivamente, tais que* $F(U) \subset V$. *Denotamos por* $F^i = y^i \circ F := r^i \circ \psi \circ F : U \to \mathbb{R}$ *a* i*-ésima componente de* F *na carta* (V, ψ). *Então a matriz*

$$\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial x^m} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

é chamada ***matriz jacobiana*** *de* F *em relação as cartas* (U, φ) *e* (V, ψ).

Exemplo 5.42. *Sejam* $(U, \varphi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ *e* $(V, \psi) = (V, y^1, \cdots, y^n)$ *cartas em* M *de forma que* $U \cap V \neq \emptyset$. *A aplicação transição* $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ *é um difeomorfismo de subconjuntos abertos do* $\mathbb{R}^n$. *Mostremos que a matriz jacobiana* $J(\psi \circ \varphi^{-1})$ *em* $\theta(p)$ *é a matriz* $\left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right]$ *de derivadas parciais em* p.

Pela definição 5.41, temos que:

$$J(\psi \circ \varphi^{-1}) = \left[\frac{\partial (\psi \circ \varphi^{-1})^i}{\partial r^j}\right].$$

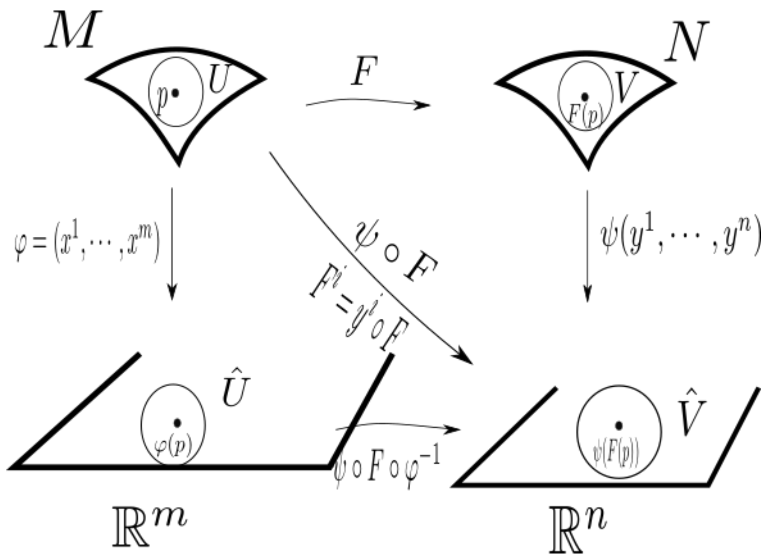


Figura 5.6

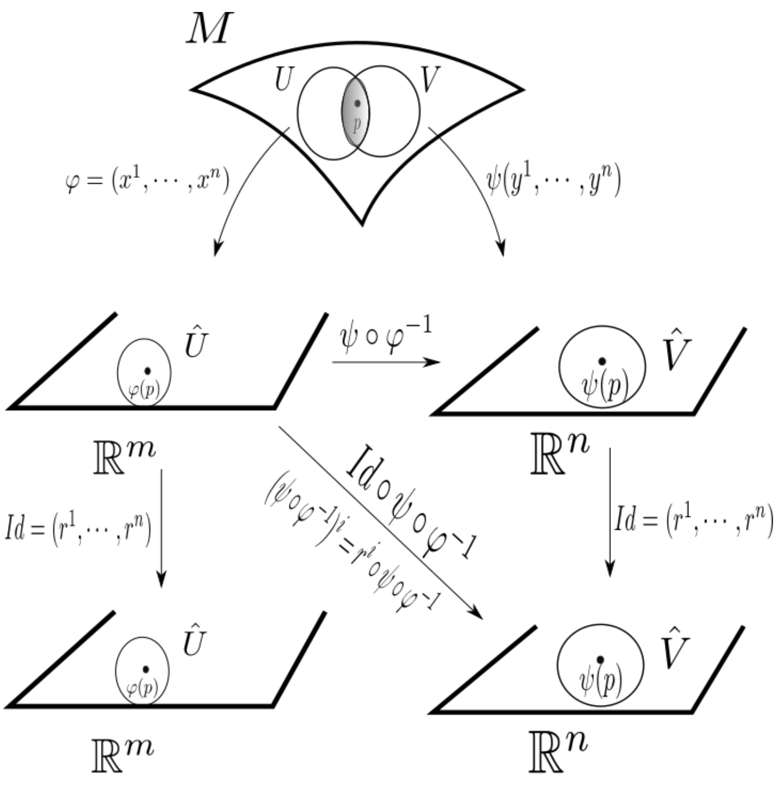


Figura 5.7

Mas,

$$\frac{\partial(\psi\circ\varphi^{-1})^i}{\partial r^j}(\varphi(p)) = \frac{\partial(r^i\circ\psi\circ\varphi^{-1})}{\partial r^j}(\varphi(p)) = \frac{\partial(y^i\circ\varphi^{-1})}{\partial r^j}(\varphi(p)) = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(p),\ \ \forall p\in(U\cap V).$$

Portanto, $J(\psi \circ \varphi^{-1}) = \left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right]$.

Lema 5.43. $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ *é uma derivação, ou seja, é um vetor tangente em* p.

Demonstração. **Afirmação 1:** $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ é linear.

Tome $f, g \in C^\infty(M)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Dessa forma, $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p(\alpha f + g) = \frac{\partial}{\partial r^i}((\alpha f + g) \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = \alpha \frac{\partial}{\partial r^i}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) + \frac{\partial}{\partial r^i}(g \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = \alpha \frac{\partial}{\partial x^i}|_p f + \frac{\partial}{\partial x^i}|_p g$.

Afirmação 2: $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p (f \cdot g)$ satisfaz a regra do produto.

De fato, tome $f, g \in C^\infty(M)$, temos que $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p(f \cdot g) = \frac{\partial}{\partial r^i}((f \cdot g) \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ $= \frac{\partial}{\partial r^i}((f \circ \varphi^{-1}) \cdot (g \circ \varphi^{-1}))(\varphi(p)) = (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot \frac{\partial}{\partial r^i}(g \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) + (g \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \cdot \frac{\partial}{\partial r^i}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = f(p) \frac{\partial}{\partial x^i}|_p g + g(p) \frac{\partial}{\partial x^i}|_p f$.

Portanto $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ é uma derivação. □

Proposição 5.44. *Seja* M *uma variedade e* $p \in M$. *Se* (U, φ) *é uma carta de* M *em* p, *então* $d\varphi_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right) = \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\varphi(p)}$.

Demonstração. Tome $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos que:

$$d\varphi_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right)(f) = \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p (f \circ \varphi) = \frac{\partial}{\partial r^i}\bigg|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial}{\partial r^i}\bigg|_{\varphi(p)} f.$$

Como f é arbitrário, temos que $d\varphi_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\right) = \frac{\partial}{\partial r^i}|_{\varphi(p)}$. □

Lema 5.45. *O conjunto* $\left\{\frac{\partial}{\partial r^1}\Big|_{\varphi(p)}, \cdots, \frac{\partial}{\partial r^n}\Big|_{\varphi(p)}\right\}$ *é uma base do espaço tangente* $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$.

Demonstração. De fato, como $\dim(T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n) = n$, basta mostrarmos que o conjunto $\left\{\frac{\partial}{\partial r^1}|_{\varphi(p)}, \cdots, \frac{\partial}{\partial r^n}|_{\varphi(p)}\right\}$ é linearmente independente.

Assim, sejam $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, de forma que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial r^i}|_{\varphi(p)} = 0$. Para cada i, considere as aplicações coordenadas $r_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, logo $0 = \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\varphi(p)}\right)(r^j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial r^j}{\partial r^i}(\varphi(p)) = \alpha_i$.

Portanto $\left\{\frac{\partial}{\partial r^1}\Big|_{\varphi(p)}, \cdots, \frac{\partial}{\partial r^n}\Big|_{\varphi(p)}\right\}$ é uma base do espaço tangente $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$. □

Proposição 5.46. *Seja* M *uma variedade e* $p \in M$. *Se* $(U, \varphi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ *é uma carta de* M *em* p, *então* $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p\right\}$ *é uma base do espaço tangente* T_pM.

Demonstração. Como $\varphi : U \to \hat{U} \subset \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo, segue pelo item **4** da Proposição 5.34, que $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ é um isomorfismo. Uma vez que isomorfismo leva base em base, $\left\{\frac{\partial}{\partial r^1}\Big|_{\varphi(p)}, \cdots, \frac{\partial}{\partial r^n}\Big|_{\varphi(p)}\right\}$ é uma base de $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ e $d\varphi_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right) = \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\varphi(p)}$, temos que $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p\right\}$ é uma base de T_pM. □

Proposição 5.47 (Dimensão do espaço tangente)**.** *Se M é uma n-variedade diferenciável, então para cada $p \in M$, T_pM é um espaço vetorial n-dimensional.*

Demonstração. Seja $p \in M$ e (U, φ) uma carta contendo p. Note que $\varphi : U \to \hat{U} \subset \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo, logo pelo item **4** da Proposição 5.34, $d\varphi_p : T_pU \to T_{\varphi(p)}\hat{U}$ é um isomorfismo. Como pela Proposição 5.37 $T_pM \approx T_pU$ e $T_pU \approx T_{\varphi(p)}\hat{U} \approx \mathbb{R}^n$, segue que $\dim T_pM = \dim T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n = n$. □

Proposição 5.48. *Sejam M uma variedade diferenciável e $(U, x^1, \cdots, x^n)$ e $(V, y^1, \cdots, y^n)$ cartas coordenadas em M. Então $\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial}{\partial y^i}$ em $U \cap V$.*

Demonstração. Para cada $p \in U \cap V$, temos que $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\right\}$ e $\left\{\frac{\partial}{\partial y^1}|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial y^n}|_p\right\}$ são bases de T_pM, dessa forma existe uma matriz $[a_{ij}(p)]$ de números reais com relação à essas bases tal que em $U \cap V$ temos:

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \frac{\partial}{\partial y^k}. \tag{5.2}$$

Aplicando y^i em ambos os lados da equação, obtemos:

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \frac{\partial y^i}{\partial y^k} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\delta_{ik} = a_{ij}.$$

Portanto, $\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial}{\partial y^i}$. □

Proposição 5.49. *Sejam $F : M \to N$ uma aplicação diferenciável, $p \in M$ e $(U, x^1, \cdots, x^m)$ e $(V, y^1, \cdots, y^n)$ cartas coordenadas de M e N em p e $F(p)$, respectivamente. Com relação as bases $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^m}\Big|_p\right\}$ de T_pM e $\left\{\frac{\partial}{\partial y^1}\Big|_{F(p)}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y^n}\Big|_{F(p)}\right\}$ de $T_{F(p)}N$, a diferencial $dF_p : T_pM \to T_pN$ é representada pela matriz $\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\right]$, onde $F^i = y^i \circ F$ é a i-ésima componente de F.*

Demonstração. Temos que $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^m}\Big|_p\right\}$ é uma base de T_pM e $\left\{\frac{\partial}{\partial y^1}\Big|_{F(p)}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y^n}\Big|_{F(p)}\right\}$ é uma base de $T_{F(p)}N$. Dessa forma, diferencial dF_p é determinada pelos escalares a_{ij} tais que

$$dF_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \frac{\partial}{\partial y^k}\Big|_{F(p)}, \text{ com } j = 1, \cdots, m. \tag{5.3}$$

Aplicando y^i em ambos os lados da equação 5.3, temos que:

$$a_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} \frac{\partial}{\partial y^k}\Big|_{F(p)}\right) y^i = dF_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right) y^i = \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p (y^i \circ F) = \frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p).$$

□

5.7 FIBRADO TANGENTE

Definição 5.50. *Seja M uma variedade, definimos o* ***fibrado tangente*** *de M denotado por TM como sendo a união disjunta de todos os espaços tangente de M, ou seja:*

$$TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM := \bigsqcup T_pM.$$

Observações 5.51. 1. *Um elemento de TM é um par (p, v) em que $p \in M$ e v é um vetor tangente a M em p.*

2. *Existe uma projeção natural $\pi : TM \to M$ dada por $\pi(p, v) = p$.*

Proposição 5.52. *Seja M^n uma variedade, o fibrado tangente TM tem uma topologia natural e uma estrutura diferenciável que o tornam uma variedade diferenciável de dimensão $2n$.*

Demonstração. Seja $(U, \varphi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ uma carta de M, logo $TU = \bigsqcup\limits_{p \in U} T_pU =$

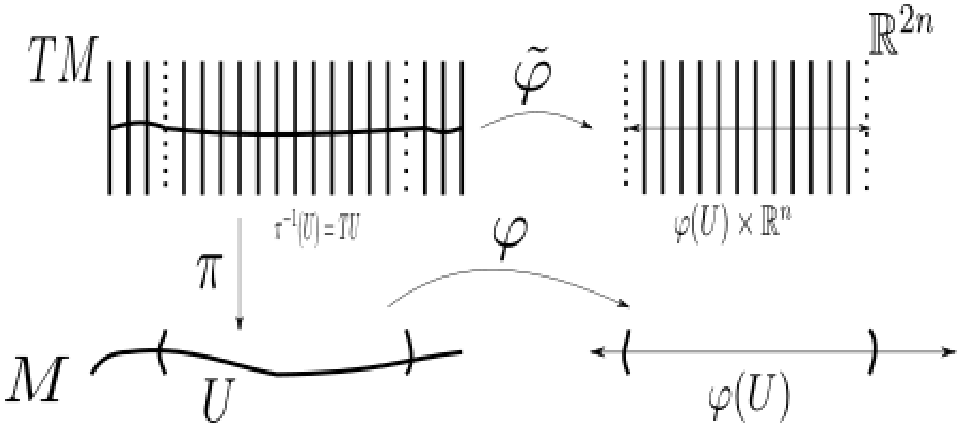


Figura 5.8

$\bigsqcup_{p \in U} T_pM$. Note que que $TU \subset TM$.

Dado $p \in U$, pela proposição 5.46, $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\right\}$ é uma base para T_pM, dessa forma $v \in T_pM$ é escrito como combinação linear dos elementos da base, ou seja, $v = \sum\limits_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$.

Defina $\tilde{\varphi} : TU \to \mathbb{R}^{2n}$ da seguinte maneira:

$\tilde{\varphi}(p, v) = (x^1(p), \cdots, x^n(p), v^1, \cdots, v^n)$. Note que $\tilde{\varphi}$ é uma bijeção sob sua imagem $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ pois $\tilde{\varphi}^{-1}(x^1(p), \cdots, x^n(p), v^1, \cdots, v^n) = (p, \sum\limits_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p)$. Além disso, considerando em TU a topologia induzida por $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\varphi}$ é um homeomorfismo em $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$.

Agora, sejam $(U, \varphi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$, $(V, \psi) = (V, \tilde{x}^1, \cdots, \tilde{x}^n)$ cartas de M e $(TU, \tilde{\varphi})$, $(TV, \tilde{\psi})$ cartas correspondentes em TM, os conjuntos $\tilde{\varphi}(TU \cap TV) = \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ e $\tilde{\psi}(TU \cap TV) = \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ são abertos de $\mathbb{R}^{2n}$.

Considerando $U \cap V \neq \varnothing$ temos que a aplicação transição $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \to \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ dada por

$(\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1})(x^1(p), \cdots, x^n(p), v^1, \cdots, v^n) = \tilde{\psi}(\tilde{\varphi}^{-1}(x^1(p), \cdots, x^n(p), v^1, \cdots, v^n))$
$= \tilde{\psi}(p, \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p) = (\tilde{x}^1(p), \cdots, \tilde{x}^n(p), \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^j}(p)v^j, \cdots, \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^j}(p)v^j)$,
é diferenciável.

Seja $\{U_i\}$ uma cobertura enumerável de M, logo obtemos uma cobertura enumerável de TM por domínios coordenados $\{TU_i\}$.

Por fim, tome $(p, v), (q, w) \in TU$, note que $\{p\} \times T_pM = \pi^{-1}(p)$ e $\{q\} \times T_qM = \pi^{-1}(q)$. Se p e q pertencem a uma mesma fibra de π temos que $\pi^{-1}(p) = \pi^{-1}(q)$ e como π^{-1} é injetora, segue que $p = q$, dessa forma existe uma carta (U, φ) tal que $p = q$ em U.

Por outro lado, se p e q pertencem a fibras distintas, segue que $\pi^{-1}(p) \neq \pi^{-1}(q)$, o que implica que $p \neq q$. Como $p, q \in M$ e M é Hausdorff, existem abertos U e V disjuntos de forma que $p \in U$ e $q \in V$. Considere (U_p, φ_p) e (V_q, ψ_q) cartas de M de forma que $p \in U_p$ e $q \in V_q$, logo $(U_p \cap U, \varphi|_{Up \cap U})$ e $(V_q \cap V, \psi|_{V_q \cap V})$ são cartas de M, $p \in U_p \cap U$, $q \in V_q \cap V$ e assim $T(U_p \cap U)$ e $T(V_p \cap V)$ são vizinhanças coordenadas distintas contendo $(p, v), (q, w)$, respectivamente.

Então pelo Lema 4.30, TM tem uma única estrutura diferenciável tal que cada $(TU, \tilde{\varphi})$ é uma carta diferenciável. $\square$

Observação 5.53. *Note que com essa estrutura a aplicação $\pi : TM \to M$ é diferenciável.*

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\tilde{\varphi}"'] & M \arrow[d, "\varphi"] \\ \tilde{\varphi}(TU) \arrow[r, "\varphi \circ \pi \circ \tilde{\varphi}^{-1}"'] & \varphi(U) \end{tikzcd}$$

Figura 5.9

Temos que $(\varphi \circ \pi \circ \tilde{\varphi}^{-1})(x, v) = (\varphi \circ \pi)(\tilde{\varphi}^{-1}(x, v)) = \varphi(\pi(p, v)) = \varphi(p) = x$ é diferenciável.

Proposição 5.54. *Se M^n é uma variedade e M pode ser coberto por uma única carta, então TM é difeomorfo a $M \times \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Seja (M, φ) uma carta global de M, logo $\varphi : M \to \varphi(M) \subset \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo. Temos que $(TM, \tilde{\varphi})$ é uma carta de TM, assim $\tilde{\varphi} : TM \to \varphi(M) \times \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo.

Defina $\varphi^{-1} \times Id : \varphi(M) \times \mathbb{R}^n \to M \times \mathbb{R}^n$ por $(\varphi^{-1} \times Id)(a, b)$ $= (\varphi^{-1}(a), Id(b))$, note que $\varphi^{-1} \times Id$ é um difeomorfismo, pois cada uma de suas coordenadas é difeomorfismo. Assim $(\varphi^{-1} \times Id) \circ \tilde{\varphi} : TM \to M \times \mathbb{R}^n$ é difeomorfismo, pois é composição de difeomorfismos. $\square$

5.8 Curvas na variedade

Definição 5.55. *Seja M uma variedade, definimos uma **curva diferenciável** na variedade M como sendo uma aplicação diferenciável $c : I \to M$, em que I é um intervalo.*

Observação 5.56. *Usualmente assumimos que $0 \in (a, b)$ e dizemos que c é uma curva em p se $c(0) = p$.*

Definição 5.57. *Seja M uma variedade diferenciável. Dado uma curva diferenciável $c : (a, b) \to M$ e $t_0 \in (a, b)$, definimos o **vetor velocidade** de c em t_0, denotado por $c'(t_0)$, da seguinte maneira:*

$$c'(t_0) := dc\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}\right) \in T_{c(t_0)}M,$$

onde $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}$ é o vetor da base de coordenadas padrão em $T_{t_0}\mathbb{R}$.

Observações 5.58. *1. É comum usar $\frac{d}{dt}$ ao invès de $\frac{\partial}{\partial t}$ quando a variedade é 1-dimensional.*

2. Dizemos que $c'(t_0)$ é a velocidade de c no ponto $c(t_0)$.

Exemplo 5.59. *Considere $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definido por $c'(t) = (t^2, t^3)$. Determine $c'(t)$.*

Dado $\left\{\frac{\partial}{\partial x}|_{c(t)}, \frac{\partial}{\partial y}|_{c(t)}\right\}$ uma base de $T_{c(t)}\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{R}^2$, podemos escrever $c'(t) \in T_{c(t)}\mathbb{R}^2$ como combinação linear dessa base, assim $c'(t) = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$.

Considere as funções coordenadas $x, y \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Temos que $c'(t)(x) = \left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)(x) = a$. Por outro lado, $c'(t)(x) = dc\left(\frac{d}{dt}\right)(x) = \frac{d}{dt}(x \circ c) = \frac{d}{dt}t^2 = 2t$.

De forma análoga, $c'(t)(y) = \left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)(y) = b$. Por outro lado, $c'(t)(y) = dc\left(\frac{d}{dt}\right)(y) = \frac{d}{dt}(y \circ c) = \frac{d}{dt}t^3 = 3t^2$.

Portanto $c'(t) = 2t\frac{\partial}{\partial x} + 3t^2\frac{\partial}{\partial y}$.

Afim de não causar possíveis conflitos, na próxima proposição denotaremos a derivada de cálculo real por $\dot{c}(t)$.

Proposição 5.60. *Sejam $c : (a, b) \to M$ uma curva diferenciável e $(U, x^1, \cdots, x^n)$ uma carta coordenada de M em $c(t)$. Escreva $c^i = x^i \circ c$ para a $i-$ésima componente de c na carta. Então $c'(t)$ é dado por $c'(t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{c}^i(t) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{c(t)}$. Assim, em relação a base $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\right\}$ para $T_{c(t)}M$, a velocidade $c'(t)$ é representada pelo vetor coluna $\begin{bmatrix} \dot{c}^1(t) \\ \vdots \\ \dot{c}^n(t) \end{bmatrix}$.*

Demonstração. Considere a base usual $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_{c(t)}, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_{c(t)}\right\}$ de $T_{c(t)}M$. Assim $c'(t) = \alpha_1 \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_{c(t)} + \cdots + \alpha_n \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_{c(t)} \in T_{c(t)}M$.

Para cada i, temos que:

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial}{\partial x^j} x^i = c'(t)x^i = dc\left(\frac{d}{dt}\right)(x^i) = \frac{d}{dt}(x^i \circ c) = \frac{d}{dt}c^i = \dot{c}^i(t).$$

Portanto, $c'(t) = \sum_{i=1}^{m} \dot{c}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}|_{c(t)}$. □

Toda curva diferenciável c em p na variedade M é um vetor $c'(0) \in T_pM$. Mostremos que todo vetor tangente $v \in T_pM$ é o vetor velocidade da curva em p.

Proposição 5.61 (Existência de uma curva com um dado vetor inicial)**.** *Para qualquer ponto p na variedade M e qualquer vetor tangente $v \in T_pM$, existem $\epsilon > 0$ e uma curva diferenciável $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tal que $c(0) = p$ e $c'(0) = v$.*

Demonstração. Seja $(U, \varphi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ uma carta de M centrada em p, ou seja, $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ e $v = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \in T_pM$. Determinemos uma curva diferenciável c em M de forma que $c'(0) = v$.

Considere a função $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por $\alpha(t) = (a^1 t, \cdots, a^n t)$, logo $\alpha(0) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Uma vez que α é contínua temos que existe $\epsilon > 0$ tal que $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ é uma curva diferenciável em $\mathbb{R}^n$ com $\alpha(t) \in \hat{U}$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Pela Proposição 5.61, $\alpha'(t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{\alpha}^i(t) \frac{\partial}{\partial r^i}|_0$ onde $\alpha^i = r^i \circ \alpha$.

Assim, como $\dot{\alpha}^i = \frac{d}{dt}\alpha^i = \frac{d}{dt}(r^i \circ \alpha) = \frac{d}{dt}(a^i t) = a^i$, segue que $\alpha'(t) = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial r^i}|_0$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Tome a curva diferenciável $c = \varphi^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, então $c(0) = (\varphi^{-1} \circ \alpha)(0) = \varphi^{-1}(\alpha(0)) = \varphi^{-1}(0) = p$ e além disso, $c'(0) = dc\left(\frac{d}{dt}|_0\right) = d(\varphi^{-1} \circ \alpha)\left(\frac{d}{dt}|_0\right) = d\varphi^{-1}_{\alpha(0)}\left(d\alpha\left(\frac{d}{dt}|_0\right)\right) = d\varphi_0^{-1} \cdot \alpha'(0) = d\varphi_0^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial r^i}|_0\right) = \sum_{i=1}^{n} a^i d\varphi_0^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial r^i}|_0\right) = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p = v$.
□

Proposição 5.62. *Seja $F : M \to N$ uma aplicação diferenciável, $p \in M$ e $v \in T_pM$. Se c é uma curva diferenciável em p em M com velocidade v em p, então $dF_p(v) = (F \circ c)'(0)$.*

Demonstração. Por hipótese temos que $c(0) = p$ e $c'(0) = v$. Dessa forma $dF_p(v) = dF_p(c'(0)) = dF_p\left(dc\left(\frac{d}{dt}|_0\right)\right) = d(F \circ c)_0\left(\frac{d}{dt}|_0\right) = (F \circ c)'(0)$. □

5.9 IMERSÃO, SUBMERSÃO E SUBVARIEDADE

Definição 5.63. *Sejam $F : M \to N$ uma aplicação diferenciável e $p \in M$. Dizemos que F é uma **imersão** em p se a diferencial $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ é injetiva e dizemos que F é uma **submersão** em p se dF_p é sobrejetiva.*

*Dizemos que F é uma **imersão** se F for imersão em todo $p \in M$ e que F é uma **submersão** se F é submersão em todo $p \in M$.*

Observação 5.64. *Suponha que M é uma $m-$variedade diferenciável e N é uma $n-$variedade diferenciável, dessa forma, $\dim T_pM = m$ e $\dim T_pN = n$. Assim, a injetividade de $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ implica que $m \leqslant n$. Por outro lado, a sobrejetividade de dF_p implica que $n \leqslant m$. No caso de dF_p ser bijetora temos que $m = n$.*

Exemplo 5.65. *Se U é um subconjunto aberto de uma variedade M, então a inclusão $i : U \to M$ é uma imersão e também uma submersão.*

Segue do fato que $di_p : T_pU \to T_pM$ é um isomorfismo, conforme Proposição 5.37.

Definição 5.66. *Sejam M e N variedades diferenciáveis. Dada uma aplicação diferenciável $F : M \to N$ e um ponto $p \in M$, definimos o* ***posto*** *de F em p como sendo o posto da aplicação linear $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$.*

Observações 5.67. *1. Como já visto, relativo as cartas $(U, x^1, \cdots, x^n)$ e $(V, y^1, \cdots, y^n)$ em p e $F(p)$, respectivamente, dF_p é representado pela matriz jacobiana $\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\right]$. Dessa forma, $postoF(p) = posto\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\right]$.*

2. Se F tem o mesmo posto r em todo ponto, dizemos que F tem posto constante.

Definição 5.68. *Seja $F : M \to N$ uma aplicação diferenciável e $p \in M$. Dizemos que p é um* ***ponto crítico*** *de F se a diferencial $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ não for sobrejetiva. Dizemos que p é um* ***ponto regular*** *de F se dF_p é sobrejetiva.*

Um ponto em N é dito ser um ***valor crítico*** *se for a imagem de um ponto crítico, caso contrário, é um* ***valor regular****.*

Observação 5.69. *Um ponto c na imagem da F é um valor regular se, e somente se, todo ponto na pré-imagem $F^{-1}(\{c\})$ é um ponto regular.*

Proposição 5.70. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função. Um ponto $p \in M$ é um ponto crítico se, e somente se, para toda carta (U, φ) contendo p, $\frac{\partial f}{\partial x^j}(p) = 0$, para todo $j = 1, \cdots, n$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Sejam $p \in M$ um ponto crítico e (U, φ) uma carta de M contendo p e seja $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\right\}$ a base de T_pM relacionada à carta (U, φ). Como p é ponto crítico de f, então $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R}$ não é sobrejetora. Logo, como $\dim T_{f(p)}\mathbb{R} = 1$, segue que $df_p \equiv 0$. Por outro lado, $df_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\right) \in T_{f(p)}\mathbb{R}$ e $df_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\right)(id_{\mathbb{R}}) = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p(id_{\mathbb{R}} \circ f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$. Portanto, $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = 0,\ \forall i = 1, \ldots, n$.

$\Leftarrow$) Suponhamos que para toda carta (U, φ) de M com $p \in U$, $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = 0,\ \forall i = 1, \ldots, n.$, em que $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\right\}$ é a base de T_pM relacionada à carta (U, φ). Como, $(\mathbb{R}, id_{\mathbb{R}})$ é uma carta de $\mathbb{R}$ e $0 = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p))$, segue que, $0 = \frac{\partial(id_{\mathbb{R}} \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)) = 0,\ \forall i = 1, \ldots, n$. Portanto, $d(id_{\mathbb{R}} \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \equiv 0$ e $df_p \equiv 0$. □

Definição 5.71. *Seja M uma n- variedade. Um subconjunto S de M é uma* ***subvariedade*** *de dimensão k, se para todo $p \in S$ existir uma carta coordenada $(U, \varphi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ de M com $p \in U$ tal que $U \cap S = \{q \in U;\ x^{k+1}(q) = x^{k+2}(q) = \cdots = x^n(q) = 0\}$. Chamaremos essa carta (U, φ) em M de* ***carta adaptada relativa a*** *S.*

Se S é uma subvariedade de dimensão k na $n-$variedade M, então $n - k$ é dito ser a ***codimensão*** *de S em M.*

Seja $\varphi_S : U \cap S \to \mathbb{R}^k$ a restrição das k primeiras componentes de φ a $U \cap S$, que é $\varphi_S = (x^1, \cdots, x^k)$. Note que $(U \cap S, \varphi_S)$ é uma carta em S na topologia do subespaço.

Exemplo 5.72. *Seja M uma $n-$variedade e $S \subset M$ uma subvariedade de dimensão k, onde $k = n$. Nesse caso, $U \cap S$ é definido pelo não anulamento de suas funções coordenadas e assim $U \cap S = U$.*

Portanto, um subconjunto aberto de uma variedade é uma subvariedade de mesma dimensão.

Exemplo 5.73. *Considere o subconjunto $S = \{(x, y); -1 < x < 1$ e $y = 0\}$ de $\mathbb{R}^2$. Mostremos que S é uma subvariedade de $\mathbb{R}^2$.*

Dado um aberto $U = (-1, 1) \times (-1, 1)$ de $\mathbb{R}^2$ e considerando a carta (U, φ) tal que $\varphi : U \to U \subset \mathbb{R}^2$ é definida por $\varphi(x, y) = (x, y)$, temos que $U \cap S = \varphi^{-1}(\{(x, 0); -1 < x < 1\})$. Portanto $U \cap S$ é definido pelo anulamento da função coordenada y.

Observação 5.74. *Considere o aberto $V = (-2, 0) \times (-1, 1)$ de M e a carta (V, ψ) de forma que $\psi(x, y) = (x, y)$. Para que (V, ψ) seja uma carta adaptada para S é necessário que o anulamento da função coordenada y defina o conjunto $V \cap S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 < x < 0$ e $y = 0\}$. Mas $\psi^{-1}(\{(x, y) \in V;\ y = 0\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -2 < x < 0$ e $y = 0\} \neq V \cap S$. Portanto (V, ψ) não é uma carta adaptada.*

Proposição 5.75. *Seja S uma subvariedade de M e $\mathcal{A} = \{(U, \varphi)\}$ uma coleção de cartas adaptadas compatíveis de M que cobrem S. Então $\{(U \cap S, \varphi_S)\}$ é um atlas para S. Portanto, uma subvariedade por si próprio é uma variedade. Se M tem dimensão n e S é localmente definida pelo anulamento de $n - k$ coordenadas, então* $\dim S = k$.

Demonstração. Sejam $(U, \varphi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ e $(V, \psi) = (V, y^1, \cdots, y^n)$ duas cartas adaptadas em $\mathcal{A}$ e assuma que $U \cap V \neq \varnothing$.

Tome $p \in U \cap V \cap S$, logo $\varphi(p) = (x^1(p), \cdots, x^k(p), 0, \cdots, 0)$ e $\psi(p) = (y^1(p), \cdots, y^k(p), 0, \cdots, 0)$. Dessa forma, $\varphi_S(p) = (x^1(p), \cdots, x^k(p))$ e
$\psi_S(p) = (y^1(p), \cdots, y^k(p))$.

Assim, $(\psi_S \circ \varphi_S^{-1})(x^1(p), \cdots, x^k(p)) = \psi_S(\varphi_S^{-1}(\varphi_S(p))) = \psi_S(p)$
$= (y^1(p), \cdots, y^k(p)$. Como y^i é C^∞ em p com $1, \cdots, k$, segue que $\psi_S \circ \varphi_S^{-1}$ é C^∞. De maneira análoga, uma vez que x^i é C^∞ em p, segue que $\varphi_S \circ \psi_S^{-1}$ também é C^∞.

Consequentemente, quaisquer duas cartas em $\{(U \cap S, \varphi_S)\}$ são C^∞ compatíveis. Uma vez que $\{U \cap S\}_{U \in \mathcal{A}}$ cobre S, a coleção $\{(U \cap S, \varphi_S)\}$ é um atlas C^∞ em S.

Logo, existe um único atlas maximal $\mathcal{B}$ tal que $\{(U \cap S, \varphi_S)\} \subset B$ e $(S, \mathcal{B})$ é uma variedade diferenciável. □

5.10 O TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA

Definição 5.76. *Sejam M e N variedades diferenciáveis. Uma aplicação $F : M \to N$ é chamado um* ***difeomorfismo local de classe*** $\mathbf{C^k}$ *se todo ponto $p \in M$ tem uma vizinhança U tal que $F(U)$ é aberto em N e $F|_U : U \to F(U)$ é um difeomorfismo de classe C^k.*

Teorema 5.77. *Sejam M^n e N^n variedades, $F\colon M \to N$ uma aplicação de Classe C^k e $p \in M$. Nessas condições, F é um difeomorfismo local de classe C^k em uma vizinhança de p se, e somente se,* $\det\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\right] \neq 0$.

Demonstração. Sabemos que a matriz jacobiana de F em relação as cartas (U, φ) $= (U, (x^1, \cdots, x^n))$ e $(V, \psi) = (V, (y^1, \cdots, y^n))$ é dada por $\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\right]$, sendo $F^i = y^i \circ F = r^i \circ \psi \circ F$ e $r^i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a projeção no i-ésimo fator. Veja que

$$\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p) = \frac{\partial\left(r^i \circ \psi \circ F\right)}{\partial x^j}(p) = \frac{\partial\left(r^i \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial x^j}(\varphi(p)) = \frac{\partial\left(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}\right)^i}{\partial r^j}(\varphi(p)).$$

Dessa forma a matriz jacobiana de F no ponto p em relação às cartas $(U, (x^1, \cdots, x^n))$ e $(V, (y^1, \cdots, y^n))$ é exatamente a a matriz jacobiana da aplicação $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ no ponto $\varphi(p)$.

Como ψ e φ são difeomorfismos de classe C^∞, então F é um difeomorfismo local de classe C^k em uma vizinhança de p se, e somente se, $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ é um difeomorfismo local de classe C^k em uma vizinhança de $\varphi(p)$. Mas, pelo teorema da Função Inversa para espaços Euclidianos 1.44, $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ é um difeomorfismo local de classe C^k em uma vizinhança de $\varphi(p)$ se, e somente se, o determinante de sua matriz jacobiana em p é não nulo. Segue que F é um difeomorfismo local de classe C^k em uma vizinhança de p se, e somente se, $\det\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\right] \neq 0$.

□

Proposição 5.78. *Sejam M e N variedades diferenciáveis e $F : M \to N$ uma aplicação C^k. Então:*

1. *F é um difeomorfismo local de classe C^k se, e somente se, F é uma imersão e uma submersão de classe C^k.*

2. *Se $\dim M = \dim N$ e F é uma imersão ou uma submersão de classe C^k, então F é um difeomorfismo local de classe C^k.*

Demonstração. 1. $\Rightarrow$) Suponha que F é um difeomorfismo local de classe C^k, logo pelo Teorema 5.77, $\det\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\right] \neq 0$, ou seja, $\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\right]$ é inversível. Como $\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\right]$ é a matriz de

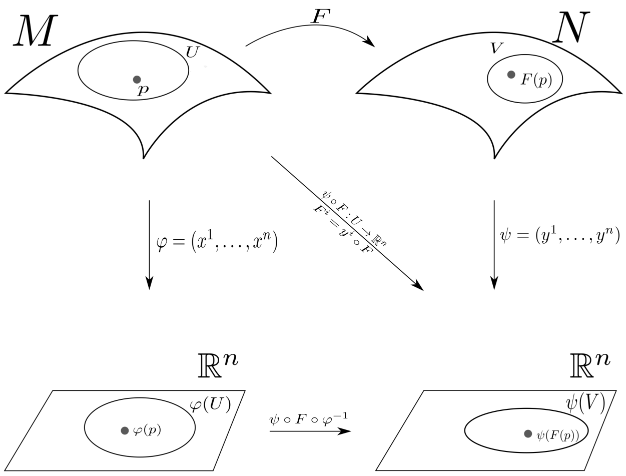


Figura 5.10

dF_p em relação às bases coordenadas de T_pM e $T_{F(p)}N$, então dF_p é um isomorfismo, portanto F é uma imersão e uma submersão de classe C^k

$\Leftarrow$) Suponha agora que F é uma imersão e uma submersão de classe C^k, assim dF_p é um isomorfismo em cada $p \in M$, logo $\det\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\right] \neq 0$. Pelo Teorema 5.77 F é um difeomorfismo local.

2. Suponha que $\dim M = \dim N$ e F é uma imersão (ou submersão) de classe C^k, logo dF_p é bijetiva. Segue pelo item **1** dessa proposição, que F é um difeomorfismo local. $\square$

5.11 Conjunto de nível de uma função

Definição 5.79. *Um **conjunto de nível** de uma aplicação $F : M \to N$ é o subconjunto $F^{-1}(\{c\}) = \{p \in M; F(p) = c\}$ para algum $c \in N$.*

Observações 5.80.

1. *Quando $N = \mathbb{R}^k$ e $c = 0$, o conjunto de nível $F^{-1}(0)$ é usualmente chamado de **conjunto zero** de F.*

2. *Note que c é um valor regular de F se, e somente se, c não está na imagem de F ou em todo ponto $p \in F^{-1}(c)$ a diferencial $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ é sobrejetiva.*

3. *Se c é um valor regular, $F^{-1}(c)$ é chamado de **conjunto de nível regular**.*

4. *Se $F^{-1}(0)$ é um conjunto de nível regular de $F : N \to \mathbb{R}^m$, ele é chamado de **conjunto zero regular**.*

5. *Se um conjunto de nível regular $F^{-1}(c)$ é não vazio, e $p \in F^{-1}(c)$, então a aplicação $F : M \to N$ é uma submersão em p.*

Lema 5.81. *Seja $g : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Um conjunto de nível regular $g^{-1}(c)$ de nível c da função g é o conjunto regular zero $f^{-1}(0)$ da função $f = g - c$.*

Demonstração. Dado $p \in M$ temos que $g(p) = c$ se, e somente se, $f(p) = g(p) - c = 0$. Dessa forma, $g^{-1}(c) = f^{-1}(0)$.

Tome $v \in T_pM$ e $h \in C^{\infty}(M)$, logo $df_p(v)(h) = d(g-c)_p(v)(h) = dg_p(v)(h)$ $-dc_p(v)(h) = dg_p(v)(h) = dg_p(v)(h)$. Assim, $df_p = dg_p$ para todo $p \in M$, sendo assim as funções f e g possuem exatamente os mesmo pontos regulares. □

Teorema 5.82. *Sejam M uma n- variedade e $g : M \to \mathbb{R}$ uma função C^{∞}. Então um conjunto regular não vazio $S = g^{-1}(c)$ é uma subvariedade de M de codimensão 1.*

Demonstração. Seja $f = g - c$, então f é C^{∞} e, pelo Lema 5.81, $S = f^{-1}(0)$ é um conjunto de nível regular de f.

Tome $p \in S$, logo p é um ponto regular de f e assim, relativo a qualquer carta $(U, x^1, \cdot, x^n)$ que contém p, temos que $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \neq 0$, para algum i. Reordenando $x^1, \cdots, x^n$ podemos assumir que $\left(\frac{\partial f}{\partial x^n}\right)(p) \neq 0$.

A matriz jacobiana da aplicação diferenciável $(x^1, \cdots, x^{n-1}, f) : U \to \mathbb{R}^n$ é dada por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x^{n-1}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x^{n-1}}{\partial x^{n-1}} & \frac{\partial x^{n-1}}{\partial x^n} \\ \frac{\partial f}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x^{n-1}} & \frac{\partial f}{\partial x^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x^{n-1}} & \frac{\partial f}{\partial x^n} \end{bmatrix}.$$

Assim, $det\left[\frac{\partial(x^2, \cdots, x^n, f)}{\partial(x^1, x^2, \cdots, x^n)}\right]$ em p é $\frac{\partial f}{\partial x^n}(p) \neq 0$.

Pelo Teorema 5.77 e pela Proposição 5.15, existe uma vizinhança U_p de p em que $(x^1, \cdots, x^{n-1}, f)$ formam um sistema coordenado. Dada a carta $(U_p, x^1, \cdots, x^{n-1}, f)$, o conjunto de nível $U_p \cap S$ é definido pelo anulamento da última coordenada, assim $(U_p, x^1, \cdots, x^{n-1}, f)$ é uma carta adaptada relativa à S. Uma vez que p é qualquer, S é uma subvariedade regular de dimensão $n - 1$ em M. □

Teorema 5.83 (Conjunto de nível regular)**.** *Sejam M^m e N^n variedades e $F : N \to M$ uma aplicação diferenciável. Um conjunto de nível regular não vazio $F^{-1}(\{c\})$, com $c \in M$ é uma subvariedade de N de dimensão $n - m$.*

Demonstração. Seja $(V, \psi) = (V, y^1, \cdots, y^m)$ uma carta de M centrada em c, ou seja, $y^i(c) = 0$ para todo $i = 1, \cdots, m$. Como F é contínua temos que $F^{-1}(V)$ é um aberto em N e assim $F^{-1}(c) \in F^{-1}(V)$. Note que $F^{-1}(c) = (\psi \circ F)^{-1}(0)$, dessa forma o conjunto de nível regular $F^{-1}(c)$ é igual ao conjunto zero de $\psi \circ F$.

Considerando $F^i = y^i \circ F = r^i \circ \psi \circ F = (\psi \circ F)^i$, temos que $F^{-1}(c) = \bigcap_{i=1}^{m} (F^i)^{-1}(0)$. Por hipótese $F^{-1}(c)$ é não vazio, logo existe $p \in N$ de forma que $p \in F^{-1}(c)$ e a aplicação F é uma submersão em p, assim $n \geqslant m$.

Tome $(U, \varphi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ uma carta de N em p contida em $F^{-1}(V)$.

Uma vez que $p \in F^{-1}(c)$ é um ponto regular, temos que o posto da matriz jacobiana $\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\right]$ é m, logo existe uma submatriz $m \times m$ cujo determinante é não nulo.

Reordenando os F^i e os x^j, podemos assumir sem perda de generalidade que a matriz $m \times m$ $\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\right]_{1 \leqslant i \leqslant m, n-m+1 \leqslant j \leqslant n}$ é não singular, ou seja, $det\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\right]_{1 \leqslant i \leqslant m, n-m+1 \leqslant j \leqslant n} \neq 0$.

Afirmação: Substituindo as m últimas coordenadas da carta (U, φ) por $F^1, \cdots, F^m$ existe uma vizinhança U_p de p tal que $(U_p, x^1, \cdots, x^{n-m}, F^1, \cdots, F^m)$ é uma carta de N.

De fato, calculando a matriz jacobiana em p, temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} & \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^j} \\ \frac{\partial F^i}{\partial x^\beta} & \frac{\partial F^i}{\partial x^j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial x^{n-m}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{n-m+1}} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^{n-m}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x^{n-m}}{\partial x^{n-m}} & \frac{\partial x^{n-m}}{\partial x^{n-m+1}} & \cdots & \frac{\partial x^{n-m}}{\partial x^n} \\ \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^{n-m}} & \frac{\partial F^1}{\partial x^{n-m+1}} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial x^{n-m}} & \frac{\partial F^m}{\partial x^{n-m+1}} & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial x^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id_{(n-m)\times(n-m)} & 0 \\ \star & \frac{\partial F^i}{\partial x^j} \end{bmatrix}$$

onde $1 \leqslant i \leqslant m,\ n-m+1 \leqslant j \leqslant n,$ e $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant n-m.$

Como $det\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right] \neq 0$, temos que $det\begin{bmatrix} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} & \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^j} \\ \frac{\partial F^i}{\partial x^\beta} & \frac{\partial F^i}{\partial x^j} \end{bmatrix} \neq 0$.

Logo pelo Teorema 5.77 e pela Proposição 5.15, existe uma vizinhança U_p de p, de forma que $(U_p, x^1, \cdots, x^{n-m}, F^1, \cdots, F^m)$ é uma carta de N em p.

Definindo $S := F^{-1}(c)$, na carta $(U_p, x^1, \cdots, x^{n-m}, F^1, \cdots, F^m)$ S é obtido pelo anulamento das m últimas funções coordenadas $F^1, \cdots, F^m$. Dessa forma, $(U_p, x^1, \cdots, x^{n-m}, F^1, \cdots, F^m)$ é uma carta adaptada de N relativa a S.

Note que $p \in S$ foi tomado arbitrariamente, dessa forma S é uma subvariedade de N de dimensão $n - m$. □

Exemplo 5.84. *Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = y^2$.*

O conjunto zero de f é dado por $S = f^{-1}(\{0\}) = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}$. Mostremos que S é uma subvariedade de $\mathbb{R}^2$.

Considere a carta $(\mathbb{R}^2, Id_{\mathbb{R}^2})$, logo $S = \mathbb{R}^2 \cap S = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\} = Id^{-1}(\mathbb{R} \times \{0\})$. Portanto $\mathbb{R}^2 \cap S$ é definido pelo anulamento da função coordenada y na carta $(\mathbb{R}^2, (x, y))$. Porém, note que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, dessa forma, em S segue que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Logo todo ponto em S é um ponto crítico de f. Portanto, S é uma subvariedade de $\mathbb{R}^2$ mas não é um conjunto de nível regular de f.

Abordaremos agora alguns exemplos de subvariedades aplicando o Teorema 5.83.

Exemplo 5.85. *O conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^3 + y^3 + z^3 = 1\}$ é uma subvariedade de dimensão 2.*

Considere $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$, dessa forma $f^{-1}(\{1\}) = S$.

Calculando as derivadas parciais de f temos que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 3y^2$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2$.

Sabemos que $p \in \mathbb{R}^3$ é um ponto crítico se, e somente se, $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) = \frac{\partial f}{\partial z}(p) = 0$, assim todos os pontos de S são pontos regulares de f e 1 é um valor regular de f. Logo, pelo Teorema 5.83, S é uma subvariedade de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2.

Exemplo 5.86. *O conjunto $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^3 + y^3 + z^3 = 1$ e $x + y + z = 0\}$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^3$.*

Considere $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x,y,z) = (x^3+y^3+z^3, x+y+z) = (F_1, F_2)$. Dessa forma, $S = F^{-1}(\{(1,0)\})$. A matriz jacobiana de F é dada por $J(F) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Note que os pontos críticos de F são todos os pontos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tais que o posto de $J(F)$ é menor do que 2, ou seja, os pontos onde todas as menores 2×2 da $J(F)$ tem determinante 0.

Considerando,

$$\begin{vmatrix} 3x^2 & 3y^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ e } \begin{vmatrix} 3x^2 & 3z^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{5.4}$$

Segue que

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y^2 = 0 \\ 3x^2 - 3z^2 = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo esse sistema,

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y^2 = 0 \\ 3x^2 - 3z^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 - z^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ x^2 = z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm x \\ z = \pm x \end{cases}.$$

Para $y = z = x$ temos que $x + y + z = 0$ o que implica que $x + x + x = 0$, ou seja, $3x = 0$ e assim $x = 0$.

De forma análoga,

Para $y = x$ e $z = -x$, temos que $x = 0$.

Para $y = -x$ e $z = x$, temos que $x = 0$.

Para $y = -x$ e $z = -x$ temos $x = 0$.

Dessa forma, $(0,0,0)$ é o único ponto crítico de F. Mas $(0,0,0)$ não satisfaz $x^3 + y^3 + z^3 = 1$, logo não existe ponto crítico de F em S, ou seja, todos os pontos de S são regulares, assim S é um conjunto de nível regular. Pelo Teorema 5.83, temos que S é uma subvariedade de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 1.

5.12 TEOREMA DO POSTO CONSTANTE

Teorema 5.87. *Sejam M^m e N^n variedades e $F\colon M \to N$ uma aplicação de Classe C^k de posto constante k na vizinhança de um ponto $p \in M$. Então existem cartas (U, φ) de M centrada em p e (V, ψ) de N centrada em $F(p)$ tais que $F(U) \subset V$ e*
$(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(x^1, \cdots, x^k, x^{k+1}, \cdots x^m) = (x^1, \cdots, x^k, 0, \cdots, 0)$ onde $(x^1, ..., x^m) \in \varphi(U)$.

Demonstração.

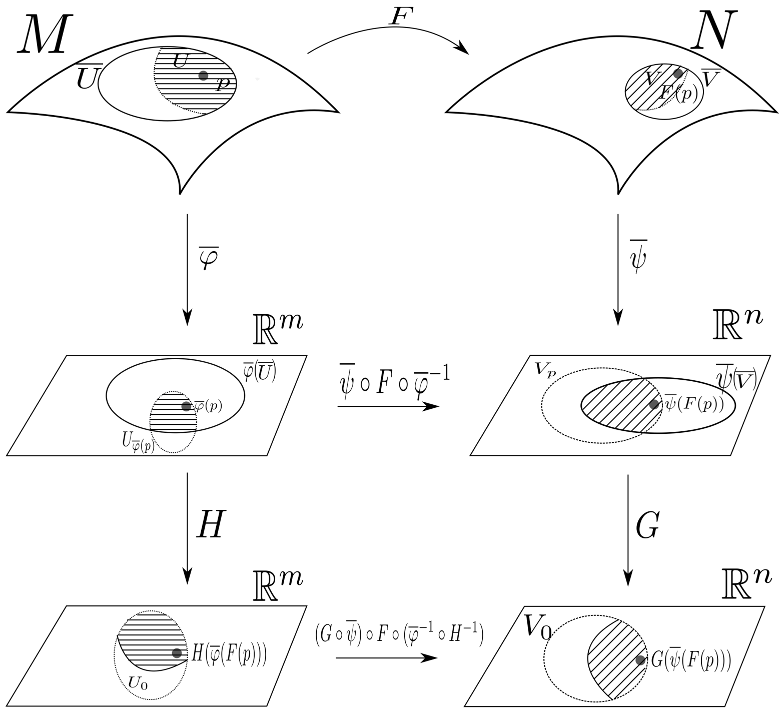


Figura 5.11

Sejam $(\overline{U}, \overline{\varphi})$ uma carta de M em p e $(\overline{V}, \overline{\psi})$ uma carta de N em $F(p)$, dessa forma $\overline{\psi} \circ F \circ \overline{\varphi}^{-1}\colon \overline{\varphi}\left(\overline{U}\right) \to \overline{\psi}\left(\overline{V}\right)$ tem posto constante k em uma vizinhança de $\overline{\varphi}(p)$, pois $\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\right] = \left[\frac{\partial\left(\overline{\psi} \circ F \circ \overline{\varphi}^{-1}\right)^i}{\partial x^j}(\varphi(p))\right]$. Assim, pelo Teorema do Posto para espaços Euclidianos 1.47, existem abertos $U_p \subset \mathbb{R}^m$, $V_{f(p)} \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^k$, $W \subset \mathbb{R}^{m-k}$ e $Z \subset \mathbb{R}^{n-k}$, e existem difeomorfismos de classe C^k $H\colon U_p \to V \times W$ e $G\colon V_{f(p)} \to V \times Z$ tais que $p \in U_p \subset U$, $f(p) \in V_{f(p)}$ e $(G \circ f \circ H^{-1})(x, y) = (x, 0)$, para todo par $(x, y) \in V \times W$, onde $f = \overline{\psi} \circ F \circ \overline{\varphi}^{-1}$.

Reduzindo se necessário os domínios das funções envolvidas, basta considerarmos as cartas $(V, \psi) = (V, G \circ \overline{\psi})$ e $(U, \varphi) = (U, H \circ \overline{\varphi})$ e portanto $(\psi \circ F \circ \varphi - 1)(x^1, ..., x^m) = (x^1, ..., x^k, 0, ..., 0)$. $\square$

Teorema 5.88. *Seja $F : M \to N$ uma aplicação C^k e $c \in N$. Se F tem posto constante k em uma vizinhança de um conjunto de nível $F^{-1}(\{c\})$ em M, então $F^{-1}(\{c\})$ é uma subvariedade de M de codimensão k.*

Demonstração. Seja $p \in F^{-1}(\{c\})$ um ponto qualquer. Pelo Teorema 5.87 existem cartas $(U, \varphi) = (U, x^1, \cdots, x^m)$ centrada em p e $(V, \psi) = (V, y^1, \cdots, y^n)$ centrada em $c = F(p) \in N$ de forma que $(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(r^1, \cdots, r^{m-k}, r^{m-k+1}, \cdots, r^m) = (0, \cdots, 0, r^{m-k+1}, \cdots, r^m)$. Logo o conjunto de nível $(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})^{-1}(0)$ é definido pelo anulamento das últimas k coordenadas.

Note que $(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})^{-1}(0) = (\varphi \circ F^{-1} \circ \psi^{-1})(0) = (\varphi \circ F^{-1})(c) = \varphi(F^{-1}(c))$, ou seja, a imagem do conjunto de nível $F^{-1}(c)$ sob φ é o conjunto de nível $(\psi \circ F\varphi^{-1})(0)$. Dessa forma, o conjunto de nível $F^{-1}(c)$ em U é definido pelo anulamento das funções coordenadas $r^{m-k+1}, \cdots, r^m$, onde $x^i = r^i \circ \varphi$.

Portanto $F^{-1}(\{c\})$ é uma subvariedade de dimensão k. □

Teorema 5.89 (Forma local das imersões)**.** *Sejam M^m e N^n variedades e $F\colon M \to N$ uma imersão C^∞ em $p \in M$. Então existem cartas (U, φ) de M centrada em p e (V, ψ) de N centrada em $F(p)$ tais que em uma vizinhança de $\varphi(p)$ temos que $(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(x^1, \cdots, x^m) = (x^1, \cdots, x^m, 0, \cdots, 0)$.*

Demonstração. Seja (U, φ) uma carta de M centrada em p e $\left(\overline{V}, \overline{\psi}\right)$ uma carta de N em $F(p)$. Como F é uma imersão em p temos que a aplicação $\overline{\psi} \circ F \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to \overline{\psi}\left(\overline{V}\right)$ é uma imersão em $\varphi(p) = 0$, além disso, $\overline{\psi} \circ F \circ \varphi^{-1}$ é C^∞, $m \leqslant n$ e $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$. Pelo Teorema da Forma Local das Imersões para espaços Euclidianos 1.45, existem abertos V, W, Z com $0 = \varphi(p) \in V \subset \varphi(U)$, $0 \in W \subset \mathbb{R}^{n-m}$, $\left(\overline{\psi} \circ F \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(p)) \in Z \subset \mathbb{R}^n$ e um difeomorfismo C^∞ $h\colon Z \to V \times W$ tal que $\left(h \circ \left(\overline{\psi} \circ F \circ \varphi^{-1}\right)\right)(x^1, \cdots, x^m) = (x^1, \cdots, x^m, 0, \cdots, 0)$. Dessa forma, reduzindo o domínio se necessário, basta considerarmos as cartas (U, φ), $(V', \psi) = \left(V', h \circ \overline{\psi}\right)$ e assim $(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(x^1, \cdots, x^m) = (x^1, \cdots, x^m, 0, \cdots, 0)$.

□

Teorema 5.90 (Formas local das submersões)**.** *Sejam M^m e N^n variedades e $F\colon M \to N$ uma submersão C^∞ em $p \in M$. Então existem cartas (U, φ) de M centrada em p e (V, ψ) de N centrada em $F(p)$ tais que em uma vizinhança de $\varphi(p)$, $(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(x^1, \cdots, x^n, x^{n+1}, \cdots, x^m) = (x^1, \cdots, x^n)$.*

Demonstração. Sejam $(\overline{U}, \overline{\varphi})$ uma carta de M centrada em p e (V, ψ) uma carta de N centrada em $F(p)$, do fato de F ser uma submersão em p segue que $\psi \circ F \circ \overline{\varphi}^{-1}\colon \overline{\varphi}(\overline{U}) \to \psi(V))$ é uma submersão em $\overline{\varphi}(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$. Pelo Teorema da Forma Local da Submersão para espaços Euclidianos 1.46 existem abertos V, Z, W, com $0 \in V \subset \mathbb{R}^n$, $\overline{\varphi}(p) \in Z \subset \overline{\varphi}(\overline{U})$, $(\psi \circ F \circ \overline{\varphi}^{-1})(\overline{\varphi}(p)) \in W \subset \mathbb{R}^{m-n}$ e um difeomorfismo C^k $h\colon V \times W \to Z$ tal que $((\psi \circ F \circ \overline{\varphi}^{-1}) \circ h)(x, w) = w$. Logo reduzindo o domínio se necessário e considerando as cartas $(U, \varphi) = (U, h^{-1} \circ \overline{\varphi})$ e (V, ψ) temos que $(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(x^1, ..., x^n, w^1, ..., w^{m-n}) = (x^1, ..., x^n)$.
□

Corolário 5.91. *Uma submersão $F : M \to N$ é uma aplicação aberta.*

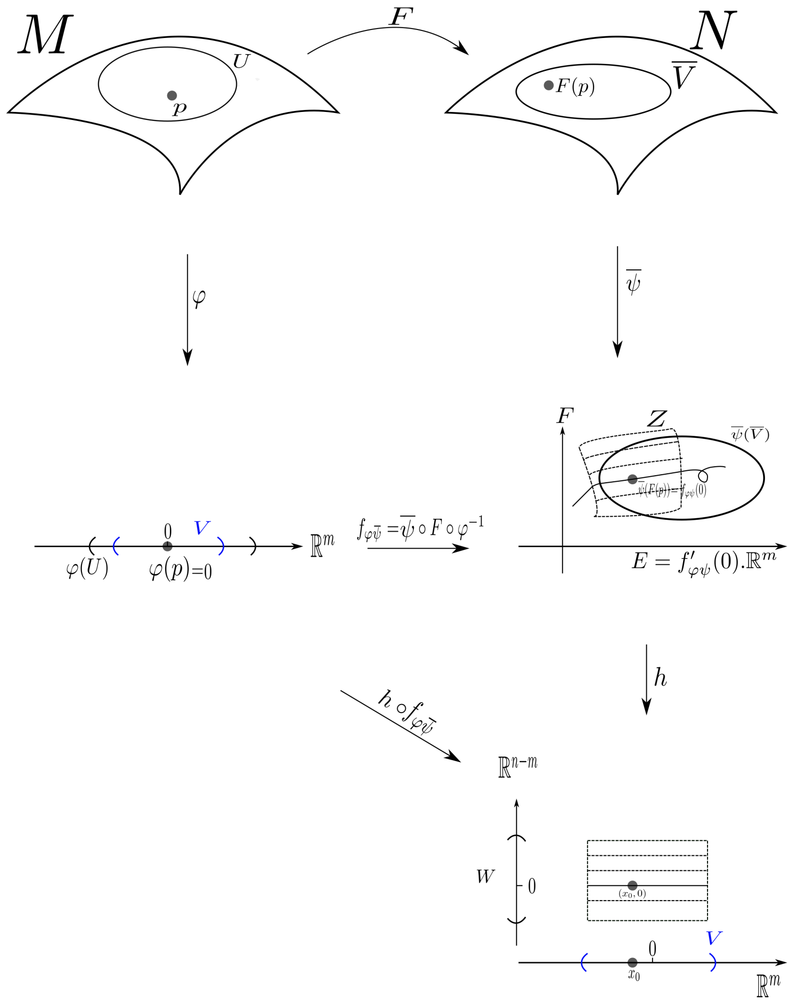


Figura 5.12

Demonstração. Tome W um subconjunto aberto de M, mostremos que $F(W)$ é um subconjunto aberto de N.

De fato, tome $F(p) \in F(W)$ onde $p \in M$, uma vez que F é uma submersão, temos que F é localmente uma projeção, a qual é uma aplicação aberta. Assim, existe uma vizinhança U de p em W tal que $F(U)$ é aberto em $F(W) \subset N$, dessa forma, $F(p) \in F(U) \subset F(W)$. Uma vez que $F(p)$ foi tomado de forma arbitrária, segue que $F(W)$ é um conjunto aberto de N. □

5.13 MERGULHO

Definição 5.92. *Sejam M e N variedades e $F : M \to N$ uma aplicação diferenciável, dizemos qe F é um **mergulho** de M em N se F é uma imersão e também um homeomorfismo de M em $F(M)$ com a topologia do subespaço.*

Lema 5.93. *Toda composição de mergulhos é um mergulho.*

Demonstração. Tome $F : M \to N$ e $G : N \to P$ mergulhos. Mostremos que $G \circ F : M \to P$

é um mergulho de M em P.

De fato, note que $G \circ F$ é uma imersão, pois $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \cdot dF_p$.

Note que $G \circ F : M \to G(F(M))$ é um homeomorfismo, pois $F : M \to F(M)$ e $G : N \to G(N)$ são homeomorfismos. □

Exemplo 5.94. *Se M é uma variedade e $U \subset M$ é um subconjunto aberto, a aplicação inclusão $i : U \to M$ é um mergulho.*

Pelo Exemplo 5.65, $i : U \to M$ é uma imersão. Note que $i|_{i(U)} : U \to i(U)$ é um homeomorfismo, pois dado qualquer aberto A em $i(U)$, temos que $i^{-1}(A) = A$.

O próximo exemplo mostra uma aplicação que é um mergulho topológico mas não é um mergulho diferenciável.

Exemplo 5.95. *Considere a aplicação $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (t^3, 0)$.*

Note que $\gamma|_{\gamma(\mathbb{R})} : \mathbb{R} \to \gamma(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \{0\}$ é um homeomorfismo, pois cada função coordenada é contínua e γ^{-1} é contínua. Mas $d\gamma_0 = 0$, ou seja, $d\gamma_0$ não é injetora, logo γ não é uma imersão.

Proposição 5.96. *Sejam M e N variedades e $F : M \to N$ uma imersão injetiva. Se ocorrer qualquer uma das seguintes afirmações, então F é um mergulho.*

1. *F é uma aplicação aberta ou fechada*
2. *F é uma aplicação própria.*
3. *M é compacto.*

Demonstração. 1. Suponha que F é uma aplicação aberta, por hipótese F é injetiva, dessa forma $F : M \to F(M)$ é bijetiva, logo existe $F^{-1} : F(M) \to M$. Seja $U \subset M$ um aberto, logo $(F^{-1})^{-1}(U) = F(U)$ que é aberto em N, dessa forma, $F(U) = F(U) \cap F(M)$ é aberto em $F(M)$ com a topologia do subespaço em $F(M)$, logo F^{-1} é contínua. Portanto F é um homeomorfismo sob sua imagem. Analogamente para F uma aplicação fechada.
2.Suponha que F é uma aplicação própria, pelo Teorema 1.28, temos que F é uma aplicação fechada, assim pelo item **1** segue que F é um mergulho.
3. Suponha que M é compacto, mostremos que $F : M \to N$ é uma aplicação fechada.

Tome $U \subset M$ um subconjunto fechado, sabemos que todo subconjunto fechado de um compacto é compacto, logo U é compacto e assim $F(U)$ é compacto. Como todo subconjunto compacto de um espaço de Hausdorff é fechado, temos que $F(U)$ é fechado. Logo F é uma aplicação fechada e, pelo item **1**, F é um mergulho. □

Teorema 5.97. *Sejam M e N variedades e $\pi : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Então π é uma submersão se, e somente se, todo ponto de M está na imagem de uma seção local de π.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que π é uma submersão e tome $p \in M$, denote por $q = \pi(p) \in N$. Pelo Teorema 5.90, existem cartas $(U, x^1, \cdots, x^m)$ centrada em p e $(V, y^1, \cdots, y^n)$ centrada em q tais que $(\psi \circ \varphi^{-1})(r^1, \cdots, r^m) = (r^1, \cdots, r^n)$.

Defina $C_\epsilon = \{r \in \mathbb{R}^m; |r^i| < \epsilon, i = 1, \cdots, m\}$ o cubo de $\mathbb{R}^m$, onde ϵ é um número positivo suficientemente pequeno e $C_\epsilon \subset \varphi(U)$. Como φ é homeomorfismo, temos que $\varphi^{-1}(C_\epsilon) = \{\varphi^{-1}(r); r \in C_\epsilon\}$ é um cubo coordenado de M centrado em p. Note que definindo $C'_\epsilon = \{r \in \mathbb{R}^n; |r^i| < \epsilon, i = 1, \cdots, n\}$ temos que $(\psi \circ \pi \circ \varphi^{-1})(C_\epsilon) = C'_\epsilon$. Como ψ é homeomorfismo temos que $(\pi \circ \varphi^{-1})(C_\epsilon) = \psi^{-1}(C'_\epsilon)$. Agora dado $r = (r^1, \cdots, r^n) \in C'_\epsilon$, considere a aplicação diferenciável $\sigma : \psi^{-1}(C'_\epsilon) \to \varphi^{-1}(C_\epsilon)$ definida por $\sigma(\psi^{-1}(r)) = \varphi^{-1}(r^1, \cdots, r^n, 0, \cdots, 0)$ de forma que $(\pi \circ \sigma)(\psi^{-1}(r^1, \cdots, r^n))$
$= \pi(\varphi^{-1}(r^1, \cdots, r^n, 0, \cdots, 0)) = \psi^{-1}(r^1, \cdots, r^n)$. Logo $\pi \circ \sigma = Id_{\psi^{-1}(C'_\epsilon)}$ que satisfaz $\sigma(q) = p$.
$\Leftarrow$) Suponha que todo ponto p de M está na imagem de uma seção local de π. Tome $p \in M$ e seja $\sigma : U \subset N \to M$ uma seção local com $p \in \sigma(U)$. Seja $q \in U$, tal que $\sigma(q) = p$, logo, $\pi(p) = \pi(\sigma(q)) = Id_U(q) = q$.

Como $\pi \circ \sigma = Id_U$, temos que $d\pi_p \circ d\sigma_{\pi(p)=q} = Id_{T_qU}$, logo $d\pi_p$ é sobrejetora. Portanto π é uma submersão em p. □

Proposição 5.98. *Sejam M e N variedades e $\pi : M \to N$ uma submersão de classe C^k. Se π é sobrejetiva então π é uma aplicação quociente.*

Demonstração. Pelo Corolário 5.91, π é uma aplicação aberta. Se π é sobrejetiva, segue pelo Teorema 1.24 que π é uma aplicação quociente. □

Teorema 5.99. *Sejam M e N variedades e $\pi : M \to N$ uma submersão sobrejetiva. Para qualquer variedade P, a aplicação $F : N \to P$ é diferenciável se, e somente se, $F \circ \pi$ é diferenciável.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que F é diferenciável, logo $F \circ \pi$ é diferenciável.
$\Leftarrow$) Suponha que $F \circ \pi : M \to P$ é diferenciável. Por hipótese π é sobrejetora, logo dado $q \in N$ existe $p \in \pi^{-1}(q)$. Pelo Teorema 5.97, existe uma vizinhança U de q e uma seção local $\sigma : U \subset N \to M$ de π de forma que $\sigma(q) = p$, logo $\pi \circ \sigma = Id_U$ implica que $F|_U = F|_U \circ Id_U = F|_U \circ (\pi \circ \sigma) = (F \circ \pi) \circ \sigma$ é composição de funções diferenciáveis. Portanto F é diferenciável na vizinhança de cada ponto e assim F é diferenciável. □

Teorema 5.100. *Sejam M e N variedades e $\pi : M \to N$ uma submersão sobrejetiva. Se P é uma variedade e $F : M \to P$ é uma aplicação diferenciável que é constante na fibra de π, então existe uma única aplicação diferenciável $\tilde{F} : N \to P$ tal que $\tilde{F} \circ \pi = F$.*

Demonstração. Pela Proposição 5.98, π é uma aplicação quociente. Pelo Teorema 1.30, existe uma única aplicação contínua $\tilde{F} : N \to P$ tal que $\tilde{F} \circ \pi = F$. A diferenciabilidade é garantida pelo Teorema 5.99. □

Teorema 5.101. *Se $F : M^m \to N^n$ é um mergulho, então $F(M)$ é uma subvariedade regular de N.*

Demonstração. Tome $p \in M$, como F é um mergulho temos que F é uma imersão, assim pelo Teorema 5.89, temos que para cada $p \in M$ existem cartas (U, φ) e (V, ψ) tais que $(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(r^1, \cdots, r^m) = (r^1, \cdots, r^m, 0, \cdots, 0)$. Logo $F(U)$ é definido em V pelo anulamento das coordenadas $y^{m+1}, \cdots, y^n$. Mas isso não prova que $F(M)$ é um subvariedade pois $V \cap F(M)$ pode ser maior que $F(U)$, dessa forma, precisamos mostrar que em alguma vizinhança de $F(p)$ em V o conjunto $F(M)$ é definido pelo anulamento de $n - m$ coordenadas.

Do fato de F ser um mergulho, temos que $F : M \to F(M)$ é um homeomorfismo com a topologia do subespaço, assim $F(U)$ é um aberto em $F(M)$ e pela definição de topologia do subespaço existe um conjunto aberto V' em N tal que $V' \cap F(M) = F(U)$.

Note que em $V \cap V'$ temos que $V \cap V' \cap F(M) = V \cap F(U) = F(U)$ e $F(U)$ é definido pelo anulamento de $y^{m+1}, \cdots, y^n$.

Portanto, $(V \cap V', y^1, \cdots, y^n)$ é uma carta adaptada de $F(M)$ contendo $F(p)$. Uma vez que $F(p)$ é um ponto arbitrário de $F(M)$, temos que $F(M)$ é uma subvariedade regular de N. □

Teorema 5.102. *Se M é uma subvariedade de N, então a inclusão $i : M \to N$ definida por $i(p) = p$ é um mergulho.*

Demonstração. No exemplo 5.65 já mostramos que a inclusão é uma imersão.

Note que a subvariedade N tem a topologia do subespaço e $i(N) = N$, assim $i : N \to i(N)$ é um homeomorfismo com a topologia do subespaço. Portanto, i é um mergulho. □

Observação 5.103. *Geralmente chamamos a imagem de um mergulho de subvariedade mergulhada.*

Proposição 5.104. *Seja M^n uma variedade. A subvariedade de codimensão 0 em M é exatamente a subvariedade aberta de M.*

No exemplo 5.72, mostramos que toda subvariedade aberta de M tem codimensão 0.

Suponha agora que $U \subset M$ é uma subvariedade de codimensão 0, logo pelo Teorema 5.102, $i : U \to M$ é um mergulho. Note que $\dim M = \dim U$ e i é uma imersão, logo i é um difeomorfismo local. Como todo difeomorfismo local é uma aplicação aberta temos que U é um subconjunto aberto de M.

5.14 Aplicações diferenciáveis em uma subvariedade

Teorema 5.105. *Se M e N são variedades, $F : M \to N$ uma aplicação diferenciável e $S \subset M$ uma subvariedade de M, então $F|_S : S \to N$ é diferenciável.*

Demonstração. Temos que $i : S \to M$ é diferenciável, pois é uma imersão. Note que $F|_S = F \circ i$ que é composição de aplicações diferenciáveis. Portanto, $F|_S$ é diferenciável. $\square$

Teorema 5.106. *Sejam $F : N^n \to M^m$ uma aplicação diferenciável, $S \subset M$ e $F(N) \subset S$, denote por s a dimensão de S. Se S é uma subvariedade de M, então a aplicação $\tilde{F} : N \to S$ é diferenciável.*

Demonstração. Tome $p \in N$, logo $F(p) \in F(N) \subset S \subset M$. Por hipótese S é uma subvariedade de M, logo existe uma carta adaptada $(V, \psi) = (V, y^1, \cdots, y^m)$ de M em $F(p)$ de forma que $S \cap V$ é definida pelo anulamento das coordenadas $y^{s+1}, \cdots, y^m$. Como F é diferenciável existe uma vizinhança U de p com $F(U) \subset V$. Então $F(U) \subset (V \cap S)$, dessa forma para $q \in U$ temos que $(\psi \circ F)(q) = \psi(F(q)) = (y^1(F(q)), \cdots, y^s(F(q)), 0, \cdots, 0)$.

Assim, $\psi_S \circ \tilde{F} = (y^1 \circ F, \cdots, y^s \circ F)$ onde $\psi_S : V \cap S \to \mathbb{R}^s$ é diferenciável, pois cada $y^i \circ F$ é diferenciável. Portanto $\tilde{F}$ é diferenciável. $\square$

6 VARIEDADE DE RECOBRIMENTO

Este capítulo tem por objetivo estender alguns resultados apresentados no capítulo 3 agora incluindo a diferenciabilidade e demonstrar a existência do recobrimento universal para variedades diferenciáveis conexas. Na primeira seção iremos definir aplicação de recobrimento diferenciável e explorar algumas propriedades que seguem da definição. A segunda seção trata-se de propriedades de levantamento, na terceira e quarta sessões será definido transformações de recobrimento diferenciáveis e homomorfismo de recobrimento diferenciável. Por fim na última seção é provado a existência do recobrimento universal entre variedades diferenciáveis conexas.

6.1 ALGUMAS PROPRIEDADES BÁSICAS

Definição 6.1. *Sejam E e M variedades conexas, uma aplicação $\pi : E \to M$ é chamada de* ***aplicação de recobrimento diferenciável****, se π é diferenciável, sobrejetiva e cada ponto $p \in M$ tem uma vizinhança U de forma que cada componente de $\pi^{-1}(U)$ é aplicada difeomorficamente, difeomorfismo de classe C^∞, em U pela π.*

Observações 6.2. 1. *Dizemos que U é uniformemente recoberto por p.*

2. *Chamamos M de* **base do recobrimento** *e E é um recobrimento diferenciável de M.*

A seguir apresentamos alguns resultados imediatos da definição de uma aplicação de recobrimento diferenciável.

Lema 6.3. *Toda aplicação de recobrimento diferenciável é um difeomorfismo local.*

Demonstração. Seja $\pi : E \to M$ uma aplicação de recobrimento diferenciável. Tome $p \in E$, logo $\pi(p) \in M$ e assim existe uma vizinhança U de $\pi(p)$ de forma que cada componente conexa de $\pi^{-1}(U)$ é aplicado difeomorficamente em U por π. Considere U_p a componente conexa que contém p, logo $\pi|_{U_p} : U_p \to U$ é um difeomorfismo. Portanto, toda aplicação de recobrimento diferenciável é um difeomorfismo local. □

Lema 6.4. *Toda aplicação de recobrimento diferenciável é uma submersão.*

Demonstração. Seja $\pi : E \to M$ uma aplicação de recobrimento diferenciável. Mostremos que $d\pi_p : T_pE \to T_{\pi(p)}M$ é sobrejetiva para todo $p \in E$.

Tome $p \in E$, logo $\pi(p) \in M$ e assim existe uma vizinhança U de $\pi(p)$ tal que $\pi|_{U_p} : U_p \to U$ é um difeomorfismo, onde U_p é a componente conexa de $\pi^{-1}(U)$ que contém p. Note que, $\pi|_{U_p} = \pi \circ i$, onde $i : U_p \to E$ é a inclusão de U_p em E. Pela Proposição 5.34, $(d\pi|_{U_p})_p = d\pi_{i(p)} \circ di_p = d\pi_p \circ di_p : T_pU_p \to T_{(\pi(i(p)))}M = T_{\pi(p)}M$.

Por outro lado, $(d\pi|_{U_p})_p : T_pU_p \to T_{\pi(p)}U$ é um isomorfismo, já que $\pi|_{U_p} : U_p \to U$ é um difeomorfismo, assim, $posto((d\pi|_{U_p})_p) = \dim(T_{\pi(p)}U) = \dim(T_pU_p)$, e como U é aberto em M, $\dim(T_{\pi(p)}U) = \dim(T_{\pi(p)}M)$.

Além disso, $i : U_p \to E$ é a inclusão de U_p em E, logo $di_p : T_pU_p \to T_pE$ é um isomorfismo, ou seja, $posto(di_p) = \dim(T_pE) = \dim(T_pU_p)$. Uma vez que $d\pi_p : T_pE \to T_{\pi(p)}M$ é uma transformação linear e $posto(d\pi_p \circ di_p) = posto((d\pi|_{U_p})_p) = \dim(T_{\pi(p)}U) = \dim(T_pU_p) = posto(di_p)$, segue pelo Lema 1.43 que $Im(di_p) \cap \ker(d\pi_p) = \{0\} \to T_pE \cap \ker(d\pi_p) = \{0\}$, como $\ker(d\pi_p) \subset T_pE$, temos que $\{0\} = T_pE \cap \ker(d\pi_p) = \ker(d\pi_p)$. Logo, $d\pi_p$ é uma transformação linear injetora, com $\dim(T_pE) = \dim(T_{\pi(p)}M)$, e portanto $d\pi_p$ é sobrejetora. Portanto $\pi : E \to M$ é uma submersão. □

Lema 6.5. *Toda aplicação de recobrimento diferenciável é uma aplicação aberta.*

Demonstração. Como pelo Lema 6.4 toda aplicação de recobrimento diferenciável é uma submersão, segue pelo Corolário 5.91 que toda aplicação de recobrimento diferenciável é uma aplicação aberta. □

Lema 6.6. *Toda aplicação de recobrimento diferenciável é uma aplicação quociente.*

Demonstração. Como toda aplicação de recobrimento diferenciável é uma submersão (Lema 6.4), é aberta (Lema 6.5) e sobrejetiva, segue pelo Teorema 1.24 que é uma aplicação quociente. □

Lema 6.7. *Uma aplicação de recobrimento diferenciável injetiva é um difeomorfismo.*

Demonstração. Seja $\pi : E \to M$ uma aplicação de recobrimento injetiva, logo π é uma bijeção, dessa forma existe a inversa $\pi^{-1} : M \to E$. Mostremos que $\pi^{-1} : M \to E$ é diferenciável.

Tome $p \in M$, como π é uma aplicação de recobrimento diferenciável existe uma vizinhança conexa U_p de p de forma que cada componente de $\pi^{-1}(U_p)$ é aplicada difeomorficamente em U_p pela π. Como, cada componente de $\pi^{-1}(U_p)$ contém exatamente um ponto na fibra de p pela π, e π é injetiva, segue que $\pi^{-1}(U_p)$ é sua única componente conexa.

Tome (U, φ) carta de M em p com $U \subset U_p$ e (V, ψ) uma carta de E em $\pi^{-1}(p)$ com $V \subset \pi^{-1}(U_p)$, logo $\psi \circ \pi^{-1} \circ \varphi^{-1} = \psi \circ (\pi^{-1})|_{(U_p)} \circ \varphi^{-1} = \psi \circ (\pi|_{\pi^{-1}(U_p)})^{-1} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ é diferenciável. □

Lema 6.8. *Uma aplicação de recobrimento topológica entre duas variedades diferenciáveis é uma aplicação de recobrimento diferenciável se, e somente se, é um difeomorfismo local.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Imediato.
$\Leftarrow$) Sejam E e M variedades diferenciáveis e $\pi : E \to M$ uma aplicação de recobrimento topológica e suponha que π é um difeomorfismo local.

Tome $p \in M$, logo existe uma vizinhança U_p de p tal que cada componente conexa de $\pi^{-1}(U_p)$ é aplicada homeomorficamente em U_p pela π.

Uma vez que π é um difeomorfismo local segue que a restrição de π para qualquer aberto continua sendo difeomorfismo. Em particular, dado qualquer componente conexa de $\pi^{-1}(U_p)$, a restrição de π pela componente conexa é um difeomorfismo local bijetivo, logo é um difeomorfismo. Portanto π aplica difeomorficamente cada componente conexa de $\pi^{-1}(U_p)$ em U_p. $\square$

Lema 6.9 (Existência da seção local)**.** *Seja $\pi : E \to M$ uma aplicação de recobrimento diferenciável. Dados qualquer subconjunto $U \subset M$ uniformemente recoberto, $q \in U$ e $q_0 \in \pi^{-1}(q)$, então existe uma única seção local diferenciável $\sigma : U \to E$ tal que $\sigma(q) = q_0$.*

Demonstração. Toda aplicação de recobrimento diferenciável é uma aplicação de recobrimento topológica, dessa forma pelo Lema 3.8, segue que existe uma única seção local $\sigma : U \to E$ tal que $\sigma(q) = q_0$.

Tome $x \in U$ e $x' = \sigma(x)$. Note que pela Definição 3.7 temos $x = (\pi \circ \sigma)(x) = \pi(x')$ e assim $x' \in \pi^{-1}(x) \subset \pi^{-1}(U)$. Como U é conexo e σ é contínua, segue que $\sigma(U)$ é conexo, dessa forma $\sigma(U) \subset U'$, onde U' é a componente conexa de $\pi^{-1}(U)$ que contém q_0, observe que $\pi|_{U'}(q_0) = q$.

Afirmação: $U' \subset \sigma(U)$.

De fato, tome $y \in U' \subset \pi^{-1}(U)$, logo $\pi(y) \in U$ e assim $(\sigma \circ \pi)(y) \in \sigma(U) \subset U'$. Suponha que $(\sigma \circ \pi)(y) \neq y$, uma vez que $\pi|_{U'} : U' \to U$ é uma bijeção (difeomorfismo), segue que $\pi \circ (\sigma \circ \pi)(y) \neq \pi(y)$, como $\pi \circ \sigma = Id_U$ segue que $\pi(y) \neq \pi(y)$, o que é um absurdo. Logo $y = \sigma \circ \pi(y)$

Portanto $U' \subset \sigma(U)$

Considerando o difeomorfismo $\pi|_{U'} : U' \to U$, temos que $\left(\pi|_{U'}\right)^{-1} : U \to U'$ é também um difeomorfismo. Assim $Id_U = \pi \circ \left(\pi|_{U'}\right)^{-1} : U \to U$ e dessa forma $\left(\pi|_{U'}\right)^{-1} : U \to U'$ é uma seção local onde $\left(\pi|_{U'}\right)^{-1}(q) = q_0$. Pela unicidade da seção local, segue que $\sigma = \left(\pi|_{U'}\right)^{-1}$

Portanto σ é uma seção local diferenciável. $\square$

6.2 Propriedades de Levantamento

Definição 6.10. *Seja $\pi : E \to M$ uma aplicação de recobrimento diferenciável e $\varphi : B \to M$ uma aplicação contínua, um **levantamento** de φ é uma aplicação contínua $\tilde{\varphi} : B \to E$ tal que $\pi \circ \tilde{\varphi} = \varphi$.*

Lema 6.11. *Seja $\pi : E \to M$ uma aplicação de recobrimento diferenciável e $\tilde{\varphi} : B \to E$ um levantamento de $\varphi : B \to M$. Temos que:*

1. *Se φ é diferenciável, então $\tilde{\varphi}$ é diferenciável.*

2. *Se φ é de classe C^k, então $\tilde{\varphi}$ é de classe C^k.*

Demonstração. 1. Suponha que φ é diferenciável. Mostremos que $\tilde{\varphi} : B \to E$ é diferenciável.

Tome $x \in B$, dessa forma $\tilde{\varphi}(x) = x' \in E$ e assim $\pi(x') \in M$, logo existe uma vizinhança U de $\pi(x')$ tal que cada componente de $\pi^{-1}(U)$ é aplicada difeomorficamente em U pela π. Considere U' a componente conexa de $\pi^{-1}(U)$ que contém x', dessa forma $\pi|_{U'} : U' \to U$ é um difeomorfismo e além disso $(\pi|_{U'})^{-1} : U \to U'$ também é um difeomorfismo. Como U' é aberto e $\tilde{\varphi}$ é contínua, temos que $\tilde{\varphi}^{-1}(U') = V$ é aberto em B.

Do fato de $\tilde{\varphi}$ ser um levantamento, segue que $\pi \circ \tilde{\varphi} = \varphi$ e assim $\pi \circ \tilde{\varphi}|_V = \varphi|_V$, dessa forma $\pi|_{U'} \circ \tilde{\varphi}|_V = \varphi|_V$, logo $\tilde{\varphi}|_V = (\pi|_{U'})^{-1} \circ \varphi|_V$.

Note que $(\pi|_{U'})^{-1}$ e $\varphi|_V$ são diferenciáveis, dessa forma $\tilde{\varphi}|_V$ é diferenciável e portanto $\tilde{\varphi}$ é diferenciável.

2. Segue de forma análoga. □

Proposição 6.12. *Seja $\pi : E \to M$ uma aplicação de recobrimento diferenciável. Suponha que B seja uma variedade conexa, $\varphi : B \to M$ uma aplicação contínua (diferenciável) e $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 : B \to E$ são levantamentos de φ que coincidem em algum ponto de B. Então $\tilde{\varphi}_1 \equiv \tilde{\varphi}_2$.*

Demonstração. Segue da Proposição 3.12. □

Definição 6.13. *Dizemos que $\gamma : [a, b] \to M$ é de **classe C^1 por partes** se:*

1. *γ é contínua;*

2. *Existe uma partição $P = \{t_0, \cdots, t_n\}$ de $[a, b]$, tal que $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ é de classe C^1, para todo $i = 1, \cdots, n$.*

Proposição 6.14 (Levantamento de caminho)**.** *Seja $\pi : E \to M$ uma aplicação de recobrimento diferenciável e sejam $f : I \to M$ um caminho e $q \in E$ um ponto na fibra de π sobre $f(0)$. Então:*

1. *Se f é um caminho diferenciável, existe um único levantamento diferenciável $\tilde{f} : I \to E$ de f tal que $\tilde{f}(0) = q$.*

2. *Se f é de classe C^k, existe um único levantamento de classe C^k $\tilde{f} : I \to E$ de f tal que $\tilde{f}(0) = q$.*

3. *Se f é de classe C^1 por partes, existe um único levantamento de classe C^1 por partes $\tilde{f} : I \to E$ de f tal que $\tilde{f}(0) = q$.*

Demonstração. 1. Uma vez que $f : I \to M$ é um caminho, segue pela Proposição 3.13 que existe um único levantamento $\tilde{f} : I \to E$ tal que $\tilde{f}(0) = q$. Como f é diferenciável, segue pelo Lema 6.11 que $\tilde{f}$ é diferenciável.

2. Segue análogo ao caso 1.

3. Seja $P = \{t_0 = 0, t_1, \cdots, t_{n-1}, t_n = 1\}$ uma partição de $[0,1]$, de forma que $f|_{[t_{i-1},t_i]}$ é de classe C^1, para todo $i = 1, \cdots n$. Uma vez que f é um caminho (pois f é contínua), pela Proposição 3.13 existe um único levantamento $\tilde{f} : I \to E$ tal que $\tilde{f}(0) = q$. Assim, $\pi \circ \tilde{f} = f$, em particular, $\pi \circ \tilde{f}|_{[t_{i-1},t_i]} = f|_{[t_{i-1},t_i]}$, para todo $i = 1, \cdots n$, ou seja, $\tilde{f}|_{[t_{i-1},t_i]}$ é um levantamento de $f|_{[t_{i-1},t_i]}$, para cada $i = 1, \cdots n$. Como para cada i, $f|_{[t_{i-1},t_i]}$ é C^1, pelo Lema 6.11, $\tilde{f}|_{[t_{i-1},t_i]}$ é de classe C^1, segue que $\tilde{f}$ é C^1 por partes, considerando a partição $P = \{t_0 = 0, t_1, \cdots, t_{n-1}, t_n = 1\}$.

□

Proposição 6.15. *Seja $\pi : E \to M$ uma aplicação de recobrimento diferenciável e $H : f_0 \simeq_p f_1$ uma homotopia por caminhos diferenciáveis de f_0 para f_1. Nessas condições, dado um levantamento $\tilde{f}_0$ de f_0 existe uma única aplicação contínua $\tilde{H} : I \times I \to M$ tal que $p \circ \tilde{H} = H$ e $\tilde{H}(0,0) = \tilde{f}_0(0)$. Além disso, se H é uma homotopia diferenciável, $\tilde{H}$ é uma aplicação diferenciável.*

Demonstração. Segue da Proposição 3.14 e do Lema 6.11. □

6.3 O Grupo de Recobrimento

Definição 6.16. *Seja $\pi : E \to M$ uma aplicação de recobrimento diferenciável. Um difeomorfismo $\varphi : E \to E$ é chamado* ***transformação de recobrimento diferenciável*** *se $\pi \circ \varphi = \pi$. O conjunto $\mathsf{D}_\pi(E) = \{\varphi : E \to E; \varphi$ é uma transformação de recobrimento$\}$ é chamado* ***grupo de recobrimento diferenciável****.*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & {} \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & E \arrow[dl, "\pi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Figura 6.1

Observe que o conjunto $\mathsf{D}_\pi(E)$ é um subgrupo de $\mathsf{C}_\pi(E)$ (Definição 3.30)

Note que substituindo $p : \tilde{X} \to X$ por $\pi : E \to M$, $\mathsf{C}_\mathsf{p}\left(\tilde{X}\right)$ por $\mathsf{D}_\pi(E)$ e $p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{q}\right)\right)$ por $\pi_*(\pi_1(E,q))$, segue que a Observação 3.31 e as Proposições 3.32 e 3.33 são válidas para as transformações de recobrimento diferenciável.

6.4 Homomorfismo de recobrimento diferenciável

Definição 6.17. *Seja M uma variedade diferenciável e $\pi : E_1 \to M$, $\pi' : E_2 \to M$ aplicações de recobrimento diferenciáveis em M. Um* ***homomorfismo de recobrimento diferenciável*** *de π para π' é uma aplicação diferenciável $\varphi : E_1 \to E_2$ tal que $\pi' \circ \varphi = \pi$. Além disso, um homomorfismo de recobrimento diferenciável é dito ser um* ***isomorfismo de recobrimento diferenciável*** *se ele é um difeomorfismo.*

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \circlearrowleft & E_2 \arrow[dl, "\pi'"] \\ & M & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E_1 \arrow[dr, "\pi"'] & \circlearrowleft & E_2 \arrow[ll, "\varphi^{-1}"'] \arrow[dl, "\pi'"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Figura 6.2

Definição 6.18. *Dizemos que duas aplicações de recobrimento diferenciáveis sobre M são **isomorfas** se existir um isomorfismo de recobrimento diferenciável entre elas.*

Observação 6.19. *Os isomorfismos diferenciáveis entre o mesmo espaço de recobrimento diferenciável são exatamente as transformações de recobrimento diferenciáveis.*

Lema 6.20. *Sejam $\pi : E_1 \to M$ e $\pi' : E_2 \to M$ aplicações de recobrimento diferenciáveis de M e seja φ um homomorfismo de recobrimento diferenciável de π para π'. Então φ é uma aplicação de recobrimento diferenciável.*

Demonstração. A demonstração desse Lema é uma continuação do Lema 3.39, substituindo $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$ e $p_2 : \tilde{X}_2 \to X$ por $\pi : E_1 \to M$ e $\pi' : E_2 \to M$, respectivamente. Mostraremos que $\varphi|_W : W \to V_{\tilde{q}}$ é um difeomorfismo.

De fato, uma vez que $V_{\tilde{q}}$ é um subconjunto conexo de ${\pi'}^{-1}(U_q)$ e W é um subconjunto conexo de $\pi^{-1}(U_q)$ segue que $\pi'|_{V_{\tilde{q}}} : V_{\tilde{q}} \to \pi'(V_{\tilde{q}})$ é um difeomorfismo e em particular é um homeomorfismo e $\pi|_W : W \to \pi'(W)$ é um difeomorfismo, em particular é um homeomorfismo. Como $\pi = \pi' \circ \varphi$, segue que $\pi(W) = \pi'(V_{\tilde{q}})$ e assim $\varphi|_W = (\pi'|_{V_{\tilde{q}}})^{-1} \circ \pi|_W : W \to V_{\tilde{q}}$ é um difeomorfismo, pois é composição de difeomorfismos. □

6.5 O ESPAÇO DE RECOBRIMENTO UNIVERSAL DIFERENCIÁVEL

Proposição 6.21 (Propriedades de Recobrimento simplesmente conexo)**.**

1. *Seja $\pi : E \to M$ uma aplicação de recobrimento diferenciável com E simplesmente conexa. Se $\pi_1 : E_1 \to M$ é um recobrimento diferenciável qualquer, então existe uma aplicação de recobrimento diferenciável $\pi' : E \to E_1$ tal que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{tikzcd} & E_1 \arrow[d, "\pi_1"] \\ E \arrow[ur, "\pi'"] \arrow[r, "\pi"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowleft"] & M \end{tikzcd}$$

Figura 6.3

2. *Além disso, se E_1 é também um espaço de recobrimento de M simplesmente conexo, então E e E_1 são isomorfos.*

Demonstração. 1. Pela Proposição 3.42 existe um aplacação de recobrimento topológico $\tilde{\pi}$: $E \to E_1$, tal que $\pi_1 \circ \tilde{\pi} = \pi$, logo $\tilde{\pi}$ é um levantamento de π, o qual é diferenciável, assim pelo Lema 6.11, $\tilde{\pi}$ é uma aplicação diferenciável. Dessa forma, $\tilde{\pi}$ é um homomorfismo de recobrimento diferenciável de π para π_1. Pelo Lema 6.20, $\tilde{\pi}$ é uma aplicação de recobrimento diferenciável.
2. Segue de forma análoga a 3.42. □

Definição 6.22. *Seja $\pi : E \to M$ uma aplicação de recobrimento diferenciável com E simplesmente conexa, dizemos que π é um* ***recobrimento universal diferenciável*** *e E é chamado* ***variedade de recobrimento universal de*** *M.*

Proposição 6.23. *Seja M uma $n-$variedade diferenciável conexa e $\pi : E \to M$ uma aplicação de recobrimento. Então E é uma n- variedade topológica e possui uma única estrutura diferenciável tal que π é uma aplicação de recobrimento diferenciável.*

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que E é uma $n-$variedade topológica.
1. E é um espaço de Hausdorff.

Tome $p, q \in E$ tal que $p \neq q$. Se $\pi(p) = \pi(q)$, considerando a vizinhança uniformemente recoberta $U \subset M$ que contém $\pi(p)$, temos que cada componente conexa de $\pi^{-1}(U)$ é aplicada homeomorficamente em U pela π e assim p e q pertencem a componentes conexas distintas, as quais são abertos em E e disjuntas.

Se $\pi(p) \neq \pi(q)$. Suponha inicialmente que $\pi(p)$ e $\pi(q)$ pertencem a uma mesma vizinhança uniformemente recoberta $U \subset M$.

Se p e q pertencem a componentes conexas distintas de $\pi^{-1}(U)$ obtemos o desejado. Caso contrário, sejam U' a componente conexa de $\pi^{-1}(U)$ que contém p e q, desde que $\pi|_{U'} : U' \to U$ é um homeomorfismo e M é Hausdorff, dadas vizinhanças disjuntas V e W de $\pi(p)$ e $\pi(q)$, respectivamente, segue que $\pi^{-1}(V)$ e $\pi^{-1}(W)$ são vizinhanças disjuntas de p e q, respectivamente.

Suponha agora que $\pi(p)$ e $\pi(q)$ não pertençam a uma mesma vizinhança uniformemente recoberta $U \subset M$.

Sejam $U_1, U_2 \subset M$ vizinhanças uniformemente recoberta de M contendo $\pi(p)$ e $\pi(q)$, respectivamente, e considere as componentes conexas U_1' de $\pi^{-1}(U_1)$ que contém p e U_2' de $\pi^{-1}(U_2)$ que contém q. Assim $\pi|_{U_1'} : U_1' \to U_1$ e $\pi|_{U_2'} : U_2' \to U_2$ são homeomorfismos.

Como M é Hausdorff, existem abertos V_1 e V_2 tais que $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, $\pi(p) \in V_1$ e $\pi(q) \in V_2$. Considere os abertos $W_1 = (\pi|_{U_1'})^{-1}(V_1 \cap U_1)$ e $W_2 = (\pi|_{U_2'})^{-1}(V_2 \cap U_2)$. Note que $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, uma vez que se $x \in W_1 \cap W_2$ então $\pi(x) = \pi|_{U_1'}(x) \in V_1 \cap U_1$ e $\pi(x) = \pi|_{U_2'}(x) \in V_2 \cap U_2$, o que é um absurdo. Além disso, $p \in W_1$ e $q \in W_2$.

Portanto E é Hausdorff.

2. E é localmente Euclidiano.

Tome $p \in E$, logo $\pi(p) \in M$. Como π é uma aplicação de recobrimento, segue que $\pi(p)$ tem uma vizinhança $U \subset M$ tal que cada componente de $\pi^{-1}(U)$ é aplicada homeomorficamente em U por π. Considere U_0 a componente conexa de $\pi^{-1}(U)$ que contém p, logo $\pi|_{U_0} : U_0 \to U \subset M$ é um homeomorfismo. Como M é variedade, existe uma carta $(\tilde{U}, \varphi)$ de M tal que $\pi(p) \in \tilde{U} \subset U$. Assim, $\varphi \circ \pi|_{\pi^{-1}(\tilde{U}) \cap U_0} : \pi^{-1}(\tilde{U}) \cap U_0 \to \varphi(U)$ é um homeomorfismo.

3. E é segundo enumerável.

Mostremos primeiro que cada fibra de π é enumerável.

Tome $q \in M$, $p_0 \in \pi^{-1}(q)$ e seja $[f] \in \pi_1(M, q)$ uma classe de caminhos baseado em q. Pela Proposição 3.13, segue que existe um levantamento $\tilde{f} : [0,1] \to E$ de f tal que $\tilde{f}(0) = p_0$. Pelo Corolário 3.16, dado qualquer $g \simeq_p f$ e $\tilde{g}$ um levantamento de g iniciando em p_0 temos que $\tilde{g}(1) = \tilde{f}(1)$ e assim a aplicação $\beta : \pi_1(M, q) \to \pi^{-1}(q)$ dada por $\beta([f]) = \tilde{f}(1)$ está bem definida. Além disso, β é sobrejetiva, pois dado $p \in \pi^{-1}(q)$. Como E é conexo por caminhos, existe um caminho $\tilde{f} : I \to E$ de p_0 para p e então $f = \pi \circ \tilde{f}$ é um laço baseado em q. Pelo Lema 4.14 , $\pi(M, q)$ é enumerável, portanto $\pi^{-1}(q)$ é enumerável.

A coleção de todos os subconjuntos abertos uniformemente recoberto de M é uma cobertura aberta de M e assim pelo Lema 1.1, possui uma subcobertura enumerável $\{U_i\}$.

Note que dado qualquer i, cada componente de $\pi^{-1}(U_i)$ contém exatamente um ponto em cada fibra sobre U_i e assim $\pi^{-1}(U_i)$ possui uma quantidade enumerável de componentes.

A coleção de todas as componentes de todos esses conjuntos da forma $\pi^{-1}(U_i)$ formam uma cobertura enumerável para E. Uma vez que cada componente é segundo enumerável, segue pelo Lema 1.2 que E é segundo enumerável.

Portanto E é uma $n-$variedade topológica.

Construiremos agora a estrutura diferenciável de E.

Seja p um ponto qualquer em E e U uma vizinhança uniformemente recoberta de $\pi(p)$. Diminuindo se necessário U, podemos assumir que U é o domínio de uma aplicação coordenada diferenciável $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$. Se $\tilde{U}$ é a componente conexa de $\pi^{-1}(U)$ que contém p e $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$, então $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ é uma carta em E.

Considere $\left(\tilde{V}, \tilde{\psi}\right) = \psi \circ \pi|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \to \mathbb{R}^n$ carta em E de forma que $\tilde{U} \cap \tilde{V} \neq \emptyset$, logo:

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} = (\psi \circ \pi|_{\tilde{U} \cap \tilde{V}}) \circ (\varphi \circ \pi|_{\tilde{U} \cap \tilde{V}})^{-1} = (\psi \circ \pi|_{\tilde{U} \cap \tilde{V}}) \circ (\pi|_{\tilde{U} \cap \tilde{V}}^{-1} \circ \varphi^{-1}) = \psi \circ \varphi^{-1},$$

o qual é C^∞ em seu domínio.

Assim, a coleção de todas as cartas dessa forma definem uma estrutura diferenciável em E.

Note que $\varphi \circ \pi \circ \tilde{\varphi}^{-1} = \varphi \circ \pi \circ (\varphi \circ \pi|_{\tilde{U}})^{-1} = \varphi \circ \pi|_{\tilde{U}} \circ \pi|_{\tilde{U}}^{-1} \circ \varphi^{-1} = Id_{\varphi(U)}$.

Logo π é uma aplicação de recobrimento diferenciável, ou seja, aplica difeomorficamente cada componente de $\pi^{-1}(U)$ em U.

Por fim, mostraremos a unicidade da estrutura diferenciável.

Considere $\mathcal{M}$ a estrutura diferenciável construída acima e seja $\mathcal{M}'$ uma outra estrutura diferenciável para E tal que π é uma aplicação de recobrimento diferenciável.

Tome $p \in E$ e $\left(\tilde{U}, \tilde{\varphi}\right)$ uma carta em $\mathcal{M}'$ contendo p. Seja V uma vizinhança uniformemente recoberta de $\pi(p)$ e seja $\tilde{V}$ uma componente conexa de $\pi^{-1}(V)$ contendo p, assim $\pi|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \to V$ é um difeomorfismo (com respeito a $\mathcal{M}'$). Diminuindo V e $\tilde{V}$ se necessário, podemos assumir que existe uma carta diferenciável (V, ψ) em M contendo $\pi(p)$, então $\tilde{\psi} = \psi \circ \pi|_{\tilde{V}}$ é uma aplicação coordenada diferenciável em $\mathcal{M}$ e $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}^{-1} = \tilde{\varphi} \circ (\psi \circ \pi|_{\tilde{V}})^{-1} = \tilde{\varphi} \circ \pi|_{\tilde{V}}^{-1} \circ \psi^{-1}$ é diferenciável. Assim $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\psi}$ são compatíveis, uma vez que p é qualquer $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$.
□

Corolário 6.24 (Existência do Recobrimento universal para variedades)**.** *Se M é uma variedade diferenciável conexa, então existe uma variedade diferenciável simplesmente conexa E e uma aplicação de recobrimento diferenciável $\pi : E \to M$. A variedade de recobrimento universal é única no seguinte sentido: Se E' é qualquer outra variedade diferenciável simplesmente conexa que admite uma aplicação de recobrimento diferenciável $\pi' : E' \to M$, então existe um difeomorfismo $\Phi : E \to E'$ tal que $\pi' \circ \Phi = \pi$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.45, toda variedade diferenciável conexa tem um espaço de recobrimento Universal (topológico). Pela proposição 6.23, temos que E admite uma única estrutura diferenciável de forma que π é uma aplicação diferenciável, isso mostra a existência de uma variedade de recobrimento universal.

Mostremos agora a unicidade da aplicação de recobrimento diferenciável.

Seja $\pi' : E' \to M$ uma outra aplicação de recobrimento diferenciável universal, então pelo item **2** da proposição 3.42 existe um homeomorfismo $\Phi : E \to E'$ tal que $\pi' \circ \Phi = \pi$.

Seja $p \in E$ e considere $x = \pi(p)$ e tome $q \in (\pi')^{-1}(x)$. Sejam U uma vizinhança uniformemente recoberta de x com respeito a π e π', $\tilde{U}$ a componente conexa de $\pi^{-1}(U)$ que contém p e $\tilde{U'}$ a componente de $(\pi')^{-1}(U)$ contendo q. Então $\Phi|_{\tilde{U}} = (\pi'|_{\tilde{U'}})^{-1} \circ \pi|_{\tilde{U}}$, assim $\Phi|_{\tilde{U}}$ é um difeomorfismo.

Dessa forma, Φ é um difeomorfismo local e como é uma bijeção, segue que Φ é um difeomorfismo. □

REFERÊNCIAS

[1] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L., **Um Curso de Álgebra Linear - segunda Edição**. EdUSP, São Paulo, 2010.

[2] GARCIA, Arnaldo.; LEQUAIN, Yves., **Elementos de Álgebra- sexta edição**. Impa. Rio de Janeiro, 2013

[3] LEE, JOHN M., **Introduction to Smooth Manifolds - second edition**. Springer-Verlag. New York, 2013.

[4] LEE, JOHN M., **Introduction to Topological Manifolds - first edition**. Springer-Verlag. New York, 2000.

[5] LIMA, ELON L., **Análise no Espaço Rn - primeira edição**. Impa, Rio de Janeiro, 2004.

[6] LIMA, ELON L., **Análise Real - V.2 quinta edição**. Impa, Rio de Janeiro, 2010.

[7] LIMA, ELON L. **Fundamental Groups and Covering Spaces- first edition** - translated by Jonas Gomes. A K Peters. Natick,Massachusetts, 2003

[8] LIMA, ELON L., **Variedades Diferenciáveis - primeira edição**. Impa, Rio de Janeiro, 2009.

[9] MUNKRES, J. R., **Topology - 2nd Edition**. Prentice Hall, 2000.

[10] PLAZA, SERGIO S., **Variedades Diferenciables - Notas de Aulas**. 2003.

[11] TU, LORING W., **An Introduction to Manifolds, second edition**. Springer-Verlag New York, 2011.

Índice Remissivo