Universidade Estadual de Londrina

SUELLEN APARECIDA GREATTI VIEIRA

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO E ESTABILIDADE EXPONENCIAL DOS SISTEMAS DE TIMOSHENKO VISCOELÁSTICO E TERMOELÁSTICO

Londrina
2018

SUELLEN APARECIDA GREATTI VIEIRA

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO E ESTABILIDADE EXPONENCIAL DOS SISTEMAS DE TIMOSHENKO VISCOELÁSTICO E TERMOELÁSTICO

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientadora: Profª. Drª. Michele de Oliveira Alves

Londrina
2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Vieira, Suellen Aparecida Greatti.
Existência de solução e estabilidade exponencial dos sistemas de Timoshenko viscoelástico e termoelástico / Suellen Aparecida Greatti Vieira. - Londrina, 2018.
133 f. : il.

Orientador: Michele de Oliveira Alves.
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2018.
Inclui bibliografia.

1. Equações diferenciais parciais - Tese. 2. Sistemas de Timoshenko - Tese. 3. Semigrupos lineares - Tese. 4. Estabilidade Exponencial - Tese. I. Alves, Michele de Oliveira . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

SUELLEN APARECIDA GREATTI VIEIRA

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO E ESTABILIDADE EXPONENCIAL DOS SISTEMAS DE TIMOSHENKO VISCOELÁSTICO E TERMOELÁSTICO

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Prof[a]. Dr[a]. Michele de Oliveira Alves
Universidade Estadual de Londrina

Prof[a]. Dr[a]. Valéria Neves Domingos Cavalcanti
Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. José Henrique Rodrigues
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 27 de fevereiro de 2018.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me permitir mais essa conquista.

Agradeço a minha família, em especial meus pais Evaldo e Fátima, e meu marido Fernando, pelo apoio e incentivo.

Agradeço a meus professores de graduação e mestrado por todo conhecimento adquirido. Em particular, meus agradecimentos ao Grupo de Estudos de Edp's da Universidade Estadual de Londrina, pelas experiências compartilhadas.

Agradeço a minha orientadora profª. drª. Michele de Oliveira Alves, pela maravilhosa orientação, sempre compreensiva, prestativa e paciente, e por despertar meu interesse em seguir carreira acadêmica nessa área.

Agradeço aos professores José Henrique Rodrigues, Marcio Antonio Jorge da Silva e Valéria Neves Domingos Cavalcanti pelas contribuições nesse trabalho.

Agradeço meus amigos de graduação e/ou mestrado Estela, Juniormar, Thais e Elizangela que me acompanharam nessa caminhada.

Agradeço à CAPES pelo total apoio financeiro, que foi essencial para a realização desse trabalho.

"O que prevemos raramente ocorre; o que menos esperamos geralmente acontece."(Benjamin Disraeli)

VIEIRA, Suellen Aparecida Greatti. **EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO E ESTABILIDADE EXPONENCIAL DOS SISTEMAS DE TIMOSHENKO VISCOELÁSTICO E TERMO-ELÁSTICO** . 2018. 132. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

RESUMO

Nesse trabalho estudamos a existência de solução e estabilidade exponencial de dois sistemas de Timoshenko que foram obtidos do sistema original proposto em [25, 26]. Motivados por [3], iniciamos com um sistema de Timoshenko termoelástico com condições de fronteira do tipo Dirichlet ou Dirichlet-Neumann em que, usando a teoria de semigrupos lineares, garantimos existência de solução e a estabilidade exponencial do sistema. Posteriormente, estudamos o sistema de Timoshenko viscoelástico com condições de fronteira do tipo Dirichlet para o qual a estabilidade exponencial foi obtida utilizando-se o método de energia de acordo com [14].

Palavras-chave: Sistemas de Timoshenko, estabilidade exponencial, semigrupos lineares.

VIEIRA, Suellen Aparecida Greatti. **SOLUTION EXISTENCE AND EXPONENTIAL STABILITY OF VISCOELASTIC AND TERMOELASTIC TIMOSHENKO SYSTEMS**. 2018. 132. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

ABSTRACT

In this work we study the existence of solutions and the exponential stability of two Timoshenko systems that were obtained from the original system first introduced in [25, 26]. Motivated by [3], we start with a termoelastic Timoshenko system with boundary conditions of the Dirichlet or Diriclet-Neumann type, in which using the linear semigroup theory we guarantee the exponential stability of the system. Subsequently, we studied the viscoelastic Timoshenko system with Dirichilet boundary conditions in which the exponential stability was obtained by using the energy method according to [14].

Keywords: Timoshenko systems, exponential stability, linear semigroups.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

Ω	subconjunto do $\mathbb{R}^n$ aberto
I	subintervalo de $\mathbb{R}$ aberto
$\overline{X}$	fecho do conjunto X
$\mathbb{K}$	corpo $\mathbb{R}$ dos números reais ou o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos
$C(\Omega)$	espaço das funções contínuas $f : \Omega \to \mathbb{R}$
$C^j(\Omega)$	espaço das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciáveis até a ordem j
$C^\infty(\Omega)$	espaço das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis
$C_0^\infty(\Omega)$	espaço das funções de $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto
$L^p(\Omega)$	espaço $L^p(\Omega)$ usual
$L_*^2(\Omega)$	espaço das funções em $L^2(\Omega)$ que possuem média nula
$W^{m,p}(\Omega)$	espaço de Sobolev usual
$H^m(\Omega)$	espaço $W^{m,p}(\Omega)$ para $p = 2$
$H_*^1(\Omega)$	espaço das funções em $H^1(\Omega)$ que possuem média nula
$\mathcal{L}(X)$	espaço dos operadores lineares limitados $A : X \to X$
I	operador identidade
$D(A)$	domínio do operador A
$\rho(A)$	conjunto resolvente do operador A
$\sigma(A)$	espectro do operador A
supp(ϕ)	suporte da função ϕ
$\\|\cdot\\|$	norma usual em $L^2(\Omega)$
$\\|\cdot\\|_{H^1(I)}$	norma em $H^1(I)$ dada por $\\|u\\|_{H^1(I)}^2 = \\|u\\|_{L^2(I)}^2 + \\|u_x\\|_{L^2(I)}^2$
$\\|\cdot\\|_{H^2(I)}$	norma em $H^2(I)$ dada por $\\|u\\|_{H^2(I)}^2 = \\|u\\|_{L^2(I)}^2 + \\|u_x\\|_{L^2(I)}^2 + \\|u_{xx}\\|_{L^2(I)}^2$
$\\|\cdot\\|_{\mathcal{L}(X)}$	norma em $\mathcal{L}(X)$ dada por $\\|A\\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup\left\{\dfrac{\\|Ax\\|_X}{\\|x\\|_X}; x \in X \text{ e } x \neq 0\right\}$
$\\|\cdot\\|_{D(A)}$	norma do gráfico em $D(A) \subset X$ dada por $\\|U\\|_{D(A)} = \\|U\\|_X + \\|AU\\|_X$
$\\|\cdot\\|_\infty$	norma em $C([a,b])$ dada por $\\|f\\|_\infty = \sup\{\lvert f(x)\rvert; x \in [a,b]\}$
i	unidade imaginária
$\overline{z}$	conjugado do número complexo$z$
Re(z)	parte real do número complexo z
Im(z)	parte imaginária do número complexo z
$\hookrightarrow$	imersão contínua
$\overset{c}{\hookrightarrow}$	imersão compacta

1 INTRODUÇÃO

O sistema de Timoshenko é um modelo de sistema de equações diferenciais parciais que descreve o comportamento de uma viga. Em sua forma original, proposta por Stephen Prokofievich Timoshenko, [25, 26], suas leis constitutivas são dadas por

$$\rho A \varphi_{tt} = S_x \quad \text{e} \quad \rho I \psi_{tt} = M_x - S, \tag{1.1}$$

em que

$$S = K'GA(\varphi_x + \psi) \quad \text{e} \quad M = EI\psi_x \tag{1.2}$$

denotam a tensão de cisalhamento e o momento de flexão de uma barra de comprimento $L > 0$, respectivamente. Dessa forma, substituindo (1.2) em (1.1), obtemos o seguinte sistema

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0, \tag{1.3}$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0, \tag{1.4}$$

onde foram usadas as notações $\rho_1 = \rho A$, $\rho_2 = \rho I$, $k = K'GA$ e $b = EI$. Além disso, φ representa o deslocamento transversal e ψ representa o ângulo de rotação no tempo $t \geq 0$ e na posição $x \in [0, L]$, ρ é a densidade de massa, K' é o fator de cisalhamento transversal, A e I são a área e o momento inercial de uma seção transversal, respectivamente, G denota o módulo de cisalhamento e E denota o módulo de Young.

Para obtermos os problemas termoelástico e viscoelástico estudados neste trabalho, foram feitas algumas modificações na tensão de cisalhamento e no momento de flexão dados em (1.2), como veremos a seguir.

Seguindo a literatura existente em termoelasticidade, podemos citar, por exemplo, [2, 10, 18], na primeira parte deste trabalho vamos considerar as seguintes leis termoelásticas:

$$S = K'GA(\varphi_x + \psi) - m\theta \;\; \text{e} \;\; M = EI\psi_x - \sigma\vartheta, \tag{1.5}$$

onde θ e ϑ representam diferenças de temperatura a partir de um ponto de referência fixo da viga com coeficientes de acoplamentos não negativos m e σ.

Observe que quando $m = \sigma = 0$ temos o caso isotérmico e recuperamos as leis termoelásticas padrões (1.2). Neste caso, obtemos o sistema de Timoshenko (1.3)-(1.4). Para esse sistema, um primeiro resultado obtido por [24] afirma que o sistema (1.3)-(1.4), sujeito a um amortecimento por fricção $\beta\psi_t$ com $\beta > 0$ é exponencialmente estável se, e somente se, tivermos as velocidades de propagação de ondas iguais, ou seja,

$$\frac{k}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2} = 0. \tag{1.6}$$

O caso em que $m = 0$ e $\sigma > 0$ foi considerado em [10, 18], onde mostraram que o sistema

$$\begin{aligned}
\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x &= 0, && (1.7)\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \sigma\vartheta_x &= 0, && (1.8)\\
\rho_4\vartheta_t - c_1\vartheta_{xx} + \sigma\psi_{xt} &= 0, && (1.9)
\end{aligned}$$

com condições de fronteira Dirichlet-Neumann dos tipos

$$\varphi = \psi_x = \vartheta_x = 0 \ \text{ e } \ \varphi_x = \psi = \vartheta_x = 0,$$

é exponencialmente estável, desde que (1.6) ocorra.

Já o caso $m > 0$ e $\sigma = 0$ foi proposto em [2], onde o sistema de Timoshenko obtido é

$$\begin{aligned}
\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + m\theta_x &= 0, && (1.10)\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - m\theta &= 0, && (1.11)\\
\rho_3\theta_t - c_0\theta_{xx} + m(\varphi_{xt} + \psi_t) &= 0. && (1.12)
\end{aligned}$$

Foi provado que o sistema (1.10)-(1.12) com condição de fronteira Dirichlet-Neumann do tipo

$$\varphi = \psi_x = \theta_x = 0, \tag{1.13}$$

é exponencialmente estável se tivermos as velocidades de propagação de ondas iguais. Caso as velocidades de propagação de ondas sejam diferentes, provou-se que o sistema (1.10)-(1.12) com a condição de fronteira (1.13) ou com condição de fronteira do tipo Dirichlet decai polinomialmente.

Dessa forma, observamos a importância de se assumir velocidades de propagação de ondas iguais no estudo de estabilidade exponencial dos sistemas citados. Mas essa suposição faz sentido apenas do ponto de visto matemático, pois como mostra [22, 17], temos situações em que fisicamente as velocidades de propagação ondas não são iguais.

Diante disto nosso objetivo foi fazer um estudo detalhado dos resultados apresentados em [3], onde foi estudado as leis térmicas no sistema todo, ou seja, foi considerado o caso não-isotérmico $m, \sigma > 0$ e, usando a lei de Fourier em cada tensão, obteve-se de (1.1) e

(1.5) o seguinte sistema termoelástico Timoshenko:

$$\begin{aligned}
\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + m\theta_x &= 0 \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), && (1.14)\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \sigma\vartheta_x &= 0 \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), && (1.15)\\
\rho_3\theta_t - c_0\theta_{xx} + m(\varphi_{xt} + \psi_t) &= 0 \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), && (1.16)\\
\rho_4\vartheta_t - c_1\vartheta_{xx} + \sigma\psi_{xt} &= 0 \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), && (1.17)
\end{aligned}$$

com condições iniciais

$$\begin{aligned}
\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x),\\
\psi(x,0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x,0) = \psi_1(x),\\
\theta(x,0) = \theta_0(x), \quad \vartheta(x,0) = \vartheta_0(x),
\end{aligned} \tag{1.18}$$

para $x \in (0,L)$ e condições de fronteira

$$\varphi(0,t) = \varphi(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) = \theta(0,t) = \theta(L,t) = \vartheta(0,t) = \vartheta(L,t) = 0, \tag{1.19}$$

para $t \geq 0$, ou condições de fronteira de Dirichlet-Neumann

$$\varphi_x(0,t) = \varphi_x(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) = \theta(0,t) = \theta(L,t) = \vartheta_x(0,t) = \vartheta_x(L,t) = 0, \tag{1.20}$$

para $t \geq 0$, onde usou-se a lei de Fourier para considerar as equações do calor acopladas (1.16) e (1.17). Nesse caso, $c_0, c_1 > 0$ representam a condutividade térmica e $\rho_3, \rho_4 > 0$ são constantes dependendo das propriedades do material.

Através da teoria de semigrupos lineares garantimos a existência e unicidade da solução do problema (1.14)-(1.18), com condições de fronteira (1.19) ou (1.20), bem como sua estabilidade exponencial, sem assumir a igualdade de velocidades de propagação de ondas.

Na segunda parte deste trabalho, baseados em [11, 14], consideramos as seguintes leis:

$$\begin{aligned}
S &= k(\varphi_x + \psi) - k\int_0^\infty g_1(s)(\varphi_x + \psi)(t-s)ds,\\
M &= b\psi_x - b\int_0^\infty g_2(s)\psi_x(t-s)ds,
\end{aligned} \tag{1.21}$$

em que, substituindo (1.21) em (1.1), obtemos o seguinte sistema:

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + k\int_0^\infty g_1(s)(\varphi_x + \psi)_x(t-s)ds = 0, \tag{1.22}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + b\int_0^\infty g_2(s)\psi_{xx}(t-s)ds + k(\varphi_x + \psi) - k\int_0^\infty g_1(s)(\varphi_x + \psi)(t-s)ds = 0, \tag{1.23}$$

em $(0,L)\times(0,\infty)$.

Observe que no caso em que $g_1 = g_2 = 0$, obtemos as leis constitutivas originais do sistema de Timoshenko.

Considerando $g_1 = 0$ e $g_2 \neq 0$ em (1.21) e supondo que existem constantes $k_0, k_1, k_2 > 0$ tais que

$$-k_0 g_2 \leq g_2' \leq -k_1 g_2 \quad \text{e} \quad |g_2''| \leq k_2 g_2,$$

onde g_2 é uma função positiva, diferenciável e decaindo exponencialmente, mostrou-se em [19] que o problema (1.22)-(1.23) decai exponencialmente desde que seja válida (1.6). Verificou-se ainda que se não tiver a igualdade de velocidade de propagação de ondas, então o problema decai polinomialmente.

Um outro resultado dado em [12], também garante a estabilidade exponencial do problema (1.22)-(1.23) desde que se considere a igualdade de velocidade de propagação de ondas, e suponha que $g_1 = 0$ e que g_2 satisfaça

$$g_2 \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\ R^+),\ g_2 \geq 0,\ g_2' \leq 0,\ g_2'' \in L^2(\mathbb{R}^+)$$

e

$$g_2'(s) + \delta g_2(s) \leq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ \quad \text{e} \quad g_2'(s) + M g_2(s) \geq 0 \quad \forall s \geq s_0,$$

para algum $0 < \delta < M$ e $s_0 > 0$.

Novamente, observamos a importância de se assumir (1.6) no estudo da estabilidade exponencial desses sistemas citados.

Estimulados por este fato nosso segundo objetivo foi fazer uma apresentação didática do trabalho [14], ou seja, estudar a existência e estabilidade exponencial da solução do sistema (1.22)-(1.23) com condições iniciais

$$\begin{aligned} &\varphi(x,s) = \varphi_0(x,s), \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x) := \partial_t \varphi_0(x,t) \mid_t = 0, \\ &\psi(x,s) = \psi_0(x,s), \psi_t(x,0) = \psi_1(x), := \partial_t \psi_0(x,t) \mid_t = 0, \end{aligned} \tag{1.24}$$

para $x \in (0, L), s \leq 0$, e condições de fronteira

$$\varphi(0,t) \ \ = \ \ \varphi(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) = 0, \ \ t > 0. \tag{1.25}$$

Para isto assumiremos $g_1, g_2 \in L^1(\mathbb{R}^+) \cap C^1(\mathbb{R}^+)$, ambas não nulas e satisfazendo as hipóteses

$$g_1'(s) \leq 0 \leq g_1(s) \quad \text{e} \quad g_2'(s) \leq 0 \leq g_2(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}^+, \tag{1.26}$$

$$1 > a_0 := \int_0^\infty g_1(s) ds > 0, \quad 1 > b_0 := \int_0^\infty g_2(s) ds > 0, \tag{1.27}$$

$$a_1 = \lim_{s \to 0} g_1(s) < \infty, \quad b_1 = \lim_{s \to 0} g_2(s) < \infty, \tag{1.28}$$

$$g_1'(s) \leq -\delta g_1(s), \quad g_2'(s) \leq -\delta g_2(s), \quad \text{para algum } \ \delta > 0, \tag{1.29}$$

$$g_1(s) \leq \gamma g_2(s), \quad \text{para algum } \ \gamma > 0. \tag{1.30}$$

Nosso trabalho está estruturado da seguinte forma. No Capítulo 2, relembramos algumas definições e resultados de Análise Funcional, Espaços $L^p(\Omega)$, Espaços de Sobolev e teoria de Semigrupos Lineares, que serão utilizados ao longo do texto. O objetivo deste capítulo é apenas relembrar tais resultados e por isso não apresentaremos suas demonstrações, porém estas podem ser facilmente encontradas nas referências citadas.

No Capítulo 3, abordamos o problema (1.14)-(1.18) com condições de fronteira (1.19) ou (1.20). Mais precisamente, na Subseção 3.1.1 garantimos a existência e unicidade do problema (1.14)-(1.18) com as condições de fronteira (1.19), na Subseção 3.1.2 garantimos a existência e unicidade de solução do problema (1.14)-(1.18) com as condições de fronteira (1.20) e na Seção 3.2 mostramos que a solução decai exponencialmente independente da condição de fronteira considerada. Para obtermos todos estes resultados faremos uso da teoria de semigrupo lineares.

No Capítulo 4, apresentamos o problema (1.22)-(1.25), onde na Seção 4.1 garantimos a existência de solução utilizando a teoria de semigrupos lineares e na Seção 4.2 obtemos o decaimento exponencial desta solução utilizando o método de energia.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados importantes de Análise Funcional, Espaços L^p, Espaços de Sobolev e de Semigrupos Lineares que serão utilizados ao longo desse trabalho. O objetivo desse capítulo é apenas relembrar tais resultados, de modo que suas demonstrações podem ser facilmente encontradas nas referências citadas.

2.1 DEFINIÇÕES E RESULTADOS AUXILIARES DE ANÁLISE FUNCIONAL

Nessa seção denotaremos por $\mathbb{K}$ o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou dos números complexos $\mathbb{C}$.

Lema 2.1. *(Desigualdade de Young) Sejam a e b constantes não negativas e $1 < p, q < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Ver [15], Lema 2.2.1, página 28. □

Observação 1. Os números p e q que satisfazem $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ são chamados de expoentes conjugados.

Lema 2.2. *(Desigualdade de Young com ϵ) Sejam a e b constantes não negativas. Então, dado $\epsilon > 0$ vale que*

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2$$

Demonstração. Basta observar que $(2\epsilon a - b)^2 \geq 0$. □

Definição 2.3. *Seja X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Uma norma em X é uma função $\|.\|_X : X \to \mathbb{R}^+$ tal que*

i) $\|x\|_X = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ii) $\|\alpha x\|_X = |\alpha|\|x\|_X, \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

iii) $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X, \forall x, y \in X$.

Chamamos o par $(X, \|.\|_X)$ de espaço vetorial normado.

Definição 2.4. *Sejam X um espaço vetorial normado e $\|.\|_1$ e $\|.\|_2$ duas normas em X. Dizemos que $\|.\|_1$ é equivalente a $\|.\|_2$ quando existem constantes $C_1 > 0, C_2 > 0$ tais que*

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1, \ \forall x \in X.$$

Definição 2.5. *Seja X um espaço vetorial normado. Uma sequência em X é uma função $x : \mathbb{N} \to X$ a qual denotamos por $x(n) = x_n$ e $x(\mathbb{N}) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma restrição $x|_{\mathbb{N}'} \to X$ da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$.*

Definição 2.6. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em um espaço vetorial normado X. Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada se existe $M > 0$ tal que*

$$\|x_n\|_X \leq M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definição 2.7. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em um espaço vetorial normado X. Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em X quando existe $x \in X$ satisfazendo:*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \textit{ tal que } \|x_n - x\|_X < \epsilon, \forall n > n_0.$$

Definição 2.8. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em um espaço vetorial normado X. Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em X se*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \textit{ tal que } \|x_m - x_n\|_X < \epsilon, \forall m, n > n_0.$$

Definição 2.9. *Dizemos que o espaço vetorial normado $(X, \|.\|_X)$ é um espaço de Banach quando toda sequência de Cauchy em X é convergente em X com respeito à norma $\|.\|_X$.*

Definição 2.10. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Dizemos que um operador $T : X \to Y$ é linear quando*

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y), \forall x, y \in X, \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

No caso em que $Y = \mathbb{K}$, dizemos que T é um funcional linear.

Definição 2.11. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ um operador linear. Dizemos que T é limitado quando existe $C > 0$ tal que*

$$\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X, \forall x \in X.$$

Notação 1. Denotaremos por $\mathcal{L}(X, Y)$ o conjunto dos operadores $T : X \to Y$ que são lineares e limitados. Quando $Y = X$ denotaremos $\mathcal{L}(X, Y)$ por $\mathcal{L}(X)$. No caso em que $Y = \mathbb{R}$ denotaremos $\mathcal{L}(X, Y)$ por X'.

Observação 2. O espaço $\mathcal{L}(X, Y)$ é um espaço vetorial normado com a norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup\left\{\frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}; x \in X \text{ e } x \neq 0\right\}.$$

Definição 2.12. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ um operador linear. Dizemos que T é contínuo em $a \in X$ se*

$$\forall \epsilon > 0,\, \exists \delta > 0; \|x - a\|_X \leq \delta \Rightarrow \|T(x) - T(a)\|_Y < \epsilon.$$

Teorema 2.13. *Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ um operador linear. Então T é limitado se, e somente se, T é contínuo.*

Demonstração. Ver [16], Teorema 2.7-9, página 97. □

Definição 2.14. *Sejam X e Y espaços de Banach. Um operador linear $T : X \longrightarrow Y$ é dito compacto se para toda sequência limitada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ existe uma subsequência $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\{T(x_{n_j})\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge em Y.*

Definição 2.15. *Seja $X \neq \{0\}$ um espaço vetorial normado complexo e $T : D(T) \subseteq X \longrightarrow X$ um operador linear. Um valor regular λ de T é um número complexo tal que*

1. *Existe o operador $(T - \lambda I)^{-1}$.*

2. *$(T - \lambda I)^{-1}$ é um operador linear limitado.*

3. *O domínio de $(T - \lambda I)^{-1}$ é denso em X.*

Definição 2.16. *Definimos o conjunto resolvente de T como sendo o conjunto*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda \text{ é valor regular de } T\}.$$

O conjunto $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ é chamado de espectro de T.

Definição 2.17. *Sejam X e Y dois $\mathbb{C}-$espaços vetoriais. Uma aplicação $a : X \times Y \to \mathbb{C}$ é chamada de forma sesquilinear se satisfaz:*

i) $a(x + y, z) = a(x, z) + a(y, z), \forall x, y \in X, \forall z \in Y,$

ii) $a(x, y + z) = a(x, y) + a(x, z), \forall x \in X, \forall y, z \in Y,$

iii) $a(\alpha x, y) = \alpha a(x, y), \forall x \in X, \forall y \in Y, \forall \alpha \in \mathbb{C},$

iv) $a(x, \alpha y) = \overline{\alpha} a(x, y), \forall x \in X, \forall y \in Y, \forall \alpha \in \mathbb{C}.$

Definição 2.18. *Seja X um $\mathbb{C}$-espaço vetorial. Dizemos que a forma sesquilinear $a : X \times X \to \mathbb{C}$ é um produto interno se*

i) $a(x, y) = \overline{a(y, x)},\ \forall x, y \in X,$

ii) $a(x, x) \in \mathbb{R}$ *e* $a(x, x) \geq 0, \forall x \in X,$

iii) $a(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Notação 2. Denotaremos um produto interno em X por $(\cdot,\cdot)_X$.

Definição 2.19. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Dizemos que a aplicação $a : X \to Y$ é antilinear quando*

$$a(\alpha x + y) = \overline{\alpha}T(x) + T(y), \forall x, y \in X, \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Definição 2.20. *Seja X um espaço vetorial normado. Dizemos que uma forma sesquilinear $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ é*

i) contínua se existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|_X\|v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

ii) coerciva se existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$Re\Big(a(v,v)\Big) \geq C_2\|v\|_X^2, \quad \forall v \in X.$$

Definição 2.21. *Sejam X um espaço vetorial e $(\cdot,\cdot)_X$ um produto interno em $X \times X$. Dizemos que a norma em X definida por $\|x\|_X = \sqrt{(x,x)_X}$ provém do produto interno $(\cdot,\cdot)_X$.*

Definição 2.22. *Seja $(X, \|.\|_X)$ um espaço de Banach. Dizemos que X é um espaço de Hilbert quando a norma $\|.\|_X$ provém do produto interno.*

Teorema 2.23. *(Lax-Milgram caso complexo) Seja $a : H \times H \to \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear contínua e coerciva no espaço de Hilbert H. Então, para cada funcional antilinear contínuo f sobre H, existe um único $z \in H$ tal que*

$$f(x) = a(x,z), \;\; \forall \;\; x \in H.$$

Demonstração. Ver [7], Corolário 6.6.2, página 595. □

Definição 2.24. *Sejam X e Y espaços de Banach com $Y \subset X$. Dizemos que Y está imerso compactamente em X quando a aplicação inclusão $i : Y \to X$ é compacta em Y. Denotaremos a imersão compacta de Y em X por $Y \overset{c}{\hookrightarrow} X$.*

Definição 2.25. *Um espaço normado X é chamado de reflexivo quando a aplicação canônica*

$$\begin{array}{rcl} C : X & \to & X'' \\ x & \mapsto & g_x \end{array}$$

é sobrejetora, onde $g_x : X' \to \mathbb{K}$ é dada por $g_x(f) = f(x)$.

Teorema 2.26. *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

Demonstração. Ver [16], Teorema 4.6-6, página 242. □

Definição 2.27. *Seja H um espaço de Hilbert. Dizemos que o operador $A : D(A) \subset H \to H$ é dissipativo quando*

$$Re(Ax, x)_H \leq 0, \ \forall x \in D(A).$$

Teorema 2.28. *Seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador dissipativo tal que o operador $I - A$ é sobrejetor. Se H é um espaço reflexivo, então $\overline{D(A)} = H$.*

Demonstração. Ver [23], Teorema 4.6, página 16. □

Definição 2.29. *Sejam X espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. Dizemos que A tem resolvente compacto quando existe $\lambda \in \rho(A)$ tal que $(\lambda I - A)^{-1}$ é compacto.*

Proposição 2.30. *Sejam $(X, \|.\|_X)$ espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear com resolvente não vazio. Então A tem resolvente compacto se, e somente se, a aplicação inclusão $i : (D(A), \|.\|_{D(A)}) \to (X, \|.\|_X)$ é compacta.*

Demonstração. Ver [8], Proposição 5.8, página 107. □

Definição 2.31. *Sejam X um espaço vetorial e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. Dizemos que $0 \neq x \in D(A)$ é autovetor de A quando existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $Ax = \lambda x$. Nesse caso, dizemos que λ é autovalor de A associado a x.*

Proposição 2.32. *Sejam X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear com resolvente compacto. Então, $\sigma(A)$ é composto apenas por autovalores de A.*

Demonstração. Ver [8], Corolário 1.15. □

2.2 Definições e resultados sobre os espaços $L^p(\Omega)$

Nessa seção, Ω denotará um subconjunto aberto do espaço $\mathbb{R}^n$ e $|\Omega|$ denotará sua medida de Lebesgue.

Definição 2.33. *Sejam Ω um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ aberto e $0 < p < \infty$. Denotaremos por $L^p(\Omega)$ o espaço vetorial das classes de funções $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tais que $|f|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω, ou seja,*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}; f \text{ é mensurável e } \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Temos que $L^p(\Omega)$ é um espaço normado com a norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \forall f \in L^p(\Omega).$$

Definição 2.34. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função. Chamamos de supremo essencial de f em Ω o número*

$$\sup_{x\in\Omega} ess|f(x)| = \inf\{K; |f(x)| \leq K, q.s. \text{ em } \Omega\}.$$

Definição 2.35. *Dizemos que a função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é essencialmente limitada quando*

$$\sup_{x\in\Omega} ess|f(x)| < \infty.$$

Definição 2.36. *Seja Ω um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ aberto. Denotaremos por $L^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das classes de funções $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mensuráveis à Lebesgue que são essencialmente limitadas em Ω, ou seja,*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}; f \text{ é essencialmente limitada q.s. em } \Omega\},$$

o qual é um espaço normado com a norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess|f(x)|, \forall f \in L^\infty(\Omega).$$

Notação 3. A notação q.s. em Ω, na definição anterior, significa quase sempre em Ω.

Teorema 2.37. *Se $1 \leq p \leq \infty$ então $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Ver [1], Teorema 2.16, página 29. □

Teorema 2.38. *(Desigualdade de Holder) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e sejam p e q expoentes conjugados com $1 \leq p \leq \infty$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [1], Teorema 2.4, página 24. □

Corolário 2.39. *Seja $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Se $f \in L^q(\Omega)$ e $|\Omega| < \infty$ então $f \in L^p(\Omega)$ e*

$$||f||_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_{L^q(\Omega)}.$$

Em particular, temos que $L^q \hookrightarrow L^p$, para todos $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

Demonstração. Ver [1], Teorema 2.14, página 28. □

Teorema 2.40. *O espaço $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, com produto interno dado por:*

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)\overline{v}(x)dx,$$

para qualquer $u, v \in L^2(\Omega)$.

Demonstração. Ver [1], Corolário 2.18, página 31. □

Definição 2.41. *Seja* Ω *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$ *e* $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ *uma função contínua. Definimos o suporte de* ϕ *como sendo o conjunto*

$$supp(\phi) = \overline{\{x \in \Omega;\ \phi(x) \neq 0\}}^{\Omega}.$$

Notação 4. Denotaremos por $C_0(\Omega) = \{\phi \in C(\Omega);\ supp(\phi)$ é compacto$\}$.

Definição 2.42. *Definimos o espaço* $C_0^\infty(\Omega)$ *como sendo o espaço vetorial*

$$C_0^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{K};\ f \textit{ é infinitamente diferenciável e com suporte compacto}\}.$$

Proposição 2.43. *Se* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é aberto e* $1 \leq p < \infty$ *então* $C_0^\infty(\Omega)$ *é denso em* $L^p(\Omega)$.

Demonstração. Ver [1], Teorema 2.30, página 38. □

Definição 2.44. *Seja* $1 \leq p < \infty$. *Denotamos por* $L^p_{loc}(\Omega)$ *o espaço vetorial das classes de funções* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *mensuráveis à Lebesgue tais que*

$$\int_K |f(x)|^p dx < \infty,$$

para todo $K \subset \Omega$ *compacto.*

Proposição 2.45. *Seja* $1 \leq p \leq \infty$. *Então* $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$.

Demonstração. Segue da Definição 2.44 e do Corolário 2.39. □

Teorema 2.46. *(Du Bois Raymond) Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

então $u = 0$ *quase sempre em* Ω.

Demonstração. Ver [5], Proposição 4, página 20. □

Proposição 2.47. *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi_x(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

então existe uma constante $C > 0$ *tal que* $u = C$ *q.s. em* Ω.

Demonstração. Ver [6], Lema 8.1, página 205. □

Lema 2.48. *Seja* $u(\cdot, t) \in L^2(0, L)$ *para* $t > 0$. *Então,*

$$Re \int_0^L u_t(x,t)\overline{u(x,t)}\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)}, \forall t > 0.$$

Demonstração. Seja $u \in L^2(0, L)$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |u(x,t)|^2\,dx \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L u(x,t)\overline{u(x,t)}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L \frac{d}{dt}u(x,t)\overline{u(x,t)}\,dx,
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)} &= \frac{1}{2}\int_0^L u_t(x,t)\overline{u(x,t)} + u(x,t)\overline{u(x,t)}_t\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L 2Re(u_t(x,t)\overline{u(x,t)})\,dx \\
&= Re\int_0^L u_t(x,t)\overline{u(x,t)}\,dx.
\end{aligned}$$

$\square$

Definição 2.49. *Seja $g \in L^1(\mathbb{R}^+) \cap C^1(\mathbb{R}^+)$ tal que $g'(s) \leq 0 \leq g(s)$, $\forall s \in \mathbb{R}^+$ e H um espaço de Hilbert. Definimos:*

$$L^2_g(\mathbb{R}^+, H) = \left\{\eta : \mathbb{R}^+ \to H; \int_0^\infty g(s)\|\eta(s)\|^2_H ds < \infty\right\},$$

o qual é um espaço de Hilbert munido com o produto interno e norma dados por:

$$(\eta, \xi)_{L^2_g} = \int_0^\infty g(s)(\eta(s), \xi(s))_H ds,$$

$$\|\eta\|_{L^2_g} = \left(\int_0^\infty g(s)\|\eta(s)\|^2_H ds\right)^{\frac{1}{2}},$$

para todos $\eta, \xi \in L^2_g$.

Teorema 2.50. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então, a função*

$$\begin{aligned}
F:\ \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\
y &\longmapsto F(y) = f(x-y)g(y)
\end{aligned}$$

com $x \in \mathbb{R}^n$ fixo, é integrável q.s. em $\mathbb{R}^n$. Definindo a convolução de f com g por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy,$$

temos que $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Demonstração. Ver [6], Teorema 4.15, página 104. □

Lema 2.51. *Se $\eta \in L^2_g(\mathbb{R}^+, H^1_0(\Omega))$, então a função*

$$\phi_\eta(s) = \int_0^s e^{y-s}\eta(y)dy, \forall s > 0,$$

pertence a $L^2_g(\mathbb{R}^+, H^1_0(\Omega))$.

Demonstração. Seja $\eta \in L^2_g(\mathbb{R}^+, H^1_0(\Omega))$, então

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty g(s)\|(\phi_n)_x(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds &= \int_0^\infty g(s)\big((\phi_n)_x(s),(\phi_n)_x(s)\big)\,ds \\
&= \int_0^\infty g(s)\bigg(\int_0^s e^{y-s}\eta_x(y)dy, \int_0^s e^{w-s}\eta_x(w)dw\bigg)\,ds \\
&= \int_0^\infty g(s)\int_0^s e^{y-s}\int_0^s e^{w-s}\big(\eta_x(y),\eta_x(w)\big)\,dw\,dy\,ds.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty g(s)\|(\phi_n)_x(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds \\
\leq\ &\int_0^\infty g(s)\bigg(\int_0^s e^{y-s}\|\eta_x(y)\|_{L^2(\Omega)}\,dy\bigg)\bigg(\int_0^s e^{w-s}\|\eta_x(w)\|_{L^2(\Omega)}\,dw\bigg)\,ds
\end{aligned}$$

Denotando por $\epsilon_1(s) = e^{-s}$ e $\epsilon_2(s) = [g(s)]^{\frac{1}{2}}\|\eta_x(s)\|$ obtemos que $\epsilon_1 \in L^1(\mathbb{R}^+)$ e $\epsilon_2 \in L^2(\mathbb{R}^+)$. Pelo Teorema 2.50 segue que $\epsilon_1 * \epsilon_2 \in L^2(\mathbb{R}^+)$. Assim,

$$\int_0^\infty g(s)\|(\phi_n)_x(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds \leq \int_0^\infty (\epsilon_1 * \epsilon_2)^2(s)\,ds = \|\epsilon_1 * \epsilon_2\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}$$

Dessa forma,

$$\int_0^\infty g(s)\|(\phi_n)_x(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds \leq \|\epsilon_1\|^2_{L^1(\mathbb{R}^+)}\|\epsilon_2\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

Logo,

$$\int_0^\infty g(s)\|(\phi_n)_x(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds \leq \bigg(\int_0^\infty e^{-s}ds\bigg)^2\bigg(\int_0^\infty g(s)\|\eta_x(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}ds\bigg),$$

ou seja,

$$\int_0^\infty g(s)\|(\phi_n)_x(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds \quad \leq \quad \|\eta\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} < \infty.$$

□

2.3 DEFINIÇÕES E RESULTADOS SOBRE OS ESPAÇOS DE SOBOLEV

Definição 2.52. *Sejam* $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{Z}^N_+$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_N$ *e* $u, g \in L^p(\Omega)$. *Dizemos que* g *é a derivada fraca de ordem* α *de* u *quando*

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g\varphi dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Definição 2.53. *Sejam* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $m \in \mathbb{Z}_+$. *Definimos o espaço de Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$ *como sendo o subespaço vetorial de* $L^p(\Omega)$ *dado por*

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega);\ \textit{existem as derivadas fracas de ordem } \alpha \textit{ com } |\alpha| \leq m \Big\}.$$

Notação 5. No caso em que $p = 2$, denotamos $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

Notação 6. No caso em que $N = 1$ denotaremos as derivadas fracas de u de ordem um e dois (quando existirem) por u_x e u_{xx}, respectivamente.

Teorema 2.54. *O espaço* $W^{m,p}(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$ *é um espaço de Banach com a norma dada por*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad p = \infty.$$

Demonstração. Ver [9], Teorema 2, página 249. □

Teorema 2.55. *Os espaços* $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ *são espaços de Hilbert com produto interno dado por*

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \big(D^\alpha u, D^\alpha v \big)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u, v \in H^m.$$

Demonstração. Ver [9], Teorema 2, página 249. □

Definição 2.56. *Seja* $1 \leq p < \infty$. *O espaço* $W_0^{m,p}(\Omega)$ *é definido como sendo*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^1(\Omega)}^{W^{m,p}}.$$

Teorema 2.57. *(Desigualdades de Poincaré) Suponhamos que Ω seja um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.*

a) Se Ω é limitado, então, para todo $1 \leq p < \infty$, existe uma constante $c_p > 0$, tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c_p \|u'\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

b) Se Ω é conexo de fronteira de classe C^1, então para todo $1 \leq p < \infty$ existe uma constante $c_p > 0$, tal que

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq c_p \|u'\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega),$$

onde $(u)_\Omega$ é a média de u sobre Ω, ou seja,

$$(u)_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x)\, dx.$$

Demonstração. Ver [6], Corolário 9.19, página 290 e página 312, respectivamente. □

Notação 7. Denotaremos os espaços das funções de $L^2(\Omega)$ e de $H^1(\Omega)$ que possuem média nula, respectivamente, por $L^2_*(\Omega)$ e $H^1_*(\Omega)$, ou seja,

$$L^2_*(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \int_\Omega u(x) dx = 0 \right\},$$

$$H^1_*(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega); \int_\Omega u(x) dx = 0 \right\}.$$

Observação 3. Como consequência das desigualdades de Poincaré obtemos que tanto no espaço $H^1_0(\Omega)$ como no espaço $H^1_*(\Omega)$, as normas

$$\|u\|_1 = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_x\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \|u\|_2 = \|u_x\|_{L^2(\Omega)},$$

são equivalentes.

Teorema 2.58. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $1 \leq p \leq \infty$. Se $u \in W^{1,p}(I)$, então existe uma função $\tilde{u} \in C(\overline{I})$ tal que $u = \tilde{u}$ q. s. em I. Além disso,*

$$\int_a^b u_x dx = \tilde{u}(b) - \tilde{u}(a),$$

para quaisquer $a, b \in \overline{I}$.

Demonstração. Ver [6], Teorema 8.2, página 204. □

Teorema 2.59. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $1 \leq p \leq \infty$. Se $u, v \in W^{1,p}(I)$, então $uv \in W^{1,p}(I)$ e, além disso, $(uv)_x = u_x v + uv_x$ e*

$$\int_a^b u_x v dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b uv_x dx,$$

para quaisquer $a, b \in \overline{I}$.

Demonstração. Ver [6], Corolário 8.10, página 215. □

Teorema 2.60. *Seja $u \in W^{1,p}(a,b)$. Então, $u \in W_0^{1,p}(a,b)$ se, e somente se, $\tilde{u}(a) = \tilde{u}(b) = 0$, em que $\tilde{u}$ é um representante contínuo de u.*

Demonstração. Ver [6], Teorema 8.12, página 217. □

Teorema 2.61. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado, $m \geq 1, j \geq 0$ inteiros e $1 \leq p, q < \infty$. Então, as seguintes inclusões são compactas:*

$$i : \Big(W^{j+m,p}(I), \|.\|_{W^{j+m,p}(I)}\Big) \to \Big(W^{j,q}(I), \|.\|_{W^{j,q}(I)}\Big), \quad \textit{se} \quad mp > 1,$$

$$i : \Big(W^{j+m,p}(I), \|.\|_{W^{j+m,p}(I)}\Big) \to \Big(C^j(\overline{I}), \|.\|_{L^\infty}\Big), \quad \textit{se} \quad p > 1.$$

Demonstração. Ver [1], Teorema 6.3, página 168. □

2.4 Definições e resultados de Semigrupos lineares

Definição 2.62. *Uma família $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares e limitados definida sobre um espaço de Banach X é chamada de semigrupo de operadores lineares limitados, ou simplesmente semigrupo, se*

1. *$T(0) = I$ em que $I : X \to X$ é o operador identidade;*
2. *$T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \geq 0$.*

Definição 2.63. *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo sobre um espaço de Banach X. Dizemos que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0, ou simplesmente C_0-semigrupo, se*

$$\lim_{t\to 0} T(t)x = x, \forall x \in X.$$

Definição 2.64. *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo sobre um espaço de Banach X. O gerador infinitesimal de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é o operador*

$$\begin{aligned} A : D(A) \subset X &\rightarrow X \\ x &\mapsto Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \end{aligned}$$

onde

$$D(A) = \left\{ x \in X;\ \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \textit{ existe} \right\}.$$

Observação 2.65. *Chamaremos o semigrupo cujo gerador infinitesimal é o operador A de semigrupo gerado por A e o denotaremos por $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$.*

Definição 2.66. *Dizemos que um semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é uniformemente limitado se existe uma constante $M \geq 1$ tal que $\|T(t)\| \leq M$, para todo $t \geq 0$. Quando $M = 1$ dizemos que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de contrações.*

Teorema 2.67. *(Lumer-Phillips) Seja H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear com $\overline{D(A)} = H$. Então, A é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em H se, e somente se, A é dissipativo e $(\lambda I - A)$ é sobrejetor para algum $\lambda > 0$.*

Demonstração. Ver [23], Teorema 4.3, página 14. □

Considere o problema abstrato de Cauchy

$$\begin{cases} U_t = AU,\ t > 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases}, \tag{2.1}$$

onde $A : D(A) \subset H \to H$ é um operador linear definido sobre o espaço de Hilbert H e

$$D(A) = \big\{ U \in H; \quad AU \in H \big\}.$$

Definição 2.68. *Uma solução do problema* (2.1) *é uma função $U : [0, \infty) \to H$ tal que $U(t)$ é contínua para $t \geq 0$, continuamente diferenciável com $U(t) \in D(A)$ para $t > 0$ e satisfaz* (2.1) *em $[0, \infty)$ quase sempre.*

Teorema 2.69. *Seja H um espaço de Banach e A um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $T(t) := e^{At}$ em H. Se $U_0 \in D(A)$, então o problema de Cauchy abstrato* (2.1) *possui uma única solução $U \in D(A)$ dada por*

$$U(t) = T(t)U_0 := e^{At}U_0, \quad \forall t \geq 0,$$

tal que

$$U \in C([0, \infty), D(A)) \cap C^1([0, \infty), H).$$

Demonstração. Ver [23], Teorema 1.3, página 102. □

Definição 2.70. *Dizemos que um semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é exponencialmente estável quando existem constantes $\alpha > 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}} \leq Me^{-\alpha t},\ \forall t \geq 0.$$

Teorema 2.71. *Um C_0-semigrupo de contrações $T(t) = e^{At}$ é exponencialmente estável se, e somente se, as condições abaixo se verificam:*

i) $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$,

ii) $\lim\limits_{\beta\to\infty} \sup \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty$.

Demonstração. Ver [21], Teorema 3.6.5, página 122. □

Para os resultados que seguem, considere os vetores $V = (u, v, w, z)$, $G = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ e, além disso, dados $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ com $0 \le a_1 < a_2 \le L$, para $j = 1, 2$, definimos

$$\|V\|^2_{a_1,a_2} = \int_{a_1}^{a_2} (|u_x + w|^2 + |v|^2 + |w_x|^2 + |z|^2)\, dx,$$

$$\mathcal{I}(a_j) = |u_x(a_j) + w(a_j)|^2 + |v(a_j)|^2 + |w_x(a_j)|^2 + |z(a_j)|^2.$$

Considere ainda o sistema

$$i\beta u - v = g_1, \quad (2.2)$$

$$i\beta\rho_1 v - k(u_x + w)_x = g_2, \quad (2.3)$$

$$i\beta w - z = g_3, \quad (2.4)$$

$$i\beta\rho_2 z - b\psi_{xx} + k(u_x + w) = g_4, \quad (2.5)$$

onde $g_1, g_3 \in H^1_0$ (ou H^1_*) e $g_2, g_4 \in L^2$.

Proposição 2.72. *(Desigualdade da Observabilidade) Sob as notações anteriores, considere uma solução $V = (u, v, w, z)$ de* (2.2)-(2.5) *e quaisquer $0 \le a_1 < a_2 \le L$. Então, existe constantes positivas A_0 e A_1 tais que*

$$\mathcal{I}(a_j) \le A_0\|V\|^2_{a_1,a_2} + A_0\|G\|^2_{0,L},$$

$$\|V\|^2_{a_1,a_2} \le A_1\mathcal{I}(a_j) + A_1\|G\|^2_{0,L} \quad j = 1, 2.$$

Demonstração. Ver [4], Proposição 3.12, página 477. □

Corolário 2.73. *Seja $V = (u, v, w, z)$ uma solução do sistema* (2.2)-(2.5). *Se para algum subintervalo $(a_1, a_2) \subset (0, L)$ tivermos*

$$\|V\|^2_{a_1,a_2} \le \Lambda, \quad (2.6)$$

para algum $\Lambda > 0$, então existe uma constante (uniforme) $C > 0$ tal que

$$\|V\|^2_{0,L} \le C\Lambda + C\|G\|^2_{0,L}.$$

Demonstração. Ver [4], Corolário 3.14, página 480. □

3 O PROBLEMA DE TIMOSHENKO TERMOELÁSTICO

Neste capítulo vamos estudar a existência e unicidade de solução do problema

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + m\theta_x = 0 \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \tag{3.1}$$
$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \sigma\vartheta_x = 0 \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \tag{3.2}$$
$$\rho_3\theta_t - c_0\theta_{xx} + m(\varphi_{xt} + \psi_t) = 0 \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \tag{3.3}$$
$$\rho_4\vartheta_t - c_1\vartheta_{xx} + \sigma\psi_{xt} = 0 \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \tag{3.4}$$

com condições iniciais

$$\begin{aligned} \varphi(x,0) = \varphi_0(x),\ \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x),\\ \psi(x,0) = \psi_0(x),\ \psi_t(x,0) = \psi_1(x),\\ \theta(x,0) = \theta_0(x),\ \vartheta(x,0) = \vartheta_0(x), \end{aligned} \tag{3.5}$$

para todo $x \in (0,L)$ e condições de fronteira do tipo Dirichlet

$$\varphi(0,t) = \varphi(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) = \theta(0,t) = \theta(L,t) = \vartheta(0,t) = \vartheta(L,t) = 0, \tag{3.6}$$

ou condições de fronteira do tipo Dirichlet-Neumann

$$\varphi_x(0,t) = \varphi_x(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) = \theta(0,t) = \theta(L,t) = \vartheta_x(0,t) = \vartheta_x(L,t) = 0, \tag{3.7}$$

para $t \geq 0$, onde φ representa o deslocamento transversal e ψ representa o ângulo de rotação de uma viga de comprimento $L > 0$, $\rho_1 = \rho A, \rho_2 = \rho I, k = K'GA$, $b = EI$, em que ρ é a densidade de massa, K' é o fator de cisalhamento transversal, A e I são a área e o momento inercial de uma seção transversal, respectivamente, G denota o módulo de cisalhamento e E denota o módulo de Young. As variáveis θ e ϑ representam as diferenças de temperatura a partir de um ponto de referência fixo da viga com coeficientes de acoplamentos não negativos m e σ. As constantes $c_0, c_1 > 0$ representam a condutividade térmica e $\rho_3, \rho_4 > 0$ são constantes dependendo das propriedades do material.

Além disso, baseado em [3], mostraremos também que a solução do problema decai exponencialmente independente da igualdade de velocidade de ondas, isto é, sem assumir que

$$\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}.$$

3.1 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO

Nosso objetivo inicial é garantir a existência e unicidade de solução do problema (3.1)-(3.5) com as condições de fronteira (3.6) ou (3.7), através da teoria de semigrupos lineares. Devido as particularidades das condições de fronteira (3.6) e (3.7) faremos essa etapa em duas subseções, como segue.

3.1.1 Condições de fronteira de Dirichlet

Nesta subseção, para reescrever o problema (3.1)-(3.5), com condições de fronteira (3.6), como um problema abstrato de Cauchy, vamos considerar o espaço de fase

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times L^2(0,L) \times L^2(0,L),$$

o qual é um espaço de Hilbert com o produto interno usual dado por

$$\langle U, \hat{U} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^L \left[\varphi_x \overline{\hat{\varphi}_x} + \Phi\overline{\hat{\Phi}} + \psi_x \overline{\hat{\psi}_x} + \Psi\overline{\hat{\Psi}} + \theta\overline{\hat{\theta}} + \vartheta\overline{\hat{\vartheta}} \right] dx,$$

cuja norma que provém do produto interno é dada por

$$|U|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^L \left[|\varphi_x|^2 + |\Phi|^2 + |\psi_x|^2 + |\Psi|^2 + |\theta|^2 + |\vartheta|^2 \right] dx,$$

para quaisquer $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \vartheta), \hat{U} = (\hat{\varphi}, \hat{\Phi}, \hat{\psi}, \hat{\Psi}, \hat{\theta}, \hat{\vartheta}) \in \mathcal{H}$.

Para facilitar a notação, denotaremos $L^2(0,L)$ simplesmente por L^2 e $H_0^1(0,L)$ por H_0^1. Denotaremos ainda, $\|u\|_{L^2}$ por $\|u\|$, para qualquer $u \in L^2$.

Considere agora o produto interno e norma em $\mathcal{H}$ dados por

$$(U, \hat{U})_{\mathcal{H}} = \int_0^L \left[\rho_1 \Phi\overline{\hat{\Phi}} + \rho_2 \Psi\overline{\hat{\Psi}} + b\psi_x\overline{\hat{\psi}_x} + k(\varphi_x + \psi)\overline{(\hat{\varphi}_x + \hat{\psi})} + \rho_3\theta\overline{\hat{\theta}} + \rho_4\vartheta\overline{\hat{\vartheta}} \right] dx, \quad (3.8)$$

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^L \left[\rho_1|\Phi|^2 + \rho_2|\Psi|^2 + b|\psi_x|^2 + k|\varphi_x + \psi|^2 + \rho_3|\theta|^2 + \rho_4|\vartheta|^2 \right] dx, \quad (3.9)$$

para quaisquer $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \vartheta), \hat{U} = (\hat{\varphi}, \hat{\Phi}, \hat{\psi}, \hat{\Psi}, \hat{\theta}, \hat{\vartheta}) \in \mathcal{H}$.

Observe que (3.8) é, de fato, um produto interno, uma vez que é definido a partir de produtos internos em L^2.

Como L^2 e H_0^1 são espaços de Banach, segue que $\mathcal{H}$ com a norma usual $|.|_{\mathcal{H}}$ é um espaço de Hilbert, uma vez que a norma provém do produto interno.

No próximo lema, vamos mostrar que a norma usual é equivalente à norma dada em (3.9), de onde seguirá que o espaço $\mathcal{H}$ munido da norma (3.9) também é um espaço de Hilbert.

Lema 3.1. *A norma* $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ *definida em* (3.9) *é equivalente à norma usual* $|\cdot|_{\mathcal{H}}$.

Demonstração. Dado $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \vartheta) \in \mathcal{H}$ temos que

$$\begin{aligned} |U|^2_{\mathcal{H}} &= \|\varphi\|^2_{H^1_0} + \|\Phi\|^2 + \|\psi\|^2_{H^1_0} + \|\Psi\|^2 + \|\theta\|^2 + \|\vartheta\|^2 \\ &= \|\varphi_x\|^2 + \|\Phi\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\Psi\|^2 + \|\theta\|^2 + \|\vartheta\|^2. \end{aligned}$$

Usando a Desigualdade Triangular e o fato que $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, segue que

$$|U|^2_{\mathcal{H}} \leq 2\|\varphi_x + \psi\|^2 + 2\|\psi\|^2 + \|\Phi\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\Psi\|^2 + \|\theta\|^2 + \|\vartheta\|^2,$$

e pela Desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned} |U|^2_{\mathcal{H}} &\leq 2\|\varphi_x + \psi\|^2 + 2c_p\|\psi_x\|^2 + \|\Phi\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\Psi\|^2 + \|\theta\|^2 + \|\vartheta\|^2 \\ &= \frac{2}{k}k\|\varphi_x + \psi\|^2 + \frac{2c_p+1}{b}b\|\psi_x\|^2 + \frac{1}{\rho_1}\rho_1\|\Phi\|^2 + \frac{1}{\rho_2}\rho_2\|\Psi\|^2 + \frac{1}{\rho_3}\rho_3\|\theta\|^2 \\ &+ \frac{1}{\rho_4}\rho_4\|\vartheta\|^2 \\ &\leq m_1\|U\|^2_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

onde $m_1 = \max\left\{\frac{2}{k}, \frac{2c_p+1}{b}, \frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}, \frac{1}{\rho_3}, \frac{1}{\rho_4}\right\}$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|U\|^2_{\mathcal{H}} &= \int_0^L \Big[\rho_1|\Phi|^2 + \rho_2|\Psi|^2 + b|\psi_x|^2 + k|\varphi_x + \psi|^2 + \rho_3|\theta|^2 + \rho_4|\vartheta|^2\Big]\,dx \\ &= \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + k\|\varphi_x + \psi\|^2 + \rho_3\|\theta\|^2 + \rho_4\|\vartheta\|^2. \end{aligned}$$

Usando a Desigualdade Triangular, obtemos

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}} \leq \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + 2k\|\varphi_x\|^2 + 2k\|\psi\|^2 + \rho_3\|\theta\|^2 + \rho_4\|\vartheta\|^2,$$

e pela Desigualdade de Poincaré temos que

$$\begin{aligned} \|U\|^2_{\mathcal{H}} &\leq \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + 2k\|\varphi_x\|^2 + 2kc_p\|\psi_x\|^2 + \rho_3\|\theta\|^2 + \rho_4\|\vartheta\|^2 \\ &\leq m_2\big(\|\Phi\|^2 + \|\Psi\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\varphi_x\|^2 + \|\theta\|^2 + \|\vartheta\|^2\big) \\ &= m_2|U|^2_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

onde $m_2 = \max\{\rho_1, \rho_2, b + 2kc_p, 2k, \rho_3, \rho_4\}$. Logo, existem constantes $m_0 = \dfrac{1}{m_1}, m_2 > 0$ tais que

$$m_0|U|^2_{\mathcal{H}} \leq \|U\|^2_{\mathcal{H}} \leq m_2|U|^2_{\mathcal{H}}.$$

□

Considerando $\Phi = \varphi_t$ e $\Psi = \psi_t$, podemos reescrever o problema (3.1)-(3.5) com condições de fronteira (3.6) como um problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} U_t &= AU, \quad t > 0 \\ U(0) &= U_0 \end{cases}, \tag{3.10}$$

onde $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \vartheta)^T,\ U(0) = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0, \vartheta_0) := U_0$ e $A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é um operador linear definido por

$$D(A) = \left\{ U \in \mathcal{H} \mid \varphi, \psi, \theta, \vartheta \in H^2 \ \text{ e } \ \theta, \vartheta, \Phi, \Psi \in H_0^1 \right\} \tag{3.11}$$

e

$$AU = \begin{pmatrix} \Phi \\ \dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x - \dfrac{m}{\rho_1}\theta_x \\ \Psi \\ \dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) + \dfrac{m}{\rho_2}\theta - \dfrac{\sigma}{\rho_2}\vartheta_x \\ \dfrac{c_0}{\rho_3}\theta_{xx} - \dfrac{m}{\rho_3}(\Phi_x + \Psi) \\ \dfrac{c_1}{\rho_4}\vartheta_{xx} - \dfrac{\sigma}{\rho_4}\Psi_x \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Os resultados a seguir garantem a existência e unicidade de solução para o problema de Cauchy (3.10) e, consequentemente, para o sistema (3.1)-(3.5) com condições de fronteira (3.6).

Teorema 3.2. *Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dado em* (3.11)-(3.12). *Então, A é um operador dissipativo.*

Demonstração. Seja $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \vartheta) \in D(A)$ e note que

$$AU = \begin{pmatrix} \Phi \\ \dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x - \dfrac{m}{\rho_1}\theta_x \\ \Psi \\ \dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) + \dfrac{m}{\rho_2}\theta - \dfrac{\sigma}{\rho_2}\vartheta_x \\ \dfrac{c_0}{\rho_3}\theta_{xx} - \dfrac{m}{\rho_3}(\Phi_x + \Psi) \\ \dfrac{c_1}{\rho_4}\vartheta_{xx} - \dfrac{\sigma}{\rho_4}\Psi_x \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
(AU,U)_{\mathcal{H}} &= \int_0^L \Big[k(\varphi_x+\psi)_x\overline{\Phi} - m\theta_x\overline{\Phi} + b\psi_{xx}\overline{\Psi} - k(\varphi_x+\psi)\overline{\Psi} + m\theta\overline{\Psi} - \sigma\vartheta_x\overline{\Psi}\Big]\,dx \\
&+ \int_0^L \Big[b\Psi_x\overline{\psi_x} + k(\Phi_x+\Psi)(\overline{\varphi_x+\psi}) + c_0\theta_{xx}\overline{\theta} - m(\Phi_x+\Psi)\overline{\theta}\Big]\,dx \\
&+ \int_0^L \Big[c_1\vartheta_{xx}\overline{\vartheta} - \sigma\Psi_x\overline{\vartheta}\Big]\,dx.
\end{aligned}
$$

Usando integração por partes, temos que

$$
\begin{aligned}
(AU,U)_{\mathcal{H}} &= k\overline{\Phi}(\varphi_x+\psi)\Big|_0^L - k\int_0^L (\varphi_x+\psi)\overline{\Phi}_x\,dx - m(\overline{\Phi}\theta)\Big|_0^L + m\int_0^L \theta\overline{\Phi}_x\,dx \\
&+ b(\overline{\Psi}\psi_x)\Big|_0^L - b\int_0^L \psi_x\overline{\Psi}_x\,dx - k\int_0^L (\varphi_x+\psi)\overline{\Psi}\,dx + m\int_0^L \theta\overline{\Psi}\,dx \\
&- \sigma\overline{\Psi}\vartheta\Big|_0^L + \sigma\int_0^L \vartheta\overline{\Psi}_x\,dx + b\int_0^L \Psi_x\overline{\psi}_x\,dx + k\int_0^L (\Phi_x+\Psi)(\overline{\varphi_x+\psi})\,dx \\
&+ c_0\overline{\theta}\theta_x\Big|_0^L - c_0\int_0^L \theta_x\overline{\theta}_x\,dx - m\int_0^L (\Phi_x+\Psi)\overline{\theta}\,dx + c_1\overline{\vartheta}\vartheta_x\Big|_0^L - c_1\int_0^L \vartheta_x\overline{\vartheta}_x\,dx \\
&- \sigma\int_0^L \Psi_x\overline{\vartheta}\,dx,
\end{aligned}
$$

e usando as condições de fronteira (3.6), obtemos

$$
\begin{aligned}
(AU,U)_{\mathcal{H}} &= -k\int_0^L (\varphi_x+\psi)(\overline{\Phi_x+\Psi})\,dx + m\int_0^L \theta(\overline{\Phi}_x+\overline{\Psi})\,dx - b\int_0^L \psi_x\overline{\Psi}_x\,dx \\
&+ \sigma\int_0^L \vartheta\overline{\Psi}_x\,dx + b\int_0^L \Psi_x\overline{\psi}_x\,dx + k\int_0^L (\Phi_x+\Psi)(\overline{\varphi_x+\psi})\,dx - c_0\|\theta_x\|^2 \\
&- m\int_0^L (\Phi_x+\Psi)\overline{\theta}\,dx - c_1\|\vartheta_x\|^2 - \sigma\int_0^L \Psi_x\overline{\vartheta}\,dx.
\end{aligned}
$$

Tomando a parte real, obtemos

$$
\begin{aligned}
Re(AU,U)_{\mathcal{H}} &= Re\Big[-k\int_0^L (\varphi_x+\psi)(\overline{\Phi_x+\Psi})\,dx + k\int_0^L (\Phi_x+\Psi)(\overline{\varphi_x+\psi})\,dx\Big] \\
&+ Re\Big[m\int_0^L \theta(\overline{\Phi}_x+\overline{\Psi})\,dx - m\int_0^L (\Phi_x+\Psi)\overline{\theta}\,dx\Big] \\
&+ Re\Big[-b\int_0^L \psi_x\overline{\Psi}_x\,dx + b\int_0^L \Psi_x\overline{\psi}_x\,dx\Big] \\
&+ Re\Big[\sigma\int_0^L \vartheta\overline{\Psi}_x\,dx - \sigma\int_0^L \Psi_x\overline{\vartheta}\,dx\Big] - c_0\|\theta_x\|^2 - c_1\|\vartheta_x\|^2,
\end{aligned}
$$

e usando o fato que $Re[z-\overline{z}]=0$, $\forall z\in\mathbb{C}$, segue que

$$Re(AU,U)_{\mathcal{H}} = -c_0\|\theta_x\|^2 - c_1\|\vartheta_x\|^2 \leq 0, \tag{3.13}$$

ou seja, A é um operador dissipativo. $\square$

Nosso objetivo é mostrar que o operador A é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações e para isso demonstraremos um lema técnico que nos auxiliará no próximo resultado.

Lema 3.3. *Dadas $g_1, g_2, g_3, g_4 \in L^2$, o sistema*

$$\rho_1\varphi - k(\varphi_x+\psi)_x + m\theta_x = g_1, \tag{3.14}$$

$$\rho_2\psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x+\psi) - m\theta + \sigma\vartheta_x = g_2, \tag{3.15}$$

$$\rho_3\theta - c_0\theta_{xx} + m(\varphi_x+\psi) = g_3, \tag{3.16}$$

$$\rho_4\vartheta - c_1\vartheta_{xx} + \sigma\psi_x = g_4, \tag{3.17}$$

possui uma única solução $(\varphi,\psi,\theta,\vartheta) \in \left(H_0^1\cap H^2\right)\times\left(H_0^1\cap H^2\right)\times\left(H_0^1\cap H^2\right)\times\left(H_0^1\cap H^2\right)$.

Demonstração. Considere o espaço de Hilbert

$$\widehat{\mathcal{H}} = H_0^1\times H_0^1\times H_0^1\times H_0^1,$$

com produto interno e norma dados por

$$(U,\widehat{U})_{\widehat{\mathcal{H}}} = \int_0^L \left[\varphi_x\overline{\hat{\varphi}_x} + \psi_x\overline{\hat{\psi}_x} + \theta_x\overline{\hat{\theta}_x} + \vartheta_x\overline{\hat{\vartheta}_x}\right]dx,$$

$$\|U\|^2_{\widehat{\mathcal{H}}} = \int_0^L \left[|\psi_x|^2+|\varphi_x|^2+|\theta_x|^2+|\vartheta_x|^2\right]dx,$$

para quaisquer $U=(\varphi,\psi,\theta,\vartheta), \hat{U}=(\hat{\varphi},\hat{\psi},\hat{\theta},\hat{\vartheta})\in\widehat{\mathcal{H}}$.

Considere a aplicação $a:\widehat{\mathcal{H}}\times\widehat{\mathcal{H}}\to\mathbb{K}$ definida por:

$$\begin{aligned}
a((\varphi,\psi,\theta,\vartheta),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta},\tilde{\vartheta})) \;&=\; \int_0^L \left[\rho_1\varphi\overline{\tilde{\varphi}} + \rho_2\psi\overline{\tilde{\psi}} + \rho_3\theta\overline{\tilde{\theta}} + \rho_4\vartheta\overline{\tilde{\vartheta}} + k(\varphi_x+\psi)\overline{(\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi})}\right]dx \\
&+\; \int_0^L \left[-m\theta\overline{(\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi})} + b\psi_x\overline{\tilde{\psi}_x} - \sigma\vartheta\overline{\tilde{\psi}_x} + c_0\theta_x\overline{\tilde{\theta}_x}\right]dx \\
&+\; \int_0^L \left[m(\varphi_x+\psi)\overline{\tilde{\theta}} + c_1\vartheta_x\overline{\tilde{\vartheta}_x} + \sigma\psi_x\overline{\tilde{\vartheta}}\right]dx.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Observe que a sesquilinearidade de a segue das propriedades do produto interno em L^2, ou seja, de propriedades de integral e de conjugado de um número complexo. Vejamos que a é uma forma sesquilinear contínua e coerciva.

a) a é uma forma sesquilinear contínua em $\widehat{\mathcal{H}}$.

De fato, sejam $(\varphi, \psi, \theta, \vartheta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta}) \in \widehat{\mathcal{H}}$. Segue da Desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned} | a((\varphi, \psi, \theta, \vartheta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta})) | &\leq \rho_1 \|\varphi\| \|\tilde{\varphi}\| + \rho_2 \|\psi\| \|\tilde{\psi}\| + \rho_3 \|\theta\| \|\tilde{\theta}\| + \rho_4 \|\vartheta\| \|\tilde{\vartheta}\| \\ &+ k \|\varphi_x + \psi\| \|\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi}\| + m \|\theta\| \|\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi}\| \\ &+ b \|\psi_x\| \|\tilde{\psi}_x\| + \sigma \|\vartheta\| \|\tilde{\psi}_x\| + c_0 \|\theta_x\| \|\tilde{\theta}_x\| \\ &+ m \|\varphi_x + \psi\| \|\tilde{\theta}\| + c_1 \|\vartheta_x\| \|\tilde{\vartheta}_x\| + \sigma \|\psi_x\| \|\tilde{\vartheta}\|. \end{aligned}$$

Usando as desigualdades Triangular e de Poincaré, segue que

$$\begin{aligned} | a((\varphi, \psi, \theta, \vartheta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta})) | &\leq (\rho_1 c_p^2 + k) \|\varphi_x\| \|\tilde{\varphi}_x\| + (\rho_2 c_p^2 + k c_p^2 + b) \|\psi_x\| \|\tilde{\psi}_x\| \\ &+ (\rho_3 c_p^2 + c_0) \|\theta_x\| \|\tilde{\theta}_x\| + (\rho_4 c_p^2 + c_1) \|\vartheta_x\| \|\tilde{\vartheta}_x\| \\ &+ k c_p \|\varphi_x\| \|\tilde{\psi}_x\| + k c_p \|\psi_x\| \|\tilde{\varphi}_x\| + m c_p \|\theta_x\| \|\tilde{\varphi}_x\| \\ &+ m c_p^2 \|\theta_x\| \|\tilde{\psi}_x\| + \sigma c_p \|\vartheta_x\| \|\tilde{\psi}_x\| + m c_p \|\varphi_x\| \|\tilde{\theta}_x\| \\ &+ m c_p^2 \|\psi_x\| \|\tilde{\theta}_x\| + \sigma c_p \|\psi_x\| \|\tilde{\vartheta}_x\|, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} &| a((\varphi, \psi, \theta, \vartheta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta})) | \\ \leq\ & M_1 (\|\varphi_x\| + \|\psi_x\| + \|\theta_x\| + \|\vartheta_x\|)(\|\tilde{\varphi}_x\| + \|\tilde{\psi}_x\| + \|\tilde{\theta}_x\| + \|\tilde{\vartheta}_x\|) \\ \leq\ & M_1 \|(\varphi, \psi, \theta, \vartheta)\|_{\widehat{\mathcal{H}}} \|(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta})\|_{\widehat{\mathcal{H}}}, \end{aligned}$$

para quaisquer $(\varphi, \psi, \theta, \vartheta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta}) \in \widehat{\mathcal{H}}$, onde

$$M_1 = \max \Big\{ \rho_1 c_p^2 + k, \rho_2 c_p^2 + k c_p^2 + b, \rho_3 c_p^2 + c_0, \rho_4 c_p^2 + c_1, k c_p, m c_p, m c_p^2, \sigma c_p, 1 \Big\}.$$

b) a é uma forma sesquilinear coerciva.

De fato, seja $(\varphi, \psi, \theta, \vartheta) \in \widehat{\mathcal{H}}$, usando as desigualdades de Poincaré e Triangular temos que

$$\begin{aligned} \|(\varphi, \psi, \theta, \vartheta)\|_{\widehat{\mathcal{H}}}^2 &= \|\varphi\|_{H_0^1}^2 + \|\psi\|_{H_0^1}^2 + \|\theta\|_{H_0^1}^2 + \|\vartheta\|_{H_0^1}^2 \\ &= \|\varphi_x\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\theta_x\|^2 + \|\vartheta_x\|^2 \\ &\leq 2\|\varphi_x + \psi\|^2 + 2\|\psi\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\theta_x\|^2 + \|\vartheta_x\|^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\|(\varphi,\psi,\theta,\vartheta)\|^2_{\widehat{\mathcal{H}}} &\leq \frac{2}{k}k\|\varphi_x+\psi\|^2+\frac{2}{\rho_2}\rho_2\|\psi\|^2+\frac{1}{b}b\|\psi_x\|^2+\frac{1}{c_0}c_0\|\theta_x\|^2\\
&+ \frac{1}{c_1}c_1\|\vartheta_x\|^2+\rho_1\|\varphi\|^2+\rho_3\|\theta\|^2+\rho_4\|\vartheta\|^2\\
&\leq M_2 Re\Big[a((\varphi,\psi,\theta,\vartheta),(\varphi,\psi,\theta,\vartheta))\Big],
\end{aligned}
$$

onde $M_2=\max\left\{\frac{2}{k},\frac{2}{\rho_2},\frac{1}{b},\frac{1}{c_0},\frac{1}{c_1},1\right\}>0$. Logo,

$$
Re\Big[a((\varphi,\psi,\theta,\vartheta),(\varphi,\psi,\theta,\vartheta))\Big]\geq\frac{1}{M_2}\|(\varphi,\psi,\theta,\vartheta)\|^2_{\widehat{\mathcal{H}}}.
$$

Considere agora, o funcional antilinear $\phi:\widehat{\mathcal{H}}\to\mathbb{K}$ dado por

$$
\phi(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta},\tilde{\vartheta}) = \int_0^L\Big[g_1\overline{\tilde{\varphi}}+g_2\overline{\tilde{\psi}}+g_3\overline{\tilde{\theta}}+g_4\overline{\tilde{\vartheta}}\Big]\,dx. \tag{3.19}
$$

Observe que ϕ é um funcional contínuo, pois usando as desigualdades de Holder e de Poincaré, obtemos:

$$
\begin{aligned}
|\ \phi(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta},\tilde{\vartheta})\ | &\leq \|g_1\|\|\tilde{\varphi}\|+\|g_2\|\|\tilde{\psi}\|+\|g_3\|\|\tilde{\theta}\|+\|g_4\|\|\tilde{\vartheta}\|\\
&\leq A_1c_p\|\tilde{\varphi}_x\|+A_2c_p\|\tilde{\psi}_x\|+A_3c_p\|\tilde{\theta}_x\|+A_4c_p\|\tilde{\vartheta}_x\|\\
&\leq M_3\big(\|\tilde{\varphi}_x\|+\|\tilde{\psi}_x\|+\|\tilde{\theta}_x\|+\|\tilde{\vartheta}_x\|\big)\\
&= M_3\big(\|\tilde{\varphi}\|_{H^1_0}+\|\tilde{\psi}\|_{H^1_0}+\|\tilde{\theta}\|_{H^1_0}+\|\tilde{\vartheta}\|_{H^1_0}\big)\\
&= M_3\|(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta},\tilde{\vartheta})\|_{\widehat{\mathcal{H}}},
\end{aligned}
$$

para qualquer $(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta},\tilde{\vartheta})\in\widehat{\mathcal{H}}$, onde

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \|g_1\|,\\
A_2 &= \|g_2\|,\\
A_3 &= \|g_3\|,\\
A_4 &= \|g_4\|,\\
M_3 &= \max\Big\{A_1c_p,A_2c_p,A_3c_p,A_4c_p\Big\}.
\end{aligned}
$$

Portanto, pelo Teorema de Lax-Milgram, existe um único $(\varphi,\psi,\theta,\vartheta)\in\widehat{\mathcal{H}}$ tal que

$$
a((\varphi,\psi,\theta,\vartheta),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta},\tilde{\vartheta}))=\phi((\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta},\tilde{\vartheta})),
$$

para todo $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta}) \in \widehat{\mathcal{H}}$, ou seja, existe única $(\varphi, \psi, \theta, \vartheta) \in \widehat{\mathcal{H}}$ satisfazendo

$$\begin{aligned} & \int_0^L \Big[\rho_1\varphi\overline{\tilde{\varphi}} + \rho_2\psi\overline{\tilde{\psi}} + \rho_3\theta\overline{\tilde{\theta}} + \rho_4\vartheta\overline{\tilde{\vartheta}} + k(\varphi_x+\psi)\overline{(\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi})} - m\theta\overline{(\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi})}\Big]\,dx \\ + & \int_0^L \Big[b\psi_x\overline{\tilde{\psi}_x} - \sigma\vartheta\overline{\tilde{\psi}_x} + c_0\theta_x\overline{\tilde{\theta}_x} + m(\varphi_x+\psi)\overline{\tilde{\theta}} + c_1\vartheta_x\overline{\tilde{\vartheta}_x} + \sigma\psi_x\overline{\tilde{\vartheta}}\Big]\,dx \qquad (3.20) \\ = & \int_0^L \Big[g_1\overline{\tilde{\varphi}} + g_2\overline{\tilde{\psi}} + g_3\overline{\tilde{\theta}} + g_4\overline{\tilde{\vartheta}}\Big]\,dx, \end{aligned}$$

para todo $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta}) \in \widehat{\mathcal{H}}$.
Considere em (3.20) os casos particulares $\tilde{\varphi} = \xi \in C_0^1 \subset H_0^1$ e $\tilde{\psi} = \tilde{\theta} = \tilde{\vartheta} = 0$, assim:

$$\int_0^L \Big[\rho_1\varphi\overline{\xi} + k(\varphi_x+\psi)\overline{\xi}_x - m\theta\overline{\xi}_x\Big]\,dx = \int_0^L g_1\overline{\xi}\,dx,$$

ou seja,

$$\int_0^L k\varphi_x\overline{\xi}_x\,dx = \int_0^L \Big[g_1\overline{\xi} - \rho_1\varphi\overline{\xi} - k\psi\overline{\xi}_x + m\theta\overline{\xi}_x\Big]\,dx.$$

Usando integração por partes, obtemos

$$\int_0^L \varphi_x\overline{\xi}_x\,dx = -\int_0^L \underbrace{\Big[\frac{1}{k}\Big(-g_1 + \rho_1\varphi - k\psi_x + m\theta_x\Big)\Big]}_{(I_1)}\overline{\xi}\,dx,\ \forall\xi \in C_0^1. \qquad (3.21)$$

Como (I_1) é composto por funções de L^2, $\varphi_x \in L^2$ e vale (3.21) para todo $\xi \in C_0^1$, segue da definição de derivada fraca que $\varphi_x \in H^1$, de onde $\varphi \in H^2$ e, além disso,

$$\varphi_{xx} = \frac{1}{k}\Big(-g_1 + \rho_1\varphi - k\psi_x + m\theta_x\Big).$$

Portanto, $\varphi \in H^2 \cap H_0^1$ e vale (3.14).
Agora, considerando (3.20) para $\tilde{\psi} = \xi \in C_0^1 \subset H_0^1$ e $\tilde{\varphi} = \tilde{\theta} = \tilde{\vartheta} = 0$ obtemos:

$$\int_0^L \Big[\rho_2\psi\overline{\xi} + k(\varphi_x+\psi)\overline{\xi} - m\theta\overline{\xi} + b\psi_x\overline{\xi}_x - \sigma\vartheta\overline{\xi}_x\Big]\,dx = \int_0^L g_2\overline{\xi}\,dx,$$

ou ainda, usando integração por partes obtemos

$$\int_0^L \psi_x\overline{\xi}_x\,dx = -\int_0^L \underbrace{\Big[\frac{1}{b}\Big(-g_2 + \rho_2\psi + k(\varphi_x+\psi) - m\theta + \sigma\vartheta_x\Big)\Big]}_{(I_2)}\overline{\xi}\,dx,\ \forall\xi \in C_0^1. \quad (3.22)$$

Como (I_2) é composto por funções de L^2, $\psi_x \in L^2$ e vale (3.22) para todo $\xi \in C_0^1$, segue que

$\psi_x \in H^1$, de onde obtemos que $\psi \in H^2$ e, mais ainda,

$$\psi_{xx} = \frac{1}{b}\Big(- g_2 + \rho_2\psi + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \sigma\vartheta_x\Big).$$

Portanto, $\psi \in H^2 \cap H_0^1$ e vale (3.15).
Considerando em (3.20) os casos particulares $\tilde{\theta} = \xi \in C_0^1$ e $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} = \tilde{\vartheta} = 0$, segue que

$$\int_0^L \Big[\rho_3\theta\overline{\xi} + c_0\theta_x\overline{\xi}_x + m(\varphi_x + \psi)\overline{\xi}\Big]\, dx = \int_0^L g_3\overline{\xi}\, dx,$$

ou seja,

$$\int_0^L \theta_x\overline{\xi}_x\, dx = -\int_0^L \underbrace{\left[\frac{1}{c_0}\Big(- g_3 + \rho_3\theta + m(\varphi_x + \psi)\Big)\right]}_{(I_3)}\overline{\xi}\, dx, \forall\xi \in C_0^1. \tag{3.23}$$

Como (I_3) é composto por funções de L^2, $\theta_x \in L^2$ e vale (3.23) para todo $\xi \in C_0^1$, segue que $\theta_x \in H^1$, de onde $\theta \in H^2$ e, mais ainda,

$$\theta_{xx} = \frac{1}{c_0}\Big(- g_3 + \rho_3\theta + m(\varphi_x + \psi)\Big).$$

Dessa forma, concluímos que $\theta \in H^2 \cap H_0^1$ e vale (3.16).
Por fim, usando (3.20) em particular para $\tilde{\vartheta} = \xi \in C_0^1$ e $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} = \tilde{\theta} = 0$, segue que

$$\int_0^L \Big[\rho_4\vartheta\overline{\xi} + c_1\vartheta_x\overline{\xi}_x + \sigma\psi_x\overline{\xi}\Big]\, dx = \int_0^L g_4\overline{\xi}\, dx,$$

ou ainda,

$$\int_0^L \vartheta_x\overline{\xi}_x\, dx = -\int_0^L \underbrace{\left[\frac{1}{c_1}\Big(- g_4 + \rho_4\vartheta + \sigma\psi_x\Big)\right]}_{(I_4)}\overline{\xi}\, dx, \forall\xi \in C_0^1. \tag{3.24}$$

Como (I_4) é composto por funções de L^2, $\vartheta_x \in L^2$ e vale (3.24) para todo $\xi \in C_0^1$, segue que $\vartheta_x \in H^1$, de onde $\vartheta \in H^2$ e, além disso,

$$\vartheta_{xx} = \frac{1}{c_1}\Big(- g_4 + \rho_4\vartheta + \sigma\psi_x\Big).$$

Finalmente, concluímos que $\vartheta \in H^2 \cap H_0^1$ e vale (3.17). □

Teorema 3.4. *Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dado em* (3.11)-(3.12). *Então, o operador $I - A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é sobrejetor.*

Demonstração. Considere $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \in \mathcal{H}$ arbitrária. Queremos encontrar

$$U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \vartheta) \in D(A),$$

tal que $(I-A)U=F$, ou seja,

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \Phi \\ \psi \\ \Psi \\ \theta \\ \vartheta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x - \frac{m}{\rho_1}\theta_x \\ \Psi \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x+\psi) + \frac{m}{\rho_2}\theta - \frac{\sigma}{\rho_2}\vartheta_x \\ \frac{c_0}{\rho_3}\theta_{xx} - \frac{m}{\rho_3}(\Phi_x+\Psi) \\ \frac{c_1}{\rho_4}\vartheta_{xx} - \frac{\sigma}{\rho_4}\Psi_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{pmatrix},$$

ou ainda, encontrar $U=(\varphi,\Phi,\psi,\Psi,\theta,\vartheta)\in D(A)$ que satisfaça

$$\varphi - \Phi = f_1, \tag{3.25}$$

$$\rho_1\Phi - k(\varphi_x+\psi)_x + m\theta_x = \rho_1 f_2, \tag{3.26}$$

$$\psi - \Psi = f_3, \tag{3.27}$$

$$\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x+\psi) - m\theta + \sigma\vartheta_x = \rho_2 f_4, \tag{3.28}$$

$$\rho_3\theta - c_0\theta_{xx} + m(\Phi_x+\Psi) = \rho_3 f_5, \tag{3.29}$$

$$\rho_4\vartheta - c_1\vartheta_{xx} + \sigma\Psi_x = \rho_4 f_6. \tag{3.30}$$

Considere

$$g_1 = \rho_1 f_2 + \rho_1 f_1,$$
$$g_2 = \rho_2 f_4 + \rho_2 f_3,$$
$$g_3 = \rho_3 f_5 + m(f_1)_x + m f_3,$$
$$g_4 = \rho_4 f_6 + \sigma(f_3)x.$$

Como $g_1, g_2, g_3, g_4 \in L^2$, pelo Lema 3.3, temos que o sistema

$$\rho_1\varphi - k(\varphi_x+\psi)_x + m\theta_x = \rho_1 f_2 + \rho_1 f_1, \tag{3.31}$$

$$\rho_2\psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x+\psi) - m\theta + \sigma\vartheta_x = \rho_2 f_4 + \rho_2 f_3, \tag{3.32}$$

$$\rho_3\theta - c_0\theta_{xx} + m(\varphi_x+\psi) = \rho_3 f_5 + m(f_1)_x + m f_3, \tag{3.33}$$

$$\rho_4\vartheta - c_1\vartheta_{xx} + \sigma\psi_x = \rho_4 f_6 + \sigma(f_3)x, \tag{3.34}$$

possui uma única solução $(\varphi,\psi,\theta,\vartheta) \in \left(H_0^1\cap H^2\right)\times\left(H_0^1\cap H^2\right)\times\left(H_0^1\cap H^2\right)\times\left(H_0^1\cap H^2\right)$. Seja $(\varphi,\psi,\theta,\vartheta)$ a solução de (3.31)-(3.34) e considere

$$\Phi = \varphi - f_1 \quad \text{e} \quad \Psi = \psi - f_3.$$

Note que $\Phi, \Psi \in H_0^1$, uma vez que $\varphi, \psi, f_1, f_3 \in H_0^1$. Assim, $U=(\varphi,\Phi,\psi,\Psi,\theta,\vartheta)\in D(A)$ e, além disso, Φ e Ψ satisfazem (3.25) e (3.27), respectivamente.

De (3.31) temos que

$$\rho_1(\varphi - f_1) - k(\varphi_x + \psi)_x + m\theta_x = \rho_1 f_2.$$

Substituindo $\Phi = \varphi - f_1$, obtemos

$$\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi)_x + m\theta_x = \rho_1 f_2,$$

ou seja, vale (3.26). Agora, de (3.32) obtemos

$$\rho_2(\psi - f_3) - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \sigma\vartheta_x = \rho_2 f_4.$$

Substituindo $\Psi = \psi - f_3$, segue que

$$\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \sigma\vartheta_x = \rho_2 f_4,$$

ou seja, vale (3.28). De (3.33) temos que

$$\rho_3\theta - c_0\theta_{xx} + m(\varphi_x - (f_1)_x + \psi - f_3) = \rho_3 f_5.$$

Substituindo $\Phi = \varphi - f_1$ e $\Psi = \psi - f_3$, obtemos

$$\rho_3\theta - c_0\theta_{xx} + m(\Phi_x + \Psi) = \rho_3 f_5,$$

ou seja, vale (3.29). Por fim, de (3.34) temos que

$$\rho_4\vartheta - c_1\vartheta_{xx} + \sigma(\psi_x - (f_3)_x) = \rho_4 f_6.$$

Substituindo $\Psi = \psi - f_3$, segue que

$$\rho_4\vartheta - c_1\vartheta_{xx} + \sigma\Psi_x = \rho_4 f_6,$$

ou seja, vale (3.30).
Portanto, $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \vartheta) \in D(A)$ é solução de (3.25)-(3.30), mostrando que o operador $I - A$ é sobrejetor. $\square$

Teorema 3.5. *Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dado em* (3.11)-(3.12). *Então, A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em $\mathcal{H}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.67 basta mostrarmos que A é dissipativo em $\mathcal{H}$, que o operador $(I - A) : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é sobrejetor e que $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$. Já temos pelos teoremas 3.2 e 3.4 a dissipatividade de A e a sobrejetividade de $I - A$. A densidade do domínio do operador A em $\mathcal{H}$ segue do Teorema 2.28 e do fato de $\mathcal{H}$ ser um espaço de Hilbert, ou seja, reflexivo. Portanto,

A é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $T(t) = e^{At}$ em $\mathcal{H}$. $\square$

Agora, estamos em condições de concluir o resultado de existência e unicidade de solução para o P.V.I (3.10).

Teorema 3.6. *Se $U_0 \in D(A)$, então o problema* (3.10) *admite única solução*

$$U \in C([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), \mathcal{H}).$$

Demonstração. A demonstração segue diretamente dos teoremas 2.69 e 3.5. $\square$

3.1.2 Condições de fronteira de Neumann

Nesta subseção, a fim de reescrever o problema (3.1)-(3.5) com condições de fronteira (3.7) como um problema abstrato de Cauchy, iremos considerar o espaço de fase

$$\mathcal{H} = H^1_*(0,L) \times L^2_*(0,L) \times H^1_0(0,L) \times L^2(0,L) \times L^2(0,L) \times L^2_*(0,L),$$

o qual é um espaço de Hilbert com produto interno usual dado por

$$\langle U, \hat{U}\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^L \left[\varphi_x \overline{\hat{\varphi}_x} + \Phi\overline{\hat{\Phi}} + \psi_x\overline{\hat{\psi}_x} + \Psi\overline{\hat{\Psi}} + \theta\overline{\hat{\theta}} + \vartheta\overline{\hat{\vartheta}}\right] dx,$$

cuja norma que provém desse produto interno é dada por

$$|U|^2_{\mathcal{H}} = \int_0^L \left[|\varphi_x|^2 + |\Phi|^2 + |\psi_x|^2 + |\Psi|^2 + |\theta|^2 + |\vartheta|^2\right] dx,$$

para quaisquer $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \vartheta), \hat{U} = (\hat{\varphi}, \hat{\Phi}, \hat{\psi}, \hat{\Psi}, \hat{\theta}, \hat{\vartheta}) \in \mathcal{H}$. Lembrando que

$$L^2_*(0,L) = \left\{u \in L^2(0,L); \int_0^L u(x)\,dx = 0\right\} \quad \text{e} \quad H^1_*(0,L) = \left\{u \in H^1(0,L); \int_0^L u(x)\,dx = 0\right\}.$$

Considere agora em $\mathcal{H}$ o seguinte produto interno dado por:

$$(U, \hat{U})_{\mathcal{H}} = \int_0^L \left[\rho_1 \Phi\overline{\hat{\Phi}} + \rho_2\Psi\overline{\hat{\Psi}} + b\psi_x\overline{\hat{\psi}_x} + k(\varphi_x + \psi)\overline{(\hat{\varphi}_x + \hat{\psi})} + \rho_3\theta\overline{\hat{\theta}} + \rho_4\vartheta\overline{\hat{\vartheta}}\right] dx, \quad (3.35)$$

cuja norma proveniente desse produto interno é

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}} = \int_0^L \left[\rho_1|\Phi|^2 + \rho_2|\Psi|^2 + b|\psi_x|^2 + k|\varphi_x + \psi|^2 + \rho_3|\theta|^2 + \rho_4|\vartheta|^2\right] dx, \quad (3.36)$$

para quaisquer $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \vartheta), \hat{U} = (\hat{\varphi}, \hat{\Phi}, \hat{\psi}, \hat{\Psi}, \hat{\theta}, \hat{\vartheta}) \in \mathcal{H}$.

Usando propriedades do produto interno em L^2 obtemos que (3.35) define um produto interno. E como L^2, L^2_*, H^1_0 e H^1_* são espaços de Banach, segue que $\mathcal{H}$ com a norma usual $|.|_{\mathcal{H}}$ é um espaço de Hilbert, uma vez que a norma provém desse produto interno.

No próximo lema, vamos mostrar que a norma usual e a norma dada em (3.36) são equivalentes, de onde seguirá que o espaço $\mathcal{H}$ também é um espaço de Hilbert com o produto interno (3.35).

Lema 3.7. *A norma* $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ *definida em* (3.36) *é equivalente à norma usual* $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ *de* $\mathcal{H}$*.*

Demonstração. A demonstração segue de maneira análoga à demonstração do Lema 3.1, observando que $\|u\|^2_{H^1_*} = \|u_x\|^2$, para qualquer $u \in H^1_*$. □

Analogamente ao caso da subseção anterior, considerando $\Phi = \varphi_t$ e $\Psi = \psi_t$, reescrevemos o problema (3.1)-(3.5) com condições de fronteira (3.7) como um problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} U_t &= AU, \quad t > 0 \\ U(0) &= U_0 \end{cases}, \tag{3.37}$$

onde $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \vartheta)^T$, $U(0) = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0, \vartheta_0) := U_0$ e $A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é o operador linear definido por

$$D(A) = \Big\{U \in \mathcal{H} \mid \varphi, \psi, \theta, \vartheta \in H^2, \varphi_x, \theta, \vartheta_x, \Psi \in H^1_0(0, L) \ \text{ e } \ \Phi \in H^1_*\Big\}, \tag{3.38}$$

e

$$AU = \begin{pmatrix} \Phi \\ \dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x - \dfrac{m}{\rho_1}\theta_x \\ \Psi \\ \dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) + \dfrac{m}{\rho_2}\theta - \dfrac{\sigma}{\rho_2}\vartheta_x \\ \dfrac{c_0}{\rho_3}\theta_{xx} - \dfrac{m}{\rho_3}(\Phi_x + \Psi) \\ \dfrac{c_1}{\rho_4}\vartheta_{xx} - \dfrac{\sigma}{\rho_4}\Psi_x \end{pmatrix}. \tag{3.39}$$

Os resultados a seguir garantem a existência e unicidade de solução para o problema de Cauchy (3.37) e, consequentemente, para o sistema (3.1)-(3.5) com condições de fronteira (3.7), observando que nesta subseção as demonstrações seguem muito parecidas com as demonstrações da subseção anterior.

Teorema 3.8. *Seja* $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *dado em* (3.38)-(3.39)*. Então,* A *é um operador dissipativo.*

Demonstração. A demonstração é análoga ao Teorema 3.2 observando que, mesmo com as condições de fronteira (3.7), nas integrações por partes os termos pontuais de fronteira também são nulos. □

Nosso próximo passo é mostrar que o operador $I - A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é sobrejetor. Para isso, um lema técnico se faz necessário.

Lema 3.9. *Dadas $h_1, h_4 \in L^2_*, h_2, h_3 \in L^2$, então o sistema*

$$\rho_1\varphi - k(\varphi_x + \psi)_x + m\theta_x = h_1, \tag{3.40}$$

$$\rho_2\psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \sigma\vartheta_x = h_2, \tag{3.41}$$

$$\rho_3\theta - c_0\theta_{xx} + m(\varphi_x + \psi) = h_3, \tag{3.42}$$

$$\rho_4\vartheta - c_1\vartheta_{xx} + \sigma\psi_x = h_4,, \tag{3.43}$$

possui uma única solução $(\varphi, \psi, \theta, \vartheta) \in \left(H^1_* \cap H^2\right) \times \left(H^1_0 \cap H^2\right) \times \left(H^1_0 \cap H^2\right) \times \left(H^1_* \cap H^2\right)$, com $\varphi_x, \vartheta_x \in H^1_0$.

Demonstração. Considere o espaço de Hilbert

$$\widetilde{\mathcal{H}} = H^1_* \times H^1_0 \times H^1_0 \times H^1_*,$$

com produto interno e norma dados por

$$(U, \widehat{U})_{\widetilde{\mathcal{H}}} = \int_0^L \left[\varphi_x\overline{\widehat{\varphi}_x} + \psi_x\overline{\widehat{\psi}_x} + \theta_x\overline{\widehat{\theta}_x} + \vartheta_x\overline{\widehat{\vartheta}_x}\right] dx,$$

$$\|U\|^2_{\widetilde{\mathcal{H}}} = \int_0^L \left[|\psi_x|^2 + |\varphi_x|^2 + |\theta_x|^2 + |\vartheta_x|^2\right] dx,$$

para todos $U = (\varphi, \psi, \theta, \vartheta), \hat{U} = (\hat{\varphi}, \hat{\psi}, \hat{\theta}, \hat{\vartheta}) \in \widetilde{\mathcal{H}}$.

Defina a aplicação $a : \widetilde{\mathcal{H}} \times \widetilde{\mathcal{H}} \to \mathbb{K}$ por:

$$\begin{aligned} a((\varphi, \psi, \theta, \vartheta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta})) &= \int_0^L \left[\rho_1\varphi\overline{\tilde{\varphi}} + \rho_2\psi\overline{\tilde{\psi}} + \rho_3\theta\overline{\tilde{\theta}} + \rho_4\vartheta\overline{\tilde{\vartheta}} + k(\varphi_x + \psi)\overline{(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi})}\right] dx \\ &+ \int_0^L \left[-m\theta\overline{(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi})} + b\psi_x\overline{\tilde{\psi}_x} - \sigma\vartheta\overline{\tilde{\psi}_x} + c_0\theta_x\overline{\tilde{\theta}_x}\right] dx \\ &+ \int_0^L \left[m(\varphi_x + \psi)\overline{\tilde{\theta}} + c_1\vartheta_x\overline{\tilde{\vartheta}_x} + \sigma\psi_x\overline{\tilde{\vartheta}}\right] dx. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Analogamente a (3.18), usando as desigualdades de Holder, Triangular e Poincaré temos que a é uma forma sesquilinear contínua e coerciva.

Novamente pelas desigualdades de Holder e Poincaré e de maneira análoga ao que foi feito em (3.19), obtemos que o funcional antilinear $\phi : \widetilde{\mathcal{H}} \to \mathbb{K}$ dado por

$$\phi(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta}) = \int_0^L \left[h_1\overline{\tilde{\varphi}} + h_2\overline{\tilde{\psi}} + h_3\overline{\tilde{\theta}} + h_4\overline{\tilde{\vartheta}}\right] dx,$$

é contínuo.

Portanto, pelo Teorema de Lax-Milgram, existe um único $(\varphi, \psi, \theta, \vartheta) \in \widetilde{\mathcal{H}}$ tal que

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left[\rho_1 \varphi \overline{\tilde{\varphi}} + \rho_2 \psi \overline{\tilde{\psi}} + \rho_3 \theta \overline{\tilde{\theta}} + \rho_4 \vartheta \overline{\tilde{\vartheta}} + k(\varphi_x + \psi)\overline{(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi})} - m\theta\overline{(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi})}\right] dx \\
+ & \int_0^L \left[b\psi_x \overline{\tilde{\psi}_x} - \sigma \vartheta \overline{\tilde{\psi}_x} + c_0 \theta_x \overline{\tilde{\theta}_x} + m(\varphi_x + \psi)\overline{\tilde{\theta}} + c_1 \vartheta_x \overline{\tilde{\vartheta}_x} + \sigma \psi_x \overline{\tilde{\vartheta}}\right] dx \qquad (3.45) \\
= & \int_0^L \left[h_1 \overline{\tilde{\varphi}} + h_2 \overline{\tilde{\psi}} + h_3 \overline{\tilde{\theta}} + h_4 \overline{\tilde{\vartheta}}\right] dx,
\end{aligned}$$

para todo $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta}) \in \widetilde{\mathcal{H}}$. Considere $\xi \in H^1$ qualquer e defina

$$\tilde{\xi}(x) = \xi(x) - \frac{1}{L}\int_0^L \xi(t)\, dt,$$

para qualquer $x \in (0, L)$. Observe que $\tilde{\xi} \in H^1$ e

$$\begin{aligned}
\int_0^L \tilde{\xi}(x)\, dx &= \int_0^L \left[\xi(x) - \frac{1}{L}\int_0^L \xi(t)\, dt\right] dx \\
&= \int_0^L \xi(x)\, dx - \left[\frac{1}{L}\int_0^L \xi(t)\, dt\right]\left[\int_0^L 1\, dx\right] \\
&= 0. \qquad (3.46)
\end{aligned}$$

Logo, $\tilde{\xi} \in H^1_*$.
Considerando (3.45), em particular, para $\tilde{\varphi} = \tilde{\xi} \in H^1_*$ e $\tilde{\psi} = \tilde{\theta} = \tilde{\vartheta} = 0$ temos que:

$$\int_0^L \left[\rho_1 \varphi \overline{\tilde{\xi}} + k(\varphi_x + \psi)\overline{\tilde{\xi}}_x - m\theta \overline{\tilde{\xi}}_x\right] dx = \int_0^L h_1 \overline{\tilde{\xi}}\, dx,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left[\rho_1 \varphi \left(\overline{\xi - \frac{1}{L}\int_0^L \xi(x)\, dx}\right) + k(\varphi_x + \psi)\overline{\xi}_x - m\theta \overline{\xi}_x\right] dx \\
= & \int_0^L h_1 \left(\overline{\xi - \frac{1}{L}\int_0^L \xi(x)\, dx}\right) dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \rho_1 \int_0^L \varphi \overline{\xi}\, dx - \left[\overline{\frac{\rho_1}{L}\int_0^L \xi(x)\, dx}\right]\left[\int_0^L \varphi\, dx\right] + k\int_0^L (\varphi_x + \psi)\overline{\xi}_x\, dx - m\int_0^L \theta \overline{\xi}_x\, dx \\
= & \int_0^L h_1 \overline{\xi} dx - \left[\overline{\frac{1}{L}\int_0^L \xi(x)\, dx}\right]\left[\int_0^L h_1\, dx\right], \qquad (3.47)
\end{aligned}$$

para qualquer $\xi \in H^1$.

Como $\varphi, h_1 \in H^1_*$, então de (3.47) segue que

$$\rho_1 \int_0^L \varphi\overline{\xi}\, dx + k\int_0^L \varphi_x\overline{\xi}_x\, dx + k\int_0^L \psi\overline{\xi}_x\, dx - m\int_0^L \theta\overline{\xi}_x\, dx = \int_0^L h_1\overline{\xi}\, dx,$$

ou ainda,

$$k\int_0^L \varphi_x\overline{\xi}_x\, dx = \int_0^L \Big[h_1\overline{\xi} - \rho_1\varphi\overline{\xi} - k\psi\overline{\xi}_x + m\theta\overline{\xi}_x\Big]\, dx,$$

para qualquer $\xi \in H^1$.
Usando integração por partes temos

$$\int_0^L \varphi_x\overline{\xi}_x\, dx = -\int_0^L \underbrace{\left[\frac{1}{k}\Big(-h_1 + \rho_1\varphi - k\psi_x + m\theta_x\Big)\right]}_{(I_5)}\overline{\xi}\, dx, \tag{3.48}$$

para qualquer $\xi \in H^1$.
Sabemos que (3.48) é válido, em particular, para $\xi \in C^1_0 \subset H^1$. Como (I_5) é composto por funções de L^2, $\varphi_x \in L^2$ e vale (3.48) para qualquer $\xi \in C^1_0$, segue da definição de derivada fraca que $\varphi_x \in H^1$, de onde $\varphi \in H^2$ e, além disso,

$$\varphi_{xx} = \frac{1}{k}\Big(-h_1 + \rho_1\varphi - k\psi_x + m\theta_x\Big), \tag{3.49}$$

ou seja, $\varphi \in H^2 \cap H^1_*$ e vale (3.40).
Sabendo que $\varphi \in H^2$, usando integração por partes em (3.48) temos que

$$\varphi_x\overline{\xi}\Big|_0^L - \int_0^L \varphi_{xx}\overline{\xi}\, dx = -\int_0^L \left[\frac{1}{k}\Big(-h_1 + \rho_1\varphi - k\psi_x + m\theta_x\Big)\right]\overline{\xi}\, dx,$$

substituindo (3.49), obtemos

$$\varphi_x(L)\overline{\xi}(L) - \varphi_x(0)\overline{\xi}(0) = 0, \tag{3.50}$$

para qualquer $\xi \in H^1$. Tomando, em particular, $\xi \in C^1[0,L]$ tal que

$$\overline{\xi}(0) = 0 \quad \text{e} \quad \overline{\xi}(L) = 1,$$

segue de (3.50) que $\varphi_x(L) = 0$. Por outro lado, tomando $\xi \in C^1[0,L]$ com

$$\overline{\xi}(0) = 1 \quad \text{e} \quad \overline{\xi}(L) = 0,$$

temos em (3.50) que $\varphi_x(0) = 0$. Portanto, $\varphi_x \in H^1_0$.

Agora, considerando (3.45), em particular para $\tilde{\psi} = \xi \in C_0^1 \subset H_0^1$ e $\tilde{\varphi} = \tilde{\theta} = \tilde{\vartheta} = 0$ obtemos:

$$\int_0^L \left[\rho_2\psi\overline{\xi} + k(\varphi_x + \psi)\overline{\xi} - m\theta\overline{\xi} + b\psi_x\overline{\xi}_x - \sigma\vartheta\overline{\xi}_x\right] dx = \int_0^L h_2\overline{\xi}\, dx,$$

ou seja,

$$\int_0^L \psi_x\overline{\xi}_x\, dx = -\int_0^L \underbrace{\left[\frac{1}{b}\Big(-h_2 + \rho_2\psi + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \sigma\vartheta_x\Big)\right]}_{(I_6)}\overline{\xi}\, dx, \forall \xi \in C_0^1. \quad (3.51)$$

Como (I_6) é composto por funções de L^2, $\psi_x \in L^2$ e vale (3.51) para todo $\xi \in C_0^1$, segue que $\psi_x \in H^1$, de onde $\psi \in H^2$ e, mais ainda,

$$\psi_{xx} = \frac{1}{b}\Bigg(-h_2\rho_2\psi + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \sigma\vartheta_x\Bigg),$$

ou seja, $\psi \in H^2 \cap H_0^1$ e vale (3.41).
Considerando (3.45), em particular, para $\tilde{\theta} = \xi \in C_0^1$ e $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} = \tilde{\vartheta} = 0$, segue que

$$\int_0^L \left[\rho_3\theta\overline{\xi} + c_0\theta_x\overline{\xi}_x + m(\varphi_x + \psi)\overline{\xi}\right] dx = \int_0^L h_3\overline{\xi}\, dx,$$

ou seja,

$$\int_0^L \theta_x\overline{\xi}_x\, dx = -\int_0^L \underbrace{\left[\frac{1}{c_0}\Big(-h_3 + \rho_3\theta + m(\varphi_x + \psi)\Big)\right]}_{(I_7)}\overline{\xi}\, dx, \forall \xi \in C_0^1. \quad (3.52)$$

Como (I_7) é composto por funções de L^2, $\theta_x \in L^2$ e vale (3.52) segue que $\theta_x \in H^1$, de onde $\theta \in H^2$ e, mais ainda,

$$\theta_{xx} = \frac{1}{c_0}\Bigg(-h_3 + \rho_3\theta + m(\varphi_x + \psi)\Bigg).$$

Logo, $\theta \in H^2 \cap H_0^1$ e vale (3.42).
Considerando novamente $\xi \in H^1$ arbitrária, já vimos em (3.46) que

$$\tilde{\xi}(x) = \xi(x) - \frac{1}{L}\int_0^L \xi(t)\, dt \in H_*^1.$$

Aplicando (3.45), em particular, para $\tilde{\vartheta} = \tilde{\xi} \in H_*^1$ e $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} = \tilde{\theta} = 0$, segue que

$$\int_0^L \left[\rho_4\vartheta\overline{\tilde{\xi}} + c_1\vartheta_x\overline{\tilde{\xi}}_x + \sigma\psi_x\overline{\tilde{\xi}}\right] dx = \int_0^L h_4\overline{\tilde{\xi}}\, dx,$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
& \rho_4 \int_0^L \vartheta\overline{\xi}\,dx - \left[\overline{\frac{\rho_4}{L}\int_0^L \xi(t)\,dt}\right]\left[\int_0^L \vartheta\,dx\right] + c_1\int_0^L \vartheta_x\overline{\xi}_x\,dx \\
+ \;\; & \sigma\int_0^L \psi_x\overline{\xi}\,dx - \left[\overline{\frac{\sigma}{L}\int_0^L \xi(t)\,dt}\right]\left[\int_0^L \psi_x\,dx\right] \\
= \;\; & \int_0^L h_4\overline{\xi}\,dx - \frac{1}{L}\left[\overline{\int_0^L \xi(t)\,dt}\right]\left[\int_0^L h_4\,dx\right],
\end{aligned}
$$

para qualquer $\xi \in H^1$.
Lembrando que $\vartheta, h_4 \in L^2_*$ e que $\psi \in H^1_0$, segue que

$$
\int_0^L \vartheta_x\overline{\xi}_x dx = -\int_0^L \underbrace{\left[\frac{1}{c_1}\Big(-h_4 + \rho_4\vartheta + \sigma\psi_x\Big)\right]}_{(I_8)}\overline{\xi}\,dx, \tag{3.53}
$$

para qualquer $\xi \in H^1$.
Sabemos que (3.53) é válido, em particular, para $\xi \in C^1_0$, como (I_8) é composto por funções de L^2 e $\vartheta_x \in L^2$, segue que $\vartheta_x \in H^1$, de onde $\vartheta \in H^2$ e, mais ainda,

$$
\vartheta_{xx} = \frac{1}{c_1}\left(-h_4 + \rho_4\vartheta + \sigma\psi_x\right), \tag{3.54}
$$

Logo, $\vartheta \in H^2 \cap H^1_*$ e vale (3.43).
Além disso, usando integração por partes em (3.53), segue que

$$
\vartheta_x\overline{\xi}\Big|_0^L - \int_0^L \vartheta_{xx}\overline{\xi}dx = -\int_0^L \left[\frac{1}{c_1}\Big(-h_4 + \rho_4\vartheta + \sigma\psi_x\Big)\right]\overline{\xi}\,dx,
$$

para qualquer $\xi \in H^1$. Sendo assim, por (3.54) obtemos para qualquer $\xi \in H^1$ que

$$
\vartheta_x(L)\overline{\xi}(L) - \vartheta_x(0)\overline{\xi}(0) = 0. \tag{3.55}
$$

Tomando $\xi \in C^1[0, L]$ com $\overline{\xi}(0) = 0$ e $\overline{\xi}(L) = 1$ em (3.55), obtemos que $\vartheta_x(L) = 0$. Por outro lado, tomando $\overline{\xi} \in C^1[0, L]$ com $\overline{\xi}(0) = 1$ e $\overline{\xi}(L) = 0$, obtemos que $\vartheta_x(0) = 0$. Logo, $\vartheta_x \in H^1_0$, o que conclui a demonstração do lema.

□

Teorema 3.10. *Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dado em* (3.38)-(3.39). *Então, o operador $I - A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é sobrejetor.*

Demonstração. Dado $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \in \mathcal{H}$ arbitrário, analogamente ao Teorema 3.4, queremos encontrar

$$U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \vartheta) \in D(A),$$

tal que

$$\varphi - \Phi = f_1, \tag{3.56}$$
$$\rho_1 \Phi - k(\varphi_x + \psi)_x + m\theta_x = \rho_1 f_2, \tag{3.57}$$
$$\psi - \Psi = f_3, \tag{3.58}$$
$$\rho_2 \Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \sigma\vartheta_x = \rho_2 f_4, \tag{3.59}$$
$$\rho_3 \theta - c_0\theta_{xx} + m(\Phi_x + \Psi) = \rho_3 f_5, \tag{3.60}$$
$$\rho_4 \vartheta - c_1\vartheta_{xx} + \sigma\Psi_x = \rho_4 f_6. \tag{3.61}$$

Com efeito, considere as seguintes funções

$$h_1 = \rho_1 f_2 + \rho_1 f_1,$$
$$h_2 = \rho_2 f_4 + \rho_2 f_3,$$
$$h_3 = \rho_3 f_5 + m(f_1)_x + m f_3,$$
$$h_4 = \rho_4 f_6 + \sigma(f_3)x.$$

Como $h_1, h_4 \in L^2_*$ e $h_2, h_3 \in L^2$, pelo Lema 3.9, obtemos que o sistema

$$\rho_1 \varphi - k(\varphi_x + \psi)_x + m\theta_x = \rho_1 f_2 + \rho_1 f_1, \tag{3.62}$$
$$\rho_2 \psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \sigma\vartheta_x = \rho_2 f_4 + \rho_2 f_3, \tag{3.63}$$
$$\rho_3 \theta - c_0\theta_{xx} + m(\varphi_x + \psi) = \rho_3 f_5 + m(f_1)_x + m f_3, \tag{3.64}$$
$$\rho_4 \vartheta - c_1\vartheta_{xx} + \sigma\psi_x = \rho_4 f_6 + \sigma(f_3)x, \tag{3.65}$$

possui uma única solução $(\varphi, \psi, \theta, \vartheta) \in \left(H^1_* \cap H^2\right) \times \left(H^1_0 \cap H^2\right) \times \left(H^1_0 \cap H^2\right) \times \left(H^1_* \cap H^2\right)$, com $\varphi_x, \vartheta_x \in H^1_0$.

Considere $(\varphi, \psi, \theta, \vartheta)$ a solução de (3.62)-(3.65). Tome $\Phi = \varphi - f_1$ e $\Psi = \psi - f_3$, observe que $\Phi \in H^1_*$ e $\Psi \in H^1_0$ já que $\varphi, f_1 \in H^1_*$ e $\psi, f_3 \in H^1_0$. Assim, $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \vartheta) \in D(A)$. Além disso, Φ e Ψ são soluções de (3.56) e (3.58), respectivamente. Vamos mostrar que U satisfaz (3.56)-(3.61).

De (3.62) temos que

$$\rho_1(\varphi - f_1) - k(\varphi_x + \psi)_x + m\theta_x = \rho_1 f_2,$$

e substituindo $\Phi = \varphi - f_1$, segue que

$$\rho_1 \Phi - k(\varphi_x + \psi)_x + m\theta_x = \rho_1 f_2,$$

ou seja, vale (3.57). Agora, de (3.63) temos que

$$\rho_2(\psi - f_3) - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \sigma\vartheta_x = \rho_2 f_4.$$

Substituindo $\Psi = \psi - f_3$ obtemos

$$\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \sigma\vartheta_x = \rho_2 f_4,$$

ou seja, vale (3.59). De (3.64) temos que

$$\rho_3\theta - c_0\theta_{xx} + m(\varphi_x - (f_1)_x + \psi - f_3) = \rho_3 f_5.$$

Substituindo $\Phi = \varphi - f_1$ e $\Psi = \psi - f_3$ obtemos

$$\rho_3\theta - c_0\theta_{xx} + m(\Phi_x + \Psi) = \rho_3 f_5,$$

ou seja, vale (3.60). Por fim, de (3.65) temos que

$$\rho_4\vartheta - c_1\vartheta_{xx} + \sigma(\psi_x - (f_3)_x) = \rho_4 f_6,$$

substituindo $\Psi = \psi - f_3$ segue que

$$\rho_4\vartheta - c_1\vartheta_{xx} + \sigma\Psi_x = \rho_4 f_6,$$

ou seja, vale (3.61). Portanto, $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \vartheta) \in D(A)$ e satisfaz (3.56)-(3.61), como queríamos. $\square$

Com isto, podemos enunciar o seguinte teorema de existência e unicidade para o P.V.I. (3.37).

Teorema 3.11. *Se $U_0 \in D(A)$, então o problema* (3.37) *admite uma única solução*

$$U \in C([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), \mathcal{H}).$$

Demonstração. Obtemos dos teoremas 3.8 e 3.10 que o operador A é dissipativo em $\mathcal{H}$ e que $(I - A) : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é um operador sobrejetor. Analogamente a prova do Teorema 3.5, concluímos que $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$. Pelo Teorema 2.67 segue que A é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $T(t) = e^{At}$ em $\mathcal{H}$. Portanto, a prova do Teorema 3.11 segue do Teorema 2.69. $\square$

3.2 ESTABILIDADE EXPONENCIAL

Nosso objetivo nesta seção é mostrar que o problema (3.1)-(3.5) com as condições de fronteira (3.6) ou (3.7) é exponencialmente estável independente da igualdade de velocidade de propagação de ondas, isto é, não precisamos assumir (1.6).

Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido em (3.11)-(3.12) para a condição de fronteira (3.6) (ou em (3.38)-(3.39), para a condição de fronteira (3.7)). Pelo Teorema 2.71, precisamos mostrar que

$$i\mathbb{R} \subset \rho(A)$$

e

$$\lim_{\beta\to\infty} \sup \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty.$$

Inicialmente, considere a equação resolvente

$$i\beta U - AU = F, \tag{3.66}$$

onde $\beta \in \mathbb{R}$, $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \vartheta)^T \in D(A)$, $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^T \in \mathcal{H}$ e A é definido em (3.11)-(3.12) (ou em (3.38)-(3.39)).

Reescrevendo (3.66) em termos de suas componentes, obtemos:

$$i\beta\varphi - \Phi = f_1, \tag{3.67}$$

$$i\beta\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi)_x + m\theta_x = \rho_1 f_2, \tag{3.68}$$

$$i\beta\psi - \Psi = f_3, \tag{3.69}$$

$$i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \sigma\vartheta_x = \rho_2 f_4, \tag{3.70}$$

$$i\beta\rho_3\theta - c_0\theta_{xx} + m(\Phi_x + \Psi) = \rho_3 f_5, \tag{3.71}$$

$$i\beta\rho_4\vartheta - c_1\vartheta_{xx} + \sigma\Psi_x = \rho_4 f_6. \tag{3.72}$$

Nosso próximo objetivo é mostrar que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$, independente da condição de fronteira considerada. Primeiro mostraremos que $0 \in \rho(A)$, para isso alguns lemas serão necessários.

Lema 3.12. *Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido em* (3.11)-(3.12)*. Então, o operador $-A$ é bijetor.*

Demonstração. Dado $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \in \mathcal{H}$, precisamos encontrar um único $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \vartheta) \in D(A)$ que é solução de $-AU = F$, ou equivalentemente, que é solução de

$$-\Phi = f_1, \tag{3.73}$$
$$-k(\varphi_x + \psi)_x + m\theta_x = \rho_1 f_2, \tag{3.74}$$
$$-\Psi = f_3, \tag{3.75}$$
$$-b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \sigma\vartheta_x = \rho_2 f_4, \tag{3.76}$$
$$-c_0\theta_{xx} + m(\Phi_x + \Psi) = \rho_3 f_5, \tag{3.77}$$
$$-c_1\vartheta_{xx} + \sigma\Psi_x = \rho_4 f_6. \tag{3.78}$$

De (3.73) e (3.75) basta considerarmos $\Phi = -f_1 \in H_0^1$ e $\Psi = -f_3 \in H_0^1$. Substituindo em (3.74), (3.76)-(3.78), obtemos:

$$-k(\varphi_x + \psi)_x + m\theta_x = \rho_1 f_2, \tag{3.79}$$
$$-b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \sigma\vartheta_x = \rho_2 f_4, \tag{3.80}$$
$$-c_0\theta_{xx} = \rho_3 f_5 + m((f_1)_x + f_3), \tag{3.81}$$
$$-c_1\vartheta_{xx} = \rho_4 f_6 + \sigma(f_3)_x. \tag{3.82}$$

Considere a forma sesquilinear

$$\tilde{a} : (H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1) \times (H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1) \to \mathbb{K}$$

definida por

$$\begin{aligned} \tilde{a}((\varphi,\psi,\theta,\vartheta),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta},\tilde{\vartheta})) &= \int_0^L \Big[k(\varphi_x+\psi)\overline{(\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi})} - m\theta\overline{(\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi})}\Big]\,dx \\ &+ \int_0^L \Big[b\psi_x\overline{\tilde{\psi}_x} - \sigma\vartheta\overline{\tilde{\psi}_x} + c_0\theta_x\overline{\tilde{\theta}_x} + c_1\vartheta_x\overline{\tilde{\vartheta}_x}\Big]\,dx. \end{aligned}$$

Análogo à demonstração do Lema 3.3, obtemos que $\tilde{a}$ é uma forma sesquilinear contínua e coerciva.
Considere agora, o funcional antilinear $\tilde{\phi} : H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1 \to \mathbb{K}$ dado por

$$\tilde{\phi}(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta},\tilde{\vartheta}) = \int_0^L \Big[\rho_1 f_2\overline{\tilde{\varphi}} + \rho_2 f_4\overline{\tilde{\psi}} + \big[m((f_1)_x + f_3) + \rho_3 f_5\big]\overline{\tilde{\theta}} + \big[\sigma(f_3)_x + \rho_4 f_6\big]\overline{\tilde{\vartheta}}\Big]\,dx.$$

De maneira análoga ao que fizemos para ϕ definido em (3.19), obtemos que $\tilde{\phi}$ é contínuo. Logo, pelo Teorema de Lax-Milgram temos que existe um único $(\varphi,\psi,\theta,\vartheta) \in H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1$ tal que

$$a((\varphi,\psi,\theta,\vartheta),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta},\tilde{\vartheta})) = \phi((\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta},\tilde{\vartheta})),\ \forall(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta},\tilde{\vartheta}) \in H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1,$$

ou seja, existe única $(\varphi,\psi,\theta,\vartheta)\in H_0^1\times H_0^1\times H_0^1\times H_0^1$ que satisfaz

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \Big[k(\varphi_x+\psi)\overline{(\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi})}-m\theta\overline{(\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi})}+b\psi_x\overline{\tilde{\psi}_x}-\sigma\vartheta\overline{\tilde{\psi}_x}+c_0\theta_x\overline{\tilde{\theta}_x}+c_1\vartheta_x\overline{\tilde{\vartheta}_x}\Big]\,dx\\
=\;&\int_0^L \Big[\rho_1 f_2\overline{\tilde{\varphi}}+\rho_2 f_4\overline{\tilde{\psi}}+\big[m((f_1)_x+f_3)+\rho_3 f_5\big]\overline{\tilde{\theta}}+\big[\sigma(f_3)_x+\rho_4 f_6\big]\overline{\tilde{\vartheta}}\Big]\,dx. \qquad (3.83)
\end{aligned}$$

Aplicando (3.83) para os casos particulares $\tilde{\varphi}=\xi\in C_0^1$, $\tilde{\psi}=\tilde{\theta}=\tilde{\vartheta}=0$ segue que

$$\int_0^L \Big[k(\varphi_x+\psi)\overline{\xi}_x-m\theta\overline{\xi}_x\Big]\,dx=\int_0^L \rho_1 f_2\overline{\xi}\,dx,$$

ou seja,

$$\int_0^L k\varphi_x\overline{\xi}_x\,dx=\int_0^L \Big[\rho_1 f_2\overline{\xi}-k\psi\overline{\xi}_x+m\theta\overline{\xi}_x\Big]\,dx,$$

usando integração por partes obtemos

$$\int_0^L \varphi_x\overline{\xi}_x\,dx=-\int_0^L \underbrace{\left[\frac{1}{k}\Big(-\rho_1 f_2-k\psi_x+m\theta_x\Big)\right]}_{(A_1)}\overline{\xi}\,dx,\ \forall\xi\in C_0^1. \qquad (3.84)$$

Como (A_1) é composto por funções de L^2, $\varphi_x\in L^2$ e vale (3.84), segue da definição de derivada fraca que $\varphi_x\in H^1$, de onde $\varphi\in H^2$, e, além disso,

$$\varphi_{xx}=\frac{1}{k}\Big(-\rho_1 f_2-k\psi_x+m\theta_x\Big),$$

ou seja, vale (3.79).
Agora, aplicando (3.83), para $\tilde{\psi}=\xi\in C_0^1\subset H_0^1$ e $\tilde{\varphi}=\tilde{\theta}=\tilde{\vartheta}=0$, obtemos:

$$\int_0^L \Big[k(\varphi_x+\psi)\overline{\xi}-m\theta\overline{\xi}+b\psi_x\overline{\xi}_x-\sigma\vartheta\overline{\xi}_x\Big]\,dx=\int_0^L \rho_2 f_4\overline{\xi}\,dx,$$

onde usando integração por partes obtemos

$$\int_0^L \psi_x\overline{\xi}_x\,dx=-\int_0^L \underbrace{\left[\frac{1}{b}\Big(-\rho_2 f_4+k(\varphi_x+\psi)-m\theta+\sigma\vartheta_x\Big)\right]}_{(A_2)}\overline{\xi}\,dx,\ \forall\xi\in C_0^1. \qquad (3.85)$$

Como (A_2) é composto por funções de L^2, $\psi_x\in L^2$ e vale (3.85), segue que $\psi_x\in H^1$, de onde obtemos que $\psi\in H^2$ e, mais ainda,

$$\psi_{xx}=\frac{1}{b}\Big(-\rho_2 f_4+k(\varphi_x+\psi)-m\theta+\sigma\vartheta_x\Big),$$

ou seja, vale (3.80).

Considerando (3.83) para $\tilde{\theta} = \xi \in C_0^1$ e $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} = \tilde{\vartheta} = 0$, segue que

$$\int_0^L c_0 \theta_x \overline{\xi}_x \, dx = \int_0^L \big[m((f_1)_x + f_3) + \rho_3 f_5\big] \overline{\xi} \, dx,$$

ou seja,

$$\int_0^L \theta_x \overline{\xi}_x \, dx = - \int_0^L \underbrace{\left[\frac{1}{c_0} \Big[- m((f_1)_x + f_3) - \rho_3 f_5 \Big] \right]}_{(A_3)} \overline{\xi} \, dx, \; \forall \xi \in C_0^1. \tag{3.86}$$

Como (A_3) é composto por funções de L^2, $\theta_x \in L^2$ e vale (3.86) segue que $\theta_x \in H^1$, de onde $\theta \in H^2$ e, mais ainda,

$$\theta_{xx} = \frac{1}{c_0} \Big(- m((f_1)_x + f_3) - \rho_3 f_5 \Big),$$

ou seja, vale (3.81).
Por fim, usando (3.83), em particular para $\tilde{\vartheta} = \xi \in C_0^1$ e $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} = \tilde{\theta} = 0$, obtemos

$$\int_0^L c_1 \vartheta_x \overline{\xi}_x \, dx = \int_0^L \Big(\sigma(f_3)_x + \rho_4 f_6 \Big) \overline{\xi} \, dx,$$

ou ainda,

$$\int_0^L \vartheta_x \overline{\xi}_x \, dx = - \int_0^L \underbrace{\left[\frac{1}{c_1} \Big(- \sigma(f_3)_x - \rho_4 f_6 \Big) \right]}_{(A_4)} \overline{\xi} \, dx, \; \forall \xi \in C_0^1. \tag{3.87}$$

Como (A_4) é composto por funções de L^2, $\vartheta_x \in L^2$ e vale (3.87) segue que $\vartheta_x \in H^1$, de onde $\vartheta \in H^2$ e, mais ainda,

$$\vartheta_{xx} = \frac{1}{c_1} \Big(- \sigma(f_3)_x - \rho_4 f_6 \Big),$$

ou seja, vale (3.82). Logo, $(\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \vartheta) \in D(A)$ e é solução de (3.73)-(3.78), como queríamos. □

Lema 3.13. *Seja* $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *definido em* (3.38)-(3.39). *Então, o operador* $-A$ *é bijetor.*

Demonstração. Dado $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \in \mathcal{H}$ precisamos encontrar um único $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \vartheta) \in D(A)$ que é solução de $-AU = F$, ou equivalentemente, que é solução do sistema

$$-\Phi = f_1, \tag{3.88}$$

$$-k(\varphi_x + \psi)_x + m\theta_x = \rho_1 f_2, \tag{3.89}$$

$$-\Psi = f_3, \tag{3.90}$$

$$-b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \sigma\vartheta_x = \rho_2 f_4, \tag{3.91}$$

$$-c_0\theta_{xx} + m(\Phi_x + \Psi) = \rho_3 f_5, \tag{3.92}$$

$$-c_1\vartheta_{xx} + \sigma\Psi_x = \rho_4 f_6. \tag{3.93}$$

De (3.88) e (3.90) consideremos $\Phi = -f_1 \in H^1_*$ e $\Psi = -f_3 \in H^1_0$. Substituindo em (3.89), (3.91)-(3.93), obtemos:

$$-k(\varphi_x + \psi)_x + m\theta_x = \rho_1 f_2, \tag{3.94}$$

$$-b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \sigma\vartheta_x = \rho_2 f_4, \tag{3.95}$$

$$-c_0\theta_{xx} = \rho_3 f_5 + m((f_1)_x + f_3), \tag{3.96}$$

$$-c_1\vartheta_{xx} = \rho_4 f_6 + \sigma(f_3)_x. \tag{3.97}$$

Considere a forma sesquilinear

$$\tilde{a} : (H^1_* \times H^1_0 \times H^1_0 \times H^1_*) \times (H^1_* \times H^1_0 \times H^1_0 \times H^1_*) \to \mathbb{K}$$

definida por

$$\begin{aligned} \tilde{a}((\varphi,\psi,\theta,\vartheta),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta},\tilde{\vartheta})) &= \int_0^L \left[k(\varphi_x+\psi)\overline{(\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi})} - m\theta\overline{(\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi})}\right] dx \\ &+ \int_0^L \left[b\psi_x\overline{\tilde{\psi}_x} - \sigma\vartheta\overline{\tilde{\psi}_x} + c_0\theta_x\overline{\tilde{\theta}_x} + c_1\vartheta_x\overline{\tilde{\vartheta}_x}\right] dx. \end{aligned}$$

Analogamente à demonstração do Lema 3.12, obtemos que $\tilde{a}$ é uma forma contínua e coerciva. Agora, considere o funcional antilinear $\tilde{\phi} : H^1_* \times H^1_0 \times H^1_0 \times H^1_* \to \mathbb{K}$ dado por

$$\tilde{\phi}(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta},\tilde{\vartheta}) = \int_0^L \left[\rho_1 f_2\overline{\tilde{\varphi}} + \rho_2 f_4\overline{\tilde{\psi}} + (m((f_1)_x + f_3) + \rho_3 f_5)\overline{\tilde{\theta}} + (\sigma(f_3)_x + \rho_4 f_6)\overline{\tilde{\vartheta}}\right] dx.$$

Observe que, de maneira análoga a (3.19), obtemos que $\tilde{\phi}$ é contínuo. Logo, pelo Teorema de Lax-Milgram, temos que existe único $(\varphi,\psi,\theta,\vartheta) \in H^1_* \times H^1_0 \times H^1_0 \times H^1_*$ tal que

$$a((\varphi,\psi,\theta,\vartheta),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta},\tilde{\vartheta})) = \phi((\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta},\tilde{\vartheta})),\ \forall(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta},\tilde{\vartheta}) \in H^1_* \times H^1_0 \times H^1_0 \times H^1_*, \tag{3.98}$$

ou seja, existe única $(\varphi, \psi, \theta, \vartheta) \in H^1_* \times H^1_0 \times H^1_0 \times H^1_*$ que é solução de

$$\begin{aligned} &\int_0^L \Big[k(\varphi_x + \psi)\overline{(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi})} - m\theta\overline{(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi})} + b\psi_x\overline{\tilde{\psi}_x} - \sigma\vartheta\overline{\tilde{\psi}_x} + c_0\theta_x\overline{\tilde{\theta}_x} + c_1\vartheta_x\overline{\tilde{\vartheta}_x}\Big]\,dx \\ = &\int_0^L \Big[\rho_1 f_2\overline{\tilde{\varphi}} + \rho_2 f_4\overline{\tilde{\psi}} + (m((f_1)_x + f_3) + \rho_3 f_5)\overline{\tilde{\theta}} + (\sigma(f_3)_x + \rho_4 f_6)\overline{\tilde{\vartheta}}\Big]\,dx. \end{aligned} \tag{3.99}$$

Considere $\xi \in H^1$ qualquer e defina

$$\tilde{\xi}(x) = \xi(x) - \frac{1}{L}\int_0^L \xi(t)\,dt, \quad \forall x \in (0, L).$$

Note que $\tilde{\xi} \in H^1$ e de (3.46) obtemos que $\displaystyle\int_0^L \tilde{\xi}(x)\,dx = 0$, de onde temos que $\tilde{\xi} \in H^1_*$. Considerando (3.99), em particular, para $\tilde{\varphi} = \tilde{\xi} \in H^1_*$ e $\tilde{\psi} = \tilde{\theta} = \tilde{\vartheta} = 0$ temos que:

$$\int_0^L \Big[k(\varphi_x + \psi)\overline{\tilde{\xi}_x} - m\theta\overline{\tilde{\xi}_x}\Big]\,dx = \int_0^L \rho_1 f_2\overline{\tilde{\xi}}\,dx,$$

ou seja,

$$\int_0^L \left[k(\varphi_x + \psi)\overline{\xi}_x - m\theta\overline{\xi}_x\right]dx = \int_0^L \rho_1 f_2 \overline{\left(\xi - \frac{1}{L}\int_0^L \xi(t)\,dt\right)}\,dx, \tag{3.100}$$

para qualquer $\xi \in H^1$. Como, neste caso, $f_2 \in L^2_*$, logo de (3.100) segue que

$$k\int_0^L \varphi_x\overline{\xi}_x\,dx = \int_0^L \Big[\rho_1 f_2\overline{\xi} - k\psi\overline{\xi}_x + m\theta\overline{\xi}_x\Big]\,dx,$$

para qualquer $\xi \in H^1$. Usando integração por partes temos

$$\int_0^L \varphi_x\overline{\xi}_x\,dx = -\int_0^L \underbrace{\left[\frac{1}{k}\Big(-\rho_1 f_2 - k\psi_x + m\theta_x\Big)\right]}_{(A_5)}\overline{\xi}\,dx, \tag{3.101}$$

para qualquer $\xi \in H^1$. Sabemos que (3.101) é válido, em particular, para $\xi \in C^1_0 \subset H^1$. Logo como (A_5) é composto por funções de L^2, $\varphi_x \in L^2$ e vale (3.101) para qualquer $\xi \in C^1_0$, segue da definição de derivada fraca que $\varphi_x \in H^1$, de onde $\varphi \in H^2$ e, além disso,

$$\varphi_{xx} = \frac{1}{k}\Big(-\rho_1 f_2 - k\psi_x + m\theta_x\Big), \tag{3.102}$$

ou seja, vale (3.94).

Sabendo que $\varphi \in H^2$, usando integração por partes em (3.101) temos que

$$\varphi_x\overline{\xi}\Big|_0^L - \int_0^L \varphi_{xx}\overline{\xi}\,dx = -\int_0^L \left[\frac{1}{k}\Big(- \rho_1 f_2 - k\psi_x + m\theta_x\Big)\right]\overline{\xi}\,dx,$$

e usando (3.102), segue que

$$\varphi_x(L)\overline{\xi}(L) - \varphi_x(0)\overline{\xi}(0) = 0, \tag{3.103}$$

para qualquer $\xi \in H^1$. Tomando, em particular, $\xi \in C^1[0,L]$ tal que

$$\overline{\xi}(0) = 0 \quad \text{e} \quad \overline{\xi}(L) = 1,$$

segue de (3.103) que $\varphi_x(L) = 0$. Por outro lado, tomando $\xi \in C^1[0,L]$ com

$$\overline{\xi}(0) = 1 \quad \text{e} \quad \overline{\xi}(L) = 0,$$

temos em (3.103) que $\varphi_x(0) = 0$. Portanto, $\varphi_x \in H_0^1$.
Agora, considerando (3.99) em particular para $\tilde{\psi} = \xi \in C_0^1 \subset H_0^1$ e $\tilde{\varphi} = \tilde{\theta} = \tilde{\vartheta} = 0$, obtemos:

$$\int_0^L \Big[k(\varphi_x + \psi)\overline{\xi} - m\theta\overline{\xi} + b\psi_x\overline{\xi}_x - \sigma\vartheta\overline{\xi}_x\Big]\,dx = \int_0^L \rho_2 f_4\overline{\xi}\,dx,$$

onde usando integração por partes obtemos

$$\int_0^L \psi_x\overline{\xi}_x\,dx = -\int_0^L \underbrace{\left[\frac{1}{b}\Big(- \rho_2 f_4 + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \sigma\vartheta_x\Big)\right]}_{(A_6)}\overline{\xi}\,dx,\ \forall \xi \in C_0^1. \tag{3.104}$$

Como (A_6) é composto por funções de L^2, $\psi_x \in L^2$ e vale (3.104), segue que $\psi_x \in H^1$, de onde obtemos que $\psi \in H^2$ e, mais ainda,

$$\psi_{xx} = \frac{1}{b}\Big(- \rho_2 f_4 + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \sigma\vartheta_x\Big),$$

ou seja, vale (3.95).
Considerando (3.99) para $\tilde{\theta} = \xi \in C_0^1$ e $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} = \tilde{\vartheta} = 0$, segue que

$$\int_0^L c_0\theta_x\overline{\xi}_x\,dx = \int_0^L \big[m((f_1)_x + f_3) + \rho_3 f_5\big]\overline{\xi}\,dx,$$

ou seja,

$$\int_0^L \theta_x \overline{\xi}_x dx = -\int_0^L \underbrace{\left[\frac{1}{c_0}\Big(-m((f_1)_x + f_3) - \rho_3 f_5\Big)\right]}_{(A_7)} \overline{\xi}\, dx,\ \forall \xi \in C_0^1. \tag{3.105}$$

Como (A_7) é composto por funções de L^2, $\theta_x \in L^2$ e vale (3.105) segue que $\theta_x \in H^1$, de onde $\theta \in H^2$ e, mais ainda,

$$\theta_{xx} = \frac{1}{c_0}\Big(-m((f_1)_x + f_3) - \rho_3 f_5\Big),$$

ou seja, vale (3.96).
Considerando novamente $\xi \in H^1$ arbitrária, defina para todo $x \in (0, L)$

$$\tilde{\xi}(x) = \xi(x) - \frac{1}{L}\int_0^L \xi(t)\, dt.$$

Então $\tilde{\xi} \in H^1_*$, pois já vimos em (3.46) que $\displaystyle\int_0^L \tilde{\xi}(x)\, dx = 0$.
Aplicando (3.99), em particular, para $\tilde{\vartheta} = \tilde{\xi} \in H^1_*$ e $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} = \tilde{\theta} = 0$, segue que

$$\int_0^L c_1 \vartheta_x \overline{\tilde{\xi}}_x\, dx = \int_0^L \big[\sigma(f_3)_x + \rho_4 f_6\big]\overline{\tilde{\xi}}\, dx,$$

ou seja,

$$c_1\int_0^L \vartheta_x \overline{\xi}_x\, dx = \int_0^L \big[\sigma(f_3)_x + \rho_4 f_6\big]\overline{\xi}\, dx - \frac{1}{L}\left[\overline{\int_0^L \xi(t)\, dt}\right]\left[\int_0^L \big[\sigma(f_3)_x + \rho_4 f_6\big]\, dx\right],$$

para qualquer $\xi \in H^1$. Lembrando que $f_3 \in H^1_0$ e $f_6 \in L^2_*$, segue que

$$\int_0^L \vartheta_x \overline{\xi}_x dx = -\int_0^L \underbrace{\left[\frac{1}{c_1}\Big(-\sigma(f_3)_x - \rho_4 f_6\Big)\right]}_{(A_8)} \overline{\xi}\, dx, \tag{3.106}$$

para qualquer $\xi \in H^1$. Sabemos que (3.106) é válido, em particular, para $\xi \in C_0^1$ e como (A_8) é composto por funções de L^2, $\vartheta_x \in L^2$, segue que $\vartheta_x \in H^1$, de onde $\vartheta \in H^2$ e, mais ainda,

$$\vartheta_{xx} = \frac{1}{c_1}\Bigg(-\sigma(f_3)_x - \rho_4 f_6\Bigg), \tag{3.107}$$

ou seja, vale (3.97).

Além disso, usando integração por partes em (3.106), segue que

$$\vartheta_x\overline{\xi}\Big|_0^L - \int_0^L \vartheta_{xx}\overline{\xi}\,dx = -\int_0^L \left[\frac{1}{c_1}\Big(-\sigma(f_3)_x - \rho_4 f_6\Big)\overline{\xi}\right] dx,$$

para qualquer $\xi \in H^1$. Sendo assim, por (3.107), obtemos para qualquer $\xi \in H^1$ que

$$\vartheta_x(L)\overline{\xi}(L) - \vartheta_x(0)\overline{\xi}(0) = 0. \tag{3.108}$$

Tomando $\xi \in C^1[0,L]$ com $\overline{\xi}(0) = 0$ e $\overline{\xi}(L) = 1$ em (3.108), obtemos que $\vartheta_x(L) = 0$. Por outro lado, tomando $\overline{\xi} \in C^1[0,L]$ com $\overline{\xi}(0) = 1$ e $\overline{\xi}(L) = 0$, obtemos que $\vartheta_x(0) = 0$. Logo, $\vartheta_x \in H_0^1$, o que conclui a demonstração do lema.

□

Lema 3.14. *Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido em* (3.11)-(3.12)*. Então, o operador $(-A)^{-1}$ é limitado em $\mathcal{H}$.*

Demonstração. Precisamos mostrar que existe $C > 0$ tal que $\|(-A)^{-1}(F)\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}$, para todo $F \in \mathcal{H}$. Mas como $-A$ é bijetor temos que dado $F \in H$ existe um único $U \in D(A)$ tal que $-AU = F$, ou seja, $(-A)^{-1}F = U$. Além disso, U satisfaz o sistema:

$$-\Phi = f_1, \tag{3.109}$$

$$-k(\varphi_x + \psi)_x + m\theta_x = \rho_1 f_2, \tag{3.110}$$

$$-\Psi = f_3, \tag{3.111}$$

$$-b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \sigma\vartheta_x = \rho_2 f_4, \tag{3.112}$$

$$-c_0\theta_{xx} + m(\Phi_x + \Psi) = \rho_3 f_5, \tag{3.113}$$

$$-c_1\vartheta_{xx} + \sigma\Psi_x = \rho_4 f_6. \tag{3.114}$$

No que segue, as constantes $C_j, j = 1, ...9$, dependem apenas dos coeficientes do sistema e da constante de Poincaré c_p.
Usando (3.109) e as desigualdades Triangular e de Poincaré, obtemos que

$$\|\Phi\|^2 = \|f_1\|^2 \leq c_p\|(f_1)_x\|^2 \leq 2c_p\|(f_1)_x + f_3\|^2 + 2c_p^2\|(f_3)_x\|^2 \leq C_1\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{3.115}$$

Analogamente, de (3.111) obtemos que

$$\|\Psi\|^2 = \|f_3\|^2 \leq c_p\|(f_3)_x\|^2 \leq C_2\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{3.116}$$

Multiplicando (3.114) por ϑ, integrando em $(0,L)$, usando integração por partes e o fato que $\Psi = -f_3$, obtemos

$$c_1(\vartheta_x, \vartheta_x) = (\rho_4 f_6 + \sigma(f_3)_x, \vartheta).$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Scharwz, temos que

$$c_1\|\vartheta_x\|^2 \leq |(\rho_4 f_6 + \sigma(f_3)_x, \vartheta)| \leq \|\rho_4 f_6 + \sigma(f_3)_x\|\|\vartheta\|.$$

Agora, usando as desigualdades de Poincaré e Triangular segue que

$$\|\vartheta\|^2 \leq c_p\|\vartheta_x\|^2 \leq \frac{c_p}{c_1}\Big[\rho_4\|f_6\|\|\vartheta\| + \sigma\|(f_3)_x\|\|\vartheta\|\Big] \leq C_3\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.117}$$

Multiplicando (3.113) por θ, integrando em $(0, L)$, usando integração por partes e o fato que $\Phi = -f_1$ e $\Psi = -f_3$, obtemos

$$c_0(\theta_x, \theta_x) = (\rho_3 f_5 + m(f_1)_x + mf_3, \theta).$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Scharwz obtemos

$$c_0\|\theta_x\|^2 \leq |(\rho_3 f_5 + m(f_1)_x + mf_3, \theta)| \leq \|\rho_3 f_5 + m(f_1)_x + mf_3\|\|\theta\|,$$

e pelas desigualdades de Poincaré e Triangular, temos que

$$\|\theta\|^2 \leq c_p\|\theta_x\|^2 \leq \frac{c_p}{c_0}\Big[\rho_3\|f_5\|\|\theta\| + m\|(f_1)_x\|\|\theta\| + m\|f_3\|\|\theta\|\Big] \leq C_4\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.118}$$

Agora, multiplicando (3.112) por ψ, integrando em $(0, L)$ e usando integração por partes, segue que

$$b(\psi_x, \psi_x) + k(\varphi_x + \psi, \psi) - m(\theta, \psi) - \sigma(\vartheta, \psi_x) = \rho_2(f_4, \psi). \tag{3.119}$$

Por outro lado, multiplicando (3.110) por φ, integrando em $(0, L)$ e usando integração por partes, segue que

$$k(\varphi_x + \psi, \varphi_x) - m(\theta, \varphi_x) = \rho_1(f_2, \varphi). \tag{3.120}$$

Somando (3.119) e (3.120) obtemos

$$b(\psi_x, \psi_x) + k(\varphi_x + \psi, \varphi_x + \psi) - m(\theta, \varphi_x + \psi) - \sigma(\vartheta, \psi_x) = \rho_2(f_4, \psi) + \rho_1(f_2, \varphi),$$

ou seja,

$$b\|\psi_x\|^2 + k\|\varphi_x + \psi\|^2 - m(\theta, \varphi_x + \psi) - \sigma(\vartheta, \psi_x) = \rho_2(f_4, \psi) + \rho_1(f_2, \varphi).$$

Usando as desigualdades de Holder e Poincaré, obtemos

$$b\|\psi_x\|^2 + k\|\varphi_x + \psi\|^2 \leq m\|\theta\|\|\varphi_x + \psi\| + \sigma\|\vartheta\|\|\psi_x\| + \rho_2 c_p\|f_4\|\|\psi_x\| + \rho_1 c_p\|f_2\|\|\varphi_x\|,$$

e aplicando a Desigualdade de Young para $\epsilon_1 = \dfrac{k}{2}$ e $\epsilon_2 = \dfrac{b}{2}$, segue que

$$b\|\psi_x\|^2 + k\|\varphi_x + \psi\|^2 \leq \frac{k}{2}\|\varphi_x + \psi\|^2 + \frac{m^2}{2k}\|\theta\|^2 + \frac{b}{2}\|\psi_x\|^2 + \frac{\sigma^2}{2b}\|\vartheta\|^2 + C_5\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}},$$

ou seja,

$$\frac{b}{2}\|\psi_x\|^2 + \frac{k}{2}\|\varphi_x + \psi\|^2 \leq \frac{m^2}{2k}\|\theta\|^2 + \frac{\sigma^2}{2b}\|\vartheta\|^2 + C_5\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Logo, usando (3.117) e (3.118), obtemos

$$b\|\psi_x\|^2 + k\|\varphi_x + \psi\|^2 \leq C_6\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.121}$$

Dessa forma, de (3.115), (3.116), (3.117), (3.118) e (3.121), obtemos que

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + k\|\varphi_x + \psi\|^2 + \rho_3\|\theta\|^2 + \rho_4\|\vartheta\|^2 \\ &\leq C_7\|F\|^2 + C_8\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

e aplicando a Desigualdade de Young, temos que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_7\|F\|^2 + \frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{{C_8}^2}{2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_7\|F\|^2 + \frac{{C_8}^2}{2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Logo,

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_9\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Portanto, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|(-A)^{-1}(F)\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall F \in \mathcal{H}.$$

□

Lema 3.15. *Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido em* (3.38)-(3.39). *Então, o operador $(-A)^{-1}$ é limitado em $\mathcal{H}$.*

Demonstração. A demonstração é análoga a demonstração do Lema 3.14, observando que os termos pontuais de fronteira também se anulam. □

Lema 3.16. *Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido em* (3.11)-(3.12) *(ou em* (3.38)-(3.39)*). Então, $0 \in \rho(A)$.*

Demonstração. Dos lemas 3.12, 3.13, 3.14 e 3.15 temos que o operador $(-A)^{-1}$ existe e é limitado. Como $D((-A)^{-1}) = \mathcal{H}$ temos que $D((-A)^{-1})$ é denso em $\mathcal{H}$. Logo, $0 \in \rho(A)$. $\square$

Nosso próximo passo é mostrar que $i\beta \in \rho(A)$, para qualquer $\beta \in \mathbb{R}$ com $\beta \neq 0$. A fim de facilitar a demonstração desse resultado, mostraremos primeiro que o espectro $\sigma(A)$ do operador A é formado apenas por autovalores, onde $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ foi definido em (3.11)-(3.12) (ou em (3.38)-(3.39)).

Lema 3.17. *Seja* $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *definido em* (3.11)-(3.12)*. Então, o espectro* $\sigma(A)$ *do operador* A *é formado apenas por autovalores de* A*.*

Demonstração. Pelas proposições 2.30 e 2.32, basta mostrarmos que a aplicação inclusão

$$i : (D(A), \|.\|_{D(A)}) \to (\mathcal{H}, \|.\|_{\mathcal{H}})$$

é compacta. Para isso, considere $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada pela norma do gráfico em $D(A)$ tal que $U_n = (\varphi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n, \theta^n, \vartheta^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Precisamos mostrar que $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}'}$ que converge em $(\mathcal{H}, \|.\|_{\mathcal{H}})$ com $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$.
De (3.13), temos que

$$c_0\|\theta_x^n\|^2 + c_1\|\vartheta_x^n\|^2 = |Re(AU_n, U_n)_{\mathcal{H}}| \leq \frac{1}{2}\|AU_n\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}\|U_n\|^2_{\mathcal{H}} \leq \|U_n\|^2_{D(A)},$$

ou seja, $\{\theta_x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\vartheta_x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são limitadas em L^2. Por outro lado, note que

$$\begin{aligned}
\|U_n\|_{D(A)} &= \|U_n\|_{\mathcal{H}} + \|AU_n\|_{\mathcal{H}} \\
&= \|\varphi^n\|^2_{H_0^1} + \|\Phi^n\|^2 + \|\psi^n\|^2_{H_0^1} + \|\Psi^n\|^2 + \|\theta^n\|^2 + \|\vartheta^n\|^2 + \|\Phi^n\|^2_{H_0^1} \\
&+ \left\|\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x^n + \psi^n)_x - \frac{m}{\rho_1}\theta_x^n\right\|^2 + \|\Psi^n\|^2_{H_0^1} + \left\|\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}^n - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x^n + \psi^n) + \frac{m}{\rho_2}\theta^n - \frac{\sigma}{\rho_2}\vartheta_x^n\right\|^2 \\
&+ \left\|\frac{c_0}{\rho_3}\theta_{xx}^n - \frac{m}{\rho_3}(\Phi_x^n + \Psi^n)\right\|^2 + \left\|\frac{c_1}{\rho_4}\vartheta_{xx}^n - \frac{\sigma}{\rho_4}\Psi_x^n\right\|^2.
\end{aligned}$$

Assim $\{\varphi^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\psi^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são limitadas em H^1, e usando a Desigualdade Triangular obtemos que $\{\varphi_{xx}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\psi_{xx}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são limitadas em L^2.
Como $\{\varphi_{xx}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em L^2 e $\{\varphi^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em H^1 temos que $\{\varphi^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em H^2. Pelo Teorema 2.61 temos que $i : (H^2, \|.\|_{H^2}) \to (H^1, \|.\|_{H^1})$ é compacta, logo existe $\{\varphi^n\}_{n\in\mathbb{N}_1}$ subsequência de $\{\varphi^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\varphi \in H^1$ tais que $\|\varphi^n - \varphi\|_{H^1} \to 0$. Mas $\varphi^n \in H_0^1$ para todo $n \in \mathbb{N}_1$ e como H_0^1 é completo segue que $\varphi \in H_0^1$.
Analogamente obtemos que $\{\psi^n\}_{n\in\mathbb{N}_1}$ é limitada em H^2, de onde existem $\{\psi^n\}_{n\in\mathbb{N}_2}$ subsequência de $\{\psi^n\}_{n\in\mathbb{N}_1}$ e $\psi \in H^1$ tais que $\|\psi^n - \psi\|_{H^1} \to 0$. E como, $\psi^n \in H_0^1$ para todo $n \in \mathbb{N}_2$ obtemos que $\psi \in H_0^1$.
Observe ainda que a sequência $\{\Phi^n\}_{n\in\mathbb{N}_2}$ é limitada em H^1. Pelo Teorema 2.61 temos que a inclusão $i : (H^1, \|.\|_{H^1}) \to (C[0,L], \|.\|_\infty)$ é compacta, logo existe $\{\Phi^n\}_{n\in\mathbb{N}_3}$ subsequência de

$\{\Phi^n\}_{n\in\mathbb{N}_2}$ e $\Phi \in C[0,L]$ tais que $\|\Phi^n - \Phi\|_\infty \to 0$. Mas,

$$0 \le \|\Phi^n - \Phi\|^2 = \int_0^L |\Phi^n(x) - \Phi(x)|^2 dx \le \sup_{x\in[0,L]} |\Phi^n(x) - \Phi(x)|^2 L = L\|\Phi^n - \Phi\|_\infty^2,$$

de onde, $\|\Phi^n - \Phi\|^2 \to 0$. Como $\Phi^n \in L^2$ para todo $n \in \mathbb{N}_3$ e L^2 é completo segue que $\Phi \in L^2$. Seguindo o mesmo raciocínio e usando o fato que $\{\Psi^n\}_{n\in\mathbb{N}_3}$ é limitada em H^1, segue que existem $\{\Psi^n\}_{n\in\mathbb{N}_4}$ subsequência de $\{\Psi^n\}_{n\in\mathbb{N}_3}$e $\Psi \in L^2$ tais que $\|\Psi^n - \Psi\| \to 0$.
Agora, como $\{\theta_x^n\}_{n\in\mathbb{N}_4}$ e $\{\theta^n\}_{n\in\mathbb{N}_4}$ são limitadas em L^2 segue que $\{\theta^n\}_{n\in\mathbb{N}_4}$ é limitada em H^1. Analogamente aos casos anteriores obtemos que existem $\{\theta^n\}_{n\in\mathbb{N}_5}$ subsequência de $\{\theta^n\}_{n\in\mathbb{N}_4}$ e $\theta \in L^2$ tais que $\|\theta^n - \theta\| \to 0$.
Da mesma maneira, temos que $\{\vartheta^n\}_{n\in\mathbb{N}_5}$ é limitada em H^1, de onde existem $\{\vartheta^n\}_{n\in\mathbb{N}_6}$ subsequência de $\{\vartheta^n\}_{n\in\mathbb{N}_5}$ e $\vartheta \in L^2$ tais que $\|\vartheta^n - \vartheta\| \to 0$.
Considere $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \vartheta) \in \mathcal{H}$ e $\{U^n\}_{n\in\mathbb{N}'}$ subsequência de $\{U^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $\mathbb{N}' = \mathbb{N}_6$. Assim,

$$\begin{aligned} \|U^n - U\|_{\mathcal{H}} &= \|\varphi^n - \varphi\|_{H^1}^2 + \|\Phi^n - \Phi\|^2 + \|\psi^n - \psi\|_{H^1}^2 \\ &+ \|\Psi^n - \Psi\|^2 + \|\theta^n - \theta\|^2 + \|\vartheta^n - \vartheta\|^2 \to 0. \end{aligned}$$

Portanto, a subsequência $\{U^n\}_{n\in\mathbb{N}'}$ converge para U em $(\mathcal{H}, \|.\|_{\mathcal{H}})$. □

Lema 3.18. *Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido em* (3.38)-(3.39)*. Então, o espectro $\sigma(A)$ do operador A é formado apenas por autovalores de A.*

Demonstração. A demonstração é análoga a demonstração do Lema 3.17, observando que H_*^1 e L_*^2 também são completos. □

Lema 3.19. *Seja A definido em* (3.11)-(3.12) *(ou em* (3.38)-(3.39)*). Então, $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$.*

Demonstração. Seja $\beta \in \mathbb{R}$ arbitrário, precisamos mostrar que $i\beta \in \rho(A)$. Pelo Lema 3.16 temos que $0 \in \rho(A)$.
Considere $\beta \in \mathbb{R}$ com $\beta \neq 0$ e suponha que $i\beta \notin \rho(A)$. Logo, $i\beta \in \sigma(A)$. Pelos lemas 3.17 e 3.18 temos que $i\beta$ é autovalor de A, isto é, existe $U \in D(A)$ não nulo tal que $AU = i\beta U$. Dessa forma, temos que

$$Re(AU,U)_{\mathcal{H}} = Re(i\beta U,U)_{\mathcal{H}} = Re\big[i\beta(U,U)_{\mathcal{H}}\big] = Re\big[i\beta\|U\|_{\mathcal{H}}^2\big] = 0.$$

Por outro lado, já vimos que

$$Re(AU,U)_{\mathcal{H}} = -c_0\|\theta_x\|^2 - c_1\|\vartheta_x\|^2.$$

Logo,

$$0 = c_0\|\theta_x\|^2 + c_1\|\vartheta_x\|^2,$$

de onde segue que $\|\theta\|^2_{H_0^1} = \|\vartheta\|^2_{H_0^1} = 0$ e, consequentemente, $\theta = \vartheta = 0$.
Além disso, como $AU = i\beta U$, temos que U satisfaz a equação resolvente (3.66) com $F = 0$. Substituindo $\theta = \vartheta = 0$ e $F = 0$ em (3.66), obtemos

$$i\beta\varphi - \Phi = 0, \tag{3.122}$$

$$i\beta\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi)_x = 0, \tag{3.123}$$

$$i\beta\psi - \Psi = 0, \tag{3.124}$$

$$i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0, \tag{3.125}$$

$$m(\Phi_x + \Psi) = 0, \tag{3.126}$$

$$\sigma\Psi_x = 0. \tag{3.127}$$

De (3.122) e (3.124), obtemos que $\Phi = i\beta\varphi$ e $\Psi = i\beta\psi$. Além disso, de (3.126) segue que $\Phi_x + \Psi = 0$, de onde obtemos $\varphi_x = -\psi$. Usando esta igualdade em (3.123) obtemos que $i\beta\rho_1\Phi = 0$, logo $\varphi = \Phi = 0$.
De (3.127) segue que $\Psi_x = 0$, ou seja, $\psi_x = 0$. Assim de (3.125) obtemos que $i\beta\rho_2\Psi = 0$, ou seja, $\psi = \Psi = 0$.
Logo, $\varphi = \Phi = \psi = \Psi = 0$, ou seja, $U = 0$ o que é uma contradição. Portanto, $i\beta \in \rho(A)$ para qualquer $\beta \in \mathbb{R}$. □

Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido em (3.11)-(3.12) (ou em (3.38)-(3.39)). Nosso próximo passo é mostrar que $\lim\limits_{\beta\to\infty} \sup \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty$. Mas, observe que $\|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup\left\{\dfrac{\|(i\beta I - A)^{-1}F\|_{\mathcal{H}}}{\|F\|_{\mathcal{H}}}, F \in \mathcal{H}, F \neq 0\right\}$.

Além disso, como $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ temos que dada $F \in \mathcal{H}$ existe um único $U \in D(A)$ tal que $i\beta U - AU = F$, ou seja, $U = (i\beta I - A)^{-1}F$. Assim, dada $F \in \mathcal{H}$ vamos mostrar que existe $C > 0$ tal que $\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}$. Para isto, vamos inicialmente majorar cada parcela da norma de $\|U\|_{\mathcal{H}}$, como veremos nos próximos lemas.

Lema 3.20. *Se $U \in D(A)$ é solução da equação resolvente* (3.66)*, então existe uma constante $C_1 > 0$ tal que*

$$\|\theta_x\|^2 + \|\vartheta_x\|^2 \leq C_1\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Demonstração. De (3.66) e (3.13) temos que

$$\begin{aligned} Re(U,F)_{\mathcal{H}} &= Re(U, i\beta U - AU)_{\mathcal{H}} = Re(U, i\beta U)_{\mathcal{H}} - Re(U, AU)_{\mathcal{H}} \\ &= Re(-i\beta\|U\|^2_{\mathcal{H}}) - Re(U, AU)_{\mathcal{H}} \\ &= -Re(U, AU)_{\mathcal{H}} \\ &= c_0\|\theta_x\|^2 + c_1\|\vartheta_x\|^2, \end{aligned}$$

e pela Desigualdade de Cauchy Schwarz obtemos que

$$c_0\|\theta_x\|^2 + c_1\|\vartheta_x\|^2 \leq \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Logo,

$$\|\theta_x\|^2 + \|\vartheta_x\|^2 \leq C_1\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}},$$

onde $C_1 = \dfrac{1}{\min\{c_0, c_1\}}$. □

Podemos observar que o Lema 3.20 independe da condição de fronteira do problema. Para que isto continue sendo válido para os próximos resultados vamos considerar estimativas locais. Seja $l_0 \in (0, L)$ e $\delta > 0$ arbitrários tal que $(l_0 - \delta, l_0 + \delta) \subset (0, L)$. Considere uma função $s \in C^2(0, L)$ satisfazendo

$$supp(s) \subset (l_0 - \delta, l_0 + \delta), 0 \leq s(x) \leq 1, \forall x \in (0, L), \tag{3.128}$$

$$s(x) = 1, \forall x \in \left[l_0 - \frac{\delta}{2}, l_0 + \frac{\delta}{2}\right], \tag{3.129}$$

como mostra a figura abaixo:

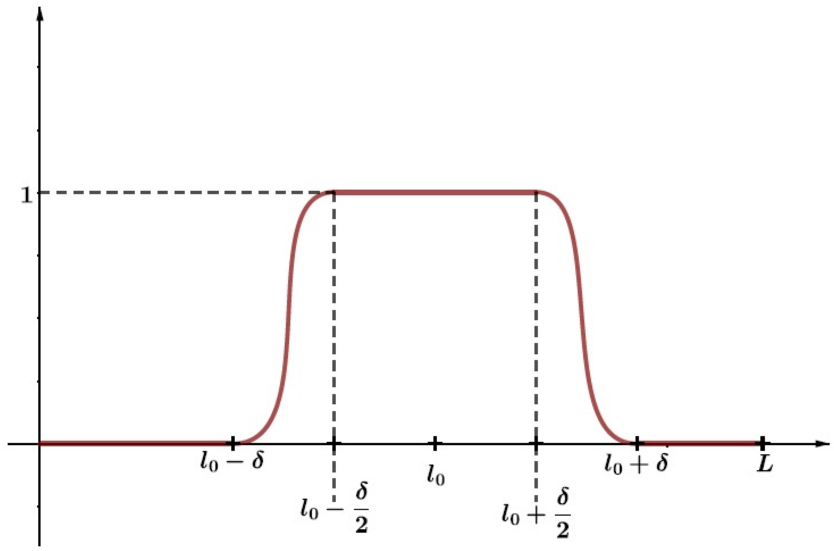

Figura 3.1: Gráfico da função s

Lema 3.21. *Se $U \in D(A)$ é solução da equação resolvente* (3.66)*, então dado $\epsilon > 0$ existe uma constante $C_\epsilon > 0$ tal que*

$$\int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}} \mid \varphi_x + \psi \mid^2 \, dx \leq \frac{\epsilon}{4}\|U\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon\|F\|^2_{\mathcal{H}}, \quad |\beta| > 1.$$

Demonstração. Usando as equações (3.67) e (3.69) obtemos que

$$\begin{aligned}\Phi &= i\beta\varphi - f_1,\\ \Psi &= i\beta\psi - f_3,\end{aligned}$$

e substituindo Φ e Ψ em (3.71), obtemos que

$$i\beta\rho_3\theta - c_0\theta_{xx} + mi\beta(\varphi_x+\psi) = \rho_3 f_5 + m((f_1)_x + f_3).$$

Multiplicando por $sk(\overline{\varphi_x+\psi})$ e integrando sobre $(0,L)$, segue que

$$\begin{aligned}&\int_0^L \left[i\beta\rho_3\theta sk(\overline{\varphi_x+\psi}) - c_0\theta_{xx}sk(\overline{\varphi_x+\psi}) + mi\beta(\varphi_x+\psi)sk(\overline{\varphi_x+\psi})\right]dx\\ =\ &\int_0^L \big[\rho_3 f_5 + m((f_1)_x+f_3)\big]sk(\overline{\varphi_x+\psi})\,dx,\end{aligned}$$

ou ainda, usando integração por partes temos que

$$\begin{aligned}i\beta mk\int_0^L s\mid\varphi_x+\psi\mid^2\,dx &= k\int_0^L s[\rho_3 f_5 + m((f_1)_x+f_3)]\overline{(\varphi_x+\psi)}\,dx\\ &+ k\rho_3\int_0^L s\theta[\overline{i\beta(\varphi_x+\psi)}]\,dx + kc_0\theta_x s(\overline{\varphi_x+\psi})\Big|_0^L\\ &- c_0\int_0^L \theta_x[sk(\overline{\varphi_x+\psi})]_x\,dx.\end{aligned}$$

Observe que devido a função s anula-se os termos de bordo na condição de fronteira (3.6). Logo,

$$\begin{aligned}i\beta mk\int_0^L s\mid\varphi_x+\psi\mid^2\,dx &= k\int_0^L s[\rho_3 f_5 + m((f_1)_x+f_3)]\overline{(\varphi_x+\psi)}\,dx\\ &+ k\rho_3\int_0^L s\theta[\overline{i\beta(\varphi_x+\psi)}]\,dx - c_0\int_0^L \theta_x[s'k(\overline{\varphi_x+\psi})]\,dx\\ &- c_0\int_0^L \theta_x[sk(\overline{\varphi_x+\psi})_x]\,dx.\end{aligned}\tag{3.130}$$

Considerando,

$$\begin{aligned}I_1 &= -c_0\int_0^L s\theta_x\big[k(\overline{\varphi_x+\psi})_x\big]\,dx,\\ I_2 &= k\rho_3\int_0^L s\theta\big[\overline{i\beta(\varphi_x+\psi)}\big]dx,\end{aligned}$$

obtemos em (3.130) que

$$\begin{aligned} i\beta mk\int_0^L s|\varphi_x+\psi|^2dx &= k\int_0^L s\big[\rho_3 f_5+m((f_1)_x+f_3)\big]\,(\overline{\varphi_x+\psi})\,dx \\ &- c_0k\int_0^L s'\theta_x(\overline{\varphi_x+\psi})\,dx+I_1+I_2. \end{aligned} \tag{3.131}$$

Pela equação (3.68) segue que

$$k(\overline{\varphi_x+\psi})_x=-i\beta\rho_1\overline{\Phi}+m\overline{\theta_x}-\rho_1\overline{f_2},$$

assim,

$$I_1=c_0i\beta\rho_1\int_0^L s\theta_x\overline{\Phi}\,dx-c_0m\int_0^L s|\theta_x|^2\,dx+c_0\rho_1\int_0^L s\theta_x\overline{f_2}\,dx. \tag{3.132}$$

Por outro lado, das equações (3.67) e (3.69) temos que

$$\overline{i\beta(\varphi_x+\psi)}=\overline{\Phi}_x+(\overline{f_1})_x+\overline{\Psi}+\overline{f_3},$$

onde substituindo em I_2 e usando integração por partes obtemos

$$I_2=k\rho_3 s\theta\overline{\Phi}\Big|_0^L-k\rho_3\int_0^L(s\theta)_x\overline{\Phi}\,dx+k\rho_3\int_0^L s\theta\overline{\Psi}\,dx+k\rho_3\int_0^L s\theta(\overline{(f_1)_x+f_3})\,dx,$$

ou seja,

$$I_2=-k\rho_3\int_0^L(s\theta)_x\overline{\Phi}\,dx+k\rho_3\int_0^L s\theta\overline{\Psi}\,dx+k\rho_3\int_0^L s\theta(\overline{(f_1)_x+f_3})\,dx. \tag{3.133}$$

Substituindo (3.132) e (3.133) em (3.131), segue que

$$i\beta km\int_0^L s|\varphi_x+\psi|^2\,dx=i\beta c_0\rho_1\int_0^L s\theta_x\overline{\Phi}\,dx+I_3, \tag{3.134}$$

onde

$$\begin{aligned} I_3 &= -c_0m\int_0^L s|\theta_x|^2\,dx-c_0k\int_0^L s'\theta_x(\overline{\varphi_x+\psi})\,dx-\rho_3k\int_0^L[s\theta]_x\overline{\Phi}\,dx \\ &+ \rho_3k\int_0^L s\theta\overline{\Psi}\,dx+\rho_3k\int_0^L s\theta(\overline{(f_1)_x+f_3})\,dx+c_0\rho_1\int_0^L s\theta_x\overline{f_2}\,dx \\ &+ k\int_0^L s[\rho_3f_5+m((f_1)_x+f_3)](\overline{\varphi_x+\psi})\,dx. \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leq c_0 m\int_0^L |s||\theta_x|^2\,dx + c_0k\int_0^L |s'||\theta_x||\overline{\varphi_x+\psi}|\,dx + \rho_3 k\int_0^L |(s\theta)_x||\overline{\Phi}|\,dx\\
&+ \rho_3 k\int_0^L |s||\theta||\overline{\Psi}|\,dx + \rho_3 k\int_0^L |s||\theta||\overline{(f_1)_x+f_3}|\,dx + c_0\rho_1\int_0^L |s||\theta_x||\overline{f_2}|\,dx\\
&+ k\int_0^L |s||\rho_3 f_5 + m((f_1)_x+f_3)||\overline{\varphi_x+\psi}|\,dx.
\end{aligned}$$

Assim, pela Desigualdade de Holder, usando a hipótese (3.128) e o fato que s' é limitada, segue que

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leq c_0 m\|\theta_x\|^2 + c_0ks_1\|\theta_x\|\|\varphi_x+\psi\| + \rho_3k\|\theta_x\|\|\Phi\| + k\rho_3s_1\|\theta\|\|\Phi\| + \rho_3k\|\theta\|\|\Psi\|\\
&+ \rho_3k\|\theta\|\|(f_1)_x+f_3\| + c_0\rho_1\|\theta_x\|\|f_2\| + k\|\rho_3f_5+m((f_1)_x+f_3)\|\|\varphi_x+\psi\|,
\end{aligned}$$

em que $|s'(x)| \leq s_1, \forall x\in(0,L)$. Usando o Lema 3.20 e a Desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leq c_0mC_1\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + c_0ks_1C\|\theta_x\|\|U\|_{\mathcal{H}} + \rho_3kC\|\theta_x\|\|U\|_{\mathcal{H}} + k\rho_3s_1c_pC\|\theta_x\|\|U\|_{\mathcal{H}}\\
&+ \rho_3kc_pC\|\theta_x\|\|U\|_{\mathcal{H}} + \rho_3kc_pC\|\theta_x\|\|F\|_{\mathcal{H}} + c_0\rho_1C\|\theta_x\|\|F\|_{\mathcal{H}} + kC\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}\\
&\leq (c_0ks_1C + \rho_3kC + k\rho_3s_1c_pC + \rho_3kc_pC)\|\theta_x\|\|U\|_{\mathcal{H}} + (\rho_3kc_pC + c_0\rho_1C)\|\theta_x\|\|F\|_{\mathcal{H}}\\
&+ (c_0mC_1 + kC)\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\\
&\leq M_5(\|\theta_x\|\|U\|_{\mathcal{H}} + \|\theta_x\|\|F\|_{\mathcal{H}} + \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}), \qquad (3.135)
\end{aligned}$$

onde $M_5 = \max\{C(c_0ks_1 + \rho_3k + k\rho_3s_1c_p + \rho_3kc_p), C(\rho_3kc_p + c_0\rho_1), c_0mC_1 + Ck\}$, para alguma constante $C > 0$ dependendo apenas dos coeficientes do sistema.
Voltando em (3.134) e usando novamente (3.128), segue que

$$\begin{aligned}
|\beta|km\left|\int_0^L s|\varphi_x+\psi|^2\,dx\right| &\leq |i\beta c_0\rho_1|\int_0^L |s||\theta_x||\Phi|\,dx + |I_3|\\
&\leq |\beta|c_0\rho_1\|\theta_x\|\|\Phi\| + M_5\|\theta_x\|\|U\|_{\mathcal{H}}\\
&+ M_5\|\theta_x\|\|F\|_{\mathcal{H}} + M_5\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Assim obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^L s|\varphi_x+\psi|^2\,dx &\leq \frac{c_0\rho_1}{km}\|\theta_x\|\|\Phi\| + \frac{M_5}{|\beta|km}\|\theta_x\|\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{M_5}{|\beta|km}\|\theta_x\|\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{M_5}{|\beta|km}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}\\
&\leq M_6\|\theta_x\|\|\Phi\| + \frac{M_6}{|\beta|}\|\theta_x\|\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{M_6}{|\beta|}\|\theta_x\|\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{M_6}{|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \qquad (3.136)
\end{aligned}$$

onde $M_6 = \max\left\{\frac{c_0\rho_1}{km}, \frac{M_5}{km}\right\}$.

Usando (3.128) e o fato que $|\beta| > 1$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\varphi_x+\psi|^2\,dx &= \int_0^L s|\varphi_x+\psi|^2 dx\\ &\leq M_6\big(\|\theta_x\|\|\Phi\| + \|\theta_x\|\|U\|_{\mathcal{H}} + \|\theta_x\|\|F\|_{\mathcal{H}} + \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\big),\end{aligned}$$

de onde, aplicando a Desigualdade de Young para $\dfrac{\epsilon}{16}$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\varphi_x+\psi|^2\,dx &\leq M_6\big(2\|\theta_x\|\|U\|_{\mathcal{H}} + \|\theta_x\|\|F\|_{\mathcal{H}} + \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\big)\\ &\leq \frac{16M_6^2}{\epsilon}\|\theta_x\|^2 + \frac{\epsilon}{16}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\epsilon}{16}\|\theta_x\|^2 + \frac{4M_6^2}{\epsilon}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{4M_6^2}{\epsilon}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\epsilon}{16}\|U\|_{\mathcal{H}}^2.\end{aligned}$$

Usando o Lema 3.20 segue que

$$\begin{aligned}\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\varphi_x+\psi|^2\,dx &\leq \frac{16M_6^2C_1}{\epsilon}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{\epsilon}{16}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\epsilon C_1}{16}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\\ &+ \frac{4M_6^2}{\epsilon}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{4M_6^2}{\epsilon}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\epsilon}{16}\|U\|_{\mathcal{H}}^2,\end{aligned}$$

aplicando novamente a Desigualdade de Young com $\dfrac{\epsilon}{16}$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\varphi_x+\psi|^2\,dx &\leq \frac{\epsilon}{16}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\epsilon}{16}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\epsilon}{16}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2\\ &+ C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\epsilon}{16}\|U\|_{\mathcal{H}}^2\\ &\leq \frac{\epsilon}{4}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \qquad (3.137)\end{aligned}$$

Sabemos ainda, de (3.129), que

$$\left[l_0-\frac{\delta}{2}, l_0+\frac{\delta}{2}\right] \subset (l_0-\delta, l_0+\delta) \quad \text{e} \quad s(x)=1, \forall x \in \left[l_0-\frac{\delta}{2}, l_0+\frac{\delta}{2}\right].$$

Logo, de (3.137) obtemos

$$\int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}} |\varphi_x+\psi|^2\,dx \leq \frac{\epsilon}{4}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

□

Lema 3.22. *Se $U \in D(A)$ é solução da equação resolvente* (3.66)*, então dado $\epsilon > 0$ existe uma constante $C_\epsilon > 0$ tal que*

$$\int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}} |\Phi|^2\,dx \leq \left(\frac{\epsilon}{4} + \frac{C_4}{|\beta|^2}\right)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2, \quad |\beta| > 1,$$

para alguma constante $C_4 > 0$ que independe de $\epsilon > 0$.

Demonstração. Multiplicando (3.68) por $-s\overline{\varphi}$ e integrando sobre $(0, L)$, obtemos

$$\rho_1 \int_0^L i\beta\Phi(-s\overline{\varphi})\,dx - k\int_0^L (\varphi_x+\psi)_x(-s\overline{\varphi})\,dx + m\int_0^L \theta_x(-s\overline{\varphi})\,dx = \rho_1\int_0^L f_2(-s\overline{\varphi})\,dx,$$

e usando (3.67), ou seja, usando o fato que $-i\beta\overline{\varphi} = \overline{\Phi} + \overline{f_1}$, temos que

$$\rho_1 \int_0^L s\Phi(\overline{\Phi}+\overline{f_1})\,dx + k\int_0^L (\varphi_x+\psi)_x(s\overline{\varphi})\,dx - m\int_0^L s\theta_x\overline{\varphi}\,dx = -\rho_1\int_0^L sf_2\overline{\varphi}\,dx.$$

Integrando por partes, segue que

$$\begin{aligned} &\rho_1\int_0^L s|\Phi|^2\,dx + \rho_1\int_0^L s\Phi\overline{f_1}\,dx + k(\varphi_x+\psi)s\overline{\varphi}\Big|_0^L - k\int_0^L (\varphi_x+\psi)(s\overline{\varphi})_x\,dx \\ - \;& m\int_0^L s\theta_x\overline{\varphi}\,dx = -\rho_1\int_0^L sf_2\overline{\varphi}\,dx, \end{aligned}$$

ou melhor,

$$\rho_1\int_0^L s|\Phi|^2\,dx = -\rho_1\int_0^L s\Phi\overline{f_1}\,dx + k\int_0^L(\varphi_x+\psi)(s\overline{\varphi})_x\,dx + m\int_0^L s\theta_x\overline{\varphi}\,dx - \rho_1\int_0^L sf_2\overline{\varphi}\,dx,$$

usando novamente (3.67) e a derivação do produto, obtemos

$$\begin{aligned} \rho_1\int_0^L s|\Phi|^2\,dx &= -\rho_1\int_0^L s[\Phi\overline{f_1}+f_2\overline{\varphi}]\,dx + k\int_0^L(\varphi_x+\psi)(s'\overline{\varphi})\,dx \\ &+ k\int_0^L(\varphi_x+\psi)(s\overline{\varphi}_x)\,dx - m\frac{1}{i\beta}\int_0^L s\theta_x(\overline{\Phi}+\overline{f_1})\,dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \rho_1\int_0^L s|\Phi|^2\,dx &= -\rho_1\int_0^L s[\Phi\overline{f_1}+f_2\overline{\varphi}]\,dx + k\int_0^L(\varphi_x+\psi)(s'\overline{\varphi})\,dx \\ &+ k\int_0^L s(\varphi_x+\psi)(\overline{\varphi_x+\psi})\,dx - k\int_0^L s(\varphi_x+\psi)\overline{\psi}\,dx \\ &- \frac{m}{i\beta}\int_0^L s\theta_x(\overline{\Phi}+\overline{f_1})\,dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$\rho_1\int_0^L s|\Phi|^2\,dx = k\int_0^L s|\varphi_x+\psi|^2\,dx - k\int_0^L s(\varphi_x+\psi)\overline{\psi}\,dx + I_4 + I_5, \tag{3.138}$$

onde

$$
\begin{aligned}
I_4 &= -\rho_1 \int_0^L s[\Phi\overline{f_1} + f_2\overline{\varphi}]\,dx - \frac{m}{i\beta}\int_0^L s\theta_x(\overline{\Phi} + \overline{f_1})\,dx, \\
I_5 &= k\int_0^L (\varphi_x + \psi)(s'\overline{\varphi})\,dx.
\end{aligned}
$$

Usando as desigualdades de Holder e Triangular e (3.128), temos que:

$$
\begin{aligned}
|I_4| &\leq \rho_1 \int_0^L |s|\big|\Phi\overline{f_1} + f_2\overline{\varphi}\big|\,dx + \left|\frac{m}{i\beta}\right| \int_0^L |s|\big|\theta_x(\overline{\Phi} + \overline{f_1})\big|\,dx \\
&\leq \rho_1(\|\Phi\|\|f_1\| + \|f_2\|\|\varphi\|) + \frac{m}{|\beta|}\|\theta_x\|(\|\Phi\| + \|f_1\|) \\
&\leq \rho_1\overline{C}\big(\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}\big) + \frac{m\tilde{C}}{|\beta|}\|\theta_x\|\big(\|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}\big) \\
&\leq 2\rho_1\overline{C}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{m\tilde{C}}{|\beta|}\|\theta_x\|\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{m\tilde{C}}{|\beta|}\|\theta_x\|\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq C_2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_2}{|\beta|}\|\theta_x\|\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_2}{|\beta|}\|\theta_x\|\|F\|_{\mathcal{H}}, \qquad (3.139)
\end{aligned}
$$

onde $C_2 = \max\{2\rho_1\overline{C}, m\tilde{C}\}$ e $\overline{C}, \tilde{C} > 0$ são constantes dependendo apenas dos coeficientes do sistema. Além disso, temos que

$$
Re(I_5) = kRe\bigg[\int_0^L s'\varphi_x\overline{\varphi}\,dx\bigg] + kRe\bigg[\int_0^L s'\psi\overline{\varphi}\,dx\bigg]. \qquad (3.140)
$$

Observe que

$$
\int_0^L (s'\varphi\overline{\varphi})_x\,dx = s'\varphi\overline{\varphi}\Big|_0^L = 0. \qquad (3.141)
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\int_0^L (s'\varphi\overline{\varphi})_x\,dx &= \int_0^L (s'\varphi)_x\overline{\varphi}\,dx + \int_0^L (s'\varphi)\overline{\varphi}_x\,dx \\
&= \int_0^L s''\varphi\overline{\varphi}\,dx + \int_0^L s'\varphi_x\overline{\varphi}\,dx + \int_0^L s'\varphi\overline{\varphi}_x\,dx \\
&= \int_0^L s''\varphi\overline{\varphi}\,dx + 2Re\int_0^L s'\varphi_x\overline{\varphi}\,dx. \qquad (3.142)
\end{aligned}
$$

De (3.141) e (3.142) obtemos que

$$
0 = \int_0^L s''\varphi\overline{\varphi}\,dx + 2Re\bigg[\int_0^L s'\varphi_x\overline{\varphi}\,dx\bigg],
$$

ou seja,

$$Re\left[\int_0^L s'\varphi_x\overline{\varphi}\,dx\right] = -\frac{1}{2}\int_0^L s''\varphi\overline{\varphi}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^L s''|\varphi|^2\,dx.$$

Logo,

$$Re(I_5) = -\frac{1}{2}\int_0^L s''|\varphi|^2\,dx + kRe\left[\int_0^L s'\psi\overline{\varphi}\,dx\right],$$

e usando a Desigualdade de Holder temos que

$$|Re(I_5)| \;\leq\; \frac{1}{2}\int_0^L |s''||\varphi|^2\,dx + k\int_0^L |s'||\psi||\overline{\varphi}|\,dx \leq \frac{s_2}{2}\|\varphi\|^2 + ks_1\|\psi\|\|\varphi\|,$$

onde $|s''(x)| \leq s_2, \forall x \in (0, L)$. Usando (3.67) e (3.69) obtemos

$$|Re(I_5)| \;\leq\; \frac{s_2}{2}\left\|\frac{1}{i\beta}(\Phi + f_1)\right\|^2 + ks_1\left\|\frac{1}{i\beta}(\Psi + f_3)\right\|\left\|\frac{1}{i\beta}(\Phi + f_1)\right\|,$$

e pela Desigualdade de Young, segue que

$$|Re(I_5)| \;\leq\; \frac{s_2}{2|\beta|^2}\|\Phi + f_1\|^2 + \frac{ks_1}{2|\beta|^2}\big(\|\Psi + f_3\|^2 + \|\Phi + f_1\|^2\big).$$

Usando a Desigualdade Triangular e o fato que $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, obtemos

$$|Re(I_5)| \;\leq\; \frac{s_2}{2|\beta|^2}\big(2\|\Phi\|^2 + 2\|f_1\|^2\big) + \frac{ks_1}{2|\beta|^2}\big(2\|\Psi\|^2 + 2\|f_3\|^2 + 2\|\Phi\|^2 + 2\|f_1\|^2\big),$$

e usando a Desigualdade de Poincaré obtemos

$$\begin{aligned}
|Re(I_5)| \;&\leq\; \frac{1}{|\beta|^2}(s_2 + ks_1)\|\Phi\|^2 + \frac{1}{|\beta|^2}(s_2 + ks_1)\|f_1\|^2 + \frac{ks_1}{|\beta|^2}\|\Psi\|^2 + \frac{ks_1}{|\beta|^2}\|f_3\|^2 \\
&\leq\; \frac{1}{|\beta|^2}(s_2 + ks_1)\|U\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{1}{|\beta|^2}(s_2 + ks_1)c_p\|(f_1)_x + f_3\|^2 \\
&+\; \frac{1}{|\beta|^2}(s_2 + ks_1)c_p\|f_3\|^2 + \frac{ks_1}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{ks_1}{|\beta|^2}\|f_3\|^2 \\
&\leq\; \frac{1}{|\beta|^2}(s_2 + 2ks_1)\|U\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{1}{|\beta|^2}(s_2 + ks_1)c_p\|F\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{1}{|\beta|^2}(s_2c_p^2 + ks_1c_p^2 + ks_1c_p)\|(f_3)_x\|^2 \\
&\leq\; \frac{1}{|\beta|^2}(s_2 + 2ks_1)\|U\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{1}{|\beta|^2}(s_2 + ks_1)c_p\|F\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{1}{|\beta|^2}(s_2c_p^2 + ks_1c_p^2 + ks_1c_p)\|F\|^2_{\mathcal{H}} \\
&\leq\; \frac{1}{|\beta|^2}(s_2 + 2ks_1)\|U\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{1}{|\beta|^2}(s_2c_p + 2ks_1c_p + s_2c_p^2 + ks_1c_p^2)\|F\|^2_{\mathcal{H}} \\
&\leq\; \frac{C_3}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{C_3}{|\beta|^2}\|F\|^2_{\mathcal{H}}, \qquad (3.143)
\end{aligned}$$

onde aqui $C_3 = \max\big\{s_2 + 2ks_1, s_2c_p + 2ks_1c_p + s_2c_p^2 + ks_1c_p^2\big\}$.

Tomando a parte real em (3.138), segue que

$$\begin{aligned}\rho_1 Re\Big[\int_0^L s|\Phi|^2\,dx\Big] &= kRe\Big[\int_0^L s|\varphi_x+\psi|^2\,dx\Big] - kRe\Big[\int_0^L s(\varphi_x+\psi)\overline{\psi}\,dx\Big] + Re(I_4) + Re(I_5)\\ &\le k\Big|\int_0^L s|\varphi_x+\psi|^2\,dx\Big| + k\Big|\int_0^L s(\varphi_x+\psi)\overline{\psi}\,dx\Big| + |I_4| + |Re(I_5)|,\end{aligned}$$

e usando (3.139) e (3.143) segue que

$$\begin{aligned}\rho_1\int_0^L s|\Phi|^2\,dx &\le k\int_0^L s|\varphi_x+\psi|^2\,dx + k\int_0^L s|\varphi_x+\psi||\psi|\,dx + C_2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F|\|_{\mathcal{H}}\\ &+ \frac{C_2}{|\beta|}\|\theta_x\|\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_2}{|\beta|}\|\theta_x\|\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_3}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{C_3}{|\beta|^2}\|F\|^2_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Além disso, pela Desigualdade de Young temos que

$$\begin{aligned}\rho_1\int_0^L s|\Phi|^2\,dx &\le k\int_0^L s|\varphi_x+\psi|^2\,dx + \frac{k}{2}\int_0^L s|\varphi_x+\psi|^2\,dx + \frac{k}{2}\int_0^L s|\psi|^2\,dx + C_2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F|\|_{\mathcal{H}}\\ &+ \frac{C_2}{|\beta|}\|\theta_x\|\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_2}{|\beta|}\|\theta_x\|\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_3}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{C_3}{|\beta|^2}\|F\|^2_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

e usando o fato que $\psi = \dfrac{1}{i\beta}(\Psi + f_3)$ e observando que $supp(s) \subset (l_0-\delta, l_0+\delta)$, obtemos

$$\begin{aligned}\rho_1\int_0^L s|\Phi|^2\,dx &\le \frac{3k}{2}\int_0^L s|\varphi_x+\psi|^2\,dx + \frac{k}{2}\Big\|\frac{1}{i\beta}(\Psi+f_3)\Big\|^2 + C_2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\\ &+ \frac{C_2}{|\beta|}\|\theta_x\|\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_2}{|\beta|}\|\theta_x\|\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_3}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{C_3}{|\beta|^2}\|F\|^2_{\mathcal{H}},\\ &\le \frac{3k}{2}\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\varphi_x+\psi|^2\,dx + \frac{ck}{2|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{\tilde{c}k}{2|\beta|^2}\|F\|^2_{\mathcal{H}} + C_2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\\ &+ \frac{C_2}{|\beta|}\|\theta_x\|\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_2}{|\beta|}\|\theta_x\|\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_3}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{C_3}{|\beta|^2}\|F\|^2_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\Phi|^2\,dx &= \int_0^L s|\Phi|^2\,dx\\ &\le C_4\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\varphi_x+\psi|^2\,dx + C_4\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_4}{|\beta|}\|\theta_x\|\|U\|_{\mathcal{H}}\\ &+ \frac{C_4}{|\beta|}\|\theta_x\|\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_4}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{C_4}{|\beta|^2}\|F\|^2_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

onde $C_4 = \max\left\{\dfrac{3k}{2\rho_1}, \dfrac{kc+2C_3}{2\rho_1}, \dfrac{C_2}{\rho_1}, \dfrac{k\tilde{c}+2C_3}{2\rho_1}\right\}$.

Usando (3.136) e o fato que $|\beta| > 1$, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\Phi|^2\,dx &\leq C_4M_6\|\theta_x\|\|\Phi\| + \frac{C_4M_6}{|\beta|}\|\theta_x\|\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_4M_6}{|\beta|}\|\theta_x\|\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_4M_6}{|\beta|}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \\
&+ C_4\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_4}{|\beta|}\|\theta_x\|\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_4}{|\beta|}\|\theta_x\|\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_4}{|\beta|^2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C_4}{|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq m_1\|\theta_x\|\|U\|_{\mathcal{H}} + m_2\|\theta_x\|\|F\|_{\mathcal{H}} + m_3\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{C_4}{|\beta|^2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C_4}{|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2,
\end{aligned}$$

para constantes $m_1, m_2, m_3 > 0$. Aplicando a Desigualdade de Young com $\dfrac{\epsilon}{8}$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\Phi|^2\,dx &\leq \frac{2m_1^2}{\epsilon}\|\theta_x\|^2 + \frac{\epsilon}{8}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{m_2^2}{2}\|\theta_x\|^2 + \frac{1}{2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&+ m_3\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_4}{|\beta|^2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C_4}{|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.20 segue que

$$\begin{aligned}
\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\Phi|^2\,dx &\leq \frac{2m_1^2C_1}{\epsilon}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{\epsilon}{8}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{m_2^2C_1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&+ m_3\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_4}{|\beta|^2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C_4}{|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq c_\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \left(\frac{\epsilon}{8} + \frac{C_4}{|\beta|^2}\right)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \left(\frac{1}{2} + C_4\right)\|F\|_{\mathcal{H}}^2,
\end{aligned}$$

em que $c_\epsilon = \dfrac{2m_1^2C_1}{\epsilon} + \dfrac{m_2^2C_1}{2} + m_3$. Novamente pela Desigualdade de Young com $\dfrac{\epsilon}{8}$, obtemos

$$\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\Phi|^2\,dx \leq \frac{\epsilon}{8}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \left(\frac{\epsilon}{8} + \frac{C_4}{|\beta|^2}\right)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \left(\frac{1}{2} + C_4\right)\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Logo,

$$\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\Phi|^2\,dx \leq \left(\frac{\epsilon}{4} + \frac{C_4}{|\beta|^2}\right)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{3.144}$$

Como,

$$\left[l_0 - \frac{\delta}{2}, l_0 + \frac{\delta}{2}\right] \subset (l_0-\delta, l_0+\delta) \quad \text{e} \quad s(x) = 1, \forall x \in \left[l_0 - \frac{\delta}{2}, l_0 + \frac{\delta}{2}\right],$$

de (3.144) concluímos

$$\int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}} |\Phi|^2\,dx \leq \left(\frac{\epsilon}{4} + \frac{C_4}{|\beta|^2}\right)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

$\square$

Lema 3.23. *Se* $U \in D(A)$ *é solução da equação resolvente* (3.66)*, então dado* $\epsilon > 0$ *existe uma constante* $C_\epsilon > 0$ *tal que*

$$\int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}} |\psi_x|^2\,dx \ \leq \ \frac{\epsilon}{4}\|U\|^2_{\mathcal{H}} + C_\epsilon\|F\|^2_{\mathcal{H}}, \quad |\beta| > 1.$$

Demonstração. De (3.69) obtemos que $\Psi = i\beta\psi - f_3$. Substituindo em (3.72), vem que

$$\rho_4\vartheta - \frac{c_1}{i\beta}\vartheta_{xx} + \sigma\psi_x = \frac{\rho_4}{i\beta}f_6 + \frac{\sigma}{i\beta}(f_3)_x,$$

e multiplicando por $bs\psi_x$ em L^2, obtemos:

$$\begin{aligned} & \rho_4 b\int_0^L s\vartheta\overline{\psi}_x\,dx - \frac{c_1 b}{i\beta}\int_0^L s\vartheta_{xx}\overline{\psi}_x\,dx + \sigma b\int_0^L s|\psi_x|^2\,dx \\ = \ & \frac{\rho_4 b}{i\beta}\int_0^L sf_6\overline{\psi}_x\,dx + \frac{\sigma b}{i\beta}\int_0^L s(f_3)_x\overline{\psi}_x\,dx, \end{aligned}$$

de onde obtemos que

$$\begin{aligned} \sigma b\int_0^L s|\psi_x|^2\,dx \ &= \ \frac{\rho_4 b}{i\beta}\int_0^L sf_6\overline{\psi}_x\,dx + \frac{\sigma b}{i\beta}\int_0^L s(f_3)_x\overline{\psi}_x\,dx \\ &- \ \rho_4 b\int_0^L s\vartheta\overline{\psi}_x\,dx + \frac{c_1 b}{i\beta}\int_0^L s\vartheta_{xx}\overline{\psi}_x\,dx. \end{aligned}$$

Usando integração por partes temos que

$$\begin{aligned} \sigma b\int_0^L s|\psi_x|^2\,dx \ &= \ \frac{\rho_4 b}{i\beta}\int_0^L sf_6\overline{\psi}_x\,dx + \frac{\sigma b}{i\beta}\int_0^L s(f_3)_x\overline{\psi}_x\,dx - \rho_4 bs\vartheta\overline{\psi}\Big|_0^L \\ &+ \ \rho_4 b\int_0^L (s\vartheta)_x\overline{\psi}\,dx + \frac{c_1 b}{i\beta}s\vartheta_x\overline{\psi}_x\Big|_0^L - \frac{c_1 b}{i\beta}\int_0^L \vartheta_x(s\overline{\psi}_x)_x\,dx. \end{aligned} \tag{3.145}$$

Usando a função s para anular os termos pontuais de fronteira e usando a derivação do produto em (3.145), segue que

$$\begin{aligned} \sigma b\int_0^L s|\psi_x|^2\,dx \ &= \ \frac{\rho_4 b}{i\beta}\int_0^L sf_6\overline{\psi}_x\,dx + \frac{\sigma b}{i\beta}\int_0^L s(f_3)_x\overline{\psi}_x\,dx + \rho_4 b\int_0^L s'\vartheta\overline{\psi}\,dx \\ &+ \ \rho_4 b\int_0^L s\vartheta_x\overline{\psi}\,dx - \frac{c_1 b}{i\beta}\int_0^L s'\vartheta_x\overline{\psi}_x\,dx + J_1, \end{aligned} \tag{3.146}$$

onde

$$J_1 = -\frac{c_1}{i\beta}b\int_0^L s\vartheta_x\overline{\psi}_{xx}\,dx. \tag{3.147}$$

De (3.70) temos que

$$\psi_{xx} = -\frac{1}{b}\big(\rho_2 f_4 - i\beta\rho_2\Psi - k(\varphi_x+\psi) + m\theta - \sigma\vartheta_x\big). \tag{3.148}$$

Substituindo (3.148) em J_1, obtemos

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{c_1}{i\beta}\int_0^L s\vartheta_x\big(\rho_2\overline{f_4} + i\beta\rho_2\overline{\Psi} - k(\overline{\varphi_x+\psi}) + m\overline{\theta} - \sigma\overline{\vartheta}_x\big)\,dx \\
&= \frac{c_1\rho_2}{i\beta}\int_0^L s\vartheta_x\overline{f_4}\,dx + c_1\rho_2\int_0^L s\vartheta_x\overline{\Psi}\,dx - \frac{c_1 k}{i\beta}\int_0^L s\vartheta_x(\overline{\varphi_x+\psi})\,dx \\
&+ \frac{c_1 m}{i\beta}\int_0^L s\vartheta_x\overline{\theta}\,dx - \frac{c_1\sigma}{i\beta}\int_0^L s|\vartheta_x|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Retornando em (3.146), segue que

$$\begin{aligned}
\sigma b\int_0^L s|\psi_x|^2\,dx &= \frac{\rho_4 b}{i\beta}\int_0^L sf_6\overline{\psi}_x\,dx + \frac{b\sigma}{i\beta}\int_0^L s(f_3)_x\overline{\psi}_x\,dx + \rho_4 b\int_0^L s'\vartheta\overline{\psi}\,dx \\
&+ \rho_4 b\int_0^L s\vartheta_x\overline{\psi}\,dx - \frac{c_1 b}{i\beta}\int_0^L s'\vartheta_x\overline{\psi}_x\,dx + \frac{c_1\rho_2}{i\beta}\int_0^L s\vartheta_x\overline{f_4}\,dx \\
&+ c_1\rho_2\int_0^L s\vartheta_x\overline{\Psi}\,dx - \frac{c_1 k}{i\beta}\int_0^L s\vartheta_x(\overline{\varphi_x+\psi})\,dx + \frac{c_1 m}{i\beta}\int_0^L s\vartheta_x\overline{\theta}\,dx \\
&- \frac{c_1\sigma}{i\beta}\int_0^L s|\vartheta_x|^2\,dx,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\sigma b\int_0^L s|\psi_x|^2\,dx = c_1\rho_2\int_0^L s\vartheta_x\overline{\Psi}\,dx + J_2, \tag{3.149}$$

onde

$$\begin{aligned}
J_2 &= \frac{\rho_4 b}{i\beta}\int_0^L sf_6\overline{\psi}_x\,dx + \frac{\sigma b}{i\beta}\int_0^L s(f_3)_x\overline{\psi}_x\,dx + \rho_4 b\int_0^L s'\vartheta\overline{\psi}\,dx + \rho_4 b\int_0^L s\vartheta_x\overline{\psi}\,dx \\
&- \frac{c_1 b}{i\beta}\int_0^L s'\vartheta_x\overline{\psi}_x\,dx + \frac{c_1\rho_2}{i\beta}\int_0^L s\vartheta_x\overline{f_4}\,dx - \frac{c_1 k}{i\beta}\int_0^L s\vartheta_x(\overline{\varphi_x+\psi})\,dx \\
&+ \frac{c_1 m}{i\beta}\int_0^L s\vartheta_x\overline{\theta}\,dx - \frac{c_1\sigma}{i\beta}\int_0^L s|\vartheta_x|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Holder temos que

$$\begin{aligned}
|J_2| &\le \frac{\rho_4 b}{|\beta|}\|f_6\|\|\psi_x\| + \frac{\sigma b}{|\beta|}\|(f_3)_x\|\|\psi_x\| + \rho_4 b s_1\|\vartheta\|\|\psi\| + \rho_4 b\|\vartheta_x\|\|\psi\| \\
&+ \frac{c_1 b s_1}{|\beta|}\|\vartheta_x\|\|\psi_x\| + \frac{c_1\rho_2}{|\beta|}\|\vartheta_x\|\|f_4\| + \frac{c_1 k}{|\beta|}\|\vartheta_x\|\|\varphi_x+\psi\| + \frac{c_1 m}{|\beta|}\|\vartheta_x\|\|\theta\| + \frac{c_1\sigma}{|\beta|}\|\vartheta_x\|^2.
\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Poincaré e o fato que $|\beta| > 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
|J_2| &\leq \rho_4 b\|f_6\|\|\psi_x\| + \sigma b\|(f_3)_x\|\|\psi_x\| + \rho_4 b s_1 c_p^2\|\vartheta_x\|\|\psi_x\| \\
&+ \rho_4 b c_p\|\vartheta_x\|\|\psi_x\| + c_1 b s_1\|\vartheta_x\|\|\psi_x\| + c_1\rho_2\|\vartheta_x\|\|f_4\| \\
&+ c_1 k\|\vartheta_x\|\|\varphi_x + \psi\| + c_1 m\|\vartheta_x\|\|\theta\| + c_1\sigma\|\vartheta_x\|^2,
\end{aligned}$$

e pelo Lema 3.20 segue que

$$\begin{aligned}
|J_2| &\leq \rho_4 b\|f_6\|\|\psi_x\| + \sigma b\|(f_3)_x\|\|\psi_x\| + (\rho_4 b s_1 c_p^2 + \rho_4 b c_p + c_1 b s_1)\|\vartheta_x\|\|\psi_x\| \\
&+ c_1\rho_2\|\vartheta_x\|\|f_4\| + c_1 k\|\vartheta_x\|\|\varphi_x + \psi\| + c_1 m\|\vartheta_x\|\|\theta\| + c_1\sigma C_1\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|J_2| &\leq (\rho_4 b + \sigma b + c_1\sigma C_1)\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + c_1\rho_2\|\vartheta_x\|\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&+ (\rho_4 b s_1 c_p^2 + \rho_4 b c_p + c_1 b s_1 + c_1 k + c_1 m)\|\vartheta_x\|\|U\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq C_5\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C_5\|\vartheta_x\|\|U\|_{\mathcal{H}} + C_5\|\vartheta_x\|\|F\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

onde $C_5 = \max\left\{\rho_4 b + \sigma b + c_1\sigma C_1, \rho_4 b s_1 c_p^2 + \rho_4 b c_p + c_1 b s_1 + c_1 k + c_1 m, c_1\rho_2\right\}$.

Substituindo em (3.149) e usando a definição da s, segue que

$$\begin{aligned}
\sigma b\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\psi_x|^2\,dx &= \sigma b\int_0^L s|\psi_x|^2\,dx = \left|c_1\rho_2\int_0^L s\vartheta_x\overline{\Psi}\,dx + J_2\right| \\
&\leq c_1\rho_2\int_0^L |s||\vartheta_x||\overline{\Psi}|\,dx + |J_2| \\
&\leq c_1\rho_2\|\vartheta_x\|\|\Psi\| + C_5\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&+ C_5\|\vartheta_x\|\|U\|_{\mathcal{H}} + C_5\|\vartheta_x\|\|F\|_{\mathcal{H}}, \qquad (3.150)
\end{aligned}$$

e pela Desigualdade de Young com $\dfrac{\epsilon}{12}$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\psi_x|^2\,dx &\leq c_\epsilon\|\vartheta_x\|^2 + \frac{\epsilon}{12}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_5\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + c_\epsilon\|\vartheta_x\|^2 \\
&+ \frac{\epsilon}{12}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C_5^2}{2\sigma^2 b^2}\|\vartheta_x\|^2.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.20 segue que

$$\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\psi_x|^2\,dx \leq \tilde{C}_\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{2\epsilon}{12}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

e, novamente pela Desigualdade de Young com $\frac{\epsilon}{12}$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\psi_x|^2\,dx &\leq \frac{\epsilon}{12}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{2\epsilon}{12}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2,\\ &= \frac{\epsilon}{4}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2.\end{aligned}$$

Como,

$$\left[l_0-\frac{\delta}{2}, l_0+\frac{\delta}{2}\right] \subset (l_0-\delta, l_0+\delta) \quad \text{e} \quad s(x)=1, \forall x \in \left[l_0-\frac{\delta}{2}, l_0+\frac{\delta}{2}\right],$$

concluímos que

$$\int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}} |\psi_x|^2\,dx \leq \frac{\epsilon}{4}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

□

Lema 3.24. *Se $U \in D(A)$ é solução da equação resolvente* (3.66)*, então dado $\epsilon > 0$ existe uma constante $C_\epsilon > 0$ tal que*

$$\int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}} |\Psi|^2\,dx \leq \left(\frac{C_{10}}{|\beta|} + \frac{C_{10}}{|\beta|^2} + \frac{\epsilon}{4}\right)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2, \quad |\beta|>1,$$

para alguma constante $C_{10} > 0$ que independe de $\epsilon > 0$.

Demonstração. Multiplicando (3.70) por $-s\psi$ em L^2, obtemos que

$$\begin{aligned}&- i\beta\rho_2\int_0^L s\Psi\overline{\psi}\,dx + b\int_0^L s\psi_{xx}\overline{\psi}\,dx - k\int_0^L s(\varphi_x+\psi)\overline{\psi}\,dx + m\int_0^L s\theta\overline{\psi}\,dx\\ &- \sigma\int_0^L s\vartheta_x\overline{\psi}\,dx = -\rho_2\int_0^L sf_4\overline{\psi}\,dx.\end{aligned}$$

Usando (3.69) na primeira integral, segue que

$$\begin{aligned}&\rho_2\int_0^L s\Psi(\overline{\Psi}+\overline{f_3})\,dx + b\int_0^L s\psi_{xx}\overline{\psi}\,dx - k\int_0^L s(\varphi_x+\psi)\overline{\psi}\,dx + m\int_0^L s\theta\overline{\psi}\,dx\\ -\ &\sigma\int_0^L s\vartheta_x\overline{\psi}\,dx = -\rho_2\int_0^L sf_4\overline{\psi}\,dx,\end{aligned}$$

ou melhor,

$$\begin{aligned}\rho_2\int_0^L s|\Psi|^2\,dx &= -\rho_2\int_0^L sf_4\overline{\psi}\,dx - \rho_2\int_0^L s\Psi\overline{f_3}\,dx - b\int_0^L s\psi_{xx}\overline{\psi}\,dx\\ &+ k\int_0^L s\varphi_x\overline{\psi}\,dx + k\int_0^L s|\psi|^2\,dx - m\int_0^L s\theta\overline{\psi}\,dx + \sigma\int_0^L s\vartheta_x\overline{\psi}\,dx.\end{aligned}$$

Usando integração por partes segue que

$$\begin{aligned}\rho_2\int_0^L s|\Psi|^2\,dx &= -\rho_2\int_0^L sf_4\overline{\psi}\,dx-\rho_2\int_0^L s\Psi\overline{f_3}\,dx-bs\psi_x\overline{\psi}\Big|_0^L+b\int_0^L (s\psi)_x\overline{\psi}_x\,dx\\ &+ k\int_0^L s\varphi_x\overline{\psi}\,dx+k\int_0^L s|\psi|^2\,dx-m\int_0^L s\theta\overline{\psi}\,dx+\sigma\int_0^L s\vartheta_x\overline{\psi}\,dx,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\rho_2\int_0^L s|\Psi|^2\,dx &= -\rho_2\int_0^L sf_4\overline{\psi}\,dx-\rho_2\int_0^L s\Psi\overline{f_3}\,dx+b\int_0^L s'\psi\overline{\psi}_x\,dx\\ &+ b\int_0^L s\psi_x\overline{\psi}_x\,dx+k\int_0^L s\varphi_x\overline{\psi}\,dx+k\int_0^L s|\psi|^2\,dx\\ &- m\int_0^L s\theta\overline{\psi}\,dx+\sigma\int_0^L s\vartheta_x\overline{\psi}\,dx.\end{aligned}$$

Logo,

$$\rho_2\int_0^L s|\Psi|^2\,dx = b\int_0^L s|\psi_x|^2\,dx+J_3, \tag{3.151}$$

onde

$$\begin{aligned}J_3 &= -\rho_2\int_0^L sf_4\overline{\psi}\,dx-\rho_2\int_0^L s\Psi\overline{f_3}\,dx+b\int_0^L s'\psi_x\overline{\psi}\,dx\\ &+ k\int_0^L s\varphi_x\overline{\psi}\,dx+k\int_0^L s|\psi|^2\,dx-m\int_0^L s\theta\overline{\psi}\,dx+\sigma\int_0^L s\vartheta_x\overline{\psi}\,dx.\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Holder temos que

$$\begin{aligned}|J_3| &\le \rho_2\int_0^L |s||f_4||\overline{\psi}|\,dx+\rho_2\int_0^L |s||\Psi||\overline{f_3}|\,dx+b\int_0^L |s'||\psi_x||\overline{\psi}|\,dx\\ &+ k\int_0^L |s||\varphi_x||\overline{\psi}|\,dx+k\int_0^L |s||\psi|^2\,dx+m\int_0^L |s||\theta||\overline{\psi}|\,dx+\sigma\int_0^L |s||\vartheta_x||\overline{\psi}|\,dx\\ &\le \rho_2\|f_4\|\|\psi\|+\rho_2\|\Psi\|\|f_3\|+bs_1\|\psi_x\|\|\psi\|+k\|\varphi_x\|\|\psi\|+k\|\psi\|^2+m\|\theta\|\|\psi\|\\ &+ \sigma\|\vartheta_x\|\|\psi\|.\end{aligned}$$

Substituindo (3.69) segue que

$$\begin{aligned}|J_3| &\le \rho_2\|f_4\|\|\psi\|+\rho_2\|\Psi\|\|f_3\|+bs_1\|\psi_x\|\left\|\frac{1}{i\beta}(\Psi+f_3)\right\|+k\|\varphi_x\|\left\|\frac{1}{i\beta}(\Psi+f_3)\right\|\\ &+ k\left\|\frac{1}{i\beta}(\Psi+f_3)\right\|^2+m\|\theta\|\left\|\frac{1}{i\beta}(\Psi+f_3)\right\|+\sigma\|\vartheta_x\|\left\|\frac{1}{i\beta}(\Psi+f_3)\right\|,\end{aligned}$$

e usando as desigualdades Triangular e de Poincaré obtemos

$$\begin{aligned}
|J_3| &\leq \rho_2 C_6 \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} + \rho_2 C_6 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{bs_1}{|\beta|} \|\psi_x\| \|\Psi\| + \frac{bs_1}{|\beta|} \|\psi_x\| \|f_3\| \\
&+ \frac{k}{|\beta|} \|\varphi_x\| \|\Psi\| + \frac{k}{|\beta|} \|\varphi_x\| \|f_3\| + \frac{k}{|\beta|^2} \|\Psi\|^2 + \frac{k}{|\beta|^2} \|f_3\|^2 + \frac{mc_p}{|\beta|} \|\theta_x\| \|\Psi\| \\
&+ \frac{mc_p}{|\beta|} \|\theta_x\| \|f_3\| + \frac{\sigma}{|\beta|} \|\vartheta_x\| \|\Psi\| + \frac{\sigma}{|\beta|} \|\vartheta_x\| \|f_3\| \\
&\leq 2\rho_2 C_6 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{bs_1 C_7}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{bs_1 C_7}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{kC_7}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{kC_7}{|\beta|} \|U\| \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{kC_7}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{kC_7}{|\beta|^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&+ \frac{mc_p C_7}{|\beta|} \|\theta_x\| \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{mc_p C_7}{|\beta|} \|\theta_x\| \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{\sigma C_7}{|\beta|} \|\vartheta_x\| \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{\sigma C_7}{|\beta|} \|\vartheta_x\| \|F\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Agora, usando que $|\beta| > 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
|J_3| &\leq C_8 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \left(\frac{C_8}{|\beta|} + \frac{C_8}{|\beta|^2} \right) \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_8 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&+ C_8 \|\theta_x\| \|U\|_{\mathcal{H}} + C_8 \|\theta_x\| \|F\|_{\mathcal{H}} + C_8 \|\vartheta_x\| \|U\|_{\mathcal{H}} + C_8 \|\vartheta_x\| \|F\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

onde $C_8 = \max\left\{2\rho_2 C_6 + bs_1 C_7 + kC_7, bs_1 C_7 + kC_7, kC_7, mc_p C_7, \sigma C_7\right\}$.
Substituindo em (3.151) e usando (3.150), temos que

$$\begin{aligned}
\rho_2 \int_0^L s|\Psi|^2\,dx &\leq C_9 \|\vartheta_x\| \|U\|_{\mathcal{H}} + C_9 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C_9 \|\vartheta_x\| \|U\|_{\mathcal{H}} + C_9 \|\vartheta_x\| \|F\|_{\mathcal{H}} \\
&+ C_8 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \left(\frac{C_8}{|\beta|} + \frac{C_8}{|\beta|^2} \right) \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_8 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&+ C_8 \|\theta_x\| \|U\|_{\mathcal{H}} + C_8 \|\theta_x\| \|F\|_{\mathcal{H}} + C_8 \|\vartheta_x\| \|U\|_{\mathcal{H}} + C_8 \|\vartheta_x\| \|F\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

e aplicando a Desigualdade de Young com $\dfrac{\epsilon}{20}$, segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^L s|\Psi|^2\,dx &\leq \frac{5C_9^2}{\rho_2^2 \epsilon} \|\vartheta_x\|^2 + \frac{\epsilon}{20} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C_9}{\rho_2} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{5C_9^2}{\rho_2^2 \epsilon} \|\vartheta_x\|^2 + \frac{\epsilon}{20} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&+ \frac{C_9^2}{2\rho_2^2} \|\vartheta_x\|^2 + \frac{1}{2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C_8}{\rho_2} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \left(\frac{C_8}{\rho_2 |\beta|} + \frac{C_8}{\rho_2 |\beta|^2} \right) \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&+ \frac{C_8}{\rho_2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{5C_8^2}{\rho_2^2 \epsilon} \|\theta_x\|^2 + \frac{\epsilon}{20} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C_8^2}{2\rho_2^2} \|\theta_x\|^2 + \frac{1}{2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{5C_8^2}{\rho_2^2 \epsilon} \|\vartheta_x\|^2 \\
&+ \frac{\epsilon}{20} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C_8^2}{2\rho_2^2} \|\vartheta_x\|^2 + \frac{1}{2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.20 temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^L s|\Psi|^2\,dx &\leq C_{10}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{\epsilon}{20}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_{10}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C_{10}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{\epsilon}{20}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_{10}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C_{10}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C_{10}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&+ \left(\frac{C_{10}}{|\beta|} + \frac{C_{10}}{|\beta|^2}\right)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_{10}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{\epsilon}{20}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_{10}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{1}{2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C_{10}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{\epsilon}{20}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_{10}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2, \\
&= 9C_{10}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \left(\frac{C_{10}}{|\beta|} + \frac{C_{10}}{|\beta|^2} + \frac{4\epsilon}{20}\right)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \left(C_{10} + \frac{3}{2}\right)\|F\|_{\mathcal{H}}^2,
\end{aligned}$$

para alguma constante $C_{10} > 0$. Aplicando novamente a Desigualdade de Young com $\dfrac{\epsilon}{10}$ obtemos

$$\int_0^L s|\Psi|^2\,dx \leq \left(\frac{C_{10}}{|\beta|} + \frac{C_{10}}{|\beta|^2} + \frac{\epsilon}{4}\right)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Como

$$\left[l_0 - \frac{\delta}{2}, l_0 + \frac{\delta}{2}\right] \subset (l_0 - \delta, l_0 + \delta) \quad \text{e} \quad s(x) = 1, \forall x \in \left[l_0 - \frac{\delta}{2}, l_0 + \frac{\delta}{2}\right],$$

concluímos que

$$\int_{l_0 - \frac{\delta}{2}}^{l_0 + \frac{\delta}{2}} |\Psi|^2\,dx \leq \left(\frac{C_{10}}{|\beta|} + \frac{C_{10}}{|\beta|^2} + \frac{\epsilon}{4}\right)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

para alguma constante $C_{10} > 0$. □

Logo, pelos lemas 3.20, 3.21, 3.22, 3.23 e 3.24, conseguimos uma estimativa local para a norma de U em $\mathcal{H}$. Com isso, nosso objetivo agora é estender essa estimativa para o intervalo $(0, L)$ usando o Corolário 2.73 e mostrar que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall F \in \mathcal{H}.$$

Teorema 3.25. *Se $U \in D(A)$ é solução da equação resolvente* (3.66)*, então existe uma constante $C > 0$ independente de $U_0 \in \mathcal{H}$ tal que*

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}^2, \tag{3.152}$$

para $|\beta| > \max\{\sqrt{4C\tilde{C}}, 8C\tilde{C}\}$, onde $C, \tilde{C} > 0$ são constantes dependendo apenas dos coeficientes do sistema.

Demonstração. Considerando as notações

$$
\begin{aligned}
u = \varphi, v = \Phi, w = \psi, z = \Psi,\\
g_1 = f_1 \in H_0^1 \,(\text{ou}\, H_*^1), g_2 = \rho_1 f_2 - m\theta_x \in L^2,\\
g_3 = f_3 \in H_0^1, g_4 = \rho_2 f_4 + m\theta - \sigma\vartheta_x \in L^2
\end{aligned}
$$

em (3.67)-(3.70), temos que

$$
\begin{aligned}
i\beta u - v &= g_1, && (3.153)\\
i\beta\rho_1 v - k(u_x + w)_x &= g_2, && (3.154)\\
i\beta w - z &= g_3, && (3.155)\\
i\beta\rho_2 z - b w_{xx} + k(u_x + w) &= g_4, && (3.156)
\end{aligned}
$$

ou seja, $V = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi)$ é solução de (2.2)-(2.5) com $G = (g_1, g_2, g_3, g_4)$.
Além disso, dado $\epsilon > 0$ e considerando

$$0 \leq a_1 = l_0 - \frac{\delta}{2} < a_2 = l_0 + \frac{\delta}{2} \leq L,$$

temos que

$$\|V\|_{a_1,a_2}^2 = \int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}} |\varphi_x + \psi|^2\, dx + \int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}} |\Phi|^2\, dx + \int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}} |\psi_x|^2\, dx + \int_{l_0-\frac{\delta}{2}}^{l_0+\frac{\delta}{2}} |\Psi|^2\, dx.$$

Logo, pelos lemas 3.21, 3.22, 3.23 e 3.24 segue que

$$
\begin{aligned}
\|V\|_{a_1,a_2}^2 &\leq \frac{\epsilon}{4}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \left(\frac{\epsilon}{4} + \frac{C_4}{|\beta|^2}\right)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2\\
&+ \frac{\epsilon}{4}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \left(\frac{C_{10}}{|\beta|} + \frac{C_{10}}{|\beta|^2} + \frac{\epsilon}{4}\right)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2\\
&= \left(\epsilon + \frac{C}{|\beta|^2} + \frac{C}{|\beta|}\right)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2,
\end{aligned}
$$

para alguma constante $C_\epsilon > 0$ e $C > 0$.
Veja que (2.6) é satisfeito com $\Lambda = \left(\epsilon + \frac{C}{|\beta|^2} + \frac{C}{|\beta|}\right)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2$, $a_1 = l_0 - \frac{\delta}{2}$ e $a_2 = l_0 + \frac{\delta}{2}$. Do Corolário 2.73, Lema 3.20 e da Desigualdade de Young, segue que

$$\|V\|_{0,L}^2 \leq C\Lambda + C\|G\|_{0,L}^2, \tag{3.157}$$

em que

$$\|V\|_{0,L}^2 \;=\; \int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx + \int_0^L |\Phi|^2\,dx + \int_0^L |\psi_x|^2\,dx + \int_0^L |\Psi|^2\,dx.$$

Logo, de (3.157), obtemos

$$\begin{aligned}
\|V\|_{0,L}^2 &\leq C\bigg(\epsilon+\frac{C}{|\beta|^2}+\frac{C}{|\beta|}\bigg)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2\\
&+ C\int_0^L \big(|(g_1)_x+g_3|^2+|g_2|^2+|(g_3)_x|^2+|g_4|^2\big)\,dx\\
&= C\bigg(\epsilon+\frac{C}{|\beta|^2}+\frac{C}{|\beta|}\bigg)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2\\
&+ C\int_0^L \big(|(f_1)_x+f_3|^2+|\rho_1 f_2-m\theta_x|^2+|(f_3)_x|^2+|\rho_2 f_4+m\theta-\sigma\vartheta_x|^2\big)\,dx.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade Triangular segue que

$$\begin{aligned}
\|V\|_{0,L}^2 &\leq C\bigg(\epsilon+\frac{C}{|\beta|^2}+\frac{C}{|\beta|}\bigg)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C\int_0^L \big(|(f_1)_x+f_3|^2+|(f_3)_x|^2\big)\,dx\\
&+ C\int_0^L \big(2\rho_1^2|f_2|^2+2m^2|\theta_x|^2\big)\,dx + C\int_0^L \big(3\rho_2^2|f_4|^2+3m^2|\theta|^2+3\sigma^2|\vartheta_x|^2\big)\,dx,
\end{aligned}$$

e pela Desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned}
\|V\|_{0,L}^2 &\leq C\bigg(\epsilon+\frac{C}{|\beta|^2}+\frac{C}{|\beta|}\bigg)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \tilde{C}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + 2m^2C\|\theta_x\|^2\\
&+ 3m^2Cc_p\|\theta_x\|^2 + 3\sigma^2C\|\vartheta_x\|^2\\
&\leq C\bigg(\epsilon+\frac{C}{|\beta|^2}+\frac{C}{|\beta|}\bigg)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + (2m^2C+3m^2Cc_p)\|\theta_x\|^2 + 3\sigma^2C\|\vartheta_x\|^2.
\end{aligned}$$

Novamente pelo Lema 3.20 temos que

$$\begin{aligned}
\|V\|_{0,L}^2 &\leq C\bigg(2\epsilon+\frac{C}{|\beta|^2}+\frac{C}{|\beta|}\bigg)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + (2mC+3m^2Cc_p)\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\\
&+ 3\sigma^2C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

e usando a Desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}
\|V\|_{0,L}^2 &\leq C\bigg(\epsilon+\frac{C}{|\beta|^2}+\frac{C}{|\beta|}\bigg)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + c_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2\\
&\leq C\bigg(3\epsilon+\frac{C}{|\beta|^2}+\frac{C}{|\beta|}\bigg)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \qquad (3.158)
\end{aligned}$$

Finalmente, observe que

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \int_0^L \Big[k|\varphi_x+\psi|^2+\rho_1|\Phi|^2+b|\psi_x|^2+\rho_2|\Psi|^2+\rho_3|\theta|^2+\rho_4|\vartheta|^2\Big]\,dx\\
&\le m_1\int_0^L \Big[|\varphi_x+\psi|^2+|\Phi|^2+|\psi_x|^2+|\Psi|^2+|\theta|^2+|\vartheta|^2\Big]\,dx\\
&= m_1\int_0^L \Big[|\varphi_x+\psi|^2+|\Phi|^2+|\psi_x|^2+|\Psi|^2\Big]\,dx+m_1\int_0^L\Big[|\theta|^2+|\vartheta|^2\Big]\,dx\\
&= m_1\|V\|_{0,L}^2+m_1\int_0^L\Big[|\theta|^2+|\vartheta|^2\Big]\,dx.
\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Poincaré e (3.158), obtemos

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \le \tilde{C}\bigg(3\epsilon+\frac{C}{|\beta|^2}+\frac{C}{|\beta|}\bigg)\|U\|_{\mathcal{H}}^2+m_1C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2+m_1c_p\|\theta_x\|^2+m_1c_p\|\vartheta_x\|^2,$$

e, novamente pelo Lema 3.20, segue que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \le \tilde{C}\bigg(3\epsilon+\frac{C}{|\beta|^2}+\frac{C}{|\beta|}\bigg)\|U\|_{\mathcal{H}}^2+m_1C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2+2m_1c_pC_1\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Usando a Desigualdade de Young com $C\epsilon$, obtemos

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \le \tilde{C}\bigg(4\epsilon+\frac{C}{|\beta|^2}+\frac{C}{|\beta|}\bigg)\|U\|_{\mathcal{H}}^2+C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2, \tag{3.159}$$

de onde segue que

$$\bigg[1-4\tilde{C}\epsilon-\frac{\tilde{C}C}{|\beta|^2}-\frac{\tilde{C}C}{|\beta|}\bigg]\|U\|_{\mathcal{H}}^2\le C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Tomando $\epsilon=\dfrac{1}{8\tilde{C}}$ temos que $1-4\tilde{C}\epsilon=\dfrac{1}{2}$ e como $|\beta|>\sqrt{4C\tilde{C}}$, segue que $|\beta|^2>4C\tilde{C}$. Logo, $\dfrac{1}{|\beta|^2}<\dfrac{1}{4C\tilde{C}}$, o que implica

$$\frac{1}{2}-\frac{C\tilde{C}}{|\beta|^2}>\frac{1}{2}-\frac{C\tilde{C}}{4C\tilde{C}}=\frac{1}{4}.$$

Como $|\beta|>8C\tilde{C}$, segue que $\dfrac{1}{|\beta|}<\dfrac{1}{8C\tilde{C}}$, de onde

$$\frac{1}{4}-\frac{C\tilde{C}}{|\beta|}>\frac{1}{4}-\frac{C\tilde{C}}{8C\tilde{C}}=\frac{1}{8}.$$

Assim, concluímos

$$\frac{1}{8}\|U\|_{\mathcal{H}}^2\le\overline{C}\|F\|_{\mathcal{H}}^2,\quad \text{para alguma constante}\quad \overline{C}>0.$$

Portanto, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

□

Teorema 3.26. *O sistema de Timoshenko termoelástico* (3.1)-(3.5) *com condições de fronteira* (3.6) *ou* (3.7) *é exponencialmente estável.*

Demonstração. A demonstração segue imediatamente do Lema 3.19 e dos teoremas 3.25 e 2.71. □

4 O PROBLEMA DE TIMOSHENKO VISCOELÁSTICO

Neste capítulo apresentaremos de forma detalhada a existência e estabilidade de solução para o seguinte modelo de Timoshenko Viscoelástico

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + k\int_0^\infty g_1(s)(\varphi_x + \psi)_x(t-s)ds = 0, \quad (4.1)$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + b\int_0^\infty g_2(s)\psi_{xx}(t-s)ds + k(\varphi_x + \psi) - k\int_0^\infty g_1(s)(\varphi_x + \psi)(t-s)ds = 0, \quad (4.2)$$

em $(0, L) \times (0, \infty)$ com condições iniciais

$$\begin{aligned} &\varphi(x, s) = \varphi_0(x, s), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x) := \partial_t\varphi_0(x, t) \mid_t = 0, \\ &\psi(x, s) = \psi_0(x, s), \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), := \partial_t\psi_0(x, t) \mid_t = 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

para $x \in (0, L), s \leq 0$, e condições de fronteira

$$\varphi(0, t) \;=\; \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, \;\; t > 0, \quad (4.4)$$

onde φ representa o deslocamento transversal e ψ representa o ângulo de rotação de uma viga de comprimento $L > 0$, $\rho_1 = \rho A, \rho_2 = \rho I, k = K'GA$ e $b = EI$.

Além disso, assumiremos que $g_1, g_2 \in L^1(\mathbb{R}^+) \cap C^1(\mathbb{R}^+)$ satisfazem

$$g_1'(s) \leq 0 \leq g_1(s) \quad \text{e} \quad g_2'(s) \leq 0 \leq g_2(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}^+, \quad (4.5)$$

$$0 < a_0 := \int_0^\infty g_1(s)ds < 1, \quad 0 < b_0 := \int_0^\infty g_2(s)ds < 1, \quad (4.6)$$

$$a_1 = \lim_{s\to 0} g_1(s) < \infty, \quad b_1 = \lim_{s\to 0} g_2(s) < \infty, \quad (4.7)$$

$$g_1'(s) \leq -\delta g_1(s) \quad \text{e} \quad g_2'(s) \leq -\delta g_2(s), \quad \text{para algum } \; \delta > 0, \quad (4.8)$$

$$g_1(s) \leq \gamma g_2(s), \quad \text{para algum } \; \gamma > 0. \quad (4.9)$$

Vejamos agora exemplos de funções g_1 e g_2 que satisfazem (4.5)-(4.9).

Exemplo 1. Considere $g_1(s) = e^{-s-1}$ e $g_2(s) = e^{-s-2}$. Observe que $g_1, g_2 \in L^1(\mathbb{R}^+) \cap C^1(\mathbb{R}^+)$ e, além disso, temos que

i) $g_1'(s) \leq 0 \leq g_1(s)$ e $g_2'(s) \leq 0 \leq g_2(s)$, $\forall s \in \mathbb{R}^+$,

ii) $0 < a_0, b_0 < 1$. De fato,

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^\infty g_1(s)\,ds = \int_0^\infty e^{-s-1}\,ds = \lim_{x\to\infty} -e^{-s-1}\Big|_0^x = e^{-1} < 1, \\ b_0 &= \int_0^\infty g_2(s)\,ds = \int_0^\infty e^{-s-2}\,ds = \lim_{x\to\infty} -e^{-s-2}\Big|_0^x = e^{-2} < 1. \end{aligned}$$

iii) $a_1, b_1 < \infty$. Com efeito,

$$a_1 = \lim_{s\to 0} g_1(s) = \lim_{s\to 0} e^{-s-1} = e^{-1} < \infty,$$
$$b_1 = \lim_{s\to 0} g_2(s) = \lim_{s\to 0} e^{-s-2} = e^{-2} < \infty.$$

iv) Para $\delta = 1 > 0$ temos que $g_1'(s) \leq -\delta g_1(s)$ e $g_2'(s) \leq -\delta g_2(s)$.

v) Para $\gamma = e > 0$, obtemos que $g_1(s) \leq \gamma g_2(s)$.

Logo, g_1 e g_2 são exemplos de funções que satifazem (4.5)-(4.9).

De acordo com [13] é possível obter um sistema equivalente ao sistema (4.1)-(4.4). Para isto, basta definirmos

$$\eta(x,s) := \eta^t(x,s) = \varphi(x,t) - \varphi(x,t-s), \tag{4.10}$$
$$\xi(x,s) := \xi^t(x,s) = \psi(x,t) - \psi(x,t-s), \tag{4.11}$$

para $x \in (0,L), t \geq 0, s > 0$, de onde obtemos

$$\begin{aligned} \eta_t + \eta_s &= \varphi_t, \\ \eta^0(x,s) = \varphi_0(x) - \varphi_0(x,-s) &:= \eta_0(x,s), \\ \eta^t(x,0) := \lim_{s\to 0^+} \eta^t(x,s) &= 0 \end{aligned} \tag{4.12}$$

e

$$\begin{aligned} \xi_t + \xi_s &= \psi_t, \\ \xi^0(x,s) = \psi_0(x) - \psi_0(x,-s) &:= \xi_0(x,s), \\ \xi^t(x,0) := \lim_{s\to 0^+} \xi^t(x,s) &= 0. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Substituindo (4.10)-(4.13) em (4.1)-(4.4), obtemos o seguinte sistema equivalente

$$\rho_1\varphi_{tt} - \lambda(\varphi_x + \psi)_x - k\int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi)_x(s)ds = 0, \tag{4.14}$$
$$\rho_2\psi_{tt} - \beta\psi_{xx} - b\int_0^\infty g_2(s)\xi_{xx}(s)ds + \lambda(\varphi_x + \psi) + k\int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi)(s)ds = 0, \tag{4.15}$$
$$\eta_t + \eta_s = \varphi_t, \tag{4.16}$$
$$\xi_t + \xi_s = \psi_t, \tag{4.17}$$

com condições iniciais

$$\begin{aligned}
\varphi(x,0) &= \varphi_0(x), \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \\
\psi(x,0) &= \psi_0(x), \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \\
\eta^0(x,s) &= \eta_0(x,s), \xi^0(x,s) = \xi_0(x,s), \\
\eta^t(x,0) &= \xi^t(x,0) = 0,
\end{aligned} \tag{4.18}$$

para $x \in (0,L), t \geq 0, s > 0$, e condições de fronteira

$$\begin{aligned}
\varphi(0,t) = \varphi(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) = 0, \\
\eta^t(0,s) = \eta^t(L,s) = \xi^t(0,s) = \xi^t(L,s) = 0,
\end{aligned} \tag{4.19}$$

para $t \geq 0, s > 0$.

Diante disto, iremos verificar a existência, unicidade e estabilidade de solução do problema (4.14)-(4.19), e consequentemente obteremos estes mesmos resultados para o problema equivalente (4.1)-(4.4).

A existência e unicidade de solução será garantida usando a teoria de semigrupos lineares, enquanto a estabilidade exponencial será obtida via o método da energia.

4.1 Existência e Unicidade de Solução

No que segue, vamos considerar os seguintes espaços:

$$\mathcal{M}_j := L^2_{g_j}(\mathbb{R}^+, H_0^1) = \left\{ \eta : \mathbb{R}^+ \to H_0^1; \int_0^\infty g_j(s) \|\eta(s)\|^2_{H_0^1}\, ds < \infty \right\}, \text{ para } j = 1,2,$$

e

$$\mathcal{N}_j := L^2_{g_j}(\mathbb{R}^+, L^2) = \left\{ \eta : \mathbb{R}^+ \to L^2; \int_0^\infty g_j(s) \|\eta(s)\|^2_{L^2}\, ds < \infty \right\}, \text{ para } j = 1,2,$$

os quais são espaços de Hilbert munidos com os produtos internos e normas dados por:

$$(\eta,\xi)_{\mathcal{M}_j} = \int_0^\infty g_j(s)(\eta(s),\xi(s))_{H_0^1}\, ds,$$

$$\|\eta\|_{\mathcal{M}_j} = \left(\int_0^\infty g_j(s)\|\eta(s)\|^2_{H_0^1}\, ds \right)^{\frac{1}{2}},$$

para todos $\eta, \xi \in \mathcal{M}_j$ e

$$(\eta,\xi)_{\mathcal{N}_j} = \int_0^\infty g_j(s)(\eta(s),\xi(s))_{L^2}\, ds,$$

$$\|\eta\|_{\mathcal{N}_j} = \left(\int_0^\infty g_j(s) \|\eta(s)\|_{L^2}^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}},$$

para todos $\eta, \xi \in \mathcal{N}_j$.

Vamos considerar o seguinte espaço de fase

$$\mathcal{H} = H_0^1 \times L^2 \times H_0^1 \times L^2 \times \mathcal{M}_1 \times (\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{M}_2),$$

o qual é um espaço de Hilbert com o produto interno (usual) dado por

$$\langle U, \widehat{U} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^L \left[\varphi_x \overline{\widehat{\varphi}_x} + \Phi \overline{\widehat{\Phi}} + \psi_x \overline{\widehat{\psi}_x} + \Psi \overline{\widehat{\Psi}} + \int_0^\infty g_1(s) \eta_x(s) \overline{\widehat{\eta}_x(s)} \, ds + \int_0^\infty g_2(s) \xi_x(s) \overline{\widehat{\xi}_x(s)} \, ds \right] dx,$$

e norma

$$|U|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^L \left[|\varphi_x|^2 + |\Phi|^2 + |\psi_x|^2 + |\Psi|^2 + \int_0^\infty g_1(s) |\eta_x(s)|^2 ds + \int_0^\infty g_2(s) |\xi_x(s)|^2 \, ds \right] dx,$$

para quaisquer $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \eta, \xi), \widehat{U} = (\widehat{\varphi}, \widehat{\Phi}, \widehat{\psi}, \widehat{\Psi}, \widehat{\eta}, \widehat{\xi}) \in \mathcal{H}$.

Considere agora o produto interno em $\mathcal{H}$ dado por

$$\begin{aligned} (U, \widehat{U})_{\mathcal{H}} &= \int_0^L \Big[\lambda (\varphi_x + \psi) \overline{(\widehat{\varphi}_x + \widehat{\psi})} + \rho_1 \Phi \overline{\widehat{\Phi}} + \rho_2 \Psi \overline{\widehat{\Psi}} + \beta \psi_x \overline{\widehat{\psi}_x} \\ &+ k \int_0^\infty g_1(s) (\eta_x(s) + \xi(s)) \overline{(\widehat{\eta}_x(s) + \widehat{\xi}(s))} ds + b \int_0^\infty g_2(s) \xi_x(s) \overline{\widehat{\xi}_x(s)} ds \Big] dx, \end{aligned} \tag{4.20}$$

cuja norma proveniente deste produto interno é

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \int_0^L \left[\lambda |\varphi_x + \psi|^2 + \rho_1 |\Phi|^2 + \rho_2 |\Psi|^2 + \beta |\psi_x|^2 + k \int_0^\infty g_1(s) |\eta_x(s) + \xi(s)|^2 ds \right] dx \\ &+ \int_0^L \left[b \int_0^\infty g_2(s) |\xi_x(s)|^2 ds \right] dx, \end{aligned} \tag{4.21}$$

para quaisquer $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \eta, \xi), \widehat{U} = (\widehat{\varphi}, \widehat{\Phi}, \widehat{\psi}, \widehat{\Psi}, \widehat{\eta}, \widehat{\xi}) \in \mathcal{H}$.

Usando propriedades do produto interno em L^2 segue que (4.20) define um produto interno em $\mathcal{H}$.

Como L^2, H_0^1, $\mathcal{M}_j$ e $\mathcal{N}_j$ são espaços de Banach, segue que $\mathcal{H}$ munido da norma usual $|.|_{\mathcal{H}}$ é um espaço de Hilbert, uma vez que a norma provém do produto interno.

O próximo lema garantirá que a norma definida em (4.21) é equivalente à norma usual de $\mathcal{H}$, de onde segue que $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert com a norma $\|.\|_{\mathcal{H}}$.

Lema 4.1. *A norma definida em* (4.21) *é equivalente à norma usual* $|.|_{\mathcal{H}}$.

Demonstração. Seja $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \eta, \xi) \in \mathcal{H}$, pela Desigualdade Triangular, temos que

$$\begin{aligned} |U|_{\mathcal{H}}^2 &= \|\varphi\|_{H_0^1}^2 + \|\Phi\|^2 + \|\psi\|_{H_0^1}^2 + \|\Psi\|^2 + \|\eta\|_{\mathcal{M}_1}^2 + \|\xi\|_{\mathcal{M}_2}^2 \\ &= \|\varphi_x\|^2 + \|\Phi\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\Psi\|^2 + \int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)\|^2\,ds + \int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds \\ &\leq 2\|\varphi_x + \psi\|^2 + 2\|\psi\|^2 + \|\Phi\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\Psi\|^2 + 2\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s) + \xi(s)\|^2\,ds \\ &+ 2\int_0^\infty g_1(s)\|\xi(s)\|^2\,ds + \int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds, \end{aligned}$$

e usando a Desigualdade de Poincaré, segue que

$$\begin{aligned} |U|_{\mathcal{H}}^2 &\leq 2\|\varphi_x + \psi\|^2 + 2c_p\|\psi_x\|^2 + \|\Phi\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\Psi\|^2 + 2\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s) + \xi(s)\|^2\,ds \\ &+ 2c_p\int_0^\infty g_1(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds + \int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds. \end{aligned}$$

Agora, usando a hipótese (4.9), obtemos

$$\begin{aligned} |U|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \frac{2}{\lambda}\lambda\|\varphi_x + \psi\|^2 + \frac{2c_p + 1}{\beta}\beta\|\psi_x\|^2 + \frac{1}{\rho_1}\rho_1\|\Phi\|^2 + \frac{1}{\rho_2}\rho_2\|\Psi\|^2 \\ &+ \frac{2}{k}k\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s) + \xi(s)\|^2\,ds + \frac{2c_p\gamma + 1}{b}b\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds \\ &\leq c_1\|U\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

onde $c_1 = \max\left\{\frac{2}{\lambda}, \frac{2c_p + 1}{\beta}, \frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}, \frac{2}{k}, \frac{2c_p\gamma + 1}{b}\right\}$.

Por outro lado, novamente pela Desigualdade Triangular, segue que

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \lambda\|\varphi_x + \psi\|^2 + \beta\|\psi_x\|^2 + \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2 + k\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s) + \xi(s)\|^2\,ds \\ &+ b\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds \\ &\leq \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2 + \beta\|\psi_x\|^2 + 2\lambda\|\varphi_x\|^2 + 2\lambda\|\psi\|^2 + 2k\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)\|^2\,ds \\ &+ 2k\int_0^\infty g_1(s)\|\xi(s)\|^2\,ds + b\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds. \end{aligned}$$

Além disso, pela Desigualdade de Poincaré e usando (4.9), obtemos

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2 + (\beta + 2\lambda c_p)\|\psi_x\|^2 + 2\lambda\|\varphi_x\|^2 + 2k\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)\|^2 ds \\ &+ (2k\gamma c_p + b)\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2 ds \\ &= c_2|U|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned} \tag{4.22}$$

onde $c_2 = \max\{\rho_1, \rho_2, \beta + 2\lambda c_p, 2\lambda, 2k, 2k\gamma c_p + b\}$. $\square$

Denotando $\Phi = \varphi_t$ e $\Psi = \psi_t$, podemos reescrever o problema (4.14)-(4.19) como um problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} U_t = AU, \ t > 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases}, \tag{4.23}$$

onde $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \eta, \xi)^T$, $U(0) := (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \eta_0, \xi_0) = U_0$ e $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é o operador linear definido por

$$D(A) = \left\{ \begin{array}{c} (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \eta, \xi) \in \mathcal{H}; \Phi, \Psi \in H_0^1, \ \eta_s \in \mathcal{M}_1, \ \xi_s \in \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{M}_2, \ \eta(0) = 0, \ \xi(0) = 0, \\ \lambda \varphi_{xx} + k \displaystyle\int_0^\infty g_1(s) \eta_{xx}(s)\, ds \in L^2, \ \beta \psi_{xx} + b \displaystyle\int_0^\infty g_2(s) \xi_{xx}(s)\, ds \in L^2, \end{array} \right\}$$

e

$$AU = \begin{pmatrix} \Phi \\ \dfrac{\lambda}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x + \dfrac{k}{\rho_1} \displaystyle\int_0^\infty g_1(s)(\eta_x(s) + \xi(s))_x\, ds \\ \Psi \\ \dfrac{\beta}{\rho_2}\psi_{xx} + \dfrac{b}{\rho_2} \displaystyle\int_0^\infty g_2(s)\xi_{xx}(s)\, ds - \dfrac{\lambda}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \dfrac{k}{\rho_2} \displaystyle\int_0^\infty g_1(s)(\eta_x(s) + \xi(s))\, ds \\ \Phi - \eta_s \\ \Psi - \xi_s \end{pmatrix} \tag{4.24}$$

Os resultados a seguir garantem a existência e unicidade de solução para o problema de Cauchy (4.23) e, consequentemente, para o sistema (4.14)-(4.19).

Lema 4.2. *O operador A definido em* (4.24)-(4.24) *é dissipativo em $\mathcal{H}$.*

Demonstração. Seja $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \eta, \xi) \in D(A)$. Então,

$$\begin{aligned} (AU, U)_{\mathcal{H}} &= \lambda \int_0^L (\Phi_x + \Psi)\overline{(\varphi_x + \psi)}\, dx + \lambda \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \overline{\Phi}\, dx \\ &+ k \int_0^\infty g_1(s) \int_0^L (\eta_x(s) + \xi(s))_x \overline{\Phi}\, dx\, ds + \beta \int_0^L \psi_{xx} \overline{\Psi}\, dx \\ &+ b \int_0^\infty g_2(s) \int_0^L \xi_{xx}(s) \overline{\Psi}\, dx\, ds - \lambda \int_0^L (\varphi_x + \psi)\overline{\Psi}\, dx \\ &- k \int_0^\infty g_1(s) \int_0^L (\eta_x(s) + \xi(s))\overline{\Psi}\, dx\, ds \\ &+ \beta \int_0^L \Psi_x \overline{\psi_x}\, dx + k \int_0^\infty g_1(s) \int_0^L (\Phi_x + \Psi)\overline{(\eta_x(s) + \xi(s))}\, dx\, ds \\ &- k \int_0^\infty g_1(s) \int_0^L (\eta_{xs}(s) + \xi_s(s))\overline{(\eta_x(s) + \xi(s))}\, dx\, ds \\ &+ b \int_0^\infty g_2(s) \int_0^L \Psi_x \overline{\xi_x}(s)\, dx\, ds - b \int_0^\infty g_2(s) \int_0^L \xi_{xs}(s) \overline{\xi_x}(s)\, dx\, ds. \end{aligned}$$

Integrando por partes obtemos que

$$\begin{aligned}
(AU,U)_{\mathcal{H}} &= \lambda \int_0^L (\Phi_x+\Psi)\overline{(\varphi_x+\psi)}\,dx - \lambda \int_0^L (\varphi_x+\psi)\overline{(\Phi_x+\Psi)}\,dx \\
&- k\int_0^\infty g_1(s)\int_0^L (\eta_x(s)+\xi(s))\overline{(\Phi_x+\Psi)}\,dx\,ds - \beta\int_0^L \psi_x\overline{\Psi_x}\,dx \\
&- b\int_0^\infty g_2(s)\int_0^L \xi_x\overline{\Psi_x}\,dx\,ds + k\int_0^\infty g_1(s)\int_0^L (\Phi_x+\Psi)\overline{(\eta_x(s)+\xi(s))}\,dx\,ds \\
&+ \beta\int_0^L \Psi_x\overline{\psi_x}\,dx - k\int_0^\infty g_1(s)\int_0^L (\eta_{xs}(s)+\xi_s(s))\overline{(\eta_x(s)+\xi(s))}\,dx\,ds \\
&+ b\int_0^\infty g_2(s)\int_0^L \Psi_x\overline{\xi_x}\,dx\,ds - b\int_0^\infty g_2(s)\int_0^L \xi_{xs}(s)\overline{\xi_x}(s)\,dx\,ds.
\end{aligned}$$

Aplicando parte real, obtemos

$$\begin{aligned}
Re(AU,U)_{\mathcal{H}} &= Re\Big[\lambda\int_0^L (\Phi_x+\Psi)\overline{(\varphi_x+\psi)}\,dx - \lambda\int_0^L (\varphi_x+\psi)\overline{(\Phi_x+\Psi)}\,dx\Big] \\
&- Re\Big[k\int_0^\infty g_1(s)\int_0^L (\eta_x(s)+\xi(s))\overline{(\Phi_x+\Psi)}\,dx\,ds\Big] \\
&+ Re\Big[k\int_0^\infty g_1(s)\int_0^L (\Phi_x+\Psi)\overline{(\eta_x(s)+\xi(s))}\,dx\,ds\Big] \\
&+ Re\Big[-\beta\int_0^L \psi_x\overline{\Psi_x}\,dx + \beta\int_0^L \Psi_x\overline{\psi_x}\,dx\Big] \\
&+ Re\Big[-b\int_0^\infty g_2(s)\int_0^L \xi_x\overline{\Psi_x}\,dx\,ds + b\int_0^\infty g_2(s)\int_0^L \Psi_x\overline{\xi_x}\,dx\,ds\Big] \\
&- Re\Big[k\int_0^\infty g_1(s)\int_0^L (\eta_{xs}(s)+\xi_s(s))\overline{(\eta_x(s)+\xi(s))}\,dx\,ds\Big] \\
&- Re\Big[b\int_0^\infty g_2(s)\int_0^L \xi_{xs}(s)\overline{\xi_x}(s)\,dx\,ds\Big].
\end{aligned}$$

Integrando por partes na variável s e usando (4.5), obtemos

$$\begin{aligned}
Re(AU,U)_{\mathcal{H}} &= -\frac{k}{2}\int_0^\infty g_1(s)\frac{d}{ds}\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds - \frac{b}{2}\int_0^\infty g_2(s)\frac{d}{ds}\|\xi_x(s)\|^2\,ds \\
&= \frac{k}{2}\int_0^\infty g_1'(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds + \frac{b}{2}\int_0^\infty g_2'(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds \\
&\le 0.
\end{aligned}$$

Portanto, A é dissipativo em $\mathcal{H}$. □

Nosso próximo passo é mostrar que o operador

$$I - A : D(A)\subset\mathcal{H}\to\mathcal{H},$$

é sobrejetor. Para isso, vamos precisar de um lema técnico que nos auxiliará no próximo resultado.

Lema 4.3. *Dadas $g, h \in H^{-1} = (H_0^1)'$, então o sistema*

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi - (\lambda + k\alpha_1)(\varphi_x + \psi)_x &= g \text{ em } H^{-1}, & (4.25)\\ \rho_2\psi - (\beta + b\alpha_2)\psi_{xx} + (\lambda + k\alpha_1)(\varphi_x + \psi) &= h \text{ em } H^{-1}, & (4.26) \end{aligned}$$

possui única solução $(\varphi, \psi) \in H_0^1 \times H_0^1$, onde $\rho_1, \rho_2, \lambda, k, \alpha_1, \alpha_2, \beta, b \in \mathbb{R}^+$.

Demonstração. Considere a aplicação

$$a : (H_0^1 \times H_0^1) \times (H_0^1 \times H_0^1) \longrightarrow \mathbb{K}$$

dada por

$$a((\varphi, \psi), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})) = \int_0^L \left[\rho_1\varphi\overline{\tilde{\varphi}} + (\lambda + k\alpha_1)(\varphi_x + \psi)\overline{(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi})} + \rho_2\psi\overline{\tilde{\psi}} + (\beta + b\alpha_2)\psi_x\overline{\tilde{\psi}_x}\right] dx.$$

Para facilitar a notação, denotaremos $H = H_0^1 \times H_0^1$. Pelas propriedades de produto interno em L^2, segue que a é sesquilinear. A seguir, mostraremos que a é contínua e coerciva.

a) a é uma forma sesquilinear contínua.

De fato, sejam $(\varphi, \psi), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in H$. Pela Desigualdade de Holder segue que

$$\begin{aligned} |a((\varphi, \psi), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}))| &\leq \rho_1\|\varphi\|\|\tilde{\varphi}\| + (\lambda + k\alpha_1)\|\varphi_x + \psi\|\|\tilde{\varphi}_x\| + (\lambda + k\alpha_1)\|\varphi_x + \psi\|\|\tilde{\psi}\|\\ &+ \rho_2\|\psi\|\|\tilde{\psi}\| + (\beta + b\alpha_2)\|\psi_x\|\|\tilde{\psi}_x\|, \end{aligned}$$

e usando as desigualdades Triangular e Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned} |a((\varphi, \psi), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}))| &\leq (\rho_1 c_p^2 + \lambda + k\alpha_1)\|\varphi_x\|\|\tilde{\varphi}_x\|\\ &+ (\lambda + k\alpha_1)c_p\|\psi_x\|\|\tilde{\varphi}_x\| + (\lambda + k\alpha_1)c_p\|\varphi_x\|\|\tilde{\psi}_x\|\\ &+ ((\lambda + k\alpha_1)c_p^2 + \rho_2 c_p^2 + \beta + b\alpha_2)\|\psi_x\|\|\tilde{\psi}_x\|, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} |a((\varphi, \psi), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}))| &\leq C\big(\|\varphi_x\|\|\tilde{\varphi}_x\| + \|\psi_x\|\|\tilde{\varphi}_x\| + \|\varphi_x\|\|\tilde{\psi}_x\| + \|\psi_x\|\|\tilde{\psi}_x\|\big)\\ &\leq C\big(\|\varphi_x\| + \|\psi_x\|\big)(\|\tilde{\varphi}_x\| + \|\tilde{\psi}_x\|\big)\\ &= C\|(\varphi, \psi)\|_H\|(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})\|_H, \end{aligned}$$

onde $C = \max\left\{\rho_1 c_p^2 + \lambda + k\alpha_1, (\lambda + k\alpha_1)c_p, (\lambda + k\alpha_1)c_p^2 + \rho_2 c_p^2 + \beta + b\alpha_2\right\}$, o que mostra que a é contínua.

b) a é uma forma sesquilinear coerciva.

De fato, sejam $(\varphi,\psi),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})\in H$. Temos que

$$\begin{aligned}
\|(\varphi,\psi)\|_H^2 &= (\|\varphi\|_{H_0^1}+\|\psi\|_{H_0^1})^2=(\|\varphi_x\|+\|\psi_x\|)^2\\
&\leq (\|\varphi_x+\psi\|+\|\psi\|+\|\psi_x\|)^2\\
&\leq 3\|\varphi_x+\psi\|^2+3\|\psi\|^2+3\|\psi_x\|^2\\
&= \frac{3}{\lambda+k\alpha_1}(\lambda+k\alpha_1)\|\varphi_x+\psi\|^2+\frac{3}{\rho_2}\rho_2\|\psi\|^2+\frac{3}{\beta+b\alpha_2}(\beta+b\alpha_2)\|\psi_x\|^2\\
&\leq \tilde{C}\Big((\lambda+k\alpha_1)\|\varphi_x+\psi\|^2+\rho_2\|\psi\|^2+(\beta+b\alpha_2)\|\psi_x\|^2+\rho_1\|\varphi\|^2\Big)\\
&= \tilde{C}a((\varphi,\psi),(\varphi,\psi)),
\end{aligned}$$

onde $\tilde{C}=\max\left\{\dfrac{3}{\lambda+k\alpha_1},\dfrac{3}{\rho_2},\dfrac{3}{\beta+b\alpha_2},1\right\}$. Portanto,

$$a((\varphi,\psi),(\varphi,\psi))\geq\frac{1}{\tilde{C}}\|(\varphi,\psi)\|_H^2,$$

donde a é coerciva.
Agora, definamos o funcional antilinear $\Phi: H_0^1\times H_0^1\longrightarrow\mathbb{K}$ dado por

$$\Phi(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})=g(\overline{\tilde{\varphi}})+h(\overline{\tilde{\psi}}),\quad\forall(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})\in H_0^1\times H_0^1,$$

e verifiquemos que Φ é contínuo. Para isto, seja $(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})\in H$. Então, novamente pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Poincaré temos que

$$\begin{aligned}
|\Phi(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})| &\leq |g(\tilde{\varphi})|+|h(\tilde{\psi})|\\
&\leq \|g\|_{H^{-1}}\|\tilde{\varphi}\|_{H_0^1}+\|h\|_{H^{-1}}\|\tilde{\psi}\|_{H_0^1}\\
&\leq \hat{C}\Big(\|\tilde{\varphi}\|_{H_0^1}+\|\tilde{\psi}\|_{H_0^1}\Big)\\
&= \hat{C}\|(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})\|_H,
\end{aligned}$$

onde $\hat{C}=\max\{\|g\|_{H^{-1}},\|h\|_{H^{-1}}\}$ e, portanto, Φ é contínuo. Assim, pelo Teorema de Lax-Milgram, existe um único $(\varphi,\psi)\in H$ tal que

$$a((\varphi,\psi),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi}))=\Phi(\tilde{\varphi},\tilde{\psi}),$$

para todo $(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})\in H$, ou seja, $(\varphi,\psi)\in H_0^1\times H_0^1$ é a única solução do problema

$$\begin{aligned}
&\int_0^L\left[\rho_1\varphi\overline{\tilde{\varphi}}+(\lambda+k\alpha_1)(\varphi_x+\psi)\overline{(\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi})}+\rho_2\psi\overline{\tilde{\psi}}+(\beta+b\alpha_2)\psi_x\overline{\tilde{\psi}_x}\right]dx\\
&= g(\overline{\tilde{\varphi}})+h(\overline{\tilde{\psi}}). \qquad (4.27)
\end{aligned}$$

Considerando (4.27) em particular para $\tilde{\varphi} \in H_0^1$ e para $\tilde{\psi} = 0$, temos que

$$\rho_1(\varphi, \tilde{\varphi}) + (\lambda + k\alpha_1)(\varphi_x + \psi, \tilde{\varphi}_x) = g(\overline{\tilde{\varphi}}), \quad \forall \tilde{\varphi} \in H_0^1, \tag{4.28}$$

de onde,

$$\rho_1\varphi - (\lambda + k\alpha_1)(\varphi_x + \psi)_x = g \quad \text{em} \quad H^{-1},$$

o que mostra que vale (4.25).
Agora, considerando (4.27) em particular para $\tilde{\varphi} = 0$ e para $\tilde{\psi} \in H_0^1$ temos que

$$(\lambda + k\alpha_1)(\varphi_x + \psi, \tilde{\psi}) + \rho_2(\psi, \tilde{\psi}) + (\beta + b\alpha_2)(\psi_x, \tilde{\psi}_x) = h(\overline{\tilde{\psi}}), \quad \tilde{\psi} \in H_0^1, \tag{4.29}$$

de onde,

$$(\lambda + k\alpha_1)(\varphi_x + \psi) + \rho_2\psi - (\beta + b\alpha_2)\psi_{xx} = h \quad \text{em} \quad H^{-1},$$

ou seja, vale (4.26). □

Lema 4.4. *Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ o operador linear dado em* (4.24)*. Então, o operador $I - A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é sobrejetor.*

Demonstração. Dado $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \in \mathcal{H}$, vamos mostrar que existe um único $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \eta, \xi) \in D(A)$ tal que $(I - A)U = F$. Com efeito, reescrevendo $(I - A)U = F$ em termos de suas componentes obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned}
\varphi - \Phi &= f_1, && (4.30)\\
\rho_1\Phi - \lambda(\varphi_x + \psi)_x - k\int_0^\infty g_1(s)(\eta_x(s) + \xi(s))_x\, ds &= \rho_1 f_2, && (4.31)\\
\psi - \Psi &= f_3, && (4.32)\\
\rho_2\Psi - \beta\psi_{xx} - b\int_0^\infty g_2(s)\xi_{xx}(s)\, ds + \lambda(\varphi_x + \psi) + k\int_0^\infty g_1(s)(\eta_x(s) + \xi(s))\, ds &= \rho_2 f_4, && (4.33)\\
\eta + \eta_s - \Phi &= f_5, && (4.34)\\
\xi + \xi_s - \Psi &= f_6. && (4.35)
\end{aligned}$$

Das equações (4.30) e (4.32) temos que

$$\Phi = \varphi - f_1 \quad \text{e} \quad \Psi = \psi - f_3, \tag{4.36}$$

e das equações (4.34) e (4.35) temos que

$$\eta_s + \eta = f_5 + \Phi \quad \text{e} \quad \xi_s + \xi = f_6 + \Psi, \tag{4.37}$$

as quais tem como soluções

$$\eta(s) = \phi_{f_5}(s) + \Phi(1 - e^{-s}) \quad \text{e} \quad \xi(s) = \phi_{f_6}(s) + \Psi(1 - e^{-s}), \tag{4.38}$$

respectivamente, onde

$$\phi_{f_5}(s) = \int_0^s e^{y-s} f_5(y)dy$$

e

$$\phi_{f_6}(s) = \int_0^s e^{y-s} f_6(y)dy.$$

Substituindo (4.36) em (4.38) obtemos para todo $s > 0$

$$\eta(s) = \phi_{f_5}(s) + (\varphi - f_1)(1 - e^{-s}), \tag{4.39}$$

$$\xi(s) = \phi_{f_6}(s) + (\psi - f_3)(1 - e^{-s}). \tag{4.40}$$

Em seguida, substituindo (4.36), (4.39) e (4.40) em (4.31) e (4.33) obtemos o seguinte sistema

$$\rho_1\varphi - (\lambda + k\alpha_1)(\varphi_x + \psi)_x = g, \tag{4.41}$$

$$\rho_2\psi - (\beta + b\alpha_2)\psi_{xx} + (\lambda + k\alpha_1)(\varphi_x + \psi) = h, \tag{4.42}$$

onde

$$\begin{aligned}
g &= \rho_1 f_2 + \rho_1 f_1 + k\int_0^\infty g_1(s)(\phi_{f_5})_{xx}(s)\,ds - k\alpha_1(f_1)_{xx} + k\int_0^\infty g_1(s)(\phi_{f_6})_x(s)\,ds - k\alpha_1(f_3)_x,\\
h &= \rho_2 f_4 + \rho_2 f_3 + b\int_0^\infty g_2(s)(\phi_{f_6})_{xx}(s)\,ds - b\alpha_2(f_3)_{xx} - k\int_0^\infty g_1(s)(\phi_{f_5})_x(s)\,ds + k\alpha_1(f_1)_x\\
&- k\int_0^\infty g_1(s)(\phi_{f_6})(s)\,ds + k\alpha_1 f_3,\\
\alpha_1 &= \int_0^\infty g_1(s)(1 - e^{-s})\,ds,\\
\alpha_2 &= \int_0^\infty g_2(s)(1 - e^{-s})\,ds.
\end{aligned}$$

Observe que $(f_1)_{xx} \in H^{-1} = (H_0^1)'$. De fato, usando a extensão do operador derivada temos que

$$(f_1)_{xx}(v) = -((f_1)_x, v_x), \quad \forall v \in H_0^1.$$

Ainda, dado $v \in H_0^1$, temos que

$$|(f_1)_{xx}(v)| = |((f_1)_x, v_x)| \leq \|(f_1)_x\|\|v_x\| = \|f_1\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}.$$

Logo,

$$\|(f_1)_{xx}\|_{H^{-1}} = \sup_{v\in H_0^1;\,\|v\|\leq 1} |(f_1)_{xx}(v)| = \sup_{v\in H_0^1;\,\|v\|\leq 1} \|f_1\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1} \leq \|f_1\|_{H_0^1} < \infty.$$

Portanto, $(f_1)_{xx} \in H^{-1} = (H_0^1)'$. Analogamente, concluímos que $(f_3)_{xx} \in H^{-1} = (H_0^1)'$.

Como $f_5(s), f_6(s) \in H_0^1$, segue que

$$\int_0^\infty g_1(s)(\phi_{f_5})_{xx}(s)\, ds,\ \int_0^\infty g_2(s)(\phi_{f_6})_{xx}(s)\, ds \in H^{-1}.$$

Além disso,
$f_1, f_2, f_3, f_4, (f_1)_x, (f_3)_x, \int_0^\infty g_1(s)(\phi_{f_6})_x(s)\, ds, \int_0^\infty g_1(s)(\phi_{f_5})_x(s)\, ds \in L^2 = (L^2)' \hookrightarrow H^{-1}$.
Dessa forma, $g, h \in H^{-1}$, pelo Lema 4.3, temos que o sistema (4.41)-(4.42) possui única solução $(\varphi, \psi) \in H_0^1 \times H_0^1$. Assim, Φ e Ψ dadas em (4.36) satisfazem (4.30) e (4.32), respectivamente, bem como as condições para estarem em $D(A)$.
Como $f_5 \in \mathcal{M}_1$, pelo Lema 2.51 segue que

$$\phi_{f_5}(s) = \int_0^s e^{y-s} f_5(y) dy \in \mathcal{M}_1.$$

Dessa forma obtemos que

$$\eta(s) = \phi_{f_5}(s) + \Phi(1 - e^{-s}) \in \mathcal{M}_1,$$

e, além disso, $\eta(0) = \phi_{f_5}(0) + \Phi(1-1) = 0$. Mais ainda,

$$\eta(s) + \eta_s(s) = \phi_{f_5}(s) + \Phi(1 - e^{-s}) - \int_0^s e^{y-s} f_5(y) dy + f_5(s) + \Phi e^{-s} = \Phi + f_5(s),$$

ou seja, vale (4.34) e também $\eta_s = \Phi + f_5 - \eta \in \mathcal{M}_1$.
Analogamente, como $f_6 \in \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{M}_2$, pelo Lema 2.51 segue que

$$\phi_{f_6}(s) = \int_0^s e^{y-s} f_6(y) dy \in \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{M}_2,$$

dessa forma obtemos que

$$\xi(s) = \phi_{f_6}(s) + \Psi(1 - e^{-s}) \in \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{M}_2,$$

e, além disso, $\xi(0) = \phi_{f_6}(0) + \Psi(1-1) = 0$. Mais ainda,

$$\xi(s) + \xi_s(s) = \phi_{f_6}(s) + \Psi(1 - e^{-s}) - \int_0^s e^{y-s} f_6(y) dy + f_6(s) + \Psi e^{-s} = \Psi + f_6(s),$$

ou seja, vale (4.35) e também $\xi_s = \Psi + f_6 - \xi \in \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{M}_2$.
Resta mostrar que vale (4.31), (4.33) e, além disso,

$$\lambda \varphi_{xx} + k \int_0^\infty g_1(s) \eta_{xx}(s)\, ds \in L^2$$

e
$$\beta\psi_{xx} + b\int_0^\infty g_2(s)\xi_{xx}(s)\,ds \in L^2.$$
Com efeito, substituindo g em (4.41) obtemos

$$\begin{aligned}
& \rho_1(\varphi,\tilde{\varphi}) + (\lambda + k\alpha_1)(\varphi_x + \psi, \tilde{\varphi}_x) \\
= \;& \rho_1(f_2,\tilde{\varphi}) + \rho_1(f_1,\tilde{\varphi}) + k\int_0^\infty g_1(s)(\phi_{f_5})_{xx}(s)(\tilde{\varphi})\,ds - k\alpha_1(f_1)_{xx}(\tilde{\varphi}) \\
+ \;& k\int_0^\infty g_1(s)((\phi_{f_6})_x(s),\tilde{\varphi})\,ds - k\alpha_1((f_3)_x,\tilde{\varphi}).
\end{aligned}$$

Usando a extensão do operador derivada, $u_{xx}(\zeta) = -(u_x,\zeta_x)$, para quaisquer $u,\zeta \in H_0^1$, temos que:

$$\begin{aligned}
& \rho_1(\varphi,\tilde{\varphi}) + (\lambda + k\alpha_1)(\varphi_x + \psi, \tilde{\varphi}_x) \\
= \;& \rho_1(f_2,\tilde{\varphi}) + \rho_1(f_1,\tilde{\varphi}) - k\int_0^\infty g_1(s)((\phi_{f_5})_x(s),\tilde{\varphi}_x)\,ds \\
+ \;& k\alpha_1((f_1)_x,\tilde{\varphi}_x) + k\int_0^\infty g_1(s)((\phi_{f_6})_x(s),\tilde{\varphi})\,ds - k\alpha_1((f_3)_x,\varphi). \qquad (4.43)
\end{aligned}$$

Como $\eta(s) = \phi_{f_5}(s) + (\varphi - f_1)(1-e^{-s})$, segue que

$$((\phi_{f_5})_x(s),\tilde{\varphi}_x) = (\eta_x(s),\tilde{\varphi}_x) - (1-e^{-s})(\varphi_x,\tilde{\varphi}_x) + (1-e^{-s})((f_1)_x,\tilde{\varphi}_x). \qquad (4.44)$$

Analogamente, como $\xi(s) = \phi_{f_6}(s) + (\psi - f_3)(1-e^{-s})$, temos que

$$((\phi_{f_6})_x(s),\tilde{\varphi}) = (\xi_x(s),\tilde{\varphi}) - (1-e^{-s})(\psi_x,\tilde{\varphi}) + (1-e^{-s})((f_3)_x,\tilde{\varphi}). \qquad (4.45)$$

Substituindo (4.44) e (4.45) em (4.43), segue que

$$\begin{aligned}
& \rho_1(\varphi,\tilde{\varphi}) + (\lambda + k\alpha_1)(\varphi_x + \psi, \tilde{\varphi}_x) = \rho_1(f_2,\tilde{\varphi}) + \rho_1(f_1,\tilde{\varphi}) - k\int_0^\infty g_1(s)(\eta_x(s),\tilde{\varphi}_x)\,ds \\
+ \;& k\int_0^\infty g_1(s)(1-e^{-s})(\varphi_x,\tilde{\varphi}_x)\,ds - k\int_0^\infty g_1(s)(1-e^{-s})((f_1)_x,\tilde{\varphi}_x)\,ds + k\alpha_1((f_1)_x,\tilde{\varphi}_x) \\
+ \;& k\int_0^\infty g_1(s)((\xi_x(s),\tilde{\varphi})\,ds - k\int_0^\infty g_1(s)(1-e^{-s})((\psi_x(s),\tilde{\varphi})\,ds \\
+ \;& k\int_0^\infty g_1(s)(1-e^{-s})((f_3)_x,\tilde{\varphi})\,ds - k\alpha_1((f_3)_x,\tilde{\varphi}),
\end{aligned}$$

ou melhor,

$$\begin{aligned}
& \rho_1(\varphi,\tilde{\varphi}) - \rho_1(f_2,\tilde{\varphi}) - \rho_1(f_1,\tilde{\varphi}) - k\int_0^\infty g_1(s)((\xi_x(s),\tilde{\varphi})\,ds \\
= \;& -k\int_0^\infty g_1(s)(\eta_x(s),\tilde{\varphi}_x)\,ds - \lambda(\varphi_x + \psi, \tilde{\varphi}_x),
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$-\Big(\underbrace{-\rho_1\varphi+\rho_1 f_2+\rho_1 f_1+k\int_0^\infty g_1(s)\xi_x(s)\,ds}_{G_1},\tilde{\varphi}\Big)=\Big(-k\int_0^\infty g_1(s)\eta_x(s)\,ds-\lambda(\varphi_x+\psi),\tilde{\varphi}_x\Big).$$

Como $G_1\in L^2$, pela definição de derivada fraca, segue que

$$-k\int_0^\infty g_1(s)\eta_{xx}(s)\,ds-\lambda(\varphi_x+\psi)_x=-\rho_1\varphi+\rho_1 f_2+\rho_1 f_1+k\int_0^\infty g_1(s)\xi_x(s)\,ds,$$

de onde,

$$\lambda\varphi_{xx}+k\int_0^\infty g_1(s)\eta_{xx}(s)\,ds=\rho_1\varphi-\rho_1 f_2-\rho_1 f_1-\lambda\psi_x-k\int_0^\infty g_1(s)\xi_x(s)\,ds\in L^2$$

e, além disso,

$$\rho_1\Phi-\lambda(\varphi_x+\psi)_x-k\int_0^\infty g_1(s)(\eta_{xx}(s)+\xi_x(s))\,ds=\rho_1 f_2,$$

ou seja, vale (4.31). Agora, substituindo h em (4.42) temos que

$$\begin{aligned}
&(\lambda+k\alpha_1)(\varphi_x+\psi,\tilde{\psi})+\rho_2(\psi,\tilde{\psi})+(\beta+b\alpha_2)(\psi_x,\tilde{\psi}_x)\\
=\;&\rho_2(f_4,\tilde{\psi})+\rho_2(f_3,\tilde{\psi})-b\int_0^\infty g_2(s)((\phi_{f_6})_x(s),\tilde{\psi}_x)\,ds+b\alpha_2((f_3)_x,\tilde{\psi}_x)\\
-\;&k\int_0^\infty g_1(s)((\phi_{f_5})_x(s),\tilde{\psi})\,ds+k\alpha_1((f_1)_x,\tilde{\psi})-k\int_0^\infty g_1(s)((\phi_{f_6})(s),\tilde{\psi})\,ds\\
+\;&k\alpha_1((f_3,\tilde{\psi}).
\end{aligned}\tag{4.46}$$

Mas, por outro lado, temos que

$$((\phi_{f_6})_x(s),\tilde{\psi}_x)=(\xi_x(s),\tilde{\psi}_x)-(1-e^{-s})(\psi_x,\tilde{\psi}_x)+(1-e^{-s})((f_3)_x,\tilde{\psi}_x),\tag{4.47}$$

$$((\phi_{f_5})_x(s),\tilde{\psi})=(\eta_x(s),\tilde{\psi})-(1-e^{-s})(\varphi_x,\tilde{\psi})+(1-e^{-s})((f_1)_x,\tilde{\psi}),\tag{4.48}$$

$$((\phi_{f_6})_x(s),\tilde{\psi})=(\xi(s),\tilde{\psi})-(1-e^{-s})(\psi,\tilde{\psi})+(1-e^{-s})((f_3),\tilde{\psi}).\tag{4.49}$$

Logo, substituindo (4.47)-(4.49) em (4.46) segue que

$$\begin{aligned}
&\lambda(\varphi_x+\psi,\tilde{\psi})+\rho_2(\psi,\tilde{\psi})-\rho_2(f_4,\tilde{\psi})-\rho_2(f_3,\tilde{\psi})+k\int_0^\infty g_1(s)(\eta_x(s),\tilde{\psi})\,ds\\
+\;&k\int_0^\infty g_1(s)(\xi(s),\tilde{\psi})\,ds=-\beta(\psi_x,\tilde{\psi}_x)-b\int_0^\infty g_2(s)(\xi_x(s),\tilde{\psi}_x)\,ds,
\end{aligned}$$

de onde

$$
\begin{aligned}
&- \Big(\underbrace{-\lambda(\varphi_x+\psi)-\rho_2\psi+\rho_2 f_4+\rho_2 f_3-k\int_0^\infty g_1(s)(\eta_x(s)+\xi(s))\,ds}_{G_2},\tilde{\psi}\Big)\\
&= \Big(-\beta\psi_x-b\int_0^\infty g_2(s)\xi_x(s)\,ds,\tilde{\psi}_x\Big), \quad \forall\tilde{\psi}\in H_0^1,
\end{aligned}
$$

e como $G_2 \in L^2$, pela definição de derivada fraca, temos que

$$
\begin{aligned}
&- \quad \beta\psi_{xx}-b\int_0^\infty g_2(s)\xi_{xx}(s)\,ds\\
&= \quad -\lambda(\varphi_x+\psi)-\rho_2\psi+\rho_2 f_4+\rho_2 f_3-k\int_0^\infty g_1(s)(\eta_x(s)+\xi(s))\,ds,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
&\beta\psi_{xx}+b\int_0^\infty g_2(s)\xi_{xx}(s)\,ds\\
&= \lambda(\varphi_x+\psi)+\rho_2\psi-\rho_2 f_4-\rho_2 f_3+k\int_0^\infty g_1(s)(\eta_x(s)+\xi(s))\,ds \in L^2
\end{aligned}
$$

e, além disso,

$$
\rho_2\Psi-\beta\psi_{xx}+\lambda(\varphi_x+\psi)-b\int_0^\infty g_2(s)\xi_{xx}(s)\,ds+k\int_0^\infty g_1(s)(\eta_x(s)+\xi(s))\,ds=\rho_2 f_4,
$$

isto é, vale (4.33). Portanto, concluímos que $U=(\varphi,\Phi,\psi,\Psi,\eta,\xi)\in D(A)$ é a única solução de $(I-A)U=F$, como desejado. □

Teorema 4.5. *Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido em* (4.24). *Então, A é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em $\mathcal{H}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.67 basta mostrarmos que A é dissipativo em $\mathcal{H}$, que o operador $I-A : D(A)\subset\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ é sobrejetor e que $\overline{D(A)}=\mathcal{H}$. Pelos lemas 4.2 e 4.4 segue a dissipatividade de A e a sobrejetividade de $I-A$. A densidade do domínio do operador segue do Teorema 2.28 e do fato de $\mathcal{H}$ ser um espaço de Hilbert e, portanto, reflexivo. □

Teorema 4.6. *Se $U_0 \in D(A)$, então o problema* (4.23) *possui uma única solução*

$$
U \in C([0,\infty),D(A))\cap C^1([0,\infty),\mathcal{H}).
$$

Demonstração. A demonstração segue dos teoremas 2.69 e 4.5. □

Baseando-se nas ideias de [14], mostraremos que a solução do problema decai exponencialmente, independentemente da hipótese (1.6).

4.2 Estabilidade Exponencial

Nessa seção vamos mostrar que a solução do problema (4.14)-(4.19) é exponencialmente estável sem assumir a hipótese (1.6). Para isso, vamos utilizar o método da energia. Dessa forma, nosso objetivo inicial é mostrarmos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}E(t) + C\epsilon E(t) \leq 0,$$

onde a energia $E(t)$ do sistema no tempo $t \geq 0$ é definida por

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\bigg(\|\varphi_x(t)\|^2 + \|\varphi_t(t)\|^2 + \|\psi_x(t)\|^2 + \|\psi_t(t)\|^2 + \int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x^t(s)\|^2\,ds \\ &+ \int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x^t(s)\|^2\,ds + \int_0^\infty g_1(s)\|\xi^t(s)\|^2\,ds \bigg). \end{aligned} \tag{4.50}$$

No que segue, omitiremos a variável t e utilizaremos a seguinte notação

$$v = \varphi_t + \epsilon\varphi \quad \text{e} \quad w = \psi_t + \epsilon\psi, \quad 0 < \epsilon < 1.$$

Lema 4.7. *Considere* $0 < \epsilon < 1$. *Então,*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt} &\Big\{ \rho_1\|v\|^2 + \lambda\|\varphi_x + \psi\|^2 + \epsilon^2\rho_1\|\varphi\|^2 + \rho_2\|w\|^2 + \beta\|\psi_x\|^2 + \epsilon^2\rho_2\|\psi\|^2 \\ &+ k\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s) + \xi(s)\|^2\,ds + b\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds \Big\} \\ &+ \lambda\epsilon\|\varphi_x + \psi\|^2 - \epsilon\rho_1\|v\|^2 + \epsilon^3\rho_1\|\varphi\|^2 + \beta\epsilon\|\psi_x\|^2 + \epsilon^3\rho_2\|\psi\|^2 - \epsilon\rho_2\|w\|^2 \\ &- \frac{k}{2}\int_0^\infty g_1'(s)\|\eta_x(s) + \xi(s)\|^2\,ds - \frac{b}{2}\int_0^\infty g_2'(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds \\ &= R_1, \end{aligned}$$

onde

$$R_1 = Re\bigg[-b\epsilon\int_0^\infty g_2(s)(\psi_x, \xi_x(s))\,ds - k\epsilon\int_0^\infty g_1(s)(\varphi_x + \psi, \eta_x(s) + \xi(s))\,ds \bigg].$$

Demonstração. Seja $0 < \epsilon < 1$ fixado. A demonstração será feita em etapas.

Passo 1: Multiplicando (4.14) por $v = \varphi_t + \epsilon\varphi$ em L^2 obtemos:

$$\rho_1(\varphi_{tt}, \varphi_t + \epsilon\varphi) - \lambda(\varphi_{xx} + \psi_x, \varphi_t + \epsilon\varphi) - k\int_0^\infty g_1(s)(\eta_{xx}(s) + \xi_x(s), v)\,ds = 0,$$

utilizando integração por partes obtemos

$$\begin{aligned}
& \rho_1(\varphi_{tt} + \epsilon\varphi_t, \varphi_t + \epsilon\varphi) - \rho_1(\epsilon\varphi_t, \varphi_t + \epsilon\varphi) + \lambda(\varphi_x, \varphi_{tx} + \epsilon\varphi_x) - \lambda(\psi_x, v) \\
+ & \ k\int_0^\infty g_1(s)(\eta_x(s), v_x)\, ds - k\int_0^\infty g_1(s)(\xi_x(s), v)\, ds - \epsilon\rho_1\|v\|^2 \\
+ & \ \epsilon\rho_1(\varphi_t + \epsilon\varphi, \varphi_t + \epsilon\varphi) = 0,
\end{aligned}$$

ou melhor,

$$\begin{aligned}
& \rho_1(v_t, v) - \rho_1\epsilon(\varphi_t, \varphi_t) - \rho_1\epsilon^2(\varphi_t, \varphi) + \lambda(\varphi_x, \varphi_{tx}) + \lambda\epsilon(\varphi_x, \varphi_x) - \lambda(\psi_x, v) \\
- & \ \epsilon\rho_1\|v\|^2 + \epsilon\rho_1(\varphi_t, \varphi_t) + \epsilon^2\rho_1(\varphi_t, \varphi) + \epsilon^2\rho_1(\varphi, \varphi_t) + \epsilon^3\rho_1(\varphi, \varphi) \\
+ & \ k\int_0^\infty g_1(s)(\eta_x(s), v_x)ds - k\int_0^\infty g_1(s)(\xi_x(s), v)ds = 0.
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Tomando a parte real em (4.51) segue que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\rho_1\|v\|^2 + \lambda\|\varphi_x\|^2 + \epsilon^2\rho_1\|\varphi\|^2\Big\} + \lambda\epsilon\|\varphi_x\|^2 - \epsilon\rho_1\|v\|^2 + \epsilon^3\rho_1\|\varphi\|^2 \\
- & \ \lambda Re(\psi_x, v) + k\int_0^\infty g_1(s)Re(\eta_x(s), v_x)\, ds - k\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi_x(s), v)\, ds \\
= & \ 0.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Passo 2: Multiplicando (4.15) por $w = \psi_t + \epsilon\psi$ em L^2 obtemos:

$$\begin{aligned}
& \rho_2(\psi_{tt}, \psi_t + \epsilon\psi) - \beta(\psi_{xx}, \psi_t + \epsilon\psi) + \lambda(\varphi_x + \psi, \psi_t + \epsilon\psi) \\
- & \ b\int_0^\infty g_2(s)(\xi_{xx}(s), w)\, ds + k\int_0^\infty g_1(s)(\eta_x(s) + \xi(s), w)\, ds = 0,
\end{aligned}$$

e usando integração por partes segue que

$$\begin{aligned}
& \rho_2(\psi_{tt} + \epsilon\psi_t, \psi_t + \epsilon\psi) - \rho_2(\epsilon\psi_t, \psi_t + \epsilon\psi) + \beta(\psi_x, \psi_{tx}) + \beta\epsilon(\psi_x, \psi_x) \\
+ & \ \lambda(\varphi_x, w) + \lambda(\psi, \psi_t) + \lambda\epsilon(\psi, \psi) + b\int_0^\infty g_2(s)(\xi_x(s), w_x)\, ds \\
+ & \ k\int_0^\infty g_1(s)(\eta_x(s) + \xi(s), w)\, ds - \epsilon\rho_2\|w\|^2 + \epsilon\rho_2(\psi_t + \epsilon\psi, \psi_t + \epsilon\psi) = 0,
\end{aligned}$$

de onde, vem que

$$\begin{aligned}
& \rho_2(w_t, w) - \rho_2\epsilon(\psi_t, \psi_t) - \rho_2\epsilon^2(\psi_t, \psi) + \beta(\psi_x, \psi_{tx}) + \beta\epsilon\|\psi_x\|^2 + \lambda(\varphi_x, w) \\
+ & \ \lambda(\psi, \psi_t) + \lambda\epsilon\|\psi\|^2 - \epsilon\rho_2\|w\|^2 + \epsilon\rho_2(\psi_t, \psi_t) + \epsilon^2\rho_2(\psi_t, \psi) + \epsilon^2\rho_2(\psi, \psi_t) \\
+ & \ \epsilon^3\rho_2(\psi, \psi) + b\int_0^\infty g_2(s)(\xi_x(s), w_x)\, ds + k\int_0^\infty g_1(s)(\eta_x(s) + \xi(s), w)\, ds = 0.
\end{aligned}$$

Tomando a parte real na igualdade anterior segue que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\quad \frac{d}{dt}\Big\{\rho_2\|w\|^2+\beta\|\psi_x\|^2+(\lambda+\epsilon^2\rho_2)\|\psi\|^2\Big\}+\beta\epsilon\|\psi_x\|^2+\epsilon(\lambda+\epsilon^2\rho_2)\|\psi\|^2\\
&-\quad \epsilon\rho_2\|w\|^2+\lambda Re(\varphi_x,w)+k\int_0^\infty g_1(s)Re(\eta_x(s)+\xi(s),w)\,ds\\
&+\quad b\int_0^\infty g_2(s)Re(\xi_x(s),w_x)\,ds=0. \qquad (4.53)
\end{aligned}$$

Passo 3: Multiplicando (4.16) por $k\eta$ em $\mathcal{M}_1$ temos que

$$k\int_0^\infty g_1(s)(\eta_{tx}(s),\eta_x(s))\,ds+k\int_0^\infty g_1(s)(\eta_{sx}(s),\eta_x(s))\,ds=k\int_0^\infty g_1(s)(\varphi_{tx},\eta_x(s))\,ds.$$

Tomando a parte real, integrando por partes em s, somando e subtraindo $\epsilon\varphi_x$ obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{k}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)\|^2\,ds-\frac{k}{2}\int_0^\infty g_1'(s)\|\eta_x(s)\|^2\,ds\\
=&\quad k\int_0^\infty g_1(s)Re(v_x,\eta_x(s))\,ds-k\epsilon\int_0^\infty g_1(s)Re(\varphi_x,\eta_x(s))\,ds. \qquad (4.54)
\end{aligned}$$

Passo 4: Multiplicando (4.17) por $b\xi$ em $\mathcal{M}_2$ temos que

$$b\int_0^\infty g_2(s)(\xi_{tx}(s),\xi_x(s))\,ds+b\int_0^\infty g_2(s)(\xi_{sx}(s),\xi_x(s))\,ds=b\int_0^\infty g_2(s)(\psi_{tx},\xi_x(s))\,ds.$$

Tomando a parte real, integrando por partes em s, somando e subtraindo $\epsilon\psi_x$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{b}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds-\frac{b}{2}\int_0^\infty g_2'(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\\
=&\quad b\int_0^\infty g_2(s)Re(w_x,\xi_x(s))\,ds-b\epsilon\int_0^\infty g_2(s)Re(\psi_x,\xi_x(s))\,ds. \qquad (4.55)
\end{aligned}$$

Passo 5: Multiplicando (4.17) por $k\xi$ em $\mathcal{N}_1$, temos que

$$k\int_0^\infty g_1(s)(\xi_t(s),\xi(s))\,ds+k\int_0^\infty g_1(s)(\xi_s(s),\xi(s))\,ds=k\int_0^\infty g_1(s)(\psi_t,\xi(s))\,ds.$$

Tomando a parte real, integrando por partes em s, somando e subtraindo $\epsilon\psi$ obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{k}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\infty g_1(s)\|\xi(s)\|^2\,ds-\frac{k}{2}\int_0^\infty g_1'(s)\|\xi(s)\|^2\,ds\\
=&\quad k\int_0^\infty g_1(s)Re(w,\xi(s))\,ds-k\epsilon\int_0^\infty g_1(s)Re(\psi,\xi(s))\,ds. \qquad (4.56)
\end{aligned}$$

Passo 6: Multiplicando (4.17) por $k\eta_x$ em $\mathcal{N}_1$ temos que

$$k\int_0^\infty g_1(s)(\xi_t(s),\eta_x(s))\,ds+k\int_0^\infty g_1(s)(\xi_s(s),\eta_x(s))\,ds=k\int_0^\infty g_1(s)(\psi_t,\eta_x(s))\,ds,$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
& k\int_0^\infty g_1(s)(\xi_t(s),\eta_x(s))\,ds - k\int_0^\infty g_1(s)(\xi_x(s),\eta_t(s))\,ds + k\int_0^\infty g_1(s)(\xi_x(s),\eta_t(s))\,ds \\
+ \;\; & k\int_0^\infty g_1(s)(\xi_s(s),\eta_x(s))\,ds = k\int_0^\infty g_1(s)(w,\eta_x(s))\,ds - k\epsilon\int_0^\infty g_1(s)(\psi,\eta_x(s))\,ds.
\end{aligned}
$$

Tomando a parte real e usando integração por partes sobre x obtemos

$$
\begin{aligned}
& k\frac{d}{dt}\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi(s),\eta_x(s))\,ds + k\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi_x(s),\eta_t(s))\,ds \\
+ \;\; & k\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi_s(s),\eta_x(s))\,ds = k\int_0^\infty g_1(s)Re(w,\eta_x(s))\,ds \\
- \;\; & k\epsilon\int_0^\infty g_1(s)Re(\psi,\eta_x(s))\,ds.
\end{aligned} \tag{4.57}
$$

Passo 7: De (4.16) temos que $\eta_{tx}+\eta_{sx}=\varphi_{tx}$, multiplicando por $k\xi$ em $\mathcal{N}_1$ segue que

$$
k\int_0^\infty g_1(s)(\xi(s),\eta_{tx}(s))\,ds + k\int_0^\infty g_1(s)(\xi(s),\eta_{sx}(s))\,ds = k\int_0^\infty g_1(s)(\xi(s),\varphi_{tx})\,ds.
$$

Usando integração por partes na última integral obtemos

$$
\begin{aligned}
& k\int_0^\infty g_1(s)(\xi(s),\eta_{tx}(s))\,ds + k\int_0^\infty g_1(s)(\xi(s),\eta_{sx}(s))\,ds \\
+ \;\; & k\int_0^\infty g_1(s)(\xi_s(s),\eta_x(s))\,ds - k\int_0^\infty g_1(s)(\xi_s(s),\eta_x(s))\,ds = -k\int_0^\infty g_1(s)(\xi_x(s),\varphi_t)\,ds,
\end{aligned}
$$

ou melhor,

$$
\begin{aligned}
& k\int_0^\infty g_1(s)(\xi_s(s),\eta_x(s))\,ds = k\int_0^\infty g_1(s)(\xi(s),\eta_{tx}(s))\,ds \\
+ \;\; & k\int_0^\infty g_1(s)(\xi(s),\eta_{sx}(s))\,ds + k\int_0^\infty g_1(s)(\xi_s(s),\eta_x(s))\,ds + k\int_0^\infty g_1(s)(\xi_x(s),\varphi_t)\,ds.
\end{aligned}
$$

Agora, usando integração por partes sobre x e somando e subtraindo $\epsilon\varphi$, obtemos

$$
\begin{aligned}
& k\int_0^\infty g_1(s)(\xi_s(s),\eta_x(s))ds = -k\int_0^\infty g_1(s)(\xi_x(s),\eta_t(s))ds \\
+ \;\; & k\int_0^\infty g_1(s)\frac{d}{ds}(\xi(s),\eta_x(s))ds + k\int_0^\infty g_1(s)(\xi_x(s),v)ds - k\epsilon\int_0^\infty g_1(s)(\xi_x(s),\varphi)ds.
\end{aligned}
$$

Tomando a parte real e usando integração por partes sobre s obtemos

$$
\begin{aligned}
& k\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi_s(s),\eta_x(s))\,ds = -k\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi_x(s),\eta_t(s))\,ds \\
- \;& k\int_0^\infty g_1'(s)Re(\xi(s),\eta_x(s))\,ds + k\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi_x(s),v)\,ds \\
- \;& k\epsilon\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi_x(s),\varphi)\,ds.
\end{aligned} \tag{4.58}
$$

Substituindo (4.58) em (4.57) segue que

$$
\begin{aligned}
& k\frac{d}{dt}\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi(s),\eta_x(s))\,ds + k\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi_x(s),\eta_t(s))\,ds \\
- \;& k\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi_x(s),\eta_t(s))\,ds - k\int_0^\infty g_1'(s)Re(\xi(s),\eta_x(s))\,ds \\
+ \;& k\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi_x(s),v)\,ds - k\epsilon\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi_x(s),\varphi)\,ds \\
= \;& k\int_0^\infty g_1(s)Re(w,\eta_x(s))\,ds - k\epsilon\int_0^\infty g_1(s)Re(\psi,\eta_x(s))\,ds.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
& k\frac{d}{dt}\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi(s),\eta_x(s))\,ds - k\int_0^\infty g_1'(s)Re(\xi(s),\eta_x(s))\,ds \\
= \;& k\int_0^\infty g_1(s)Re(w,\eta_x(s))\,ds - k\epsilon\int_0^\infty g_1(s)Re(\psi,\eta_x(s))\,ds \\
- \;& k\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi_x(s),v)\,ds + k\epsilon\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi_x(s),\varphi)\,ds.
\end{aligned} \tag{4.59}
$$

Somando (4.52)-(4.56) e (4.59) temos que

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\rho_1\|v\|^2 + \lambda\|\varphi_x\|^2 + \epsilon^2\rho_1\|\varphi\|^2 + \rho_2\|w\|^2 + \beta\|\psi_x\|^2 + (\lambda+\epsilon^2\rho_2)\|\psi\|^2 \\
+ \;& k\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)\|^2\,ds + b\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds + k\int_0^\infty g_1(s)\|\xi(s)\|^2\,ds \\
+ \;& 2k\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi(s),\eta_x(s))\,ds\Big\} + \lambda\epsilon\|\varphi_x\|^2 - \epsilon\rho_1\|v\|^2 + \epsilon^3\rho_1\|\varphi\|^2 + \beta\epsilon\|\psi_x\|^2 \\
- \;& \lambda Re[(\psi_x,v) - (\varphi_x,w)] + \epsilon(\lambda+\epsilon^2\rho_2)\|\psi\|^2 - \epsilon\rho_2\|w\|^2 - \frac{k}{2}\int_0^\infty g_1'(s)\|\eta_x(s)\|^2\,ds \\
- \;& \frac{b}{2}\int_0^\infty g_2'(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds - \frac{k}{2}\int_0^\infty g_1'(s)\|\xi(s)\|^2\,ds - k\int_0^\infty g_1'(s)Re(\xi(s),\eta_x(s))\,ds \\
= \;& -k\epsilon\int_0^\infty g_1(s)Re(\psi,\eta_x(s))\,ds + k\epsilon\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi_x(s),\varphi)\,ds \\
- \;& k\epsilon\int_0^\infty g_1(s)Re(\varphi_x,\eta_x(s))\,ds - b\epsilon\int_0^\infty g_2(s)Re(\psi_x,\xi_x(s))\,ds \\
- \;& k\epsilon\int_0^\infty g_1(s)Re(\psi,\xi(s))\,ds.
\end{aligned} \tag{4.60}
$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
-\lambda Re[(\psi_x, v) - (\varphi_x, w)] &= -\lambda Re[(\psi_x, \varphi_t + \epsilon\varphi) - (\varphi_x, \psi_t + \epsilon\psi)] \\
&= -\lambda Re[(\psi_x, \varphi_t) + \epsilon(\psi_x, \varphi) - (\varphi_x, \psi_t) + \epsilon(\varphi_x, \psi)] \\
&= -\lambda Re[-(\psi, \varphi_{tx}) - \epsilon(\psi, \varphi_x) - (\varphi_x, \psi_t) - \epsilon\overline{(\psi, \varphi_x)}] \\
&= \lambda Re(\psi, \varphi_{tx}) + \lambda Re\epsilon(\psi, \varphi_x) + \lambda Re(\varphi_x, \psi_t) + \lambda Re\epsilon\overline{(\psi, \varphi_x)} \\
&= \lambda Re(\varphi_{tx}, \psi) + \lambda Re(\varphi_x, \psi_t) + 2\lambda\epsilon Re(\psi, \varphi_x) \\
&= \lambda \frac{d}{dt} Re(\varphi_x, \psi) + 2\lambda\epsilon Re(\psi, \varphi_x). \qquad (4.61)
\end{aligned}
$$

Substituindo (4.61) em (4.60) obtemos

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{ \rho_1\|v\|^2 + \lambda\|\varphi_x\|^2 + \epsilon^2\rho_1\|\varphi\|^2 + \rho_2\|w\|^2 + \beta\|\psi_x\|^2 + (\lambda + \epsilon^2\rho_2)\|\psi\|^2 \\
+ & \ k\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s) + \xi(s)\|^2\, ds + b\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\, ds + 2\lambda Re(\varphi_x, \psi) \Big\} \\
+ & \ \lambda\epsilon\|\varphi_x\|^2 - \epsilon\rho_1\|v\|^2 + \epsilon^3\rho_1\|\varphi\|^2 + 2\lambda\epsilon Re(\psi, \varphi_x) + \beta\epsilon\|\psi_x\|^2 + (\epsilon\lambda + \epsilon^3\rho_2)\|\psi\|^2 \\
- & \ \epsilon\rho_2\|w\|^2 - \frac{k}{2}\int_0^\infty g_1'(s)\|\eta_x(s) + \xi(s)\|^2\, ds - \frac{b}{2}\int_0^\infty g_2'(s)\|\xi_x(s)\|^2\, ds \\
= & \ -k\epsilon\int_0^\infty g_1(s) Re(\varphi_x + \psi, \eta_x(s))\, ds + k\epsilon\int_0^\infty g_1(s) Re(\varphi, \xi_x(s))\, ds \\
- & \ b\epsilon\int_0^\infty g_2(s) Re(\psi_x, \xi_x(s))\, ds - k\epsilon\int_0^\infty g_1(s) Re(\psi, \xi(s))\, ds, \qquad (4.62)
\end{aligned}
$$

de onde, vem que

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{ \rho_1\|v\|^2 + \lambda\|\varphi_x + \psi\|^2 + \epsilon^2\rho_1\|\varphi\|^2 + \rho_2\|w\|^2 + \beta\|\psi_x\|^2 + \epsilon^2\rho_2\|\psi\|^2 \\
+ & \ k\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s) + \xi(s)\|^2\, ds + b\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\, ds \Big\} \\
+ & \ \lambda\epsilon\|\varphi_x + \psi\|^2 - \epsilon\rho_1\|v\|^2 + \epsilon^3\rho_1\|\varphi\|^2 + \beta\epsilon\|\psi_x\|^2 + \epsilon^3\rho_2\|\psi\|^2 - \epsilon\rho_2\|w\|^2 \\
- & \ \frac{k}{2}\int_0^\infty g_1'(s)\|\eta_x(s) + \xi(s)\|^2\, ds - \frac{b}{2}\int_0^\infty g_2'(s)\|\xi_x(s)\|^2\, ds \\
= & \ R_1, \qquad (4.63)
\end{aligned}
$$

com

$$
R_1 = Re\Big[-b\epsilon\int_0^\infty g_2(s)(\psi_x, \xi_x(s))\, ds - k\epsilon\int_0^\infty g_1(s)(\varphi_x + \psi, \eta_x(s) + \xi(s))\, ds \Big],
$$

como queríamos provar. □

Lema 4.8. *Considere* $0 < \epsilon < \dfrac{\delta^2}{4}$*, onde* $\delta > 0$ *é dado em* (4.8)*. Então,*

$$\begin{aligned} R_1 &\leq b\epsilon\sqrt{\epsilon}\|\psi_x\|^2 + k\epsilon\sqrt{\epsilon}\|\varphi_x+\psi\|^2 + \frac{\delta}{8}b\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds \\ &+ \frac{\delta}{8}k\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds \end{aligned}$$

Demonstração. Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\begin{aligned} R_1 &\leq \left| -b\epsilon\int_0^\infty g_2(s)(\psi_x,\xi_x(s))\,ds - k\epsilon\int_0^\infty g_1(s)(\varphi_x+\psi,\eta_x(s)+\xi(s))\,ds\right| \\ &\leq b\epsilon\int_0^\infty g_2(s)|(\psi_x,\xi_x(s))|\,ds + k\epsilon\int_0^\infty g_1(s)|(\varphi_x+\psi,\eta_x(s)+\xi(s))|\,ds \\ &\leq b\epsilon\int_0^\infty g_2(s)\|\psi_x\|\|\xi_x(s)\|\,ds + k\epsilon\int_0^\infty g_1(s)\|\varphi_x+\psi\|\|\eta_x(s)+\xi(s)\|\,ds. \end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Young para $\sqrt{\epsilon}$ segue que

$$\begin{aligned} R_1 &\leq b\epsilon\int_0^\infty g_2(s)\left(\sqrt{\epsilon}\|\psi_x\|^2 + \frac{1}{4\sqrt{\epsilon}}\|\xi_x(s)\|^2\right)ds \\ &+ k\epsilon\int_0^\infty g_1(s)\left(\sqrt{\epsilon}\|\varphi_x+\psi\|^2 + \frac{1}{4\sqrt{\epsilon}}\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\right)ds, \end{aligned}$$

ou melhor,

$$\begin{aligned} R_1 &\leq bb_0\epsilon\sqrt{\epsilon}\|\psi_x\|^2 + \frac{b}{4}\sqrt{\epsilon}\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds + ka_0\epsilon\sqrt{\epsilon}\|\varphi_x+\psi\|^2 \\ &+ \frac{k}{4}\sqrt{\epsilon}\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds. \end{aligned}$$

Usando o fato que $\epsilon < \dfrac{\delta^2}{4}$ e $a_0, b_0 < 1$, segue que

$$\begin{aligned} R_1 &\leq b\epsilon\sqrt{\epsilon}\|\psi_x\|^2 + k\epsilon\sqrt{\epsilon}\|\varphi_x+\psi\|^2 + \frac{\delta}{8}b\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds \\ &+ \frac{\delta}{8}k\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds, \end{aligned}$$

como queríamos. □

Tendo em vista os lemas 4.7 e 4.8, nosso objetivo é construir um funcional linear $\mathcal{L}(t)$ equivalente ao funcional de energia $E(t)$ e que satisfaz

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) + C\epsilon\mathcal{L}(t) \leq 0. \tag{4.64}$$

Considere agora o funcional

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= \frac{1}{2}\Big\{\rho_1\|v(t)\|^2+\lambda\|\varphi_x(t)+\psi(t)\|^2+\epsilon^2\rho_1\|\varphi(t)\|^2+\rho_2\|w(t)\|^2+\beta\|\psi_x(t)\|^2\\ &+ \epsilon^2\rho_2\|\psi(t)\|^2+k\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds+b\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\Big\},\quad t\geq 0.\end{aligned}$$

Provaremos que para ϵ suficientemente pequeno temos que $\mathcal{L}$ é equivalente à energia E.

Lema 4.9. *Seja* $0<\epsilon<1$. *Então, existem constantes* $C_1, C_2>0$ *tais que*

$$C_1\mathcal{L}(t)\leq E(t)\leq C_2\mathcal{L}(t), \forall t\geq 0. \tag{4.65}$$

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= \frac{1}{2}\Big\{\rho_1\|v\|^2+\lambda\|\varphi_x+\psi\|^2+\epsilon^2\rho_1\|\varphi\|^2+\rho_2\|w\|^2+\beta\|\psi_x\|^2+\epsilon^2\rho_2\|\psi\|^2\\ &+ k\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds+b\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\Big\}\\ &= \frac{1}{2}\Big\{\rho_1\|\varphi_t+\epsilon\varphi\|^2+\lambda\|\varphi_x+\psi\|^2+\epsilon^2\rho_1\|\varphi\|^2+\rho_2\|\psi_t+\epsilon\psi\|^2+\beta\|\psi_x\|^2+\epsilon^2\rho_2\|\psi\|^2\\ &+ k\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds+b\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\Big\}.\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade Triangular obtemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &\leq \frac{1}{2}\Big\{2\rho_1\|\varphi_t\|^2+2\rho_1\epsilon^2\|\varphi\|^2+2\lambda\|\varphi_x\|^2+2\lambda\|\psi\|^2+\epsilon^2\rho_1\|\varphi\|^2+2\rho_2\|\psi_t\|^2\\ &+ 2\epsilon^2\rho_2\|\psi\|^2+\beta\|\psi_x\|^2+\epsilon^2\rho_2\|\psi\|^2+2k\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)\|^2\,ds\\ &+ 2k\int_0^\infty g_1(s)\|\xi(s)\|^2\,ds+b\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\Big\}\\ &= \frac{1}{2}\Big\{2\rho_1\|\varphi_t\|^2+3\rho_1\epsilon^2\|\varphi\|^2+2\lambda\|\varphi_x\|^2+2\lambda\|\psi\|^2+2\rho_2\|\psi_t\|^2+3\epsilon^2\rho_2\|\psi\|^2\\ &+ \beta\|\psi_x\|^2+2k\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)\|^2\,ds+2k\int_0^\infty g_1(s)\|\xi(s)\|^2\,ds\\ &+ b\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\Big\},\end{aligned}$$

e usando a Desigualdade de Poincaré temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) &\leq \frac{1}{2}\Big\{2\rho_1\|\varphi_t\|^2 + 3\rho_1\epsilon^2 c_p\|\varphi_x\|^2 + 2\lambda\|\varphi_x\|^2 + 2\lambda c_p\|\psi_x\|^2 + 2\rho_2\|\psi_t\|^2 \\
&+ 3\epsilon^2\rho_2 c_p\|\psi_x\|^2 + \beta\|\psi_x\|^2 + 2k\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)\|^2\,ds + 2k\int_0^\infty g_1(s)\|\xi(s)\|^2\,ds \\
&+ b\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\Big\{2\rho_1\|\varphi_t\|^2 + (3\rho_1\epsilon^2 c_p + 2\lambda)\|\varphi_x\|^2 + (2\lambda c_p + 3\epsilon^2\rho_2 c_p + \beta)\|\psi_x\|^2 + 2\rho_2\|\psi_t\|^2 \\
&+ 2k\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)\|^2\,ds + 2k\int_0^\infty g_1(s)\|\xi(s)\|^2\,ds + b\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\Big\}.
\end{aligned}$$

Agora, pelo fato de que $\epsilon < 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) &\leq \frac{1}{2}\Big\{2\rho_1\|\varphi_t\|^2 + (3\rho_1 c_p + 2\lambda)\|\varphi_x\|^2 + (2\lambda c_p + 3\rho_2 c_p + \beta)\|\psi_x\|^2 + 2\rho_2\|\psi_t\|^2 \\
&+ 2k\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)\|^2\,ds + 2k\int_0^\infty g_1(s)\|\xi(s)\|^2\,ds + b\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\Big\} \\
&\leq \frac{1}{2}C_1\Big\{\|\varphi_t\|^2 + \|\varphi_x\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\psi_t\|^2 + \int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)\|^2\,ds \\
&+ \int_0^\infty g_1(s)\|\xi(s)\|^2\,ds + b\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\Big\} \\
&= C_1 E(t),
\end{aligned}$$

onde $C_1 = \max\{2\rho_1, 3\rho_1 c_p + 2\lambda, 2\lambda c_p + 3\rho_2 c_p + \beta, 2\rho_2, 2k, b\}$.

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1}{2}\Big(\|\varphi_x\|^2 + \|\varphi_t\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\psi_t\|^2 + \int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)\|^2\,ds \\
&+ \int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds + \int_0^\infty g_1(s)\|\xi(s)\|^2\,ds\Big) \\
&\leq \frac{1}{2}\Big(2\|\varphi_x + \psi\|^2 + 2\|\psi\|^2 + 2\|\varphi_t + \epsilon\varphi\|^2 + 2\epsilon^2\|\varphi\|^2 + \|\psi_x\|^2 \\
&+ 2\|\psi_t + \epsilon\psi\|^2 + 2\epsilon^2\|\psi\|^2 + 2\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s) + \xi(s)\|^2\,ds \\
&+ 2\int_0^\infty g_1(s)\|\xi(s)\|^2\,ds + \int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds + \int_0^\infty g_1(s)\|\xi(s)\|^2\,ds\Big).
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Poincaré e pela hipótese (4.9), segue que

$$\begin{aligned}
E(t) &\leq \frac{1}{2}\bigg(2\|\varphi_x+\psi\|^2+2c_p\|\psi_x\|^2+2\|v\|^2+2\epsilon^2\|\varphi\|^2+\|\psi_x\|^2+2\|w\|^2\\
&+ 2\epsilon^2\|\psi\|^2+2\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds+2c_p\gamma\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\\
&+ \int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds+c_p\gamma\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\bigg)\\
&= \frac{1}{2}\bigg(\frac{2}{\lambda}\lambda\|\varphi_x+\psi\|^2+\frac{2c_p+1}{\beta}\beta\|\psi_x\|^2+\frac{2}{\rho_1}\rho_1\|v\|^2+\frac{2}{\rho_1}\rho_1\epsilon^2\|\varphi\|^2\\
&+ \frac{2}{\rho_2}\rho_2\|w\|^2+\frac{2}{\rho_2}\rho_2\epsilon^2\|\psi\|^2+\frac{2}{k}k\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds\\
&+ \frac{3c_p\gamma+1}{b}b\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\bigg)\\
&\leq \frac{1}{2}C_2\bigg(\lambda\|\varphi_x+\psi\|^2+\beta\|\psi_x\|^2+\rho_1\|v\|^2+\rho_1\epsilon^2\|\varphi\|^2+\rho_2\|w\|^2\\
&+ \rho_2\epsilon^2\|\psi\|^2+k\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds+b\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\bigg)\\
&= C_2\mathcal{L}(t),
\end{aligned}$$

onde $C_2=\max\left\{\frac{2}{\lambda},\frac{2c_p+1}{\beta},\frac{2}{\rho_1},\frac{2}{\rho_2},\frac{2}{k},\frac{3c_p\gamma+1}{b}\right\}$.

□

Lema 4.10. *Considere* $0<\epsilon<\min\left\{\frac{\delta^2}{4},1\right\}$, *onde* $\delta>0$ *é dado em* (4.8). *Então,*

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t)+\epsilon(\lambda-k\sqrt{\epsilon})\|\varphi_x+\psi\|^2-\epsilon\rho_1\|v\|^2+\epsilon^3\rho_1\|\varphi\|^2+\epsilon(\beta-b\sqrt{\epsilon})\|\psi_x\|^2\\
+&\ \epsilon^3\rho_2\|\psi\|^2-\epsilon\rho_2\|w\|^2+\frac{k\delta}{4}\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2ds+\frac{b\delta}{4}\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\\
-&\ \frac{k}{4}\int_0^\infty g_1'(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds-\frac{b}{4}\int_0^\infty g_2'(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\leq 0
\end{aligned}\tag{4.66}$$

Demonstração. Segue dos lemas 4.7 e 4.8 que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}&\bigg\{\rho_1\|v\|^2+\lambda\|\varphi_x+\psi\|^2+\epsilon^2\rho_1\|\varphi\|^2+\rho_2\|w\|^2+\beta\|\psi_x\|^2+\epsilon^2\rho_2\|\psi\|^2\\
&+ k\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds+b\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\bigg\}\\
&+ \lambda\epsilon\|\varphi_x+\psi\|^2-\epsilon\rho_1\|v\|^2+\epsilon^3\rho_1\|\varphi\|^2+\beta\epsilon\|\psi_x\|^2+\epsilon^3\rho_2\|\psi\|^2-\epsilon\rho_2\|w\|^2\\
&- \frac{k}{2}\int_0^\infty g_1'(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds-\frac{b}{2}\int_0^\infty g_2'(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\\
&\leq b\epsilon\sqrt{\epsilon}\|\psi_x\|^2+k\epsilon\sqrt{\epsilon}\|\varphi_x+\psi\|^2+\frac{\delta}{8}b\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\\
&+ \frac{\delta}{8}k\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds,
\end{aligned}$$

de onde, vem que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt} & \Big\{ \rho_1\|v\|^2+\lambda\|\varphi_x+\psi\|^2+\epsilon^2\rho_1\|\varphi\|^2+\rho_2\|w\|^2+\beta\|\psi_x\|^2+\epsilon^2\rho_2\|\psi\|^2 \\
&+ k\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds+b\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\Big\} \\
&+ \epsilon(\lambda-k\sqrt{\epsilon})\|\varphi_x+\psi\|^2-\epsilon\rho_1\|v\|^2+\epsilon^3\rho_1\|\varphi\|^2+\epsilon(\beta-b\sqrt{\epsilon})\|\psi_x\|^2+\epsilon^3\rho_2\|\psi\|^2 \\
&- \epsilon\rho_2\|w\|^2-\frac{k}{2}\int_0^\infty g_1'(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds-\frac{b}{2}\int_0^\infty g_2'(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds \\
&\leq \frac{\delta}{8}b\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds+\frac{\delta}{8}k\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds.
\end{aligned}$$

Logo, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &+ \epsilon(\lambda-k\sqrt{\epsilon})\|\varphi_x+\psi\|^2-\epsilon\rho_1\|v\|^2+\epsilon^3\rho_1\|\varphi\|^2+\epsilon(\beta-b\sqrt{\epsilon})\|\psi_x\|^2+\epsilon^3\rho_2\|\psi\|^2 \\
&- \epsilon\rho_2\|w\|^2-\frac{k}{2}\int_0^\infty g_1'(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds-\frac{b}{2}\int_0^\infty g_2'(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds \\
&\leq \frac{\delta}{8}b\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds+\frac{\delta}{8}k\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds,
\end{aligned}$$

usando (4.8) obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &+ \epsilon(\lambda-k\sqrt{\epsilon})\|\varphi_x+\psi\|^2-\epsilon\rho_1\|v\|^2+\epsilon^3\rho_1\|\varphi\|^2+\epsilon(\beta-b\sqrt{\epsilon})\|\psi_x\|^2+\epsilon^3\rho_2\|\psi\|^2 \\
&- \epsilon\rho_2\|w\|^2-\frac{k}{4}\int_0^\infty g_1'(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds-\frac{k}{4}\int_0^\infty g_1'(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds \\
&- \frac{b}{4}\int_0^\infty g_2'(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds-\frac{b}{4}\int_0^\infty g_2'(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds \\
&+ \frac{k}{8}\int_0^\infty g_1'(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds+\frac{b}{8}\int_0^\infty g_2'(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Novamente de (4.8) obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t)+\epsilon(\lambda-k\sqrt{\epsilon})\|\varphi_x+\psi\|^2-\epsilon\rho_1\|v\|^2+\epsilon^3\rho_1\|\varphi\|^2+\epsilon(\beta-b\sqrt{\epsilon})\|\psi_x\|^2 \\
+\;& \epsilon^3\rho_2\|\psi\|^2-\epsilon\rho_2\|w\|^2+\frac{k\delta}{4}\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds+\frac{b\delta}{4}\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds \\
-\;& \frac{k}{4}\int_0^\infty g_1'(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds-\frac{b}{4}\int_0^\infty g_2'(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\leq 0. \qquad (4.67)
\end{aligned}$$

□

Observe que devido aos coeficientes negativos que acompanham os termos $\|v\|^2$ e $\|w\|^2$ em (4.67) este funcional $\mathcal{L}$ não satisfaz a desigualdade (4.64). A fim de corrigir estes coeficientes negativos, construiremos um novo funcional $\mathcal{L}_0(t)$ equivalente ao funcional

$\mathcal{L}(t)$ e que satisfaz

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}_0(t) + C\epsilon\mathcal{L}_0(t) \leq 0. \tag{4.68}$$

Considere $\omega = 8\epsilon \max\left\{\frac{\rho_1}{a_0}, \frac{\rho_2}{b_0}\right\}$ para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, que será escolhido posteriormente, e defina

$$\mathcal{L}_0(t) = \mathcal{L}(t) + \omega J(t) + \omega I(t) + \omega H(t), \quad t \geq 0,$$

onde

$$J(t) = -\int_0^\infty g_1(s) Re(\varphi_t, \eta(s))\, ds, \quad t \geq 0, \tag{4.69}$$

$$I(t) = -\int_0^\infty g_2(s) Re(\psi_t, \xi(s))\, ds, \quad t \geq 0 \tag{4.70}$$

e

$$H(t) = -m\int_0^\infty g_1(s) Re(\xi(s), \xi(s) + 2\eta_x(s))\, ds, \quad t \geq 0, \tag{4.71}$$

em que

$$m = \max\left\{\frac{a_1 c_p}{2a_0}, \frac{b_1 c_p}{2b_0}\right\},$$

com a_0, a_1, b_0, b_1 dados em (4.6) e (4.7).

Mostraremos que, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}_0$ são equivalentes.

Lema 4.11. *Considere* $0 < \epsilon < \min\left\{\frac{a_0}{16\rho_1 M}, \frac{b_0}{16\rho_2 M}\right\}$ *onde*

$$M = \max\left\{\frac{a_0}{\rho_1}, \frac{b_0}{\rho_2}, \frac{c_p + 2m}{k}, \frac{(c_p + 4m)c_p\gamma + \frac{c_p}{2}}{b}\right\}.$$

Então,

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}_0(t) \leq \frac{3}{2}\mathcal{L}(t),\ t \geq 0. \tag{4.72}$$

Demonstração. Primeiramente, temos que

$$\mathcal{L}_0(t) - \mathcal{L}(t) = \omega J(t) + \omega I(t) + \omega H(t),$$

de onde

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}_0(t) - \mathcal{L}(t)| &\leq \omega|J(t)| + \omega|I(t)| + \omega|H(t)| \\
&\leq \omega\int_0^\infty g_1(s)|(\varphi_t, \eta(s))|\, ds + \omega\int_0^\infty g_2(s)|(\psi_t, \xi(s))|\, ds \\
&+ m\omega\int_0^\infty g_1(s)|(\xi(s), \xi(s) + 2\eta_x(s))|\, ds.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Holder obtemos

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{L}_0(t)-\mathcal{L}(t)| &\leq \omega\int_0^\infty g_1(s)\|\varphi_t\|\|\eta(s)\|\,ds+\omega\int_0^\infty g_2(s)\|\psi_t\|\|\xi(s)\|\,ds\\
&+ m\omega\int_0^\infty g_1(s)\|\xi(s)\|\|\xi(s)\|\,ds+2m\omega\int_0^\infty g_1(s)\|\xi(s)\|\|\eta_x(s)\|\,ds,
\end{aligned}
$$

e aplicando a Desigualdade de Young, segue que

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{L}_0(t)-\mathcal{L}(t)| &\leq \omega\int_0^\infty g_1(s)\Big(\frac{\|\varphi_t\|^2}{2}+\frac{\|\eta(s)\|^2}{2}\Big)\,ds+\omega\int_0^\infty g_2(s)\Big(\frac{\|\psi_t\|^2}{2}+\frac{\|\xi(s)\|^2}{2}\Big)\,ds\\
&+ m\omega\int_0^\infty g_1(s)\|\xi(s)\|^2\,ds+m\omega\int_0^\infty g_1(s)\Big(\|\xi(s)\|^2+\|\eta_x(s)\|^2\Big)\,ds.
\end{aligned}
$$

Agora, usando a Desigualdade de Poincaré obtemos

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{L}_0(t)-\mathcal{L}(t)| &\leq \frac{\omega a_0}{2}\|\varphi_t\|^2+\frac{\omega c_p}{2}\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)\|^2\,ds+\frac{\omega b_0}{2}\|\psi_t\|^2\\
&+ \frac{\omega c_p}{2}\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds+m\omega\int_0^\infty g_1(s)\|\xi(s)\|^2\,ds\\
&+ \omega\int_0^\infty g_1(s)\|\xi(s)\|^2\,ds+m\omega\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)\|^2\,ds,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{L}_0(t)-\mathcal{L}(t)| &\leq \frac{\omega a_0}{2}\|\varphi_t\|^2+\omega c_p\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds\\
&+ \omega c_p\int_0^\infty g_1(s)\|\xi(s)\|^2\,ds+\frac{\omega b_0}{2}\|\psi_t\|^2+\frac{\omega c_p}{2}\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\\
&+ m\omega\int_0^\infty g_1(s)\|\xi(s)\|^2\,ds+m\omega\int_0^\infty g_1(s)\|\xi(s)\|^2\,ds\\
&+ 2m\omega\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds+2m\omega\int_0^\infty g_1(s)\|\xi(s)\|^2\,ds,
\end{aligned}
$$

ou ainda,

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{L}_0(t)-\mathcal{L}(t)| &\leq \omega a_0\|v\|^2+\omega a_0\epsilon^2\|\varphi\|^2+(\omega c_p+2m\omega)\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds\\
&+ (\omega c_p+4m\omega)\int_0^\infty g_1(s)\|\xi(s)\|^2\,ds+\omega b_0\|w\|^2+\omega b_0\epsilon^2\|\psi\|^2\\
&+ \frac{\omega c_p}{2}\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\\
&\leq \omega a_0\|v\|^2+\omega a_0\epsilon^2\|\varphi\|^2+(\omega c_p+2m\omega)\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds\\
&+ (\omega c_p+4m\omega)L\gamma\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds+\omega b_0\|w\|^2+\omega b_0\epsilon^2\|\psi\|^2\\
&+ \frac{\omega c_p}{2}\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds.
\end{aligned}
$$

Logo, temos que

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{L}_0(t)-\mathcal{L}(t)| &\leq \omega\bigg[\frac{a_0}{\rho_1}\rho_1\|v\|^2+\frac{a_0}{\rho_1}\rho_1\epsilon^2\|\varphi\|^2+\frac{(c_p+2m)}{k}k\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds\\
&+\frac{((c_p+4m)c_p\gamma+\frac{c_p}{2})}{b}b\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds+\frac{b_0}{\rho_2}\rho_2\|w\|^2+\frac{b_0}{\rho_2}\rho_2\epsilon^2\|\psi\|^2\bigg]\\
&\leq \omega M\mathcal{L}(t),
\end{aligned}
$$

onde $M=\max\left\{\dfrac{a_0}{\rho_1},\dfrac{b_0}{\rho_2},\dfrac{c_p+2m}{k},\dfrac{(c_p+4m)c_p\gamma+\frac{c_p}{2}}{b}\right\}$. Assim,

$$(-\omega M+1)\mathcal{L}(t)\leq\mathcal{L}_0(t)\leq(\omega M+1)\mathcal{L}(t).$$

Como $0<\epsilon<\min\left\{\dfrac{a_0}{16\rho_1 M},\dfrac{b_0}{16\rho_2 M}\right\}$ segue que $\omega\leq\frac{1}{2M}$ de onde obtemos que

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}(t)\leq\mathcal{L}_0(t)\leq\frac{3}{2}\mathcal{L}(t).$$

$\square$

Finalmente, vamos mostrar que $\mathcal{L}_0$ satisfaz (4.68). Para isso, vamos obter estimativas para a derivada em relação à t de cada funcional J, I e H definidos em (4.69), (4.70) e (4.71), respectivamente, como segue nos próximos três lemas.

Para os próximos resultados definamos

$$A:=\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds+\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds. \tag{4.73}$$

Lema 4.12. *Sejam J dado em* (4.69) *e A dado em* (4.73). *Então, existe uma constante $c_1>0$ tal que*

$$\frac{d}{dt}J(t)\leq c_1\mathcal{L}(t)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}-\frac{a_0}{2}\|\varphi_t\|^2-\frac{a_1c_p}{2a_0}\int_0^\infty g_1'(s)\|\eta_x(s)\|^2\,ds.$$

Demonstração. Considere a derivada de J em relação à t que é dada por

$$\frac{d}{dt}J(t)=-\int_0^\infty g_1(s)Re(\varphi_{tt},\eta(s))\,ds-\int_0^\infty g_1(s)Re(\varphi_t,\eta_t(s))\,ds. \tag{4.74}$$

Usando (4.14) temos que

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^\infty g_1(s)Re(\varphi_{tt},\eta(s))\,ds\\
&=-\int_0^\infty g_1(s)Re\bigg(\frac{\lambda}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x+\frac{k}{\rho_1}\int_0^\infty g_1(r)(\eta_x+\xi)_x(r)\,dr,\eta(s)\bigg)\,ds,
\end{aligned}
$$

e usando integração por partes segue que

$$
\begin{aligned}
& - \int_0^\infty g_1(s) Re(\varphi_{tt}, \eta(s))\, ds \\
= & \ \frac{\lambda}{\rho_1} \int_0^\infty g_1(s) Re((\varphi_x + \psi), \eta_x(s))\, ds + \frac{k}{\rho_1} \int_0^\infty g_1(s) Re\Big(\int_0^\infty g_1(r)(\eta_x + \xi)(r)\, dr, \eta_x(s) \Big)\, ds.
\end{aligned}
$$

Aplicando a Desigualdade de Holder obtemos

$$
\begin{aligned}
& - \int_0^\infty g_1(s) Re(\varphi_{tt}, \eta(s))\, ds \\
\leq & \ \frac{\lambda}{\rho_1} \int_0^\infty g_1(s) \|\varphi_x + \psi\| \|\eta_x(s)\|\, ds + \frac{k}{\rho_1} \int_0^\infty g_1(s) \Big\| \int_0^\infty g_1(r)(\eta_x + \xi)(r)\, dr \Big\| \|\eta_x(s)\|\, ds \\
= & \ \frac{\lambda}{\rho_1} \int_0^\infty g_1^{\frac{1}{2}}(s) \|\varphi_x + \psi\| g_1^{\frac{1}{2}}(s) \|\eta_x(s)\|\, ds \\
+ & \ \frac{k}{\rho_1} \int_0^\infty g_1^{\frac{1}{2}}(s) \Big\| \int_0^\infty g_1(r)(\eta_x + \xi)(r)\, dr \Big\| g_1^{\frac{1}{2}}(s) \|\eta_x(s)\|\, ds \\
\leq & \ \frac{\lambda}{\rho_1} \Big(\int_0^\infty g_1(s) \|\varphi_x + \psi\|^2\, ds \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_0^\infty g_1(s) \|\eta_x(s)\|^2\, ds \Big)^{\frac{1}{2}} \\
+ & \ \frac{k}{\rho_1} \Big(\int_0^\infty g_1(s) \Big\| \int_0^\infty g_1(r)(\eta_x + \xi)(r)\, dr \Big\|^2 ds \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_0^\infty g_1(s) \|\eta_x(s)\|^2\, ds \Big)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

ou melhor,

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty g_1(s) Re(\varphi_{tt}, \eta(s))\, ds \ \leq & \ \frac{\lambda}{\rho_1} a_0^{\frac{1}{2}} \|\varphi_x + \psi\| \Big(\int_0^\infty g_1(s) \|\eta_x(s)\|^2\, ds \Big)^{\frac{1}{2}} \\
+ & \ \frac{k}{\rho_1} a_0^{\frac{1}{2}} \Big(\Big\| \int_0^\infty g_1(s)(\eta_x + \xi)(s)\, ds \Big\|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_0^\infty g_1(s) \|\eta_x(s)\|^2\, ds \Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Usando as desigualdades de Holder e Triangular obtemos

$$
\begin{aligned}
& - \int_0^\infty g_1(s) Re(\varphi_{tt}, \eta(s))\, ds \\
\leq & \ \frac{\lambda}{\rho_1} a_0^{\frac{1}{2}} \|\varphi_x + \psi\| \Big(2 \int_0^\infty g_1(s) \|\eta_x(s) + \xi(s)\|^2 ds + 2 \int_0^\infty g_1(s) \|\xi(s)\|^2\, ds \Big)^{\frac{1}{2}} \\
+ & \ \frac{k}{\rho_1} a_0^{\frac{1}{2}} \Big(a_0 \int_0^\infty g_1(s) \|\eta_x(s) + \xi(s)\|^2\, ds \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_0^\infty g_1(s) \|\eta_x(s)\|^2\, ds \Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Agora, pela Desigualdade de Poincaré e usando o fato que $g_1 \leq \gamma g_2$, segue que

$$
\begin{aligned}
& - \int_0^\infty g_1(s) Re(\varphi_{tt}, \eta(s))\, ds \\
\leq & \ \frac{\lambda}{\rho_1} a_0^{\frac{1}{2}} \|\varphi_x + \psi\| \Big(2 \int_0^\infty g_1(s) \|\eta_x(s) + \xi(s)\|^2\, ds + 2 c_p \gamma \int_0^\infty g_2(s) \|\xi_x(s)\|^2\, ds \Big)^{\frac{1}{2}} \\
+ & \ \frac{k}{\rho_1} a_0 \Big(\int_0^\infty g_1(s) \|\eta_x(s) + \xi(s)\|^2\, ds \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_0^\infty g_1(s) \|\eta_x(s)\|^2\, ds \Big)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
- & \int_0^\infty g_1(s)Re(\varphi_{tt},\eta(s))\,ds \\
\leq & \frac{\lambda}{\rho_1}a_0^{\frac{1}{2}}M_1\|\varphi_x+\psi\|\left(\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds+\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
+ & k\frac{a_0}{\rho_1}E(t)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 4.9 obtemos

$$\begin{aligned}
-\int_0^\infty g_1(s)Re(\varphi_{tt},\eta(s))\,ds &\leq \frac{a_0^{\frac{1}{2}}}{\rho_1}M_1\mathcal{L}(t)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}+\frac{ka_0}{\rho_1}C_2\mathcal{L}(t)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c_1\mathcal{L}(t)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}, \qquad (4.75)
\end{aligned}$$

em que $M_1=\max\{2,2c_p\gamma\}$ e $c_1=\dfrac{a_0^{\frac{1}{2}}}{\rho_1}M_1+\dfrac{ka_0}{\rho_1}C_2$.

Por outro lado, usando (4.16) temos que

$$\begin{aligned}
-\int_0^\infty g_1(s)Re(\varphi_t,\eta_t(s))\,ds &= -\int_0^\infty g_1(s)Re(\varphi_t,\varphi_t-\eta_s(s))\,ds \\
&= -\int_0^\infty g_1(s)Re(\varphi_t,\varphi_t)\,ds+\int_0^\infty g_1(s)Re(\varphi_t,\eta_s(s))\,ds \\
&= -\int_0^\infty g_1(s)\|\varphi_t\|^2\,ds+\int_0^\infty g_1(s)\frac{d}{ds}Re(\varphi_t,\eta(s))\,ds.
\end{aligned}$$

Agora, usando integração por partes e a Desigualdade de Holder obtemos

$$\begin{aligned}
-\int_0^\infty g_1(s)Re(\varphi_t,\eta_t(s))\,ds &= -a_0\|\varphi_t\|^2-\int_0^\infty g_1'(s)Re(\varphi_t,\eta(s))\,ds \\
&\leq -a_0\|\varphi_t\|^2-\int_0^\infty g_1'(s)|(\varphi_t,\eta(s))|\,ds \\
&\leq -a_0\|\varphi_t\|^2-\int_0^\infty g_1'(s)\|\varphi_t\|\|\eta(s)\|\,ds.
\end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Young com $\epsilon=\dfrac{a_0}{2a_1}$ segue que

$$-\int_0^\infty g_1(s)Re(\varphi_t,\eta_t(s))\,ds \leq -a_0\|\varphi_t\|^2-\int_0^\infty g_1'(s)\left(\frac{a_0}{2a_1}\|\varphi_t\|^2+\frac{a_1}{2a_0}\|\eta(s)\|^2\right)ds,$$

e usando a Desigualdade de Poincaré temos

$$\begin{aligned}
-\int_0^\infty g_1(s)Re(\varphi_t,\eta_t(s))\,ds &\leq -a_0\|\varphi_t\|^2+\frac{a_0a_1}{2a_1}\|\varphi_t\|^2-\frac{a_1}{2a_0}c_p\int_0^\infty g_1'(s)\|\eta_x(s)\|^2\,ds \\
&\leq -\frac{a_0}{2}\|\varphi_t\|^2-\frac{a_1c_p}{2a_0}\int_0^\infty g_1'(s)\|\eta_x(s)\|^2\,ds. \qquad (4.76)
\end{aligned}$$

Logo, substituindo (4.75) e (4.76) em (4.74) segue que

$$\frac{d}{dt}J(t) \le c_1\mathcal{L}(t)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} - \frac{a_0}{2}\|\varphi_t\|^2 - \frac{a_1c_p}{2a_0}\int_0^\infty g_1'(s)\|\eta_x(s)\|^2\,ds.$$

□

Lema 4.13. *Sejam I dado em* (4.70) *e A dado em* (4.73)*. Então existe uma constante $c_2 > 0$ tal que*

$$\frac{d}{dt}I(t) \le c_2\mathcal{L}(t)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} - \frac{b_0}{2}\|\psi_t\|^2 - \frac{b_1c_p}{2b_0}\int_0^\infty g_2'(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds. \tag{4.77}$$

Demonstração. Derivando I em relação à t obtemos

$$\frac{d}{dt}I(t) = -\int_0^\infty g_2(s)Re(\psi_{tt},\xi(s))ds - \int_0^\infty g_2(s)Re(\psi_t,\xi_t(s))ds. \tag{4.78}$$

Usando (4.15) segue que

$$\begin{aligned}
- &\int_0^\infty g_2(s)Re(\psi_{tt},\xi(s))\,ds\\
= &-\frac{\beta}{\rho_2}\int_0^\infty g_2(s)Re(\psi_{xx},\xi(s))\,ds - \frac{b}{\rho_2}\int_0^\infty g_2(s)Re\bigg(\int_0^\infty g_2(r)\xi_{xx}(r)\,dr,\xi(s)\bigg)\,ds\\
+ &\frac{\lambda}{\rho_2}\int_0^\infty g_2(s)Re((\varphi_x+\psi),\xi(s))\,ds + \frac{k}{\rho_2}\int_0^\infty g_2(s)Re\bigg(\int_0^\infty g_1(r)(\eta_x+\xi)(r)\,dr,\xi(s)\bigg)\,ds,
\end{aligned}$$

e usando integração por partes temos

$$\begin{aligned}
- &\int_0^\infty g_2(s)Re(\psi_{tt},\xi(s))\,ds\\
= &\frac{\beta}{\rho_2}\int_0^\infty g_2(s)Re(\psi_x,\xi_x(s))\,ds + \frac{b}{\rho_2}\int_0^\infty g_2(s)Re\bigg(\int_0^\infty g_2(r)\xi_x(r)\,dr,\xi_x(s)\bigg)\,ds\\
+ &\frac{\lambda}{\rho_2}\int_0^\infty g_2(s)Re((\varphi_x+\psi),\xi(s))\,ds + \frac{k}{\rho_2}\int_0^\infty g_2(s)Re\bigg(\int_0^\infty g_1(r)(\eta_x+\xi)(r)\,dr,\xi(s)\bigg)\,ds,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
- &\int_0^\infty g_2(s)Re(\psi_{tt},\xi(s))\,ds\\
\le &\frac{\beta}{\rho_2}\int_0^\infty g_2(s)|(\psi_x,\xi_x(s))|\,ds + \frac{b}{\rho_2}\int_0^\infty g_2(s)\bigg|\bigg(\int_0^\infty g_2(r)\xi_x(r)\,dr,\xi_x(s)\bigg)\bigg|\,ds\\
+ &\frac{\lambda}{\rho_2}\int_0^\infty g_2(s)|((\varphi_x+\psi),\xi(s))|\,ds + \frac{k}{\rho_2}\int_0^\infty g_2(s)\bigg|\bigg(\int_0^\infty g_1(r)(\eta_x+\xi)(r)\,dr,\xi(s)\bigg)\bigg|\,ds.
\end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz segue que

$$\begin{aligned}
&- \int_0^\infty g_2(s)Re(\psi_{tt},\xi(s))\,ds \\
&\le \frac{\beta}{\rho_2}\int_0^\infty g_2(s)\|\psi_x\|\|\xi_x(s)\|\,ds + \frac{b}{\rho_2}\int_0^\infty g_2(s)\left\|\int_0^\infty g_2(r)\xi_x(r)\,dr\right\|\|\xi_x(s)\|\,ds \\
&+ \frac{\lambda}{\rho_2}\int_0^\infty g_2(s)\|\varphi_x+\psi\|\|\xi(s)\|\,ds + \frac{k}{\rho_2}\int_0^\infty g_2(s)\left\|\int_0^\infty g_1(r)(\eta_x+\xi)(r)\,dr\right\|\|\xi(s)\|\,ds \\
&= \frac{\beta}{\rho_2}\int_0^\infty g_2^{\frac12}(s)\|\psi_x\|g_2^{\frac12}(s)\|\xi_x(s)\|\,ds + \frac{b}{\rho_2}\int_0^\infty g_2^{\frac12}(s)\left\|\int_0^\infty g_2(r)\xi_x(r)\,dr\right\|g_2^{\frac12}(s)\|\xi_x(s)\|\,ds \\
&+ \frac{\lambda}{\rho_2}\int_0^\infty g_2^{\frac12}(s)\|\varphi_x+\psi\|g_2^{\frac12}(s)\|\xi(s)\|\,ds \\
&+ \frac{k}{\rho_2}\int_0^\infty g_2^{\frac12}(s)\left\|\int_0^\infty g_1(r)(\eta_x+\xi)(r)\,dr\right\|g_2^{\frac12}(s)\|\xi(s)\|\,ds.
\end{aligned}$$

Logo, pela Desigualdade de Holder, obtemos

$$\begin{aligned}
&- \int_0^\infty g_2(s)Re(\psi_{tt},\xi(s))\,ds \\
&\le \frac{\beta}{\rho_2}\left(\int_0^\infty g_2(s)\|\psi_x\|^2\,ds\right)^{\frac12}\left(\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\right)^{\frac12} \\
&+ \frac{b}{\rho_2}\left(\int_0^\infty g_2(s)\left\|\int_0^\infty g_2(r)\xi_x(r)\,dr\right\|^2 ds\right)^{\frac12}\left(\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\right)^{\frac12} \\
&+ \frac{\lambda}{\rho_2}\left(\int_0^\infty g_2(s)\|\varphi_x+\psi\|^2\,ds\right)^{\frac12}\left(\int_0^\infty g_2(s)\|\xi(s)\|^2\,ds\right)^{\frac12} \\
&+ \frac{k}{\rho_2}\left(\int_0^\infty g_2(s)\left\|\int_0^\infty g_1(r)(\eta_x(r)+\xi(r))\,dr\right\|^2 ds\right)^{\frac12}\left(\int_0^\infty g_2(s)\|\xi(s)\|^2\,ds\right)^{\frac12},
\end{aligned}$$

ou melhor,

$$\begin{aligned}
&- \int_0^\infty g_2(s)Re(\psi_{tt},\xi(s))\,ds \\
&\le \frac{\beta}{\rho_2}b_0^{\frac12}\|\psi_x\|\left(\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\right)^{\frac12} \\
&+ \frac{b}{\rho_2}b_0^{\frac12}\left(\left\|\int_0^\infty g_2(s)\xi_x(s)\,ds\right\|^2\right)^{\frac12}\left(\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\right)^{\frac12} \\
&+ \frac{\lambda}{\rho_2}b_0^{\frac12}\|\varphi_x+\psi\|\left(\int_0^\infty g_2(s)\|\xi(s)\|^2\,ds\right)^{\frac12} \\
&+ \frac{k}{\rho_2}b_0^{\frac12}\left(\left\|\int_0^\infty g_1(s)(\eta_x(s)+\xi(s))\,ds\right\|^2\right)^{\frac12}\left(\int_0^\infty g_2(s)\|\xi(s)\|^2\,ds\right)^{\frac12}.
\end{aligned}$$

Agora, aplicando a Desigualdade de Poincaré temos

$$
\begin{aligned}
& - \int_0^\infty g_2(s)Re(\psi_{tt},\xi(s))\,ds \\
\leq\ & \frac{\beta}{\rho_2} b_0^{\frac{1}{2}} \|\psi_x\| \left(\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
+\ & \frac{b}{\rho_2} b_0^{\frac{1}{2}} \left(b_0 \int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
+\ & \frac{\lambda}{\rho_2} b_0^{\frac{1}{2}} c_p \|\varphi_x + \psi\| \left(\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
+\ & \frac{k}{\rho_2} b_0^{\frac{1}{2}} c_p \left(b_0 \int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
& - \int_0^\infty g_2(s)Re(\psi_{tt},\xi(s))\,ds \\
\leq\ & \frac{b_0^{\frac{1}{2}}}{\rho_2}\mathcal{L}(t)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} + \frac{b_0}{\rho_2}\mathcal{L}(t)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} + \frac{b_0^{\frac{1}{2}}}{\rho_2}c_p\mathcal{L}(t)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} + \frac{b_0}{\rho_2}c_p\mathcal{L}(t)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} \\
\leq\ & c_2\mathcal{L}(t)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}, \qquad (4.79)
\end{aligned}
$$

onde $c_2 = \max\left\{ \frac{b_0^{\frac{1}{2}}}{\rho_2}, \frac{b_0}{\rho_2}, \frac{b_0^{\frac{1}{2}}}{\rho_2}c_p, \frac{b_0}{\rho_2}c_p \right\}$.

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
-\int_0^\infty g_2(s)Re(\psi_t,\xi_t(s))\,ds &= -\int_0^\infty g_2(s)Re(\psi_t,\psi_t-\xi_s(s))\,ds \\
&= -\int_0^\infty g_2(s)Re(\psi_t,\psi_t)\,ds + \int_0^\infty g_2(s)Re(\psi_t,\xi_s(s))\,ds \\
&= -\int_0^\infty g_2(s)\|\psi_t\|^2\,ds + \int_0^\infty g_2(s)\frac{d}{ds}Re(\psi_t,\xi(s))\,ds,
\end{aligned}
$$

e usando integração por partes e a Desigualdade de Holder obtemos

$$
\begin{aligned}
-\int_0^\infty g_2(s)Re(\psi_t,\xi_t(s))\,ds &= -b_0\|\psi_t\|^2 - \int_0^\infty g_2'(s)Re(\psi_t,\xi(s))\,ds \\
&\leq -b_0\|\psi_t\|^2 - \int_0^\infty g_2'(s)|(\psi_t,\xi(s))|\,ds \\
&\leq -b_0\|\psi_t\|^2 - \int_0^\infty g_2'(s)\|\psi_t\|\|\xi(s)\|\,ds.
\end{aligned}
$$

Pela Desigualdade de Young com $\epsilon = \dfrac{b_0}{2b_1}$ segue que

$$-\int_0^\infty g_2(s)Re(\psi_t, \xi_t(s))\,ds \;\leq\; -b_0\|\psi_t\|^2 - \int_0^\infty g_2'(s)\left(\frac{b_0}{2b_1}\|\psi_t\|^2 + \frac{b_1}{2b_0}\|\xi(s)\|^2\right)ds,$$

e agora pela Desigualdade de Poincaré obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty g_2(s)Re(\psi_t, \xi_t(s))\,ds &\leq -b_0\|\psi_t\|^2 + \frac{b_0 b_1}{2b_1}\|\psi_t\|^2 - \frac{b_1}{2b_0}c_p\int_0^\infty g_2'(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds \\ &\leq -\frac{b_0}{2}\|\psi_t\|^2 - \frac{b_1 c_p}{2b_0}\int_0^\infty g_2'(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds. \qquad (4.80)\end{aligned}$$

Substituindo (4.79) e (4.80) em (4.78) segue que

$$\frac{d}{dt}I(t) \leq c_2\mathcal{L}(t)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} - \frac{b_0}{2}\|\psi_t\|^2 - \frac{b_1 c_p}{2b_0}\int_0^\infty g_2'(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds.$$

$\square$

Lema 4.14. *Considere H dado em (4.71) e A dado em (4.73). Então, existe $c_3 > 0$ tal que*

$$\frac{d}{dt}H(t) \leq c_3\mathcal{L}(t)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} - m\int_0^\infty g_1'(s)\|\xi(s)\|^2\,ds - 2m\int_0^\infty g_1'(s)Re(\xi(s), \eta_x(s))\,ds.$$

Demonstração. Derivando H em relação à t, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(t) &= -m\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi_t(s), \xi(s) + 2\eta_x(s))\,ds - m\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi(s), \xi_t(s) + 2\eta_{tx}(s))\,ds \\ &= -m\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi_t(s), \xi(s))\,ds - 2m\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi_t(s), \eta_x(s))\,ds \\ &- m\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi(s), \xi_t(s))\,ds - m\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi(s), \eta_{tx}(s))\,ds \\ &= -2m\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi_t(s), \xi(s))\,ds - 2m\frac{d}{dt}\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi(s), \eta_x(s))\,ds.\end{aligned}$$

Usando (4.17) e (4.59) segue que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(t) &= -2m\int_0^\infty g_1(s)Re(\psi_t - \xi_s(s), \xi(s))\,ds - 2m\int_0^\infty g_1'(s)Re(\xi(s), \eta_x(s))\,ds \\ &- 2m\int_0^\infty g_1(s)Re(w, \eta_x(s))\,ds + 2m\epsilon\int_0^\infty g_1(s)Re(\psi, \eta_x(s))\,ds \\ &+ 2m\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi_x(s), v)\,ds - 2m\epsilon\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi_x(s), \varphi)\,ds,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H(t) &= -2m\int_0^\infty g_1(s)Re(\psi_t,\xi(s))\,ds + 2m\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi_s(s),\xi(s))\,ds\\
&- 2m\int_0^\infty g_1'(s)Re(\xi(s),\eta_x(s))\,ds - 2m\int_0^\infty g_1(s)Re(\psi_t-\epsilon\psi,\eta_x(s))\,ds\\
&+ 2m\epsilon\int_0^\infty g_1(s)Re(\psi,\eta_x(s))\,ds + 2m\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi_x(s),\varphi_t+\epsilon\varphi)\,ds\\
&- 2m\epsilon\int_0^\infty g_1(s)Re(\xi_x(s),\varphi)\,ds.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Holder obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H(t) &\leq 2m\int_0^\infty g_1(s)|(\psi_t,\eta_x(s)+\xi(s))|\,ds + m\int_0^\infty g_1(s)\frac{d}{ds}\|\xi(s)\|^2\,ds\\
&- 2m\int_0^\infty g_1'(s)Re(\xi(s),\eta_x(s))\,ds + 2m\int_0^\infty g_1(s)|(\xi_x(s),\varphi_t)|\,ds\\
&\leq 2m\int_0^\infty g_1(s)\|\psi_t\|\|\eta_x(s)+\xi(s)\|\,ds - m\int_0^\infty g_1'(s)\|\xi(s)\|^2\,ds\\
&- 2m\int_0^\infty g_1'(s)Re(\xi(s),\eta_x(s))\,ds + 2m\int_0^\infty g_1(s)\|\xi_x(s)\|\|\varphi_t\|\,ds\\
&\leq 2m\Big(\int_0^\infty g_1(s)\|\psi_t\|^2\,ds\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&- m\int_0^\infty g_1'(s)\|\xi(s)\|^2\,ds - 2m\int_0^\infty g_1'(s)Re(\xi(s),\eta_x(s))\,ds\\
&+ 2m\Big(\int_0^\infty g_1(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^\infty g_1(s)\|\varphi_t\|^2\,ds\Big)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

ou melhor,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H(t) &\leq 2ma_0^{\frac{1}{2}}\|\psi_t\|\Big(\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&- m\int_0^\infty g_1'(s)\|\xi(s)\|^2\,ds - 2m\int_0^\infty g_1'(s)Re(\xi(s),\eta_x(s))\,ds\\
&+ 2ma_0^{\frac{1}{2}}\gamma\|\varphi_t\|\Big(\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq 2ma_0^{\frac{1}{2}}E(t)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} - m\int_0^\infty g_1'(s)\|\xi(s)\|^2ds - 2m\int_0^\infty g_1'(s)Re(\xi(s),\eta_x(s))ds\\
&+ 2ma_0^{\frac{1}{2}}\gamma E(t)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 4.9, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H(t) &\leq 2ma_0^{\frac{1}{2}}(1+\gamma)C_2\mathcal{L}(t)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} - m\int_0^\infty g_1'(s)\|\xi(s)\|^2\,ds \\
&- 2m\int_0^\infty g_1'(s)Re(\xi(s),\eta_x(s))\,ds \\
&= c_3\mathcal{L}(t)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} - m\int_0^\infty g_1'(s)\|\xi(s)\|^2\,ds \\
&- 2m\int_0^\infty g_1'(s)Re(\xi(s),\eta_x(s))\,ds, \qquad (4.81)
\end{aligned}$$

onde $c_3 = 2ma_0^{\frac{1}{2}}(1+\gamma)C_2$.

□

Através dos lemas 4.12, 4.13 e 4.14 conseguimos uma estimativa para a derivada de $\mathcal{L}_0$ em relação à t, como segue no próximo lema.

Lema 4.15. *Seja* $0 < \epsilon < 1$. *Então,*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}_0(t) &+ \epsilon\Big(\lambda - k\sqrt{\epsilon} - \omega a_0 c_p\epsilon\Big)\|\varphi_x+\psi\|^2 + \left(-\epsilon\rho_1 + \omega\frac{a_0}{4}\right)\|v\|^2 + \epsilon^3\rho_1\|\varphi\|^2 \\
&+ \left(-\epsilon\rho_2 + \omega\frac{b_0}{4}\right)\|w\|^2 + \epsilon\left(\beta - b\sqrt{\epsilon} - \omega\epsilon\left(a_0c_p^2 + \frac{b_0}{2}c_p\right)\right)\|\psi_x\|^2 \\
&+ \epsilon^3\rho_2\|\psi\|^2 + \frac{k\delta}{4}\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2 ds + \frac{b\delta}{4}\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2 ds \\
&\leq \omega c_4\mathcal{L}(t)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{k}{4} - \omega m\right)\int_0^\infty g_1'(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2)ds \\
&+ \left(\frac{b}{4} - \omega m\right)\int_0^\infty g_2'(s)\|\xi_x(s)\|^2)ds,
\end{aligned}$$

onde $c_4 = \max\{c_1, c_2, c_3\}$.

Demonstração. Dos lemas 4.12, 4.13 e 4.14 segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\big(J(t)+I(t)+H(t)\big) &\leq c_1\mathcal{L}(t)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} - \frac{a_0}{2}\|\varphi_t\|^2 - m\int_0^\infty g_1'(s)\|\eta_x(s)\|^2\,ds + c_2\mathcal{L}(t)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} \\
&- \frac{b_0}{2}\|\psi_t\|^2 - m\int_0^\infty g_2'(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds + c_3\mathcal{L}(t)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} \\
&- m\int_0^\infty g_1'(s)\|\xi(s)\|^2\,ds - 2m\int_0^\infty g_1'(s)Re(\xi(s),\eta_x(s))\,ds \\
&\leq c_4\mathcal{L}(t)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} - \frac{a_0}{2}\|\varphi_t\|^2 - m\int_0^\infty g_1'(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds \\
&- \frac{b_0}{2}\|\psi_t\|^2 - m\int_0^\infty g_2'(s)\|\xi_x(s)\|^2 ds. \qquad (4.82)
\end{aligned}$$

Observe que:

$$\begin{aligned}
-\|\varphi_t\|^2 &= -\|v-\epsilon\varphi\|^2 = -\|v\|^2 + 2Re(v,\epsilon\varphi) - \epsilon^2\|\varphi\|^2 \\
&\leq -\|v\|^2 + 2|(v,\epsilon\varphi)| - \epsilon^2\|\varphi\|^2 \\
&\leq -\|v\|^2 + 2\left(\frac{1}{4}\|v\|^2 + \|\epsilon\varphi\|^2\right) - \epsilon^2\|\varphi\|^2 \\
&\leq -\frac{1}{2}\|v\|^2 + \epsilon^2\|\varphi\|^2 \\
&\leq -\frac{1}{2}\|v\|^2 + \epsilon^2 c_p\|\varphi_x\|^2 \\
&\leq -\frac{1}{2}\|v\|^2 + 2\epsilon^2 c_p\|\varphi_x+\psi\|^2 + 2\epsilon^2 c_p^2\|\psi_x\|^2,
\end{aligned}$$

de onde

$$\begin{aligned}
-\frac{a_0}{2}\|\varphi_t\|^2 &\leq -\frac{1}{2}\frac{a_0}{2}\|v\|^2 + 2\epsilon^2 c_p\frac{a_0}{2}\|\varphi_x+\psi\|^2 + 2\epsilon^2 c_p^2\frac{a_0}{2}\|\psi_x\|^2 \\
&= -\frac{a_0}{4}\|v\|^2 + \epsilon^2 c_p a_0\|\varphi_x+\psi\|^2 + \epsilon^2 c_p^2 a_0\|\psi_x\|^2. \qquad (4.83)
\end{aligned}$$

Além disso, de maneira análoga, obtemos

$$-\frac{b_0}{2}\|\psi_t\|^2 \leq -\frac{b_0}{4}\|w\|^2 + \epsilon^2\frac{b_0}{2}\|\psi\|^2 \leq -\frac{b_0}{4}\|w\|^2 + \epsilon^2\frac{b_0}{2}c_p\|\psi_x\|^2. \qquad (4.84)$$

Substituindo (4.83) e (4.84) em (4.82) segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(J(t)+I(t)+H(t)) &\leq c_4\mathcal{L}(t)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} - \frac{a_0}{4}\|v\|^2 + \epsilon^2 c_p a_0\|\varphi_x+\psi\|^2 + \epsilon^2 c_p^2 a_0\|\psi_x\|^2 \\
&- m\int_0^\infty g_1'(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds - \frac{b_0}{4}\|w\|^2 + \epsilon^2\frac{b_0}{2}c_p\|\psi_x\|^2 \\
&- m\int_0^\infty g_2'(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds,
\end{aligned}$$

de onde

$$\begin{aligned}
\omega\frac{d}{dt}(J(t)+I(t)+H(t)) &\leq \omega c_4\mathcal{L}(t)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} - \omega\frac{a_0}{4}\|v\|^2 + \omega\epsilon^2 c_p a_0\|\varphi_x+\psi\|^2 \\
&+ \omega(\epsilon^2 c_p^2 a_0 + \epsilon^2\frac{b_0}{2}c_p)\|\psi_x\|^2 - \omega m\int_0^\infty g_1'(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2\,ds \\
&- \omega\frac{b_0}{4}\|w\|^2 - \omega m\int_0^\infty g_2'(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds. \qquad (4.85)
\end{aligned}$$

Somando (4.85) e (4.66) obtemos

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) + \omega\frac{d}{dt}\big(J(t) + I(t) + H(t)\big) + \epsilon(\lambda - k\sqrt{\epsilon})\|\varphi_x + \psi\|^2 - \epsilon\rho_1\|v\|^2 + \epsilon^3\rho_1\|\varphi\|^2 \\
- \quad & \epsilon\rho_2\|w\|^2 + \epsilon(\beta - b\sqrt{\epsilon})\|\psi_x\|^2 + \epsilon^3\rho_2\|\psi\|^2 + \frac{k\delta}{4}\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s) + \xi(s)\|^2\,ds \\
+ \quad & \frac{b\delta}{4}\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds - \frac{k}{4}\int_0^\infty g_1'(s)\|\eta_x(s) + \xi(s)\|^2\,ds - \frac{b}{4}\int_0^\infty g_2'(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds \\
\leq \quad & \omega c_4\mathcal{L}(t)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} - \omega\frac{a_0}{4}\|v\|^2 + \omega\epsilon^2 c_p a_0\|\varphi_x + \psi\|^2 + \omega(\epsilon^2 c_p^2 a_0 + \epsilon^2\frac{b_0}{2}c_p)\|\psi_x\|^2 \\
- \quad & \omega m\int_0^\infty g_1'(s)\|\eta_x(s) + \xi(s)\|^2 ds - \omega\frac{b_0}{4}\|w\|^2 - \omega m\int_0^\infty g_2'(s)\|\xi_x(s)\|^2 ds.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}_0(t) \quad & + \quad \epsilon\Big(\lambda - k\sqrt{\epsilon} - \omega a_0 c_p\epsilon\Big)\|\varphi_x + \psi\|^2 + \Bigg(-\epsilon\rho_1 + \omega\frac{a_0}{4}\Bigg)\|v\|^2 + \epsilon^3\rho_1\|\varphi\|^2 \\
& + \quad \Bigg(-\epsilon\rho_2 + \omega\frac{b_0}{4}\Bigg)\|w\|^2 + \epsilon\Bigg(\beta - b\sqrt{\epsilon} - \omega\epsilon\Bigg(a_0 c_p^2 + \frac{b_0}{2}c_p\Bigg)\Bigg)\|\psi_x\|^2 \\
& + \quad \epsilon^3\rho_2\|\psi\|^2 + \frac{k\delta}{4}\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s) + \xi(s)\|^2\,ds + \frac{b\delta}{4}\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds \\
& \leq \quad \omega c_4\mathcal{L}(t)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{k}{4} - \omega m\right)\int_0^\infty g_1'(s)\|\eta_x(s) + \xi(s)\|^2)\,ds \\
& + \quad \left(\frac{b}{4} - \omega m\right)\int_0^\infty g_2'(s)\|\xi_x(s)\|^2)\,ds.
\end{aligned}
$$

□

Teorema 4.16. *Sob as notações anteriores, escolhendo*

$$
\epsilon < \min\left\{\frac{\lambda^2}{4k^2}, \sqrt{\frac{\lambda}{16\rho_1 c_p}}, \sqrt{\frac{\lambda b_0}{16 a_0\rho_2 c_p}}\frac{\beta^2}{9b^2}, \sqrt{\frac{\beta}{24\rho_1 c_p^2}}, \sqrt{\frac{\beta b_0}{24\rho_2 a_0 c_p^2}}, \sqrt{\frac{\beta a_0}{12\rho_1 b_0 c_p}}, \sqrt{\frac{\beta}{12\rho_2 c_p}}, \frac{k a_0}{32\rho_1 m}, \frac{k b_0}{32\rho_2 m}, \frac{b a_0}{32\rho_1 m}, \frac{b b_0}{32\rho_2 m}, \frac{\overline{C}a_0^2}{64\tilde{C}\rho_1^2}, \frac{\overline{C}b_0^2}{64\tilde{C}\rho_2^2}\right\},
$$

onde $\tilde{C} = \dfrac{c_4^2}{4\theta}$ *e* $\overline{C} = \min\left\{2, \dfrac{2\alpha_1}{\lambda}, \dfrac{2\alpha_2}{\beta}\right\}$, *em que*

$$
\alpha_1 := \lambda - k\sqrt{\epsilon} - \omega a_0 c_p\epsilon,
$$

$$
\alpha_2 := \beta - b\sqrt{\epsilon} - \omega\epsilon a_0 c_p^2 - \omega\epsilon\frac{b_0}{2}c_p,
$$

$$
\omega = 8\epsilon\max\left\{\frac{\rho_1}{a_0}, \frac{\rho_2}{b_0}\right\}
$$

e

$$\theta = \min\left\{\frac{\delta k}{8}, \frac{\delta b}{8}\right\}.$$

Então, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}_0(t) + C\epsilon\mathcal{L}(t) \leq 0, \quad t \geq 0.$$

Demonstração. Considerando a definição de ω, temos que

$$-\epsilon\rho_1 + \frac{\omega a_0}{4} \geq -\epsilon\rho_1 + \frac{8\epsilon\rho_1 a_0}{a_0 4} \geq -\epsilon\rho_1 + 2\epsilon\rho_1 = \epsilon\rho_1$$

e

$$-\epsilon\rho_2 + \frac{\omega b_0}{4} \geq -\epsilon\rho_2 + \frac{8\epsilon\rho_2 b_0}{b_0 4} \geq -\epsilon\rho_2 + 2\epsilon\rho_2 = \epsilon\rho_2.$$

Agora, como $\epsilon < \min\left\{\frac{\lambda^2}{4k^2}, \sqrt{\frac{\lambda}{16\rho_1 c_p}}, \sqrt{\frac{\lambda b_0}{16 a_0 \rho_2 c_p}}\right\}$, obtemos que

$$\sqrt{\epsilon} < \frac{\lambda}{2k} \Rightarrow k\sqrt{\epsilon} < \frac{\lambda}{2}$$

e

$$\begin{cases} \epsilon^2 < \dfrac{\lambda}{16\rho_1 c_p} \Rightarrow 8\epsilon\dfrac{\rho_1}{a_0}c_p\epsilon a_0 < \dfrac{\lambda}{2}, \\ \epsilon^2 < \dfrac{\lambda b_0}{16 a_0\rho_2 c_p} \Rightarrow 8\epsilon\dfrac{\rho_2}{b_0}c_p\epsilon a_0 < \dfrac{\lambda}{2}, \end{cases}$$

de onde

$$\omega c_p a_0 \epsilon < \frac{\lambda}{2}.$$

Portanto,

$$\alpha_1 := \lambda - k\sqrt{\epsilon} - \omega a_0 c_p \epsilon > \lambda - \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} = 0.$$

Usando o fato de que $\epsilon < \min\left\{\frac{\beta^2}{9b^2}, \sqrt{\frac{\beta}{24\rho_1 c_p^2}}, \sqrt{\frac{\beta b_0}{24\rho_2 a_0 c_p^2}}, \sqrt{\frac{\beta a_0}{12\rho_1 b_0 c_p}}, \sqrt{\frac{\beta}{12\rho_2 c_p}}\right\}$ segue que

$$\sqrt{\epsilon} < \frac{\beta}{3b} \Rightarrow b\sqrt{\epsilon} < \frac{\beta}{3},$$

e

$$\begin{cases} \epsilon^2 < \dfrac{\beta}{24\rho_1 c_p^2} \Rightarrow 8\epsilon\dfrac{\rho_1}{a_0}\epsilon a_0 c_p^2 < \dfrac{\beta}{3}, \\ \epsilon^2 < \dfrac{\beta b_0}{24 a_0 \rho_2 c_p^2} \Rightarrow 8\epsilon\dfrac{\rho_2}{b_0}\epsilon a_0 c_p^2 < \dfrac{\beta}{3}, \end{cases}$$

de onde

$$\omega c_p^2 a_0 \epsilon < \frac{\beta}{3}.$$

Temos ainda que

$$\begin{cases} \epsilon^2 < \dfrac{\beta a_0}{12\rho_1 b_0 c_p} \Rightarrow 8\epsilon\dfrac{\rho_1}{a_0}\epsilon\dfrac{b_0}{2}c_p < \dfrac{\beta}{3}, \\ \epsilon^2 < \dfrac{\beta}{12\rho_2 c_p} \Rightarrow 8\epsilon\dfrac{\rho_2}{b_0}\epsilon\dfrac{b_0}{2}c_p < \dfrac{\beta}{3}, \end{cases}$$

ou seja,

$$\omega\frac{b_0}{2}\epsilon c_p < \frac{\beta}{3}.$$

Dessa forma,

$$\alpha_2 := \beta - b\sqrt{\epsilon} - \omega\epsilon a_0 c_p^2 - \omega\epsilon\frac{b_0}{2}c_p > \beta - \frac{\beta}{3} - \frac{\beta}{3} - \frac{\beta}{3} = 0.$$

Como $\epsilon < \min\left\{\dfrac{ka_0}{32\rho_1 m}, \dfrac{kb_0}{32\rho_2 m},\right\}$ obtemos que

$$8\epsilon\frac{\rho_1}{a_0}m < \frac{k}{4} \quad \text{e} \quad 8\epsilon\frac{\rho_2}{b_0}m < \frac{k}{4}.$$

Logo,

$$\frac{k}{4} > \omega m \Rightarrow \frac{k}{4} - \omega m > 0.$$

Por fim, como $\epsilon < \min\left\{\dfrac{ba_0}{32\rho_1 m}, \dfrac{bb_0}{32\rho_2 m}\right\}$, segue que

$$8\epsilon\frac{\rho_1}{a_0}m < \frac{b}{4} \quad \text{e} \quad 8\epsilon\frac{\rho_2}{b_0}m < \frac{b}{4},$$

de onde

$$\frac{b}{4} > \omega m \Rightarrow \frac{b}{4} - \omega m > 0.$$

Logo, do Lema 4.15 obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}_0(t) &+ \epsilon\alpha_1\|\varphi_x+\psi\|^2+\epsilon\rho_1\|v\|^2+\epsilon^3\rho_1\|\varphi\|^2+\epsilon\rho_2\|w\|^2+\epsilon\alpha_2\|\psi_x\|^2+\epsilon^3\rho_2\|\psi\|^2\\
&+ \frac{k\delta}{4}\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2ds+\frac{b\delta}{4}\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2ds\\
&\leq \omega c_4\mathcal{L}(t)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Young para $\theta=\min\left\{\frac{\delta k}{8},\frac{\delta b}{8}\right\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}_0(t) &+ \epsilon\alpha_1\|\varphi_x+\psi\|^2+\epsilon\rho_1\|v\|^2+\epsilon^3\rho_1\|\varphi\|^2+\epsilon\rho_2\|w\|^2+\epsilon\alpha_2\|\psi_x\|^2+\epsilon^3\rho_2\|\psi\|^2\\
&+ \frac{k\delta}{4}\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2ds+\frac{b\delta}{4}\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2ds\\
&\leq \frac{c_4^2\omega^2}{4\theta}\mathcal{L}(t)+\theta A\\
&= \frac{c_4^2\omega^2}{4\theta}\mathcal{L}(t)+\theta\left(\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2ds+\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2ds\right).
\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}_0(t) &+ \epsilon\alpha_1\|\varphi_x+\psi\|^2+\epsilon\rho_1\|v\|^2+\epsilon^3\rho_1\|\varphi\|^2+\epsilon\rho_2\|w\|^2+\epsilon\alpha_2\|\psi_x\|^2+\epsilon^3\rho_2\|\psi\|^2\\
&+ \left(\frac{\delta}{4}-\frac{\theta}{k}\right)k\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2ds+\left(\frac{\delta}{4}-\frac{\theta}{b}\right)b\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2ds\\
&\leq \tilde{C}\omega^2\mathcal{L}(t),
\end{aligned}$$

onde $\tilde{C}=\frac{c_4^2}{4\theta}$. Observe ainda que

$$\frac{\delta}{4}-\frac{\theta}{k}>\frac{\delta}{4}-\frac{\delta k}{8k}=\frac{\delta}{8}\quad \text{e} \quad \frac{\delta}{4}-\frac{\theta}{b}>\frac{\delta}{4}-\frac{\delta b}{8b}=\frac{\delta}{8},$$

e como $\epsilon<\frac{\delta}{8}$ segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}_0(t) &+ 2\epsilon\frac{\alpha_1}{2\lambda}\lambda\|\varphi_x+\psi\|^2+2\epsilon\frac{\rho_1}{2}\|v\|^2+2\epsilon\epsilon^2\frac{\rho_1}{2}\|\varphi\|^2+2\epsilon\frac{\rho_2}{2}\|w\|^2+2\epsilon\frac{\alpha_2}{2\beta}\beta\|\psi_x\|^2\\
&+ 2\epsilon\epsilon^2\frac{\rho_2}{2}\|\psi\|^2+2\epsilon\frac{k}{2}\int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)+\xi(s)\|^2ds+2\epsilon\frac{b}{2}\int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2ds\\
&\leq \tilde{C}\omega^2\mathcal{L}(t),
\end{aligned}$$

de onde

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}_0(t)+\overline{C}\epsilon\mathcal{L}(t)\leq\tilde{C}\omega^2\mathcal{L}(t),$$

em que $\overline{C} = \min\left\{2, \frac{2\alpha_1}{\lambda}, \frac{2\alpha_2}{\beta}\right\}$. Portanto,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}_0(t) + (\overline{C}\epsilon - \tilde{C}\omega^2)\mathcal{L}(t) \leq 0.$$

Como $\epsilon < \min\left\{\frac{\overline{C}a_0^2}{64\tilde{C}\rho_1^2}, \frac{\overline{C}b_0^2}{64\tilde{C}\rho_2^2}\right\}$ temos que

$$\epsilon\tilde{C}64\frac{\rho_1^2}{a_0^2} < \overline{C} \Rightarrow 0 < \overline{C} - \epsilon\tilde{C}64\frac{\rho_1^2}{a_0^2} \Rightarrow 0 < \epsilon\overline{C} - \tilde{C}\left(8\frac{\rho_1}{a_0}\epsilon\right)^2$$

e

$$\epsilon\tilde{C}64\frac{\rho_2^2}{b_0^2} < \overline{C} \Rightarrow 0 < \overline{C} - \epsilon\tilde{C}64\frac{\rho_2^2}{b_0^2} \Rightarrow 0 < \epsilon\overline{C} - \tilde{C}\left(8\frac{\rho_2}{b_0}\epsilon\right)^2.$$

Logo, considerando $C := \overline{C}\epsilon - \tilde{C}\omega^2, > 0$, obtemos que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}_0(t) + C\epsilon\mathcal{L}(t) \leq 0,\, t \geq 0.$$

□

Teorema 4.17. *Seja $U_0 \in \mathcal{H}$ e suponha que sejam válidas as hipóteses sobre g_1 e g_2 dadas em* (4.5)-(4.9). *Então, existe $\varepsilon > 0$ e $c > 0$ tal que*

$$E(t) \leq cE(0)e^{-\varepsilon t}, \quad \forall t \geq 0, \tag{4.86}$$

onde E é dada em (4.50).

Demonstração. Considerando (4.72) temos que $\frac{2}{3}\mathcal{L}_0(t) \leq \mathcal{L}(t)$. Logo, do Teorema 4.16, obtemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}_0(t) + \frac{2}{3}C\epsilon\mathcal{L}_0(t) \leq 0, \quad t \geq 0,$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Assim,

$$e^{\frac{2}{3}C\epsilon t}\frac{d}{dt}\mathcal{L}_0(t) + \frac{2C\epsilon}{3}e^{\frac{2}{3}C\epsilon t}\mathcal{L}_0(t) \leq 0, \forall t > 0,$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\frac{2}{3}C\epsilon t}\mathcal{L}_0(t)\right] \leq 0, \forall t > 0.$$

Integrando ambos os lados da desigualdade obtemos

$$e^{\frac{2}{3}C\epsilon t}\mathcal{L}_0(t) - \mathcal{L}_0(0) \leq 0 \quad t > 0,$$

ou seja,

$$\mathcal{L}_0(t) \leq e^{-\frac{2}{3}C\epsilon t}\mathcal{L}_0(0).$$

Pelos lemas 4.9 e 4.11, concluímos que

$$E(t) \leq C_2\mathcal{L}(t) \leq 2C_2\mathcal{L}_0(t) \leq 2C_2 e^{-\frac{2}{3}C\epsilon t}\mathcal{L}_0(0),$$

novamente pelos lemas 4.9 e 4.11, obtemos

$$E(t) \leq 2C_2 e^{-\frac{2}{3}C\epsilon t}\frac{3}{2}\mathcal{L}(0) \leq 3\frac{C_2}{C_1}e^{-\frac{2}{3}C\epsilon t}E(0). \tag{4.87}$$

Portanto,

$$E(t) \leq ce^{-\varepsilon t}E(0). \tag{4.88}$$

onde $c = 3\dfrac{C_2}{C_1}$ e $\varepsilon = \dfrac{2}{3}C\epsilon > 0$. □

Corolário 4.18. *O sistema de Timoshenko viscoelástico* (4.1)-(4.4) *é exponencialmente estável.*

Demonstração. Primeiro, vamos mostrar que existem constantes $D_1, D_2 > 0$ tais que

$$D_1E(t) \leq \|U\|^2_{\mathcal{H}} \leq D_2E(t),\ \forall t \geq 0. \tag{4.89}$$

Já vimos em (4.22) que existem constantes $d_1, d_2 > 0$ tais que

$$d_1|U|^2_{\mathcal{H}} \leq \|U\|^2_{\mathcal{H}} \leq d_2|U|^2_{\mathcal{H}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|U\|^2_{\mathcal{H}} &\leq d_2\int_0^L \left[|\varphi_x|^2 + |\Phi|^2 + |\psi_x|^2 + |\Psi|^2 + \int_0^\infty g_1(s)|\eta_x(s)|^2 ds\right]dx \\
&+ d_2\int_0^\infty g_2(s)|\xi_x(s)|^2\, ds\, dx \\
&\leq d_2\bigg(\|\varphi_x\|^2 + \|\Phi\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\Psi\|^2 + \int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)\|^2\, ds \\
&+ \int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\, ds + \int_0^\infty g_1(s)\|\xi(s)\|^2\, ds\bigg) \\
&\leq 2d_2E(t).
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $\varphi_t = \Phi$ e $\psi_t = \Psi$, usando a Desigualdade de Poincaré e (4.9), obtemos

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\Bigg(\|\varphi_x\|^2 + \|\Phi\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\Psi\|^2 + \int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)\|^2\,ds \\ &+ \int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds + \int_0^\infty g_1(s)\|\xi(s)\|^2\,ds\Bigg) \\ &\leq \frac{1}{2}\Bigg(\|\varphi_x\|^2 + \|\Phi\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\Psi\|^2 + \int_0^\infty g_1(s)\|\eta_x(s)\|^2\,ds \\ &+ \int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds + \gamma c_p \int_0^\infty g_2(s)\|\xi_x(s)\|^2\,ds\Bigg). \\ &\leq d_3|U|^2_{\mathcal{H}} \leq \frac{d_3}{d_1}\|U\|^2_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

em que $d_3 = \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{\gamma c_p + 1}{2}\right\}$.

Considerando $D_1 = \dfrac{d_1}{d_3} > 0$ e $D_2 = 2d_2 > 0$, obtemos (4.89). Dessa forma, de (4.88) e (4.89) segue que

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}} \leq D_2 E(t) \leq D_2 c e^{-\varepsilon t} E(0) \leq \frac{D_2}{D_1} c e^{-\varepsilon t}\|U_0\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Pelo Teorema 4.6 já vimos que o problema (4.1)-(4.4) possui única solução $U(t) = T(t)U_0$. Logo,

$$\|T(t)U_0\|_{\mathcal{H}} = \|U(t)\|_{\mathcal{H}} \leq D_3 e^{-\frac{\varepsilon t}{2}}\|U_0\|_{\mathcal{H}},$$

onde $D_3 = \sqrt{\dfrac{cD_2}{D_1}}$. Dessa forma, obtemos que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}} = \sup_{U_0 \in \mathcal{H}; U_0 \neq 0} \frac{\|T(t)U_0\|_{\mathcal{H}}}{\|U_0\|_{\mathcal{H}}} \leq D_3 e^{-\frac{\varepsilon t}{2}}, \tag{4.90}$$

de onde segue a estabilidade exponencial do sistema. $\square$

REFERÊNCIAS

[1] Adams, R.A, Fournier, J.J.F. *Sobolev Spaces*. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 2003.

[2] Almeida Júnior, D.S., Santos, M.L., Muñoz Rivera, J.E. *Stability to 1-D thermoelastic Timoshenko beam acting on shear force*. Z. Angew. Math. Phys. 65 (2014), no. 6, 1233-1249.

[3] Alves, M.O, Caixeta, A.H, Jorge Silva, M. A, Rodrigues, J.H, Almeida Júnior, D.S. *On the exponential stability of thermoelastic Timoshenko beams*. Preprint.

[4] Alves, M.S, Jorge Silva, M.A, Ma, T.F, Muñoz Rivera, J.E. *Non-homogeneous thermoelastic Timoshenko systems*,Bull Braz Math Soc. New Series (2017) no. 48, 461-484.

[5] Cavalcanti, M.M, Cavalcanti, V.N.D. *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*.Eduem, Maringá, 2009.

[6] Brezis,H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Universitext. Springer New York, 2010.

[7] Demkowick, L.F, Oden, J.T. *Applied Functional Analysis*. Crc Press, Boca Raton, 1996.

[8] Engel,K, Nagel, R. *A short Course on Operator Semigroups*. Springer. New York, 2006.

[9] Evans, L. *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 1998.

[10] Fernandéz Sare, H.D, Racke, R. *On the stability of damped Timoshenko systems:Cattaneo versus Fourier law*. Arch. Raional Mech, Anal. 194 (2009) 221-251.

[11] Giorgi, C. Munõz Rivera, J.E. Pata, V. *Global Attractors for a Semilinear Hyperbolic Equation in Viscoelasticity.* Journal of Mathematical Analysis and Applications 260 (2001) 83-99.

[12] Giorgi, C., Vegni, F. M. *Uniform Energy Estimates for a Semilinear Evolution Equation of the Mindlin-Timoshenko Beam with Memory.* Mathematical and Computer Modelling 39 (2004) 1005-1021.

[13] Grasselli, M., Pata, V. *Uniform Attractors of Nonautonomous Dynamical Systems with Memory.* Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Vol. 50 (2002) 155-178.

[14] Grasselli, M., Pata, V., Prouse, G. *Longtime Behavior of a viscoelastic Timoshenko beam*. Discrete and Continuous Dynamical systems. Vol. 10 (2004) 337-348.

[15] Kesavan, S. *Functional Analysis.* Texts and readings in mathematics. Hindustan Book Agency, 2009.

[16] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley Classics Library. Wiley, 1989.

[17] Liu, Z., Zheng, S. *Energy decay rate of the thermoelastic Bresse systems.* Math. Phys. 60 (2009), n. 1, 54-69.

[18] Muñoz Rivera, J.E., Racke, R. *Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems-global existence and exponetial stability*. J. Math, Anal, Appl. 276 (2002) 248-278.

[19] Muñoz Rivera, J. E., Fernandez Sare, H. D. *Stability of Timoshenko systems with past history.* J. Math. Anal. Appl. (2008), 339 (1), 482-502.

[20] Muñoz Rivera, J.E. *Teoria das distribuições e equações diferenciais parciais.* UFRJ, Rio de Janeiro, 2004.

[21] Muñoz Rivera, J.E. *Estabilização de Semigrupos e Aplicações.* EAC. Rio de Janeiro, RJ. 2008.

[22] Olsson, P., Kristensson, G. *Wave splitting of the Timoshenko beam equation in the time domain.* Z. Angew. Math. Phys. 45 (1994) 866-881.

[23] Pazy, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 1983.

[24] Soufyane, A. *Stabilisation de la poutre de Timoshenko*. C.R.Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 328 (1999) 731-734.

[25] Timoshenko, S.P. *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*, Philosophical Magazine, Series 6,41, issue 245, (1921) 744-746

[26] Timoshenko, S.P. *Vibration Problems in Engineering*, Van Nostrand, New York, 1955.