



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

KARISTON STEVAN LUIZ

**CONVERGÊNCIA NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES  
TELEGRÁFICAS PREDADOR-PRESA**

---

Londrina  
2018

KARISTON STEVAN LUIZ

**CONVERGÊNCIA NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES  
TELEGRÁFICAS PREDADOR-PRESA**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Laerte Natti.

Londrina  
2018

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da  
Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina**

**Dados Internacionais de Catalogação -na-Publicação (CIP)**

S232c	<p>Luiz, Kariston Stevan. Convergência Numérica das Equações Telegráficas Predador-Presa / Kariston Stevan Luiz. – Londrina, 2018. 75 f. : il.</p> <p>Orientador: Paulo Laerte Natti. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2018.</p> <p>Inclui Bibliografia.</p> <p>1. Dinâmica populacional - Tese. 2. Consistência - Tese. 3. Estabilidade numé- rica - Tese. 4. Condição de Von Neumann - Tese. I. Laerte Natti, Paulo. II. Universi- dade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.</p> <p style="text-align: right;">519.681-7</p>
-------	--

KARISTON STEVAN LUIZ

**CONVERGÊNCIA NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES TELEGRÁFICAS  
PREDADOR-PRESA**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Orientador: Prof. Dr. Paulo Laerte Natti  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Prof. Dr. Cosmo Damião Santiago  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná -  
UTFPR

---

Profa. Dra. Neyva Maria Lopes Romeiro  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 23 de fevereiro de 2018.

*Dedico este trabalho a minha mãe Marilei e ao meu pai Claudio.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, dono de toda ciência, sabedoria e poder, por ser meu companheiro e refúgio em momentos de dificuldades.

Agradeço a minha família por estar do meu lado sempre e em especial à minha mãe Marilei e meu pai Claudio por sempre acreditar em mim e me dar zelo nas horas em que mais precisei.

Agradeço a minha futura esposa Deborah por me compreender e estar ao meu lado me apoiando nas dificuldades e por não me deixar desistir de tudo.

Agradeço a meu orientador Prof. Dr<sup>o</sup> Paulo Laerte Natti pelo rico conhecimento, pela paciência e dedicação em sempre dar o melhor para a concretização deste trabalho.

Agradeço aos meus colegas de mestrado e os que ainda restaram da época de graduação, que não foram muitos.

Agradeço aos professores do PGMAC, em especial ao Prof. Dr<sup>o</sup> Eliandro R. Cirilo pela dedicação em auxiliar-me no entendimento da matemática computacional e contribuir com este trabalho, aos professores da graduação, em especial ao Prof. Dr<sup>o</sup> Ulysses Sodré e a Profa. Dr<sup>a</sup> Luci Harue Fatori por sempre me mostrarem as belezas da matemática e me amadurecerem matematicamente.

Agradeço especialmente aos professores da banca por contribuírem com a realização deste mestrado, a Profa. Dr<sup>a</sup> Neyva M. L. Romeiro e ao Prof. Dr<sup>o</sup> Cosmo Damião Santiago por serem excelentes profissionais no que fazem e pela disponibilidade em somar para este trabalho.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro concedido através da bolsa de mestrado.

*"E apliquei o meu coração a esquadrihar, e a informar-me com sabedoria de tudo quanto sucede debaixo do céu; esta enfadonha ocupação deu Deus aos filhos dos homens, para nela os exercitar. Atentei para todas as obras que se fazem debaixo do sol, e eis que tudo era vaidade e aflição de espírito. Aquilo que é torto não se pode endireitar; aquilo que falta não se pode calcular."  
Eclesiastes 1:13-15.*

LUIZ, Kariston Stevan. **Convergência Numérica das Equações Telegráficas Predador-Presa**. 2018. 75 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

## RESUMO

Nesse trabalho, estuda-se a convergência numérica de um sistema de equações predador-presa do tipo telegráfico, com efeitos reativos, difusivos e de retardo. Tal sistema de EDPs pode descrever sistemas biológicos em que tais efeitos não possam ser desprezados. Inicialmente realizou-se a modelagem matemática do problema, e em seguida fez-se a discretização do sistema de EDPs em uma malha no nível de tempo  $k$ , por meio do método das diferenças finitas, obtendo um sistema de equações explícitas. Em seguida, analisou-se a consistência dos métodos de discretização de um sistema de equações predador-presa clássico, de uma equação telegráfica e por fim de uma equação telegráfica predador-presa. Posteriormente foram calculadas as condições de estabilidade de Von Neumann para estas equações. Através do Teorema de Equivalência de Lax verificou-se que o refinamento da malha, bem como os parâmetros dos modelos, as constantes reativas, a constante de difusão e o termo de retardo, oriundo da equação de Maxwell-Cattaneo, determinam as condições de estabilidade/instabilidade do problema.

**Palavras-chave:** Modelagem matemática. Consistência. Estabilidade Von Neumann. Retardo de Maxwell-Cattaneo. Efeitos difusivo-reativo. Teorema da Equivalência de Lax.



LUIZ, Kariston Stevan. **Numerical Convergence of Predator-Prey Telegraphic Equations.** 2018. 75 p. Dissertation (Master's degree in Applied and Computational Mathematics) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

### **ABSTRACT**

In this work, we study the numerical convergence of a predator-prey system of the telegraphic type equation, with reactive, diffusive, convective and delay effects. This system of PDEs can describe biological systems in which such effects can not be ignored. Initially the mathematical modeling of the problem was performed, and the system of PDEs was discretized in a mesh at the time step  $k$  by the finite difference method, obtaining a system of explicit equations. Then, the consistency of the methods of discretization of a system of classic predator-prey equations, a telegraphic equation, and finally a predator-prey telegraph equation was analyzed. Subsequently, the Von Neumann stability conditions were calculated for these equations. Through the Lax Equivalence Theorem, it was verified that the mesh refinement, as well as the parameters of the models, the reactive constants, the diffusion constant and the delay term, from the Maxwell-Cattaneo equation determine the stability/instability conditions of the problem.

**Keywords:** Mathematical modeling. Consistency. Von Neumann stability. Maxwell-Cattaneo's delay. Difusive-convective-reactive effects. Lax equivalence Theorem.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Três tipos de respostas funcionais identificadas por Holling.....	16
Figura 2.1: Retrato de fase do sistema (2.19).....	24
Figura 3.1: Malha discreta do sistema acoplado. ....	31
Figura 5.1: Região de Estabilidade/Instabilidade para o sistema predador-presa telegráfico (3.24)-(3.25) com $\Delta t = 0.002$ .....	55
Figura 5.2: Região de Estabilidade/Instabilidade para o sistema predador-presa telegráfico (3.24)-(3.25) com $\Delta t = 0.0015255$ .....	56
Figura 5.3: Região de Estabilidade/Instabilidade para o sistema predador-presa telegráfico (3.24)-(3.25) com $\Delta t = 0.001$ .....	56
Figura 5.4: Região de Estabilidade/Instabilidade para o sistema predador-presa telegráfico (3.24)-(3.25) com $\Delta x = 0.1$ .....	57
Figura 5.5: Região de Estabilidade/Instabilidade para o sistema predador-presa telegráfico (3.24)-(3.25) com $\Delta x = 0.05$ .....	58
Figura 5.6: Região de Estabilidade/Instabilidade para o sistema predador-presa telegráfico (3.24)-(3.25) com $\Delta x = 0.025$ .....	58
Figura 6.1: Localização dos pontos de estabilidade/instabilidade tomados para as simula- ções apresentadas nas Tabelas 6.6 e 6.7.....	64
Figura 6.2: Densidades e populações do modelo telegráfico predador-presa (4.28)-(4.29) para $\Delta t = 0, 0015$ e $\Delta x = 0, 1$ .....	65
Figura 6.3: Gráfico 3D das densidades populacionais de predador e presa, equação (4.28) e (4.29), para $\Delta t = 0, 0015$ e $\Delta x = 0, 1$ .....	66
Figura 6.4: Densidades e populações do modelo telegráfico predador-presa (4.28)-(4.29) para $\Delta t = 0, 0015$ e $\Delta x = 0, 1$ , com parâmetros próximos à região de instabi- lidade. ....	67
Figura 6.5: Gráfico 3D das densidades populacionais de predador e presa dadas em (4.28) e (4.29) para $\Delta t = 0, 0015$ e $\Delta x = 0, 1$ .....	68
Figura 6.6: Zoom da região onde ocorre solução negativa da densidade populacional da presa, equações (4.28) e (4.29), para $\Delta t = 0, 0015$ e $\Delta x$ $= 0, 1$ .....	69

## LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1: Valores dos parâmetros das simulações para todos os modelos estudados.....	61
Tabela 6.2: Valores para as Condições iniciais.....	61
Tabela 6.3: Valores das populações para vários refinamentos, no tempo $t = 100$ do sistema predador-presa com termos fontes (4.1)-(4.2). .....	62
Tabela 6.4: Valor da população para vários refinamentos, no tempo $t = 100$ do modelo telegráfico (4.19).....	62
Tabela 6.5: Valores das populações para vários refinamentos, no tempo $t = 100$ do modelo telegráfico predador-presa (4.28)-(4.29).....	63
Tabela 6.6: Valores dos parâmetros da primeira simulação numérica para o sistema (4.28)- (4.29).....	64
Tabela 6.7: Valores dos parâmetros da segunda simulação numérica para a equação (4.28) e (4.29) .....	66

## LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIACÕES

$S_1$	População de presas
$S_2$	População de predadores
$a_1$	Taxa de natalidade das presas
$a_2$	Taxa de mortalidade dos predadores na ausência das presas
$b_1$	Taxa de saturação da presa
$c_1$	Taxa per capita do consumo de presas pela população de predadores
$c_2$	Taxa de biomassa de presas que é convertida em biomassa de predadores
$D_1$	Taxa de difusão de presas
$D_2$	Taxa de difusão de predadores
$\tau_1$	Retardo da presa
$\tau_2$	Retardo do predador $u$ Velocidade do fluido $p$ Pressão do fluido
$\rho$	Densidade do fluido
$\mu$	Viscosidade do fluido
ETL	Erro de truncamento local

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>MODELAGEM DE UM SISTEMA PREDADOR-PRESA</b> .....	<b>19</b>
<b>2.1</b>	<b>EQUAÇÃO DE MAXWELL-CATTANEO</b> .....	<b>19</b>
<b>2.1.1</b>	<b>LEI DE FICK</b> .....	<b>19</b>
<b>2.1.2</b>	<b>EQUAÇÃO DE DIFUSÃO</b> .....	<b>20</b>
<b>2.1.3</b>	<b>MODELAGEM DA EQUAÇÃO DE MAXWELL-CATTANEO</b> .....	<b>21</b>
<b>2.2</b>	<b>SISTEMA PREDADOR-PRESA</b> .....	<b>23</b>
<b>2.2.1</b>	<b>SISTEMA PREDADOR-PRESA CLÁSSICO</b> .....	<b>23</b>
<b>2.2.2</b>	<b>SISTEMA TELEGRÁFICO PREDADOR-PRESA</b> .....	<b>24</b>
<b>3</b>	<b>DISCRETIZAÇÃO DO SISTEMA TELEGRÁFICO PREDADOR-PRESA</b> .....	<b>26</b>
<b>3.1</b>	<b>MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS USUAIS</b> .....	<b>26</b>
<b>3.1.1</b>	<b>EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS FINITAS PARA FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL</b> .....	<b>26</b>
<b>3.1.2</b>	<b>EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS FINITAS PARA FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS</b> .....	<b>28</b>
<b>3.2</b>	<b>O SISTEMA TELEGRÁFICO PREDADOR-PRESA</b> .....	<b>29</b>
<b>3.3</b>	<b>DISCRETIZAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES TELEGRÁFICAS PREDADOR-PRESA</b> .....	<b>30</b>
<b>3.3.1</b>	<b>DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DA PRESA</b> .....	<b>33</b>
<b>3.3.2</b>	<b>DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DO PREDADOR</b> .....	<b>35</b>
<b>4</b>	<b>CONSISTÊNCIA</b> .....	<b>38</b>
<b>4.1</b>	<b>CONSISTÊNCIA DO MÉTODO EXPLÍCITO APLICADO À UMA EQUAÇÃO PREDADOR-PRESA COM TERMO FONTE</b> .....	<b>38</b>
<b>4.2</b>	<b>CONSISTÊNCIA DO MÉTODO EXPLÍCITO APLICADO À UMA EQUAÇÃO TELEGRÁFICA</b> .....	<b>41</b>
<b>4.3</b>	<b>CONSISTÊNCIA DO MÉTODO EXPLÍCITO PARA UM SISTEMA TELEGRÁFICO PREDADOR-PRESA</b> .....	<b>42</b>
<b>5</b>	<b>ESTABILIDADE NUMÉRICA</b> .....	<b>47</b>
<b>5.1</b>	<b>CONDIÇÃO DE VON NEUMANN PARA A EQUAÇÃO DO</b>	

	<b>CALOR UNIDIMENSIONAL.....</b>	<b>48</b>
<b>5.2</b>	<b>CONDIÇÃO DE VON NEUMANN PARA UMA EQUAÇÃO PREDADOR- PRESA COM TERMO FONTE.....</b>	<b>49</b>
<b>5.3</b>	<b>CONDIÇÃO DE VON NEUMANN PARA UMA EQUAÇÃO TELE- GRÁFICA .....</b>	<b>51</b>
<b>5.4</b>	<b>DIAGRAMA DE ESTABILIDADE PARA UM SISTEMA TELEGRÁ- FICO PREDADOR-PRESA.....</b>	<b>54</b>
<b>6</b>	<b>ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA NUMÉRICA .....</b>	<b>60</b>
<b>6.1</b>	<b>REFINAMENTO DE MALHA E CONVERGÊNCIA.....</b>	<b>60</b>
<b>6.2</b>	<b>SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DO SISTEMA TELEGRÁFICO PREDADOR- PRESA .....</b>	<b>63</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>70</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>72</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Atualmente existe um crescente interesse no estudo de dinâmica de populações, seja devido à necessidade de ter um melhor controle de epidemias, ou para amenizar os prejuízos econômicos, biológicos e sociais causados por espécies invasoras, entre outras necessidades. Matematicamente, uma das maneiras para modelar a interação entre populações é por meio de EDOs e EDPs. Historicamente, estas questões foram tratadas principalmente no ramo das ciências humanas, no que tange a estudos geográficos e ecológicos [20].

Uma das primeiras aplicações da Matemática em ecologia ocorreu no livro "*An essay on the principle of population*", escrito por Thomas Malthus em 1798 [40]. Nele é mencionado pela primeira vez que uma população com oportunidade para reprodução cresce exponencialmente no tempo. Usando a notação moderna, a dinâmica de uma população  $S$  sem limitações de recursos pode ser descrita pela equação diferencial

$$\frac{dS}{dt} = aS, \quad (1.1)$$

onde  $a > 0$  é a taxa de crescimento da população. Segundo esta equação, o crescimento é exponencial, uma vez que tem a solução  $S(t) = S_0 e^{at}$ , para uma população inicial  $S(0) = S_0$  dada [44].

O passo seguinte neste campo foi a introdução do modelo de uma população que é limitada no tamanho devido à restrições do ambiente. A dinâmica de tal população foi descrita por Verhülst em 1838 [54] por meio da equação

$$\frac{dS}{dt} = \frac{aS(K - S)}{K}, \quad (1.2)$$

que é conhecida como equação logística, na qual  $a > 0$  é a taxa de crescimento da população e  $K > 0$  é o tamanho estacionário da população ou taxa de saturação da população, determinado pelos recursos disponíveis [44].

As equações (1.1) e (1.2) foram usadas para descrever a dinâmica de uma única população e somente na década de 1920 tiveram início os primeiros estudos matemáticos destinados a descrever as interações entre populações [5]. Neste período surge o primeiro modelo matemático destinado a descrever duas populações interagindo, com os trabalhos de Alfred J. Lotka (1880-1949) e Vito Volterra (1860-1940). O modelo proposto, hoje conhecido como modelo Lotka-Volterra [39, 55], é dado por

$$\begin{cases} \frac{dS_1}{dt} = a_1 S_1 - c_1 S_1 S_2 \\ \frac{dS_2}{dt} = -a_2 S_2 + c_2 S_1 S_2, \end{cases} \quad (1.3)$$

onde  $S_1 > 0$  e  $S_2 > 0$  denotam a densidade das populações de espécies que se interagem,  $a_1 > 0$  é a taxa de natalidade da espécie  $S_1$ ,  $c_1, c_2 > 0$  é a taxa de competição/interação entre as duas espécies (podendo ser iguais ou não) e por último,  $a_2 > 0$  é a taxa de mortalidade da espécie  $S_2$ . O sistema (1.3), pode descrever uma interação entre espécies do tipo predador-presa, onde as populações  $S_1$  e  $S_2$  podem ser representadas por populações de presas e predadores, respectivamente.

Sobre o efeito da predação de uma espécie por outra, surgiram na literatura, vários trabalhos a fim de descrever matematicamente este fenômeno o mais próximo da realidade [19, 22, 24, 37]. A partir do final da década de 1950, C. S. Holling realizou experimentos para investigar como a taxa de captura de presas por um predador está relacionada à densidade das presas [30, 31], uma relação que antes havia sido denominada resposta funcional [51]. Holling identificou três categorias gerais de resposta funcional que ele chamou de tipo 1, 2 e 3 (Figura 1.1). A resposta funcional do tipo 1 é a mais simples: o número de presas consumidas aumenta em proporção direta com a densidade da presa ilimitadamente, isto é, a porcentagem da população de presas consumidas pela densidade da presa é constante. A resposta funcional do tipo 2 diz que com o aumento da população de presa, cada predador fica saciado e passa a consumir um número constante de presa. Com o aumento da população de presas, uma proporção menor dessa população é consumida. A resposta funcional do tipo 3 é semelhante ao do tipo 2, exceto na baixa densidade de presas, onde ocorre uma certa aceleração do consumo de presas, isto se deve ao fato de que alguns predadores são mais eficientes na captura de presas mais comuns ou ocorre uma troca de presa, podendo ambos os casos ocorrerem.

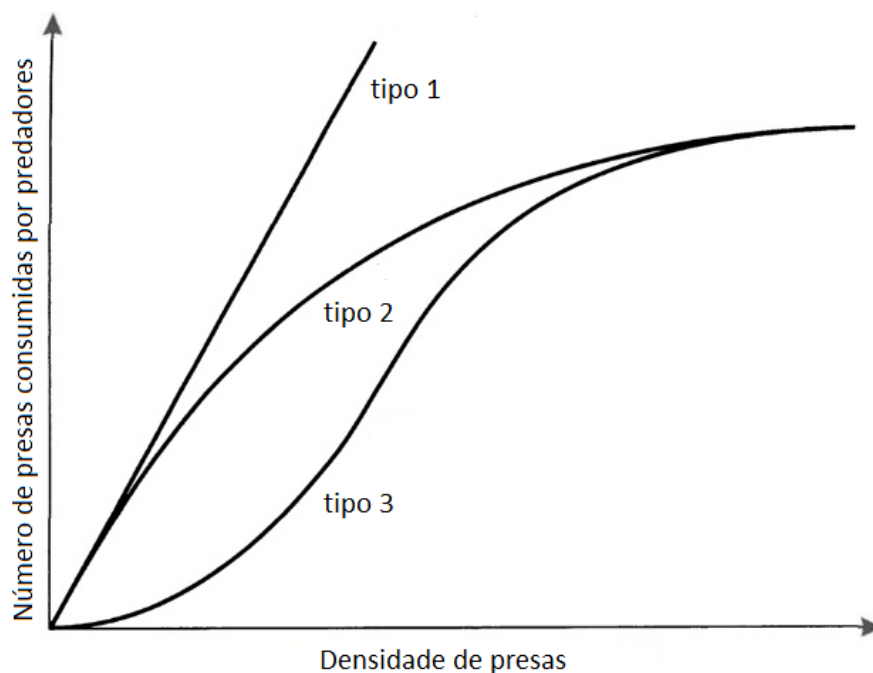


Figura 1.1: Três tipos de respostas funcionais identificadas por Holling.

**Fonte:** Adaptado de [25].



Em 1958, Carl B. Huffaker [33] através de uma série de experimentos, investigou em laboratório os efeitos da estrutura espacial de uma interação de populações de ácaros. Huffaker designou um conjunto de experimentos usando laranjas como patches em vários tipos de arranjos (laranjas totalmente expostas, laranjas parcialmente expostas) para testar ideias sobre os efeitos da estrutura espacial na persistência da interação predador-presa. Primeiro, Huffaker mostrou que a interação predador-presa não poderia sobreviver em um ambiente homogêneo sem dispersão. Em segundo lugar, para testar o papel da migração, Huffaker manipulou o ambiente espacial de forma a contribuir e restringir a dispersão das populações, e notou que houve um aumento no tempo de persistência do sistema. Finalmente, em uma extensão a este trabalho, o sistema experimental foi expandido para incluir mais patches e mais complexidade do meio ambiente [32]. Desta série de experiências, Huffaker mostrou que o aumento da persistência da interação do sistema predador-presa era uma consequência da estrutura espacial e da complexidade do sistema.

Um efeito específico que pode ser levado em conta na interação entre espécies é o efeito Allee, que foi descrito pela primeira vez na década de 1930 pelo seu homônimo, Warder Clyde Allee [3]. Através de estudos experimentais, Allee pôde demonstrar que a população de um certo peixe, cresce mais rapidamente quando há mais indivíduos dentro de um tanque. Isso o levou a concluir que o mutualismo pode melhorar a taxa de sobrevivência dos indivíduos, e essa cooperação pode ser crucial na evolução geral da estrutura social. Na visão clássica da dinâmica populacional, tem-se que, devido à competição por recursos, uma população terá uma taxa de crescimento reduzida em maior densidade e uma maior taxa de crescimento em menor densidade. Em outras palavras, quanto menor a densidade populacional de uma espécie, maior será a efetividade da mesma na busca de recursos, uma vez que esses são limitados. No entanto, o conceito do efeito Allee introduziu a ideia de que o contrário é verdadeiro. Para essas espécies, os indivíduos necessitam da assistência de outros indivíduos para sobreviverem. O exemplo mais óbvio é observado em animais que procuram presas ou se defendem em grupo contra predadores.

Atualmente na literatura, através de modelagens matemáticas mais complexas, encontra-se trabalhos que dão ênfase aos estudos da dinâmica de espécies invasoras, epidemias e outros fenômenos biológicos [6, 7, 26, 36].

Paralelamente ao desenvolvimento de modelos biológicos mais realísticos, estudos sobre a convergência de métodos numéricos tem recebido muita atenção da comunidade científica. O Teorema da Equivalência de Lax é fundamental para a análise da solução numérica de equações diferenciais parciais, descreve que em um problema de valor inicial bem-posto e um método de discretização consistente, estabilidade é condição necessária e suficiente para a convergência numérica [35].

A estabilidade de métodos numéricos está intimamente associada à propagação dos erros numéricos nas iterações. Um método de diferenças finitas é estável se os erros produzidos em um passo de tempo do cálculo não provocam um aumento dos erros, à medida

que os cálculos avançam. Com respeito à estabilidade, há 3 classes de métodos numéricos [28]. Um método numérico condicionalmente estável depende de certos parâmetros para que os erros permaneçam limitados. Se os erros diminuïrem ao longo do processo iterativo, o método numérico é dito como sendo estável. Se, de outra forma, os erros aumentarem, a solução numérica irá divergir em relação à solução exata, e então o método numérico é dito como sendo instável. A estabilidade de métodos numéricos pode ser averiguada pela análise de estabilidade de Von Neumann [18], por exemplo. Para problemas dependentes do tempo, a estabilidade garante que o método numérico produza uma solução limitada sempre que a solução da equação diferencial for limitada. Estabilidade em geral, pode ser dificilmente averiguada, especialmente se a equação em questão for não-linear [34].

Por outro lado, a consistência de um esquema numérico implica que o problema discreto é uma aproximação satisfatória da equação diferencial estudada, em outras palavras, o esquema ou operador de diferenças finitas é consistente se o operador se reduz à equação diferencial original à medida que os incrementos nas variáveis independentes tendem à zero [49].

Nesse contexto, o objetivo deste trabalho é verificar a consistência e estabilidade de uma equação predador-presa do tipo telegráfica e através do Teorema da Equivalência de Lax estudar as condições da convergência do método numérico para a solução real do problema.

A dissertação é estruturada como apresentada na sequência. No Capítulo 2 é feita uma modelagem matemática de um modelo aprimorado das equações predador-presa que contemple o fenômeno de retardo na dissipação das populações e o fenômeno convectivo devido a um fluido circundante. O termo de retardo é introduzido por meio da equação de Maxwell-Cataneo e a influência do efeito convectivo na dinâmica das populações é introduzido por meio das equações de Navier-Stokes. Das interações entre os modelos hidrodinâmico e Predador-Presa surge o modelo difusivo-convectivo-reativo, onde os efeitos reativos são devidos às interações predador-presa.

No Capítulo 3 serão feitas as discretizações das equações de populações da presa e do predador, de modo que o esquema resultante seja um esquema explícito. Utilizou-se o método de diferenças finitas que consiste na reformulação do problema contínuo em um problema discreto usando fórmulas de diferenças finitas, tomadas sobre uma malha apropriada.

No Capítulo 4 será analisado a consistência dos esquemas obtidos das discretizações realizadas no Capítulo 3.

No Capítulo 5 analisar-se-a as condições de estabilidade numérica dos esquemas obtidos das discretizações realizadas no Capítulo 3. Como critério de estabilidade numérica será utilizado o critério de Von Neumann.

No Capítulo 6 será discutido a convergência numérica das equações e serão realizadas experimentações numéricas para o estudo da convergência das soluções numéricas devido ao refinamento de malha. Finalmente as conclusões serão apresentadas.

## 2 MODELAGEM DE UM SISTEMA PREDADOR-PRESA

Neste capítulo, inicialmente, realiza-se a modelagem da equação de Maxwell-Cattaneo. Posteriormente, desenvolve-se a modelagem de um sistema predador-presa clássico e com retardo [40, 54]. Em seguida, generaliza-se o modelo introduzindo o efeito convectivo, supondo que as populações se encontram imersas em meios fluidos.

### 2.1 EQUAÇÃO DE MAXWELL-CATTANEO

A lei de Fourier propõe que os sinais térmicos se propaguem com velocidade infinita [41], o que na prática não acontece, configurando o chamado “Paradoxo da lei de Fourier”. Para corrigir esta propriedade irrealista, uma proposta é a modificação da lei de Fourier pela lei de Maxwell-Cattaneo [11].

#### 2.1.1 LEI DE FICK

A lei de Fick, que faz parte da modelagem do problema, é uma lei quantitativa na forma de equação diferencial que descreve diversos casos de difusão de matéria ou energia em um meio, no qual inicialmente não existe equilíbrio químico ou térmico. Recebe seu nome de Adolf Eugen Fick, que a derivou em 1855.

Em situações nas quais existem gradientes de concentração de uma substância, ou de temperatura, se produz um fluxo de partículas ou de calor que tende a homogenizar a dissolução e uniformizar a concentração ou a temperatura. O fluxo homogenizador é uma consequência estatística do movimento aleatório das partículas que dá lugar ao segundo princípio da termodinâmica, conhecido também como movimento térmico casual das partículas. Assim, os processos físicos de difusão podem ser vistos como processos físicos ou termodinâmicos irreversíveis.

Este fluxo de partículas irá no sentido oposto do gradiente e, se este é débil, poderá ser aproximado pelo primeiro termo da série de Taylor, resultando a lei de Fick. Esta modelagem leva em consideração que a difusão dos predadores independem da difusão das presas, assim, considera-se ao longo deste trabalho, fluxos  $J_1$  e  $J_2$  com constantes de difusibilidade  $D_1$  e  $D_2$ , derivados (os fluxos) da lei de Fick para a presa e predador, respectivamente. Em outras palavras, o movimento aleatório devido a difusão da presa não depende da difusão do predador. Em resumo, a primeira Lei de Fick em uma dimensão [45] pode ser expressa matematicamente como

$$J_j = -D_j \frac{\partial S_j}{\partial x}, \quad (2.1)$$

onde  $J_j$  é o fluxo de populações devido à difusão de  $S_j$ , com  $S_j$  a concentração das espécies, para  $j = 1, 2$ . O sinal negativo acima indica que esse fluxo ocorre na direção contrária ao

gradiente de concentração, isto é, no sentido das concentrações altas para as concentrações baixas [45]. Para dimensões maiores ou iguais a dois a primeira Lei de Fick torna-se

$$\mathbf{J}_j = -D_j \nabla \cdot S_j. \quad (2.2)$$

### 2.1.2 EQUAÇÃO DE DIFUSÃO

Quando uma gota de tinta cai em um recipiente com água, pode-se observar que a gota de tinta começa a se dispersar em todas as direções, colorindo a água. Esse fenômeno acontece porque as moléculas da água estão em movimento e se chocam com as moléculas da gota de tinta, provocando seu deslocamento. Deste modo, diz-se que a tinta está se difundindo. Normalmente a difusão pode ser acompanhada por processos que influenciam a organização espacial das substâncias ou espécies envolvidas no processo. Em sistemas com mais de uma espécie ou substância, sob condições apropriadas, podem ocorrer reações químicas ou outras interações. Sistemas que contemplam a difusão e a interação entre as espécies são denominados sistemas de reação-difusão. As interações de natureza química de uma espécie, consigo mesma ou com outras espécies, são designadas pelo termo de reação.

De acordo com o Princípio da Conservação de Massa [21], a taxa de variação da quantidade de matéria contida em um volume  $V$  deve ser igual ao fluxo líquido da matéria através de uma superfície  $C$  que a delimita, somada à quantidade de matéria transformada no interior de  $V$  devido ao termo reativo. Matematicamente tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V S_j(t, x) dV = - \int_C (J_j(t, x, S_j) \cdot \mathbf{n}) dC + \int_V F_j(t, x, S_j) dV. \quad (2.3)$$

Na Equação (2.3), aplicada a um sistema predador-presa,  $S_j(x, t)$ , com  $j = 1, 2$  tal que se  $j = 1$  é a densidade de presas e  $j = 2$  representa a densidade da população de predadores. O vetor  $\mathbf{n}$  é o vetor normal à superfície  $C$ ,  $F_j(t, x, S)$  representa o termo de reação da presa, caso  $j = 1$  e do predador, caso  $j = 2$ . Utilizando o Teorema da Divergência na integral do termo difusivo, (2.3) torna-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V S_j dV = - \int_V \nabla \cdot J_j dV + \int_V F_j dV. \quad (2.4)$$

Pode-se reescrever a Equação (2.4) como

$$\int_V \left( \frac{\partial S_j}{\partial t} + \nabla \cdot J_j - F_j \right) dV = 0. \quad (2.5)$$

Como a Equação (2.5) independe do volume de integração  $V$ , pela equação

de continuidade, para  $S_j$ , o integrando anula-se, ou seja,

$$\frac{\partial S_j}{\partial t} + \nabla \cdot J_j - F_j = 0. \quad (2.6)$$

No caso unidimensional se tem

$$\frac{\partial S_j}{\partial t} = -\frac{\partial J_j}{\partial x} + F_j(S_j), \quad (2.7)$$

que é conhecida como Equação de Difusão - Reação [47].

### 2.1.3 MODELAGEM DA EQUAÇÃO DE MAXWELL-CATTANEO

A condução de calor induzida por um pequeno gradiente de temperatura em estados estacionários, geralmente, satisfaz a equação (2.2) onde descreve que a densidade de corrente de calor  $J$  é simplesmente proporcional ao gradiente de temperatura local instantâneo  $\nabla T$ , isto é, no unidimensional

$$J = -D\nabla T. \quad (2.8)$$

A equação (2.2) não descreve o aquecimento da condução em estados não-estacionários, porque implica uma velocidade infinita de propagação do sinal, que é fisicamente inconsistente dentro da estrutura da relatividade. Dentre várias modificações que recuperam o caráter realístico do problema tem-se a lei de Maxwell-Cattaneo descrita por

$$\left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) J = -D\nabla T, \quad (2.9)$$

onde  $\tau$  é o tempo de retardo característico, representando o tempo necessário para a corrente de calor atingir o estado estacionário. Recentemente, descobriu-se que em certas situações a Lei de Maxwell-Cattaneo também fere a segunda Lei da Termodinâmica [2].

Logo, a versão 1D da equação de Maxwell-Cattaneo para o problema em estudo, onde é conveniente substituir  $T$  por  $S_j$  em (2.9), sabendo que  $S_j = S_j(x, t)$ , com  $j = 1, 2$  é a densidade de população de presa e predador, respectivamente. Assim, tem-se então que (2.9) tem a forma final

$$\tau_j \frac{\partial J_j}{\partial t} + J_j = -D_j \frac{\partial S_j}{\partial x}, \quad (2.10)$$

onde  $\tau_j$ , com  $j = 1$  é o tempo de reação da presa quando exposta à predação, e  $j = 2$  é o tempo de reação do predador à captura da presa. Por conseguinte, derivando (2.7) com respeito à  $t$  e (2.10) com respeito à  $x$ , tem-se

$$\frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial J_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial t} F_j(S_j) \quad (2.11)$$

e

$$\tau_j \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial J_j}{\partial t} \right) + \frac{\partial J_j}{\partial x} = -D_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2}, \quad (2.12)$$

sabendo que  $F_j = F_j(S_j, x, t)$  e  $S_j = S_j(x, t)$ , então pela regra da cadeia vale

$$\frac{\partial}{\partial t} F_j(S_j) = \frac{d}{dS} F_j(S_j) \frac{\partial S_j}{\partial t}, \quad (2.13)$$

então (2.11) torna-se

$$\frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial J_j}{\partial x} \right) + \frac{d}{dS_j} F_j(S_j) \frac{\partial S_j}{\partial t}. \quad (2.14)$$

Multiplicando por  $\tau_j$  a equação (2.14),

$$\tau_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} = -\tau_j \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial J_j}{\partial x} \right) + \tau_j \frac{d}{dS_j} F_j(S_j) \frac{\partial S_j}{\partial t}, \quad (2.15)$$

isolando o termo  $-\tau_j \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial J_j}{\partial x} \right)$  em (2.15) e isolando o termo  $-\tau_j \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial J_j}{\partial t} \right)$  em (2.12), de acordo com o Teorema de Clairaut-Schwarz [52], igualando-os obtém-se

$$\tau_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} - \tau_j \frac{d}{dS_j} F_j(S_j) \frac{\partial S_j}{\partial t} = D_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2} + \frac{\partial J_j}{\partial x}, \quad (2.16)$$

onde  $j = 1, 2$ .

Por fim, isolando  $\frac{\partial J_j}{\partial x}$  em (2.7) e substituindo em (2.16), fazendo algumas manipulações, tem-se uma equação predador-presa com retardo cujas populações estão sujeitas a processos reativos - difusivos [43]

$$\tau_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} + \left[ 1 - \tau_j \frac{d}{dS_j} F_j(S_j) \right] \frac{\partial S_j}{\partial t} = D_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2} + F_j(S_j), \quad j = 1, 2. \quad (2.17)$$

A equação (2.17) também é chamada de Equação do Telégrafo, cujo nome deriva dos trabalhos originais de William Thomson (Lord Kelvin), que descrevia a propagação de um sinal elétrico através de um cabo de comprimento grande. Em seus trabalhos, a evolução da corrente elétrica  $I(x, t)$  através do cabo era descrita pela equação

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial I}{\partial t} + a_2 I = a_3 \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}, \quad (2.18)$$

onde  $a_1$  é a constante de amortecimento/viscosidade,  $a_2$  é a constante de oscilação e  $a_3$  é a velocidade quadrática de propagação da onda no meio [10]. Desde então, equações semelhantes surgiram como uma descrição útil para muitas outras situações físicas e matemáticas, especialmente na teoria dos transportes. Na sequência modela-se a dinâmica de sistemas predador-presa com retardo através de equações do tipo telégrafo na forma (2.17).

## 2.2 SISTEMA PREDADOR-PRESA

Nesta seção, mostrar-se-á uma modelagem matemática da Equação do Telégrafo com retardo, que modela o comportamento de um sistema predador-presa, com retardo, imerso em um fluido.

### 2.2.1 SISTEMA PREDADOR-PRESA CLÁSSICO

O primeiro modelo matemático elaborado para descrever a dinâmica de duas populações interagindo como um sistema predador-presa foi sugerido independentemente por Alfred Lotka (1880-1949) e Vito Volterra (1860-1940) em [39] e [55], respectivamente. O modelo de Lotka-Volterra é dado por

$$\begin{cases} \frac{dS_1}{dt} = a_1 S_1 - c_1 S_1 S_2 \\ \frac{dS_2}{dt} = -a_2 S_2 + c_2 S_1 S_2. \end{cases} \quad (2.19)$$

Reforçando os conceitos, neste sistema  $S_1 > 0$  e  $S_2 > 0$  denotam a densidade das populações da presa e do predador, respectivamente,  $a_1 > 0$  é a taxa de natalidade das presas,  $c_1 > 0$  é a taxa per capita do consumo de presas pela população de predadores,  $a_2 > 0$  é a taxa de mortalidade dos predadores na ausência das presas e  $c_2 > 0$  é a taxa de biomassa de presas que é convertida em biomassa de predadores. O modelo (2.19) tem como base as seguintes hipóteses:

- 1) na ausência de predadores, a população de presas cresce exponencialmente de acordo com a Lei de Malthus;
- 2) se não houver presas, a população de predadores decai exponencialmente até a extinção;
- 3) a quantidade total de presas consumidas pelos predadores por unidade de tempo depende linearmente da densidade populacional de ambos, predadores e presas;
- 4) a porção de biomassa de presas que é convertida em biomassa de predadores é constante;
- 5) nenhum outro fator afeta a dinâmica do sistema.

Sabe-se que a função

$$L(S_1, S_2) = c_2 S_1 - a_2 \ln S_1 + c_1 S_2 - a_1 \ln S_2, \quad (2.20)$$

é uma primitiva do sistema (2.19). Logo, esta função (2.20) é constante ao longo das soluções de (2.19) quando  $S_1, S_2 > 0$ . Em outras palavras, (2.20) é solução geral de (2.19), ver [29].

Na literatura, existem vários estudos a cerca do sistema (2.19), onde conclui-se que para qualquer população inicial dada, com  $S_1(0) > 0$  e  $S_2(0) > 0$ , as populações do predador e da presa oscilam ciclicamente, conforme a Figura 2.1

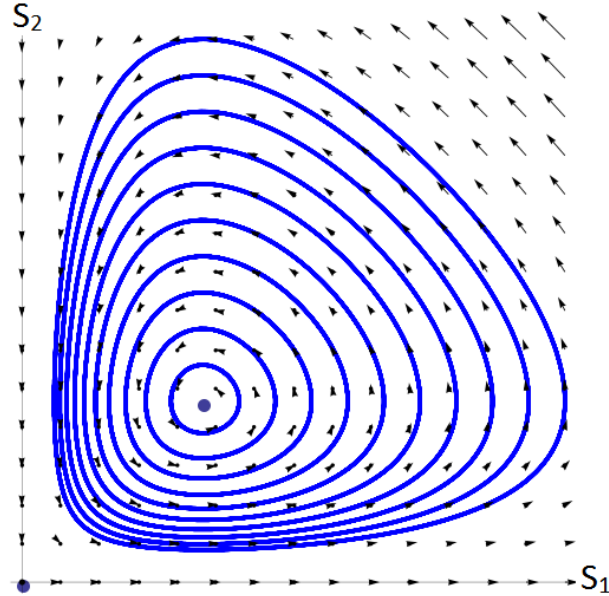


Figura 2.1: Retrato de fase do sistema (2.19).

**Fonte:** Baseado em <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Wiso>.

## 2.2.2 SISTEMA TELEGRÁFICO PREDADOR-PRESA

Suponha  $F_1$  e  $F_2$  em (2.17) como sendo as respostas funcionais baseadas nos modelos de P. Verhulst (1838), A. Lotka (1925) e V. Volterra (1926). Considera-se agora, as seguintes hipóteses:

- H1* - Existe um fluido incompressível que transporta as populações  $S_1(x, t)$  e  $S_2(x, t)$ ;
- H2* - A equação de Navier-Stokes 1D descreve o fluxo do fluido onde estão imersas as populações;
- H3* - A região de competição é limitada;
- H4* - Os termos de retardo,  $\tau_j$ ,  $j = 1, 2$ , independem um do outro;
- H5* - Os termos de difusão são desacoplados, isto é, a difusão da presa não altera a do predador e vice-versa;
- H6* - Para a equação (2.7) considera-se a contribuição da convecção, então a equação fica reescrita como

$$\frac{\partial S_j}{\partial t} = -\frac{\partial J_j}{\partial x} - \frac{\partial (S_j u)}{\partial x} + F_j(S_j). \quad (2.21)$$



Derivando (2.21) com respeito a variável  $t$ , tem-se

$$\frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial J_j}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial (S_j u)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial t} F_j(S_j). \quad (2.22)$$

Isolando e multiplicando por  $\tau_j$  o termo  $-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial J_j}{\partial x} \right)$  em (2.22) e isolando o termo  $-\tau_j \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial J_j}{\partial t} \right)$  em (2.12), assumindo o Teorema de Clairaut-Schwarz, igualando-os obtém-se

$$\tau_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} + \tau_j \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial (S_j u)}{\partial x} \right) - \tau_j \frac{d}{dS_j} F_j(S_j) \frac{\partial S_j}{\partial t} = D_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2} + \frac{\partial J_j}{\partial x}. \quad (2.23)$$

Por fim, isola-se  $\frac{\partial J_j}{\partial x}$  em (2.21), substitui em (2.23) e com algumas manipulações obtém-se a Equação do Telégrafo Difusiva - Convectiva - Reativa com retardo, que será denominada no restante do texto como equação telegráfica predador-presa,

$$\tau_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} + \tau_j \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial (S_j u)}{\partial x} \right) + \left[ 1 - \tau_j \frac{d}{dS_j} F_j(S_j) \right] \frac{\partial S_j}{\partial t} = -\frac{\partial (S_j u)}{\partial x} + D_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2} + F_j(S_j), \quad (2.24)$$

com  $j = 1, 2$ .

Portanto, considerando-se as hipóteses de que as populações de presas e predadores estão imersas em um fluido que escoar, onde o fluxo (velocidades e pressões) são descritas por equações de Navier-Stokes, então as densidades populacionais do sistema predador-presa são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uu) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \end{array} \right. \quad (2.25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (uu) - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (2.26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial x} (S_1 u) \right) + \left[ 1 - \tau_1 \frac{dF_1}{dS_1} \right] \frac{\partial S_1}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (S_1 u) + D_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} + F_1 \end{array} \right. \quad (2.27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} + \tau_2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial x} (S_2 u) \right) + \left[ 1 - \tau_2 \frac{dF_2}{dS_2} \right] \frac{\partial S_2}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (S_2 u) + D_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} + F_2, \end{array} \right. \quad (2.28)$$

onde  $t$  e  $x$  são as variáveis temporal e espacial,  $u$  é a velocidade do fluido e  $p$  a sua pressão,  $\rho$  a densidade do fluido e  $\mu$  a sua viscosidade,  $\tau_1$  e  $\tau_2$  são parâmetros de retardo das populações, enquanto  $D_1$  e  $D_2$  são seus coeficientes de difusibilidade, e por fim,  $S_1(x, t)$  e  $S_2(x, t)$  são as densidades populacionais, enquanto  $F_1$  e  $F_2$  são os termos fonte da presa e do predador, respectivamente.

### 3 DISCRETIZAÇÃO DO SISTEMA TELEGRÁFICO PREDADOR-PRESA

Neste capítulo será discutido métodos numéricos de discretização do sistema telegráfico predador-presa envolvendo as equações (2.27) - (2.28), quando considera-se as equações de Navier-Stokes desacopladas do sistema predador-presa. Nessa configuração do sistema predador-presa, a velocidade do fluido  $u$  é prescrita, ou seja, não é dado pelas equações de Navier-Stokes (2.25)-(2.26).

#### 3.1 MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS USUAIS

A ideia central do método das diferenças finitas é a discretização do domínio e a aproximação das derivadas por valores numéricos da função em questão. Na prática substitui-se as derivadas pela razão incremental, que converge para o valor da derivada, quando o incremento tende a zero.

##### 3.1.1 EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS FINITAS PARA FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL

Nesta seção, como simplificação, será tratado o problema unidimensional. A generalização para dimensões maiores ou iguais a dois pode ser obtida de maneira análoga. Considere inicialmente,  $x_0 \in \mathbb{R}$  qualquer e  $h$  um número positivo. Defini-se malha de passo  $h$  associada a  $x_0$  como o conjunto de pontos dados por

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, \dots, n.$$

Nos pontos da malha serão calculadas aproximações para uma função  $f(x)$  e suas derivadas. A ferramenta utilizada no cálculo dessas aproximações é o Teorema de Taylor [18, 48].

**Teorema 3.1.** ( *Série de Taylor para funções de uma variável* )

Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável  $n + 1$  vezes no intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  contendo  $x$ . Então, para cada  $x + h$  em  $I$  existe um número real  $\xi \in (x, x + h)$  tal que

$$f(x + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}. \quad (3.1)$$

O termo  $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}$  representa o erro da aproximação de  $f(x + h)$  pelo polinômio de grau  $n$  dado por

$$P_n(h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k. \quad (3.2)$$

Se  $n = 1$  em (3.1), tem-se uma aproximação para a derivada  $f'(x)$

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2, \quad (3.3)$$

pois isolando  $f'(x)$  em (3.3) obtem-se

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h. \quad (3.4)$$

A equação (3.4) é conhecida como fórmula de diferenças finitas progressiva de  $f(x)$  e o termo  $\frac{f''(\xi)}{2}h$  representa o erro da aproximação. Por outro lado, substituindo  $h$  por  $-h$  na equação (3.3) e isolando  $f'(x)$ , obtem-se a fórmula de diferenças finitas regressiva de  $f'(x)$  dada por

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{f''(\xi)}{2}h. \quad (3.5)$$

Se  $n = 2$  em (3.1), e considerando (3.1) para  $h$  e  $-h$ , respectivamente, obtem-se

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(\xi_1)}{3!}h^3 \quad (3.6)$$

e

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 - \frac{f'''(\xi_2)}{3!}h^3. \quad (3.7)$$

Subtraindo a equação (3.7) da equação (3.6) e isolando  $f'(x)$ , segue

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \left( \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{3!} \right) h^2. \quad (3.8)$$

Aplicando o Teorema do Valor Intermediário para funções contínuas na equação (3.8), segue que

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{f'''(\xi)}{3!}h^2, \quad (3.9)$$

com  $\xi \in [\min\{\xi_1, \xi_2\}, \max\{\xi_1, \xi_2\}]$ . A equação (3.9) é conhecida como fórmula de diferenças finitas centrada de  $f'(x)$ .

Seguindo a mesma ideia, pode-se estabelecer uma expressão para o cálculo aproximado da derivada de segunda ordem. Para isso, considere  $n = 3$  em (3.1) com  $h$  e  $-h$ , respectivamente, obtêm-se

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!}h^4 \quad (3.10)$$

e

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_2)}{4!}h^4. \quad (3.11)$$

Somando as equações (3.10) e (3.11) e isolando  $f''(x)$  segue

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{f^{(4)}(\xi)}{12}h^2. \quad (3.12)$$

A equação (3.12) é conhecida como fórmula de diferenças finitas centrada de  $f''(x)$ .

### 3.1.2 EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS FINITAS PARA FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

As fórmulas de diferenças finitas já obtidas em uma dimensão podem ser utilizadas para obter aproximações para as derivadas parciais de uma função de várias variáveis. Para ilustrar, considere o caso de duas dimensões. Assim, uma malha no plano  $(x, t)$  é dada como o conjunto de pontos  $(x_i, t_j) = (x_0 + ih, t_0 + jk)$ , ou seja, com espaçamento  $h$  em  $x$  e  $k$  em  $t$ . A fim de obter aproximações das derivadas das funções de duas variáveis, será utilizado o Teorema da Série de Taylor de duas variáveis [18, 48].

**Teorema 3.2.** ( *Série de Taylor para funções de duas variáveis* )

Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^{n+1}$  no conjunto aberto  $A \subset \mathbb{R}^2$  e  $(x, t) \in A$ . Seja  $h, k \in \mathbb{R}$  tais que  $(x + \lambda h, t + \lambda k) \in A$ , com  $\lambda \in [0, 1]$ , então existe um número real  $\xi \in (0, 1)$  tal que

$$\begin{aligned} f(x + h, t + k) &= f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)h + \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)k + \dots \\ &\dots + \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j} \partial t^j}(x, t) h^{n-j} k^j + \mathcal{O}(h, k)^{n+1}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde

$$\mathcal{O}(h, k)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} \partial t^j}(x + \xi h, t + \xi k) h^{n+1-j} k^j. \quad (3.14)$$

**Observação.** No caso onde o acréscimo ocorrer em apenas uma das variáveis, como por exemplo,  $f(x + h, t)$ , a notação do erro da aproximação de Taylor será reduzida de  $\mathcal{O}(h, k)^{n+1}$ , para simplesmente  $\mathcal{O}(h)^{n+1}$ , desde que claro a sua origem.

Assim, utilizando o Teorema 3.2 e raciocínios análogos ao de uma variável, seguem as seguintes fórmulas para aproximação das derivadas parciais de funções de duas variáveis.

- Diferenças finitas progressivas

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{f(x, t + k) - f(x, t)}{k} - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 f(x, \zeta)}{\partial t^2}; \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \frac{f(x + h, t) - f(x, t)}{h} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 f(\xi, t)}{\partial x^2}, \quad (3.16)$$

com  $t < \zeta < t + k$  e  $x < \xi < x + h$ .

- Diferenças finitas regressivas

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{f(x, t) - f(x, t - k)}{k} + \frac{k}{2} \frac{\partial^2 f(x, \zeta)}{\partial t^2}; \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \frac{f(x, t) - f(x - h, t)}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 f(\xi, t)}{\partial x^2}, \quad (3.18)$$

com  $t - k < \zeta < t$  e  $x - h < \xi < x$ .

- Diferenças finitas centradas

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{f(x, t + k) - f(x, t - k)}{2k} - \frac{k^2}{6} \frac{\partial^3 f(x, \zeta)}{\partial t^3}; \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = \frac{f(x, t + k) - 2f(x, t) + f(x, t - k)}{k^2} - \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 f(x, \zeta)}{\partial t^4}; \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \frac{f(x + h, t) - f(x - h, t)}{2h} - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 f(\xi, t)}{\partial x^3}; \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = \frac{f(x + h, t) - 2f(x, t) + f(x - h, t)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 f(\xi, t)}{\partial x^4}, \quad (3.22)$$

com  $t - k < \zeta < t + k$  e  $x - h < \xi < x + h$ . Por último,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x \partial t} &= \frac{f(x + h, t + k) - f(x + h, t - k) - f(x - h, t + k) + f(x - h, t - k)}{4hk} \\ &- \frac{h^2}{6} \frac{\partial^4 f(\xi_1, \zeta_1)}{\partial x^3 \partial t} - \frac{k^2}{6} \frac{\partial^4 f(\xi_2, \zeta_2)}{\partial x \partial t^3}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

com  $x - h < \xi_1, \xi_2 < x + h$  e  $t - k < \zeta_1, \zeta_2 < t + k$ .

Na próxima seção utilizar-se-á as fórmulas de diferenças finitas para discretizar o sistema predador-presa (2.27)-(2.28) com retardo sem efeito convectivo sujeito somente aos efeitos difusivos e reativos.

### 3.2 O SISTEMA TELEGRÁFICO PREDADOR-PRESA

Nesta seção, como mencionado anteriormente, o sistema (2.25)-(2.28) é considerado de forma desacoplada entre as equações de Navier-Stokes e o sistema predador-presa. O efeito convectivo considerado nas equações predador-presa, via a velocidade  $u$ , não será dado pelas equações (2.25) e (2.26). Nesta seção prescreve-se um campo de velocidades constantes para o escoamento convectivo do fluido.

Considere então, o sistema resultante de equações deduzido no capítulo anterior com as seguintes condições iniciais e de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial x} (S_1 u) \right) + \left[ 1 - \tau_1 \frac{dF_1}{dS_1} \right] \frac{\partial S_1}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (S_1 u) + D_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} + F_1 \quad (3.24) \\ \tau_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} + \tau_2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial x} (S_2 u) \right) + \left[ 1 - \tau_2 \frac{dF_2}{dS_2} \right] \frac{\partial S_2}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (S_2 u) + D_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} + F_2 \quad (3.25) \\ S_j(x, 0) = S_j^0, \quad \left. \frac{\partial S_j(x, t)}{\partial t} \right|_x^{t=0} = k_j, \quad \forall x \in [0, L] \text{ e } j = 1, 2 \quad (3.26) \\ S_j(0, t) = S_j(L, t) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \text{ e } j = 1, 2 \quad (3.27) \end{array} \right.$$

relembrando que  $t$  e  $x$  são as variáveis temporal e espacial, respectivamente,  $u$  é a velocidade dada do fluido,  $\tau_1$  e  $\tau_2$  são parâmetros de retardo das populações, enquanto  $D_1$  e  $D_2$  são seus coeficientes de difusibilidade, e por fim,  $S_1(x, t)$  e  $S_2(x, t)$  são as densidades populacionais, enquanto  $F_1$  e  $F_2$  são os termos fonte da presa e do predador, respectivamente.

Neste trabalho, os termos fonte serão os mesmos utilizados nos trabalhos de Verhulst (1838), Alfred J. Lotka (1925) e Vito Volterra (1926), ou seja,

$$F_1 = F_1(S_1, S_2) = a_1 S_1 - b_1 S_1^2 - c_1 S_1 S_2 \quad (3.28)$$

e

$$F_2 = F_2(S_1, S_2) = -a_2 S_2 + c_2 S_1 S_2, \quad (3.29)$$

com  $a_1$  taxa de natalidade da presa,  $b_1$  o termo de saturação da presa,  $c_1$  é a taxa de mortalidade das presas devido à predação,  $a_2$  a taxa de mortandade dos predadores na ausência de presas e  $c_2$  a taxa de biomassa de presas que é convertida em biomassa de predadores.

Considera-se para as condições iniciais na equação (3.26) que

$$S_j^0 = \begin{cases} B_j & ; A_j \leq x \leq C_j \\ 0 & ; \text{ caso contrário} \end{cases}, \quad (3.30)$$

onde  $0 \leq A_j \leq C_j \leq L$  e  $0 < B_j$ , com  $j = 1, 2$ . Por fim as condições de contorno, dadas na equação (3.27), são do tipo Dirichlet.

### 3.3 DISCRETIZAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES TELEGRÁFICAS PREDADOR-PRESA

Para discretizar as equações predador-presa, considera-se o modelo geral, isto é, será discretizado as equações (3.24) e (3.25) em sequência e a malha discreta é ilustrada na Figura 3.1 a seguir

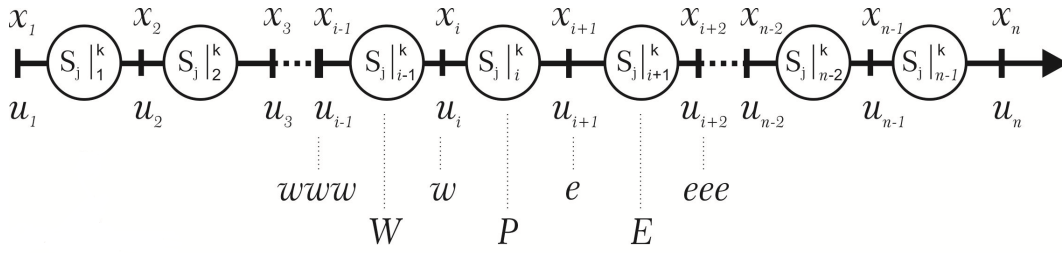


Figura 3.1: Malha discreta do sistema acoplado.

**Fonte:** Autor.

Note que a notação usada nas discretizações neste capítulo são notações de pontos cardeais. Os rótulos  $P$ ,  $W$  e  $E$  significam centro, leste e oeste, respectivamente. As siglas em minúsculo, são variações cardeais a partir do centro da célula rotulada por  $P$ . Conforme mostra a Figura 3.1, as densidades populacionais  $S_1$  e  $S_2$  são localizadas no centro da célula e as velocidades nos nós. O armazenamento deslocado para as densidades populacionais e velocidades tem impacto positivo no cálculo numérico, devido ao fato de reduzir a instabilidade numérica [21, 23, 27].

Os métodos numéricos para discretização usados no trabalho são todos baseados na técnica de diferenças finitas descritas na Seção 3.1.2, gerando um método explícito. Desse modo, discretiza-se primeiramente os termos  $\frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial}{\partial x}(S_j u)$  e  $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x}(S_j u)\right)$ , com  $j \in \{1, 2\}$ .

Utilizando diferenças finitas centrais no tempo para a derivada  $\frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2}$ , segue que

$$\left(\frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2}\right)\Big|_P^k \approx \frac{1}{(\Delta t)^2} (S_j|_P^{k+1} - 2S_j|_P^k + S_j|_P^{k-1}). \quad (3.31)$$

Utilizando diferenças finitas centrais no espaço para a derivada  $\frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2}$ , segue que

$$\left(\frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2}\right)\Big|_P^k \approx \frac{1}{(\Delta x)^2} (S_j|_E^k - 2S_j|_P^k + S_j|_W^k). \quad (3.32)$$

Por outro lado, utiliza-se diferenças finitas regressivas no espaço para a derivada  $\frac{\partial}{\partial x}(S_j u)$ , logo

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}(S_j u)\right)\Big|_P^k \approx \frac{1}{2\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} (S_j|_e^k u|_e^k - S_j|_w^k u|_w^k). \quad (3.33)$$

Note que em na metodologia usada, veja Figura 3.1, os valores das quanti-

dades escalares, por exemplo os valores de  $S_j$ , são conhecidos nos pontos centrais da malha, enquanto os valores das quantidades vetoriais, por exemplo os valores da velocidade  $u$  do escoamento do fluido, são conhecidos nos pontos da malha. Portanto não se tem os valores de  $S_j|_e^k$  e  $S_j|_w^k$ , pois a população deve ser calculada em  $|_E^k$  e  $|_W^k$ . Assim sendo no caso em que considera-se a contribuição do efeito convectivo nas equações, utilizar-se-á o método *First Order Upwind* (FOU) [21] para calcular uma aproximação para tais valores, ou seja, considera-se que

$$S_j|_e^k \approx \left( \frac{1 + A|_e^k}{2} \right) S_j|_P^k + \left( \frac{1 - A|_e^k}{2} \right) S_j|_E^k \quad (3.34)$$

e

$$S_j|_w^k \approx \left( \frac{1 + A|_w^k}{2} \right) S_j|_W^k + \left( \frac{1 - A|_w^k}{2} \right) S_j|_P^k, \quad (3.35)$$

onde  $A|_e^k$  e  $A|_w^k$  são dados respectivamente por

$$A|_e^k = \begin{cases} 1 & ; u|_e^k \geq 0 \\ -1 & ; u|_e^k < 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

e

$$A|_w^k = \begin{cases} 1 & ; u|_w^k \geq 0 \\ -1 & ; u|_w^k < 0. \end{cases} \quad (3.37)$$

Note que se  $u|_e^k \geq 0$  e  $u|_w^k \geq 0$ , então  $A|_e^k = 1 = A|_w^k$ , logo  $S_j|_e^k = S_j|_P^k$  e  $S_j|_w^k = S_j|_W^k$ . Assim substituindo as equações (3.34) e (3.35) na equação (3.33) obtém-se

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x}(S_j u) \right) \Big|_P^k &\approx \frac{1}{\Delta x} \left[ \left( \left( \frac{1 + A|_e^k}{2} \right) S_j|_P^k + \left( \frac{1 - A|_e^k}{2} \right) S_j|_E^k \right) u|_e^k \right. \\ &\quad \left. - \left( \left( \frac{1 + A|_w^k}{2} \right) S_j|_W^k + \left( \frac{1 - A|_w^k}{2} \right) S_j|_P^k \right) u|_w^k \right] \\ &\approx \frac{1}{\Delta x} \left[ \left( \frac{1 - A|_e^k}{2} \right) u|_e^k S_j|_E^k - \left( \frac{1 + A|_w^k}{2} \right) u|_w^k S_j|_W^k \right. \\ &\quad \left. + \left( \left( \frac{1 + A|_e^k}{2} \right) u|_e^k - \left( \frac{1 - A|_w^k}{2} \right) u|_w^k \right) S_j|_P^k \right]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Com o objetivo de simplificar a notação, considera-se

$$\delta|_e^k = \left( \frac{1 + A|_e^k}{2} \right) u|_e^k \quad (3.39)$$

e



$$\bar{\delta}|_e^k = \left( \frac{1 - A|_e^k}{2} \right) u|_e^k, \quad (3.40)$$

de modo que temos que a equação (3.38) torna-se

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} (S_j u) \right) \Big|_P^k \approx \frac{1}{\Delta x} \left[ \bar{\delta}|_e^k S_j|_E^k + (\delta|_e^k - \bar{\delta}|_w^k) S_j|_P^k - \delta|_w^k S_j|_W^k \right]. \quad (3.41)$$

Agora, para o termo  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial x} (S_j u) \right)$  aplica-se diferenças finitas regressivas no tempo e no espaço, assim tem-se que

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial x} (S_j u) \right) \right) \Big|_P^k \approx \frac{1}{\Delta t} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} (S_j u) \right) \Big|_P^k - \left( \frac{\partial}{\partial x} (S_j u) \right) \Big|_P^{k-1} \right). \quad (3.42)$$

Utilizando o resultado obtido na equação (3.41), temos que

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} (S_j u) \right) \Big|_P^{k-1} \approx \frac{1}{\Delta x} \left[ \bar{\delta}|_e^{k-1} S_j|_E^{k-1} + (\delta|_e^{k-1} - \bar{\delta}|_w^{k-1}) S_j|_P^{k-1} - \delta|_w^{k-1} S_j|_W^{k-1} \right]. \quad (3.43)$$

Assim das equações (3.41) e (3.43) tem-se que (3.42) torna-se

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial x} (S_j u) \right) \right) \Big|_P^k &\approx \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{1}{\Delta x} \left( \bar{\delta}|_e^k S_j|_E^k + (\delta|_e^k - \bar{\delta}|_w^k) S_j|_P^k - \delta|_w^k S_j|_W^k \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Delta x} \left( \bar{\delta}|_e^{k-1} S_j|_E^{k-1} + (\delta|_e^{k-1} - \bar{\delta}|_w^{k-1}) S_j|_P^{k-1} - \delta|_w^{k-1} S_j|_W^{k-1} \right) \right] \\ &\approx \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \left[ \bar{\delta}|_e^k S_j|_E^k + (\delta|_e^k - \bar{\delta}|_w^k) S_j|_P^k - \delta|_w^k S_j|_W^k \right. \\ &\quad \left. - \bar{\delta}|_e^{k-1} S_j|_E^{k-1} - (\delta|_e^{k-1} - \bar{\delta}|_w^{k-1}) S_j|_P^{k-1} + \delta|_w^{k-1} S_j|_W^{k-1} \right]. \quad (3.44) \end{aligned}$$

Por fim, tem-se por diferenças finitas regressivas no tempo, que

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} S_j \right) \Big|_P^k \approx \frac{1}{\Delta t} \left( S_j|_P^k - S_j|_P^{k-1} \right). \quad (3.45)$$

### 3.3.1 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DA PRESA

Afim de discretizar a equação (3.24), resta discretizar o termo  $\left[ 1 - \tau_1 \frac{\partial}{\partial S_1} F_1 (S_1, S_2) \right] \frac{\partial S_1}{\partial t}$ .

Com efeito, tem-se que

$$\left( \left[ 1 - \tau_1 \frac{\partial}{\partial S_1} F_1(S_1, S_2) \right] \frac{\partial S_1}{\partial t} \right) \Big|_P^k = \left( \frac{\partial S_1}{\partial t} \right) \Big|_P^k - \tau_1 \left( \frac{\partial}{\partial S_1} F_1(S_1, S_2) \frac{\partial S_1}{\partial t} \right) \Big|_P^k. \quad (3.46)$$

Observe que

$$\left( \frac{\partial}{\partial S_1} F_1(S_1, S_2) \frac{\partial S_1}{\partial t} \right) \Big|_P^k = \left( \frac{\partial}{\partial S_1} F_1(S_1, S_2) \right) \Big|_P^k \left( \frac{\partial S_1}{\partial t} \right) \Big|_P^k. \quad (3.47)$$

A partir de (3.28), usando regras de derivação temos que

$$\left( \frac{\partial}{\partial S_1} F_1(S_1, S_2) \right) \Big|_P^k = a_1 - 2b_1 S_1|_P^k - c_1 S_2|_P^k. \quad (3.48)$$

Fazendo uso das equações (3.48) e (3.45) na equação (3.47), segue que

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial S_1} F_1(S_1, S_2) \frac{\partial S_1}{\partial t} \right) \Big|_P^k &\approx \left( a_1 - 2b_1 S_1|_P^k - c_1 S_2|_P^k \right) \left( \frac{1}{\Delta t} \left( S_1|_P^k - S_1|_P^{k-1} \right) \right) \\ &\approx \frac{1}{\Delta t} \left( a_1 - 2b_1 S_1|_P^k - c_1 S_2|_P^k \right) \left( S_1|_P^k - S_1|_P^{k-1} \right) \\ &\approx \frac{1}{\Delta t} \left( a_1 S_1|_P^k - 2b_1 S_1^2|_P^k - c_1 S_1|_P^k S_2|_P^k \right. \\ &\quad \left. - a_1 S_1|_P^{k-1} + 2b_1 S_1|_P^{k-1} S_1|_P^k + c_1 S_1|_P^{k-1} S_2|_P^k \right). \quad (3.49) \end{aligned}$$

Substituindo a equação (3.49) em (3.46) segue que

$$\begin{aligned} \left( \left[ 1 - \tau_1 \frac{\partial}{\partial S_1} F_1(S_1, S_2) \right] \frac{\partial S_1}{\partial t} \right) \Big|_P^k &\approx \frac{1}{\Delta t} \left( S_1|_P^k - S_1|_P^{k-1} \right) - \frac{\tau_1}{\Delta t} \left[ a_1 S_1|_P^k - 2b_1 S_1^2|_P^k - c_1 S_1|_P^k S_2|_P^k \right. \\ &\quad \left. - a_1 S_1|_P^{k-1} + 2b_1 S_1|_P^{k-1} S_1|_P^k + c_1 S_1|_P^{k-1} S_2|_P^k \right] \\ &\approx \frac{1}{\Delta t} \left[ \left( 1 - \tau_1 \left( a_1 - c_1 S_2|_P^k - 2b_1 S_1|_P^k \right) \right) S_1|_P^k \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 - \tau_1 \left( a_1 - c_1 S_2|_P^k - 2b_1 S_1|_P^k \right) \right) S_1|_P^{k-1} \right]. \quad (3.50) \end{aligned}$$

Substituindo as equações (3.31), (3.32), (3.41), (3.44) e (3.50) na equação (3.24) e isolando o termo  $S_1|_P^{k+1}$ , segue que a discretização da equação da presa é dada por

$$S_1|_P^{k+1} = \Omega_1 \left( \Upsilon_1 S_1|_W^k + \Pi_1 S_1^2|_P^k + \Phi_1 S_1|_P^k + \Lambda_1 S_1|_E^k + \Gamma_1 \right), \quad (3.51)$$

onde

$$\Upsilon_1 = -\frac{\delta|_w^k}{\Delta x} - \frac{\tau_1 \delta|_w^k}{\Delta t \Delta x} - \frac{D_1}{\Delta x^2} \quad (3.52)$$

$$\Pi_1 = \frac{2\tau_1 b_1}{\Delta t} + b_1 \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{\tau_1 (\delta|_e^k - \bar{\delta}|_w^k)}{\Delta t \Delta x} - \frac{2\tau_1}{\Delta t^2} + \frac{1 - \tau_1 (a_1 - c_1 S_2|_P^k + 2b_1 S_1|_P^{k-1})}{\Delta t} \\ &+ \frac{2D_1}{\Delta x^2} + \frac{(\delta|_e^k - \bar{\delta}|_w^k)}{\Delta x} - a_1 + c_1 S_2|_P^k \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\Lambda_1 = \frac{\tau_1 \bar{\delta}|_e^k}{\Delta t \Delta x} - \frac{D_1}{\Delta x^2} + \frac{\bar{\delta}|_e^k}{\Delta x} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{\tau_1 S_1|_P^{k-1}}{\Delta t^2} - \frac{(1 - \tau_1 (a_1 - c_1 S_2|_P^k)) S_1|_P^{k-1}}{\Delta t} \\ &+ \frac{\tau_1 (-\bar{\delta}|_e^{k-1} S_1|_E^{k-1} - (\delta|_e^{k-1} - \bar{\delta}|_w^{k-1}) S_1|_P^{k-1} + \delta|_w^{k-1} S_1|_W^{k-1})}{\Delta t \Delta x} \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\Omega_1 = -\frac{\Delta t^2}{\tau_1}. \quad (3.57)$$

Observe que a fórmula (3.51) obtida para a discretização da equação da presa é explícita, uma vez que o passo de tempo  $k$  é conhecido.

### 3.3.2 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DO PREDADOR

Afim de discretizarmos a equação do predador (3.25), resta discretizar o termo  $\left[1 - \tau_2 \frac{\partial}{\partial S_2} F_2(S_1, S_2)\right] \frac{\partial S_2}{\partial t}$ . Com efeito, temos que

$$\left(\left[1 - \tau_2 \frac{\partial}{\partial S_2} F_2(S_1, S_2)\right] \frac{\partial S_2}{\partial t}\right)\Bigg|_P^k = \left(\frac{\partial S_2}{\partial t}\right)\Bigg|_P^k - \tau_2 \left(\frac{\partial}{\partial S_2} F_2(S_1, S_2) \frac{\partial S_2}{\partial t}\right)\Bigg|_P^k. \quad (3.58)$$

Note que

$$\left( \frac{\partial}{\partial S_2} F_2(S_1, S_2) \frac{\partial S_2}{\partial t} \right) \Big|_P^k = \left( \frac{\partial}{\partial S_2} F_2(S_1, S_2) \right) \Big|_P^k \left( \frac{\partial S_2}{\partial t} \right) \Big|_P^k. \quad (3.59)$$

A partir de (3.29), usando regras de derivação temos que

$$\left( \frac{\partial}{\partial S_2} F_2(S_1, S_2) \right) \Big|_P^k = -a_2 + c_2 S_1 \Big|_P^k. \quad (3.60)$$

Fazendo uso das equações (3.60) e (3.45) na equação (3.59), temos que

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial S_2} F_2(S_1, S_2) \frac{\partial S_2}{\partial t} \right) \Big|_P^k &\approx \left( -a_2 + c_2 S_1 \Big|_P^k \right) \left( \frac{1}{\Delta t} \left( S_2 \Big|_P^k - S_2 \Big|_P^{k-1} \right) \right) \\ &\approx \frac{1}{\Delta t} \left( -a_2 + c_2 S_1 \Big|_P^k \right) \left( S_2 \Big|_P^k - S_2 \Big|_P^{k-1} \right). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Substituindo a equação (3.61) em (3.58) segue que

$$\begin{aligned} \left( \left[ 1 - \tau_2 \frac{\partial}{\partial S_2} F_2(S_1, S_2) \right] \frac{\partial S_2}{\partial t} \right) \Big|_P^k &\approx \frac{1}{\Delta t} \left( S_2 \Big|_P^k - S_2 \Big|_P^{k-1} \right) - \frac{\tau_2}{\Delta t} \left[ \left( -a_2 + c_2 S_1 \Big|_P^k \right) S_2 \Big|_P^k \right. \\ &\quad \left. - \left( -a_2 + c_2 S_1 \Big|_P^k \right) S_2 \Big|_P^{k-1} \right] \\ &\approx \frac{1}{\Delta t} \left[ \left( 1 - \tau_2 \left( -a_2 + c_2 S_1 \Big|_P^k \right) \right) S_2 \Big|_P^k \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 - \tau_2 \left( -a_2 + c_2 S_1 \Big|_P^k \right) \right) S_2 \Big|_P^{k-1} \right]. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Substituindo as equações (3.31), (3.32), (3.41), (3.44) e (3.62) na equação (3.25) e isolando o termo  $S_2 \Big|_P^{k+1}$  segue que a discretização da equação do predador é dada por

$$S_2 \Big|_P^{k+1} = \Omega_2 \left( \Upsilon_2 S_2 \Big|_W^k + \Phi_2 S_2 \Big|_P^k + \Lambda_2 S_2 \Big|_E^k + \Gamma_2 \right), \quad (3.63)$$

onde

$$\Upsilon_2 = -\frac{\tau_2 \delta \Big|_w^k}{\Delta t \Delta x} - \frac{D_2}{\Delta x^2} - \frac{\delta \Big|_w^k}{\Delta x} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= -\frac{2\tau_2}{\Delta t^2} + \frac{2D_2}{\Delta x^2} + \frac{\tau_2 (\delta \Big|_e^k - \bar{\delta} \Big|_w^k)}{\Delta t \Delta x} + \frac{1 - \tau_2 (-a_2 + c_2 S_1 \Big|_P^k)}{\Delta t} \\ &\quad + \frac{\delta \Big|_e^k - \bar{\delta} \Big|_w^k}{\Delta x} + a_2 - c_2 S_1 \Big|_P^k \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\Lambda_2 = \frac{\bar{\delta}|_e^k}{\Delta x} + \frac{\tau_2 \bar{\delta}|_e^k}{\Delta t \Delta x} - \frac{D_2}{\Delta x^2} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \frac{\tau_2 S_2|_P^{k-1}}{\Delta t^2} - \frac{(1 - \tau_2(-a_2 + c_2 S_1|_P^k)) S_2|_P^{k-1}}{\Delta t} \\ &+ \frac{\tau_2 (\delta|_w^{k-1} S_2|_W^{k-1} - \bar{\delta}|_e^{k-1} S_2|_E^{k-1} - (\delta|_e^{k-1} - \bar{\delta}|_w^{k-1}) S_2|_P^{k-1})}{\Delta t \Delta x} \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\Omega_2 = -\frac{\Delta t^2}{\tau_2}. \quad (3.68)$$

Utilizando-se do mesmo argumento anterior, a fórmula (3.63) obtida para a discretização da equação do predador é explícita.

## 4 CONSISTÊNCIA

A solução numérica de um problema nem sempre aproxima-se da solução exata. A propriedade que diz que a equação discretizada de um problema se aproxima da equação diferencial original, fazendo com o que a solução numérica tenha relação com a solução real do problema é a consistência, que é imposta à equação de diferenças, prendendo-a à equação diferencial. Inversamente, a solução do problema contínuo não é, em geral, solução da equação de diferenças e o erro cometido ao substituirmos a solução exata na equação de diferenças é chamada de Erro de Truncamento Local (ETL) [18].

Em alguns casos, não se conhece a solução exata, então pode-se estimar o Erro de Truncamento Local através de Séries de Taylor [9] e usar esta estimativa para provar que o método é consistente ao substituir a expansão em Série de Taylor na equação de diferenças finitas e considerar  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ . Se o ETL tender a zero, restando somente a EDP aplicada em um ponto conhecido da malha, a discretização é dita consistente com a EDP.

Neste capítulo serão feitas as análises da consistência das discretizações das equações que se encontram no Capítulo 3, sem efeito convectivo.

Primeiramente será analisada a consistência das discretizações de (3.24) - (3.25) quando  $F_1 \equiv F_2 \neq 0$ ,  $\tau_1 = \tau_2 = 0$  e  $u \equiv 0$ , e em seguida,  $F_1 \equiv F_2 \equiv 0$ ,  $\tau_1 \neq 0$ ,  $\tau_2 \neq 0$  e  $u \equiv 0$ . Enfim, será considerado  $F_1 \equiv F_2 \neq 0$ ,  $\tau_1 \neq 0$ ,  $\tau_2 \neq 0$  e  $u = 0$ .

### 4.1 CONSISTÊNCIA DO MÉTODO EXPLÍCITO APLICADO À UMA EQUAÇÃO PREDADOR-PRESA COM TERMO FONTE

Inicialmente, desconsidera-se o retardo nas equações (3.24) e (3.25), restando apenas as seguintes equações

$$\begin{cases} \frac{\partial S_1}{\partial t} - D_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} - a_1 S_1 + b_1 S_1^2 + c_1 S_1 S_2 = 0 & (4.1) \\ \frac{\partial S_2}{\partial t} - D_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} + a_2 S_1 - c_2 S_1 S_2 = 0. & (4.2) \end{cases}$$

Para discretizar as equações (4.1) e (4.2) de tal forma que as equações de diferenças obtidas estejam na forma explícita, basta considerar diferenças finitas progressivas no tempo na derivada temporal de primeira ordem e diferenças finitas centradas no espaço na derivada espacial de segunda ordem. Deste modo, as equações discretizadas do sistema (4.1)-(4.2) se tornam

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left( S_1 \Big|_P^{k+1} - S_1 \Big|_P^k \right) - \frac{D_1}{\Delta x^2} \left( S_1 \Big|_E^k - 2S_1 \Big|_P^k + S_1 \Big|_W^k \right) \\ - a_1 S_1 \Big|_P^k + b_1 S_1^2 \Big|_P^k + c_1 S_1 \Big|_P^k S_2 \Big|_P^k = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

e

$$\frac{1}{\Delta t} \left( S_2 \Big|_P^{k+1} - S_2 \Big|_P^k \right) - \frac{D_1}{\Delta x^2} \left( S_2 \Big|_E^k - 2S_2 \Big|_P^k + S_2 \Big|_W^k \right) + a_2 S_2 \Big|_P^k - c_2 S_1 \Big|_P^k S_2 \Big|_P^k = 0. \quad (4.4)$$

Primeiramente será analisada a consistência da equação (4.3). Aplicando a Série de Taylor nos termos  $S_1 \Big|_P^{k+1}$ ,  $S_1 \Big|_W^k$  e  $S_1 \Big|_E^k$ , e levando em consideração que  $W = P - \Delta x$  e  $E = P + \Delta x$ , tem-se que

$$S_1 \Big|_P^{k+1} = S_1 \Big|_P^k + \Delta t \frac{\partial S_1}{\partial t} \Big|_P^k + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} \Big|_P^k + \mathcal{O}(\Delta t^3), \quad (4.5)$$

$$S_1 \Big|_W^k = S_1 \Big|_P^k - \Delta x \frac{\partial S_1}{\partial x} \Big|_P^k + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} \Big|_P^k - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 S_1}{\partial x^3} \Big|_P^k + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (4.6)$$

e

$$S_1 \Big|_E^k = S_1 \Big|_P^k + \Delta x \frac{\partial S_1}{\partial x} \Big|_P^k + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} \Big|_P^k + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 S_1}{\partial x^3} \Big|_P^k + \mathcal{O}(\Delta x^4). \quad (4.7)$$

Substituindo as equações (4.5), (4.6) e (4.7) na equação (4.3) e fazendo algumas manipulações algébricas e simplificações, resulta que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left( \Delta t \frac{\partial S_1}{\partial t} \Big|_P^k + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} \Big|_P^k + \mathcal{O}(\Delta t^3) \right) - \frac{D_1}{\Delta x^2} \left( \Delta x^2 \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} \Big|_P^k + 2\mathcal{O}(\Delta x^4) \right) \\ - a_1 S_1 \Big|_P^k + b_1 S_1^2 \Big|_P^k + c_1 S_1 \Big|_P^k S_2 \Big|_P^k = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Reordenando os termos de (4.8) e como

$$F_1 \Big|_P^k = a_1 S_1 \Big|_P^k - b_1 S_1^2 \Big|_P^k - c_1 S_1 \Big|_P^k S_2 \Big|_P^k, \quad (4.9)$$

tem-se que a equação (4.8) torna-se

$$\underbrace{\left. \frac{\partial S_1}{\partial t} \Big|_P^k - D_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} \Big|_P^k - F_1 \Big|_P^k \right)}_{\text{EDP}} = \underbrace{\left. -\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} \Big|_P^k - \mathcal{O}(\Delta t^2) + 2D_1 \mathcal{O}(\Delta x^2) \right)}_{\text{Erro de Truncamento Local}}. \quad (4.10)$$

Quando  $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ , o ETL da equação (4.10) tende a zero, resultando

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} \Big|_P^k - D_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} \Big|_P^k - F_1 \Big|_P^k = 0. \quad (4.11)$$

Logo, a discretização (4.3) é consistente com a EDP (4.1).

Do mesmo modo, para a análise da consistência de (4.4), aplica-se a expansão em série de Taylor nos termos  $S_2 \Big|_P^{k+1}$ ,  $S_2 \Big|_W^k$  e  $S_2 \Big|_E^k$ , lembrando que  $W = P - \Delta x$  e  $E = P + \Delta x$ , tem-se que

$$S_2 \Big|_P^{k+1} = S_2 \Big|_P^k + \Delta t \frac{\partial S_2}{\partial t} \Big|_P^k + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} \Big|_P^k + \mathcal{O}(\Delta t^3), \quad (4.12)$$

$$S_2 \Big|_W^k = S_2 \Big|_P^k - \Delta x \frac{\partial S_2}{\partial x} \Big|_P^k + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} \Big|_P^k - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 S_2}{\partial x^3} \Big|_P^k + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (4.13)$$

e

$$S_2 \Big|_E^k = S_2 \Big|_P^k + \Delta x \frac{\partial S_2}{\partial x} \Big|_P^k + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} \Big|_P^k + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 S_2}{\partial x^3} \Big|_P^k + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (4.14)$$

Substituindo as equações (4.12), (4.13) e (4.14) na equação (4.4) e depois de manipulações algébricas e simplificações, segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left( \Delta t \frac{\partial S_2}{\partial t} \Big|_P^k + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} \Big|_P^k + \mathcal{O}(\Delta t^3) \right) - \frac{D_2}{\Delta x^2} \left( \Delta x^2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} \Big|_P^k + 2\mathcal{O}(\Delta x^4) \right) \\ + a_2 S_2 \Big|_P^k - c_2 S_1 \Big|_P^k S_2 \Big|_P^k = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Reordenando os termos de (4.15) e como

$$F_2 \Big|_P^k = -a_2 S_2 \Big|_P^k + c_2 S_1 \Big|_P^k S_2 \Big|_P^k, \quad (4.16)$$

tem-se que a equação (4.15) torna-se

$$\underbrace{\left. \frac{\partial S_2}{\partial t} \Big|_P^k - D_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} \Big|_P^k - F_2 \Big|_P^k \right)}_{\text{EDP}} = \underbrace{\left. -\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} \Big|_P^k - \mathcal{O}(\Delta t^2) + 2D_2 \mathcal{O}(\Delta x^2) \right)}_{\text{Erro de Truncamento Local}}. \quad (4.17)$$



Quando  $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ , o ETL da equação (4.17) tende a zero, resultando

$$\left. \frac{\partial S_2}{\partial t} \right|_P^k - D_2 \left. \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} \right|_P^k - F_2 \Big|_P^k = 0. \quad (4.18)$$

Logo, a discretização (4.4) é consistente com a EDP (4.2).

## 4.2 CONSISTÊNCIA DO MÉTODO EXPLÍCITO APLICADO À UMA EQUAÇÃO TELEGRÁFICA

Nesta seção, desconsidera-se os termos reativos nas equações (3.24) e (3.25), restando apenas as seguintes equações

$$\tau_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} + \frac{\partial S_j}{\partial t} = D_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2}, \quad \text{com } j = 1, 2. \quad (4.19)$$

Para discretizar a equação (4.19), usa-se os mesmos métodos de diferenças finitas das equações do Capítulo 3, resultando diretamente em um método explícito, isto é, considera-se diferenças finitas regressivas no tempo para a derivada temporal de primeira ordem e centradas no tempo e no espaço para as derivadas temporais e espaciais de segunda ordem, respectivamente. Assim, as equações discretizadas têm a forma

$$\begin{aligned} \frac{\tau_j}{\Delta t^2} \left( S_j \Big|_P^{k+1} - 2S_j \Big|_P^k + S_j \Big|_P^{k-1} \right) + \frac{1}{\Delta t} \left( S_j \Big|_P^k - S_j \Big|_P^{k-1} \right) \\ - \frac{D_j}{\Delta x^2} \left( S_j \Big|_E^k - 2S_j \Big|_P^k + S_j \Big|_W^k \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Neste caso, aplica-se a Série de Taylor nos termos  $S_j \Big|_P^{k+1}$ ,  $S_j \Big|_P^{k-1}$ ,  $S_j \Big|_W^k$  e  $S_j \Big|_E^k$ , e levando em consideração que  $W = P - \Delta x$  e  $E = P + \Delta x$ , tem-se que

$$S_j \Big|_P^{k+1} = S_j \Big|_P^k + \Delta t \frac{\partial S_j}{\partial t} \Big|_P^k + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} \Big|_P^k + \frac{(\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 S_j}{\partial t^3} \Big|_P^k + \mathcal{O}(\Delta t^4), \quad (4.21)$$

$$S_j \Big|_P^{k-1} = S_j \Big|_P^k - \Delta t \frac{\partial S_j}{\partial t} \Big|_P^k + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} \Big|_P^k - \frac{(\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 S_j}{\partial t^3} \Big|_P^k + \mathcal{O}(\Delta t^4), \quad (4.22)$$

$$S_j \Big|_W^k = S_j \Big|_P^k - \Delta x \frac{\partial S_j}{\partial x} \Big|_P^k + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2} \Big|_P^k - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 S_j}{\partial x^3} \Big|_P^k + \mathcal{O}(\Delta x^4), \quad (4.23)$$

$$S_j \Big|_E^k = S_j \Big|_P^k + \Delta x \frac{\partial S_j}{\partial x} \Big|_P^k + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2} \Big|_P^k + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 S_j}{\partial x^3} \Big|_P^k + \mathcal{O}(\Delta x^4). \quad (4.24)$$

Substituindo as equações (4.21), (4.22), (4.23) e (4.24) na equação (4.20) e depois de manipulações algébricas e simplificações, resulta

$$\begin{aligned} \frac{\tau_j}{\Delta t^2} \left( \Delta t^2 \frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} \Big|_P^k + 2\mathcal{O}(\Delta t^4) \right) + \frac{1}{\Delta t} \left( \Delta t \frac{\partial S_j}{\partial t} \Big|_P^k - \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} \Big|_P^k + \frac{(\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 S_j}{\partial t^3} \Big|_P^k - \mathcal{O}(\Delta t^4) \right) \\ - \frac{D_j}{\Delta x^2} \left( \Delta x^2 \frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2} \Big|_P^k + 2\mathcal{O}(\Delta x^4) \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Reorganizando os termos de (4.25), obtém-se

$$\underbrace{\tau_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} \Big|_P^k + \frac{\partial S_j}{\partial t} \Big|_P^k - D_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2} \Big|_P^k}_{\text{EDP}} = \underbrace{\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} \Big|_P^k - \frac{(\Delta t)^2}{3!} \frac{\partial^3 S_j}{\partial t^3} \Big|_P^k}_{\text{Erro de Truncamento Local}} - \underbrace{2\tau_j \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta t^3) + 2D_j \mathcal{O}(\Delta x^2)}_{\text{Erro de Truncamento Local}}. \quad (4.26)$$

Quando  $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ , o ETL da equação (4.26) tende a zero, resultando

$$\tau_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} \Big|_P^k + \frac{\partial S_j}{\partial t} \Big|_P^k - D_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2} \Big|_P^k = 0. \quad (4.27)$$

Portanto, a discretização (4.20) é consistente com a EDP (4.19).

### 4.3 CONSISTÊNCIA DO MÉTODO EXPLÍCITO PARA UM SISTEMA TELEGRÁFICO PREDADOR-PRESA

Nesta seção será analisada a discretização via esquema explícito das equações (3.24) e (3.25) sem efeito convectivo. As equações são

$$\begin{cases} \tau_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} + \left[ 1 - \tau_1 \frac{dF_1}{dS_1} \right] \frac{\partial S_1}{\partial t} - D_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} - F_1 = 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

$$\begin{cases} \tau_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} + \left[ 1 - \tau_2 \frac{dF_2}{dS_2} \right] \frac{\partial S_2}{\partial t} - D_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} - F_2 = 0, \end{cases} \quad (4.29)$$

lembrando que  $F_1$  e  $F_2$  são os termos fonte da presa e do predador, respectivamente. Nas discretizações do sistema (4.28) e (4.29), novamente usa-se os mesmos métodos de diferenças do Capítulo 3, assim, o método explícito para o sistema (4.28)-(4.29) surgirá naturalmente. Logo, obtém-se as seguintes equações de diferenças

$$\begin{aligned}
& \frac{\tau_1}{\Delta t^2} \left( S_1 \Big|_P^{k+1} - 2S_1 \Big|_P^k + S_1 \Big|_P^{k-1} \right) + \frac{1}{\Delta t} \left[ \left( 1 - \tau_1 \left( a_1 - c_1 S_2 \Big|_P^k - 2b_1 S_1 \Big|_P^k \right) \right) S_1 \Big|_P^k \right. \\
& - \left. \left( 1 - \tau_1 \left( a_1 - c_1 S_2 \Big|_P^k - 2b_1 S_1 \Big|_P^k \right) \right) S_1 \Big|_P^{k-1} \right] - \frac{D_1}{\Delta x^2} \left( S_1 \Big|_E^k - 2S_1 \Big|_P^k + S_1 \Big|_W^k \right) \\
& - F_1 \Big|_P^k = 0
\end{aligned} \tag{4.30}$$

e

$$\begin{aligned}
& \frac{\tau_2}{\Delta t^2} \left( S_2 \Big|_P^{k+1} - 2S_2 \Big|_P^k + S_2 \Big|_P^{k-1} \right) + \frac{1}{\Delta t} \left[ \left( 1 - \tau_2 \left( -a_2 + c_2 S_1 \Big|_P^k \right) \right) S_2 \Big|_P^k \right. \\
& - \left. \left( 1 - \tau_2 \left( -a_2 + c_2 S_1 \Big|_P^k \right) \right) S_2 \Big|_P^{k-1} \right] - \frac{D_2}{\Delta x^2} \left( S_2 \Big|_E^k - 2S_2 \Big|_P^k + S_2 \Big|_W^k \right) \\
& - F_2 \Big|_P^k = 0.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

O próximo passo é aplicar a Série de Taylor nos termos  $S_j \Big|_P^{k+1}$ ,  $S_j \Big|_P^{k-1}$ ,  $S_j \Big|_W^k$  e  $S_j \Big|_E^k$ , para  $j = 1, 2$ , levando em consideração que  $W = P - \Delta x$  e  $E = P + \Delta x$ . Assim, tem-se que

$$S_j \Big|_P^{k+1} = S_j \Big|_P^k + \Delta t \frac{\partial S_j}{\partial t} \Big|_P^k + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} \Big|_P^k + \frac{(\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 S_j}{\partial t^3} \Big|_P^k + \mathcal{O}(\Delta t^4), \tag{4.32}$$

$$S_j \Big|_P^{k-1} = S_j \Big|_P^k - \Delta t \frac{\partial S_j}{\partial t} \Big|_P^k + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} \Big|_P^k - \frac{(\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 S_j}{\partial t^3} \Big|_P^k + \mathcal{O}(\Delta t^4), \tag{4.33}$$

$$S_j \Big|_W^k = S_j \Big|_P^k - \Delta x \frac{\partial S_j}{\partial x} \Big|_P^k + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2} \Big|_P^k - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 S_j}{\partial x^3} \Big|_P^k + \mathcal{O}(\Delta x^4), \tag{4.34}$$

$$S_j \Big|_E^k = S_j \Big|_P^k + \Delta x \frac{\partial S_j}{\partial x} \Big|_P^k + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2} \Big|_P^k + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 S_j}{\partial x^3} \Big|_P^k + \mathcal{O}(\Delta x^4). \tag{4.35}$$

Substituindo as equações (4.32), (4.33), (4.34) e (4.35) nas equações (4.30) e (4.31), com res-

pectivos  $j = 1, 2$  e depois de manipulações algébricas e simplificações, tem-se

$$\begin{aligned}
& \frac{\tau_1}{\Delta t^2} \left( \Delta t^2 \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} \Big|_P^k + 2\mathcal{O}(\Delta t^4) \right) + \left( 1 - \tau_1 \left( a_1 - c_1 S_2 \Big|_P^k - 2b_1 S_1 \Big|_P^k \right) \right) \frac{\partial S_1}{\partial t} \Big|_P^k \\
& - \frac{\Delta t}{2} \left( 1 - \tau_1 \left( a_1 - c_1 S_2 \Big|_P^k - 2b_1 S_1 \Big|_P^k \right) \right) \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} \Big|_P^k \\
& + \frac{\Delta t^2}{3!} \left( 1 - \tau_1 \left( a_1 - c_1 S_2 \Big|_P^k - 2b_1 S_1 \Big|_P^k \right) \right) \frac{\partial^3 S_1}{\partial t^3} \Big|_P^k \\
& - \left( 1 - \tau_1 \left( a_1 - c_1 S_2 \Big|_P^k - 2b_1 S_1 \Big|_P^k \right) \right) \mathcal{O}(\Delta t^3) \\
& - \frac{D_1}{\Delta x^2} \left( \Delta x^2 \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} \Big|_P^k + 2\mathcal{O}(\Delta x^4) \right) - F_1 \Big|_P^k = 0
\end{aligned} \tag{4.36}$$

e

$$\begin{aligned}
& \frac{\tau_2}{\Delta t^2} \left( \Delta t^2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} \Big|_P^k + 2\mathcal{O}(\Delta t^4) \right) + \left( 1 - \tau_2 \left( -a_2 + c_2 S_1 \Big|_P^k \right) \right) \frac{\partial S_2}{\partial t} \Big|_P^k \\
& - \frac{\Delta t}{2} \left( 1 - \tau_2 \left( -a_2 + c_2 S_1 \Big|_P^k \right) \right) \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} \Big|_P^k \\
& + \frac{\Delta t^2}{3!} \left( 1 - \tau_2 \left( -a_2 + c_2 S_1 \Big|_P^k \right) \right) \frac{\partial^3 S_2}{\partial t^3} \Big|_P^k \\
& - \left( 1 - \tau_2 \left( -a_2 + c_2 S_1 \Big|_P^k \right) \right) \mathcal{O}(\Delta t^3) \\
& - \frac{D_2}{\Delta x^2} \left( \Delta x^2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} \Big|_P^k + 2\mathcal{O}(\Delta x^4) \right) - F_2 \Big|_P^k = 0.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Simplificando alguns termos em (4.36) e (4.37), reordenando-os, se obtém

$$\begin{aligned}
& \tau_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} \Big|_P^k + \left( 1 - \tau_1 \left( a_1 - c_1 S_2 \Big|_P^k - 2b_1 S_1 \Big|_P^k \right) \right) \frac{\partial S_1}{\partial t} \Big|_P^k - D_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} \Big|_P^k - F_1 \Big|_P^k \\
& - \frac{\Delta t}{2} \left( 1 - \tau_1 \left( a_1 - c_1 S_2 \Big|_P^k - 2b_1 S_1 \Big|_P^k \right) \right) \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} \Big|_P^k \\
& + \frac{\Delta t^2}{3!} \left( 1 - \tau_1 \left( a_1 - c_1 S_2 \Big|_P^k - 2b_1 S_1 \Big|_P^k \right) \right) \frac{\partial^3 S_1}{\partial t^3} \Big|_P^k \\
& - \left( 1 - \tau_1 \left( a_1 - c_1 S_2 \Big|_P^k - 2b_1 S_1 \Big|_P^k \right) \right) \mathcal{O}(\Delta t^3) \\
& + 2\tau_1 \mathcal{O}(\Delta t^2) - 2D_1 \mathcal{O}(\Delta x^2) = 0
\end{aligned} \tag{4.38}$$

e

$$\begin{aligned}
& \tau_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} \Big|_P^k + \left( 1 - \tau_2 \left( -a_2 + c_2 S_1 \Big|_P^k \right) \right) \frac{\partial S_2}{\partial t} \Big|_P^k - D_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} \Big|_P^k - F_2 \Big|_P^k \\
& - \frac{\Delta t}{2} \left( 1 - \tau_2 \left( -a_2 + c_2 S_1 \Big|_P^k \right) \right) \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} \Big|_P^k \\
& + \frac{\Delta t^2}{3!} \left( 1 - \tau_2 \left( -a_2 + c_2 S_1 \Big|_P^k \right) \right) \frac{\partial^3 S_2}{\partial t^3} \Big|_P^k \\
& - \left( 1 - \tau_2 \left( -a_2 + c_2 S_1 \Big|_P^k \right) \right) \mathcal{O}(\Delta t^3) \\
& + 2\tau_2 \mathcal{O}(\Delta t^2) - 2D_2 \mathcal{O}(\Delta x^2) = 0.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Como

$$\frac{dF_1}{dS_1} \Big|_P^k = a_1 - 2b_1 S_1 \Big|_P^k - c_1 S_2 \Big|_P^k \tag{4.40}$$

e

$$\frac{dF_2}{dS_2} \Big|_P^k = -a_2 + c_2 S_1 \Big|_P^k, \tag{4.41}$$

tem-se que as equações (4.38) e (4.39) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\tau_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} \Big|_P^k + \left[ 1 - \tau_1 \frac{dF_1}{dS_1} \Big|_P^k \right] \frac{\partial S_1}{\partial t} \Big|_P^k - D_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} \Big|_P^k - F_1 \Big|_P^k}_{\text{EDP}} \\
& = \underbrace{\frac{\Delta t}{2} \left( 1 - \tau_1 \frac{dF_1}{dS_1} \Big|_P^k \right) \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} \Big|_P^k - \frac{\Delta t^2}{3!} \left( 1 - \tau_1 \frac{dF_1}{dS_1} \Big|_P^k \right) \frac{\partial^3 S_1}{\partial t^3} \Big|_P^k}_{\text{Erro de Truncamento Local}} \\
& + \underbrace{\left( 1 - \tau_1 \frac{dF_1}{dS_1} \Big|_P^k \right) \mathcal{O}(\Delta t^3) - 2\tau_1 \mathcal{O}(\Delta t^2) + 2D_1 \mathcal{O}(\Delta x^2)}_{\text{Erro de Truncamento Local}}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

e

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\tau_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} \Big|_P^k + \left[ 1 - \tau_2 \frac{dF_2}{dS_2} \Big|_P^k \right] \frac{\partial S_2}{\partial t} \Big|_P^k - D_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} \Big|_P^k - F_2 \Big|_P^k}_{\text{EDP}} \\
&= \underbrace{\frac{\Delta t}{2} \left( 1 - \tau_2 \frac{dF_2}{dS_2} \Big|_P^k \right) \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} \Big|_P^k - \frac{\Delta t^2}{3!} \left( 1 - \tau_2 \frac{dF_2}{dS_2} \Big|_P^k \right) \frac{\partial^3 S_2}{\partial t^3} \Big|_P^k}_{\text{Erro de Truncamento Local}} \\
&+ \underbrace{\left( 1 - \tau_2 \frac{dF_2}{dS_2} \Big|_P^k \right) \mathcal{O}(\Delta t^3) - 2\tau_2 \mathcal{O}(\Delta t^2) + 2D_2 \mathcal{O}(\Delta x^2)}_{\text{Erro de Truncamento Local}}. \tag{4.43}
\end{aligned}$$

Por fim, fazendo as substituições das Séries de Taylor citadas e considera-se  $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ , (4.42) e (4.43) torna-se

$$\tau_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} \Big|_P^k + \left[ 1 - \tau_1 \frac{dF_1}{dS_1} \Big|_P^k \right] \frac{\partial S_1}{\partial t} \Big|_P^k - D_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} \Big|_P^k - F_1 \Big|_P^k = 0 \tag{4.44}$$

e

$$\tau_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} \Big|_P^k + \left[ 1 - \tau_2 \frac{dF_2}{dS_2} \Big|_P^k \right] \frac{\partial S_2}{\partial t} \Big|_P^k - D_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} \Big|_P^k - F_2 \Big|_P^k = 0. \tag{4.45}$$

Pontanto, conclui-se que as discretizações (4.30) e (4.31) são consistentes com as equações (4.28) e (4.29), respectivamente.

## 5 ESTABILIDADE NUMÉRICA

A condição de Von Neumann é baseada no princípio da superposição, ou seja, na observação de que o erro global é o somatório de erros mais simples, também chamados harmônicos. Esse processo é inspirado na expansão em uma série complexa de Fourier, sendo que o método usual para equações diferenciais parciais lineares com condições de contorno periódicas foi proposto por John Von Neuman [14, 17]. Geralmente, a condição de estabilidade deduzida do critério de Von Neumann produz uma condição necessária para a estabilidade, mas não suficiente [18]. Considerando  $\Delta x$  e  $\Delta t$  as partições no espaço e tempo, respectivamente,  $I = \sqrt{-1}$  o número imaginário e denotando por  $E_i$ , para  $i = 0, 1, \dots, N$  o erro global em cada ponto no passo  $t = 0$ , então escreve-se  $E_i$  como

$$E_i = \sum_{n=0}^N a_n e^{I\alpha_n i \Delta x}, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (5.1)$$

onde  $\alpha_n = \frac{n\pi}{L}$  e  $N\Delta x = L$ , que constitui um sistema linear com  $N + 1$  incógnitas  $a_n$  e  $N + 1$  equações, cuja matriz de coeficientes é não singular, e portanto pode ser resolvido de maneira única para determinar  $a_n$ . Assim, em um esquema numérico, obtém-se uma condição de estabilidade majorando o fator de amplificação do erro  $a_n$ , para todo  $n$  [16].

A equação do erro (5.1) é uma propagação de ondas senoidal e cossenoidal, assim, para haver controle dessa propagação, deve-se ter que o valor absoluto da amplitude do erro deve ser menor ou igual à 1 [46], isto é,

$$|a_n| \leq 1, \quad \forall n = 0, \dots, N. \quad (5.2)$$

A dependência no tempo do erro é incluída assumindo-se que a amplitude do erro  $a_n$  está em função do tempo. Já que o erro tende a crescer ou decair exponencialmente com o tempo, é possível assumir que a amplitude varia exponencialmente com o tempo. Assim, (5.1) toma a forma

$$E_i^k = \sum_{n=0}^N e^{\gamma k} e^{I\alpha_n i \Delta x}, \quad (5.3)$$

onde agora  $E_i^k$  é o erro global em cada ponto no passo  $t = k$ .

Representado o erro no passo inicial, para analisar a sua propagação ao longo dos passos seguintes, basta observarmos a propagação de um harmônico genérico  $e^{\gamma k} e^{I\xi i}$ , onde  $\xi$  e  $\gamma$  são números arbitrários a determinar. Em geral, as características da estabilidade podem ser estudadas, sem grandes perdas, usando-se apenas esta última forma do harmônico genérico para o erro [18].

Neste capítulo averiguar-se-á as condições de estabilidade numérica de Von

Neumann para (3.24) - (3.25) quando  $F_1 \equiv F_2 \neq 0$ ,  $\tau_1 = \tau_2 = 0$  e  $u \equiv 0$ , e em seguida,  $F_1 \equiv F_2 \equiv 0$ ,  $\tau_1 \neq 0$ ,  $\tau_2 \neq 0$  e  $u \equiv 0$ . Por fim considera-se  $F_1 \equiv F_2 \neq 0$ ,  $\tau_1 \neq 0$ ,  $\tau_2 \neq 0$  e  $u = 0$ . Em seguida será obtido uma dedução numérica de estabilidade para as equações telegráficas do tipo predador-presa.

## 5.1 CONDIÇÃO DE VON NEUMANN PARA A EQUAÇÃO DO CALOR UNIDIMENSIONAL

Como visto anteriormente, o método de Von Neumann é baseado na decomposição dos erros em séries complexas de Fourier. Para ilustrar o procedimento, considere a equação do calor unidimensional

$$\frac{\partial S}{\partial t} = D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}, \quad (5.4)$$

onde  $S = S_1(x, t) = S_2(x, t)$ , definida no intervalo de tamanho  $L$  e discretizada da seguinte forma:

- diferenças progressivas de primeira ordem no tempo

$$\frac{\partial S}{\partial t}(x, t) \approx \frac{S|_P^{k+1} - S|_P^k}{\Delta t}; \quad (5.5)$$

- diferenças centrais de segunda ordem no espaço

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x, t) \approx \frac{S|_E^k - 2S|_P^k + S|_W^k}{\Delta x^2}. \quad (5.6)$$

Substituindo (5.5) e (5.6) em (5.4), tem-se a seguinte expressão

$$S|_P^{k+1} = S|_P^k + \sigma (S|_W^k - 2S|_P^k + S|_E^k), \quad (5.7)$$

com  $\sigma = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$ .

Admita agora que exista uma solução da equação de diferenças (5.7) da forma de um harmônico genérico da condição de Von Neumann (5.3), ou seja,

$$S|_P^k = e^{\gamma k} e^{I\xi P} = (e^\gamma)^k e^{I\xi P}. \quad (5.8)$$

Deseja-se encontrar  $\gamma$  e  $\xi$  tais que (5.8) seja de fato uma solução de (5.7). Deste modo, substitui-se (5.8) em (5.7) para obter

$$e^{\gamma(k+1)} e^{I\xi P} = (1 - 2\sigma)S|_P^k + \sigma (e^{\gamma k} e^{I\xi W} + e^{\gamma k} e^{I\xi E}), \quad (5.9)$$



isto é,

$$e^\gamma S|_P^k = (1 - 2\sigma)S|_P^k + \sigma (e^{-I\xi}S|_P^k + e^{I\xi}S|_P^k). \quad (5.10)$$

Logo, eliminando os termos em comuns obtém-se

$$\begin{aligned} e^\gamma &= (1 - 2\sigma) + \sigma(e^{-I\xi} + e^{I\xi}) \\ &= (1 - 2\sigma) + 2\sigma \cos \xi \\ &= 1 + 2\sigma(\cos \xi - 1) \\ &= 1 - 4\sigma \sin^2 \frac{\xi}{2}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Sabe-se que  $\sigma \geq 0$ , então  $e^\gamma = 1 - 4\sigma \sin^2 \frac{\xi}{2} \leq 1$ . Desta forma, se  $e^\gamma \geq 0$ , de (5.8) a solução da equação (5.7) decairá uniformemente quando  $k \rightarrow \infty$ , pois  $0 \leq e^\gamma \leq 1$ . Mas  $e^\gamma$  pode ser negativo, uma vez que  $\gamma$  é complexo, e portanto cria-se mais duas situações a considerar:

- i) Se  $-1 \leq e^\gamma < 0$ , a solução terá amplitude decrescente e sinal oscilante quando  $k \rightarrow \infty$ ;
- ii) Se  $e^\gamma < -1$ , a solução oscila com amplitude crescente quando  $k \rightarrow \infty$ .

No segundo caso (5.7) será instável, enquanto que no primeiro caso será estável. Concluindo, para que a solução (5.8) seja estável é necessário que

$$|e^\gamma| \leq 1. \quad (5.12)$$

Desta forma, tem-se que  $-1 \leq 1 - 4\sigma \sin^2 \frac{\xi}{2} \leq 1$  com  $\xi \neq 2m\pi$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , logo,

$$\sigma \leq \frac{1}{1 - \cos \xi}, \quad \text{ou seja,} \quad 0 \leq \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (5.13)$$

A condição (5.13) é a condição de Von Neumann para a equação do calor discretizada (5.7). Com a imposição do limitante sobre  $\sigma$  para estabilidade, o método explícito geralmente produz aproximações satisfatórias. Porém,  $\sigma \leq \frac{1}{2}$  é uma condição muito restritiva para o tamanho do passo no tempo, pois esta condição significa que  $\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2D}$ , e o esforço computacional poderá ser grande, caso se deseje calcular a solução para um tempo longo.

## 5.2 CONDIÇÃO DE VON NEUMANN PARA UMA EQUAÇÃO PREDADOR-PRESA COM TERMO FONTE

Na seção anterior, obteve-se uma condição de Von Neumann para a equação do calor usual. Nesta seção, pretende-se realizar a mesma análise só que para um sistema de equações predador-presa com termos fonte. O sistema a ser analisado é

$$\begin{cases} \frac{\partial S_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} + a_1 S_1 - b_1 S_1^2 - c_1 S_1 S_2, \\ \frac{\partial S_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} - a_2 S_2 + c_2 S_1 S_2. \end{cases} \quad (5.14)$$

$$\quad (5.15)$$

Note que as equações (5.14) e (5.15) são as equações (3.24) e (3.25) com  $\tau_1 = \tau_2 = 0$  e  $u = 0$ .

Os métodos de discretização para estas equações serão os mesmos usados para a equação (5.4). Assim, depois de todo o processo de discretização, as equações, (5.14) e (5.15) tem a forma

$$S_1|_P^{k+1} = S_1|_P^k + \sigma_1 (S_1|_E^k - 2S_1|_P^k + S_1|_W^k) + \Delta t S_1|_P^k (a_1 - b_1 S_1|_P^k - c_1 S_2|_P^k), \quad (5.16)$$

e

$$S_2|_P^{k+1} = S_2|_P^k + \sigma_2 (S_2|_E^k - 2S_2|_P^k + S_2|_W^k) + \Delta t S_2|_P^k (-a_2 + c_2 S_1|_P^k), \quad (5.17)$$

onde  $\sigma_j = \frac{\Delta t D_j}{\Delta x^2}$ ,  $j = 1, 2$ .

Observe que as equações (5.16) e (5.17) são não lineares, devido aos termos fontes  $F_1$  e  $F_2$ . Por outro lado, o procedimento de Von Neumann supõem que a função erro global  $E_i^k$ , em cada ponto, no passo  $t = k$ , possa ser decomposta em uma série complexa de Fourier, de outra forma a função erro global seja uma superposição de exponenciais complexas, como dada nas equações (5.1) e (5.3). Tal procedimento é válido para sistemas de equações lineares. Portanto, faz-se necessário nesta seção, uma linearização de alguns termos das equações (5.16) e (5.17). Então, para superar este problema, assume-se, nos termos não lineares, que as variáveis  $S_1$  e  $S_2$  são constantes locais positivas  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente. Logo, a versão linear de (5.16) e (5.17) é

$$S_1|_P^{k+1} = S_1|_P^k + \sigma_1 (S_1|_E^k - 2S_1|_P^k + S_1|_W^k) + \Delta t S_1|_P^k (a_1 - b_1 m_1 - c_1 m_2), \quad (5.18)$$

e

$$S_2|_P^{k+1} = S_2|_P^k + \sigma_2 (S_2|_E^k - 2S_2|_P^k + S_2|_W^k) + \Delta t S_2|_P^k (-a_2 + c_2 m_1). \quad (5.19)$$

Substituindo  $S_1|_P^k = e^{\gamma k} e^{I\xi P}$  e  $S_2|_P^k = e^{\gamma k} e^{I\xi P}$  em (5.18) e (5.19), respectivamente, e fazendo algumas manipulações algébricas, obtém-se

$$e^{\gamma} = 1 - 4\sigma_1 \sin^2 \frac{\xi}{2} + \Delta t (a_1 - b_1 m_1 - c_1 m_2), \quad (5.20)$$

e

$$e^\gamma = 1 - 4\sigma_2 \sin^2 \frac{\xi}{2} + \Delta t (-a_2 + c_2 m_1). \quad (5.21)$$

Sabemos que para a estabilidade do método deve-se ter  $|e^\gamma| \leq 1$ . Desse modo, para esta condição ser satisfeita em (5.20) e (5.21) deve-se ter

$$-1 \leq 1 - 4\sigma_1 \sin^2 \frac{\xi}{2} + \Delta t (a_1 - b_1 m_1 - c_1 m_2) \leq 1, \quad (5.22)$$

e

$$-1 \leq 1 - 4\sigma_2 \sin^2 \frac{\xi}{2} + \Delta t (-a_2 + c_2 m_1) \leq 1. \quad (5.23)$$

Continuando, basta desenvolver ambas inequações para se obter

$$0 \leq \Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2D_1 \sin^2 \frac{\xi}{2} - \frac{\Delta x^2}{2} (a_1 - b_1 m_1 - c_1 m_2)}, \quad (5.24)$$

e

$$0 \leq \Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2D_2 \sin^2 \frac{\xi}{2} - \frac{\Delta x^2}{2} (-a_2 + c_2 m_1)}, \quad (5.25)$$

que são as condições de Von Neumann para (5.16) e (5.17), respectivamente.

### 5.3 CONDIÇÃO DE VON NEUMANN PARA UMA EQUAÇÃO TELEGRÁFICA

Nesta seção será analisada a condição de Von Neumann para as equações (3.24) e (3.25) sem seus respectivos termos fontes e com velocidades  $u = 0$ , resultando nas equações hiperbólicas

$$\tau_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} + \frac{\partial S_j}{\partial t} = D_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2}, \quad (5.26)$$

onde  $\tau_j$  e  $D_j$  são constantes de retardo e de difusão, respectivamente, com  $j = 1, 2$ .

Utilizando os mesmos métodos de discretização (3.31), (3.32) e (3.45) para cada termo da equação (5.26) e isolando o termo temporal  $k + 1$  temos a seguinte equação

$$S_j|_P^{k+1} = \left(2 - \frac{\Delta t}{\tau_j} - \frac{2D_j \Delta t^2}{\Delta x^2 \tau_j}\right) S_j|_P^k + \frac{D_j \Delta t^2}{\Delta x^2 \tau_j} \left(S_j|_E^k + S_j|_W^k\right) - \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau_j}\right) S_j|_P^{k-1} \quad (5.27)$$

e pelo critério de Von Neumann, escrevendo

$$S_j|_P^k = e^{\gamma k} e^{I\xi P}, \quad (5.28)$$

com algumas simplificações tem-se

$$e^\gamma = 2 - \frac{\Delta t}{\tau_j} - \frac{2D_j \Delta t^2}{\tau_j \Delta x^2} (1 - \cos \xi) - \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau_j}\right) e^{-\gamma}. \quad (5.29)$$

Multiplicando ambos os lados de (5.29) por  $e^\gamma$  e fazendo uso de transformações trigonométricas, obtém-se a seguinte equação

$$e^{2\gamma} - 2\beta_j e^\gamma + \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau_j}\right) = 0, \quad (5.30)$$

onde  $\beta_j = 1 - 2\sigma_j \frac{\Delta t}{\tau_j} \left(\sin^2 \frac{\xi}{2}\right) - \frac{\Delta t}{2\tau_j}$  e  $\sigma_j = \frac{D_j \Delta t}{\Delta x^2}$ ,  $j = 1, 2$ . As raízes de (5.30) são

$$g_{1,2} = \beta_j \pm \sqrt{\beta_j^2 - 1 + \frac{\Delta t}{\tau_j}}. \quad (5.31)$$

Antes de analisar as raízes de (5.31), considere o lema a seguir.

**Lema 5.1.** *Seja  $x \in (0, 1]$  e  $a(x)$  uma função real definida por  $a(x) = \frac{x}{2}$ . Se para cada  $x \in (0, 1]$  tomar-se  $y \leq 1 - a(x)$ , então*

$$0 \leq \sqrt{y^2 - 1 + x} + y \leq 1.$$

*Demonstração.* Seja  $y$  um número real tal que  $y \leq 1 - \frac{x}{2}$  para todo  $x \in (0, 1]$ . Deste modo, tem-se  $y \in [\frac{1}{2}, 1)$ . Assim,

$$\begin{aligned} 0 \leq \sqrt{y^2 - 1 + x} + y &\leq \sqrt{\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - 1 + x} + 1 - \frac{x}{2} \\ &= \sqrt{1 - x + \frac{x^2}{4} - 1 + x} + 1 - \frac{x}{2} \\ &= \sqrt{\frac{x^2}{4}} + 1 - \frac{x}{2} \\ &= \frac{x}{2} + 1 - \frac{x}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto,  $0 \leq \sqrt{y^2 - 1 + x} + y \leq 1$ . □

Suponha que  $\frac{\Delta t}{\tau_j} \leq 1$ . Considere os seguintes casos:

Caso I)  $\beta_j^2 - 1 + \frac{\Delta t}{\tau_j} < 0$ ;

Deste modo  $\sqrt{\beta_j^2 - 1 + \frac{\Delta t}{\tau_j}}$  gera raízes complexas conjugadas, isto é,

$$g_{1,2} = \beta_j \pm i \sqrt{1 - \frac{\Delta t}{\tau_j} - \beta_j^2} \quad (5.32)$$

e tomando a norma de (5.32)

$$\|g\|^2 = \beta_j^2 + 1 - \frac{\Delta t}{\tau_j} - \beta_j^2 = 1 - \frac{\Delta t}{\tau_j} < 1. \quad (5.33)$$

Então, nesse caso, quando  $\frac{\Delta t}{\tau_j} \leq 1$  e  $\beta_j^2 - 1 + \frac{\Delta t}{\tau_j} < 0$ , pelo critério de Von Neumann, há convergência numérica para o sistema (5.27).

Caso II)  $\beta_j^2 - 1 + \frac{\Delta t}{\tau_j} \geq 0$ .

Se  $\sigma_j \leq \frac{3}{4}$ , neste caso,  $-1 \leq \beta_j = 1 - 2\sigma_j \frac{\Delta t}{\tau_j} \left(\sin^2 \frac{\xi}{2}\right) - \frac{\Delta t}{2\tau_j} \leq 1$  e

$$0 \leq \beta_j^2 - 1 + \frac{\Delta t}{\tau_j} = \left(1 - 2\sigma_j \frac{\Delta t}{\tau_j} \left(\sin^2 \frac{\xi}{2}\right) - \frac{\Delta t}{2\tau_j}\right)^2 - 1 + \frac{\Delta t}{\tau_j} \leq 1, \quad (5.34)$$

consequentemente, tem-se  $0 \leq \sqrt{\beta_j^2 - 1 + \frac{\Delta t}{\tau_j}} \leq 1$ . Assim, pela Desigualdade Triangular

$$0 \leq |g| \leq |\beta_j| + \left| \sqrt{\beta_j^2 - 1 + \frac{\Delta t}{\tau_j}} \right| = |\beta_j| + \sqrt{\beta_j^2 - 1 + \frac{\Delta t}{\tau_j}}, \quad (5.35)$$

onde  $|g|$  pode não ser menor ou igual a 1, isto é,  $\sigma_j \leq \frac{3}{4}$  assegura que  $-1 \leq \beta_j \leq 1$ , mas não assegura que  $|g| \leq 1$ . Pois se  $\sigma_j = \frac{3}{4}$  e  $\frac{\Delta t}{\tau_j} = 1$ , implica  $\beta_j = -1$  e a equação (5.34) assumirá o valor máximo, logo, em (5.35) tem-se que  $|g| \leq 2$ . Isto indica que se deve mudar a restrição nos valores de  $\sigma_j$

Deste modo, utiliza-se o Lema 5.1 para criar uma condição extra que garante  $|g| \leq 1$ . Fazendo uso deste resultado, concluímos que para cada valor de  $\frac{\Delta t}{\tau_j}$  tomado, deve-se ter

$$\frac{1}{2} \leq \beta_j \leq 1 - \frac{\Delta t}{2\tau_j}, \quad (5.36)$$

onde  $0 < \frac{\Delta t}{\tau_j} \leq 1$ . Sendo assim, para este caso, tem-se a seguinte condição

$$\frac{1}{2} \leq 1 - 2\sigma_j \frac{\Delta t}{\tau_j} \sin^2 \frac{\xi}{2} - \frac{\Delta t}{2\tau_j} \leq 1 - \frac{\Delta t}{2\tau_j} \quad (5.37)$$

que se reduz à

$$\frac{1}{2} \leq 1 - 2\sigma_j \frac{\Delta t}{\tau_j} \sin^2 \frac{\xi}{2} \leq 1. \quad (5.38)$$

Resolvendo a inequação (5.38), vem que

$$0 \leq \sigma_j \leq \frac{1}{4}. \quad (5.39)$$

Logo, pelo Lema 5.1 conclui-se que quando  $0 < \frac{\Delta t}{\tau_j} \leq 1$  e  $\beta_j^2 - 1 + \frac{\Delta t}{\tau_j} \geq 0$ , a condição de estabilidade de Von Neumann da equação discretizada (5.27) é dada por (5.39), onde  $\sigma_j = \frac{D_j \Delta t}{\Delta x^2}$  e  $j = 1, 2$ .

#### 5.4 DIAGRAMA DE ESTABILIDADE PARA UM SISTEMA TELEGRÁFICO PREDADOR-PRESA

No caso do sistema de equações (3.24) e (3.25), ou em sua forma discretizada dada pelas equações (3.51) e (3.63), que descrevem um sistema telegráfico predador-presa com efeitos difusivo, reativo e com retardo, não foi possível obter uma forma explícita para a condição de Von Neumann. Neste contexto, apresenta-se uma experimentação numérica da estabilidade do sistema de EDPs em estudo. Fixado os parâmetros reativos  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0.75$ ,  $b_1 = 0.5$ ,  $c_1 = 0.5$ ,  $c_2 = 0.5$ , construiu-se um diagrama de fases das variáveis  $D_j$  (coeficiente de difusibilidade) e  $\tau_j$  (tempo de retardo), com  $j = 1, 2$ , evidenciando as regiões de estabilidade e instabilidade do sistema de EDPs, isso para diferentes discretizações de  $\Delta t$  e  $\Delta x$ .

Para estimar uma condição de estabilidade através de simulações numéricas do sistema de equações predador-presa com retardo (3.24) - (3.25), com  $u = 0$ , considerou-se as seguintes condições iniciais e de contorno

$$S_1(x, 0) = S_1^0, \quad S_2(x, 0) = S_2^0, \quad \forall x \in [0, 50] \quad (5.40)$$

$$S_1(0, t) = S_1(50, t) = S_2(0, t) = S_2(50, t) = 0, \quad \forall t \in [0, 100], \quad (5.41)$$

onde as condições iniciais são

$$S_j^0 = \begin{cases} 15 & ; 24 \leq x \leq 26 \\ 0 & ; \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (5.42)$$

onde  $j = 1, 2$ .

Vale ressaltar que todas as simulações contidas neste trabalho foram realizadas em um sistema operacional Ubuntu, onde os códigos foram todos programados em linguagem FORTRAN 90 e as imagens geradas via software gnuplot.

Deste modo, realizou-se algumas simulações com diferentes partições do domínio temporal. Fixado  $\Delta x = 0.1$ , na Figura 5.2 mostra-se o gráfico das regiões de estabili-

dade/instabilidade numérica dessas equações como função da difusão das populações de presas e predadores ( $D_j$ ) e do tempo de retardo da presa e predador ( $\tau_j$ ), para 3 diferentes valores de  $\Delta t$ .

Importante ressaltar que  $D_1 = D_2$  e  $\tau_1 = \tau_2$  foram tomados iguais em todas as simulações, isto é, não houve difusão nem retardo diferentes entre as populações  $S_1$  e  $S_2$ . Note que o intervalo de variação do parâmetro  $\tau_j$  é  $0,001 \leq \tau_j \leq 0,1$ , para  $j = 1, 2$ .

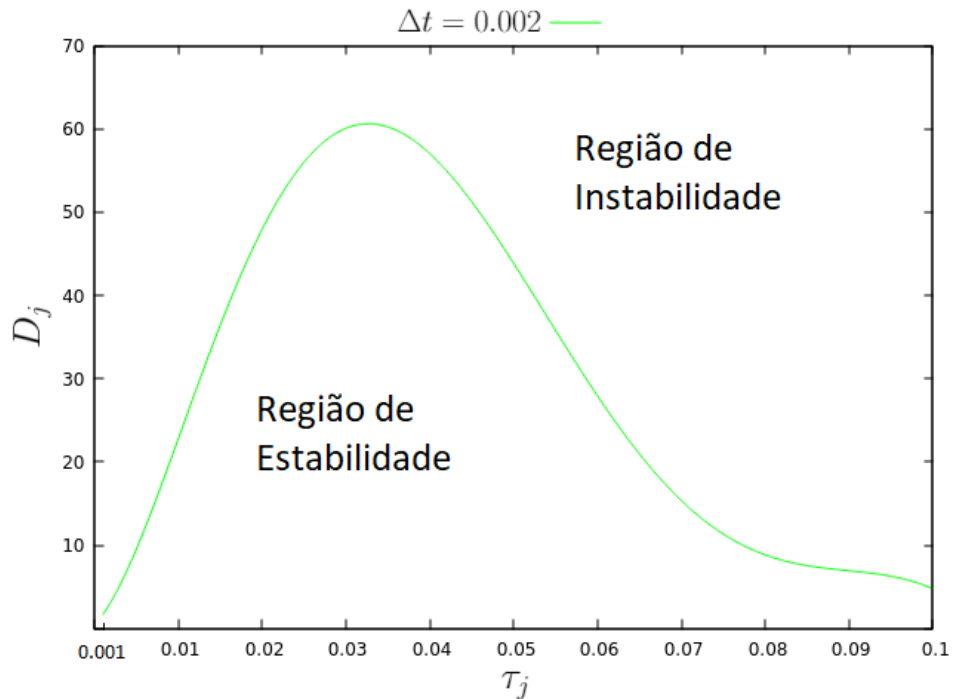


Figura 5.1: Região de Estabilidade/Instabilidade para o sistema predador-presa telegráfico (3.24)-(3.25) com  $\Delta t = 0.002$ .

**Fonte:** Autor.

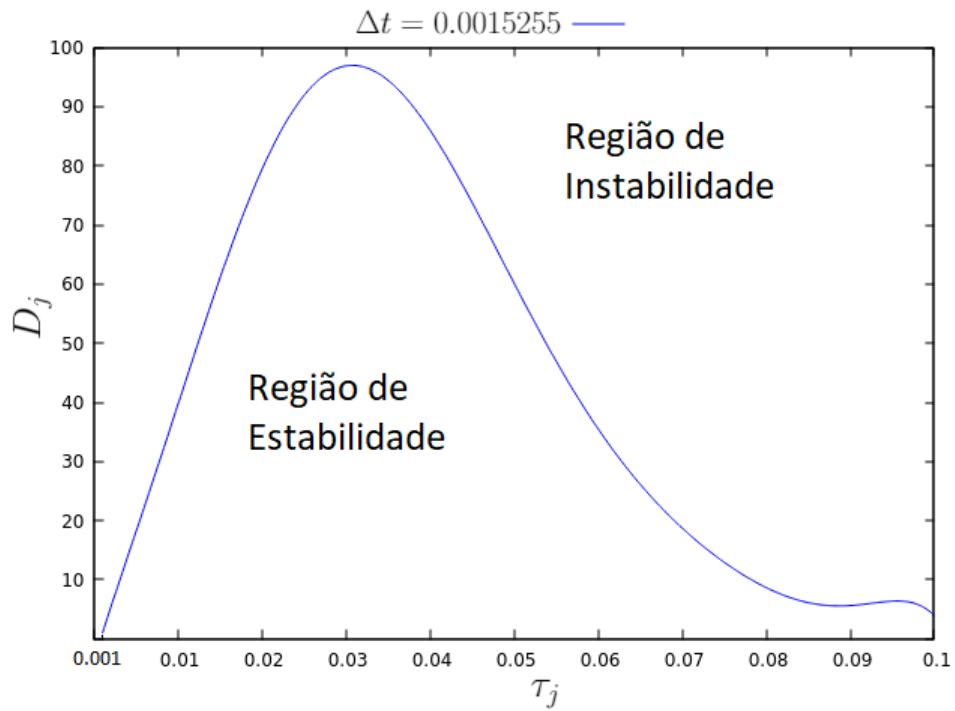


Figura 5.2: Região de Estabilidade/Instabilidade para o sistema predador-presa telegráfico (3.24)-(3.25) com  $\Delta t = 0.0015255$ .

**Fonte:** Autor.

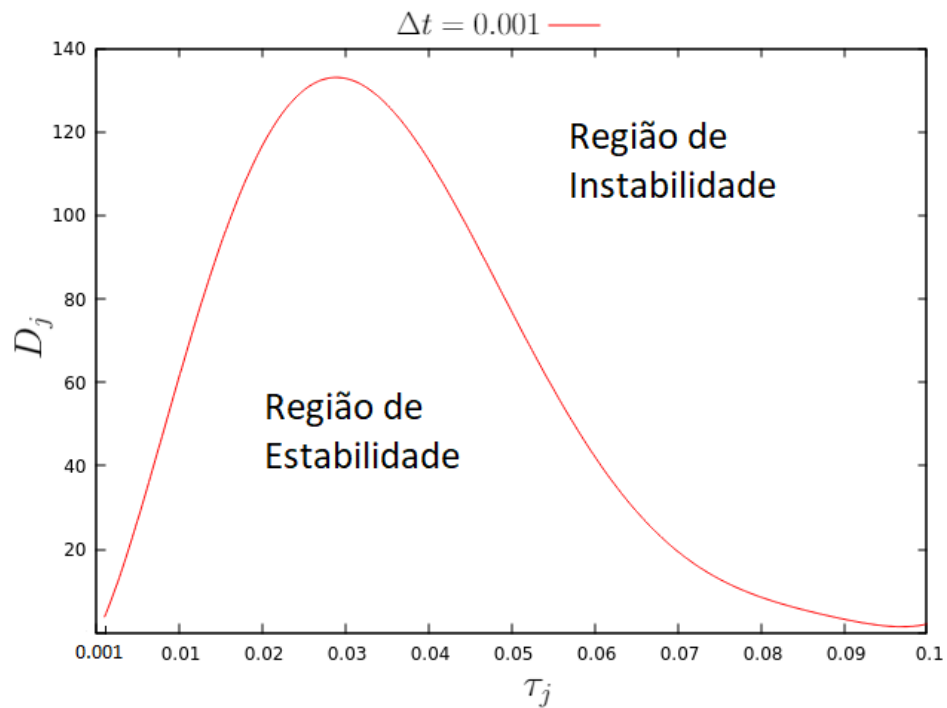


Figura 5.3: Região de Estabilidade/Instabilidade para o sistema predador-presa telegráfico (3.24)-(3.25) com  $\Delta t = 0.001$ .

**Fonte:** Autor.



Agora fixa-se  $\Delta t = 0.0015255$ . Na Figura 5.4 mostra-se gráfico das regiões de estabilidade/instabilidade numérica dessas equações como função da difusão das populações de presas e predadores ( $D_j$ ) e do tempo de retardo da presa e predador ( $\tau_j$ ), para 3 diferentes valores de  $\Delta x$ .

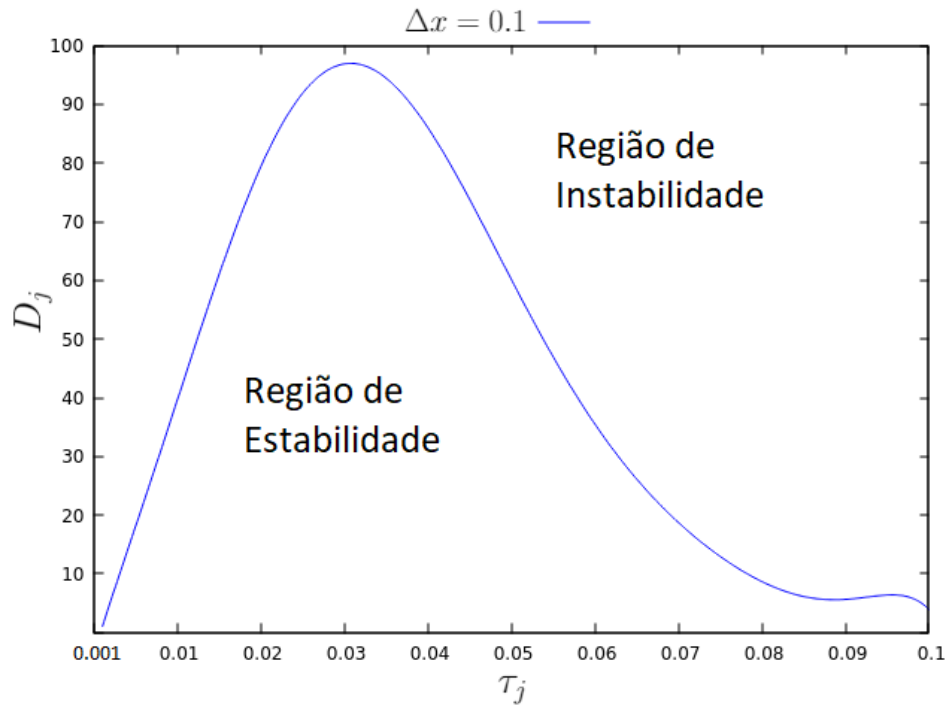


Figura 5.4: Região de Estabilidade/Instabilidade para o sistema predador-presa telegráfico (3.24)-(3.25) com  $\Delta x = 0.1$ .

**Fonte:** Autor.

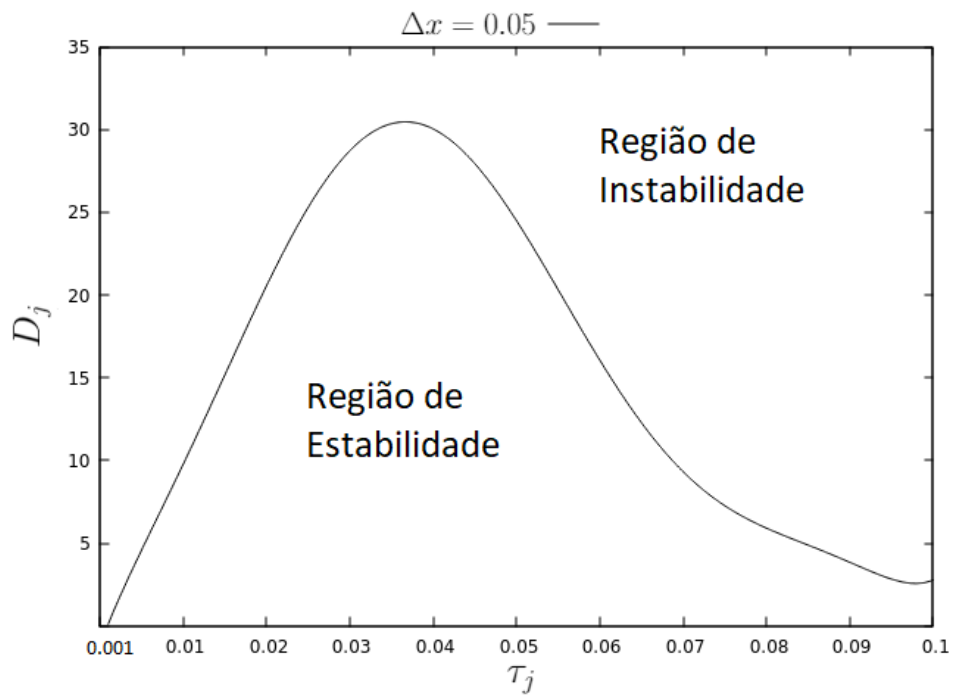


Figura 5.5: Região de Estabilidade/Instabilidade para o sistema predador-presa telegráfico (3.24)-(3.25) com  $\Delta x = 0.05$ .

**Fonte:** Autor.

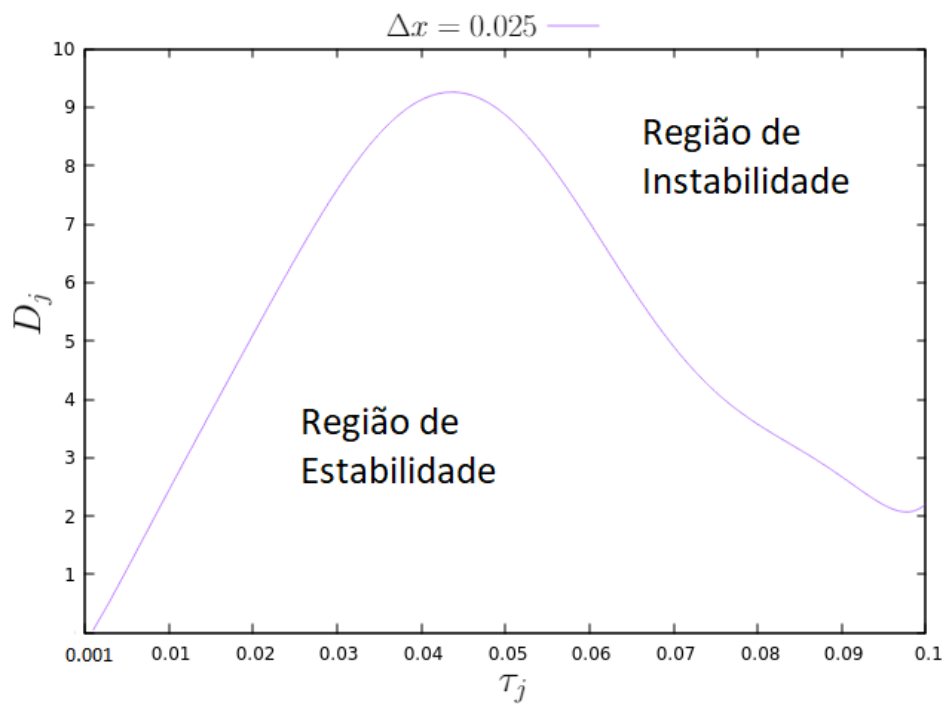


Figura 5.6: Região de Estabilidade/Instabilidade para o sistema predador-presa telegráfico (3.24)-(3.25) com  $\Delta x = 0.025$ .

**Fonte:** Autor.

Para cada valor de  $\Delta t$  e  $\Delta x$ , a região abaixo do respectivo gráfico, como mostrado nas Figuras 5.1 à 5.6, significa que o método explícito é numericamente estável, enquanto que a região acima do respectivo gráfico, são regiões de instabilidade numérica. Note que ao refinar mais o domínio temporal, a região de estabilidade numérica cresce, enquanto que um maior refinamento do domínio espacial implica num decréscimo da região de estabilidade numérica.

Deste modo, fixado as condições iniciais e de contorno (5.40), (5.41), (5.42) e os parâmetros  $a_1, a_2, b_1, c_1$  e  $c_2$ , para cada valor de  $\Delta t$  e  $\Delta x$  utilizado nas simulações, obteve-se um limite de valores dos parâmetros  $D_j$  e  $\tau_j, j = 1, 2$ , em que há estabilidade numérica do método explícito para as equações predador-presa com retardo (3.51) e (3.63).

## 6 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA NUMÉRICA

O objetivo deste capítulo é reunir as informações obtidas nos capítulos anteriores, afim de concluir sobre a convergência e estabilidade numérica do modelo em estudo. Para isso, utilizar-se-á o seguinte Teorema:

**Teorema 6.1.** (*Teorema da Equivalência de Lax*)

*Para um esquema de diferenças finitas consistente de um PVI bem-posto, a estabilidade é condição necessária e suficiente para a convergência.*

A demonstração do Teorema 6.1 pode ser encontrada em [35, 53]. Deste modo, para verificar a convergência numérica, as hipóteses do Teorema da Equivalência de Lax devem ser satisfeitas, primeiramente o fato das equações serem bem-postas, isto é, deve se verificar se o problema em questão possui solução e se ela é única. Existem na literatura, diversos trabalhos à cerca da existência e unicidade de soluções de equações do tipo telegráfica com alguns termos não lineares. Para uma equação do calor com termo fonte, pode-se citar os trabalhos [1, 15]. Para uma equação do tipo telegráfica, o argumento da existência e unicidade de solução encontra-se em [4]. Sobre o sistema de equações telegráficas predador-presa, encontra-se na literatura os trabalhos [8, 12, 13, 42, 50] que estudam a existência e unicidade de modelos similares, ou mais gerais, que o modelo em estudo.

Portanto, no contexto do Teorema da Equivalência de Lax, tem-se que simulações numérica realizadas para o sistema de equações telegráficas predador-presa convergem para a solução do problema, desde que as condições de Von Neumann sejam satisfeitas. Salienta-se que o estudo de estabilidade para o sistema de equações telegráficas predador-presa foi realizado numericamente, de modo que, antes de implementar as simulações numérica para o problema, será realizado um estudo numérico de refinamento de malha para avaliar se as soluções numéricas encontradas estão em processo de convergência. Neste caso deve-se atender ao Teorema de Cauchy para cálculo de limites [38].

### 6.1 REFINAMENTO DE MALHA E CONVERGÊNCIA

Para que se possa encontrar uma solução numérica para os modelos estudados nos capítulos precedentes, todas as simulações numéricas realizadas neste capítulo consideram as mesmas condições iniciais e de contorno descritas em (5.40), (5.41) e (5.42).

Como  $S_1$  e  $S_2$  são as densidades da presa e do predador, respectivamente, para obter a população total da presa e do predador, em um tempo  $t$ , deve-se calcular a área abaixo das curvas delimitadas por  $S_1$  e  $S_2$  e acima do eixo coordenado. Esse cálculo é realizado por

meio da integral definida

$$P_j(t) = \int_{X_{INI}}^{X_{FIN}} S_j(x, t) dx, \quad (6.1)$$

onde  $j = 1, 2$ ,  $P_1$  e  $P_2$  são, respectivamente, as populações da presa e do predador, no tempo  $t$ .

Define-se  $NI$  o número de partições no domínio espacial e  $NJ$  o número de partições no domínio temporal. Deste modo, temos as seguintes relações

$$\Delta t = \frac{T_{FIN} - T_{INI}}{NJ - 1} \quad (6.2)$$

e

$$\Delta x = \frac{X_{FIN} - X_{INI}}{NI - 1}. \quad (6.3)$$

Neste momento, estudar-se-á o refinamento de malha para os 3 tipos de equações oriundos do problema original, afim de analisar se o problema em estudo é posto do ponto de vista numérico, e utilizar-se do Teorema 6.1, para concluir sobre a convergência numérica do método utilizado nas discretizações. A seguir, as Tabelas 6.1 e 6.2 apresentam os valores dos parâmetros, bem como as condições iniciais, respectivamente, utilizados durante os testes de refinamento de malha.

Tabela 6.1: Valores dos parâmetros das simulações para todos os modelos estudados.

<b>Termos</b>	<b>Presa (i = 1)</b>	<b>Predador (i = 2)</b>
$a_i$	1.0	0.75
$b_i$	0.5	0.0
$c_i$	0.5	0.5
$D_i$	1.0	1.0
$\tau_i$	0.001	0.001
<b>T INI</b> ( $T_{INI}$ )	0.0	0.0
<b>T FIN</b> ( $T_{FIN}$ )	100.0	100.0
<b>X INI</b> ( $X_{INI}$ )	0.0	0.0
<b>X FIN</b> ( $X_{FIN}$ )	50.0	50.0

Tabela 6.2: Valores para as Condições iniciais

<b>Termos</b>	<b>Presa (i = 1)</b>	<b>Predador (i = 2)</b>
<b>Condição inicial</b> ( $A_i$ )	24.0	24.0
<b>Condição inicial</b> ( $B_i$ )	1.5	1.0
<b>Condição inicial</b> ( $C_i$ )	26.0	26.0

A Tabela 6.3 apresenta a experimentação numérica para a solução do sistema

predador-presa com termos fonte (4.28)-(4.29) em função do refinamento da malha. Observa-se o processo de convergência das populações como função desse refinamento.

Tabela 6.3: Valores das populações para vários refinamentos, no tempo  $t = 100$  do sistema predador-presa com termos fontes (4.1)-(4.2).

$\Delta x$	$\Delta t$	População de Presa	População de Predador
5.0	0.005	62.69325	18.90470
3.5	0.005	65.13775	19.45726
2.0	0.005	70.27077	20.51610
1.0	0.002	71.688326	21.042550
0.75	0.00175	72.227904	21.177584
0.5	0.0015	72.561293	21.298888
0.1	0.001	73.132640	21.496817
0.05	0.0005	73.208562	21.521853
0.04	0.0004	73.223191	21.526828
0.03	0.0003	73.238401	21.531841

**Fonte:** Autor.

A Tabela 6.4 apresenta a experimentação numérica para a solução do modelo telegráfico (4.19) em função do refinamento da malha. Neste caso também observa-se o processo de convergência da população como função desse refinamento.

Tabela 6.4: Valor da população para vários refinamentos, no tempo  $t = 100$  do modelo telegráfico (4.19).

$\Delta x$	$\Delta t$	População
5.0	0.002	5.78033
3.5	0.002	4.24366
2.0	0.002	2.45236
1.0	0.002	2.494247
0.75	0.00175	2.691145
0.5	0.0015	2.525871
0.1	0.001	2.541215
0.05	0.0005	2.538582
0.04	0.0004	2.534497
0.03	0.0003	2.549075
0.02	0.0002	2.535217
0.01	0.0001	2.536463
0.005	0.00005	2.536197

**Fonte:** Autor.

Enfim, apresenta-se na Tabela 6.5, a experimentação numérica para a solução do sistema telegráfico predador-presa (4.28)-(4.29) em função do refinamento da malha . Novamente observa-se o processo de convergência das populações como função desse refinamento.

Tabela 6.5: Valores das populações para vários refinamentos, no tempo  $t = 100$  do modelo telegráfico predador-presa. (4.28)-(4.29)

$\Delta x$	$\Delta t$	População de Presa	População de Predador
5.0	0.002	62.69325	18.90470
3.5	0.002	65.13776	19.45726
2.0	0.002	70.27077	20.51610
1.0	0.002	71.68832	21.04255
0.75	0.00175	72.22790	21.17758
0.5	0.0015	72.56129	21.29889
0.1	0.001	73.13264	21.49681
0.05	0.0005	73.20856	21.52185
0.04	0.0004	73.22319	21.52683
0.03	0.0003	73.23832	21.53186
0.02	0.0002	73.25332	21.53683
0.01	0.0001	73.26829	21.54183
0.005	0.00005	73.27579	21.54433
0.0025	0.000025	73.27954	21.54558

**Fonte:** Autor.

## 6.2 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DO SISTEMA TELEGRÁFICO PREDADOR-PRESA

Nesta seção realiza-se algumas simulações numéricas do sistema de equações telegráficas predador-presa. A seguir, ilustra-se dois exemplos baseados na Figura 5.2, para  $\Delta x = 0,1$  fixo, considerando as condições de contorno dadas anteriormente em (5.40), (5.41) e (5.42).

A partir da Figura 5.2, a primeira simulação numérica será realizada dentro da zona de estabilidade, enquanto a segunda simulação será realizada na região limítrofe da região de estabilidade conforme a Figura 6.1.

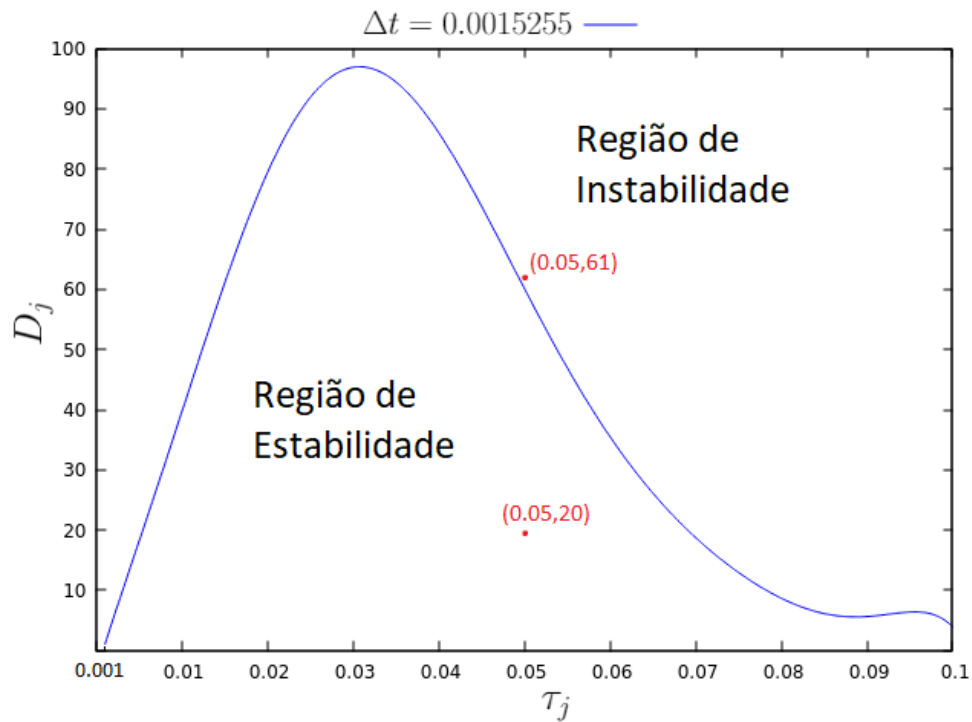


Figura 6.1: Localização dos pontos de estabilidade/instabilidade tomados para as simulações apresentadas nas Tabelas 6.6 e 6.7.

**Fonte:** Autor.

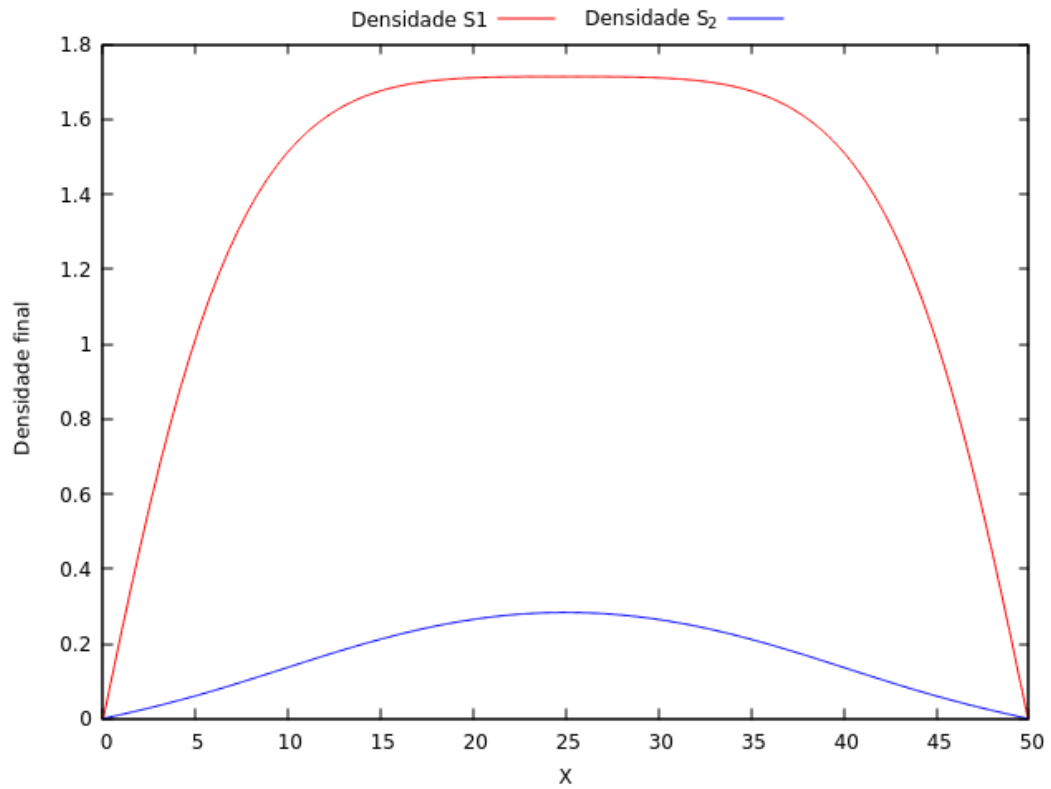
Para a primeira simulação, escolhe-se os valores apresentados na Tabela 6.6 para os parâmetros do modelo.

Tabela 6.6: Valores dos parâmetros da primeira simulação numérica para o sistema (4.28)-(4.29).

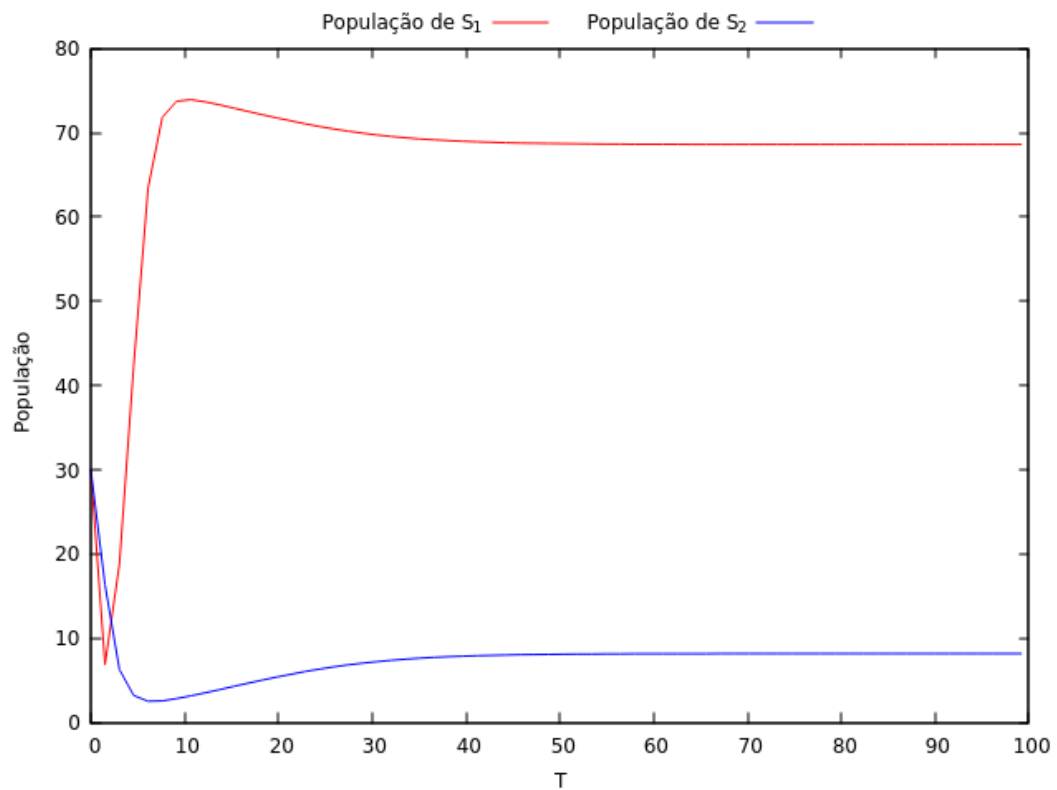
<b>Termos</b>	<b>Presa (i = 1)</b>	<b>Predador (i = 2)</b>
$a_i$	1.0	0.75
$b_i$	0.5	0.0
$c_i$	0.5	0.5
$D_i$	20.0	20.0
$\tau_i$	0.05	0.05

A Figura 6.2 apresenta a variação da densidade e da quantidade populacional de presas e predadores ao longo do espaço e tempo, respectivamente.





(a) Densidade populacional de presas e predadores



(b) População de presas e predadores

Figura 6.2: Densidades e populações do modelo telegráfico predador-presa (4.28)-(4.29) para  $\Delta t = 0,0015$  e  $\Delta x = 0,1$ .

**Fonte:** Autor.

A Figura 6.3 mostra as densidades populacionais de predador e presa em todo domínio escolhido. Observe que não há densidade populacional negativa.

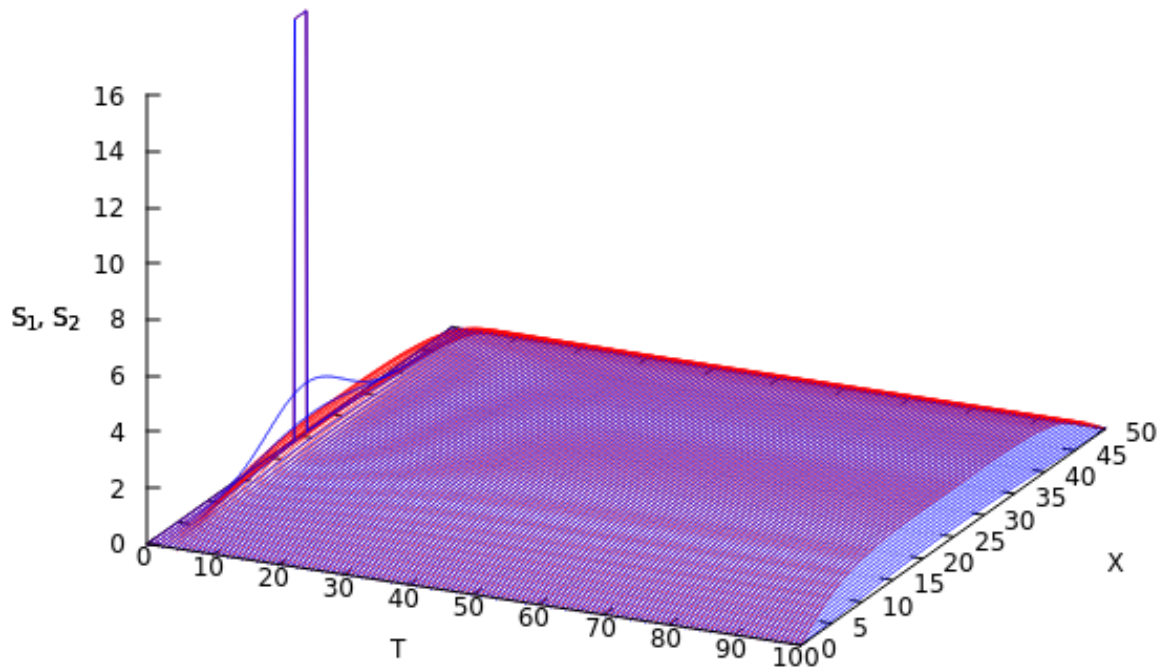


Figura 6.3: Gráfico 3D das densidades populacionais de predador e presa, equação (4.28) e (4.29), para  $\Delta t = 0,0015$  e  $\Delta x = 0,1$ .

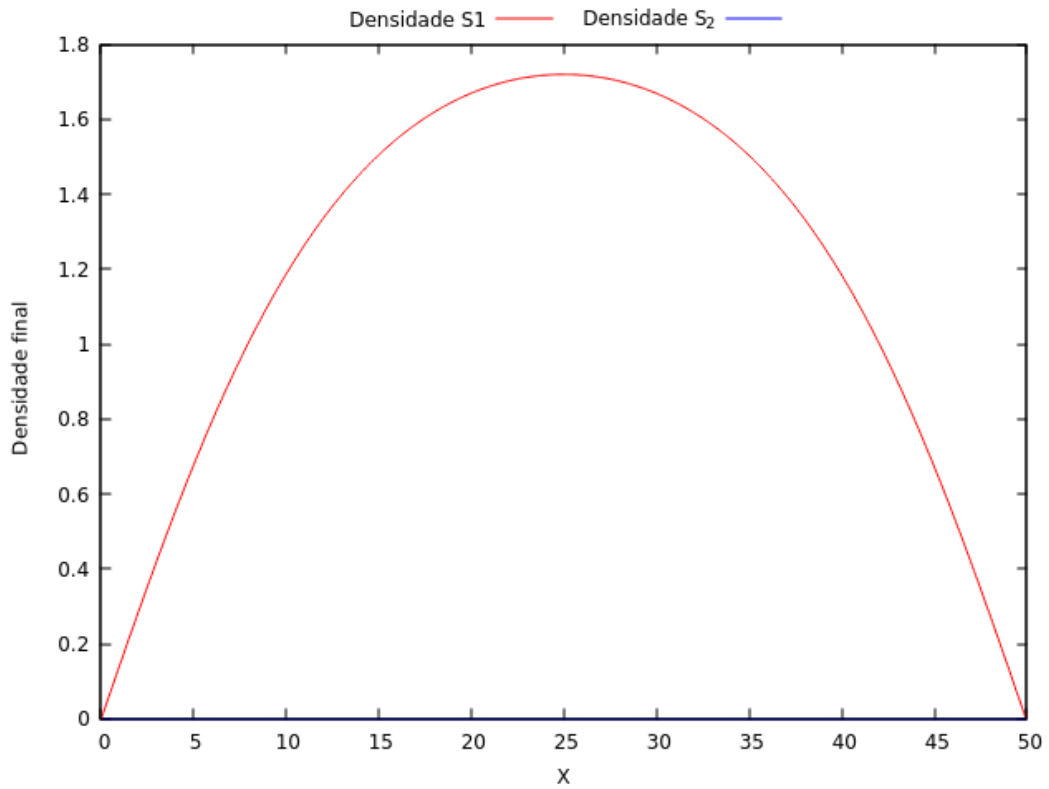
**Fonte:** Autor.

A seguir, na segunda simulação, escolhe-se valores muito próximos da região de instabilidade. Esses dados são apresentados na Tabela 6.7.

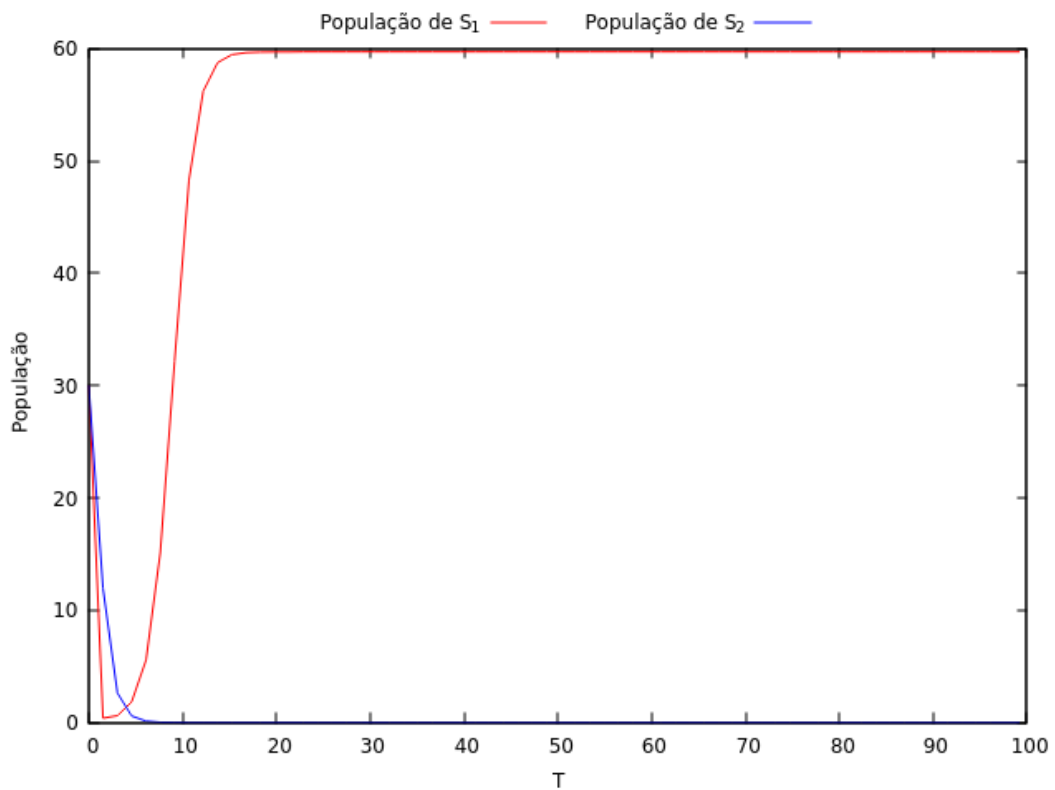
Tabela 6.7: Valores dos parâmetros da segunda simulação numérica para a equação (4.28) e (4.29).

<b>Termos</b>	<b>Presa (i = 1)</b>	<b>Predador (i = 2)</b>
$a_i$	1.0	0.75
$b_i$	0.5	0.0
$c_i$	0.5	0.5
$D_i$	61.0	61.0
$\tau_i$	0.05	0.05

A figura 6.4 apresenta a variação da densidade e da quantidade populacional de presas e predadores ao longo do espaço e tempo, respectivamente. Note que a densidade populacional final de predadores é zero, ou seja, há extinção dos predadores. A Figura 6.4 (b) também mostra um comportamento irreal do ponto de vista biológico para a população de presa, pois ela anula-se para em seguida crescer até a situação de saturação. Isto evidencia que próximo a zona de instabilidade as soluções se comportam mal.



(a) Densidade populacional de presas e predadores



(b) População de presas e predadores

Figura 6.4: Densidades e populações do modelo telegráfico predador-presa (4.28)-(4.29) para  $\Delta t = 0,0015$  e  $\Delta x = 0,1$ , com parâmetros próximos à região de instabilidade.

**Fonte:** Autor.

A figura 6.5 mostra as densidades populacionais de predador e presa em todo domínio escolhido. Observa-se que em um dado momento, surgem densidades populacionais negativas, o que pode ser observado na Figura 6.6.

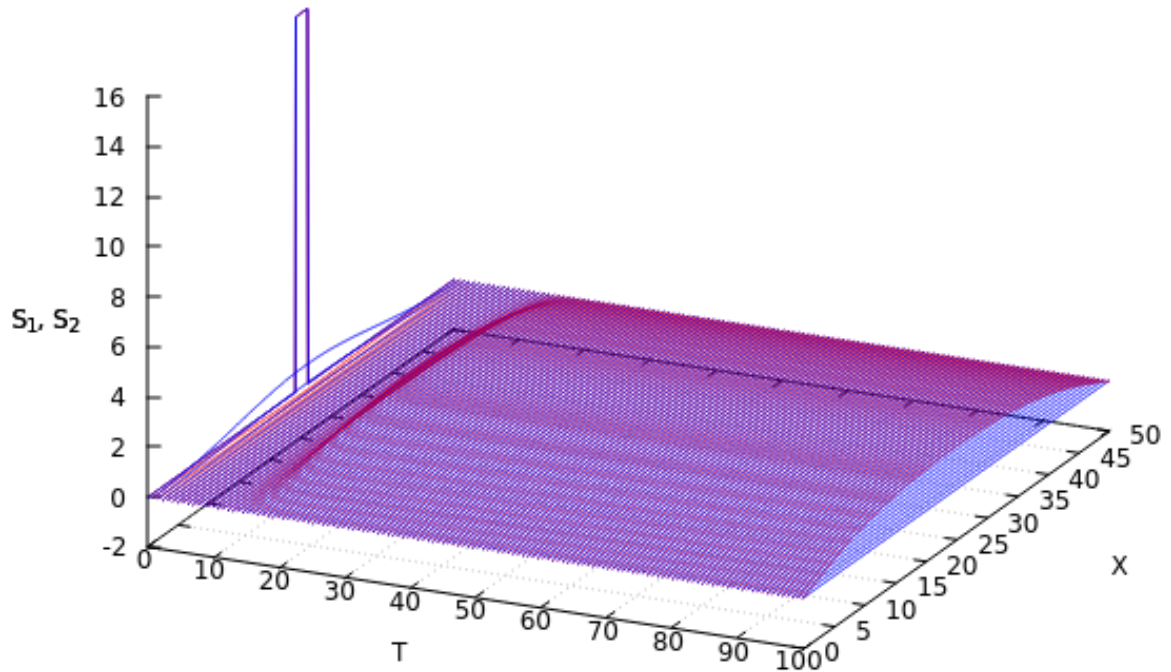


Figura 6.5: Gráfico 3D das densidades populacionais de predador e presa dadas em (4.28) e (4.29) para  $\Delta t = 0,0015$  e  $\Delta x = 0,1$ .

**Fonte:** Autor.

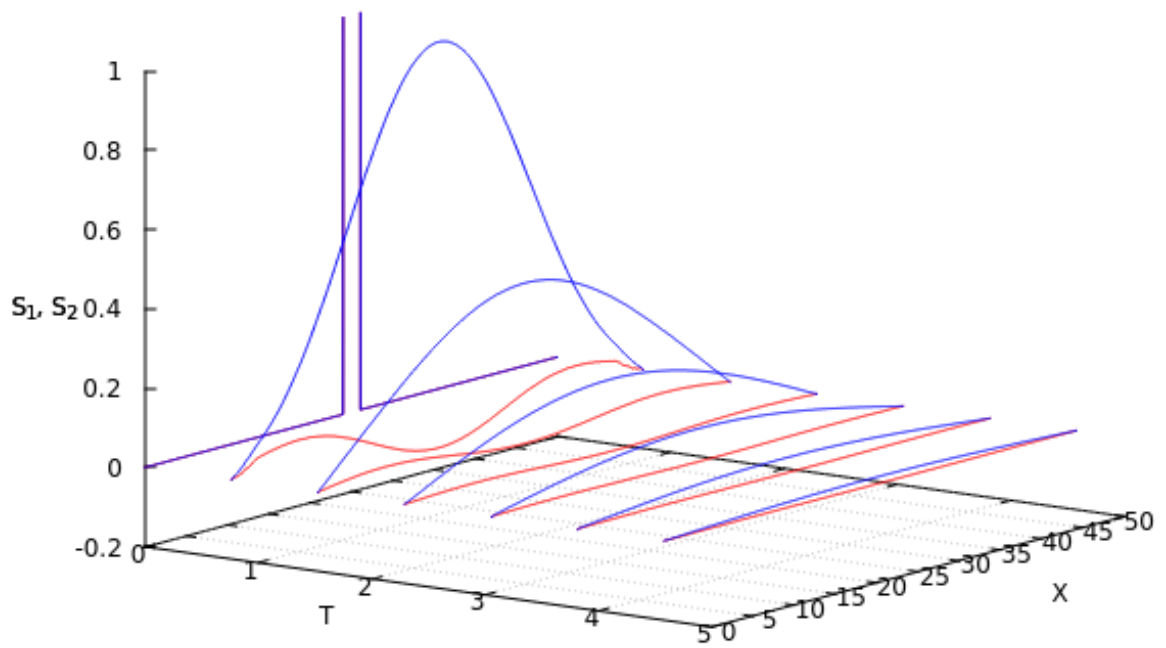


Figura 6.6: Zoom da região onde ocorre solução negativa da densidade populacional da presa, equações (4.28) e (4.29), para  $\Delta t = 0,0015$  e  $\Delta x = 0,1$ .

**Fonte:** Autor.

## 7 CONCLUSÃO

Nesse trabalho foi realizado a modelagem de um sistema predador-presa difusivo-reativo com retardo. Esse sistema de EDPs pode modelar a interação de vários sistemas biológicos, até mesmo em meios fluidos com velocidade (vento, correnteza, etc...).

Primeiramente verificou-se que o método explícito aplicado às equações em estudo é consistente com a EDP. Na sequência discutiu-se a estabilidade numérica dessas equações, via procedimento de Von Neumann.

Verificou-se que o método explícito usual aplicado à equação do telégrafo e a um sistema de equações predador-presa sem retardo é condicionalmente estável. Como não foi possível obter uma relação matemática explícita para condição de estabilidade de Von Neumann para o sistema de equações telegráficas predador-presa, estimou-se uma condição de estabilidade numérica através da relação dos parâmetros de difusão e de retardo das equações, concluindo que a mesma também é condicionalmente estável. Também verificou-se que os termos reativos, difusivos e de retardo da equação estão ligados à estabilidade e à dinâmica populacional.

Em seguida, foi feita uma experimentação numérica acerca da convergência do método numérico. Para isso, refinou-se a malha para concluir que as populações da presa e predador do sistema telegráfico convergem com um erro cada vez menor, quando os espaçamentos temporais e espaciais ficam menores.

Finalmente, através do Teorema da Equivalência de Lax foi possível concluir que o método explícito é convergente, quando satisfeitas as condições de Von Neumann, e que através do estudo acerca do refinamento de malha, conclui-se que o problema em estudo discretizado está posto do ponto de vista numérico,. As simulações numéricas confirmaram a região de convergência do problema.

Como trabalhos futuros pretende-se agregar às equações o efeito convectivo, como na modelagem inicial do problema e realizar o mesmo estudo com estes termos de velocidade acoplados às equações de Navier-Stokes. Pretende-se também utilizar outro tipo de termos fontes e dar continuidade ao estudo do problema em 2D.

Sobre as publicações realizadas a partir dos resultados desse trabalho:

- LUIZ, K. S. ; ORGANISTA, J. ; ROMEIRO, N. M. L. ; CIRILO, E. R. ; NATTI, P. L. . Esquema Explícito e Implícito aplicado a um Modelo Predador-Presa: Simulações numéricas. Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, p. 010120:1-2. Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.
- LUIZ, K. S. ; NATTI, P. L. ; CIRILO, E. R. ; ROMEIRO, N. M. L. . Estabilidade numérica da equação do telégrafo com difusão. In: I Simpósio Paranaense em Equações

Diferenciais, 2017, Londrina. Anais SPED2017, 2017. v. 1. p. 70-72.

## REFERÊNCIAS

- [1] ABIDI, H.;HMIDI, T. On the global well-posedness for boussinesq system. *J. Differential Equations* 233 (2007), 199–220.
- [2] ALI, Y. M.; ZHANG, L. C. Relativistic heat conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 48 (2005), 2397–2406.
- [3] ALLEE, W.C.; BOWEN, E. Studies in animal aggregations: mass protection against colloidal silver among goldfishes. *Journal of Experimental Zoology* 61 (2) (1932), 185–207.
- [4] AYALA, Y. S. S. Global existence and exponential stability for a coupled wave system. *Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications* 16, 1–2 (2012), 29–46.
- [5] BAZYKIN, A. D. Nonlinear dynamics of interacting populations. world scientific. *World Scientific Publishing* (1998).
- [6] BEARUP, D., ET AL. Revisiting brownian motion as a description of animal movement: a comparison to experimental movement data. *Methods Ecol. Evolut.* 7 (2016), 1525–1537.
- [7] BEARUP, D.;PETROVSKAYA, N. B., AND PETROVSKII, S. Some analytical and numerical approaches to understanding trap counts resulting from pest insect immigration. *Mathematical Biosciences* 263 (2015), 143–160.
- [8] BOCIU, L.;LASIECKA, I. Local hadamard well-posedness for nonlinear wave equations with supercritical sources and damping. *J. Differential Equations* 249 (2010), 654–683.
- [9] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Numerical Analysis*, 7 ed. Australia Brooks/Cole, 2001.
- [10] CAMPOS, D.; MÉNDEZ, V. Different microscopic interpretations of the reaction-telegrapher equation. *Journal of Physics A: Mathematical and theoretical* (2009).
- [11] CATTANEO, C. Sulla conduzione del calore. 3. ed. [S.l.] (1948), 83–101.
- [12] CAVALCANTI, M. M.; CAVALCANTI, V. N. D., AND FERREIRA, J. Existence and uniform decay for nonlinear viscoelastic equation with strong damping. *Math. Methods Appl. Sci.* 24 (2001), 1043–1053.
- [13] CAVALCANTI, M. M.;CAVALCANTI, V. N. D., AND SORIANO, J. A. Exponential decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping. *Elec. J. Diff. Eq.* 44 (2002), 1–14.



- [14] CHARNEY, J. G., ET AL. Numerical integration of the barotropic vorticity equation. *Tellus* 2 (1950), 237–254.
- [15] CLARKSON, P. A.;MANSFIELD, E. L. Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 70, 3 (1994), 250–288.
- [16] CORDÓVA, P. N. G. *Análise de Estabilidade de Métodos Numéricos para Modelos Lineares de Ondas Internas*. Dissertação (Mestrado), Curitiba: UFPR, 2011.
- [17] CRANK, J.; NICOLSON, P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 43 (1947), 50–67.
- [18] CUMINATO, J. A.; MENEGUETTE, M. *Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas*. SBMAC, Rio de Janeiro, RJ, december 1999.
- [19] DATTNER, I., ET AL. Modelling and parameter inference of predator–prey dynamics in heterogeneous environments using the direct integral approach. *Journal of The Royal Society Interface* 14, 126 (2017).
- [20] DE CARVALHO, V. S. *Raízes da Ecologia Social: O percurso interdisciplinar de uma ciência em construção*. Tese (Doutorado), Rio de Janeiro: EICOS/IP/UFRJ, 2005.
- [21] DE OLIVEIRA FORTUNA, A. *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações*. Edusp, 2000.
- [22] DE ROOS, A. M.;MCCAULEY, E., AND WILSON, W. G. Mobility versus density-limited predator-prey dynamics on different spatial scales. *Proceedings of the Royal Society of London B: Biological Sciences* 246, 1316 (1991), 117–122.
- [23] FERREIRA, V. G. *Análise e Implementação de Esquemas de Convecção e Modelos de Turbulência para Simulação de escoamentos Incompressíveis Envolvendo Superfícies Livres*. Tese (Doutorado), Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo: São Carlos, 2001.
- [24] FIAŁKOWSKA, E., AND PAJDAK-STÓS, A. Temperature-dependence of predator-prey dynamics in interactions between the predatory fungus *Iecophagus* sp. and its prey *I. inermis* rotifers. *Microbial Ecology* 75, 2 (Feb 2018), 400–406.
- [25] GOTELLI, N. J.;COLWELL, R. K. Quantifying biodiversity: procedures and pitfalls in the measurement and comparison of species richness. *Ecology Letters* 4 (2001), 379–391.

- [26] GREENHALGH, D.; KHAN, Q. J. A., AND PETTIGREW, J. S. An eco-epidemiological predator–prey model where predators distinguish between susceptible and infected prey. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 40, 1 (2017), 146–166.
- [27] GRIEBEL, M.; DORNSEIFER, T., AND NEUNHOEFFER, T. *Numerical Simulation in Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.
- [28] HIRSCH, C. *Numerical Computation Of Internal & External Flows*, 2 ed. JohnWiley & Sons, 2007.
- [29] HIRSCH, M. W., ET AL. Differential equations dynamical systems and an introduction to chaos. *Elsevier Academic Press, San Diego* (2004).
- [30] HOLLING, C. S. The components of predation as revealed by a study of small-mammal predation of the european pine sawfly. *The Canadian Entomologist* 91 (5) (1959), 293–320.
- [31] HOLLING, C. S. Some characteristics of simple types of predation and parasitism. *The Canadian Entomologist* 91 (7) (1959), 385–398.
- [32] HUFFAKER, C.B.; KENNET, C. Some aspects of assessing efficiency of natural enemies. *The Canadian Entomologist* 101 (1969), 425–447.
- [33] HUFFAKER, C. B. Experimental studies on predation: Dispersion factors and predator-prey oscillations. *Hilgardia* 27 (14) (1958), 343–383.
- [34] ISAACSON, E.; KELLER, H. B. *Analysis of Numerical Methods*. Courier Corporation, 1994.
- [35] LAX, P. D.; RICHTMYER, R. D. Survey of the stability of linear finite difference equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 9 (1956), 267–293.
- [36] LEWIS, M.A.; PETROVSKII, S., AND POTTS, J. *The Mathematics Behind Biological Invasions*. Springer, Interdisciplinary Applied Mathematics 44, 2016.
- [37] LI, HAIXIA; LI, Y., AND YANG, W. Existence and asymptotic behavior of positive solutions for a one-prey and two-competing-predators system with diffusion. *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 27 (2016), 261–282.
- [38] LIMA, E. L. *Curso de Análise vol 1*, 14 ed. SBM, Rio de Janeiro, 2016.
- [39] LOTKA, A. J. *Elements of Physical Biology*. Williams and Wilkins Company, 1925.
- [40] MALTHUS, T. R. *An essay on the principle of population; or, a view of its past and present effects on human happiness*. Reeves & Turner, 1888.

- [41] MICKENS, R. E.; JORDAN, P. M. A positivity-preserving nonstandard finite difference scheme for the damped wave equation. *Numerical Methods for partial differential equations* (2003).
- [42] MUSTAFA, M. I. Well posedness and asymptotic behavior of a coupled system of nonlinear viscoelastic equations. *Nonlinear Analysis Real World Application* 13, 1 (2012), 452–463.
- [43] MÉNDEZ, V., ET AL. Reaction-transport systems. mesoscopic foundations, fronts and spatial instabilities. *Springer-Verlag, Berlin* (2010).
- [44] ODUM, E. P. *Fundamentals of Ecology*, 2 ed. W. B. Saunders Company, 1959.
- [45] PAUL, A., ET AL. Fick's laws of diffusion. In *Thermodynamics, Diffusion and the Kirkendall Effect in Solids*. Springer, 2014, pp. 115–139.
- [46] RICHTMYER, R. D.; MORTON, K. W. *Difference methods for initial value problems*. Wiley-Interscience: New York, 1967.
- [47] RODRIGUES, D. A. *Modelagem e Solução Numérica de Equações Reação- Difusão em Processos Biológicos*. Dissertação (Mestrado), Juiz de Fora: UFJF/MMC, 2013.
- [48] ROSA, C. F. *Série de Taylor e aplicações*. Monografia (Graduação), Florianópolis: UFSC, 2013.
- [49] SANGAY, J. C. A. *Aplicação do método de complementaridade mista para problemas parabólicos não lineares*. Dissertação (Mestrado), Juiz de Fora: UFJF/PPM, 2015.
- [50] SHAOYONG, L. The asymptotic theory of semilinear perturbed telegraph equation and its application. *Applied Mathematics and Mechanics* 18 (1997), 657–662.
- [51] SOLOMON, M. E. The natural control of animal populations. *Journal of Animal Ecology* 18 (1949), 1–35.
- [52] STEWART, J. *Cálculo - Vol. 2*, 6 ed. Pioneira Thomson Learning, 2009.
- [53] STRIKWERDA, J. C. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, 2 ed. SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004.
- [54] VERHULST, P. F. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles* (1845).
- [55] VOLTERRA, V. Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi. *Memoria della Reale Accademia Nazionale dei Lincei* 2 (1926), 31–113.