



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

LUCAS IRAN DA CRUZ CAVALCANTE

**MODELO DE GOODWIN: CICLOS ECONÔMICOS EM  
REGIÕES METROPOLITANAS BRASILEIRAS ENTRE  
2004 E 2014**

---

Londrina

2018

LUCAS IRAN DA CRUZ CAVALCANTE

**MODELO DE GOODWIN: CICLOS ECONÔMICOS EM  
REGIÕES METROPOLITANAS BRASILEIRAS ENTRE  
2004 E 2014**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Laerte Natti

Londrina

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Cavalcante, Lucas Iran da Cruz.

Modelo de Goodwin: : ciclos econômicos em regiões metropolitanas brasileiras entre 2004 e 2014 / Lucas Iran da Cruz Cavalcante. - Londrina, 2018.  
87 f. : il.

Orientador: Paulo Laerte Natti.

Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2018.

Inclui bibliografia.

1. Modelo de Goodwin - Tese. 2. Modelagem Matemática - Tese. 3. Método de Mínimos Quadrados - Tese. 4. Regiões Metropolitanas Brasileiras - Tese. I. Natti, Paulo Laerte. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

LUCAS IRAN DA CRUZ CAVALCANTE

**MODELO DE GOODWIN: CICLOS ECONÔMICOS EM  
REGIÕES METROPOLITANAS BRASILEIRAS ENTRE  
2004 E 2014**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Paulo Laerte Natti  
Universidade Estadual de Londrina

---

Prof. Dra. Joanna Georgios Alexopoulos  
Universidade Estadual de Londrina

---

Prof. Dr. Eliandro Rodrigues Cirilo  
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 28 de agosto de 2018.

*Dedico este trabalho à Deus e aos meus pais.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus, pais, amigos e professores.

*"[...] os mal-entendidos e a indolência talvez causem mais enganos no mundo do que a esperteza e a maldade. De qualquer modo as duas últimas são, por certo, mais raras. "*

*Os Sofrimentos do Jovem Werther, J.W. Goethe.*

CAVALCANTE, Lucas. **Modelo de Goodwin: Ciclos Econômicos em Regiões Metropolitanas Brasileiras entre 2004 e 2014**. 2017. 75. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

## RESUMO

O ciclo de crescimento de Goodwin é um modelo macroeconômico que visa estudar a interação dinâmica entre a taxa de emprego e a parcela salarial dos empregados na renda nacional. Destacamos que esse modelo não prevê intervenções políticas numa economia. Neste trabalho, o ajuste dos parâmetros do modelo de Goodwin é realizado por meio de dados experimentais através do método de mínimos quadrados e as simulações numéricas são realizadas, no período entre 2004 e 2014, em regiões metropolitanas brasileiras: Recife, Salvador, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo e Porto Alegre. Primeiramente, o desenvolvimento do nosso estudo é realizado nas seis regiões metropolitanas brasileiras em conjunto diante do produto interno bruto nacional. Posteriormente, o estudo é desenvolvido separadamente nas regiões metropolitanas brasileiras de Belo Horizonte, Porto Alegre, Recife e São Paulo mediante o produto interno bruto dessas regiões. O estudo não pode ser realizado separadamente para as demais regiões metropolitanas brasileiras devido à carência de dados experimentais. A partir desses parâmetros ajustados, simulamos numericamente o comportamento do modelo de Goodwin utilizando cinco metodologias, onde a primeira metodologia é sem relaxação das hipóteses de Goodwin. Por fim, analisamos as devidas simulações para as cinco metodologias desenvolvidas e as discutimos.

**Palavras-chave:** Modelo de Goodwin; Modelagem Matemática; Método de Mínimos Quadrados; Regiões Metropolitanas Brasileiras.



CAVALCANTE, Lucas. **Goodwin Model: Economics Cycles in Brazilian Metropolitan Areas Between 2004 and 2014**. 2018. Número total de folhas. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

### ABSTRACT

The Goodwin's growth cycle is a macroeconomic model in which finds out the dynamic interaction between the employment rate and the wage share of workers in national income. We emphasize that this model does not foresee governmental interventions in an economy. In this work, the adjustment of the parameters of the Goodwin model is carried out using experimental data using the least squares method. Throughout this work, our study occurs in the period between 2004 and 2014, in metropolitan areas of Brazil like Recife, Salvador, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo and Porto Alegre. Before all else, the study of the six Brazilian metropolitan areas together with the national gross national product is carried out. Therefore, the study is developed separately in each one of the Brazilian metropolitan areas of Belo Horizonte, Porto Alegre, Recife and São Paulo using the gross domestic product of each of its states. The study can not be performed separately for the other Brazilian metropolitan areas/ due to the lack of experimental data. From these adjusted parameters, we simulate numerically the behavior of the Goodwin model by five methodologies, where the first methodology is without relaxation and the others with their possible variations. Finally, we compare the experimental data with the obtained data by each one of the five developed methodologies and discuss each one of them.

**Keywords:** Goodwin Model; Mathematical Modelling; Least Square Method; Brazilian Metropolitan Areas.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>MODELO DE GOODWIN</b>	<b>19</b>
2.1	MODELO DE GOODWIN E A ECONOMIA BRASILEIRA . . . . .	19
2.2	MODELAGEM MATEMÁTICA . . . . .	20
2.3	DESCRIÇÃO QUALITATIVA . . . . .	24
2.4	SOLUÇÃO ANALÍTICA . . . . .	26
2.5	CONSTRUÇÃO GRÁFICA DO DIAGRAMA DE FASES . . . . .	27
<b>3</b>	<b>SIMULAÇÕES NUMÉRICAS</b>	<b>30</b>
3.1	TRATAMENTO DE DADOS . . . . .	30
3.2	MODELAGEM NUMÉRICA . . . . .	31
3.3	MÍNIMOS QUADRADOS . . . . .	31
3.3.1	Ajuste Linear via Mínimos Quadrados . . . . .	31
3.3.2	Ajuste Exponencial via Mínimos Quadrados . . . . .	32
3.3.3	Coefficiente de Determinação . . . . .	33
3.4	DISCRETIZAÇÃO DA DERIVA PRIMEIRA . . . . .	33
3.5	ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS . . . . .	34
3.5.1	Ajuste da Curva de Phillips Linearizada . . . . .	34
3.5.2	Ajuste linear da taxa relativa de participação salarial dos empregados na renda nacional . . . . .	34
3.5.3	Ajuste linear da taxa relativa de emprego . . . . .	35
3.6	METODOLOGIAS (2004-2014) . . . . .	35
3.6.1	Primeira Metodologia (M1) . . . . .	35
3.6.2	Segunda Metodologia (M2) . . . . .	35
3.6.3	Terceira Metodologia (M3) . . . . .	36
3.6.4	Quarta Metodologia (M4) . . . . .	36
3.6.5	Quinta Metodologia (M5) . . . . .	36
3.7	RESUMO: METODOLOGIAS . . . . .	36
3.8	RESULTADOS NUMÉRICOS . . . . .	37
3.8.1	Seis Regiões Metropolitanas Brasileiras . . . . .	37
3.8.2	Região Metropolitana de Belo Horizonte . . . . .	40
3.8.3	Região Metropolitana de Porto Alegre . . . . .	44
3.8.4	Região Metropolitana de Recife . . . . .	48
3.8.5	Região Metropolitana de São Paulo . . . . .	52

3.9	COMPARATIVO ENTRE AS METODOLOGIAS . . . . .	55
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>57</b>
4.1	PRIMEIRA METODOLOGIA (M1) . . . . .	57
4.2	SEGUNDA METODOLOGIA (M2) . . . . .	58
4.3	TERCEIRA METODOLOGIA (M3) . . . . .	58
4.4	QUARTA METODOLOGIA (M4) . . . . .	58
4.5	QUINTA METODOLOGIA (M5) . . . . .	58
<b>A</b>	<b>APÊNDICE: DADOS</b>	<b>60</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>84</b>

## LISTA DE FIGURAS

2.1	Interpolação de dados experimentais da economia brasileira entre 1953 e 2007 .	19
2.2	Interpolação de dados experimentais da economia brasileira entre 1947 e 2013 .	20
2.3	Mudança de parâmetros proposta por Goodwin sobre a curva de Phillips . . . . .	23
2.4	Construção de uma órbita fechada do modelo de Goodwin desenvolvida pelo economista italiano G. Gandolfo. . . . .	29
3.1	Ajuste exponencial da produtividade nas seis regiões metropolitanas brasileiras	37
3.2	Ajuste exponencial da população economicamente ativa nas seis regiões metropolitanas brasileiras . . . . .	38
3.3	Curva de Phillips linearizada nas seis regiões metropolitanas brasileiras . . . . .	38
3.4	Comparativo entre as cinco metodologias mediante os dados experimentais de $u(t)$ em SRMB . . . . .	39
3.5	Comparativo entre as cinco metodologias mediante os dados experimentais de $v(t)$ em SRMB . . . . .	39
3.6	Ajuste exponencial da produtividade na região metropolitana de Belo Horizonte	41
3.7	Ajuste exponencial da população economicamente ativa na região metropolitana de Belo Horizonte . . . . .	41
3.8	Curva de Phillips linearizada na região metropolitana de Belo Horizonte . . . . .	42
3.9	Comparativo entre as cinco metodologias mediante os dados experimentais de $u(t)$ em RMBH . . . . .	42
3.10	Comparativo entre as cinco metodologias mediante os dados experimentais de $v(t)$ em RMBH . . . . .	43
3.11	Ajuste exponencial da produtividade na região metropolitana de Porto Alegre .	45
3.12	Ajuste exponencial da população economicamente ativa na região metropolitana de Porto Alegre . . . . .	45
3.13	Curva de Phillips linearizada na região metropolitana de Porto Alegre . . . . .	46
3.14	Comparativo entre as cinco metodologias mediante os dados experimentais de $u(t)$ em RMPA . . . . .	46
3.15	Comparativo entre as cinco metodologias mediante os dados experimentais de $v(t)$ em RMPA . . . . .	47
3.16	Ajuste exponencial da produtividade na região metropolitana de Recife . . . . .	49
3.17	Ajuste exponencial da população economicamente ativa na região metropolitana de Recife . . . . .	49
3.18	Curva de Phillips linearizada na região metropolitana de Recife . . . . .	50

3.19	Comparativo entre as cinco metodologias mediante os dados experimentais de $u(t)$ em RMR . . . . .	50
3.20	Comparativo entre as cinco metodologias mediante os dados experimentais de $v(t)$ em RMR . . . . .	51
3.21	Ajuste exponencial da produtividade na região metropolitana de São Paulo . . .	52
3.22	Ajuste exponencial da população economicamente ativa na região metropolitana de São Paulo . . . . .	53
3.23	Curva de Phillips linearizada na região metropolitana de São Paulo . . . . .	53
3.24	Comparativo entre as cinco metodologias mediante os dados experimentais de $u(t)$ em RMSP . . . . .	54
3.25	Comparativo entre as cinco metodologias mediante os dados experimentais de $v(t)$ em RMSP . . . . .	54

## LISTA DE TABELAS

3.1	Parâmetros $\alpha$ , $\gamma$ e $\rho$ : equações utilizadas para os ajustes. . . . .	36
3.2	Parâmetros: SRMB . . . . .	40
3.3	$R^2$ das curvas: SRMB . . . . .	40
3.4	$R^2$ entre os dados experimentais e os obtidos pelas cinco metodologias: SRMB	40
3.5	Parâmetros: RMBH . . . . .	43
3.6	$R^2$ das curvas: RMBH . . . . .	44
3.7	$R^2$ entre os dados experimentais e os obtidos pelas cinco metodologias: RMBH	44
3.8	Parâmetros: RMPA . . . . .	47
3.9	$R^2$ das curvas: RMPA . . . . .	48
3.10	$R^2$ entre os dados experimentais e os obtidos pelas cinco metodologias: RMPA	48
3.11	Parâmetros: RMR . . . . .	51
3.12	$R^2$ das curvas: RMR . . . . .	51
3.13	$R^2$ entre os dados experimentais e os obtidos pelas cinco metodologias: RMR .	52
3.14	Parâmetros: RMSP . . . . .	55
3.15	$R^2$ das curvas: RMSP . . . . .	55
3.16	$R^2$ entre os dados experimentais e os obtidos pelas cinco metodologias: RMSP	55
3.17	Comparativo entre as cinco metodologias . . . . .	56
A.1	Dados para as seis regiões metropolitanas brasileiras (2004-2009) . . . . .	60
A.2	Dados para as seis regiões metropolitanas brasileiras (2010-2014) . . . . .	61
A.3	Cálculos para as seis regiões metropolitanas brasileiras (2004-2009) . . . . .	62
A.4	Cálculos para as seis regiões metropolitanas brasileiras (2010-2014) . . . . .	63
A.5	Dados da região metropolitana de Belo Horizonte (2004-2009) . . . . .	64
A.6	Dados da região metropolitana de Belo Horizonte (2010-2014) . . . . .	65
A.7	Cálculos para a região metropolitana de Belo Horizonte (2004-2009) . . . . .	66
A.8	Cálculos para a região metropolitana de Belo Horizonte (2010-2014) . . . . .	67
A.9	Dados da região metropolitana de Recife (2004-2009) . . . . .	68
A.10	Dados da região metropolitana de Recife (2010-2014) . . . . .	69
A.11	Cálculos para a região metropolitana de Recife (2004-2009) . . . . .	70
A.12	Cálculos para a região metropolitana de Recife (2010-2014) . . . . .	71
A.13	Dados da região metropolitana de Porto Alegre (2004-2009) . . . . .	72
A.14	Dados da região metropolitana de Porto Alegre (2010-2014) . . . . .	73
A.15	Cálculos para a região metropolitana de Porto Alegre (2004-2009) . . . . .	74
A.16	Cálculo para a região metropolitana de Porto Alegre (2010-2014) . . . . .	75
A.17	Dados da região metropolitana de São Paulo (2004-2006) . . . . .	76

A.18 Dados da região metropolitana de São Paulo (2007-2009) . . . . .	77
A.19 Dados da região metropolitana de São Paulo (2010-2012) . . . . .	78
A.20 Dados da região metropolitana de São Paulo (2013-2014) . . . . .	79
A.21 Cálculos para a região metropolitana de São Paulo (2004-2006) . . . . .	80
A.22 Cálculos para a região metropolitana de São Paulo (2007-2009) . . . . .	81
A.23 Cálculos para a região metropolitana de São Paulo (2010-2012) . . . . .	82
A.24 Cálculos para a região metropolitana de São Paulo (2013-2014) . . . . .	83

## LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIACÕES

$a(t)$  = Produtividade

$a_0$  = Produtividade inicial

$\alpha$  = Taxa de produtividade

$n(t)$  = Força-de-trabalho

$n_0$  = Força-de-trabalho inicial

$\beta$  = Taxa de força-de-trabalho

$\sigma$  = Constante capital-produto

$k(t)$  = Estoque de capital

$q(t)$  = Produto

$l(t)$  = Empregados

$w(t)$  = Renda média salarial

$m(t)$  = Desempregados

$d(t)$  = Taxa de desemprego

$\dot{k}(t)$  = Participação dos empregadores na renda nacional

$\gamma$  = Intercepto da curva de Phillips linearizada

$\rho$  = Coeficiente angular da curva de Phillips linearizada

$u(t)$  = Taxa da parcela salarial dos empregados na renda nacional

$v(t)$  = Taxa de população ocupada

$1 - u(t)$  = Taxa de participação dos empregadores na renda nacional

$\dot{u}(t)/u(t)$  = Taxa relativa da parcela salarial dos empregados na renda nacional

$\dot{v}(t)/v(t)$  = Taxa relativa de emprego

$\dot{w}(t)/w(t)$  = Taxa relativa da renda média salarial



## 1 INTRODUÇÃO

As flutuações de uma atividade econômica são de grande interesse para os economistas, uma vez que informações a seu respeito são ferramentas que possibilitam elaborações de análises acerca de um determinado cenário econômico. Os ciclos econômicos nos permitem estudar alguns desses tipos de flutuações por meio de indicadores econômicos que estamos habituados a lidar como PIB, taxa de população desocupada, entre outros. Eles são também o cerne de muitas teorias dentro da macroeconomia. Uma modelagem matemática desse comportamento cíclico, mesmo que não represente a realidade, pode trazer à tona indícios a respeito dessas flutuações. O estudo de ciclos de crescimento econômico num país permite uma orientação, por exemplo, sobre as taxas de juros, ou ainda, uma estimativa do seu PIB futuro, além de possibilitar indícios de possíveis depressões e crescimentos econômicos.

Em 1819, o economista francês Sismondi [5], ao estudar períodos de crise, acabou por introduzir a ideia de ciclos econômicos. Ainda no mesmo século, o economista francês Dunoyer, inspirado nos estudos Sismondi, elaborou uma das primeiras teorias sobre ciclos econômicos ao observar ciclos periódicos entre as duas fases principais conhecidas como fase de expansão e fase de contração. Já no início do século XX, o economista americano W. C. Mitchell realizou vários trabalhos empíricos sobre ciclos econômicos [37]. Ainda nesse período, os economistas americanos T. Fisher e H. L. Moore [38] foram responsáveis por publicações sobre ciclos econômicos com ênfase nas políticas fiscais [16].

Na segunda metade do século XX, C. Juglar observou oscilações de investimentos em capital fixo numa periodicidade média na ordem de 8 anos. Já em 2010, A. V. Korotayev e S. V. Tsirel observaram indícios do ciclo de C. Juglar durante a crise econômica mundial de 2008 [30]. Ainda em 1920, J. Kitchin descreveu ciclos que operam na ordem de 4 anos [28]. Conhecidos como ciclos de curto prazo, estão relacionados com o ciclo comercial ou com a atividade econômica de setores específicos em uma economia e enfatizam que embora as causas dos ciclos sejam aleatórias, a relação entre a procura e a demanda é que preconiza as fases de alta e de baixa da economia. A teoria de ciclos de Kitchin influenciou os economistas N. D. Kondratiev e S. Kuznets. Em 1930, Kuznets desenvolveu ciclos de periodicidade da ordem 20 anos [31, 32], mediante análises feitas principalmente sobre a dinâmica populacional e produtividade da construção industrial [1, 2]. Ainda no século XX, temos as ondas de Kondratiev [29], conhecidas como ciclo das ondas longas devido à sua periodicidade da ordem de 50 anos [30]. Trata-se de um modelo de duas fases distintas (expansão e contração) na qual é observado também a intervenção tecnológica na economia, além da empregabilidade, renda e demanda. Não podemos deixar de citar os predecessores [6] que contribuíram para os ciclos de Kondratiev como Gelderen, Buniatian, Wolff, e Beveridge. Assim, um ciclo econômico pode ser definido pela variação de estados entre expansão e contração cujos indicadores são comumente medidos por produção, emprego, estoque de capital, desemprego e inflação. Como afirma W.

C. Mitchell [10], é certo que não há uma periodicidade regular nas flutuações econômicas numa determinada região de estudo, contudo uma mesma sequência de eventos ocorre de maneira ordenada como expansão, pico, recessão e resistência. Embora cada ciclo econômico tenha a sua peculiaridade, há similaridades comumente encontradas quanto à sequência de fases: *boom*, recessão, recuperação e depressão.

Em 1967, R. M. Goodwin traz à tona um modelo econômico de ciclos de crescimento que leva o seu nome. O modelo visa estudar a interação dinâmica entre a taxa de população ocupada e a renda salarial dos empregados na economia. O ciclo de crescimento de Goodwin é um modelo macroeconômico que tem como base o modelo presa-predador de Lotka-Volterra, que descreve uma dinâmica entre espécies em competição [4]. No modelo de Goodwin, a interação dinâmica ocorre entre a distribuição de renda (predador) e a taxa de população ocupada (presa).

Uma parte da popularidade do modelo de Goodwin reside em sua simplicidade e elegância matemática, o que chamou a atenção de autores como Desai [14], Pohjola [40], Shah e Wolfstetter [34], Ploeg [43], Foley [46], Blatt [7], Flaschel [11], Chiarella [44], entretanto, que trabalharam principalmente nas extensões do modelo por meio de relaxações nas premissas, como exemplo, citamos o trabalho de Desai *et al* [15] que tornaram a curva de Phillips no modelo de Goodwin não-linear. Destacamos ainda que Harvie [24] realizou testes com o modelo de Goodwin em países pertencentes à Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OECD). Uma revisão bibliográfica sobre o modelo de Goodwin pode ser encontrada nas referências [41, 45].

No Brasil, no período entre 1952 e 2008, a trajetória da nossa economia apresentou indícios de uma dinâmica econômica do tipo Goodwin conforme as análises realizadas pelos economistas Marquetti, Maldonado e Lautert [33], principalmente nos períodos entre 1952 e 1964 e entre 1981 e 1992. Em 2017, Miebach [36] amplia o intervalo de estudo ao utilizar o modelo de Goodwin aplicado à economia brasileira.

Neste contexto, o objetivo deste trabalho é aplicar o modelo de Goodwin à economia de regiões metropolitanas brasileiras, mediante dados econômicos brasileiros obtidos por institutos nacionais de pesquisa no período entre 2004 e 2014. Para isso foi necessário estimar os parâmetros do modelo de Goodwin por meio do método de mínimos quadrados.

No capítulo 2 tratamos dos aspectos históricos do modelo de Goodwin, as suas hipóteses e o seu desenvolvimento.

No capítulo 3 apresentamos as simulações numéricas, onde realizamos o tratamento dos dados coletados, o ajuste da curva de Phillips no cenário brasileiro entre 2004 e 2014, o método numérico empregado, assim como a estimativa dos parâmetros presentes no modelo de Goodwin por meio de cinco metodologias.

No capítulo 4 apresentamos as conclusões desse trabalho juntamente com as metodologias que foram desenvolvidas.

## 2 MODELO DE GOODWIN

A seguir apresentaremos algumas aplicações do modelo de Goodwin na economia brasileira. Discorreremos a respeito das hipóteses do modelo em sua forma original, inclusive sobre o ajuste da curva de Phillips em regiões metropolitanas brasileiras. Por fim, desenvolveremos a modelagem econômica tal como obtida por Goodwin.

### 2.1 MODELO DE GOODWIN E A ECONOMIA BRASILEIRA

Nessa seção apresentaremos dois estudos do modelo de Goodwin aplicados na economia brasileira.

Em 2010, Miebach, Marquetti, Maldonado e Lautert [33] realizaram uma análise qualitativa para a economia brasileira utilizando o modelo de Goodwin no período entre 1952 e 2008. A figura 2.1 mostra uma interpolação de dados experimentais no período entre 1953 e 2007 na economia brasileira, onde  $u(t)$  é a parcela salarial dos empregados na renda nacional e  $v(t)$  é a taxa de emprego. Em 2017, conforme a figura 2.2, Miebach também utilizou o modelo de Goodwin para a economia brasileira ao ampliar o intervalo de estudo para 1947 e 2013 [36]. Por fim, este mesmo autor acredita que uma alternativa promissora para o estudo do modelo de Goodwin no cenário brasileiro seja levar em consideração em suas hipóteses as intervenções governamentais.

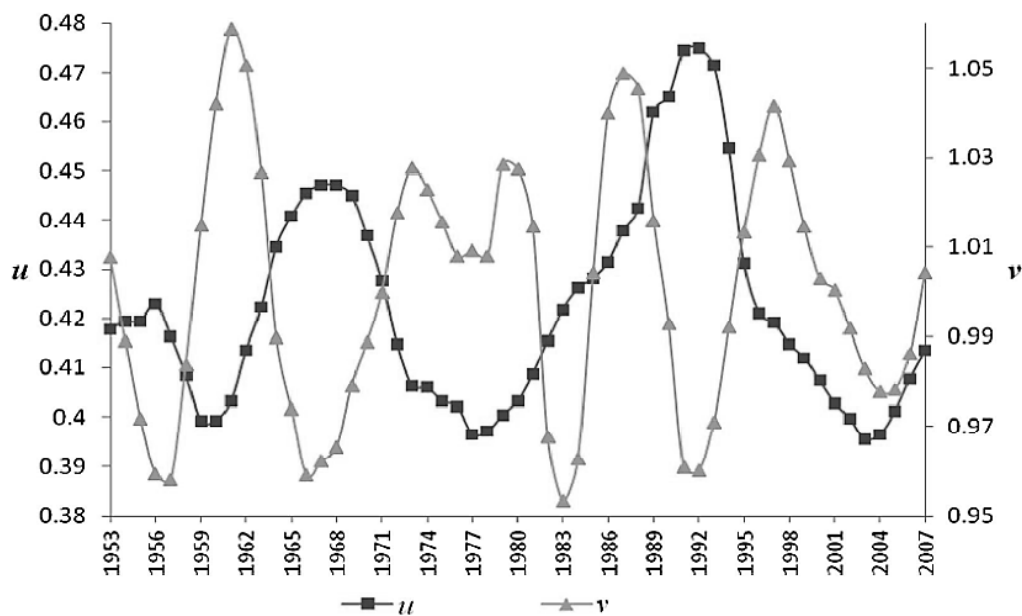


Figura 2.1: Interpolação de dados experimentais da economia brasileira entre 1953 e 2007

**Fonte:** Marquetti, Maldonado e Lautert [35].

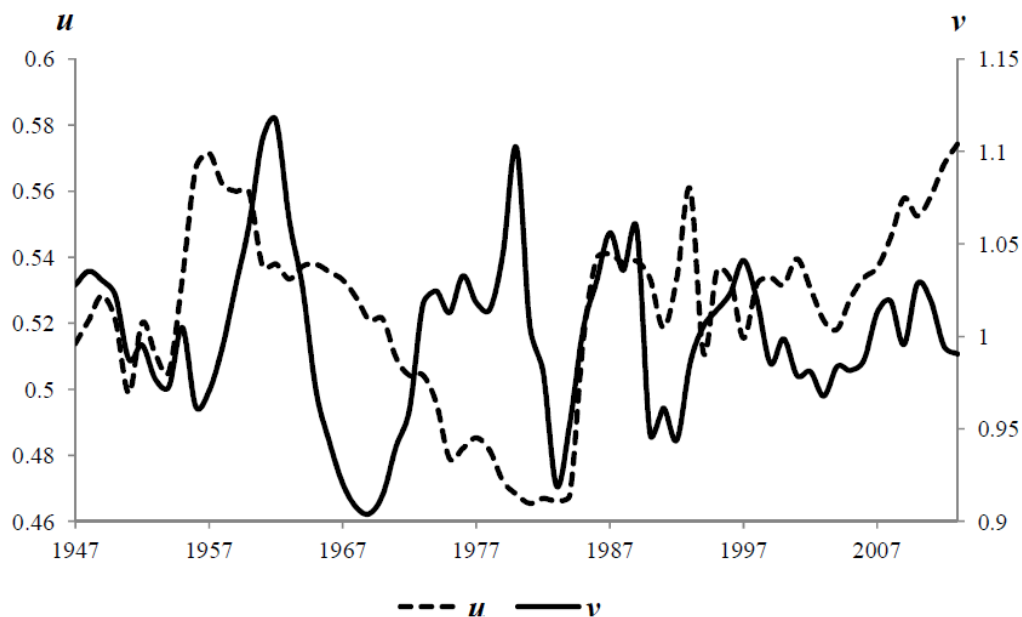


Figura 2.2: Interpolação de dados experimentais da economia brasileira entre 1947 e 2013

Fonte: Miebach [36].

Na próxima seção apresentaremos o desenvolvimento e a modelagem matemática macroeconômica do modelo Goodwin.

## 2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA

O modelo de ciclo de crescimento econômico de Goodwin, além de ser uma teoria econômica fechada, por se tratar de um modelo sem interferências internacionais, e sem intervenções governamentais, tem as hipóteses a seguir [25]:

1. A produtividade de trabalho é de crescimento exponencial, onde a sua taxa  $\alpha$  é positiva.
2. A força-de-trabalho é de crescimento exponencial, onde a sua taxa  $\beta$  é positiva.
3. Há somente dois fatores de produção que são o trabalho e o capital.
4. Todas as quantidades são reais e líquidas;
5. Todos os salários são consumidos e todos os lucros são poupados e reinvestidos.
6. A razão capital-produto é mantida constante positiva.
7. A taxa de inflação é crescente na vizinhança de pleno emprego, e vice-versa, como expressa a curva de Phillips.

A seguir definimos e modelamos quantidades econômicas necessárias para a construção do modelo de Goodwin.

A produtividade de trabalho,  $a(t)$ , é ajustada por uma exponencial, onde a taxa de produtividade de trabalho,  $\alpha$ , é positiva, ( $\alpha > 0$ ), o que confere o seu crescimento:

$$a(t) = a_0 e^{\alpha t}, \quad (2.1)$$

onde  $a_0$  é a produtividade de trabalho inicial.

A força-de-trabalho,  $n(t)$ , consiste na parcela populacional que está disposta a trabalhar. Assim como ocorreu com a produtividade de trabalho, Goodwin faz o ajuste da força-de-trabalho por meio de uma exponencial, onde a taxa de força de trabalho,  $\beta$ , é positiva, ( $\beta > 0$ ), ou seja, a força-de-trabalho é crescente:

$$n(t) = n_0 e^{\beta t} \quad (2.2)$$

onde  $n_0$  é a força-de-trabalho inicial.

A constante capital-produto,  $\sigma$ , é dada pela razão entre o estoque de capital,  $k(t)$ , como plantas e equipamentos os quais são necessários para a produção de bens e serviços, e a produção,  $q(t)$ :

$$\sigma = \frac{k(t)}{q(t)}. \quad (2.3)$$

A mão-de-obra,  $l(t)$ , que no presente estudo é interpretado pela parcela da força-de-trabalho efetivamente empregada, é dada pela razão entre a produção,  $q(t)$ , e a produtividade do trabalho,  $a(t)$ , ou seja:

$$l(t) = \frac{q(t)}{a(t)}. \quad (2.4)$$

A participação salarial dos empregados na renda nacional,  $u(t)$ , é definida por renda média salarial,  $w(t)$ , sobre a produtividade do trabalho  $a(t)$ , isto é:

$$u(t) = \frac{w(t)}{a(t)}. \quad (2.5)$$

Para uma melhor visualização, conforme a equação (2.4), a participação salarial dos empregados na renda nacional,  $u(t)$ , pode também ser calculada pelo produto entre a massa salarial dos empregados,  $w(t)$ , e a mão-de-obra,  $l(t)$ , dividido pela produção  $q(t)$ :

$$u(t) = \frac{w(t)l(t)}{q(t)}. \quad (2.6)$$

Sabemos que  $u(t) = w(t)/a(t)$  é a participação salarial dos empregados na renda nacional, e por se tratar de uma competição entre empregados e empregadores, temos que  $[1 - u(t)]$  é a participação dos empregadores na renda nacional, que é o capital reinvestido na economia.

Portanto, Goodwin define a taxa de variação do estoque de capital,  $\dot{k}(t)$ , como a participação dos empregadores sobre a renda nacional,  $[1 - u(t)]$ , multiplicado pela produção,  $q(t)$ , ou seja,

$$\dot{k}(t) = \left[1 - \frac{w(t)}{a(t)}\right] q(t). \quad (2.7)$$

A taxa de população ocupada,  $v(t)$ , é a razão entre a mão-de-obra,  $l(t)$ , e a força-de-trabalho,  $n(t)$ , ou seja:

$$v(t) = \frac{l(t)}{n(t)}. \quad (2.8)$$

A curva de Phillips é definida por uma aproximação linear entre a taxa de desemprego,  $d(t) = [1 - v(t)]$ , e a taxa relativa da média salarial,  $\dot{w}(t)/w(t)$ , [39]. Embora possamos desenvolver esse mesmo estudo ao observarmos a taxa de inflação ao invés de  $\dot{w}(t)/w(t)$ , conforme o economista M. Friedman [17]. Assim, quanto mais alta é a taxa de desemprego, mais baixa é a taxa relativa da média salarial, e vice-versa. Dessa maneira, a inflação pode ser reduzida ao se permitir um maior desemprego, e, analogamente, uma queda do desemprego pode ser obtida com um aumento da inflação. Uma vez realizado o ajuste linear da curva de Phillips, obtemos  $\gamma$  (intercepto) e  $\rho$  (coeficiente angular) que permitem interpretações sobre o comportamento econômico proposto por Phillips. No entanto, o modelo de Goodwin não trata da relação de desemprego, como observaremos a seguir na equação (2.9). Para isso, Goodwin propõe uma mudança nos parâmetros de maneira que estudemos a curva de Phillips sob a óptica da taxa de população ocupada,  $v(t)$ , como na figura 2.3. Desse modo, tomando 100% como a soma entre a taxa de emprego e a taxa de desemprego, Goodwin analisa a curva linear proposta por Phillips refletida no eixo  $x = 0.5 = 50\%$ , e, observa assim, a taxa de emprego,  $v(t)$  - ver figura 2.3. Sob esse novo ajuste, o valor de  $\rho$  agora é positivo, uma vez que é o suplemento angular da reta anterior. Já o valor de  $\gamma$  permanece positivo, tendo em vista o sinal negativo que acompanha  $\gamma$  na nova equação (2.9). Notemos que o termo  $\gamma$  (intercepto), embora não detenha uma interpretação econômica estrita, ele pode contribuir para uma taxa salarial negativa, como podemos ver na equação (2.9), à medida que a taxa de população ocupada,  $v(t)$ , se aproxima de zero. Por outro lado, o termo  $\rho$  nos indica a elasticidade, ou melhor, uma resposta de reação que relaciona a taxa relativa da média salarial,  $\dot{w}/w$ , com a taxa de população ocupada,  $v(t)$ . Assim, a taxa relativa da média salarial em função da taxa de população ocupada  $v(t)$  é dada por:

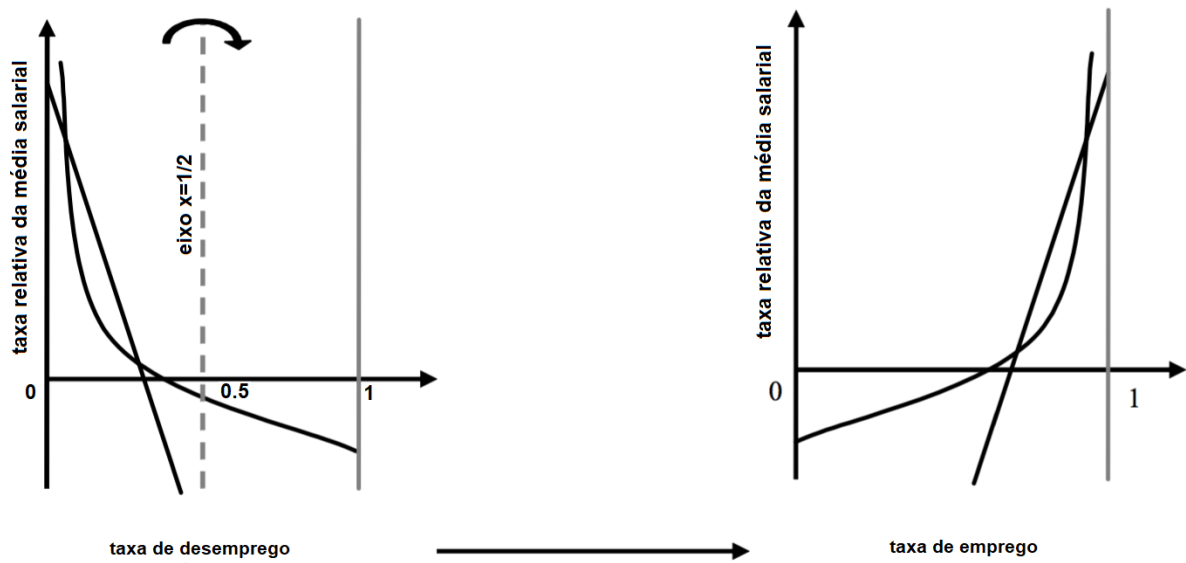


Figura 2.3: Mudança de parâmetros proposta por Goodwin sobre a curva de Phillips

**Fonte:** Adaptado de [13].

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} = -\gamma + \rho v(t). \quad (2.9)$$

Na seqüência vamos obter a taxa de variação da participação salarial dos empregados na renda nacional,  $\dot{u}(t)$ . Para isso, desenvolvendo o lado esquerdo da equação (2.9), tendo em vista as equações (2.1) e (2.5), temos que

$$\begin{aligned} \frac{\dot{w}(t)}{w(t)} &= \frac{a(t)\dot{u}(t) + u(t)\dot{a}(t)}{u(t)a(t)} \\ &= \frac{\dot{u}(t)}{u(t)} + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \\ &= \frac{\dot{u}(t)}{u(t)} + \frac{\alpha a_0 e^{\alpha t}}{a_0 e^{\alpha t}} \\ &= \frac{\dot{u}(t)}{u(t)} + \alpha. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Assim, com as equações (2.10) e (2.9) temos

$$\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = -(\alpha + \gamma) + \rho v(t), \quad (2.11)$$

que é a taxa relativa da participação salarial dos empregados na renda nacional.

O próximo passo é obter uma equação para a taxa de variação de emprego,  $\dot{v}(t)$ , por meio das equações (2.3), (2.4), (2.7) e (2.8). Assim, pelo desenvolvimento a seguir,

temos

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} &= \frac{[l(t)/n(t)]}{l(t)/n(t)} \\
&= \frac{\dot{l}(t)}{l(t)} - \frac{\dot{n}(t)}{n(t)} \\
&= \frac{\dot{l}(t)}{l(t)} - (\beta n_0 e^{\beta t} / n_0 e^{\beta t}) \\
&= \frac{[q(t)/a(t)]}{q(t)/a(t)} - \beta \\
&= \frac{\dot{q}(t)}{q(t)} - \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - \beta \\
&= \frac{[k(t)/\sigma]}{k(t)/\sigma} - \alpha - \beta \\
&= \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} - \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} - (\alpha + \beta) \\
&= \frac{[1 - u(t)]q(t)}{\sigma q(t)} - 0 - (\alpha + \beta) \\
&= \frac{[1 - u(t)]}{\sigma} - (\alpha + \beta) \\
&= \left[ \frac{1}{\sigma} - (\alpha + \beta) \right] - \frac{1}{\sigma} u(t),
\end{aligned} \tag{2.12}$$

que é a taxa relativa de emprego.

Por fim, o sistema de equações de Goodwin é dado por:

$$\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = -(\alpha + \gamma) + \rho v(t), \tag{2.13}$$

$$\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = \left[ \frac{1}{\sigma} - (\alpha + \beta) \right] - \frac{1}{\sigma} u(t), \tag{2.14}$$

onde  $\alpha$  é a taxa de produtividade de trabalho,  $\beta$  é a taxa de força-de-trabalho,  $\gamma$  e  $\rho$  são respectivamente o intercepto e o coeficiente angular do ajuste linear da curva de Phillips, e  $\sigma$  é a constante capital-produto.

### 2.3 DESCRIÇÃO QUALITATIVA

Nesta seção faremos uma descrição qualitativa do sistema de equações (2.13) e (2.14) do modelo de Goodwin e a sua interação dinâmica sob a perspectiva econômica.

A dinâmica do tipo Goodwin tem como base o modelo biológico presa-predador de Lotka-Volterra. Desse modo, diante das equações (2.13) e (2.14), e sabendo que os parâmetros, desse sistema de equações,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\rho$  e  $\sigma$  são todos positivos, é necessário que



$1/\sigma > (\alpha + \beta)$ , ou seja, a razão inversa do capital-produto deve ser maior do que a soma entre as taxas de produtividade e de força-de-trabalho, uma vez que o termo  $[1/\sigma - (\alpha + \beta)]$ , na equação (2.14), deve ser positivo para satisfazer a interação dinâmica econômica do modelo de Goodwin. Portanto, uma vez estimados os parâmetros do modelo, deve-se verificar essa condição para que seja satisfeita a dinâmica econômica tipo Goodwin. A seguir, verificaremos cada um dos termos nas equações (2.13) e (2.14).

Notemos que a ausência do parâmetro  $\rho$  na equação (2.13), quando  $v(t) \equiv 0$ , confere um decréscimo na taxa relativa de parcela salarial dos empregados na renda nacional,  $u(t)$ , devido à presença do termo  $-(\alpha + \gamma)$ , ou seja, tanto a taxa de produtividade  $\alpha$  quanto ao intercepto da curva de Phillips linearizada  $\gamma$  são fatores que impactam de maneira negativa na distribuição de renda. Esses dois parâmetros,  $\alpha$  e  $\gamma$ , acarretam uma redução do poder de barganha dos empregados, e, portanto, uma redução de seus salários. Destacamos que embora o intercepto da curva de Phillips linearizada  $\gamma$  não detenha um significado econômico estrito, observemos que a taxa relativa de salários reais  $\dot{w}(t)/w(t)$  vem a ser negativa à medida que a taxa de emprego,  $v(t)$ , se aproxima de zero, vide equação (2.9). Por fim, ainda nessa mesma equação (2.13), o coeficiente angular da curva de Phillips linearizada  $\rho$  nos informa a elasticidade decorrente da interação positiva entre as taxas  $u(t)$  e  $v(t)$ , e a variação da taxa de parcela salarial dos empregados na renda nacional.

Agora, ao observarmos a equação (2.14), que se refere à taxa relativa de emprego  $\dot{v}(t)/v(t)$ , temos que o termo  $[1/\sigma - (\alpha + \beta)]v(t)$ , quando  $u(t) \equiv 0$ , informa o crescimento da taxa de emprego na ausência de distribuição de renda. Neste caso, a taxa de emprego cresce exponencialmente, uma vez que

$$\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = \left[ \frac{1}{\sigma} - (\alpha + \beta) \right]. \quad (2.15)$$

Integrando ambos os lados da igualdade da equação com respeito a  $t$ ,

$$\begin{aligned} \int [\dot{v}(t)/v(t)] dt &= \int [(1/\sigma) - (\alpha + \beta)] dt \\ \ln |v(t)| &= [(1/\sigma) - (\alpha + \beta)]t + C, \end{aligned} \quad (2.16)$$

logo

$$v(t) = v_0 \exp [(1/\sigma) - (\alpha + \beta)]t, \quad (2.17)$$

onde  $v_0 = \exp C$ ,  $C$  é constante e  $1/\sigma$ , por definição, é a produtividade do capital. Desse modo, quando  $u(t) \equiv 0$ , a constante da taxa de emprego é dada por  $[(1/\sigma) - (\alpha + \beta)]$ . Nesse caso, para que haja um crescimento da taxa de emprego é necessário que a produtividade do capital seja superior à soma entre a constante da taxa de produtividade  $\alpha$  com a constante da taxa de força-de-trabalho  $\beta$ . Por outro lado, a queda dessa taxa de emprego ocorrerá quando a produtividade do capital for inferior à soma  $(\alpha + \beta)$ . Já a igualdade entre os termos  $(1/\sigma)$  e

$(\alpha + \beta)$  nos diz que não há crescimento dessa taxa de emprego. Agora, ainda na equação (2.14), o termo  $-(1/\sigma)u(t)v(t)$  nos confere uma interação negativa entre a taxa de parcela salarial dos empregados na renda nacional  $u(t)$  e a taxa de emprego  $v(t)$  em relação à variação da taxa de emprego  $\dot{v}(t)$ . Por fim, o termo  $-(1/\sigma)u(t)$  nos fornece uma reação-resposta negativa da taxa relativa de emprego  $\dot{v}(t)/v(t)$  conforme a variação da taxa de parcela salarial dos empregados na renda nacional  $u(t)$ .

## 2.4 SOLUÇÃO ANALÍTICA

O economista italiano G. Gandolfo apresenta uma solução e análise [21] do sistema Lotka-Volterra. Assim, considerando o sistema de equações diferenciais

$$\frac{dy_1}{dt} = (a_1 - b_1 y_2)y_1, \quad (2.18)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -(a_2 - b_2 y_1)y_2, \quad (2.19)$$

onde  $a_1, a_2, b_1$  e  $b_2$  são constantes positivas e tanto  $y_1$  quanto  $y_2$  são variáveis não negativas. A seguir, mostraremos como obter as curvas integrais do sistema composto pelas equações diferenciais (2.18) e (2.19).

Das equações (2.19) e (2.18) temos que

$$\frac{dy_1}{dy_2} = -\frac{(a_1 - b_1 y_2)y_1}{(a_2 - b_2 y_1)y_2}, \quad (2.20)$$

ou seja,

$$-(a_1 - b_1 y_2)y_1 dy_2 - (a_2 - b_2 y_1)dy_1 = 0. \quad (2.21)$$

Ao dividirmos a equação (2.21) por  $y_1 y_2$

$$-(a_1 y_2^{-1} - b_1)dy_2 - (a_2 y_1^{-1} - b_2)dy_1 = 0. \quad (2.22)$$

Uma vez que a equação diferencial (2.22) possui variáveis separáveis, ao integrarmos, temos que

$$-\int (a_1 y_2^{-1} - b_1)dy_2 - \int (a_2 y_1^{-1} - b_2)dy_1 = A, \quad (2.23)$$

ou seja,

$$-a_1 \log(y_2) + b_1 y_2 - a_2 \log(y_1) + b_2 y_1 = A. \quad (2.24)$$

Tomando  $B = e^A$ , reescreveremos a equação acima como

$$\exp(b_2 y_1) \exp(b_1 y_2) y_1^{-a_2} y_2^{-a_1} = B, \quad (2.25)$$

assim,

$$y_1^{-a_2} \exp b_2 y_1 = B y_2^{a_1} \exp -b_1 y_2. \quad (2.26)$$

Agora, consideremos as funções

$$X_1 = X_1(y_1) = y_1^{-a_2} \exp(b_2 y_1) \quad (2.27)$$

$$X_2 = X_2(y_2) = y_2^{a_1} \exp(-b_1 y_2) \quad (2.28)$$

As curvas de integral podem ser determinadas pela relação

$$X_1 = B X_2, \quad (2.29)$$

ou seja, são obtidas equacionando a função  $X_1$  com a função  $X_2$  multiplicada por uma constante arbitrária, onde para cada valor arbitrário da constante  $B$  correspondente à uma curva de integral.

## 2.5 CONSTRUÇÃO GRÁFICA DO DIAGRAMA DE FASES

Para construirmos as curvas de integral, observaremos o comportamento das funções  $X_1(y_1)$  e  $X_2(y_2)$ . Assim, ao derivarmos  $X_1(y_1)$  em relação a  $y_1$ , temos que

$$\frac{dX_1}{dy_1} = -a_2 y_1^{-a_2-1} \exp(b_2 y_1) + b_2 y_1^{-a_2} \exp(b_2 y_1), \quad (2.30)$$

$$= X_1 \left( b_2 - \frac{a_2}{y_1} \right). \quad (2.31)$$

Notemos que quando  $y_1 = a_2/b_2$ , temos que  $dX_1/dy_1 = 0$ . Além disso, temos  $dX_1/dy_1 < 0$  sempre que  $0 < y_1 < a_2/b_2$ , e que, para  $y_1 > a_2/b_2$ , temos  $dX_1/dy_1 > 0$ . Posto que a segunda derivada,  $d^2 X_1/dy_1^2$ , é sempre positiva para  $y_1 \geq 0$ , a curva é convexa em relação ao eixo  $y_1$ .

Com efeito, a segunda derivada de  $X_1$  com respeito a  $y_1$  é dada por

$$\frac{d^2 X_1}{dy_1^2} = X_1 [(a_2 + 1)a_2 y_1^{-2} - 2a_2 b_2 y_1^{-1} + b_2^2]. \quad (2.32)$$

Primeiramente,  $d^2 X_1/dy_1^2 = 0$  quando  $y_1 = 0$ . Além disso,  $X_1 > 0$  sempre que  $y_1 > 0$ . Assim, observaremos, sem perda de generalidade, ao multiplicarmos (2.32) por  $y_1^2$ , o comportamento da função

$$f(y_1) = b_2^2 y_1^2 - 2a_2 b_2 y_1 + (a_2 + 1)a_2. \quad (2.33)$$

Verificamos que a função (2.33) é positiva quando  $y_1 = 0$  e que quando  $f(y_1) = 0$ , ela não tem raízes reais. Portanto,  $d^2 X_1/y_1^2 > 0$  sempre que  $y_1 > 0$ .

De maneira análoga, ao derivarmos  $X_2(y_2)$ , em relação a  $y_2$ , obtemos

$$\frac{dX_2}{dy_2} = a_1 y_2^{a_1-1} \exp(-b_1 y_2) - b_1 y_2^{a_1} \exp(-b_1 y_2) \quad (2.34)$$

$$= X_2 \left( \frac{a_1}{y_2} - b_1 \right). \quad (2.35)$$

Notemos que quando  $y_2 = a_1/b_1$ , temos que  $dX_2/dy_2 = 0$ . Além disso, temos  $dX_2/dy_2 > 0$ , sempre que  $0 < y_2 < a_1/b_1$ , e que, para  $y_2 > a_1/b_1$ , temos que  $dX_2/dy_2 < 0$ . Por fim, embora a curva tenha pontos de inflexão, para manter a simplicidade gráfica, segunda derivada,  $d^2 X_1/dy_1^2$ , é sempre negativa para  $y_2 \geq 0$ , portanto a curva é côncava em relação ao eixo  $y_2$ . Com efeito, a segunda derivada  $d^2 X_2$  com respeito a  $y_2$  é dada por

$$\frac{d^2 X_2}{y_2^2} = X_2 [a_1(a_1 - 1)y_2^{-2} - 2a_1 b_1 y_2^{-1} + b_1^2]. \quad (2.36)$$

Sabemos que  $d^2 X_2/y_2^2$  ou é zero, ou é positivo ou é negativo, à medida que o valor de  $y_2$  varia. Primeiramente,  $X_2 > 0$  sempre que  $y_2 > 0$ , o que nos resta realizar o estudo dos sinais apenas do termo  $[a_1(a_1 - 1)y_2^{-2} - 2a_1 b_1 y_2^{-1} + b_1^2]$ . Assim, sem perda de generalidade, ao multiplicarmos a equação (2.36) por  $y_2^2$  observaremos o comportamento da função

$$g(y_2) = b_1^2 y_2^2 - 2a_1 b_1 y_2 + (a_1 - 1)a_1. \quad (2.37)$$

Como a função (2.37) tem duas raízes reais  $a_1/b_1 \pm \sqrt{a_1}/b_1$  que são os pontos de inflexão, que são simétricos com respeito ao ponto de máximo da curva  $X_2$ .

Assim, com as funções auxiliares  $X_1$  e  $X_2$ , que constam respectivamente no quarto e segundo quadrante na figura 2.4, e ao traçarmos o segmento de reta  $\overline{OK}$  com coeficiente angular igual a  $B$ , conforme a equação (2.29), temos que  $\tan(\alpha) = B$ . Agora, dado um ponto  $P0$  neste segmento  $\overline{OK}$ , traçamos uma perpendicular ao eixo  $OX_2$  e obtemos os pontos  $G$  e  $F$  na curva  $X_2$ . Por fim, partindo de cada um dos pontos  $F$  e  $G$  traçamos uma perpendicular em relação ao eixo  $Oy_2$ . Analogamente, traçamos uma perpendicular, partido do ponto  $P0$ , ao eixo  $OX_1$  e obtemos os pontos  $D$  e  $E$  na curva  $X_1$ , e, em seguida, traçamos cada perpendicular ao eixo  $Oy_1$ , partindo dos pontos  $D$  e  $E$ . Desse modo obteremos os pontos de intersecção 1, 2, 3 e 4 que pertencem à curva de integral (2.29).

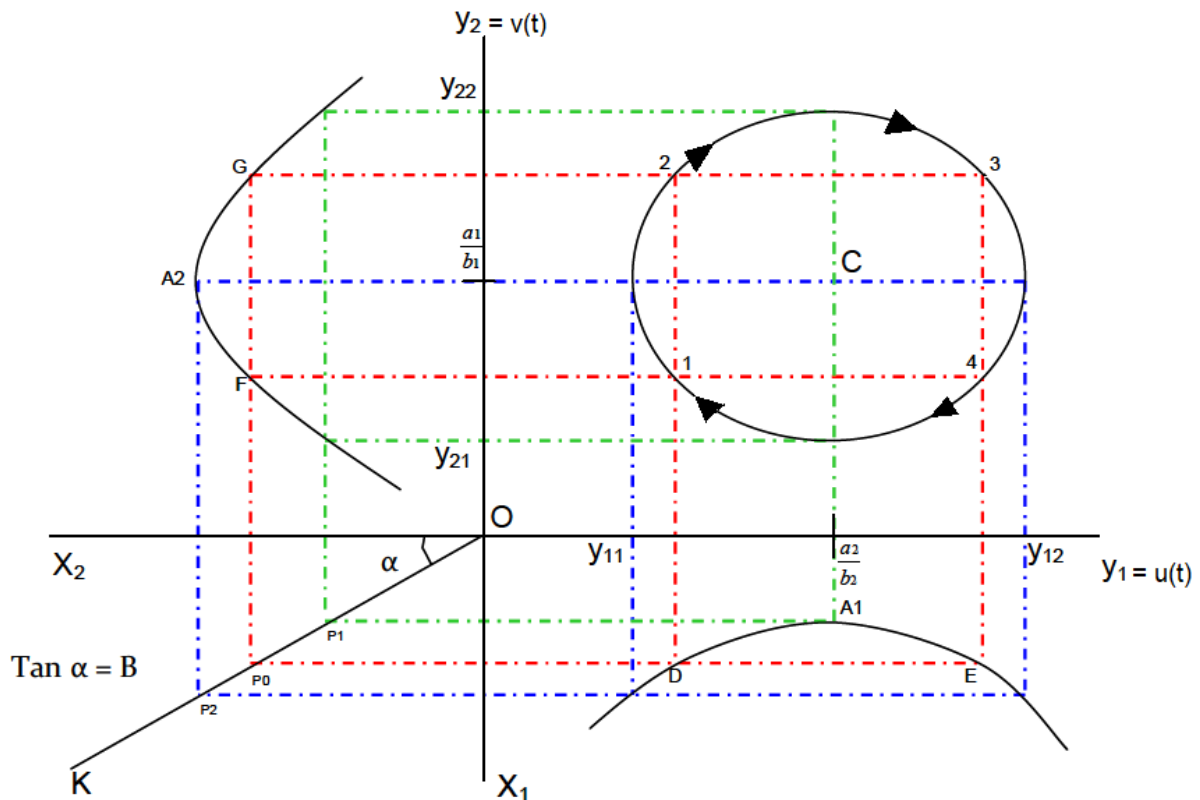


Figura 2.4: Construção de uma órbita fechada do modelo de Goodwin desenvolvida pelo economista italiano G. Gandolfo.

**Fonte:** Adaptado de [36].

Por fim, mediante as equações (2.13) e (2.14), e por meio da figura 2.4, verificamos os quatro estágios de um ciclo econômico mediante os pontos 1, 2, 3 e 4:

1. Recuperação: queda na distribuição de renda ( $\dot{u} < 0$ , quando  $u(t) < a_2/b_2$ ) e elevação na taxa de emprego ( $\dot{v} > 0$ , quando  $v(t) < a_1/b_1$ );
2. *Boom*: elevação no nível da renda dos empregados ( $\dot{u} > 0$ , quando  $u(t) < a_2/b_2$ ) em concomitância com o crescimento da taxa de emprego ( $\dot{v} > 0$ , quando  $v(t) > a_1/b_1$ );
3. Recessão: elevação da distribuição de renda ( $\dot{u} > 0$ , quando  $u(t) > a_2/b_2$ ) com queda da taxa de emprego ( $\dot{v} < 0$ , quando  $v(t) > a_1/b_1$ );
4. Depressão: diminuição da distribuição de renda ( $\dot{u} < 0$ , quando  $u(t) > a_2/b_2$ ) juntamente com a diminuição de emprego ( $\dot{v} < 0$ , quando  $v(t) < a_1/b_1$ );

onde as constantes na figura 2.4, consoante o modelo de Goodwin, são  $a_1 = [1/\sigma - (\alpha + \beta)]$ ,  $b_1 = 1/\sigma$ ,  $a_2 = -(\alpha + \gamma)$  e  $b_2 = \rho$ .

### 3 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

No presente estudo, por meio do modelo de Goodwin, pretendemos descrever numericamente aspectos da economia brasileira em seis regiões metropolitanas brasileiras, no período entre 2004 e 2014. Realizamos o estudo com as seis regiões metropolitanas em conjunto mediante o PIB nacional e, por fim, um estudo de cada uma das quatro regiões metropolitanas brasileiras mediante o respectivo PIB estadual. Os dados de cada uma das seis regiões metropolitanas brasileiras foram fornecidos pelo Instituto Brasileiro Geográfico e Estatístico [26, 27], Fundação João Pinheiro (MG) [19], Agência Estadual de Planejamento e Pesquisas de Pernambuco (PE) [3], Fundação de Economia e Estatística Siegfried Emanuel (RS) [18] e Fundação Sistema Estadual de Análise de Dados (SP) [20]. Não foi possível obter os dados necessários para desenvolver separadamente o estudo das regiões metropolitanas de Rio Janeiro e Salvador. Por fim, a partir desses dados, por meio de cinco metodologias que serão descritas neste capítulo, estimaremos os parâmetros que estão presentes no sistema de equações (2.13) e (2.14):  $\alpha$  (taxa de produtividade de trabalho),  $\beta$  (taxa de força-de-trabalho),  $\gamma$  (intercepto da curva de Phillips linearizada),  $\rho$  (coeficiente angular da curva de Phillips linearizada) e  $\sigma$  (constante capital-produto). Nesses ajustes serão necessários também os dados de  $u(t)$ ,  $v(t)$ ,  $\dot{u}(t)$  e  $\dot{v}(t)$ , os quais foram calculados a partir dos dados disponibilizados pelos institutos supracitados.

#### 3.1 TRATAMENTO DE DADOS

Os dados necessários para as simulações numéricas do modelo de Goodwin abrange seis regiões metropolitanas brasileiras: Recife (RMR), Salvador (RMS), Belo Horizonte (RMBH), Rio de Janeiro (RMRJ), São Paulo (RMSP) e Porto Alegre (RMPA). Entre os dados fornecidos pelo IBGE temos a população economicamente ativa, o produto interno bruto, a população ocupada, o rendimento nominal habitual do trabalho principal e a população desocupada. Desse modo, atribuímos a cada um desses dados citados os seguintes indicadores, respectivamente: força-de-trabalho  $n(t)$ , produção  $q(t)$ , mão-de-obra,  $l(t)$ , renda média salarial  $w(t)$ , desemprego<sup>1</sup>  $m(t)$ . Os valores do produto interno bruto fornecidos pelo IBGE são nacionais e trimestrais [27], enquanto que os demais dados de produto interno bruto são mensais e foram fornecidos pelos respectivos institutos de pesquisa estaduais [3, 18, 19, 20].

Destacamos que para o estudo das seis regiões metropolitanas em conjunto e para o estudo, separadamente, das regiões metropolitanas de Recife (RMR), Belo Horizonte (RMBH) e Porto Alegre (RMPA) foram adotadas a periodicidade trimestral. Desse modo, calculamos a média aritmética de cada um dos três meses consecutivos para formarmos o trimestre. Já a região metropolitana de São Paulo (RMSP) o estudo é de periodicidade mensal.

---

<sup>1</sup>As hipóteses de Goodwin não dizem respeito da população desocupada, assim reconhecemos  $m(t)$  como população desocupada, onde  $d(t)=m(t)/n(t)$  é a taxa de desemprego.

### 3.2 MODELAGEM NUMÉRICA

Durante o desenvolvimento do nosso estudo foram necessários realizar ajustes exponenciais para obter os parâmetros da taxa de produtividade de trabalho e da taxa de força-de-trabalho. Além disso, é necessário também o ajuste linear para curva de Phillips e das equações (2.13) e (2.14). Nesse contexto o método de mínimos quadrados foi utilizado para realizar as estimativas desses parâmetros presentes no modelo de Goodwin. Fizemos uso também da aproximação das derivadas, devido à necessidade dos cálculos para se obter os valores de  $\dot{u}(t)$ ,  $\dot{v}(t)$  e  $\dot{w}(t)$ . Note que fazendo uso desse método, foi possível comparar os dados obtidos pelas metodologias com os dados coletados pelo IBGE durante o período de 2004 e 2014.

### 3.3 MÍNIMOS QUADRADOS

O método de mínimos quadrados [9] é uma ferramenta matemática que ajusta um conjunto de dados a uma função dada, portanto, conhecida, de modo que seja minimizada a soma dos quadrados das diferenças entre o valor estimado e os dados experimentais. A seguir, faremos uma breve descrição dos métodos numéricos empregados que foram necessários para estimar os parâmetros presentes no sistema de equações (2.13) e (2.14) do modelo de Goodwin.

#### 3.3.1 Ajuste Linear via Mínimos Quadrados

Diante de um conjunto de dados experimentais  $(x_i, y_i)$  de tamanho  $n$ , onde  $i = 1, \dots, n$ , é possível realizar uma aproximação por meio de uma função linear

$$y_i = ax_i + b, \quad (3.1)$$

cujo objetivo é determinar os valores  $a$  e  $b$  de maneira que seja minimizado o somatório a seguir

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2, \quad (3.2)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes a serem determinadas. Como o objetivo é minimizar essas distâncias entre  $(y_i)$  e  $(ax_i + b)$ , para que esse mínimo exista, mediante a equação (3.2), é necessário que

$$\frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2 = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0 \quad (3.3)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial b} \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2 = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)(-1) = 0. \quad (3.4)$$

Assim, mediante manipulações algébricas, temos as seguintes equações

$$bn + a \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \quad (3.5)$$

e

$$b \sum_{i=1}^n x_i + a \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad (3.6)$$

cuja solução é dada por

$$a = \frac{n(\sum_{i=1}^n x_i y_i) - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n(\sum_{i=1}^n x_i^2) - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (3.7)$$

e

$$b = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i) - (\sum_{i=1}^n x_i y_i)(\sum_{i=1}^n x_i)}{n(\sum_{i=1}^n x_i^2) - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}, \quad (3.8)$$

onde  $a$  e  $b$  são respectivamente o coeficiente angular e o intercepto da equação (3.1).

### 3.3.2 Ajuste Exponencial via Mínimos Quadrados

De maneira análoga à subseção anterior 3.3.1, é possível realizar uma aproximação por meio de uma exponencial

$$y_i = ce^{dx_i}, \quad (3.9)$$

cujos objetivos é determinar os valores  $c$  e  $d$  de maneira que seja minimizado o somatório a seguir

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (ce^{dx_i})]^2. \quad (3.10)$$

onde  $c$  e  $d$  são constantes a serem determinadas. Como o objetivo é minimizar essas distâncias entre  $(y_i)$  e  $(ce^{dx_i})$ , para que esse mínimo exista, mediante a equação (3.10), é necessário que

$$\frac{\partial}{\partial c} \sum_{i=1}^n [y_i - ce^{dx_i}]^2 = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ce^{dx_i})(-e^{dx_i}) = 0 \quad (3.11)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial d} \sum_{i=1}^n [y_i - ce^{dx_i}]^2 = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ce^{dx_i})(-cx_i e^{dx_i}) = 0. \quad (3.12)$$

Embora não tenhamos uma solução exata, ao aplicarmos o logaritmo na equação (3.9), obtemos

$$\ln(y_i) = \ln(c) + dx_i. \quad (3.13)$$

Portanto, temos uma relação linear que nos possibilita aplicar as equações (3.7) e (3.8) já descritas na subseção 3.3.1, onde  $c$  e  $d$  são respectivamente valor inicial e taxa da equação (3.9).



### 3.3.3 Coeficiente de Determinação

Apresentaremos nos resultados como medida de avaliação dos ajustes de curvas realizados, os respectivos coeficientes de determinação,  $R^2$ , que confere a qualidade da curva ajustada diante do conjunto de dados [23]. No presente trabalho, classificamos o coeficiente de determinação consoante Chin [12] que descreve os valores como substancial, quando acima de  $0.67 = 67\%$ , moderado, quando entre  $0.19 = 19\%$  e  $0.33 = 33\%$ , e fraco, quando até  $0.19 = 19\%$ . Desse modo, a nossa classificação será a moderada, a partir de  $0.67 = 67\%$ .

Por fim, foram encontrados valores negativos em alguns coeficientes de determinação. Isso ocorre quando  $SQ_{residual} > SQ_{total}$ , uma vez que a sua definição é dada por

$$R^2 = 1 - \frac{SQ_{residual}}{SQ_{total}}, \quad (3.14)$$

onde  $SQ_{residual} = \sum_{i=1}^n (x_i - f_i)^2$ ,  $SQ_{total} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ ,  $x_i$  são os dados experimentais,  $f_i$  são os dados obtidos pelo modelo,  $\bar{x} = (1/n) \sum_{i=1}^n x_i$  e  $n$  é o tamanho do espaço amostral.

### 3.4 DISCRETIZAÇÃO DA DERIVA PRIMEIRA

Nas metodologias que apresentaremos a seguir, será necessário o cálculo dos valores de  $\dot{u}(t)$ ,  $\dot{v}(t)$  e  $\dot{w}(t)$ . Assim, fazemos uso da aproximação pela primeira derivada decorrente da expansão da série de Taylor [8]:

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + \frac{f^{(1)}(t_0)}{1!}h + \frac{f^{(2)}(t_0)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(t_0)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}h^n + R_n(x), \quad (3.15)$$

onde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[\varepsilon(t)]}{(n+1)!}(t - t_0)^{n+1} \quad (3.16)$$

é a diferença entre o polinômio de Taylor de grau  $n$  e a função original. No nosso caso, aproximamos para as derivadas primeiras, quando  $n = 1$ , por diferenças finitas, ou seja,

$$\dot{f}(t) = \frac{df(t)}{dt} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} - \frac{R_1(h)}{h}, \quad (3.17)$$

onde  $R_1(h)$  é o erro que denota a diferença entre a aproximação da série truncada e a função de estudo. Desse modo, a aproximação da primeira derivada de  $f$  é dada por:

$$\frac{df(t)}{dt} = \dot{f}(t_i) \approx f(t_{i+1}) - f(t_i), \quad (3.18)$$

onde  $h = 1$ , para que possamos comparar os dados modelados com os dados experimentais, é o intervalo de tempo entre  $t_{i+1}$  e  $t_i$  como veremos nos ajustes (3.19), (3.20) e (3.21).

### 3.5 ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS

Nesta seção exporemos os ajustes das curvas e as metodologias que foram desenvolvidas no presente trabalho, onde para cada uma delas estimaremos os parâmetros necessários para as equações (2.13) e (2.14). O período de estudo, entre 2004 e 2014, é o mesmo em todas as metodologias. Os cálculos para se obter os valores de taxa relativa da média salarial,  $\dot{w}(t)/w(t)$ , taxa relativa de parcela salarial dos empregados na renda nacional,  $u(t)$ , e taxa relativa de emprego,  $v(t)$ , são pela aproximação da primeira derivada como descrita na seção anterior pela equação (3.18). Os valores da taxa de população desocupada,  $d(t)$ , média salarial,  $w(t)$ , taxa de parcela salarial dos empregados na renda nacional,  $u(t)$ , e taxa de emprego,  $v(t)$ , foram fornecidos pelo IBGE [26, 27]. Por fim, destacamos que, embora existam extensões a respeito da curva de Phillips, mantivemos o ajuste linear.

#### 3.5.1 Ajuste da Curva de Phillips Linearizada

A curva de Phillips linearizada é ajustada ao observarmos a relação entre taxa de população desocupada  $d(t)$  (eixo x) e a taxa relativa de média salarial  $\dot{w}(t)/w(t)$  (eixo y), onde  $\dot{w}(t)/w(t) \approx [w(t_{i+1}) - w(t_i)]/w(t_i)$ , conforme a equação (3.18). Desse modo, via mínimos quadrados, a equação com o ajuste linear da curva de Phillips é dada por

$$\underbrace{[w(t_{i+1}) - w(t_i)]/w(t_i)}_{\text{eixo y}} = \underbrace{-\gamma}_{\text{intercepto}} + \underbrace{\rho}_{\text{coeficiente angular}} \underbrace{d(t_i)}_{\text{eixo x}}. \quad (3.19)$$

Lembrando que, realizado o ajuste, embora obtenhamos  $\rho < 0$ , conferiremos ao modelo de Goodwin o valor positivo de  $\rho$  como já foi descrito por meio da figura 2.3. Ademais, os valores de  $w(t_i)$  e  $d(t_i)$  foram fornecidos pelos institutos de pesquisa e estão tabelados no Apêndice A.

#### 3.5.2 Ajuste linear da taxa relativa de participação salarial dos empregados na renda nacional

Em algumas metodologias, faremos uso da equação (2.13) para obter os parâmetros necessários. Desse modo, para a equação (2.13), temos que  $-(\alpha + \gamma)$  é o intercepto,  $\rho$  é o coeficiente angular,  $v(t)$  são valores do eixo x e  $[u(t_{i+1}) - u(t_i)]/u(t_i)$  são os valores do eixo y. Assim, via mínimos quadrados, a equação com ajuste linear da taxa relativa da parcela salarial dos empregados na renda nacional é dada por

$$\underbrace{[u(t_{i+1}) - u(t_i)]/u(t_i)}_{\text{eixo y}} = \underbrace{-(\alpha + \gamma)}_{\text{intercepto}} + \underbrace{\rho}_{\text{coeficiente angular}} \underbrace{v(t_i)}_{\text{eixo x}}, \quad (3.20)$$

onde os valores de  $u(t_i)$  e  $v(t_i)$  estão tabelados no Apêndice A.

### 3.5.3 Ajuste linear da taxa relativa de emprego

As cinco metodologias fazem uso da equação (2.14) para obter pelo menos o valor do parâmetro  $\sigma$ . Assim, para a equação (2.14), temos que  $-(\alpha + \beta)$  é o intercepto,  $1/\sigma$  é o coeficiente angular,  $[1 - u(t)]$  são valores do eixo x e  $[v(t_{i+1}) - v(t_i)]/v(t_i)$  são os valores do eixo y. Assim, via mínimos quadrados, a equação com ajuste linear da taxa relativa de emprego é dada por

$$\underbrace{[v(t_{i+1}) - v(t_i)]/v(t_i)}_{\text{eixo y}} = \underbrace{-(\alpha + \beta)}_{\text{intercepto}} + \underbrace{1/\sigma}_{\text{coeficiente angular}} \underbrace{[1 - u(t_i)]}_{\text{eixo x}}, \quad (3.21)$$

onde os valores de  $u(t_i)$  e  $v(t_i)$  encontram-se tabelados no Apêndice A.

## 3.6 METODOLOGIAS (2004-2014)

As metodologias apresentadas a seguir descrevem a obtenção dos parâmetros para o sistema de equações, (2.13) e (2.14), de maneira que a primeira metodologia é realizada consoante aos ajustes propostos pelo modelo de Goodwin, enquanto que as demais metodologias são desenvolvidas com algumas relaxações nas premissas. As curvas de Phillips linearizadas que são utilizadas em algumas metodologias, estão em conformidade com o que foi descrito anteriormente. Ademais, em todas as metodologias, os ajustes são realizados via o método de mínimos quadrados. A seguir temos as descrições de cada uma dessas cinco metodologias.

### 3.6.1 Primeira Metodologia (M1)

A primeira metodologia (M1) no presente trabalho é sem relaxação das premissas. Mantivemos os ajustes exponenciais proposto por Goodwin para se obter os valores dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , conforme as equações (2.1) e (2.2), respectivamente. Os valores dos parâmetros  $\gamma$  e  $\rho$  são obtidos por meio da curva de Phillips linearizada (3.19). E, por fim, o parâmetro capital-produto,  $\sigma$ , é estimado via equação (3.21) por mínimos quadrados, posto que o modelo de Goodwin apenas nos diz apenas que se trata de uma constante.

### 3.6.2 Segunda Metodologia (M2)

A segunda metodologia (M2) é sem relaxação para se obter os valores de  $\alpha$  e  $\beta$ , por meio de exponenciais - equações (2.1) e (2.2), respectivamente - assim como na primeira metodologia (M1). No entanto, diferentemente da primeira metodologia (M1), os valores de  $\gamma$  e  $\rho$  são obtidos mediante ajuste linear da equação (2.13) utilizando a equação (3.20). Enquanto que para se obter o valor de  $\sigma$ , assim como na primeira metodologia (M1), faremos uso da equação (3.21).

### 3.6.3 Terceira Metodologia (M3)

A terceira metodologia (M3) ocorre sem relaxação para se obter o valor de  $\beta$  que é dado pelo ajuste exponencial, via equação 2.2. Os valores de  $\gamma$  e  $\rho$  são obtidos mediante o ajuste linear da curva de Phillips por meio da equação (3.19). Por fim, os valores de  $\alpha$  e  $\sigma$  são estimados pela equação (3.21) via mínimos quadrados.

### 3.6.4 Quarta Metodologia (M4)

A quarta metodologia (M4), ocorre sem relaxação para se obter o valor de  $\beta$ , via ajuste exponencial pela equação (2.2). Contudo, há relaxação para se estimar a taxa de produtividade  $\alpha$ . Desse modo os valores de  $\alpha$  e  $\sigma$  são estimados pelo ajuste linear da equação (3.21). Por fim, sem fazer uso da curva de Phillips linearizada, os valores de  $\gamma$  e  $\rho$  são estimados pelo ajuste linear da equação (3.20).

### 3.6.5 Quinta Metodologia (M5)

A quinta metodologia (M5) consiste no ajuste exponencial da equação de força-de-trabalho (2.2) para se obter o valor de  $\beta$ . Os valores de  $\alpha$  e  $\sigma$  são obtidos por meio do ajuste linear da equação (3.20), portanto há relaxação para se estimar o valor de  $\alpha$ . Já os valores de  $\gamma$  e  $\rho$ , sem fazer uso da curva de Phillips, são obtidos por meio do ajuste linear da equação (3.20).

## 3.7 RESUMO: METODOLOGIAS

A seguir temos a tabela 3.1 que compara cada uma das cinco metodologias conforme as equações utilizadas durante o desenvolvimento do presente trabalho para estimar os parâmetros necessários que constam no sistema de equações do modelo de Goodwin.

	$\alpha$	$\gamma, \rho$
M1	$a(t) = e^{\alpha t}$	$\dot{w}(t)/w(t) = -\gamma + \rho d(t)$
M2	$a(t) = e^{\alpha t}$	$\dot{u}(t)/u(t) = -(\alpha + \gamma) + \rho v(t)$
M3	$\dot{v}(t)/v(t) = [(1/\sigma) - (\alpha + \beta)] - (1/\sigma)u(t)$	$\dot{w}(t)/w(t) = -\gamma + \rho d(t)$
M4	$\dot{u}(t)/u(t) = -(\alpha + \gamma) + \rho v(t)$	$\dot{w}(t)/w(t) = -\gamma + \rho d(t)$
M5	$\dot{v}(t)/v(t) = [(1/\sigma) - (\alpha + \beta)] - (1/\sigma)u(t)$	$\dot{u}(t)/u(t) = -(\alpha + \gamma) + \rho v(t)$

Tabela 3.1: Parâmetros  $\alpha$ ,  $\gamma$  e  $\rho$ : equações utilizadas para os ajustes.

Ressaltamos que as equações (2.2) e (2.14), referentes aos parâmetros  $\beta$  e  $\sigma$ , não constam na tabela 3.1 acima, uma vez que elas são utilizadas nas cinco metodologias.

### 3.8 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção apresentaremos os resultados numéricos, por meio de cada uma das cinco metodologias, para cada uma das regiões de estudo. Em seguida, compararemos  $u(t)$  e  $v(t)$ , obtidos pelas metodologias, com os dados experimentais, no período entre 2004 e 2014. Nomeamos a primeira metodologia M1, a segunda metodologia M2, a terceira metodologia M3, a quarta metodologia M4 e a quinta metodologia M5.

#### 3.8.1 Seis Regiões Metropolitanas Brasileiras

O estudo das seis regiões metropolitanas brasileiras foi desenvolvido em conjunto mediante o PIB nacional. Destacamos que esses dados foram fornecidos pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) [26, 27].

A seguir, temos os gráficos dos dados experimentais e os ajustes referentes às seis regiões metropolitanas brasileiras em conjunto no período entre 2004 e 2014.

O ajuste exponencial da produtividade,  $a(t)$ , figura 3.1, foi necessário para estimar o valor de  $\alpha$  que foi utilizado na primeira (M1) e segunda (M2) metodologias.

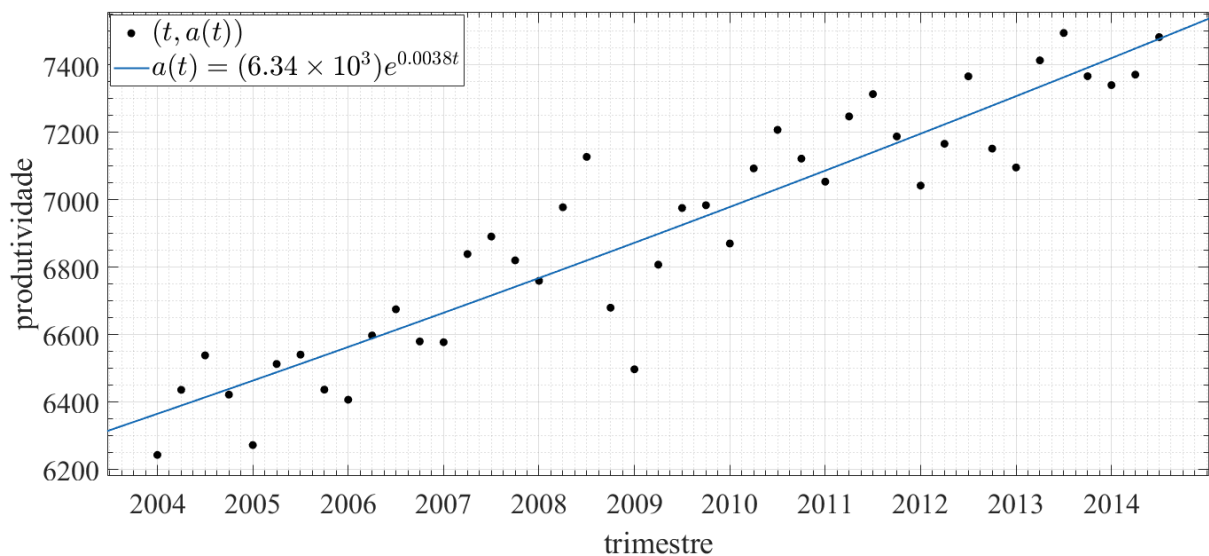


Figura 3.1: Ajuste exponencial da produtividade nas seis regiões metropolitanas brasileiras

**Fonte:** Autor.

O ajuste exponencial da população economicamente ativa,  $n(t)$ , figura 3.2, foi necessário para estimar o valor de  $\beta$  e está presente em todas as metodologias.

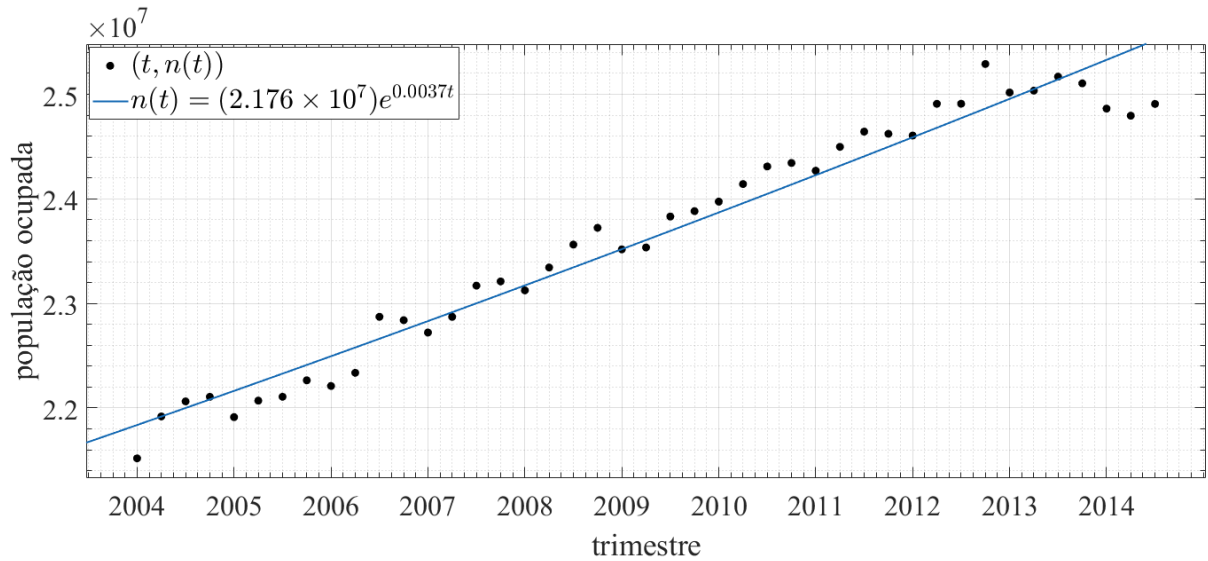


Figura 3.2: Ajuste exponencial da população economicamente ativa nas seis regiões metropolitanas brasileiras

**Fonte:** Autor.

A seguir, na figura 3.3, temos a curva de Phillips linearizada mediante os dados experimentais das seis regiões metropolitanas brasileiras em conjunto.

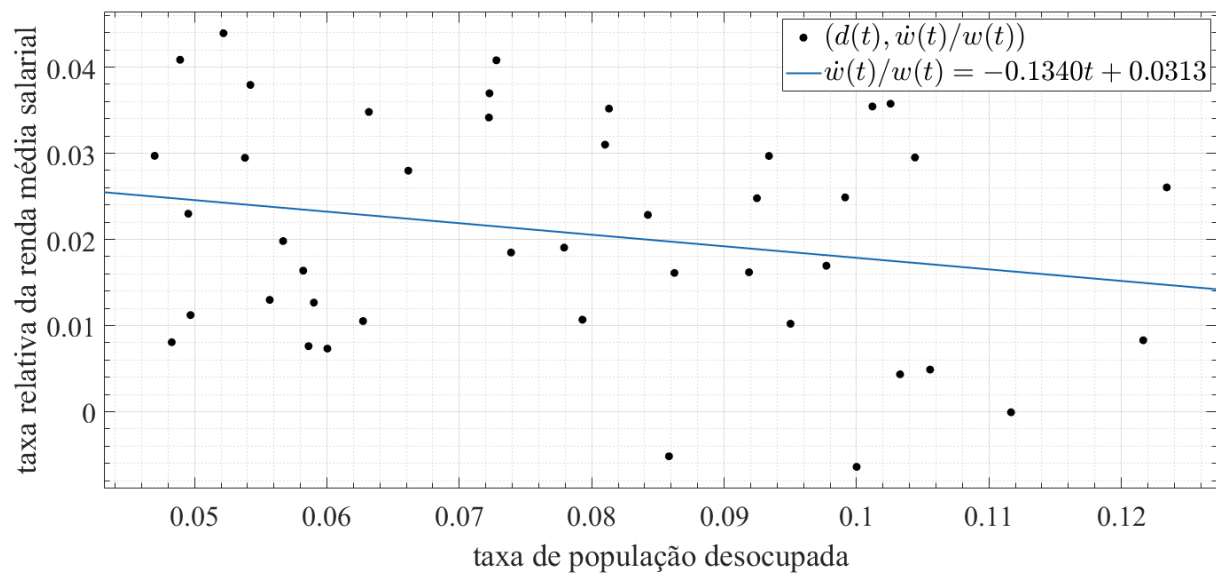


Figura 3.3: Curva de Phillips linearizada nas seis regiões metropolitanas brasileiras

**Fonte:** Autor.

Na figura abaixo, 3.4, comparamos os dados experimentais de  $u(t)$  com os dados obtidos pelas cinco metodologias.

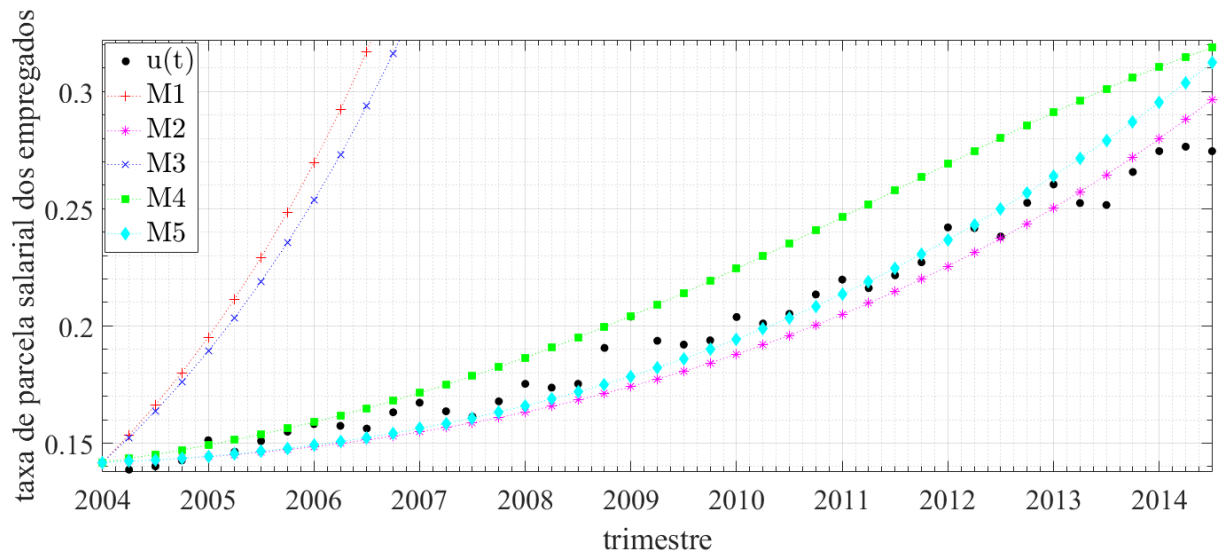


Figura 3.4: Comparativo entre as cinco metodologias mediante os dados experimentais de  $u(t)$  em SRMB

**Fonte:** Autor.

A seguir, figura 3.5, comparamos os dados experimentais de  $v(t)$  com os dados obtidos pelas cinco metodologias.

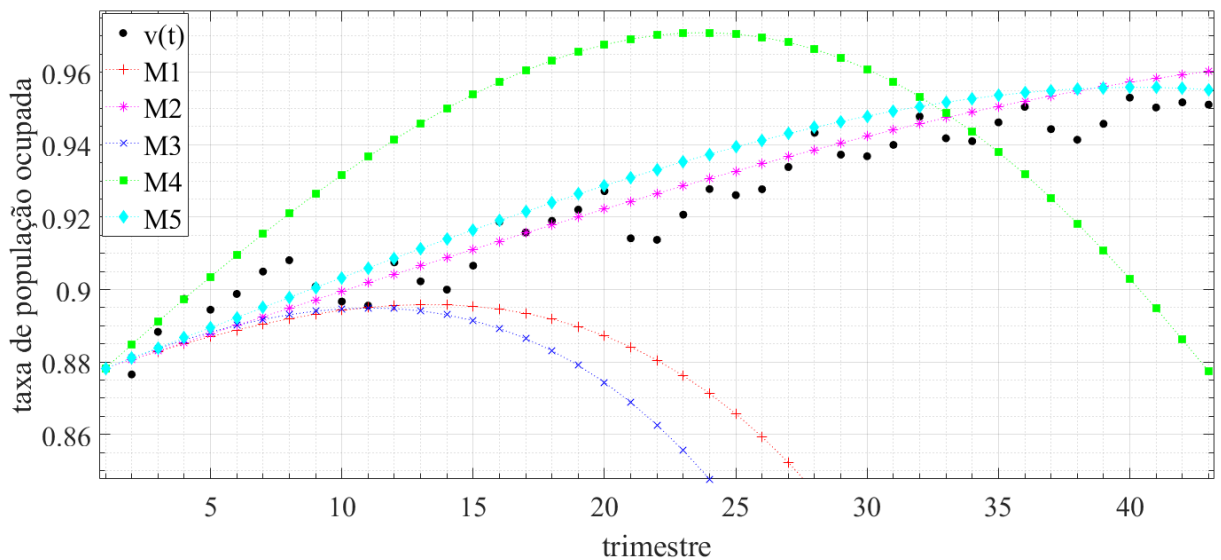


Figura 3.5: Comparativo entre as cinco metodologias mediante os dados experimentais de  $v(t)$  em SRMB

**Fonte:** Autor.

Abaixo, figura 3.2, temos os parâmetros, todos positivos, obtidos pelas cinco metodologias nas seis regiões metropolitanas brasileiras em conjunto.

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\rho$	$\sigma$
M1	0.0038	0.0037	0.0313	0.1340	83.32
M2	0.0038	0.0037	0.2803	0.3270	83.32
M3	0.0122	0.0037	0.0313	0.1340	44.96
M4	0.0750	0.0037	0.0313	0.1340	9.98
M5	0.0122	0.0037	0.2719	0.3270	44.96

Tabela 3.2: Parâmetros: SRMB

Na tabela a seguir, 3.3, temos os coeficientes de determinação obtidos conforme os ajustes das curvas via método de mínimos quadrados, pelas cinco metodologias, nas seis regiões metropolitanas brasileiras em conjunto.

	$a(t)$	$n(t)$	$\dot{w}(t)/w(t)$	$\dot{u}(t)/u(t)$	$\dot{v}(t)/v(t)$
M1	$0.8647_\alpha$	$0.9584_\beta$	$0.0505_{\gamma,\rho}$	$\times$	$0.0181_\sigma$
M2	$0.8647_\alpha$	$0.9584_\beta$	$\times$	$0.0504_{\gamma,\rho}$	$0.0181_\sigma$
M3	$\times$	$0.9584_\beta$	$0.0505_{\gamma,\rho}$	$\times$	$0.0232_{\alpha,\sigma}$
M4	$\times$	$0.9584_\beta$	$0.0505_{\gamma,\rho}$	$0.0328_\alpha$	$-0.2627_\sigma$
M5	$\times$	$0.9584_\beta$	$\times$	$0.0504_{\gamma,\rho}$	$0.0232_{\alpha,\sigma}$

Tabela 3.3:  $R^2$  das curvas: SRMB

Por fim, temos o comparativo, por meio do coeficiente de determinação entre os dados experimentais de  $u(t)$  e  $v(t)$  calculados e os dados obtidos pelas metodologias.

	M1	M2	M3	M4	M5
$u(t)$	-8.89%	93.45%	-3.79%	51.35%	91.93%
$v(t)$	-0.35%	89.79%	-0.61%	-0.02%	82.33%

Tabela 3.4:  $R^2$  entre os dados experimentais e os obtidos pelas cinco metodologias: SRMB

Primeiramente observamos que todos os parâmetros são positivos, portanto as cinco metodologias satisfazem o modelo tipo Goodwin. Por fim, as metodologias que atendem a classificação de 67% de Chin são as segunda (M2) e quinta (M5) metodologias.

### 3.8.2 Região Metropolitana de Belo Horizonte

O estudo da região metropolitana de Belo Horizonte foi desenvolvido com o PIB do Estado de Minas Gerais. Destacamos que esses dados foram fornecidos pela Fundação João Pinheiro [19] e pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística [26].



A seguir, temos os gráficos dos dados experimentais e os ajustes referentes à região metropolitana de Belo Horizonte no período entre 2004 e 2014.

O ajuste exponencial da produtividade,  $a(t)$ , figura 3.6, foi necessário para estimar o valor de  $\alpha$ , que foi utilizado na primeira (M1) e segunda (M2) metodologias.

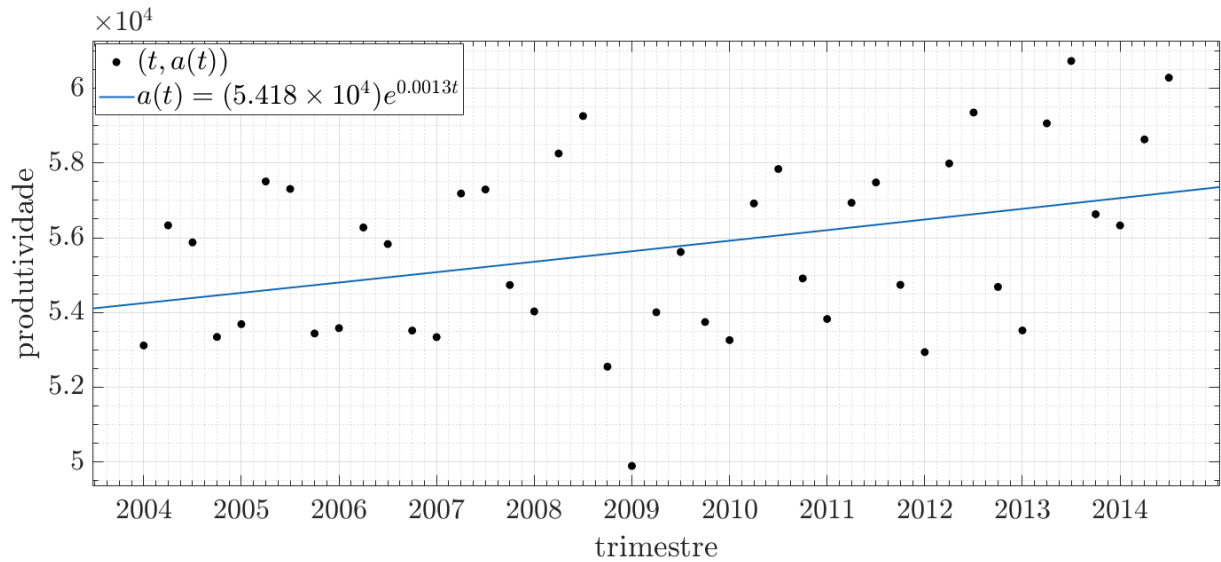


Figura 3.6: Ajuste exponencial da produtividade na região metropolitana de Belo Horizonte

**Fonte:** Autor.

O Ajuste exponencial da população economicamente ativa,  $n(t)$ , figura 3.7, foi necessário para estimar o valor de  $\beta$ , que foi empregado em todas as metodologias.

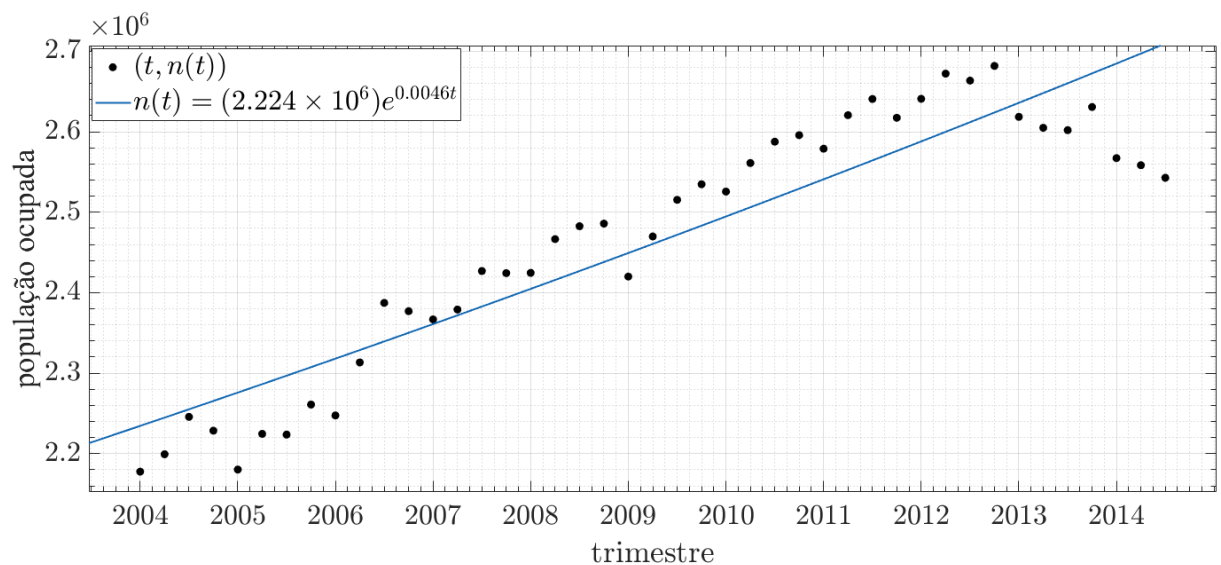


Figura 3.7: Ajuste exponencial da população economicamente ativa na região metropolitana de Belo Horizonte

**Fonte:** Autor.

A seguir, na figura 3.8, temos a curva de Phillips linearizada mediante os

dados experimentais da região metropolitana de Belo Horizonte.

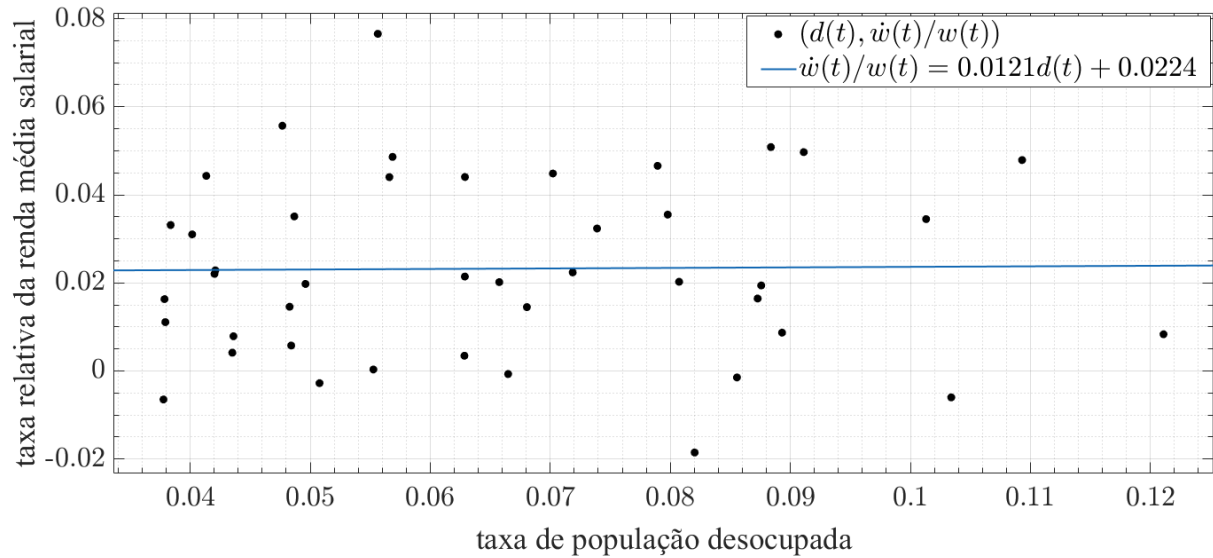


Figura 3.8: Curva de Phillips linearizada na região metropolitana de Belo Horizonte

**Fonte:** Autor.

A seguir, figura 3.9, comparamos os valores de  $u(t)$  entre os dados experimentais com os dados obtidos pelas cinco metodologias.

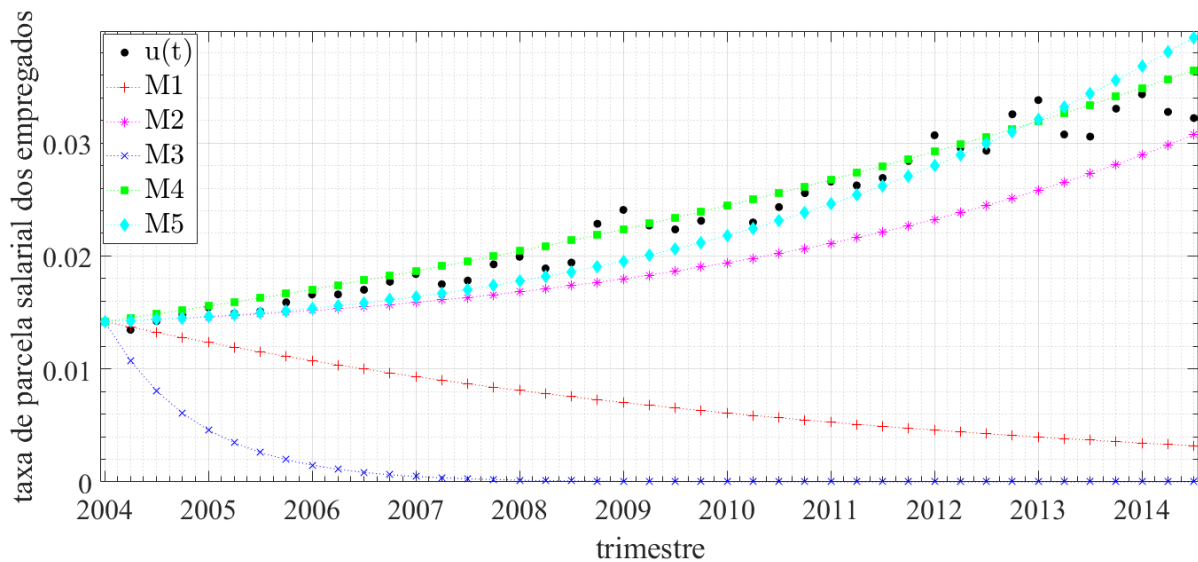


Figura 3.9: Comparativo entre as cinco metodologias mediante os dados experimentais de  $u(t)$  em RMBH

**Fonte:** Autor.

Na figura 3.10 abaixo, comparamos os dados experimentais de  $v(t)$  com os dados de  $v(t)$  obtidos pelas cinco metodologias.

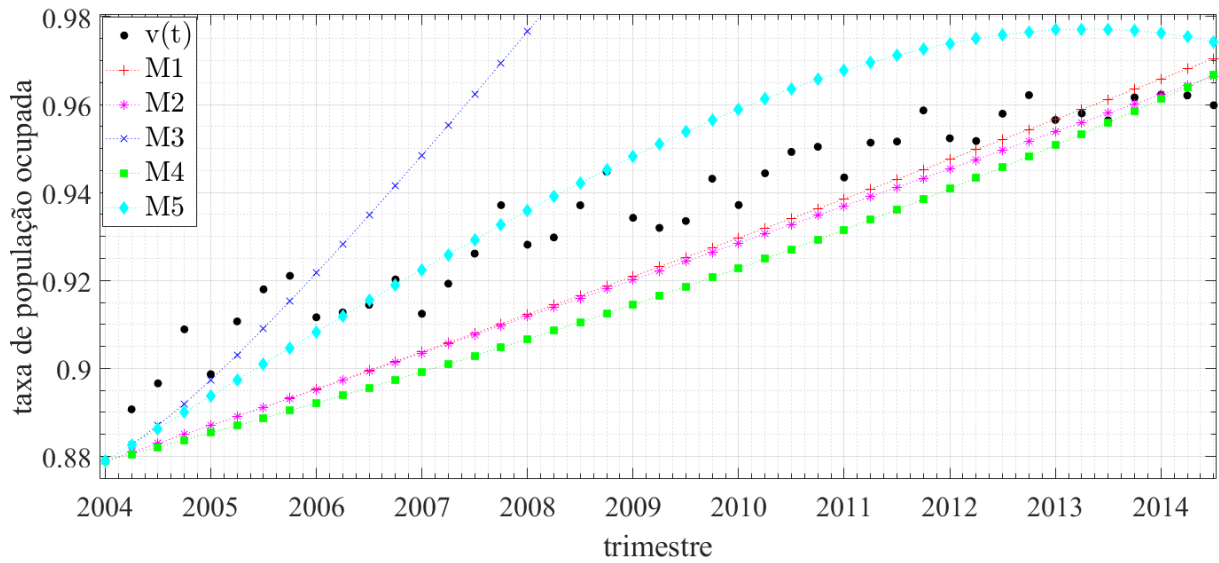


Figura 3.10: Comparativo entre as cinco metodologias mediante os dados experimentais de  $v(t)$  em RMBH

**Fonte:** Autor.

Seguem os parâmetros, tabela 3.5, obtidos pelas cinco metodologias desenvolvidas no presente trabalho na região metropolitana de Belo Horizonte. Destacamos que somente as metodologias M2 e M5 têm os parâmetros positivos.

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\rho$	$\sigma$
M1	0.0013	0.0046	0.0224	-0.0121	120.80
M2	0.0013	0.0046	0.2500	0.2929	120.80
M3	0.2129	0.0046	0.0224	-0.0121	4.45
M4	0.1498	0.0046	0.0224	-0.0121	6.35
M5	0.2129	0.0046	0.0384	0.2929	4.45

Tabela 3.5: Parâmetros: RMBH

Na tabela 3.6 abaixo temos os coeficientes de determinação obtidos conforme os ajustes das curvas via método de mínimos quadrados em cada um dos ajustes abordados no presente trabalho na região metropolitana de Belo Horizonte.

	$a(t)$	$n(t)$	$\dot{w}(t)/w(t)$	$\dot{u}(t)/u(t)$	$\dot{v}(t)/v(t)$
M1	$0.1341_\alpha$	$0.8422_\beta$	$0.0002_{\gamma,\rho}$	$\times$	$0.0032_\sigma$
M2	$0.1341_\alpha$	$0.8422_\beta$	$\times$	$0.0150_{\gamma,\rho}$	$0.0032_\sigma$
M3	$\times$	$0.8422_\beta$	$0.0002_{\gamma,\rho}$	$\times$	$0.0441_{\alpha,\sigma}$
M4	$\times$	$0.8422_\beta$	$0.0002_{\gamma,\rho}$	$-0.0013_\alpha$	$-0.0220_\sigma$
M5	$\times$	$0.8422_\beta$	$\times$	$0.0150_{\gamma,\rho}$	$0.0441_{\alpha,\sigma}$

Tabela 3.6:  $R^2$  das curvas: RMBH

Por fim, temos o comparativo na tabela 3.7, por meio do coeficiente de determinação, entre os dados experimentais de  $u(t)$  e  $v(t)$  calculados, obtidos pelos institutos de pesquisa, com os dados obtidos pelas metodologias.

	M1	M2	M3	M4	M5
$u(t)$	-700.85%	60.22%	-1203.38%	95.32%	89.03%
$v(t)$	53.52%	50.01%	-2256.63%	26.34%	70.32%

Tabela 3.7:  $R^2$  entre os dados experimentais e os obtidos pelas cinco metodologias: RMBH

Destacamos que as metodologias M1, M3 e M4 não satisfazem a dinâmica tipo Goodwin devido ao valor negativo do coeficiente angular  $\rho$  da curva de Phillips linearizada. Desse modo temos apenas duas metodologias, M2 e M5 que satisfazem o modelo tipo Goodwin. Lembrando que esta duas metodologias realizam as estimativas dos parâmetros  $\gamma$  e  $\rho$  por meio da equação de taxa relativa de participação salarial dos empregados na renda nacional (2.13). Por fim, as metodologias quarta (M4) e quinta (M5) são as que estão em conformidade com o critério de Chin, acima de 67%.

### 3.8.3 Região Metropolitana de Porto Alegre

O estudo da região metropolitana de Porto Alegre foi desenvolvido em conjunto com PIB do estado do Rio Grande do Sul. Destacamos que esses dados foram fornecidos pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística [26] e pela Fundação de Economia e Estatística Siegfried Emanuel Heuser [18].

A seguir, temos os gráficos dos dados experimentais e os ajustes realizados referentes à região metropolitana de Porto Alegre no período entre 2004 e 2014.

O ajuste exponencial da produtividade,  $a(t)$ , figura 3.11, foi necessário para estimar o valor de  $\alpha$ , que foi utilizado na primeira metodologia (M1).

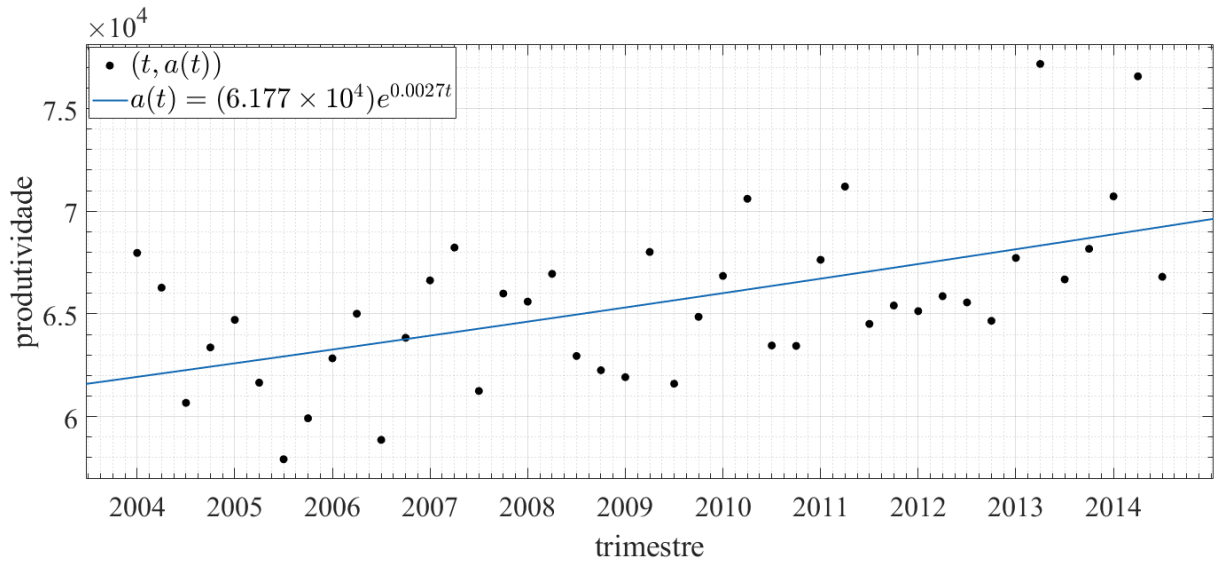


Figura 3.11: Ajuste exponencial da produtividade na região metropolitana de Porto Alegre

**Fonte:** Autor.

O ajuste exponencial da população economicamente ativa,  $n(t)$ , figura 3.12, para estimar o valor da taxa de  $\beta$  que foi necessário em todas as metodologias.

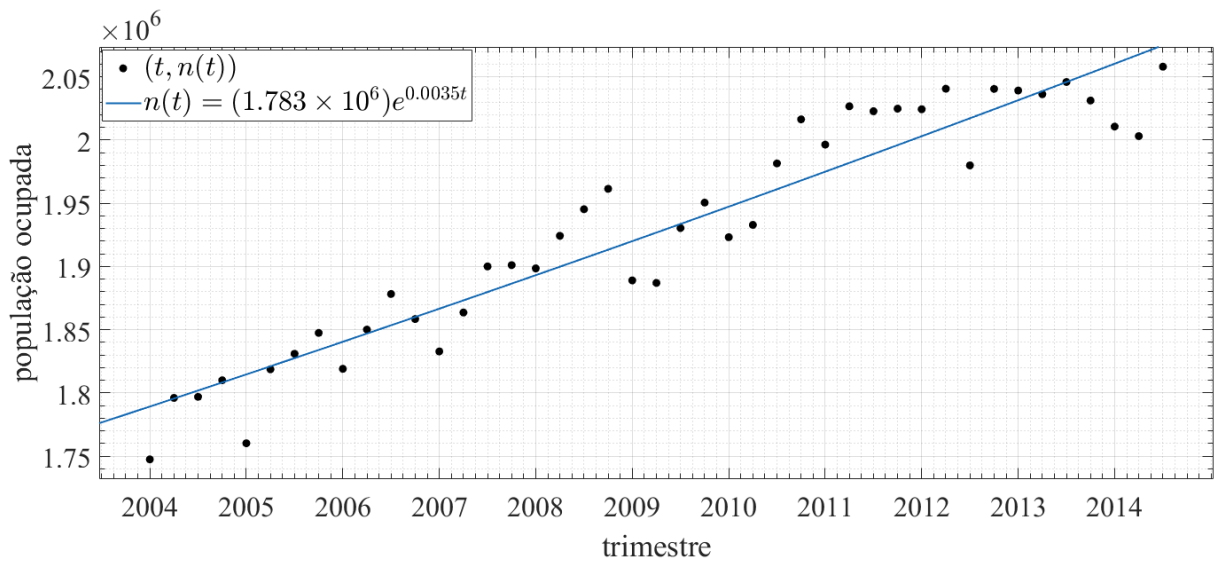


Figura 3.12: Ajuste exponencial da população economicamente ativa na região metropolitana de Porto Alegre

**Fonte:** Autor.

A seguir, na figura 3.13, temos a curva de Phillips linearizada mediante os dados experimentais da região metropolitana de Porto Alegre.

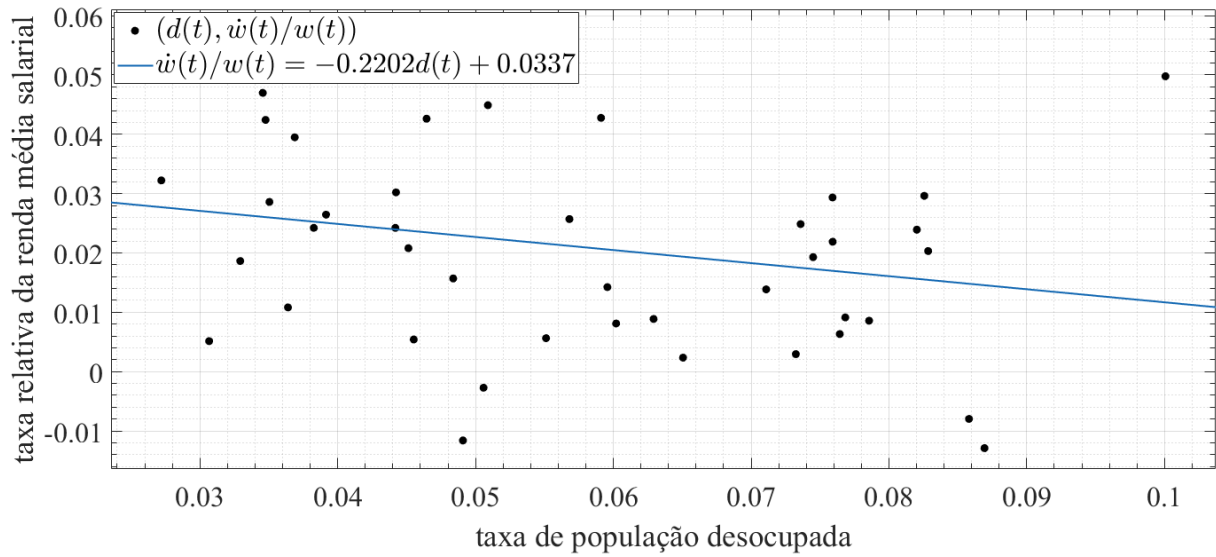


Figura 3.13: Curva de Phillips linearizada na região metropolitana de Porto Alegre

**Fonte:** Autor.

Comparamos, na figura 3.14 abaixo, os dados experimentais de  $u(t)$  com os dados de  $u(t)$  obtidos pelas cinco metodologias.

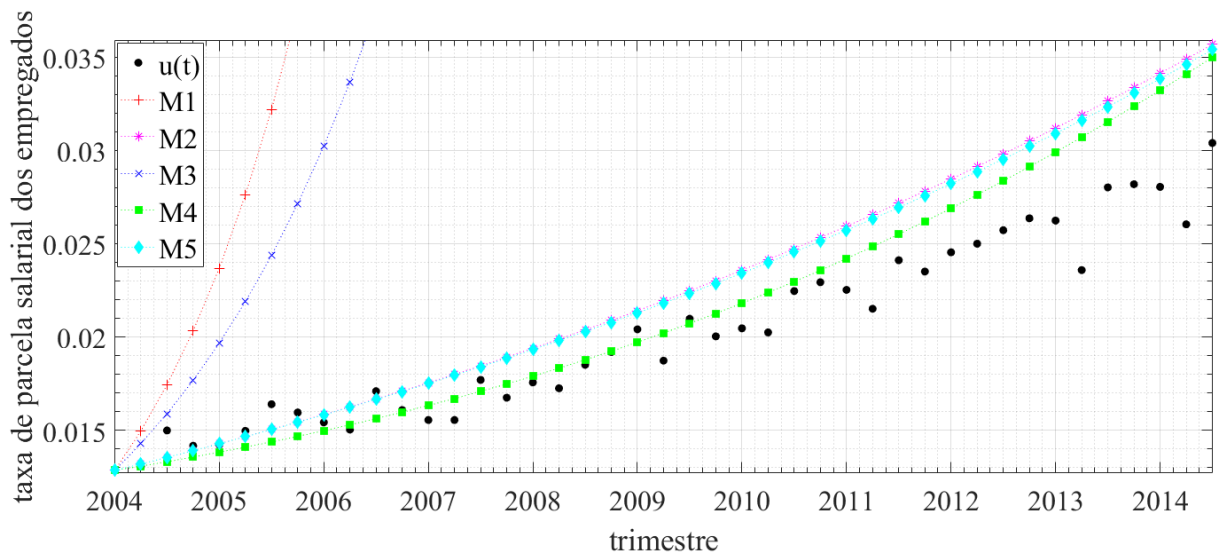


Figura 3.14: Comparativo entre as cinco metodologias mediante os dados experimentais de  $u(t)$  em RMPA

**Fonte:** Autor.

Na figura 3.15, comparamos os dados experimentais de  $v(t)$  com os dados de  $v(t)$  obtidos pelas cinco metodologias.

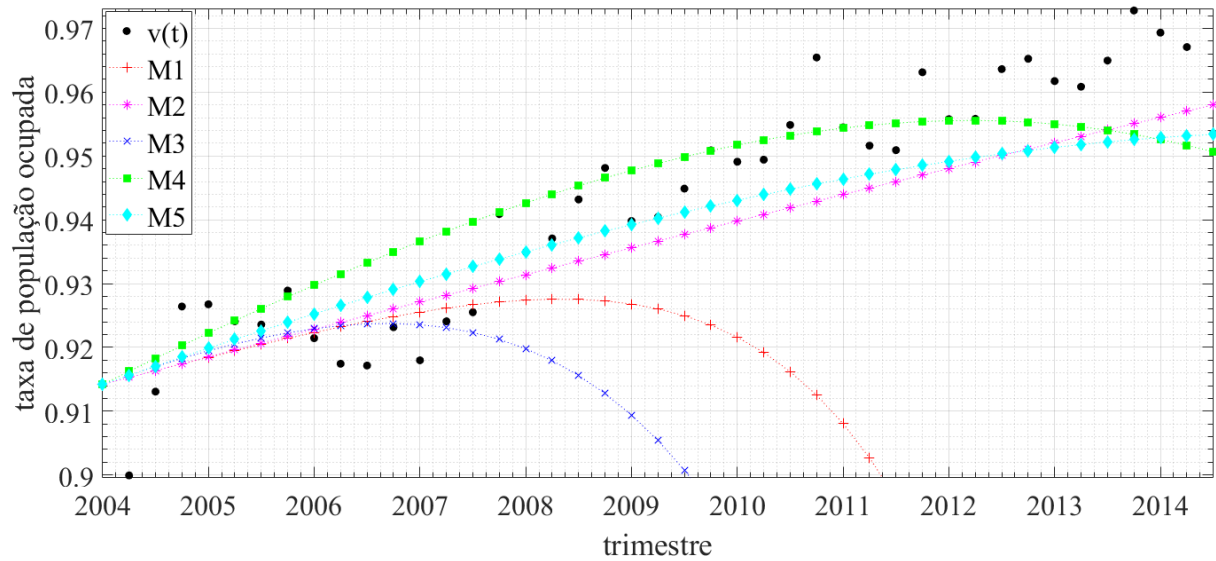


Figura 3.15: Comparativo entre as cinco metodologias mediante os dados experimentais de  $v(t)$  em RMPA

**Fonte:** Autor.

A seguir, figura 3.8, temos os parâmetros obtidos pelas cinco metodologias desenvolvidas no presente trabalho. Destacamos que somente as metodologias M1, M3 e M4 são do tipo Goodwin, posto que há parâmetros negativos nas metodologias M2 e M5.

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\rho$	$\sigma$
M1	0.0027	0.0035	0.0337	0.2202	133.92
M2	0.0027	0.0035	-0.1279	-0.1075	133.92
M3	0.0557	0.0035	0.0337	0.2202	16.24
M4	0.1498	0.0035	0.0337	0.2202	6.35
M5	0.0557	0.0035	-0.1809	-0.1075	16.24

Tabela 3.8: Parâmetros: RMPA

Os valores obtidos pelo coeficiente de determinação, conforme os ajustes das curvas via método de mínimos quadrados, em cada uma das cinco metodologias podem ser verificados na tabela 3.9 logo abaixo.

	$a(t)$	$n(t)$	$\dot{w}(t)/w(t)$	$\dot{u}(t)/u(t)$	$\dot{v}(t)/v(t)$
M1	$0.3049_\alpha$	$0.9014_\beta$	$0.0562_{\gamma,\rho}$	$\times$	$0.0004_\sigma$
M2	$0.3049_\alpha$	$0.9014_\beta$	$\times$	$0.0008_{\gamma,\rho}$	$0.0004_\sigma$
M3	$\times$	$0.9014_\beta$	$0.0562_{\gamma,\rho}$	$\times$	$0.0016_{\alpha,\sigma}$
M4	$\times$	$0.9014_\beta$	$0.0562_{\gamma,\rho}$	$-0.0066_\alpha$	$-0.0022_\sigma$
M5	$\times$	$0.9014_\beta$	$\times$	$0.0008_{\gamma,\rho}$	$0.0016_{\alpha,\sigma}$

Tabela 3.9:  $R^2$  das curvas: RMPA

Por fim, temos o comparativo na tabela 3.10, via os respectivos coeficientes de determinação, entre os dados experimentais de  $u(t)$  e  $v(t)$  com os calculados mediante dados obtidos por cada uma das metodologias.

	M1	M2	M3	M4	M5
$u(t)$	-19932000%	48.38%	-346170%%	74.95%	53.79%
$v(t)$	-2375.60%	71.43%	-5579.43%	73.66%	75.34%

Tabela 3.10:  $R^2$  entre os dados experimentais e os obtidos pelas cinco metodologias: RMPA

Verificamos que as metodologias segunda (M2), quarta (M4) e quinta (M5) são as que estão em conformidade com o critério de Chin, acima de 67%. Por fim, destacamos que somente a quarta metodologia (M4) faz uso da curva de Phillips.

### 3.8.4 Região Metropolitana de Recife

O estudo da região metropolitana de Recife foi desenvolvido pelos em conjunto com o PIB do estado de Pernambuco. Os seus dados foram fornecidos pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística [26] e pela Agência Estadual de Planejamento e Pesquisas de Pernambuco [3]. A seguir, temos os gráficos dos dados experimentais referente às seis regiões metropolitanas brasileiras no período entre 2004 e 2014.

O ajuste exponencial da produtividade,  $a(t)$ , figura 3.16, foi necessário para estimar o valor  $\alpha$ , que foi utilizado na primeira (M1) e segunda (M2) metodologias.



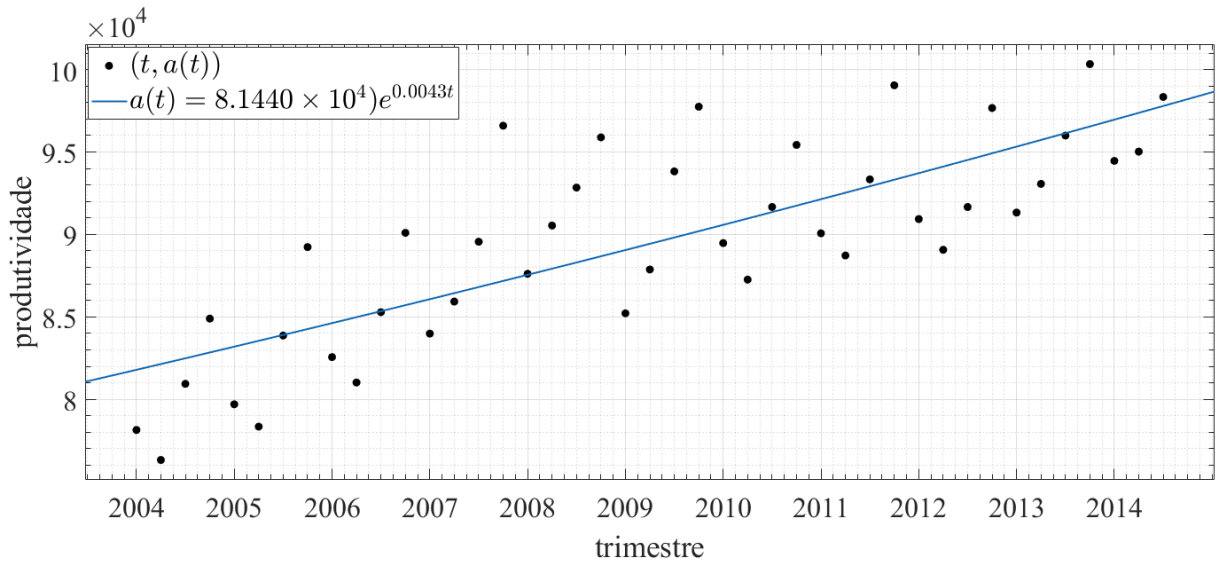


Figura 3.16: Ajuste exponencial da produtividade na região metropolitana de Recife

**Fonte:** Autor.

O ajuste exponencial da população economicamente ativa,  $n(t)$ , figura 3.2, para estimar o valor de  $\beta$ , que foi necessário em todas essas cinco metodologias.

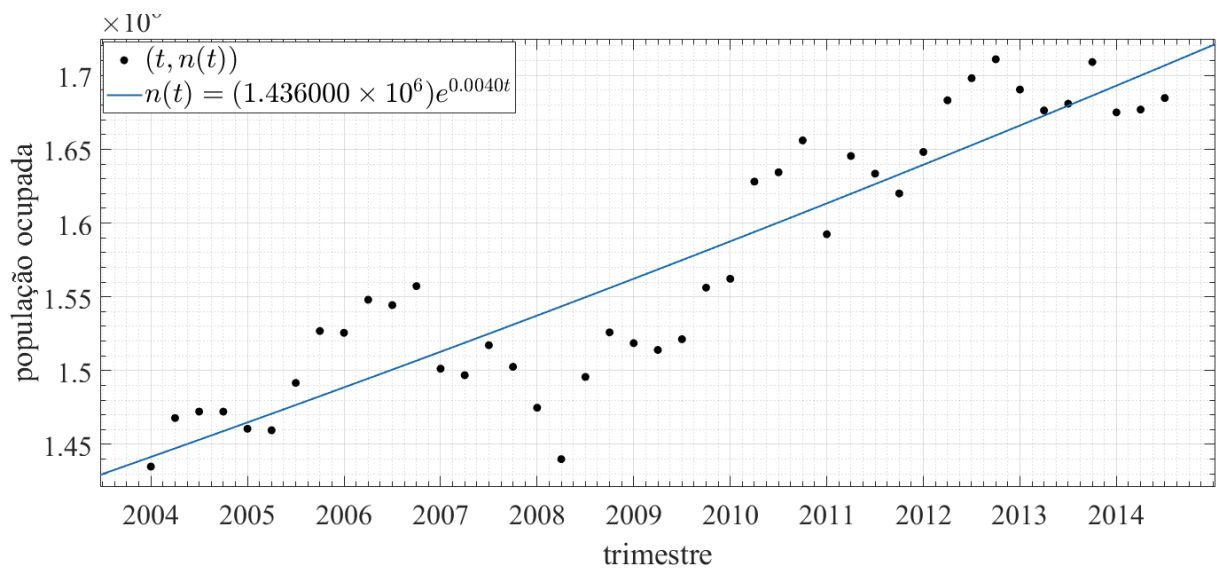


Figura 3.17: Ajuste exponencial da população economicamente ativa na região metropolitana de Recife

**Fonte:** Autor.

A seguir, na figura 3.3, temos a curva de Phillips linearizada mediante os dados experimentais da região metropolitana de Recife.

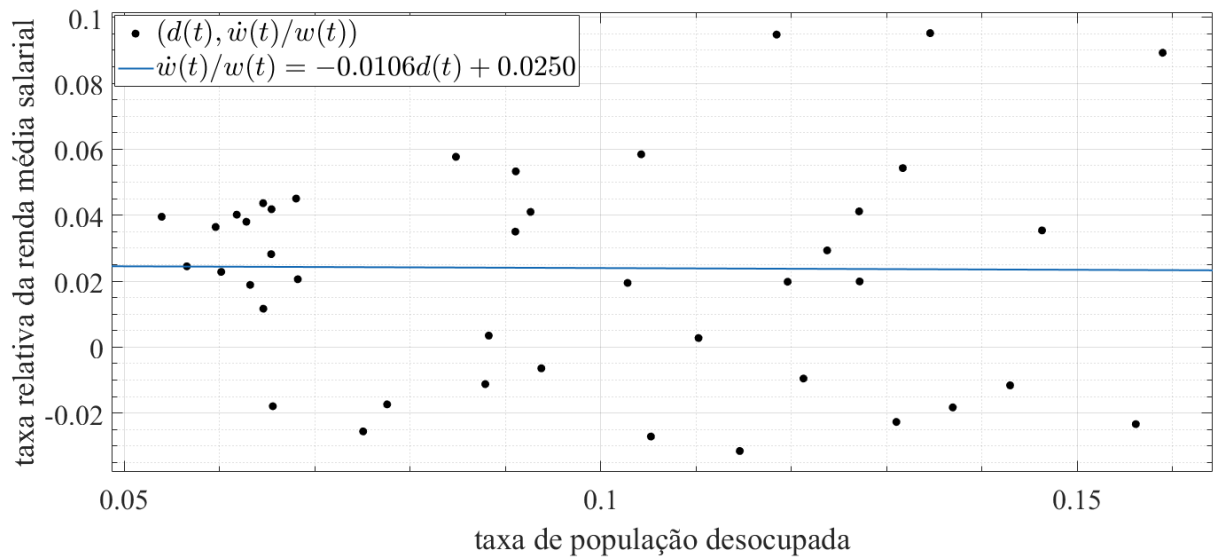


Figura 3.18: Curva de Phillips linearizada na região metropolitana de Recife

**Fonte:** Autor.

Abaixo, figura 3.19, comparamos os dados experimentais de  $u(t)$  com os dados de  $u(t)$  obtidos pelas cinco metodologias.

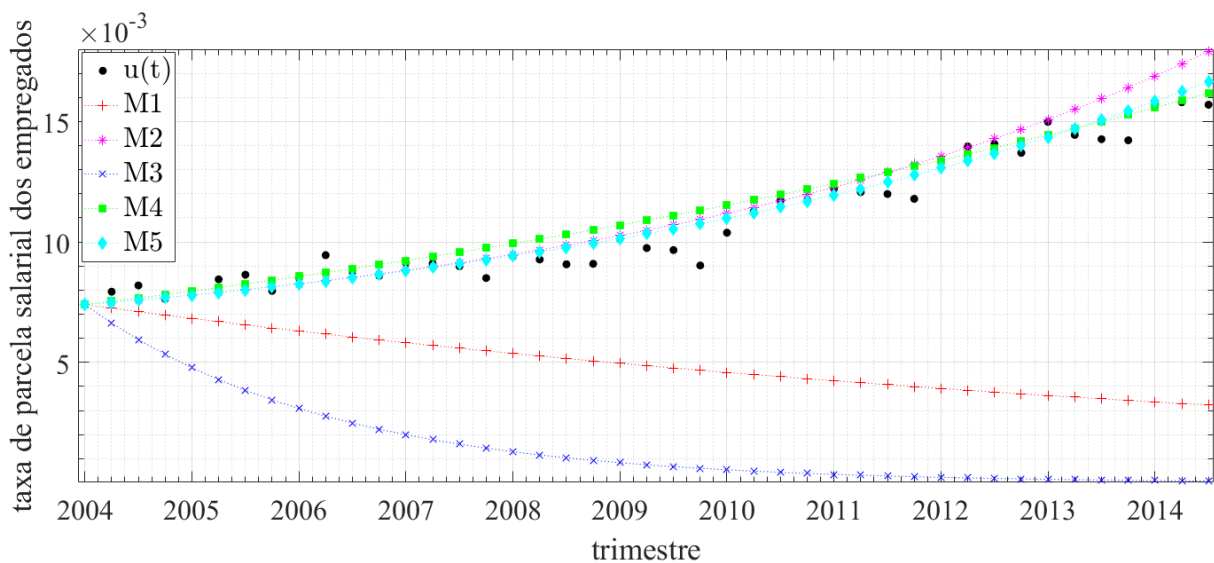


Figura 3.19: Comparativo entre as cinco metodologias mediante os dados experimentais de  $u(t)$  em RMR

**Fonte:** Autor.

A seguir, figura 3.20, comparamos os dados experimentais de  $v(t)$  com os dados de  $v(t)$  obtidos pelas cinco metodologias.

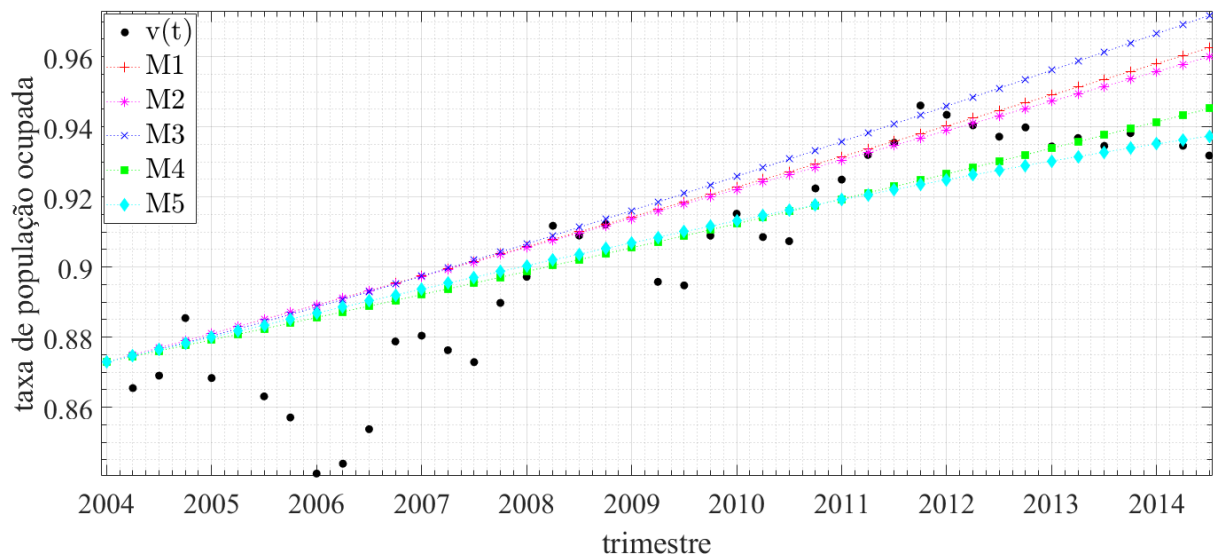


Figura 3.20: Comparativo entre as cinco metodologias mediante os dados experimentais de  $v(t)$  em RMR

**Fonte:** Autor.

Segue abaixo a tabela 3.11 com os parâmetros obtidos pelas cinco metodologias desenvolvidas no presente trabalho. Destacamos que apenas a quarta metodologia não satisfaz a interação econômica tipo Goodwin.

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\rho$	$\sigma$
M1	0.0043	0.0040	0.0250	0.0106	93.81
M2	0.0043	0.0040	0.166	0.2101	93.81
M3	0.0879	0.0040	0.0250	0.0106	10.57
M4	-0.0342	0.0040	0.0250	0.0106	-34.97
M5	0.0879	0.0040	0.0831	0.2101	10.57

Tabela 3.11: Parâmetros: RMR

Abaixo, figura 3.12, temos os valores do coeficiente de determinação obtidos conforme os ajustes das curvas via método de mínimos quadrados pelas cinco metodologias.

	$a(t)$	$n(t)$	$\dot{w}(t)/w(t)$	$\dot{u}(t)/u(t)$	$\dot{v}(t)/v(t)$
M1	$0.6160_{\alpha}$	$0.8252_{\beta}$	$0.0001_{\gamma,\rho}$	$\times$	$0.0001_{\sigma}$
M2	$0.6160_{\alpha}$	$0.8252_{\beta}$	$\times$	$0.0123_{\gamma,\rho}$	$0.0001_{\sigma}$
M3	$\times$	$0.8252_{\beta}$	$0.0001_{\gamma,\rho}$	$\times$	$0.0005_{\alpha,\sigma}$
M4	$\times$	$0.8252_{\beta}$	$0.0001_{\gamma,\rho}$	$0.0012_{\alpha}$	$-0.0119_{\sigma}$
M5	$\times$	$0.8252_{\beta}$	$\times$	$0.0123_{\gamma,\rho}$	$0.0005_{\alpha,\sigma}$

Tabela 3.12:  $R^2$  das curvas: RMR

Por fim, na tabela 3.13 temos o quadro comparativo, por meio dos coeficientes de determinação entre os dados experimentais  $u(t)$  e  $v(t)$  calculados e os dados obtidos por cada uma das cinco metodologias.

	M1	M2	M3	M4	M5
$u(t)$	-6.2132%	89.17%	-14.4637%	91.15%	94.84%
$v(t)$	62.36%	64.38%	52.22%	74.83%	72.90%

Tabela 3.13:  $R^2$  entre os dados experimentais e os obtidos pelas cinco metodologias: RMR

Observamos que a quarta metodologia (M4) não satisfaz a interação econômica tipo Goodwin. Por fim, as metodologias segunda (M2), quarta (M4) e quinta (M5) estão em conformidade com o critério de Chin, acima de 67%.

### 3.8.5 Região Metropolitana de São Paulo

O estudo da região metropolitana de São Paulo foi desenvolvido em conjunto com PIB do estado de São Paulo. Devido à obtenção do produto interno bruto mensal do estado de São Paulo foi possível realizar o estudo mensal o que conferiu ao modelo um maior número de dados. Nesse estudo os dados mensais foram fornecidos pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística [26] e pela Fundação Sistema Estadual de Análise de Dados [20].

A seguir, temos os gráficos dos dados experimentais e os ajustes referentes à região metropolitana de São Paulo no período entre 2004 e 2014.

O ajuste exponencial da produtividade,  $a(t)$ , figura 3.1, foi necessário para estimar o valor de  $\alpha$  que foi utilizado na primeira (M1) e segunda (M2) metodologias.

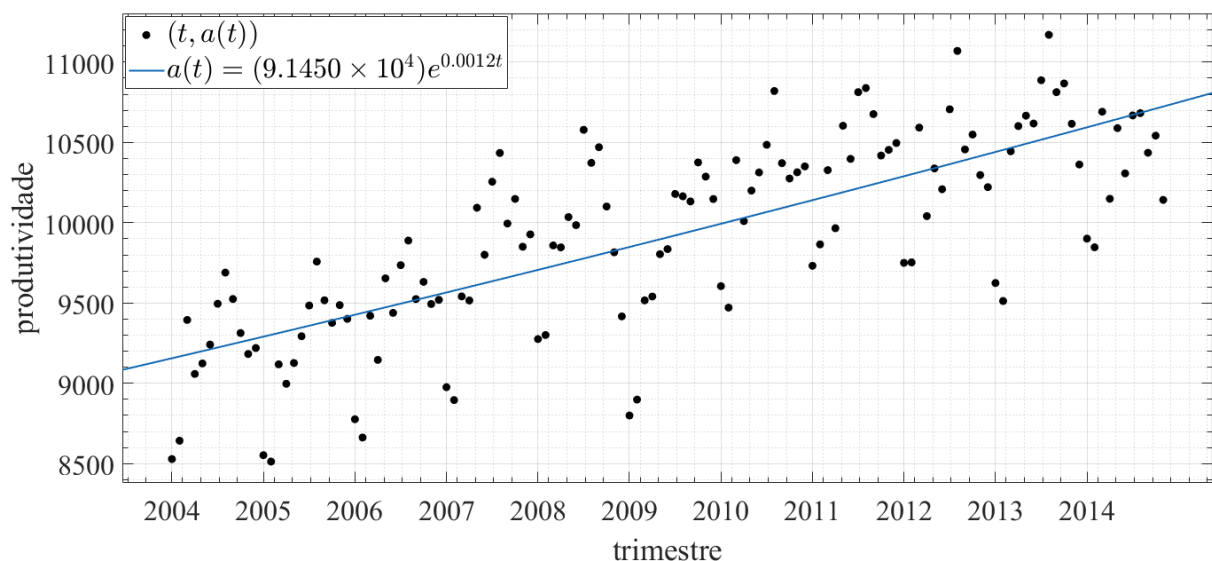


Figura 3.21: Ajuste exponencial da produtividade na região metropolitana de São Paulo

Fonte: Autor.

O ajuste exponencial da população economicamente ativa,  $n(t)$ , figura 3.22, para estimar o valor de  $\beta$ , que foi necessário nessas cinco metodologias.

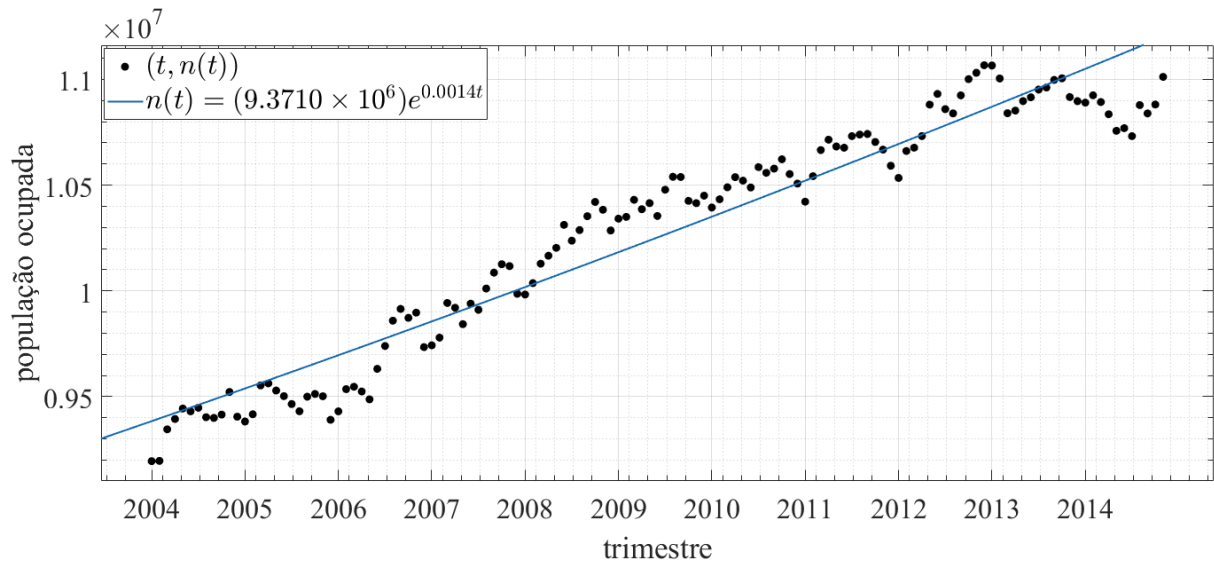


Figura 3.22: Ajuste exponencial da população economicamente ativa na região metropolitana de São Paulo

**Fonte:** Autor.

A seguir, na figura 3.3, temos a curva de Phillips linearizada mediante os dados experimentais da região metropolitana de São Paulo.

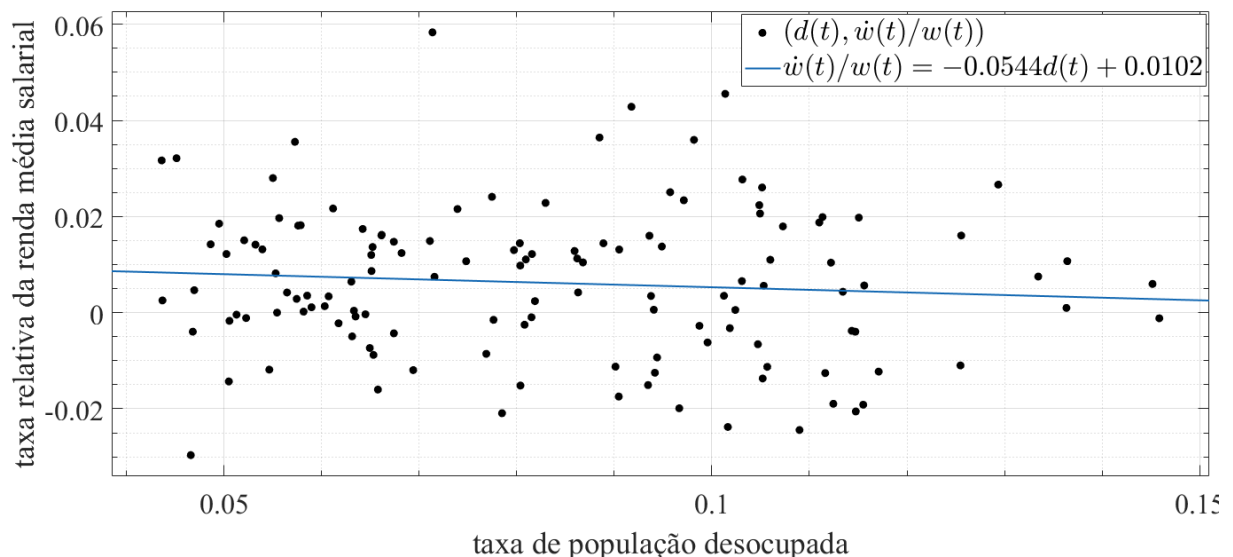


Figura 3.23: Curva de Phillips linearizada na região metropolitana de São Paulo

**Fonte:** Autor.

Conforme a figura abaixo 3.8.5, comparamos os dados experimentais de  $u(t)$  com os dados de  $u(t)$  obtidos pelas cinco metodologias.

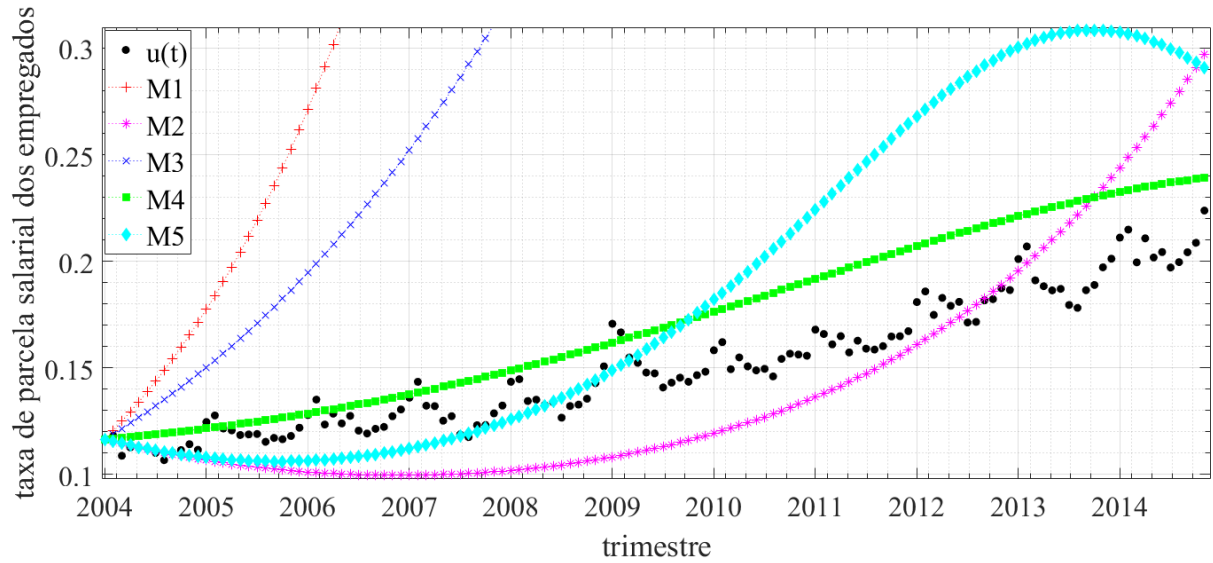


Figura 3.24: Comparativo entre as cinco metodologias mediante os dados experimentais de  $u(t)$  em RMSP

**Fonte:** Autor.

A seguir, na figura 3.8.5 comparamos os dados experimentais de  $v(t)$  com os dados de  $v(t)$  obtidos pelas cinco metodologias.

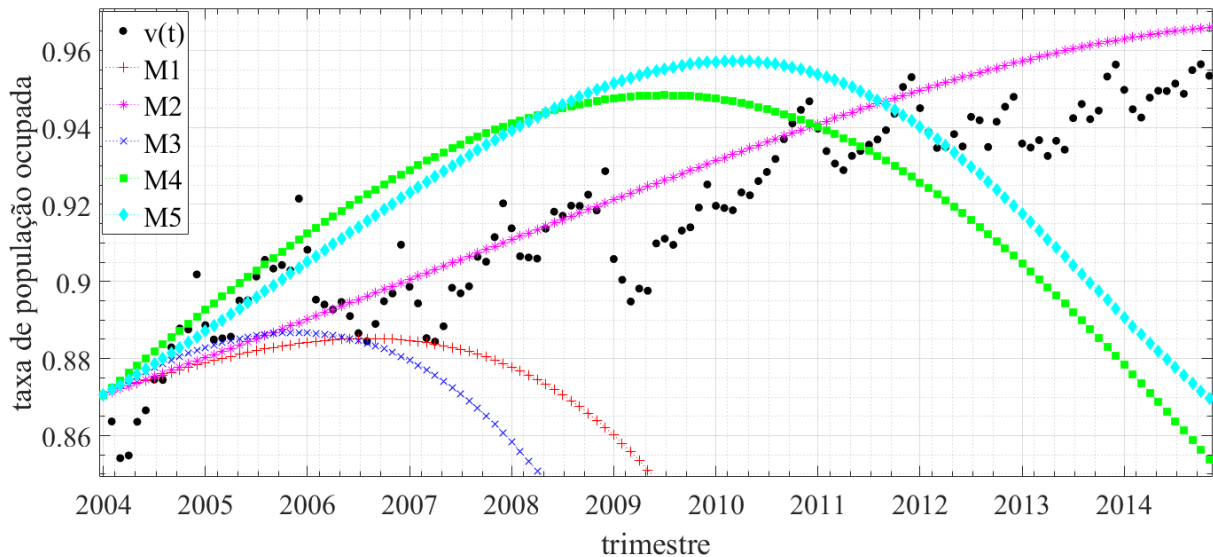


Figura 3.25: Comparativo entre as cinco metodologias mediante os dados experimentais de  $v(t)$  em RMSP

**Fonte:** Autor.

Na tabela 3.14 abaixo, temos os parâmetros obtidos pelas cinco metodologias desenvolvidas no presente trabalho. Em destaque, apenas a quarta metodologia (M4) tem

parâmetro  $\sigma$  negativo. As demais metodologias satisfazem a interação dinâmica tipo Goodwin.

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\rho$	$\sigma$
M1	0.0012	0.0014	0.0107	0.0544	252.85
M2	0.0012	0.0014	0.2723	0.3042	252.85
M3	0.0156	0.0014	0.0107	0.0544	47.98
M4	0.0337	0.0014	0.0107	0.0544	23.70
M5	0.0156	0.0014	0.2579	0.3042	47.98

Tabela 3.14: Parâmetros: RMSP

A seguir, temos os valores dos devidos coeficientes de determinação obtidos conforme os ajustes das curvas pelo método de mínimos quadrados, pelas cinco metodologias.

	$a(t)$	$n(t)$	$\dot{w}(t)/w(t)$	$\dot{u}(t)/u(t)$	$\dot{v}(t)/v(t)$
M1	$0.5745_\alpha$	$0.9271_\beta$	$0.0076_{\gamma,\rho}$	$\times$	$0.0031_\sigma$
M2	$0.5745_\alpha$	$0.9271_\beta$	$\times$	$0.0342_{\gamma,\rho}$	$0.0031_\sigma$
M3	$\times$	$0.9271_\beta$	$0.0076_{\gamma,\rho}$	$\times$	$0.0090_{\alpha,\sigma}$
M4	$\times$	$0.9271_\beta$	$0.0076_{\gamma,\rho}$	$0.0111_\alpha$	$-0.0004_\sigma$
M5	$\times$	$0.9271_\beta$	$\times$	$0.0342_{\gamma,\rho}$	$0.0090_{\alpha,\sigma}$

Tabela 3.15:  $R^2$  das curvas: RMSP

Por fim, temos a tabela comparativa 3.16 entre os dados experimentais e os dados obtidos por cada uma das cinco metodologias, por meio do coeficiente de determinação.

	M1	M2	M3	M4	M5
$u(t)$	-0.62%	-8.77%	-13597.73%	29.87%	-274.78%
$v(t)$	-7685.19%	72.27%	-9684.89%	-122.96%	-61.52%

Tabela 3.16:  $R^2$  entre os dados experimentais e os obtidos pelas cinco metodologias: RMSP

Destacamos que apenas a segunda metodologia (M2), para  $v(t)$ , atende o critério de Chin, acima de 67%.

### 3.9 COMPARATIVO ENTRE AS METODOLOGIAS

Na tabela 3.17 constam as metodologias que obtiveram um coeficiente de determinação acima de 67%, conforme o critério de Chin [12], independentemente da ocorrência de interação econômica tipo Goodwin. Além disso, encontramos também coeficientes

de determinação com valores negativos quando comparados com os dados experimentais cuja explicação decorre da equação (3.14).

	SRM	RMBH	RMPA	RMR	RMSP
u(t)	M2, M5	M4, M5	M4	M2, M4, M5	×
v(t)	M2, M5	M5	M2, M4, M5	M4, M5	M2

Tabela 3.17: Comparativo entre as cinco metodologias

Verificamos que, para  $R^2 > 67\%$ , a segunda (M2), quarta (M4) e quinta (M5) metodologias estão presentes na maioria das regiões de estudo, exceto na região metropolitana de São Paulo, onde apenas a segunda metodologia (M2) para  $v(t)$  atendeu o critério de Chin [12]. Por fim, a primeira (M1) e terceira (M3) metodologias não atendem o critério estabelecido no presente trabalho.



## 4 CONCLUSÃO

O modelo de Goodwin é uma ferramenta econômica que pode nos trazer indícios de ciclos econômicos numa determinada região ao estudar a taxa de parcela salarial dos empregados na renda nacional,  $u(t)$ , e a taxa de emprego,  $v(t)$ , uma vez que o crescente aumento deste último é geralmente acompanhado de investimentos numa economia, que, por sua vez, tem uma reação-resposta com a distribuição de renda. Muito embora o autor tenha se inspirado, para o desenvolvimento do seu sistema de equações (2.13) e (2.14), num modelo biológico entre duas espécies em competição, a tentativa de Goodwin foi formalizar o conflito antagônico entre a luta de classes para estudar os ciclos econômicos [42].

O presente trabalho teve por objetivo aplicar o modelo de ciclos econômicos de Goodwin, durante o período de 2004 e 2014, utilizando os dados coletados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) [26, 27], em seis regiões metropolitanas brasileiras: Recife (RMR) [3], Salvador (RMS) [26], Belo Horizonte (RMBH) [19], Rio de Janeiro (RMRJ) [26], São Paulo (RMSP) [20] e Porto Alegre (RMPA) [18]. No entanto, o estudo foi desenvolvido separadamente nas regiões metropolitanas brasileiras de Belo Horizonte, Porto Alegre, Recife e São Paulo, mediante o produto interno bruto estadual de cada uma das regiões, uma vez que os dados do produto interno bruto para as regiões metropolitanas de Rio de Janeiro e Salvador não foram possíveis de se obter. Ademais foi realizado também o estudo com as seis regiões metropolitanas brasileiras em conjunto mediante o produto interno bruto nacional.

Nesse contexto, foram desenvolvidas cinco metodologias, onde na primeira metodologia (M1) houve ajustes das curvas conforme as premissas do modelo de Goodwin, enquanto que nas demais metodologias (M2, M3, M4 e M5) houve relaxação nas premissas, com exceção do ajuste para se obter a taxa de força-de-trabalho  $\beta$ , cujo ajuste foi o mesmo nas cinco metodologias. Por fim, fazendo uso do coeficiente de determinação, comparamos os dados experimentais com os dados obtidos por cada uma das cinco metodologias. A seguir descrevemos as análises quantitativas mediante os resultados numéricos já obtidos.

### 4.1 PRIMEIRA METODOLOGIA (M1)

Na primeira metodologia os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\rho$  foram obtidos conforme as premissas do modelo de Goodwin, incluindo a curva de Phillips linearizada para estimar os valores de  $\gamma$  e  $\rho$ . O valor de  $\sigma$  foi estimado por um ajuste linear mediante a equação (2.14). Os valores obtidos pelos coeficientes de determinação, quando comparamos  $u(t)$  e  $v(t)$  com os seus respectivos dados experimentais, nos conferiu o quanto essa metodologia não atendeu a classificação de Chin [12], acima de 67%. Destacamos que para estimativa dos parâmetros, diante do sistema de equações (2.13) e (2.14), foi utilizada somente a equação (2.14) para estimar o valor do parâmetro  $\sigma$ .

## 4.2 SEGUNDA METODOLOGIA (M2)

Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  foram obtidos conforme as premissas do modelo de Goodwin. O valor de  $\sigma$ , assim como na primeira metodologia (M1), foi estimado pela equação (2.14). No entanto, diferentemente da metodologia anterior, os parâmetros  $\gamma$  e  $\rho$  foram obtidos por meio da equação (2.13), ao invés de obtermos por meio da curva de Phillips linearizada. Destacamos que essa metodologia faz uso das duas equações (2.13) e (2.14) do modelo de Goodwin, o que possivelmente possibilitou um ajuste em conformidade com o critério de Chin [12], acima de 67%.

## 4.3 TERCEIRA METODOLOGIA (M3)

O parâmetro  $\beta$ , assim como os parâmetros  $\gamma$  e  $\rho$ , são ajustados conforme as hipóteses de Goodwin. Enquanto que o valor de  $\beta$  é obtido por ajuste exponencial, os valores de  $\gamma$  e  $\rho$  são obtidos por meio da curva de Phillips linearizada. Contudo, em comparação com a primeira metodologia (M1), na terceira metodologia (M3) o valor de  $\alpha$  é estimado por meio da equação (2.14), assim como o valor de  $\sigma$ . Destacamos também que na terceira metodologia (M3) não é utilizada a equação (2.13) para a estimativa dos demais parâmetros, o que possivelmente não conferiu um ajuste em conformidade com a classificação de Chin [12], quando acima de 67%.

## 4.4 QUARTA METODOLOGIA (M4)

Assim como nas metodologias anteriores, o valor de  $\beta$ , nesta quarta metodologia, é obtido por meio de um ajuste exponencial consoante a hipótese de Goodwin a respeito da força-de-trabalho. Embora a quarta metodologia faça uso das duas equações (2.13) e (2.14) presentes no modelo Goodwin para obter respectivamente os parâmetros  $\alpha$  e  $\sigma$ , as estimativas dos parâmetros  $\gamma$  e  $\rho$  são obtidas por meio da curva de Phillips linearizada. Desse modo, foi possível conferir um ajuste que atendeu a classificação de Chin, acima de 67%.

## 4.5 QUINTA METODOLOGIA (M5)

Nessa quinta metodologia, com exceção da obtenção do valor da taxa de força-de-trabalho  $\beta$ , os demais parâmetros são obtidos com relaxação nas premissas ao fazermos uso das duas equações (2.14) e (2.13) do modelo de Goodwin. Assim, não fazemos uso da curva de Phillips linearizada para obter os valores de  $\gamma$  e  $\rho$ , e sim da equação (2.13). Ademais, os valores de  $\alpha$  e  $\sigma$  são obtidos por meio da equação (2.14). Destacamos que diante dos dados experimentais e dos resultados numéricos, a quinta metodologia (M5) obteve um coeficiente de determinação acima de 67%, que para Chin é de valor substancial [12].

Diante das metodologias apresentadas no presente trabalho, e do comparativo dos resultados numéricos mediante o coeficiente de determinação em conformidade com a classificação de Chin [12], temos que a segunda (M2), quarta (M4) e a quinta (M5) metodologias obtiveram maior frequência, uma vez que as estimativas dos parâmetros fazem uso das duas equações no modelo de Goodwin, muito embora não façam uso da curva de Phillips linearizada. Por fim, tanto a primeira metodologia (M1), sem relaxação das hipóteses, quanto a terceira metodologia (M3) não descreveu os dados experimentais em conformidade com a classificação de Chin adotada no presente trabalho, classificação substancial acima de 67%. Por fim, destacamos que Goodwin considera a razão capital-produto como constante por simplicidade [22]. Ademais, esse dado, dentro do cenário econômico brasileiro, não é fornecido pelos institutos nacionais de pesquisa.

Ressaltamos que no estudo das seis regiões metropolitanas brasileiras em conjunto e na região metropolitana de São Paulo, como os parâmetros obtidos foram todos positivos, temos que o sistema de equações (2.13) e (2.14) satisfazem a interação dinâmica tipo Goodwin. Por fim, há regiões de estudo no presente trabalho, mediante algumas metodologias, onde não ocorre a interação econômica tipo Goodwin, uma vez que a presença de pelo menos um parâmetro negativo contraria as hipóteses do modelo de Goodwin.

Para trabalhos futuros, pretendemos abordar o ajuste não linear da curva de Phillips, verificar a qualidade desse ajuste e o seu comportamento quantitativo. Propor relaxações para a taxa de produtividade,  $\alpha$ , posto que, pelas hipóteses de Goodwin, a produtividade é definida pela razão entre produção,  $q(t)$  e mão-de-obra,  $l(t)$ . Propor um novo ajuste para a razão capital-produto,  $\sigma$ , principalmente no que tange à primeira metodologia (M1). E, por fim, há também de se realizar testes econométricos para uma melhor acurácia dos parâmetros.

## A APÊNDICE: DADOS

A seguir, temos os dados tabelados fornecidos pelos institutos de pesquisa [3, 18, 19, 26, 27, 20] e os dados calculados que foram necessários para o desenvolvimento da modelagem matemática das equações (2.13) e (2.14) do modelo de Goodwin.

Trimestre	$n(t)$	$l(t)$	$m(t)$	$d(t)$	$w(t)$	$q(t)$
2004.I	21518155	18900391	2617764	12.17%	885.17	117980959022.54
2004.II	21919228	19213682	2705547	12.34%	892.50	123650740020.38
2004.III	22062950	19599234	2463715	11.17%	915.73	128136011631.17
2004.IV	22106583	19839147	2267435	10.26%	915.67	127392346671.16
2005.I	21912391	19599347	2313044	10.56%	948.40	122917660842.54
2005.II	22070303	19836853	2233450	10.12%	953.03	129184075278.99
2005.III	22107346	20006868	2100478	9.50%	986.80	130846052874.52
2005.IV	22264524	20218846	2045678	9.19%	996.87	130131984069.41
2006.I	22210369	20008429	2201940	9.91%	1013.00	128177426750.17
2006.II	22336559	20029417	2307142	10.33%	1038.20	132133732190.10
2006.III	22872076	20483891	2388185	10.44%	1042.70	136724688857.10
2006.IV	22839888	20727670	2112219	9.25%	1073.47	136372088756.04
2007.I	22721748	20501355	2220393	9.77%	1100.07	134835848544.05
2007.II	22871572	20584287	2287285	10.00%	1118.70	140771654498.86
2007.III	23170307	21006524	2163783	9.34%	1111.53	144750772407.30
2007.IV	23210691	21323548	1887144	8.13%	1144.53	145426833130.00
2008.I	23124908	21176876	1948032	8.42%	1184.80	143138233716.44
2008.II	23343745	21452742	1891003	8.10%	1211.87	149691118253.25
2008.III	23563118	21727173	1835945	7.79%	1249.43	154855550756.68
2008.IV	23723246	21996171	1727075	7.28%	1273.23	146922404659.02
2009.I	23517113	21498561	2018552	8.58%	1325.17	139665635100.45
2009.II	23535247	21505414	2029833	8.62%	1318.30	146393456589.70
2009.III	23831281	21941490	1889791	7.93%	1339.53	153055122726.88
2009.IV	23882982	22157823	1725158	7.22%	1353.83	154745005434.18

Tabela A.1: Dados para as seis regiões metropolitanas brasileiras (2004-2009)

Trimestre	$n(t)$	$l(t)$	$m(t)$	$d(t)$	$w(t)$	$q(t)$
2010.I	23973833	22202031	1771802	7.39%	1400.07	152527525923.36
2010.II	24142133	22397264	1744870	7.23%	1425.93	158862824963.23
2010.III	24310232	22702211	1608021	6.61%	1478.63	163626880565.85
2010.IV	24343687	22963653	1380034	5.67%	1520.00	163549050625.80
2011.I	24269713	22747320	1522393	6.27%	1550.10	160451699673.58
2011.II	24497767	22950300	1547467	6.32%	1566.40	166330348736.46
2011.III	24643410	23163917	1479494	6.00%	1620.90	169414934852.78
2011.IV	24622483	23337539	1284943	5.22%	1632.77	167748624507.92
2012.I	24605860	23173605	1432255	5.82%	1704.50	163190096551.45
2012.II	24909435	23439536	1469899	5.90%	1732.40	167970380041.28
2012.III	24910133	23569735	1340398	5.38%	1754.33	173625549791.59
2012.IV	25290472	24037869	1252603	4.95%	1806.03	171915144956.98
2013.I	25017253	23624362	1392891	5.57%	1847.53	167633885025.01
2013.II	25035171	23567880	1467291	5.86%	1871.50	174728961858.17
2013.III	25168716	23804137	1364580	5.42%	1885.73	178416191494.81
2013.IV	25105057	23925405	1179652	4.70%	1957.27	176255803169.90
2014.I	24863324	23627675	1235649	4.97%	2015.40	173437254033.67
2014.II	24795493	23598354	1197139	4.83%	2038.00	173954844624.35
2014.III	24908583	23690327	1218256	4.89%	2054.43	177274020709.37
2014.IV	25080034	23929427	1150607	4.59%	2138.37	175881469276.19

Tabela A.2: Dados para as seis regiões metropolitanas brasileiras (2010-2014)

Trimestre	$a(t)$	$v(t)$	$u(t)$	$1 - u(t)$	$\dot{v}(t)/v(t)$	$\dot{u}(t)/u(t)$	$\dot{w}(t)/w(t)$
2004.I	6242.25	87.83%	14.18%	85.82%	-0.20%	-2.20%	0.83%
2004.II	6435.56	87.66%	13.87%	86.13%	1.34%	1.00%	2.60%
2004.III	6537.81	88.83%	14.01%	85.99%	1.02%	1.81%	-0.01%
2004.IV	6421.26	89.74%	14.26%	85.74%	-0.33%	6.05%	3.57%
2005.I	6271.52	89.44%	15.12%	84.88%	0.49%	-3.23%	0.49%
2005.II	6512.33	89.88%	14.63%	85.37%	0.69%	3.10%	3.54%
2005.III	6540.06	90.50%	15.09%	84.91%	0.35%	2.65%	1.02%
2005.IV	6436.17	90.81%	15.49%	84.51%	-0.80%	2.09%	1.62%
2006.I	6406.17	90.09%	15.81%	84.19%	-0.46%	-0.48%	2.49%
2006.II	6596.98	89.67%	15.74%	84.26%	-0.13%	-0.74%	0.43%
2006.III	6674.74	89.56%	15.62%	84.38%	1.33%	4.45%	2.95%
2006.IV	6579.23	90.75%	16.32%	83.68%	-0.58%	2.51%	2.48%
2007.I	6576.92	90.23%	16.73%	83.27%	-0.25%	-2.20%	1.69%
2007.II	6838.79	90.00%	16.36%	83.64%	0.74%	-1.39%	-0.64%
2007.III	6890.75	90.66%	16.13%	83.87%	1.33%	4.04%	2.97%
2007.IV	6820.01	91.87%	16.78%	83.22%	-0.32%	4.45%	3.52%
2008.I	6759.18	91.58%	17.53%	82.47%	0.35%	-0.92%	2.28%
2008.II	6977.71	91.90%	17.37%	82.63%	0.34%	0.94%	3.10%
2008.III	7127.28	92.21%	17.53%	82.47%	0.55%	8.74%	1.90%
2008.IV	6679.45	92.72%	19.06%	80.94%	-1.41%	7.01%	4.08%
2009.I	6496.51	91.42%	20.40%	79.60%	-0.05%	-5.06%	-0.52%
2009.II	6807.28	91.38%	19.37%	80.63%	0.76%	-0.84%	1.61%
2009.III	6975.60	92.07%	19.20%	80.80%	0.77%	0.95%	1.07%
2009.IV	6983.76	92.78%	19.39%	80.61%	-0.18%	5.13%	3.41%

Tabela A.3: Cálculos para as seis regiões metropolitanas brasileiras (2004-2009)

Trimestre	$a(t)$	$v(t)$	$u(t)$	$1 - u(t)$	$\dot{v}(t)/v(t)$	$\dot{u}(t)/u(t)$	$\dot{w}(t)/w(t)$
2010.I	6869.98	92.61%	20.38%	79.62%	0.18%	-1.35%	1.85%
2010.II	7092.96	92.77%	20.10%	79.90%	0.66%	2.05%	3.70%
2010.III	7207.53	93.39%	20.52%	79.48%	1.01%	4.03%	2.80%
2010.IV	7122.08	94.33%	21.34%	78.66%	-0.64%	2.97%	1.98%
2011.I	7053.65	93.73%	21.98%	78.02%	-0.05%	-1.65%	1.05%
2011.II	7247.42	93.68%	21.61%	78.39%	0.33%	2.54%	3.48%
2011.III	7313.74	94.00%	22.16%	77.84%	0.84%	2.50%	0.73%
2011.IV	7187.93	94.78%	22.72%	77.28%	-0.64%	6.56%	4.39%
2012.I	7042.07	94.18%	24.20%	75.80%	-0.09%	-0.12%	1.64%
2012.II	7166.11	94.10%	24.17%	75.83%	0.55%	-1.49%	1.27%
2012.III	7366.46	94.62%	23.82%	76.18%	0.45%	6.04%	2.95%
2012.IV	7151.85	95.05%	25.25%	74.75%	-0.65%	3.11%	2.30%
2013.I	7095.81	94.43%	26.04%	73.96%	-0.31%	-3.05%	1.30%
2013.II	7413.86	94.14%	25.24%	74.76%	0.47%	-0.33%	0.76%
2013.III	7495.18	94.58%	25.16%	74.84%	0.76%	5.60%	3.79%
2013.IV	7366.89	95.30%	26.57%	73.43%	-0.28%	3.34%	2.97%
2014.I	7340.43	95.03%	27.46%	72.54%	0.15%	0.70%	1.12%
2014.II	7371.48	95.17%	27.65%	72.35%	-0.07%	-0.70%	0.81%
2014.III	7482.97	95.11%	27.45%	72.55%	0.32%	5.97%	4.09%
2014.IV	7350.01	95.41%	29.09%	2138.37			

Tabela A.4: Cálculos para as seis regiões metropolitanas brasileiras (2010-2014)

Trimestre	$n(t)$	$l(t)$	$m(t)$	$d(t)$	$w(t)$	$q(t)$
2004.I	2177601	1913908	263693	12.11%	752.33	101661138061.57
2004.II	2199221	1958830	240390	10.93%	758.60	110343743155.63
2004.III	2245657	2013443	232214	10.34%	794.93	112501230344.69
2004.IV	2228545	2025491	203054	9.11%	790.17	108050208246.22
2005.I	2180186	1959304	220882	10.13%	829.43	105190204521.83
2005.II	2224565	2025887	198678	8.93%	858.03	116499526079.75
2005.III	2223645	2041247	182399	8.20%	865.50	116975827843.34
2005.IV	2260986	2082499	178486	7.89%	849.47	111285608721.49
2006.I	2247463	2048841	198622	8.84%	889.03	109779081607.76
2006.II	2313312	2111415	201897	8.73%	934.23	118819163690.12
2006.III	2387335	2183091	204243	8.56%	949.60	121884764658.86
2006.IV	2377065	2187409	189655	7.98%	948.20	117059603847.50
2007.I	2366786	2159519	207267	8.76%	981.87	115191074566.25
2007.II	2379064	2186996	192068	8.07%	1000.93	125060140953.26
2007.III	2426970	2247621	179350	7.39%	1021.20	128771345002.70
2007.IV	2424334	2271886	152448	6.29%	1054.23	124351384698.95
2008.I	2424639	2250391	174248	7.19%	1076.83	121583130703.17
2008.II	2466630	2293431	173198	7.02%	1100.93	133602644120.46
2008.III	2482619	2326477	156142	6.29%	1150.30	137859737335.37
2008.IV	2485891	2348517	137374	5.53%	1200.97	123412692420.82
2009.I	2420073	2260948	159124	6.58%	1201.37	112805707747.24
2009.II	2469894	2301818	168076	6.80%	1225.60	124309270293.78
2009.III	2515407	2348163	167243	6.65%	1243.37	130602031009.78
2009.IV	2534797	2390665	144132	5.69%	1242.50	128484706485.58

Tabela A.5: Dados da região metropolitana de Belo Horizonte (2004-2009)



Trimestre	$n(t)$	$l(t)$	$m(t)$	$d(t)$	$w(t)$	$q(t)$
2010.I	2525688	2366956	158732	6.28%	1302.90	126067517903.27
2010.II	2561167	2418684	142483	5.56%	1307.40	137666999913.83
2010.III	2587696	2456302	131394	5.08%	1407.50	142070989336.34
2010.IV	2595812	2467047	128764	4.96%	1403.60	135471603703.55
2011.I	2578968	2433016	145952	5.66%	1431.33	130959060920.61
2011.II	2620639	2493085	127554	4.87%	1494.33	141945042334.54
2011.III	2640798	2512942	127857	4.84%	1546.77	144445533014.08
2011.IV	2617410	2509213	108198	4.13%	1555.70	137353174258.21
2012.I	2640988	2515070	125918	4.77%	1624.63	133145255067.50
2012.II	2672239	2543215	129024	4.83%	1715.10	147472070910.13
2012.III	2663598	2551470	112128	4.21%	1740.10	151433755456.07
2012.IV	2681832	2580305	101527	3.79%	1779.87	141100510725.13
2013.I	2618546	2504614	113933	4.35%	1808.90	134043911670.09
2013.II	2604965	2495494	109472	4.20%	1816.40	147382585697.79
2013.III	2602023	2488566	113457	4.36%	1856.43	151129565321.62
2013.IV	2630813	2529863	100950	3.84%	1871.07	143267879515.94
2014.I	2567268	2470295	96972	3.78%	1933.07	139149382864.22
2014.II	2558429	2461386	97043	3.79%	1920.53	144313552570.04
2014.III	2542816	2440691	102126	4.02%	1941.83	147129820795.32
2014.IV	2544676	2458298	86378	3.39%	2002.07	141197323233.94

Tabela A.6: Dados da região metropolitana de Belo Horizonte (2010-2014)

Trimestre	$a(t)$	$v(t)$	$u(t)$	$1 - u(t)$	$\dot{v}(t)/v(t)$	$\dot{u}(t)/u(t)$	$\dot{w}(t)/w(t)$
2004.I	53117.05	87.89%	1.42%	98.58%	1.34%	-4.92%	0.83%
2004.II	56331.44	89.07%	1.35%	98.65%	0.66%	5.65%	4.79%
2004.III	55875.05	89.66%	1.42%	98.58%	1.37%	4.11%	-0.60%
2004.IV	53345.19	90.89%	1.48%	98.52%	-1.12%	4.30%	4.97%
2005.I	53687.54	89.87%	1.54%	98.46%	1.34%	-3.42%	3.45%
2005.II	57505.45	91.07%	1.49%	98.51%	0.80%	1.22%	0.87%
2005.III	57306.07	91.80%	1.51%	98.49%	0.34%	5.25%	-1.85%
2005.IV	53438.49	92.11%	1.59%	98.41%	-1.02%	4.38%	4.66%
2006.I	53581.06	91.16%	1.66%	98.34%	0.12%	0.05%	5.08%
2006.II	56274.66	91.27%	1.66%	98.34%	0.19%	2.45%	1.64%
2006.III	55831.27	91.44%	1.70%	98.30%	0.63%	4.17%	-0.15%
2006.IV	53515.18	92.02%	1.77%	98.23%	-0.85%	3.89%	3.55%
2007.I	53341.09	91.24%	1.84%	98.16%	0.75%	-4.91%	1.94%
2007.II	57183.52	91.93%	1.75%	98.25%	0.74%	1.83%	2.02%
2007.III	57292.29	92.61%	1.78%	98.22%	1.19%	8.06%	3.23%
2007.IV	54734.87	93.71%	1.93%	98.07%	-0.96%	3.48%	2.14%
2008.I	54027.56	92.81%	1.99%	98.01%	0.18%	-5.18%	2.24%
2008.II	58254.48	92.98%	1.89%	98.11%	0.79%	2.72%	4.48%
2008.III	59256.87	93.71%	1.94%	98.06%	0.81%	17.73%	4.40%
2008.IV	52549.21	94.47%	2.29%	97.71%	-1.11%	5.36%	0.03%
2009.I	49893.09	93.42%	2.41%	97.59%	-0.25%	-5.75%	2.02%
2009.II	54004.83	93.20%	2.27%	97.73%	0.17%	-1.49%	1.45%
2009.III	55618.80	93.35%	2.24%	97.76%	1.03%	3.42%	-0.07%
2009.IV	53744.34	94.31%	2.31%	97.69%	-0.63%	5.81%	4.86%

Tabela A.7: Cálculos para a região metropolitana de Belo Horizonte (2004-2009)

Trimestre	$a(t)$	$v(t)$	$u(t)$	$1 - u(t)$	$\dot{v}(t)/v(t)$	$\dot{u}(t)/u(t)$	$\dot{w}(t)/w(t)$
2010.I	53261.45	93.72%	2.45%	97.55%	0.77%	-6.10%	0.35%
2010.II	56918.14	94.44%	2.30%	97.70%	0.51%	5.94%	7.66%
2010.III	57839.39	94.92%	2.43%	97.57%	0.12%	5.04%	-0.28%
2010.IV	54912.45	95.04%	2.56%	97.44%	-0.74%	4.03%	1.98%
2011.I	53825.82	94.34%	2.66%	97.34%	0.84%	-1.30%	4.40%
2011.II	56935.51	95.13%	2.62%	97.38%	0.03%	2.53%	3.51%
2011.III	57480.65	95.16%	2.69%	97.31%	0.74%	5.61%	0.58%
2011.IV	54739.55	95.87%	2.84%	97.16%	-0.66%	7.98%	4.43%
2012.I	52938.99	95.23%	3.07%	96.93%	-0.06%	-3.62%	5.57%
2012.II	57986.47	95.17%	2.96%	97.04%	0.65%	-0.88%	1.46%
2012.III	59351.56	95.79%	2.93%	97.07%	0.44%	11.02%	2.29%
2012.IV	54683.66	96.21%	3.25%	96.75%	-0.59%	3.84%	1.63%
2013.I	53518.80	95.65%	3.38%	96.62%	0.16%	-9.01%	0.41%
2013.II	59059.49	95.80%	3.08%	96.92%	-0.16%	-0.61%	2.20%
2013.III	60729.58	95.64%	3.06%	96.94%	0.55%	8.08%	0.79%
2013.IV	56630.68	96.16%	3.30%	96.70%	0.06%	3.87%	3.31%
2014.I	56329.05	96.22%	3.43%	96.57%	-0.02%	-4.55%	-0.65%
2014.II	58631.02	96.21%	3.28%	96.72%	-0.23%	-1.66%	1.11%
2014.III	60282.04	95.98%	3.22%	96.78%	0.65%	8.21%	3.10%
2014.IV	57437.02	96.61%	3.49%				

Tabela A.8: Cálculos para a região metropolitana de Belo Horizonte (2010-2014)

Trimestre	$n(t)$	$l(t)$	$m(t)$	$d(t)$	$w(t)$	$q(t)$
2004.I	1434919	1252535	182384	12.71%	581.53	97871568423.09
2004.II	1467861	1270346	197515	13.46%	605.47	96949939292.34
2004.III	1472210	1279331	192878	13.10%	663.10	103543861605.44
2004.IV	1472182	1303492	168690	11.46%	648.07	110659251406.16
2005.I	1460554	1268214	192340	13.17%	627.67	101071439098.58
2005.II	1459535	1286654	172880	11.84%	661.73	100798269378.10
2005.III	1491659	1287405	204254	13.69%	724.43	107970631683.82
2005.IV	1526809	1308555	218254	14.29%	711.20	116764514792.80
2006.I	1525611	1283118	242494	15.89%	702.97	105932602400.95
2006.II	1548003	1306305	241698	15.61%	765.70	105832521547.15
2006.III	1544405	1318469	225936	14.63%	747.83	112443568501.46
2006.IV	1557247	1368403	188844	12.13%	774.30	123287138067.82
2007.I	1501266	1321711	179555	11.96%	766.93	111000504018.06
2007.II	1496886	1311647	185239	12.37%	782.13	112705688226.55
2007.III	1517187	1324259	192927	12.72%	805.07	118596479676.90
2007.IV	1502545	1336878	165668	11.03%	821.10	129137000739.90
2008.I	1474842	1323212	151630	10.28%	823.37	115927424993.60
2008.II	1439993	1312910	127083	8.83%	839.40	118870136386.48
2008.III	1495692	1359522	136170	9.10%	842.33	126221221012.14
2008.IV	1525909	1391807	134101	8.79%	871.83	133454777406.09
2009.I	1518592	1376199	142393	9.38%	862.07	117271338299.95
2009.II	1513980	1356159	157822	10.42%	856.53	119168021442.97
2009.III	1521274	1361138	160136	10.53%	906.60	127702762872.45
2009.IV	1556223	1414479	141744	9.11%	882.03	138258738724.15

Tabela A.9: Dados da região metropolitana de Recife (2004-2009)

Trimestre	$n(t)$	$l(t)$	$m(t)$	$d(t)$	$w(t)$	$q(t)$
2010.I	1562200	1429714	132486	8.48%	929.03	127921806655.30
2010.II	1628046	1479146	148901	9.15%	982.63	129068505885.64
2010.III	1634355	1482950	151404	9.26%	1074.23	135935182871.09
2010.IV	1655985	1527503	128482	7.76%	1118.27	145768777613.02
2011.I	1592403	1472858	119545	7.51%	1098.87	132655055215.81
2011.II	1645415	1533468	111946	6.80%	1070.80	136049027798.28
2011.III	1633442	1527964	105478	6.46%	1119.03	142619653497.30
2011.IV	1620024	1532649	87374	5.39%	1167.87	151803021829.31
2012.I	1648148	1554903	93245	5.66%	1214.03	141388538171.69
2012.II	1683138	1582826	100312	5.96%	1243.77	140975602234.87
2012.III	1698129	1591456	106674	6.28%	1289.07	145873131150.49
2012.IV	1710971	1608007	102963	6.02%	1338.07	157050109754.60
2013.I	1690457	1579570	110887	6.56%	1368.60	144254801989.78
2013.II	1676287	1570315	105971	6.32%	1344.10	146142382303.68
2013.III	1680861	1570831	110030	6.55%	1369.47	150790887687.96
2013.IV	1709100	1603462	105637	6.18%	1426.73	160877972205.17
2014.I	1674986	1566782	108205	6.46%	1484.03	147997456579.73
2014.II	1676895	1567188	109706	6.54%	1501.33	148918834265.50
2014.III	1684707	1569792	114915	6.82%	1543.67	154370942847.32
2014.IV	1700565	1593134	107431	6.32%	1575.43	162313597358.32

Tabela A.10: Dados da região metropolitana de Recife (2010-2014)

Trimestre	$a(t)$	$v(t)$	$u(t)$	$1 - u(t)$	$\dot{v}(t)/v(t)$	$\dot{u}(t)/u(t)$	$\dot{w}(t)/w(t)$
2004.I	78138.79	87.29%	0.74%	99.26%	-0.85%	6.60%	4.12%
2004.II	76317.74	86.54%	0.79%	99.21%	0.41%	3.27%	9.52%
2004.III	80935.92	86.90%	0.82%	99.18%	1.89%	-6.82%	-2.27%
2004.IV	84894.46	88.54%	0.76%	99.24%	-1.93%	3.17%	-3.15%
2005.I	79695.91	86.83%	0.79%	99.21%	1.52%	7.25%	5.43%
2005.II	78341.40	88.16%	0.84%	99.16%	-2.10%	2.26%	9.48%
2005.III	83866.87	86.31%	0.86%	99.14%	-0.70%	-7.73%	-1.83%
2005.IV	89231.64	85.71%	0.80%	99.20%	-1.87%	6.83%	-1.16%
2006.I	82558.76	84.11%	0.85%	99.15%	0.33%	11.00%	8.92%
2006.II	81016.68	84.39%	0.95%	99.05%	1.17%	-7.22%	-2.33%
2006.III	85283.42	85.37%	0.88%	99.12%	2.93%	-1.99%	3.54%
2006.IV	90095.61	87.87%	0.86%	99.14%	0.19%	6.26%	-0.95%
2007.I	83982.43	88.04%	0.91%	99.09%	-0.47%	-0.33%	1.98%
2007.II	85926.84	87.63%	0.91%	99.09%	-0.39%	-1.24%	2.93%
2007.III	89556.84	87.28%	0.90%	99.10%	1.94%	-5.44%	1.99%
2007.IV	96595.97	88.97%	0.85%	99.15%	0.84%	10.56%	0.28%
2008.I	87610.64	89.72%	0.94%	99.06%	1.62%	-1.35%	1.95%
2008.II	90539.46	91.17%	0.93%	99.07%	-0.31%	-2.14%	0.35%
2008.III	92842.38	90.90%	0.91%	99.09%	0.35%	0.22%	3.50%
2008.IV	95885.96	91.21%	0.91%	99.09%	-0.65%	11.26%	-1.12%
2009.I	85213.94	90.62%	1.01%	98.99%	-1.16%	-3.65%	-0.64%
2009.II	87871.74	89.58%	0.97%	99.03%	-0.11%	-0.87%	5.85%
2009.III	93820.58	89.47%	0.97%	99.03%	1.59%	-6.62%	-2.71%
2009.IV	97745.35	90.89%	0.90%	99.10%	0.69%	15.07%	5.33%

Tabela A.11: Cálculos para a região metropolitana de Recife (2004-2009)

Trimestre	$a(t)$	$v(t)$	$u(t)$	$1 - u(t)$	$\dot{v}(t)/v(t)$	$\dot{u}(t)/u(t)$	$\dot{w}(t)/w(t)$
2010.I	89473.70	91.52%	1.04%	98.96%	-0.73%	8.45%	5.77%
2010.II	87258.82	90.85%	1.13%	98.87%	-0.13%	4.07%	9.32%
2010.III	91665.39	90.74%	1.17%	98.83%	1.66%	-0.01%	4.10%
2010.IV	95429.45	92.24%	1.17%	98.83%	0.27%	4.12%	-1.73%
2011.I	90066.43	92.49%	1.22%	98.78%	0.76%	-1.08%	-2.55%
2011.II	88719.82	93.20%	1.21%	98.79%	0.37%	-0.67%	4.50%
2011.III	93339.67	93.54%	1.20%	98.80%	1.14%	-1.65%	4.36%
2011.IV	99046.15	94.61%	1.18%	98.82%	-0.28%	13.23%	3.95%
2012.I	90930.78	94.34%	1.34%	98.66%	-0.32%	4.59%	2.45%
2012.II	89065.74	94.04%	1.40%	98.60%	-0.34%	0.71%	3.64%
2012.III	91660.19	93.72%	1.41%	98.59%	0.28%	-2.58%	3.80%
2012.IV	97667.53	93.98%	1.37%	98.63%	-0.58%	9.38%	2.28%
2013.I	91325.34	93.44%	1.50%	98.50%	0.25%	-3.63%	-1.79%
2013.II	93065.63	93.68%	1.44%	98.56%	-0.24%	-1.22%	1.89%
2013.III	95994.34	93.45%	1.43%	98.57%	0.39%	-0.32%	4.18%
2013.IV	100331.62	93.82%	1.42%	98.58%	-0.30%	10.48%	4.02%
2014.I	94459.53	93.54%	1.57%	98.43%	-0.09%	0.57%	1.17%
2014.II	95022.93	93.46%	1.58%	98.42%	-0.30%	-0.65%	2.82%
2014.III	98338.49	93.18%	1.57%	98.43%	0.54%	-1.49%	2.06%
2014.IV	101883.18	93.68%	1.55%				

Tabela A.12: Cálculos para a região metropolitana de Recife (2010-2014)

Trimestre	$n(t)$	$l(t)$	$m(t)$	$d(t)$	$w(t)$	$q(t)$
2004.I	1747422	1597478	149944	8.58%	872.80	108578969405.94
2004.II	1796022	1616306	179717	10.01%	865.83	107125311759.43
2004.III	1796866	1640655	156211	8.69%	908.93	99537739710.58
2004.IV	1809998	1676802	133196	7.36%	897.20	106251013777.12
2005.I	1760171	1631250	128920	7.32%	919.50	105562090091.45
2005.II	1818640	1680590	138050	7.59%	922.20	103609164700.87
2005.III	1830938	1690999	139939	7.64%	949.27	97946601492.60
2005.IV	1847443	1716106	131337	7.11%	955.27	102822959934.26
2006.I	1819040	1676140	142900	7.86%	968.50	105323910816.41
2006.II	1850088	1697337	152751	8.26%	976.80	110344244409.20
2006.III	1878222	1722622	155600	8.28%	1005.73	101401816895.71
2006.IV	1858387	1715607	142781	7.68%	1026.17	109518783119.76
2007.I	1832781	1682445	150336	8.20%	1035.53	112104131649.52
2007.II	1863545	1722074	141472	7.59%	1060.30	117498406234.87
2007.III	1900001	1758460	141541	7.45%	1083.50	107700305859.84
2007.IV	1901050	1788682	112368	5.91%	1104.40	118036407693.21
2008.I	1898444	1774940	123505	6.51%	1151.63	116431273059.94
2008.II	1924217	1803148	121069	6.29%	1154.33	120718037567.84
2008.III	1945220	1834708	110512	5.68%	1164.57	115495528965.94
2008.IV	1961395	1859655	101740	5.19%	1194.50	115774613968.97
2009.I	1888948	1775233	113715	6.02%	1263.23	109921496722.48
2009.II	1886979	1774574	112404	5.96%	1273.47	120698398116.20
2009.III	1930374	1823978	106395	5.51%	1291.60	112357206650.97
2009.IV	1950484	1854679	95805	4.91%	1298.87	120292787670.16

Tabela A.13: Dados da região metropolitana de Porto Alegre (2004-2009)



Trimestre	$n(t)$	$l(t)$	$m(t)$	$d(t)$	$w(t)$	$q(t)$
2010.I	1923112	1825231	97881	5.09%	1367.40	122014736140.74
2010.II	1932860	1835097	97763	5.06%	1428.80	129570734193.92
2010.III	1981458	1892037	89422	4.51%	1424.90	120071106332.80
2010.IV	2016328	1946645	69683	3.46%	1454.53	123499940921.31
2011.I	1996358	1905495	90863	4.55%	1522.87	128877389126.66
2011.II	2026634	1928592	98043	4.84%	1531.10	137319608577.82
2011.III	2022751	1923463	99289	4.91%	1555.13	124086302543.69
2011.IV	2024769	1950100	74669	3.69%	1537.07	127552706428.60
2012.I	2024323	1934794	89529	4.42%	1597.77	126020949219.56
2012.II	2040547	1950391	90155	4.42%	1646.03	128461002676.89
2012.III	1979919	1907874	72045	3.64%	1685.90	125077430381.82
2012.IV	2040394	1969465	70930	3.48%	1704.13	127350901758.17
2013.I	2039119	1961102	78017	3.83%	1776.43	132813704202.64
2013.II	2036209	1956488	79721	3.92%	1819.47	150987089233.65
2013.III	2045880	1974186	71693	3.50%	1867.60	131637715718.53
2013.IV	2031222	1975977	55245	2.72%	1921.00	134701795425.06
2014.I	2010620	1948956	61663	3.07%	1982.90	137837270758.98
2014.II	2003071	1937122	65949	3.29%	1993.07	148327980258.08
2014.III	2057974	1962390	95584	4.64%	2030.20	131103236565.75
2014.IV	2084626	1998380	86246	4.14%	2116.73	131344925620.99

Tabela A.14: Dados da região metropolitana de Porto Alegre (2010-2014)

Trimestre	$a(t)$	$v(t)$	$u(t)$	$1 - u(t)$	$\dot{v}(t)/v(t)$	$\dot{u}(t)/u(t)$	$\dot{w}(t)/w(t)$
2004.I	67968.99	91.42%	1.28%	98.72%	-1.56%	1.73%	-0.80%
2004.II	66277.88	89.99%	1.31%	98.69%	1.46%	14.68%	4.98%
2004.III	60669.51	91.31%	1.50%	98.50%	1.46%	-5.49%	-1.29%
2004.IV	63365.26	92.64%	1.42%	98.58%	0.04%	0.35%	2.49%
2005.I	64712.38	92.68%	1.42%	98.58%	-0.29%	5.27%	0.29%
2005.II	61650.48	92.41%	1.50%	98.50%	-0.06%	9.56%	2.94%
2005.III	57922.33	92.36%	1.64%	98.36%	0.58%	-2.72%	0.63%
2005.IV	59916.45	92.89%	1.59%	98.41%	-0.80%	-3.33%	1.39%
2006.I	62837.17	92.14%	1.54%	98.46%	-0.43%	-2.51%	0.86%
2006.II	65010.20	91.74%	1.50%	98.50%	-0.03%	13.71%	2.96%
2006.III	58864.80	91.72%	1.71%	98.29%	0.66%	-5.92%	2.03%
2006.IV	63836.77	92.32%	1.61%	98.39%	-0.56%	-3.32%	0.91%
2007.I	66631.68	91.80%	1.55%	98.45%	0.67%	-0.01%	2.39%
2007.II	68230.77	92.41%	1.55%	98.45%	0.15%	13.84%	2.19%
2007.III	61246.95	92.55%	1.77%	98.23%	1.66%	-5.40%	1.93%
2007.IV	65990.70	94.09%	1.67%	98.33%	-0.63%	4.90%	4.28%
2008.I	65597.30	93.49%	1.76%	98.24%	0.23%	-1.79%	0.23%
2008.II	66948.49	93.71%	1.72%	98.28%	0.65%	7.29%	0.89%
2008.III	62950.36	94.32%	1.85%	98.15%	0.52%	3.71%	2.57%
2008.IV	62255.95	94.81%	1.92%	98.08%	-0.88%	6.33%	5.75%
2009.I	61919.49	93.98%	2.04%	97.96%	0.07%	-8.23%	0.81%
2009.II	68015.41	94.04%	1.87%	98.13%	0.47%	11.99%	1.42%
2009.III	61600.08	94.49%	2.10%	97.90%	0.63%	-4.49%	0.56%
2009.IV	64859.10	95.09%	2.00%	98.00%	-0.19%	2.14%	5.28%

Tabela A.15: Cálculos para a região metropolitana de Porto Alegre (2004-2009)

Trimestre	$a(t)$	$v(t)$	$u(t)$	$1 - u(t)$	$\dot{v}(t)/v(t)$	$\dot{u}(t)/u(t)$	$\dot{w}(t)/w(t)$
2010.I	66848.94	94.91%	2.05%	97.95%	0.03%	-1.07%	4.49%
2010.II	70607.01	94.94%	2.02%	97.98%	0.57%	10.96%	-0.27%
2010.III	63461.30	95.49%	2.25%	97.75%	1.11%	2.11%	2.08%
2010.IV	63442.46	96.54%	2.29%	97.71%	-1.13%	-1.79%	4.70%
2011.I	67634.60	95.45%	2.25%	97.75%	-0.30%	-4.50%	0.54%
2011.II	71202.00	95.16%	2.15%	97.85%	-0.07%	12.10%	1.57%
2011.III	64511.94	95.09%	2.41%	97.59%	1.28%	-2.52%	-1.16%
2011.IV	65408.29	96.31%	2.35%	97.65%	-0.76%	4.39%	3.95%
2012.I	65134.03	95.58%	2.45%	97.55%	0.00%	1.88%	3.02%
2012.II	65864.22	95.58%	2.50%	97.50%	0.82%	2.90%	2.42%
2012.III	65558.53	96.36%	2.57%	97.43%	0.17%	2.48%	1.08%
2012.IV	64662.70	96.52%	2.64%	97.36%	-0.36%	-0.47%	4.24%
2013.I	67724.02	96.17%	2.62%	97.38%	-0.09%	-10.12%	2.42%
2013.II	77172.50	96.08%	2.36%	97.64%	0.43%	18.80%	2.65%
2013.III	66679.48	96.50%	2.80%	97.20%	0.81%	0.61%	2.86%
2013.IV	68169.73	97.28%	2.82%	97.18%	-0.36%	-0.51%	3.22%
2014.I	70723.63	96.93%	2.80%	97.20%	-0.23%	-7.16%	0.51%
2014.II	76571.30	96.71%	2.60%	97.40%	-1.40%	16.75%	1.86%
2014.III	66807.94	95.36%	3.04%	96.96%	0.53%	5.98%	4.26%
2014.IV	65725.69	95.86%	3.22%				

Tabela A.16: Cálculo para a região metropolitana de Porto Alegre (2010-2014)

Mês	$n(t)$	$l(t)$	$m(t)$	$d(t)$	$w(t)$	$q(t)$
jan/04	9194860	8005430	1189431	12.94%	994.80	68275891853.85
fev/04	9196088	7942261	1253828	13.63%	1021.30	68643350713.57
mar/04	9345368	7982231	1363137	14.59%	1022.30	74987859925.73
abr/04	9394169	8030443	1363725	14.52%	1021.10	72743502690.80
mai/04	9443733	8155302	1288432	13.64%	1027.20	74408696204.37
jun/04	9430471	8171946	1258525	13.35%	1038.20	75518981050.34
jul/04	9447287	8261811	1185476	12.55%	1046.00	78448484311.79
ago/04	9402582	8222008	1180574	12.56%	1034.50	79665886276.94
set/04	9399344	8298665	1100679	11.71%	1051.10	79043812319.64
out/04	9414974	8358478	1056496	11.22%	1038.20	77842491008.59
nov/04	9522141	8451345	1070797	11.25%	1049.00	77606726929.65
dez/04	9404971	8481669	923301	9.82%	1029.10	78198784717.73
jan/05	9382320	8337633	1044687	11.13%	1066.10	71307301605.35
fev/05	9416568	8333023	1083545	11.51%	1087.30	70938961866.42
mar/05	9553118	8456841	1096277	11.48%	1108.80	77110895093.29
abr/05	9562577	8469200	1093377	11.43%	1086.00	76197482457.20
mai/05	9528753	8528786	999966	10.49%	1081.90	77837485924.50
jun/05	9502370	8505872	996498	10.49%	1104.20	79047743218.83
jul/05	9464815	8530334	934481	9.87%	1128.90	80904267673.45
ago/05	9430750	8540585	890165	9.44%	1125.80	83338435174.36
set/05	9499680	8581383	918297	9.67%	1115.30	81668283196.90
out/05	9512645	8601985	910661	9.57%	1093.10	80657042746.68
nov/05	9501719	8578774	922946	9.71%	1120.50	81387254259.31
dez/05	9390452	8653300	737151	7.85%	1146.70	81353375231.71
jan/06	9430306	8564955	865351	9.18%	1122.70	75167658375.83
fev/06	9535349	8536792	998557	10.47%	1170.80	73951201524.02
mar/06	9546668	8534758	1011910	10.60%	1163.10	80402948629.19
abr/06	9524402	8502559	1021843	10.73%	1175.90	77762783751.81
mai/06	9487015	8487837	999178	10.53%	1197.00	81938962183.96
jun/06	9631374	8581645	1049729	10.90%	1203.70	80999166529.16
jul/06	9739316	8634615	1104701	11.34%	1174.30	84063259498.72
ago/06	9858952	8720056	1138896	11.55%	1179.40	86232150054.98
set/06	9914677	8814007	1100670	11.10%	1156.80	83949908107.50
out/06	9872404	8834294	1038110	10.52%	1178.50	85089299043.10
nov/06	9896993	8876282	1020711	10.31%	1209.20	84270698031.42
dez/06	9734074	8853517	880556	9.05%	1242.70	84281572254.11

Tabela A.17: Dados da região metropolitana de São Paulo (2004-2006)

Mês	$n(t)$	$l(t)$	$m(t)$	$d(t)$	$w(t)$	$q(t)$
jan/07	9742598	8754953	987645	10.14%	1221.00	78582688260.29
fev/07	9778785	8745333	1033452	10.57%	1276.60	77795886304.19
mar/07	9942726	8802197	1140529	11.47%	1262.20	83982934383.75
abr/07	9920113	8773166	1146947	11.56%	1257.20	83484280166.61
mai/07	9842620	8743951	1098669	11.16%	1264.30	88254981704.32
jun/07	9939572	8929244	1010328	10.16%	1248.40	87510180017.85
jul/07	9910411	8888821	1021589	10.31%	1218.70	91156483474.14
ago/07	10010934	8997348	1013587	10.12%	1226.70	93878829179.46
set/07	10086157	9142029	944128	9.36%	1231.00	91372113032.40
out/07	10125926	9165177	960749	9.49%	1250.70	93009410200.79
nov/07	10116916	9221651	895266	8.85%	1267.90	90838788847.40
dez/07	9986133	9190010	796124	7.97%	1314.10	91231999266.39
jan/08	9982618	9122056	860562	8.62%	1331.20	84612151452.03
fev/08	10036557	9098489	938069	9.35%	1346.20	84622105333.56
mar/08	10128499	9178725	949774	9.38%	1325.90	90489538975.81
abr/08	10166043	9209865	956178	9.41%	1330.50	90685601308.21
mai/08	10203418	9322855	880563	8.63%	1331.30	93555376725.44
jun/08	10312072	9467750	844323	8.19%	1336.90	94534566989.73
jul/08	10237348	9388020	849328	8.30%	1340.10	99311796300.91
ago/08	10287287	9460975	826312	8.03%	1370.70	98134458884.44
set/08	10352995	9520783	832213	8.04%	1390.50	99682200531.58
out/08	10420278	9613035	807243	7.75%	1369.40	97098975283.90
nov/08	10383373	9536406	846966	8.16%	1402.40	93608749837.91
dez/08	10285418	9551351	734067	7.14%	1419.50	89942730645.36
jan/09	10341252	9367436	973816	9.42%	1502.30	82429439302.85
fev/09	10349831	9319356	1030475	9.96%	1483.50	82929268775.85
mar/09	10430539	9333109	1097429	10.52%	1474.30	88819127101.01
abr/09	10385822	9328030	1057792	10.18%	1454.10	88994384071.16
mai/09	10414741	9348148	1066593	10.24%	1449.40	91650385779.65
jun/09	10354075	9420890	933184	9.01%	1450.20	92661917643.40
jul/09	10477974	9546567	931408	8.89%	1433.90	97175471194.97
ago/09	10539264	9585379	953885	9.05%	1454.60	97429035963.95
set/09	10538174	9623510	914664	8.68%	1473.70	97509957065.92
out/09	10425555	9529649	895906	8.59%	1489.10	98874945567.92
nov/09	10414731	9573084	841647	8.08%	1508.20	98476159410.11
dez/09	10450004	9668052	781953	7.48%	1504.40	98106458474.06

Tabela A.18: Dados da região metropolitana de São Paulo (2007-2009)

Mês	$n(t)$	$l(t)$	$m(t)$	$d(t)$	$w(t)$	$q(t)$
jan/10	10393963	9558651	835312	8.04%	1520.50	91811870292.49
fev/10	10432861	9588405	844456	8.09%	1535.40	90815563390.10
mar/10	10489705	9634593	855113	8.15%	1552.40	100098976235.86
abr/10	10537401	9727193	810208	7.69%	1550.90	97368527967.76
mai/10	10521057	9704300	816757	7.76%	1537.60	98983653960.75
jun/10	10488748	9713271	775477	7.39%	1535.30	100172905297.25
jul/10	10585021	9827378	757643	7.16%	1568.40	103039957685.59
ago/10	10558085	9837984	720101	6.82%	1580.10	106448038358.18
set/10	10577887	9910814	667073	6.31%	1599.70	102784005039.70
out/10	10622156	9995722	626434	5.90%	1610.00	102708934312.25
nov/10	10552068	9967019	585049	5.54%	1611.80	102800168486.40
dez/10	10507198	9947881	559316	5.32%	1611.80	102967398973.67
jan/11	10421578	9792816	628762	6.03%	1634.60	95302436999.95
fev/11	10542158	9844629	697528	6.62%	1636.80	97116484071.77
mar/11	10665592	9925420	740172	6.94%	1663.30	102503366458.18
abr/11	10714719	9952812	761907	7.11%	1643.40	99185390524.74
mai/11	10682400	9962300	720099	6.74%	1667.90	105637914036.08
jun/11	10676632	9970515	706117	6.61%	1692.50	103666503499.00
jul/11	10731433	10039250	692183	6.45%	1719.70	108552941404.84
ago/11	10738807	10060778	678028	6.31%	1719.10	109043865446.52
set/11	10741668	10089368	652299	6.07%	1710.60	107715721304.45
out/11	10703730	10099328	604402	5.65%	1716.40	105215774553.56
nov/11	10667751	10139625	528125	4.95%	1723.60	105995108989.25
dez/11	10591360	10094028	497333	4.70%	1755.50	105949933853.98
jan/12	10533660	9954096	579565	5.50%	1763.70	97054234641.41
fev/12	10661151	10008836	652315	6.12%	1813.10	97616501396.63
mar/12	10676842	9979342	697500	6.53%	1852.40	105701810002.01
abr/12	10731685	10032763	698922	6.51%	1836.10	100740610019.13
mai/12	10880343	10208493	671850	6.17%	1852.00	105536808180.78
jun/12	10931105	10221153	709953	6.49%	1847.90	104342686235.33
jul/12	10859088	10237135	621953	5.73%	1834.30	109601918224.51
ago/12	10838862	10208473	630389	5.82%	1899.50	113005469230.62
set/12	10924181	10213068	711113	6.51%	1899.90	106791007407.75
out/12	11000886	10356966	643920	5.85%	1922.70	109254045214.78
nov/12	11030940	10428104	602835	5.46%	1929.50	107377233213.80
dez/12	11066698	10490402	576296	5.21%	1906.60	107228225545.73

Tabela A.19: Dados da região metropolitana de São Paulo (2010-2012)

Mês	$n(t)$	$l(t)$	$m(t)$	$d(t)$	$w(t)$	$q(t)$
jan/13	11065327	10354730	710598	6.42%	1935.30	99658343632.52
fev/13	11003966	10286100	717866	6.52%	1969.00	97848070758.37
mar/13	10839694	10153358	686336	6.33%	1995.90	106048647932.65
abr/13	10852232	10120625	731607	6.74%	1996.70	107294390360.12
mai/13	10896951	10205076	691875	6.35%	1988.10	108853143458.85
jun/13	10915035	10197021	718014	6.58%	1986.50	108267138806.57
jul/13	10951494	10320591	630904	5.76%	1954.70	112363527767.72
ago/13	10961294	10370069	591224	5.39%	1990.10	115829760662.29
set/13	10997371	10360951	636420	5.79%	2016.30	112032302651.07
out/13	11004819	10392267	612552	5.57%	2053.00	112933333870.42
nov/13	10916369	10405382	510987	4.68%	2093.40	110461559337.18
dez/13	10896897	10420707	476190	4.37%	2085.10	107982442692.87
jan/14	10889780	10342493	547287	5.03%	2090.40	102399893041.69
fev/14	10924475	10320360	604115	5.53%	2115.90	101623341164.63
mar/14	10892763	10266919	625844	5.75%	2133.20	109764949412.18
abr/14	10834989	10268613	566376	5.23%	2139.30	104216356077.24
mai/14	10756652	10213425	543227	5.05%	2136.90	108150336753.75
jun/14	10768983	10224420	544563	5.06%	2106.30	105385684564.56
jul/14	10731280	10209333	521947	4.86%	2102.70	108912506673.55
ago/14	10878177	10320250	557927	5.13%	2132.60	110244709572.81
set/14	10838770	10349474	489296	4.51%	2131.70	108004001437.60
out/14	10880880	10406258	474622	4.36%	2200.20	109702825595.29
nov/14	11011686	10498505	513180	4.66%	2269.90	106475358311.57
dez/14	10851561	10378857	472704	4.36%	2202.60	106792274305.99

Tabela A.20: Dados da região metropolitana de São Paulo (2013-2014)

Mês	$a(t)$	$v(t)$	$u(t)$	$1 - u(t)$	$\dot{v}(t)/v(t)$	$\dot{u}(t)/u(t)$	$\dot{w}(t)/w(t)$
jan/04	8528.70	87.06%	11.66%	88.34%	-0.80%	1.31%	2.66%
fev/04	8642.80	86.37%	11.82%	88.18%	-1.10%	-7.91%	0.10%
mar/04	9394.35	85.41%	10.88%	89.12%	0.08%	3.59%	-0.12%
abr/04	9058.47	85.48%	11.27%	88.73%	1.02%	-0.12%	0.60%
mai/04	9123.97	86.36%	11.26%	88.74%	0.35%	-0.21%	1.07%
jun/04	9241.25	86.65%	11.23%	88.77%	0.92%	-1.94%	0.75%
jul/04	9495.31	87.45%	11.02%	88.98%	-0.01%	-3.08%	-1.10%
ago/04	9689.35	87.44%	10.68%	89.32%	0.97%	3.36%	1.60%
set/04	9524.88	88.29%	11.04%	88.96%	0.55%	1.02%	-1.23%
out/04	9313.00	88.78%	11.15%	88.85%	-0.03%	2.47%	1.04%
nov/04	9182.77	88.75%	11.42%	88.58%	1.61%	-2.29%	-1.90%
dez/04	9219.74	90.18%	11.16%	88.84%	-1.46%	11.68%	3.60%
jan/05	8552.46	88.87%	12.47%	87.53%	-0.42%	2.46%	1.99%
fev/05	8512.99	88.49%	12.77%	87.23%	0.04%	-4.79%	1.98%
mar/05	9118.17	88.52%	12.16%	87.84%	0.05%	-0.74%	-2.06%
abr/05	8997.01	88.57%	12.07%	87.93%	1.06%	-1.79%	-0.38%
mai/05	9126.44	89.51%	11.85%	88.15%	0.01%	0.23%	2.06%
jun/05	9293.31	89.51%	11.88%	88.12%	0.69%	0.18%	2.24%
jul/05	9484.30	90.13%	11.90%	88.10%	0.48%	-3.07%	-0.27%
ago/05	9757.93	90.56%	11.54%	88.46%	-0.25%	1.58%	-0.93%
set/05	9516.91	90.33%	11.72%	88.28%	0.10%	-0.52%	-1.99%
out/05	9376.56	90.43%	11.66%	88.34%	-0.16%	1.31%	2.51%
nov/05	9487.05	90.29%	11.81%	88.19%	2.06%	3.27%	2.34%
dez/05	9401.43	92.15%	12.20%	87.80%	-1.44%	4.88%	-2.09%
jan/06	8776.19	90.82%	12.79%	87.21%	-1.43%	5.65%	4.28%
fev/06	8662.65	89.53%	13.52%	86.48%	-0.14%	-8.65%	-0.66%
mar/06	9420.65	89.40%	12.35%	87.65%	-0.14%	4.14%	1.10%
abr/06	9145.81	89.27%	12.86%	87.14%	0.22%	-3.56%	1.79%
mai/06	9653.69	89.47%	12.40%	87.60%	-0.41%	2.85%	0.56%
jun/06	9438.65	89.10%	12.75%	87.25%	-0.50%	-5.42%	-2.44%
jul/06	9735.61	88.66%	12.06%	87.94%	-0.24%	-1.12%	0.43%
ago/06	9888.94	88.45%	11.93%	88.07%	0.51%	1.84%	-1.92%
set/06	9524.60	88.90%	12.15%	87.85%	0.66%	0.74%	1.88%
out/06	9631.70	89.48%	12.24%	87.76%	0.23%	4.09%	2.61%
nov/06	9493.92	89.69%	12.74%	87.26%	1.41%	2.49%	2.77%
dez/06	9519.56	90.95%	13.05%	86.95%	-1.20%	4.21%	-1.75%

Tabela A.21: Cálculos para a região metropolitana de São Paulo (2004-2006)



Mês	$a(t)$	$v(t)$	$u(t)$	$1 - u(t)$	$\dot{v}(t)/v(t)$	$\dot{u}(t)/u(t)$	$\dot{w}(t)/w(t)$
jan/07	8975.80	89.86%	13.60%	86.40%	-0.48%	5.50%	4.55%
fev/07	8895.70	89.43%	14.35%	85.65%	-1.01%	-7.82%	-1.13%
mar/07	9541.13	88.53%	13.23%	86.77%	-0.10%	-0.13%	-0.40%
abr/07	9515.87	88.44%	13.21%	86.79%	0.45%	-5.19%	0.56%
mai/07	10093.26	88.84%	12.53%	87.47%	1.12%	1.69%	-1.26%
jun/07	9800.40	89.84%	12.74%	87.26%	-0.16%	-6.71%	-2.38%
jul/07	10255.18	89.69%	11.88%	88.12%	0.20%	-1.07%	0.66%
ago/07	10434.06	89.88%	11.76%	88.24%	0.85%	4.76%	0.35%
set/07	9994.73	90.64%	12.32%	87.68%	-0.14%	0.06%	1.60%
out/07	10148.13	90.51%	12.32%	87.68%	0.71%	4.44%	1.38%
nov/07	9850.60	91.15%	12.87%	87.13%	0.96%	2.84%	3.64%
dez/07	9927.30	92.03%	13.24%	86.76%	-0.70%	8.42%	1.30%
jan/08	9275.56	91.38%	14.35%	85.65%	-0.79%	0.85%	1.13%
fev/08	9300.68	90.65%	14.47%	85.53%	-0.03%	-7.08%	-1.51%
mar/08	9858.62	90.62%	13.45%	86.55%	-0.03%	0.47%	0.35%
abr/08	9846.57	90.59%	13.51%	86.49%	0.86%	-1.82%	0.06%
mai/08	10035.06	91.37%	13.27%	86.73%	0.48%	0.93%	0.42%
jun/08	9984.90	91.81%	13.39%	86.61%	-0.12%	-5.39%	0.24%
jul/08	10578.57	91.70%	12.67%	87.33%	0.29%	4.31%	2.28%
ago/08	10372.55	91.97%	13.21%	86.79%	-0.01%	0.50%	1.44%
set/08	10469.96	91.96%	13.28%	86.72%	0.32%	2.08%	-1.52%
out/08	10100.76	92.25%	13.56%	86.44%	-0.44%	5.38%	2.41%
nov/08	9815.94	91.84%	14.29%	85.71%	1.11%	5.51%	1.22%
dez/08	9416.75	92.86%	15.07%	84.93%	-2.46%	13.26%	5.83%
jan/09	8799.57	90.58%	17.07%	82.93%	-0.60%	-2.35%	-1.25%
fev/09	8898.61	90.04%	16.67%	83.33%	-0.63%	-7.07%	-0.62%
mar/09	9516.56	89.48%	15.49%	84.51%	0.38%	-1.62%	-1.37%
abr/09	9540.53	89.82%	15.24%	84.76%	-0.06%	-3.00%	-0.32%
mai/09	9804.12	89.76%	14.78%	85.22%	1.37%	-0.27%	0.06%
jun/09	9835.79	90.99%	14.74%	85.26%	0.14%	-4.46%	-1.12%
jul/09	10179.10	91.11%	14.09%	85.91%	-0.18%	1.59%	1.44%
ago/09	10164.34	90.95%	14.31%	85.69%	0.41%	1.63%	1.31%
set/09	10132.47	91.32%	14.54%	85.46%	0.09%	-1.32%	1.04%
out/09	10375.51	91.41%	14.35%	85.65%	0.56%	2.16%	1.28%
nov/09	10286.77	91.92%	14.66%	85.34%	0.65%	1.12%	-0.25%
dez/09	10147.49	92.52%	14.83%	85.17%	-0.60%	6.78%	1.07%

Tabela A.22: Cálculos para a região metropolitana de São Paulo (2007-2009)

Mês	$a(t)$	$v(t)$	$u(t)$	$1 - u(t)$	$\dot{v}(t)/v(t)$	$\dot{u}(t)/u(t)$	$\dot{w}(t)/w(t)$
jan/10	9605.11	91.96%	15.83%	84.17%	-0.06%	2.41%	0.98%
fev/10	9471.39	91.91%	16.21%	83.79%	-0.06%	-7.83%	1.11%
mar/10	10389.54	91.85%	14.94%	85.06%	0.50%	3.69%	-0.10%
abr/10	10009.93	92.31%	15.49%	84.51%	-0.08%	-2.70%	-0.86%
mai/10	10199.98	92.24%	15.07%	84.93%	0.40%	-1.24%	-0.15%
jun/10	10312.99	92.61%	14.89%	85.11%	0.25%	0.48%	2.16%
jul/10	10484.99	92.84%	14.96%	85.04%	0.36%	-2.37%	0.75%
ago/10	10820.11	93.18%	14.60%	85.40%	0.55%	5.63%	1.24%
set/10	10370.89	93.69%	15.42%	84.58%	0.44%	1.58%	0.64%
out/10	10275.29	94.10%	15.67%	84.33%	0.38%	-0.26%	0.11%
nov/10	10314.03	94.46%	15.63%	84.37%	0.23%	-0.35%	0.00%
dez/10	10350.69	94.68%	15.57%	84.43%	-0.75%	7.86%	1.41%
jan/11	9731.87	93.97%	16.80%	83.20%	-0.62%	-1.22%	0.13%
fev/11	9864.92	93.38%	16.59%	83.41%	-0.35%	-2.93%	1.62%
mar/11	10327.36	93.06%	16.11%	83.89%	-0.18%	2.39%	-1.20%
abr/11	9965.56	92.89%	16.49%	83.51%	0.40%	-4.62%	1.49%
mai/11	10603.77	93.26%	15.73%	84.27%	0.14%	3.49%	1.47%
jun/11	10397.31	93.39%	16.28%	83.72%	0.18%	-2.30%	1.61%
jul/11	10812.85	93.55%	15.90%	84.10%	0.15%	-0.27%	-0.03%
ago/11	10838.51	93.69%	15.86%	84.14%	0.26%	1.02%	-0.49%
set/11	10676.16	93.93%	16.02%	83.98%	0.45%	2.82%	0.34%
out/11	10418.10	94.35%	16.48%	83.52%	0.74%	0.08%	0.42%
nov/11	10453.55	95.05%	16.49%	83.51%	0.27%	1.44%	1.85%
dez/11	10496.30	95.30%	16.72%	83.28%	-0.85%	8.16%	0.47%
jan/12	9750.18	94.50%	18.09%	81.91%	-0.65%	2.77%	2.80%
fev/12	9753.03	93.88%	18.59%	81.41%	-0.44%	-5.93%	2.17%
mar/12	10592.06	93.47%	17.49%	82.51%	0.02%	4.56%	-0.88%
abr/12	10041.16	93.49%	18.29%	81.71%	0.36%	-2.03%	0.87%
mai/12	10338.14	93.83%	17.91%	82.09%	-0.34%	1.05%	-0.22%
jun/12	10208.50	93.51%	18.10%	81.90%	0.82%	-5.35%	-0.74%
jul/12	10706.31	94.27%	17.13%	82.87%	-0.09%	0.15%	3.55%
ago/12	11069.77	94.18%	17.16%	82.84%	-0.74%	5.89%	0.02%
set/12	10456.31	93.49%	18.17%	81.83%	0.70%	0.31%	1.20%
out/12	10548.85	94.15%	18.23%	81.77%	0.41%	2.81%	0.35%
nov/12	10296.91	94.54%	18.74%	81.26%	0.27%	-0.46%	-1.19%
dez/12	10221.56	94.79%	18.65%	81.35%	-1.28%	7.80%	1.51%

Tabela A.23: Cálculos para a região metropolitana de São Paulo (2010-2012)

Mês	$a(t)$	$v(t)$	$u(t)$	$1 - u(t)$	$\dot{v}(t)/v(t)$	$\dot{u}(t)/u(t)$	$\dot{w}(t)/w(t)$
jan/13	9624.43	93.58%	20.11%	79.89%	-0.11%	2.94%	1.74%
fev/13	9512.65	93.48%	20.70%	79.30%	0.21%	-7.68%	1.37%
mar/13	10444.69	93.67%	19.11%	80.89%	-0.44%	-1.44%	0.04%
abr/13	10601.56	93.26%	18.83%	81.17%	0.42%	-1.04%	-0.43%
mai/13	10666.57	93.65%	18.64%	81.36%	-0.24%	0.38%	-0.08%
jun/13	10617.53	93.42%	18.71%	81.29%	0.87%	-4.04%	-1.60%
jul/13	10887.32	94.24%	17.95%	82.05%	0.39%	-0.76%	1.81%
ago/13	11169.62	94.61%	17.82%	82.18%	-0.42%	4.66%	1.32%
set/13	10812.94	94.21%	18.65%	81.35%	0.23%	1.31%	1.82%
out/13	10867.05	94.43%	18.89%	81.11%	0.94%	4.38%	1.97%
nov/13	10615.81	95.32%	19.72%	80.28%	0.33%	2.04%	-0.40%
dez/13	10362.30	95.63%	20.12%	79.88%	-0.69%	4.93%	0.25%
jan/14	9900.89	94.97%	21.11%	78.89%	-0.53%	1.78%	1.22%
fev/14	9846.88	94.47%	21.49%	78.51%	-0.23%	-7.14%	0.82%
mar/14	10691.13	94.25%	19.95%	80.05%	0.55%	5.64%	0.29%
abr/14	10149.02	94.77%	21.08%	78.92%	0.19%	-4.26%	-0.11%
mai/14	10589.04	94.95%	20.18%	79.82%	-0.01%	1.26%	-1.43%
jun/14	10307.25	94.94%	20.44%	79.56%	0.20%	-3.55%	-0.17%
jul/14	10667.94	95.14%	19.71%	80.29%	-0.28%	1.28%	1.42%
ago/14	10682.37	94.87%	19.96%	80.04%	0.65%	2.32%	-0.04%
set/14	10435.70	95.49%	20.43%	79.57%	0.16%	2.17%	3.21%
out/14	10542.01	95.64%	20.87%	79.13%	-0.31%	7.24%	3.17%
nov/14	10141.95	95.34%	22.38%	77.62%	0.32%	-4.36%	-2.96%
dez/14	10289.41	95.64%	21.41%	78.59%			

Tabela A.24: Cálculos para a região metropolitana de São Paulo (2013-2014)

## REFERÊNCIAS

- [1] ABRAMOVITZ, M. The Nature and Significance of Kuznets Cycles. *Economic Development and Cultural Change* 9, 3 (1961), 225–248.
- [2] ABRAMOVITZ, M. The Passing of the Kuznets Cycle: A Correction. *Economica* 36, 141 (1969).
- [3] AGÊNCIA ESTADUAL DE PLANEJAMENTO E PESQUISAS DE PERNAMBUCO. <http://www.condepefidem.pe.gov.br/>, acessado:08.05.2018.
- [4] BACAËR, N. *Lotka, Volterra and the predator–prey system (1920–1926)*. Springer London, London, 2011, pp. 71–76.
- [5] BENKEMOUNE, R. *Charles Dunoyer and the Emergence of the Idea of an Economic Cycle*. 2009.
- [6] BERNARD, L. Time scales and mechanisms of economic cycles: a review of theories of long waves. *Review of Keynesian Economics* 2, 1 (January 2014), 87–107.
- [7] BLATT, J. *Dynamic Economic Systems: A Post-Keynesian Approach*. Sharpe, 1983.
- [8] BURDEN, R., AND FAIRES, J. *Numerical Analysis*. Cengage Learning, 2004, pp. 10–14.
- [9] BURDEN, R., AND FAIRES, J. *Numerical Analysis*. Cengage Learning, 2010, pp. 498–506.
- [10] BURNS, A. F., AND MITCHELL, W. C. *Measuring Business Cycles*. National Bureau of Economic Research, Inc, 1946.
- [11] CHIARELLA, F. Some Numerical Explorations of the Keynes-Metzler-Goodwin Monetary Growth Model. *Indian Economic Review* 45, 1 (2010), 1–28.
- [12] CHIN, W. W. *The Partial Least Squares Approach to Structural Equation on Modelling*. Modern Methods for Business Research. G. A. Marcoulides, 1998, p. 323.
- [13] COYLE, P. An Extended Goodwin Model with Horizontal Trade: A Sheaf Theoretic Approach. *ArXiv e-prints* (April 2017), 20.
- [14] DESAI, M. Growth cycles and inflation in a model of the class struggle. *Journal of Economic Theory* 6 (1973), 527–545.
- [15] DESAI M, HENRY B, M. A. P. M. A Clarification of the Goodwin Model of the Growth Cycle. *Journal of Economic Dynamics and Control* (2006), 2661–2670.

- [16] FISHER, I., AND BARBER, W. J. *The Theory of Interest*. No. v. 9 in *The Pickering masters*. Pickering & Chatto, 1997.
- [17] FRIEDMAN, M. *The Role of Monetary Policy*. Macmillan Education UK, London, 1995, pp. 215–231.
- [18] FUNDAÇÃO DE ECONOMIA E ESTATÍSTICA SIEGFRIED EMANUEL HEUSER. <https://www.fee.rs.gov.br>, acessado:08.05.2018.
- [19] FUNDAÇÃO JOÃO PINHEIRO. <http://www.fjp.mg.gov.br/>, acessado:08.05.2018.
- [20] FUNDAÇÃO SISTEMA ESTADUAL DE ANÁLISE DE DADOS. <http://catalogo.governoaberto.sp.gov.br/>, acessado:08.05.2018.
- [21] GANDOLFO, G. *Economic Dynamics: Methods and Models*. Universita di Roma, Italy Elsevier Science Publishers B. V., 1971.
- [22] GOODWIN, R. A Growth Cycle. *First World Congress of the Econometric Society* (1965).
- [23] GUJARATI, D., GUERRERO, D., AND MEDINA, G. *Econometría*. McGraw-Hill, 2004, pp. 82–84.
- [24] HARVIE, D. Testing Goodwin: Growth Cycles in Ten OECD Countries. *Cambridge Journal of Economics* 24, 3 (2000), 349–76.
- [25] HARVIE, D., KELMANSON, M. A., AND KNAPP, D. G. A Dynamical Model of Business-Cycle Asymmetries: Extending Goodwin. *Economic Issues Journal Articles* 12, 1 (March 2007), 53–92.
- [26] INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. Pesquisa Mensal de Emprego. <https://ww2.ibge.gov.br/>, acessado:08.05.2018.
- [27] INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. Sistema de Contas Nacionais Trimestrais. <https://ww2.ibge.gov.br/>, acessado:08.05.2018.
- [28] KITCHIN, J. *Cycles and Trends in Economic Factors*. The MIT Press, 1923.
- [29] KONDRATIEV, N. The Long Waves in Economic Life. *Review of Economics and Statistics* 18, 6 (1935), 105–15.
- [30] KOROTAYEV A., T. S. *A Spectral Analysis of World GDP Dynamics: Kondratieff Waves, Kuznets Swings, Juglar and Kitchin Cycles in Global Economic Development, and the 2008–2009*. 2010.

- [31] KUZNETS, S. S. *Secular movements in production and prices; their nature and their bearing upon cyclical fluctuations*. Houghton Mifflin, 1930.
- [32] KUZNETS, S. S. *Economic growth of nations; total output and production structure*. Belknap Press of Harvard University Press, 1971.
- [33] MARQUETTI A., MALDONADO E., L. V. The profit rate in Brazil, 1953-2003. *Review of Radical Political Economics* 42, 4 (2010), 485–504.
- [34] MARWIL J. DAVILA-FERNANDEZ, G. A. L. Goodwin cycles and the BoPC growth paradigm: A macrodynamic model of growth and fluctuations. *Economía* 17 (2016), 324–339.
- [35] MIEBACH, A. D. *O ciclo de crescimento de Goodwin: um modelo de dinâmica econômica não linear*. PhD thesis, 2011. Escola de Negócios.
- [36] MIEBACH, A. D. *O ciclo de crescimento de Goodwin e a parcela salarial na economia brasileira*. PhD thesis, 2017. Escola de Negócios.
- [37] MITCHELL, W. *Business Cycles*. Memoirs of the University of California. v.3. University of California Press, 1913.
- [38] O'BRIEN, D. *The foundations of business cycle theory*. No. v. 3 in Elgar reference collection. E. Elgar Pub., 1997.
- [39] PHILLIPS, W. The Relation between Unemployment and the Rate of Change of Money Wage Rates in the United Kingdom, 1861-1957. *Economica* 25, 100 (November 1958), 283–299.
- [40] POHJOLA, M. Stable and chaotic growth: The dynamics of a discrete version of Goodwin's growth cycle model. 27–38.
- [41] RICCI, G., GOODWIN, R., AND VELUPILLAI, K. *Growth cycles and multisectoral economics, the Goodwin tradition: proceedings of the workshop in honour of R.M. Goodwin*. Lecture notes in economics and mathematical systems. Springer-Verlag, 1988.
- [42] SHERMAN, H. J. Marx and the Business Cycle. 486–504.
- [43] TAVANI, D., AND ZAMPARELLI, L. Endogenous Technical Change, Employment and Distribution in the Goodwin Model.
- [44] TOICHIRO ASADA, PETER FLASCHEL, C. C. *Keynes-Metzler-Goodwin model building: the closed economy*. School of Finance and Economics, University of Technology, 2003, p. 52.

- [45] VELUPILLAI, K., AND GOODWIN, R. *Nonlinear and Multisectoral Macrodynamics: Essays in Honour of Richard Goodwin*. Mcmillan Press, 1990.
- [46] VELUPILLAI, V. K. Foley's Thesis, Negishi's Method, Existence Proofs and Computation.