



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

JUNIORMAR ORGANISTA

MODELAGEM E SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DAS
EQUAÇÕES REATIVA-CONVECTIVA-DIFUSIVA COM
RETARDO PARA UM SISTEMA PREDADOR-PRESA

JUNIORMAR ORGANISTA

**MODELAGEM E SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DAS
EQUAÇÕES REATIVA-CONVECTIVA-DIFUSIVA COM
RETARDO PARA UM SISTEMA PREDADOR-PRESA**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Neyva Maria Lopes Romeiro.

Londrina
2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Organista, Juniormar

Modelagem e simulações numéricas das equações reativa-convectiva-difusiva com retardo para um sistema predador-presa / Juniormar Organista. – Londrina, 2018. 84 f. : il.

Orientador: Neyva Maria Lopes Romeiro.

Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional)-Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2018.

Inclui Bibliografia.

1. Matemática aplicada - Teses. 2. Análise Numérica - Teses. 3. Equações diferenciais parciais - Teses. 4. Equação reativa-convectiva-difusiva com retardo - Teses. I. Lopes Romeiro, Neyva Maria. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

JUNIORMAR ORGANISTA

**MODELAGEM E SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DAS EQUAÇÕES
REATIVA-CONVECTIVA-DIFUSIVA COM RETARDO PARA UM
SISTEMA PREDADOR-PRESA**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Neyva Maria Lopes
Romeiro
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Gylles Ricardo Ströher
Universidade Tecnológica Federal do Paraná -
UTFPR

Prof. Dr. Paulo Laerte Natti
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 23 de fevereiro de 2018.

*Dedico este trabalho a minha linda esposa e a toda
minha família.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me dar forças em momentos de dificuldades.

Aos meus pais, Valdir Organista e Vera M. P. Organista, por me apoiarem em minhas escolhas e por seus valorosos conselhos. O apoio que me deram foi fundamental para que conseguisse terminar a graduação e iniciasse o mestrado.

A minha linda e amada esposa, Estela Garcia Organista, por me apoiar nos momentos mais difíceis e de ouvir minhas queixas.

A minha orientadora, Prof^ª. Dr^ª. Neyva Maria Lopes Romeiro, por seu apoio, paciência, dedicação e pelo incentivo nos momentos difíceis.

Agradecimentos especiais aos professores Eliandro R. Cirilo e Paulo L. Natti pelas valiosas contribuições, com as quais este trabalho se fez possível.

Aos integrantes da banca, pela disponibilidade, colaboração, contribuição com a transmissão de conhecimentos e pelo estímulo para o aperfeiçoamento deste trabalho.

Aos professores do PGMAC, pela competência e disposição em compartilhar experiências.

Aos professores do departamento de matemática da Universidade Estadual de Maringá, onde fiz minha graduação, e de forma muito especial aos professores Carla Montorfano, João Roberto Gerônimo e Valéria Neves Domingos Cavalcanti que foram meus orientadores das iniciações científicas que fiz.

Aos meus colegas do PGMAC, por compartilharem os momentos de dificuldades e vitórias.

À CAPES, pelo apoio financeiro para o desenvolvimento deste trabalho.

Enfim, a todos aqueles que de uma maneira ou de outra contribuíram para a conclusão de mais uma etapa em minha vida.

"Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes". (Marthin Luther King)

ORGANISTA, Juniomar. **Modelagem e simulações numéricas das equações reativa-convectiva-difusiva com retardo para um sistema predador-presa**. 2018. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina 2018.

RESUMO

Fenômenos biológicos são modelados matematicamente com o objetivo de propor explicações, ou melhorar o entendimento de determinados comportamentos. Dentre as classes de problemas que abordam as interações entre populações têm-se as equações predador-presa, que podem ser modeladas por meio de equações diferenciais parciais. Neste contexto, o presente trabalho objetiva explicitar o comportamento de um modelo aprimorado envolvendo as equações predador-presa de tal forma a contemplar o fenômeno de difusão e retardo, considerando que as populações estão sob a influência de um campo de velocidade. A difusão é deduzida por meio da primeira lei de Fick, fazendo-se necessário introduzir um termo de retardo, para corrigir o paradoxo da difusão de velocidade infinita. No estudo da influência do efeito difusivo na dinâmica populacional são considerados três cenários. No primeiro, as populações encontram-se na mesma posição e o efeito difusivo não é considerado. No segundo e no terceiro, as populações são consideradas em posições distintas, ou seja, são separadas espacialmente, sendo que, no segundo cenário o processo de difusão não é considerado, enquanto no terceiro o efeito difusivo ocorre. Por fim, no estudo da influência do campo de velocidades na dinâmica populacional são considerados dois cenários para as equações reativa-convectiva-difusiva com retardo para um sistema predador-presa. No primeiro cenário o campo de velocidade é identicamente nulo e no segundo o campo de velocidade é uniforme não nulo. Por meio dos resultados numéricos obtidos, pode-se constatar tanto a influência da difusão, como a influência do campo de velocidades na dinâmica das populações e também os efeitos sobre as populações (extinção/sobrevivência).

Palavras-chave: Modelo predador-presa. Efeito de retardo. Equação de Maxwell-Cattaneo. Termo reativo. Termo convectivo. Termo difusivo.

ORGANISTA, Juniormar. **Modeling and numerical simulations of the reactive-convective-diffusive equations with delay for a predator-prey system.** 2018. Dissertation (Master's degree in Applied Mathematics and Computational) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

ABSTRACT

Biological phenomena are modeled mathematically with the purpose of proposing explanations, or improving the understanding of certain behaviors. Among the classes of problems that deal with interactions between populations are the predator-prey equations, which can be modeled by means of partial differential equations. In this context, the present work aims to explain the behavior of an improved model involving the predator-prey equations in such a way to contemplate the phenomenon of diffusion and delay, considering that the populations are under the influence of a velocity field. The diffusion is deduced by means of the first law of Fick, making it necessary to introduce a term of delay, to correct the paradox of the diffusion of infinite velocity. In the study of the influence of the diffusive effect on the population dynamics, three scenarios are considered. In the second and third, the populations are considered in different positions, that is, they are separated spatially, and in the second scenario the diffusion process is not considered, while in the third scenario the diffusive effect occurs. Finally, in the study of the influence of the field of velocities in the population dynamics, two scenarios are considered for the reactive-convective-diffusive equations with delay for a predator-prey system. In the first scenario the velocity field is identically zero and in the second the speed field is uniform not zero. The influence of diffusion, as well as the influence of velocity field on population dynamics, as well as effects on populations (extinction / survival) can be observed through the obtained numerical results.

Keywords: Predator-prey model. Delay effect. Maxwell-Cattaneo equation. Reactive term. Convective term. Diffusive term.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Modelo de Malthus considerando $S_0 = 20$ e $\beta = 0.5$	16
1.2	Modelo de Verhulst considerando $k = 200$ e $\beta = 0.5$	17
1.3	Modelo de Montroll considerando $k = 200$, $\alpha = 0.5$ e $\beta = 0.5$	18
1.4	Comparação entre Malthus, Verhulst e Montroll, considerando $S_0 = 20$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$ e $k = 200$	19
1.5	Dinâmica populacional do modelo de Lotka-Volterra considerando os parâmetros $a_1 = 1.0$, $c_1 = 0.5$, $a_2 = 0.75$, $c_2 = 0.5$ e condições iniciais $S_1(0) = 1$ e $S_2(0) = 0.5$	20
1.6	Dinâmica populacional do modelo de Lotka-Volterra considerando os parâmetros $a_1 = 1.0$, $b_1 = 0.5$, $c_1 = 0.5$, $a_2 = 0.75$, $c_2 = 0.5$ e condições iniciais $S_1(0) = 1$ e $S_2(0) = 0.5$	21
4.1	Malha.	43
4.2	Célula computacional para resolução do sistema discretizado predador-presa proposto.	52
6.1	Condição inicial para a equação de difusão (6.3)	68
6.2	Equação da difusão (6.3): (a) Solução numérica. (b) Solução analítica.	68
6.3	Mapa de cores para a equação de difusão (6.3): (a) Numérica. (b) Analítica.	68
6.4	Densidade populacional até atingir o regime permanente para as condições iniciais (6.8): (a) Presa - (b) Predador.	71
6.5	Modelo predador-presa logístico com condição inicial dada pela equação (6.8): (a) Densidade inicial. (b) Evolução das populações ao longo do tempo até atingir o regime de permanência.	71
6.6	Densidade populacional para o modelo ao longo do tempo para as condições iniciais (6.9): (a) Presa - (b) Predador.	72
6.7	Modelo predador-presa logístico com condição inicial dada pela equação (6.9): (a) Densidade inicial. (b) Evolução das populações ao longo do tempo.	73
6.8	Densidade populacional ao longo do tempo para as condições iniciais (6.9) e difusão $D_1 = D_2 = 0.05$: (a) Presa - (b) Predador.	73
6.9	Modelo predador-presa logístico com condição inicial dada pela equação (6.9) e difusão $D_1 = D_2 = 0.05$: (a) Densidade inicial. (b) Evolução das populações ao longo do tempo.	74
6.10	Densidade populacional para o modelo considerando $u \equiv 0.0$ para as condições iniciais 6.8: (a) Presa - (b) Predador.	75

6.11	Mapa de cores da figura 6.10: (a) Presa. (b) Predador.	76
6.12	Modelo reativo-convectivo-difusivo com retardo pra a condição inicial dada pela equação (6.8) com $u \equiv 0$: (a) Densidade inicial. (b) Evolução das populações ao longo do tempo.	76
6.13	Densidade populacional para o modelo considerando $u \equiv 1.0$ para as condições iniciais (6.8): (a) Presa - (b) Predador.	77
6.14	Mapa de cores da figura 6.13: (a) Presa. (b) Predador.	77
6.15	Modelo reativo-convectivo-difusivo com retardo pra a condição inicial dada pela equação (6.8): (a) Densidade inicial. (b) Evolução das populações ao longo do tempo.	78
6.16	Simulações realizadas para verificação da estabilidade da equação com retardo: (a) Presa. (b) Predador.	79

LISTA DE TABELAS

6.1	Parâmetros para equação de difusão	67
6.2	Comparação entre solução numérica e analítica da equação do calor	69
6.3	Parâmetros Lotka-Volterra logístico	70
6.4	Valores das populações após atingirem o regime permanente de algumas das simulações para as condições iniciais (6.8)	72
6.5	Valores das populações do sistema com difusão após atingirem o regime permanente	74
6.6	Parâmetros do modelo reativo-convectivo-difusivo com retardo	75
6.7	Estabilidade da discretização do sistema com retardo e $u \equiv 1.0$	78

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIACÕES

x = Variável espacial

t = Variável temporal

S_1 = Densidade das presas

S_2 = Densidade dos predadores

a_1 = Taxa de natalidade das presas

a_2 = Taxa de mortalidade dos predadores na ausência das presas

b_1 = Taxa de saturação da presa

c_1 = Taxa per capita do consumo de presas pela população de predadores

c_2 = Taxa de biomassa de presas que é convertida em biomassa de predadores

D_1 = Taxa de difusão de presas

D_2 = Taxa de difusão de predadores

τ_1 = Retardo da presa

τ_2 = Retardo do predador

u = Campo de velocidade

$\mathcal{O}(h^{n+1}, k^{n+1})$ = Erro da aproximação de Taylor

ELT = Erro Local de Truncamento

$F.O.U.$ = First Order Upwind

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	CONCEITOS PRELIMINARES	23
2.1	DIFERENÇAS FINITAS	23
2.1.1	Equações de diferenças finitas para funções de uma variável	23
2.1.2	Equações de diferenças finitas para funções de duas variáveis	25
2.2	RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES	27
2.2.1	Método de Gauss-Seidel	27
2.2.2	Crerios de Convergência	27
2.3	INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	29
2.3.1	Interpolação Polinomial	29
2.3.2	Integração numérica	31
2.3.3	Regra do Trapézio	33
2.3.4	Regras de Simpson	34
2.3.5	Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson	34
2.3.6	Regra $\frac{3}{8}$ de Simpson	35
3	MODELAGEM DO SISTEMA PREDADOR-PRESA REATIVO-CONVECTIVO	
-	-	
	DIFUSIVO COM RETARDO	36
3.1	EQUAÇÕES DE REAÇÃO-DIFUSÃO	36
3.2	EQUAÇÃO DE MAXWELL-CATTANEO	37
3.3	EQUAÇÃO REATIVA-DIFUSIVA COM RETARDO	38
3.4	MODELAGEM DO SISTEMA PREDADOR-PRESA REATIVO-CONVECTIVO- DIFUSIVO COM RETARDO	40
4	DISCRETIZAÇÃO DO SISTEMA PREDADOR-PRESA	43
4.1	DISCRETIZAÇÕES DOS TERMOS COMUNS ÀS EQUAÇÕES DA PRESA E DO PREDADOR	43
4.2	DISCRETIZAÇÕES DOS TERMOS NÃO COMUNS NA EQUAÇÃO DA PRESA	46
4.3	DISCRETIZAÇÕES DOS TERMOS NÃO COMUNS NA EQUAÇÃO DO PREDADOR	48
4.4	SISTEMAS LINEARES RESULTANTES DAS DISCRETIZAÇÕES (4.23) E (4.34)	49
5	ANÁLISE DA CONSISTÊNCIA	53
5.1	ANÁLISE DE CONSISTÊNCIA DAS DISCRETIZAÇÕES	53
5.1.1	Análise da consistência das discretizações com $\tau_1 = \tau_2 = 0$ e $u \equiv 0$	53

5.1.2	Análise da consistência das discretizações com $\tau_1 \neq 0$, $\tau_2 \neq 0$ e $u \equiv 0$.	56
5.1.3	Análise da consistência das discretizações com $\tau_1 \neq 0$, $\tau_2 \neq 0$ e $u \neq 0$.	60
5.2	CONVERGÊNCIA	63
6	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS E ANÁLISE DE ESTABILIDADE	65
6.1	IMPLEMENTAÇÃO	65
6.2	SIMULAÇÕES	66
6.2.1	Equação de Difusão	66
6.2.2	Modelo predador-presa Lotka-Volterra logístico	69
6.2.3	Modelo reativo-convectivo-difusivo com retardo predador-presa	74
7	CONCLUSÃO	80
	REFERÊNCIAS	82

1 INTRODUÇÃO

A dinâmica populacional aborda a variação, tanto no tempo como no espaço, das densidades e dos tamanhos das populações, visando uma melhor compreensão quanto ao número de indivíduos de uma determinada população, assim como os fatores que a influenciam. Muitos dos problemas que abordam a interação entre populações, modelados por meio de equações diferenciais parciais (EDP's), são conhecidos como as equações predador-presa.

Os primeiros modelos matemáticos para descrever a dinâmica de populações são datados dos séculos XVIII e XIX. Em 1798, Thomas Robert Malthus (1766-1834) publicou a obra *An Essay on the principle of population* [24], na qual previa que o crescimento populacional se daria por uma progressão geométrica, enquanto os meios de sobrevivência cresceriam em progressão aritmética. Matematicamente, o modelo proposto por Malthus para descrever a dinâmica de uma população S_j , pode ser descrita pela equação (1.1)

$$\begin{cases} \frac{dS_j}{dt} = \beta S & (1.1) \\ S(0) = S_0, & (1.2) \end{cases}$$

onde $\beta > 0$ é a taxa de crescimento intrínseco da população e S_0 é a população inicial. A solução analítica da equação (1.1), com a condição inicial (1.2), é dada pela equação (1.3)

$$S(t) = S_0 \exp(\beta t), \quad t \geq 0. \quad (1.3)$$

Portanto, pode-se verificar que o modelo de Malthus prevê que a população crescerá exponencialmente. Ilustra-se na figura 1.1 o resultado do modelo e Malthus, considerando $S_0 = 20$ e $\beta = 0.5$, evidenciando o comportamento exponencial do modelo.

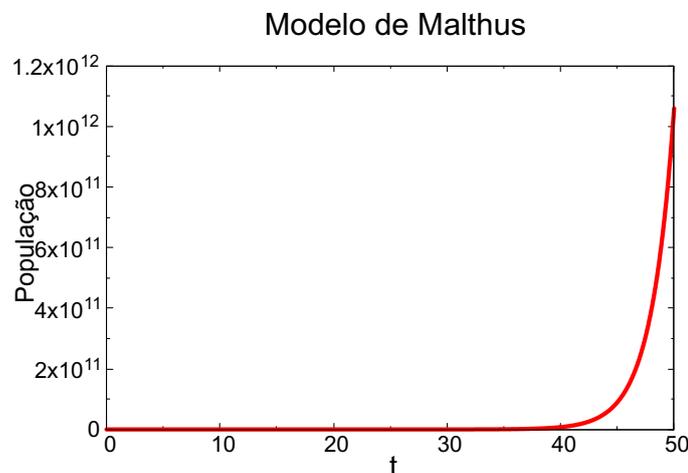


Figura 1.1: Modelo de Malthus considerando $S_0 = 20$ e $\beta = 0.5$.

Fonte: Autor

Acreditando que o modelo de crescimento de Malthus não era adequado para explicar a expansão demográfica de um país, Pierre-François Verhulst (1804-1849) elaborou considerações complementares às apresentadas por Malthus [27]. Verhulst incorporou uma limitação ao modelo reduzindo a taxa de crescimento e inibindo o crescimento exponencial [35]. A dinâmica populacional proposta por Verhulst (1838) pode ser descrita matematicamente pela equação diferencial não linear dada por (1.4)

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \beta \left(1 - \frac{S}{k}\right) S \\ S(0) = S_0, \end{cases} \quad (1.4)$$

onde $\beta > 0$ é a taxa intrínseca de crescimento da população, S_0 é a população inicial e $k > 0$ é o nível de saturação da população, determinado pelos recursos disponíveis para a população. A solução analítica da equação (1.4), com a condição inicial (1.5), pode ser descrita pela equação

$$S(t) = \frac{S_0 k \exp(\beta t)}{k + S_0 (\exp(\beta t) - 1)}. \quad (1.6)$$

Ilustra-se na figura 1.2 soluções da equação (1.4) para $S_0 = 20, 100$ e 300 , e $k = 200$. Observa-se que para $t > 15$, todas as populações atingiram o nível de saturação $k = 200$.

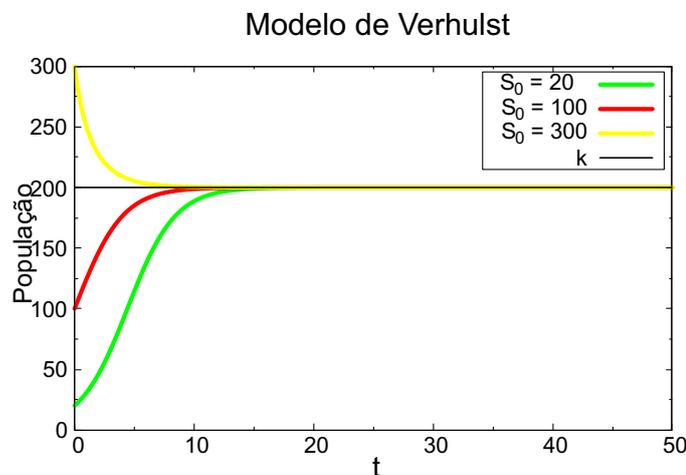


Figura 1.2: Modelo de Verhulst considerando $k = 200$ e $\beta = 0.5$.

Fonte: Autor

Em 1971, Montroll propôs um modelo para generalizar o modelo de Verhulst, o qual incluiu um parâmetro que indica a posição do ponto de inflexão da curva de crescimento. O modelo de Montroll é descrito pela equação diferencial não linear dada pela equação (1.7)

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \beta \left(1 - \left(\frac{S}{k}\right)^\alpha\right) S \\ S(0) = S_0, \end{cases} \quad (1.7)$$

$$(1.8)$$

onde α é o indicador da posição do ponto de inflexão da curva, $\beta > 0$ é a taxa intrínseca de crescimento da população, S_0 é a população inicial e $k > 0$ é o nível de saturação da população.

Verifica-se ainda, que o modelo de Montroll pode ser considerado como uma generalização do modelo de Verhulst, uma vez que ao considerar $\alpha = 1$ na equação (1.7) obtém-se a equação (1.4). A equação (1.7), com condição inicial dada pela equação (1.8), possui a solução analítica dada por

$$S(t) = \frac{S_0 k}{[S_0^\alpha - (S_0^\alpha - k^\alpha) \exp(-\alpha a t)]^{\frac{1}{\alpha}}}. \quad (1.9)$$

Ilustra-se na figura 1.3 soluções da equação (1.7) para $S_0 = 20, 100$ e 300 , e $k = 200$. Observa-se que para $t > 25$, todas as populações atingem o nível de saturação $k = 200$.

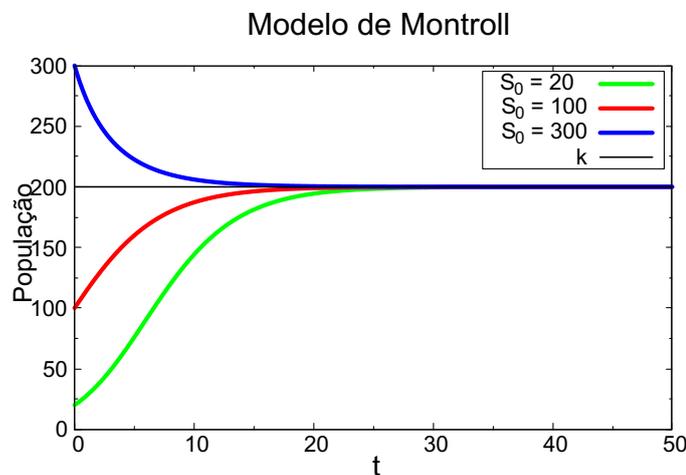


Figura 1.3: Modelo de Montroll considerando $k = 200$, $\alpha = 0.5$ e $\beta = 0.5$.
Fonte: Autor

O modelo de Montroll apresenta uma vantagem em relação ao de Verhulst, pois é possível adaptá-lo a problemas de naturezas diversas por intermédio do cálculo do ponto de inflexão [23]. Na figura 1.4 pode-se observar a diferença entre os modelos de Malthus, Verhulst e Montroll para uma mesma população inicial $S_0 = 20$.

As equações (1.1), (1.4) e (1.7) foram usadas para descrever a dinâmica populacional desconsiderando a influência de outras populações, quando muito a interação entre a própria espécie, isto é, os modelos apresentados levam em consideração a dinâmica de uma única população sem considerar predações.

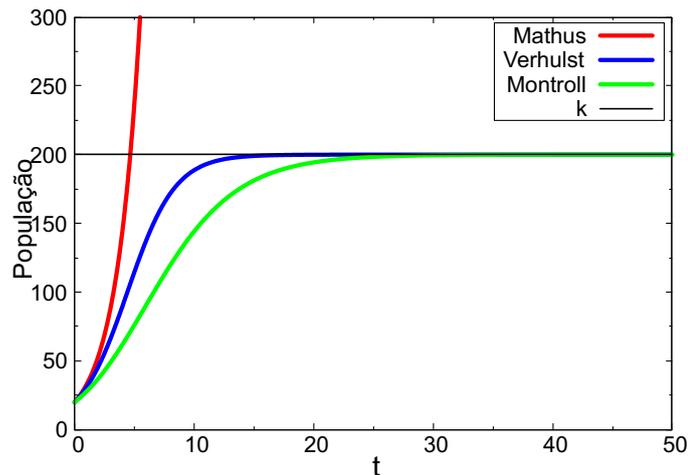


Figura 1.4: Comparação entre Malthus, Verhulst e Montroll, considerando $S_0 = 20$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$ e $k = 200$.

Fonte: Autor

Em 1920 teve início os primeiros estudos matemáticos destinados a descrever as interações entre populações. Alfred Lotka (1880-1949) e Vito Volterra (1860-1940) propuseram em 1925 e 1926, respectivamente, de forma independente, um modelo para a interação entre espécies [22, 36]. O modelo matemático apresentado por Volterra tinha como objetivo a análise das variações cíclicas observadas nas populações de tubarões e pequenos peixes no mar Adriático. Simultaneamente, Lotka desenvolveu um modelo para descrever reações químicas, nas quais as concentrações dos elementos químicos oscilavam, um processo semelhante que ocorre com populações em competição. O modelo de Lotka-Volterra foi pioneiro ao descrever matematicamente a interação entre duas populações distintas (presas e predadores). A introdução deste modelo, bem como as suas conseqüentes variações, foi uma das principais contribuições para a dinâmica de populações. O modelo proposto, conhecido como modelo Lotka-Volterra, pode ser descrito matematicamente pelo sistema dado em (1.10)

$$\begin{cases} \frac{dS_1}{dt} = a_1 S_1 - c_1 S_1 S_2 \\ \frac{dS_2}{dt} = -a_2 S_2 + c_2 S_1 S_2, \end{cases} \quad (1.10)$$

com condições iniciais $S_1(0) = S_1^0$; $S_2(0) = S_2^0$, onde $S_1 > 0$ e $S_2 > 0$ denotam, respectivamente, as populações iniciais da presa e do predador. As constantes $a_1 > 0$ e $c_1 > 0$ são, respectivamente, a taxa de natalidade da presa e a taxa de perda devido à interação com o predador, e as constantes $a_2 > 0$ e $c_2 > 0$ são, respectivamente, a taxa de mortalidade do predador e a taxa de ganho devido à interação com o presa.

Considerando as constantes $a_1 = 1.0$, $c_1 = 0.5$, $a_2 = 0.75$, $c_2 = 0.5$ e as condições iniciais dadas por $S_1(0) = 1$ e $S_2(0) = 0.5$, dadas em [32], obtém-se a dinâmica populacional representada na figura 1.5.

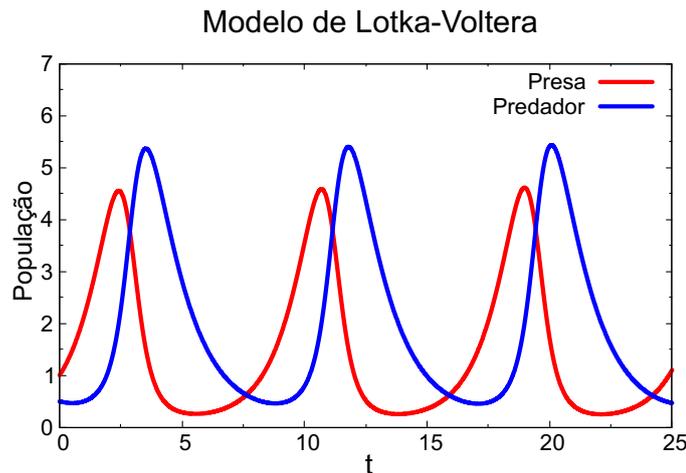


Figura 1.5: Dinâmica populacional do modelo de Lotka-Volterra considerando os parâmetros $a_1 = 1.0$, $c_1 = 0.5$, $a_2 = 0.75$, $c_2 = 0.5$ e condições iniciais $S_1(0) = 1$ e $S_2(0) = 0.5$.

Fonte: Autor

Observa-se na figura 1.5, que o modelo de Lotka-Volterra, descrito em (1.10), descreve sistemas predador-presa que apresentam variações cíclicas, contudo não descreve sistemas biológicos que evoluem para uma solução assintoticamente estável ou que apresentam extinção de populações. Para descrever tais fenômenos, torna-se necessário a inclusão de um termo de saturação na população de presas, de tal forma a amortecer as oscilações de Lotka-Volterra. Desta forma, para descrever uma solução assintoticamente estável ou que apresentam extinção de populações, considera-se um termo de saturação do tipo logístico, como dado em (1.11).

$$\begin{cases} \frac{dS_1}{dt} = a_1 S_1 - b_1 S_1^2 - c_1 S_1 S_2 \\ \frac{dS_2}{dt} = -a_2 S_2 + c_2 S_1 S_2 \end{cases} \quad (1.11)$$

com condições iniciais $S_1(0) = S_1^0$; $S_2(0) = S_2^0$, onde $S_1 > 0$ e $S_2 > 0$ denotam, respectivamente, a população da presa e do predador. As constantes $a_1 > 0$ e $c_1 > 0$ são, respectivamente, a taxa de natalidade da presa e a taxa de perda devido à interação com o predador, as constantes $a_2 > 0$ e $c_2 > 0$ são, respectivamente, a taxa de mortalidade do predador e a taxa de ganho devido à interação com o presa e b_1 a taxa de saturação da presa. Considerando as constantes $a_1 = 1.0$, $b_1 = 0.5$, $c_1 = 0.5$, $a_2 = 0.75$, $c_2 = 0.5$ e as condições iniciais dadas por $S_1(0) = 1$ e $S_2(0) = 0.5$, dadas em [32], obtém-se a dinâmica populacional representada na figura 1.6

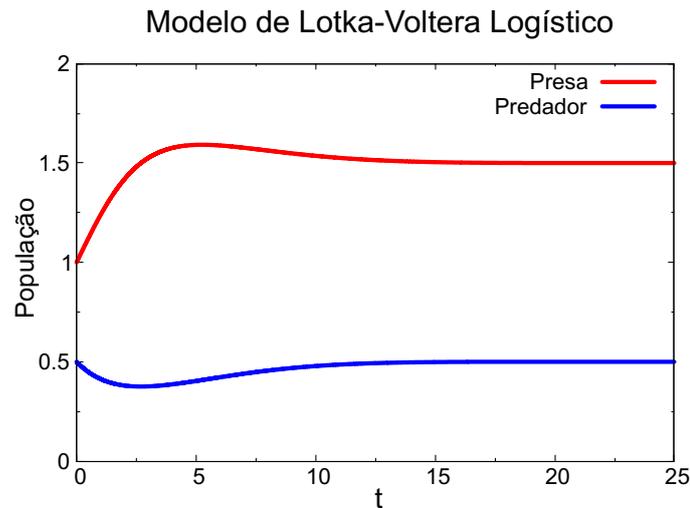


Figura 1.6: Dinâmica populacional do modelo de Lotka-Volterra considerando os parâmetros $a_1 = 1.0$, $b_1 = 0.5$, $c_1 = 0.5$, $a_2 = 0.75$, $c_2 = 0.5$ e condições iniciais $S_1(0) = 1$ e $S_2(0) = 0.5$.

Fonte: Autor

Comparando as figuras 1.5 e 1.6, onde considerou-se as mesmas condições iniciais e constantes, acrescentando $b_1 = 0.5$ no modelo em (1.6), pode-se observar o efeito da saturação imposta ao modelo Lotka-Volterra.

Com o propósito de estudar os efeitos da predação de uma espécie por outra, surgiram na literatura, trabalhos a fim de descrever matematicamente este fenômeno [9, 11, 12, 19]. No final da década de 1950, Crawford Stanley Holling realizou experimentos a fim de investigar como a taxa de captura de presas por um predador estava relacionada à densidade das presas [14, 15], relação esta denominada resposta funcional [33]. Holling identificou três categorias gerais de resposta funcional. Na primeira categoria, também denominada resposta funcional do tipo 1, o número de presas consumidas aumenta em proporção direta com a densidade da presa ilimitadamente, ou seja, a porcentagem da população de presas consumidas pela densidade da presa é constante. Na segunda categoria, resposta funcional do tipo 2, com o aumento da população de presa, cada predador fica saciado e passa a consumir um número constante de presa. Por fim, na terceira categoria, resposta funcional do tipo 3, o efeito de predação é semelhante ao do tipo 2, exceto na baixa densidade de presas, onde ocorre uma aceleração do consumo de presas.

Um outro efeito específico que pode ser considerado na interação entre espécies é o conhecido efeito Allee, descrito inicialmente na década de 1930 por Warder Clyde Allee [1]. Através de estudos experimentais, Allee pôde demonstrar que a população de um certo peixe, cresce mais rapidamente quando há mais indivíduos dentro de um tanque. Isso o levou a concluir que o mutualismo pode melhorar a taxa de sobrevivência dos indivíduos, e essa cooperação pode ser crucial na evolução geral da estrutura social. Na visão clássica da dinâmica populacional, tem-se que, devido à competição por recursos, uma população terá uma taxa de

crescimento reduzida em maior densidade e uma maior taxa de crescimento em menor densidade. Em outras palavras, quanto menor a densidade populacional de uma espécie, maior será a efetividade da mesma na busca de recursos, uma vez que esses são limitados. No entanto, o conceito do efeito Allee introduziu a ideia de que o contrário é verdadeiro. Para essas espécies, os indivíduos necessitam da assistência de outros indivíduos para sobreviverem.

Atualmente na literatura encontra-se trabalhos que dão ênfase aos estudos da dinâmica de espécies invasoras, epidemias e outros fenômenos biológicos [3, 4, 18, 28].

Neste contexto, este trabalho tem como objetivo explicitar o comportamento de um modelo aprimorado envolvendo as equações predador-presa de tal forma a contemplar o fenômeno de difusão e retardo, considerando que as populações estão sob a influência de um campo de velocidades do fluido onde estão imersas, assim surge o modelo predador-presa reativo-convectivo-difusivo com retardo (*RCCR*).

Para atingir o objetivo do trabalho, a dissertação encontra-se organizada da seguinte forma: No capítulo 2 é apresentado alguns conceitos preliminares de diferenças finitas, resolução de sistemas lineares e integração numérica. No capítulo 3 é desenvolvida a modelagem matemática do modelo reativo-difusivo com retardo. Tal modelo pretende contemplar o fenômeno de retardo na dispersão das populações e o fenômeno convectivo devido a um fluido onde o sistema predador-presa se encontra. O retardo é introduzido por meio da equação de Maxwell-Cattaneo. Da interação entre as populações e o campo de velocidade surge o modelo *RCCR*, onde os efeitos reativos são devidos às interações entre a presa e o predador. No capítulo 4 são formuladas as discretizações das equações modeladas no capítulo 3, de modo que o esquema resultante seja um esquema implícito. Para tal, utilizou-se o método de diferenças finitas para aproximar os termos das derivadas das equações diferenciais parciais. No capítulo 5 é apresentada uma análise sobre a consistência e a estabilidade das discretizações obtidas no capítulo 4, de modo a verificar a convergência do método adotado. No capítulo 6 ilustram-se as soluções numéricas do modelo proposto, submetendo-o à alguns testes. Como primeiro teste, são consideradas condições iniciais e parâmetros no modelo proposto de tal forma a torna-lo equivalente ao modelo Lotka-Volterra Logístico, para verificar os efeitos que a difusão tem sobre a dinâmica populacional. Por fim, faz-se testes com campo de velocidade, para verificar os efeitos sobre a dinâmica populacional. No capítulo 7 apresenta-se as conclusões obtidas através da simulações numéricas.

2 CONCEITOS PRELIMINARES

Neste capítulo serão apresentados alguns conteúdos a serem utilizados ao longo da dissertação. Inicialmente será apresentado o conceito de aproximações de derivadas por diferenças finitas de uma e duas variáveis. Posteriormente será apresentado conteúdo para resolução de sistemas lineares e as condições para a convergência do método iterativo de Gauss-Seidel. Por fim, será apresentado conteúdos para integração numérica e algumas regras para integração numérica utilizadas.

2.1 DIFERENÇAS FINITAS

A ideia do método das diferenças finitas é a discretização do domínio e a aproximação das derivadas por valores numéricos da função a ser avaliada. Na prática substitui-se as derivadas pela razão incremental que converge para o valor da derivada quando o incremento tende a zero [8].

2.1.1 Equações de diferenças finitas para funções de uma variável

Inicialmente, por simplicidade e melhor compreensão sobre o desenvolvimento das discretizações a serem utilizadas no trabalho, aborda-se o problema envolvendo apenas uma variável. Considere inicialmente, $x_0 \in \mathbb{R}$ qualquer e h um número positivo. Defini-se malha de passo h associada a x_0 como o conjunto de pontos dados por

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

Nos pontos da malha, obtidos por (2.1), serão calculadas aproximações para uma função $f(x)$ e suas derivadas. A ferramenta matemática utilizada no cálculo das aproximações das derivadas é o Teorema de Taylor descrito no Teorema 2.1.

Teorema 2.1. (*Série de Taylor para funções de uma variável*)

Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável $n + 1$ vezes no intervalo $I \subset \mathbb{R}$ contendo x . Então para cada $x + h$ em I existe um número real $\xi \in (x, x + h)$ tal que

$$f(x + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + \mathcal{O}(h^{n+1}) \quad (2.2)$$

onde o termo $\mathcal{O}(h)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}$ representa o erro da aproximação de $f(x + h)$ pelo polinômio de grau n

$$P_n(h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k. \quad (2.3)$$

Demonstração. Para detalhes da demonstração, consulte [21]. \square

Considerando $n = 1$ em (2.2), obtém-se

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \mathcal{O}(h^2). \quad (2.4)$$

Truncando a equação (2.4) e isolando o termo $f'(x)$, obtém-se uma aproximação para a derivada $f'(x)$ dada por

$$f'(x) \approx \frac{f(x + h) - f(x)}{h}. \quad (2.5)$$

A equação (2.5) é conhecida como fórmula de diferenças finitas progressiva em $f(x)$ e o termo $\frac{f''(\xi)}{2}h$ representa o erro da aproximação. Observa-se que o erro da fórmula de diferença obtido é de primeira ordem, ou seja, $\mathcal{O}(h)$. Por outro lado, substituindo h por $-h$ na equação (2.4) e isolando $f'(x)$, obtém-se a fórmula de diferenças finitas regressiva dada por [8]

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x - h)}{h}, \quad (2.6)$$

cuja ordem do erro também é $\mathcal{O}(h)$.

Tomando $n = 2$ em (2.2), e considerando (2.2) para h e $-h$, respectivamente, obtém-se

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(\xi_1)}{3!}h^3 \quad (2.7)$$

e

$$f(x - h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 - \frac{f'''(\xi_1)}{3!}h^3. \quad (2.8)$$

Subtraindo a equação (2.8) da equação (2.7) e isolando $f'(x)$ segue

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} - \left(\frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{3!} \right) h^2. \quad (2.9)$$

Aplicando o teorema do valor médio na equação (2.9) tem-se

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} - 2 \frac{f'''(\xi)}{3!} h^2, \quad (2.10)$$

com $\xi \in [\min\{\xi_1, \xi_2\}, \max\{\xi_1, \xi_2\}]$. Note que truncando a equação (2.10) e isolando o termo $f'(x)$, pode-se obter uma aproximação para a derivada de f dada por

$$f'(x) \approx \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}, \quad (2.11)$$

denominada por equação de diferenças finitas central e que tem ordem de erro $\mathcal{O}(h^2)$.

Similarmente, pode-se estabelecer uma expressão para o cálculo aproximado da derivada de segunda ordem. Para isso, considere $n = 3$ em (2.2) com h e $-h$, respectiva-

mente, obtendo

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!}h^4 \quad (2.12)$$

e

$$f(x+h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!}h^4. \quad (2.13)$$

Somando as equações (2.12) e (2.13), isolando $f''(x)$ e aplicando o teorema do valor intermediário no termo do erro, obtém-se

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{f^{(4)}(\xi)}{12}h^2, \quad (2.14)$$

onde $\xi \in [\min\{\xi_1, \xi_2\}, \max\{\xi_1, \xi_2\}]$. Truncando a equação (2.14) tem-se

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}, \quad (2.15)$$

denominada equação de diferenças finitas central para a derivada de segunda ordem [8]. Vale ressaltar que a ordem de erro da aproximação dada em (2.15) é de $\mathcal{O}(h^2)$.

2.1.2 Equações de diferenças finitas para funções de duas variáveis

Generalizações das equações de diferenças finitas obtidas para funções de uma variável são utilizadas para a obtenção das aproximações para funções de várias variáveis. Como ilustração, e também devido ao fato deste trabalho utilizar as aproximações para funções envolvendo duas variáveis, será apresentado a generalização para duas dimensões. Assim, uma malha no plano (x, t) é dada como o conjunto de pontos $(x_i, t_j) = (x_0 + ih, t_0 + jk)$, ou seja, com espaçamento h em x e k em t . Para a obtenção das aproximações das derivadas das funções de duas variáveis será utilizado o teorema da série de Taylor de duas variáveis, dado por

Teorema 2.2. (*Série de Taylor para funções de duas variáveis*)

Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^{n+1} no conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e $(x, t) \in A$. Seja $h, k \in \mathbb{R}$ tais que $(x + \lambda h, t + \lambda k) \in A$, com $\lambda \in [0, 1]$, então existe um número real $\xi \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned} f(x+h, t+k) &= f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)h + \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)k + \dots \\ &\dots + \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j} \partial t^j}(x, t) h^{n-j} k^j + \mathcal{O}(h^{n+1}, k^{n+1}), \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde

$$\mathcal{O}(h^{n+1}, k^{n+1}) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} \partial t^j}(x + \xi h, t + \xi k) h^{n+1-j} k^j. \quad (2.17)$$

Demonstração. Para detalhes da demonstração, consulte [20]. \square

A fim de simplificações, nos casos onde o acréscimo ocorre em apenas umas das variáveis, como por exemplo, $f(x, t + k)$, a notação do erro da aproximação de Taylor será reduzida de $\mathcal{O}(h^{n+1}, k^{n+1})$, para simplesmente $\mathcal{O}(k^{n+1})$, desde que claro a sua origem. Assim, utilizando o Teorema 2.2 e raciocínios análogos ao de uma variável seguem as fórmulas para aproximação das derivadas parciais de funções de duas variáveis [8].

- Progressiva

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{f(x, t + k) - f(x, t)}{k} - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 f(x, \zeta)}{\partial t^2}, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \frac{f(x + h, t) - f(x, t)}{h} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 f(\xi, t)}{\partial x^2}, \quad (2.19)$$

com $t < \zeta < t + k$ e $x < \xi < x + h$.

- Regressiva

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{f(x, t) - f(x, t - k)}{k} + \frac{k}{2} \frac{\partial^2 f(x, \zeta)}{\partial t^2}, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \frac{f(x, t) - f(x - h, t)}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 f(\xi, t)}{\partial x^2}, \quad (2.21)$$

com $t - k < \zeta < t$ e $x - h < \xi < x$.

- Central

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{f(x, t + k) - f(x, t - k)}{2k} - \frac{k^2}{6} \frac{\partial^3 f(x, \zeta)}{\partial t^3}, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = \frac{f(x, t + k) - 2f(x, t) + f(x, t - k)}{k^2} - \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 f(x, \zeta)}{\partial t^4}, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \frac{f(x + h, t) - f(x - h, t)}{2h} - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 f(\xi, t)}{\partial x^3}, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = \frac{f(x + h, t) - 2f(x, t) + f(x - h, t)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 f(\xi, t)}{\partial x^4}, \quad (2.25)$$

com $t - k < \zeta < t + k$ e $x - h < \xi < x + h$.

Por fim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x \partial t} &= \frac{f(x + h, t + k) - f(x + h, t - k) - f(x - h, t + k) + f(x - h, t - k)}{4hk} \\ &\quad - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^4 f(\xi_1, \zeta_1)}{\partial x^3 \partial t} - \frac{k^2}{6} \frac{\partial^4 f(\xi_2, \zeta_2)}{\partial x \partial t^3}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

com $x - h < \xi_1, \xi_2 < x + h$ e $t - k < \zeta_1, \zeta_2 < t + k$.

2.2 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Os métodos de discretização por diferenças finitas reduzem o problema contínuo a um problema discreto, e por fim na solução de um conjunto de equações lineares, ou um sistema de equações lineares. Para a resolução dos sistemas lineares podem ser usados métodos diretos tipo Gauss, ou métodos iterativos tipo Gauss-Seidel. Qualquer método iterativo, em essência, parte de uma solução inicial e através de iterações sucessivas refina-se a solução numérica num processo de convergência. Neste trabalho foi utilizado o método iterativo de Gauss-Seidel.

2.2.1 Método de Gauss-Seidel

O método de Gauss-Seidel é uma modificação no método de Jacobi. Se o sistema linear $Ax = b$ é dado por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (2.27)$$

e tal que $a_{ii} \neq 0$, quando $i = 1, \dots, n$, então explicitando x_1 da primeira equação até x_n da última equação tem-se

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j \right), \dots, x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j \right), \dots, x_n = \frac{1}{a_{nn}} \left(b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j \right).$$

O método de Gauss-Seidel consiste em utilizar a equação anterior para obter uma sequência de vetores x^0, x^1, \dots, x^l , tal que x^l é assumido como solução do sistema (2.27), quando os critérios de convergência forem satisfeitos. Em resumo o método de Gauss-Seidel é dado por

$$x_i^{it+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k \right), \quad (2.28)$$

onde $it + 1$ é o nível iterativo [5].

2.2.2 Critérios de Convergência

Nesta dissertação, salvo menção contrária, será considerado $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n .

Definição 2.3. Uma matriz A é estritamente diagonal dominante quando

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (2.29)$$

é válida para cada $i = 1, \dots, n$.

Teorema 2.4. Se uma matriz A é estritamente diagonal dominante então A é não-singular. Neste caso, o sistema linear $Ax = b$ possui solução única.

Demonstração. De fato, suponha por absurdo que o sistema linear descrito por $Ax = 0$ possua uma solução não nula $x = (x_i)$. Assim existe k um índice para o qual

$$0 < |x_k| = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}.$$

Como $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, tem-se, quando $i = k$, que

$$a_{kk}x_k = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj}x_j. \quad (2.30)$$

A equação (2.30) implica que

$$|a_{kk}||x_k| = \left| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj}x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}||x_j|,$$

ou ainda,

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \frac{|x_j|}{|x_k|} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}|. \quad (2.31)$$

A equação (2.31) contradiz o fato da matriz A ser estritamente dominante, portanto a única solução do sistema linear $Ax = 0$ é $x = 0$, o que equivale a não-singularidade de A . \square

Definição 2.5. Uma matriz A é dita definida positiva se for simétrica e se $x^t Ax > 0$, para todo vetor n dimensional não nulo.

Teorema 2.6. Se A for uma matriz definida positiva, então

- a) A é não-singular;
- b) $a_{ij} > 0$, para cada $i = 1, \dots, n$;
- c) $\max_{1 \leq k, j \leq n} \{|a_{kj}|\} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{|a_{ii}|\}$;

d) $(a_{ij})^2 < a_{ii}a_{jj}$, para cada $i \neq j$.

Demonstração. Para detalhes da demonstração, consulte [5]. □

Definição 2.7. Uma matriz A quadrada de ordem n é chamada **matriz de banda** se existirem números inteiros p e q , com $1 < p, q < n$, com a propriedade que $a_{ij} = 0$ sempre que $p \leq j - i$ ou $q \leq i - j$. A **largura de banda** de uma matriz de banda é definida como $\omega = p + q - 1$.

Definição 2.8. Uma matriz A quadrada é dita **matriz tridiagonal** se A for uma matriz banda com largura de banda $\omega = 3$, onde $p = 2$ e $q = 2$.

Teorema 2.9. Suponha que a matriz A seja tridiagonal com $a_{i,i-1}a_{i,i+1} \neq 0$, para cada $i = 2, \dots, n - 1$. Se $|a_{11}| > |a_{12}|$, $|a_{ii}| > |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}|$ para cada $i = 2, \dots, n - 1$, e $|a_{nn}| > |a_{n,n-1}|$, então A é não-singular.

Demonstração. Para detalhes da demonstração, consulte [5]. □

Teorema 2.10. (Critério de Sassenfeld)

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n . Considere β_i , $i = 1, \dots, n$, dados por

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \sum_{j=2}^n \frac{|a_{1j}|}{|a_{11}|} \\ \beta_i &= \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{ij}|\beta_j}{|a_{ii}|} + \sum_{j=i+1}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Se $\beta = \max_{1 \leq i \leq n} \{\beta_i\} < 1$, então o método de Gauss-Seidel gera uma sequência de vetores $x^{(k)}$ convergente qualquer que seja a aproximação inicial.

Demonstração. Para detalhes da demonstração, consulte [5]. □

2.3 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

No modelo proposto por este trabalho, capítulo 3, para se obter a população total da presa e do predador, em um tempo t , faz-se necessário calcular a área delimitada pelas densidades das populações e o eixo coordenado. Para realizar estes cálculos utiliza-se o conceito de integrais numéricas, com ênfase nas Regras do Trapézio, 1/3 e 3/8 de Simpson.

2.3.1 Interpolação Polinomial

No caso de interpolação polinomial o teorema da aproximação de Weierstrass é a chave quando se trabalha com uma função f contínua.

Teorema 2.11. (Teorema da aproximação de Weierstrass)

Suponha que $f(x)$ seja definida e contínua em $[a, b]$, então para cada $\epsilon > 0$, existe um polinômio $P(x)$ tal que $|f(x) - P(x)| < \epsilon$, para todo $x \in [a, b]$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [21]. \square

Uma razão importante para considerar a classe de polinômios na aproximação de funções contínuas é que a derivada e a integral indefinida também são polinômios, por esse motivo, os polinômios são utilizados para aproximar funções contínuas.

No caso de dados discretos, considerando $n + 1$ pontos distintos, digamos, x_0, \dots, x_n chamados de nós da interpolação e os valores $f(x)$ nestes nós, então aproximar $f(x)$ por um polinômio $P_n(x)$ consiste em impor a condição $f(x_k) = P_n(x_k)$, $k = 0, \dots, n$ e deste fato segue o próximo teorema.

Teorema 2.12. *Existe um único polinômio $P_n(x)$ de grau menor ou igual a n tal que $f(x_k) = P_n(x_k)$, $k = 0, \dots, n$ desde que tenhamos $x_k \neq x_j$, quando $j \neq k$.*

Demonstração. Considere que $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$. Da condição $f(x_k) = P_n(x_k)$, $k = 0, \dots, n$ obtém-se que

$$\begin{cases} P_n(x_0) = a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ P_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ P_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + \dots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{cases}, \quad (2.33)$$

ou ainda,

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & & x_n^n \end{pmatrix}_{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Observa-se que a matriz dos coeficientes do sistema linear dado em (2.34) é conhecida como matriz de Vandermonde, e como os nós são distintos por hipótese, então o determinante é não nulo. Portanto o sistema linear tem solução única, isto é, $P_n(x)$ é único. \square

Teorema 2.13. (*Teorema interpolador de Lagrange*)

Se x_0, \dots, x_n são pontos distintos e f é uma função cujos valores dados nesses números, então existe um único $P_n(x)$ de grau no máximo n tal que $f(x_k) = P(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$. O polinômio é dado por

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)L_{n,k}(x) \quad (2.35)$$

com

$$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}. \quad (2.36)$$

Teorema 2.14. *Suponha que x_0, \dots, x_n sejam pontos distintos em $[a, b]$ e que $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$. Então para cada $x \in [a, b]$, existe um número $\xi(x) \in (a, b)$ tal que*

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x), \quad (2.37)$$

onde $P_n(x)$ é o polinômio interpolador dado na equação (2.35) e

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad (2.38)$$

é o termo de erro para o polinômio interpolador.

A demonstração dos teoremas (2.13) e (2.14) com todos os detalhes podem ser encontradas em [5].

2.3.2 Integração numérica

Considere que uma função $f(x)$ seja contínua em um intervalo $[a, b]$, e que deseja-se encontrar $I = \int_a^b f(x)dx$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo sabe-se que existe uma função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ e que $I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Contudo, dependendo da função $f(x)$ considerada, o cálculo da integral definida torna-se muito custoso, ora por não ter primitiva explícita, ora por necessitar de operações muito complexas para se obtê-la, fazendo-se assim necessário o uso de métodos numéricos para calcular uma aproximação para o valor de I . Os métodos de quadratura apresentados nesta seção são baseados nos polinômios interpoladores de Lagrange.

Escolhendo um conjunto de pontos distintos $\{x_0, \dots, x_n\}$ do intervalo $[a, b]$ e considerando o polinômio interpolador de Lagrange de $f(x)$ e o termo de erro, então

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b [P_n(x) + E_n(x)] dx = \int_a^b P_n(x)dx + \int_a^b E_n(x)dx \\
&= \int_a^b \left[\sum_{k=0}^n f(x_k)L_{n,k}(x) \right] dx + \int_a^b \left[\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k) \right] dx \\
&= \sum_{k=0}^n \left[\int_a^b f(x_k)L_{n,k}(x)dx \right] + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \left[f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{k=0}^n (x - x_k) \right] dx \\
&= \sum_{k=0}^n \left[f(x_k) \int_a^b L_{n,k}(x)dx \right] + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \left[f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{k=0}^n (x - x_k) \right] dx \\
&= \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \left[f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{k=0}^n (x - x_k) \right] dx, \tag{2.39}
\end{aligned}$$

onde $\xi(x) \in [a, b]$ para cada x e $A_k = \int_a^b L_{n,k}(x)dx$, para cada $k = 0, 1, \dots, n$. Assim a fórmula de quadratura numérica é dada por,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \tag{2.40}$$

com erro dado por

$$E_f = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \left[\prod_{i=0}^n (x - x_i) f^{(n+1)}(\xi(x)) \right] dx. \tag{2.41}$$

As equações produzidas ao utilizar os polinômios de Lagrange com pontos igualmente espaçados de grau 1 e 2 fornecem, respectivamente, a regra do Trapézio e a regra de Simpson.

2.3.3 Regra do Trapézio

Considerando $n = 1$, $x_0 = a$, $x_1 = b$ e $h = b - a$ na equação (2.40), segue que

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x)dx &\approx \sum_{k=0}^1 A_k f(x_k) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) \\
 &= f(x_0) \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} \right] dx + f(x_1) \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} \right] dx \\
 &= f(x_0) \left(-\frac{(x_0-x_1)}{2} \right) + f(x_1) \left(\frac{(x_1-x_0)}{2} \right) \\
 &= \frac{(x_1-x_0)}{2} [f(x_0) + f(x_1)] = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] \quad (2.42)
 \end{aligned}$$

e para (2.41)

$$E_f = \frac{1}{2} \int_a^b \left[\prod_{i=0}^1 (x-x_i) f''(\xi(x)) \right] dx = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1) f''(\xi(x)) dx. \quad (2.43)$$

Pelo teorema do valor médio para integrais, temos que existe um número $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1) f''(\xi(x)) dx = f''(c) \int_a^b (x-x_0)(x-x_1) dx. \quad (2.44)$$

Substituindo (2.44) em (2.43) segue que

$$\begin{aligned}
 E_f &= \frac{f''(c)}{2} \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1) dx = \frac{f''(c)}{2} \left(\frac{x_0^3 - 3x_0^2 x_1 + 3x_0 x_1^2 - x_1^3}{6} \right) \\
 &= \frac{f''(c)}{2} \left(-\frac{(x_1-x_0)^3}{6} \right) = -\frac{h^3}{12} f''(c). \quad (2.45)
 \end{aligned}$$

Desta forma, substituindo (2.45) e (2.42) em (2.39) obtém-se

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(c). \quad (2.46)$$

A equação (2.46) é chamada de regra dos trapézios, pois quando considerada uma função f estritamente positiva, o valor $\int_a^b f(x)dx$ é aproximado pela área de um trapézio.

Se subdividirmos o intervalo $[a, b]$ em n pontos obtém-se a regra do trapézios

composta como vista a seguir.

Teorema 2.15. (*Regra do trapézio composta*)

Sejam $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$, $h = \frac{b-a}{n}$ e $x_j = a + jh$, com $j = 0, \dots, n$, então existe $\mu \in (a, b)$ para o qual a regra do trapézio composta, para n subintervalos pode ser escrita, com seu termo de erro, como:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n) \right] - \frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\mu). \quad (2.47)$$

Demonstração. A demonstração do teorema pode ser encontrada em [5]. □

2.3.4 Regras de Simpson

As regras de $\frac{1}{3}$ de Simpson e $\frac{3}{8}$ de Simpson resultam da integração em $[a, b]$ do polinômio interpolador de Lagrange de segundo e terceiro grau, respectivamente. As demonstrações dos métodos de integração contidas nesta seção podem ser encontradas em [5].

2.3.5 Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson

Considerando os nós $x_0 = a$, $x_1 = a + h$ e $x_2 = b$, onde $h = \frac{b-a}{2}$, e o polinômio interpolador de Lagrange de grau dois, obtém-se, com cálculos análogos aos da seção 2.3.3, que

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\mu), \quad \mu \in (a, b). \quad (2.48)$$

De modo geral, se considerar $n + 1$ nós de interpolação, n par, obtém-se a regra $\frac{1}{3}$ de Simpson composta.

Teorema 2.16. (*Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson composta*)

Sejam $f \in \mathcal{C}^4[a, b]$, n um número par, $h = \frac{b-a}{n}$ e $x_j = a + jh$, com $j = 0, \dots, n$, então existe $\mu \in (a, b)$ para o qual a regra $\frac{1}{3}$ de Simpson composta, para n subintervalos pode ser escrita, com seu termo de erro, como:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left[f(x_0) + \sum_{j=1}^{n-1} c_j f(x_j) + f(x_n) \right] - \frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\mu), \quad (2.49)$$

onde

$$c_j = \begin{cases} 2; & \text{se } j \text{ par} \\ 4; & \text{se } j \text{ ímpar} \end{cases}. \quad (2.50)$$

2.3.6 Regra $\frac{3}{8}$ de Simpson

Considerando os nós $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$ e $x_3 = b$, onde $h = \frac{b-a}{3}$, e o polinômio interpolador de Lagrange de grau três, obtém-se, com cálculos análogos aos da seção 2.3.3, que

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\mu), \quad \mu \in (a, b). \quad (2.51)$$

De modo geral, se considerar $n + 1$ nós de interpolação obtém-se a regra $\frac{3}{8}$ de Simpson composta.

Teorema 2.17. (Regra $\frac{3}{8}$ de Simpson composta)

Sejam $f \in C^4[a, b]$, $h = \frac{b-a}{n}$ e $x_j = a + jh$, com $j = 0, \dots, n$, então existe $\mu \in (a, b)$ para o qual a regra $\frac{3}{8}$ de Simpson composta, para n subintervalos pode ser escrita, com seu termo de erro, como:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8} \left[f(x_0) + \sum_{j=1}^{n-1} c_j f(x_j) + f(x_n) \right] - \frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\mu), \quad (2.52)$$

onde

$$c_j = \begin{cases} 2; & \text{se } j \text{ for divisível por } 3 \\ 4; & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.53)$$

Apresentado conceitos a serem utilizadas ao longo da dissertação, aborda-se o desenvolvimento necessário para a modelagem matemática do sistema predador-presa.

3 MODELAGEM DO SISTEMA PREDADOR-PRESA REATIVO-CONVECTIVO-DIFUSIVO COM RETARDO

Neste capítulo será apresentada a primeira lei de Fick e deduzida a segunda lei de Fick. Posteriormente, para corrigir o paradoxo da condução instantânea de calor gerado pela segunda lei de Fick, será utilizado a equação de Maxwell-Cattaneo. Por fim, será desenvolvido o modelo do sistema predador-presa reativo-convectivo-difusivo com retardo, modelo proposto neste trabalho.

3.1 EQUAÇÕES DE REAÇÃO-DIFUSÃO

As equações de reação-difusão tem sido utilizadas para modelar fenômenos biológicos que envolvem dispersão e interação entre espécies. Na modelagem de tais fenômenos a parte difusiva encontra-se relacionada com a dispersão e a parte reativa com a interação entre as espécies envolvidas.

As equações de transporte de massa por difusão, conhecidas como as Leis de Fick, foram inicialmente propostas por Adolf Eugen Fick em 1855 [30]. Fick postulou que o fluxo de massa iria de regiões de alta concentração para as de baixa, com uma magnitude proporcional ao gradiente de concentração. A primeira lei de Fick, em uma dimensão [30], pode ser dada pela equação

$$J_j = -D_j \frac{\partial S_j}{\partial x}, \quad (3.1)$$

onde S_j são as densidades de população, J_j os fluxos de S_j e D_j as constante de difusibilidade. O sinal negativo em (3.1) indica que o fluxo de massa ocorre na direção contrária ao gradiente de concentração, isto é, no sentido das concentrações altas para as baixas. Deve-se observar que a primeira lei de Fick pode ser aplicada diretamente, somente em condição de estado estacionário. Além disso, não deve haver forças externas diferentes do gradiente de concentração. Para o caso de duas dimensões, a primeira lei de Fick torna-se [6]

$$\vec{J}_j = -D_j \vec{\nabla} S_j. \quad (3.2)$$

Pelo princípio da conservação, a taxa de variação da quantidade de S_j em um volume V deve ser igual ao fluxo de S_j através da superfície G que a delimita, somado com a quantidade de S_j transformadas no interior do volume V devido ao termo reativo [25]. Assim, o princípio da conservação de massa pode ser expresso pela equação (3.3)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V S_j dV = - \int_G (J_j \cdot n) dG + \int_V F_j dV. \quad (3.3)$$

Na equação (3.3) S_j representa a densidade de população em x e no tempo t , J_j o fluxo de S_j e

F_j é o termo de reação fonte/sorvedouro. Aplicando o Teorema da Divergência [16] na primeira integral do lado direito de (3.3), segue que (3.3) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V S_j dV = - \int_V \vec{\nabla} \cdot J_j dV + \int_V F_j dV. \quad (3.4)$$

Reorganizando os termos da equação (3.4), pode-se reescrevê-la como

$$\int_V \left(\frac{\partial S_j}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot J_j - F_j \right) dV = 0. \quad (3.5)$$

Como a equação (3.5) é válida independente do volume de integração V , segue da equação de continuidade [7], para S_j , que

$$\frac{\partial S_j}{\partial t} = \underbrace{-\vec{\nabla} \cdot J_j}_{\text{Termo de Difusão}} + \underbrace{F_j}_{\text{Termo de Reação}}. \quad (3.6)$$

A equação (3.6) é conhecida como equação de reação-difusão ou como a segunda Lei de Fick reativa. No caso unidimensional a equação (3.6) torna-se

$$\frac{\partial S_j}{\partial t} = -\frac{\partial J_j}{\partial x} + F_j, \quad (3.7)$$

com $S_j(x, t)$, $J_j(x, t)$ e $F_j(x, t)$. De uma forma geral serão omitidos as variáveis x e t das funções S_j , J_j e F_j , sendo resgatadas caso se faça necessário.

3.2 EQUAÇÃO DE MAXWELL-CATTANEO

A equação de Maxwell-Cattaneo surgiu como uma forma para corrigir um inconveniente da Lei de Fourier, o chamado "paradoxo da condução instantânea de calor"[26]. O paradoxo advém da Lei de Fourier onde uma perturbação térmica em qualquer ponto de um corpo será instantaneamente sentida em todo o corpo, em outras palavras, com a Lei de Fourier os sinais térmicos se propagam com velocidade infinita, o que na prática não acontece. A lei ou equação de Maxwell-Cattaneo elimina o paradoxo ao introduzir um retardo na lei de difusão de Fourier, gerando uma velocidade finita de propagação.

A equação de Maxwell-Cattaneo pode ser descrita matematicamente por [17, 26]

$$\tau_j \frac{\partial J_j(x, t)}{\partial t} + J_j(x, t) = -D_j \frac{\partial S_j(x, t)}{\partial x}, \quad (3.8)$$

e ainda, (3.8) pode ser utilizada para descrever a difusão da densidade de uma população ao longo do espaço x .

A equação de Maxwell-Cattaneo, pode ser obtida considerando um termo de

relaxação temporal τ_j na equação (3.1), de tal forma que [34]

$$J_j(x, t + \tau_j) = -D_j \frac{\partial S_j(x, t)}{\partial x}. \quad (3.9)$$

Observe que na equação (3.9) os fenômenos de fluxo da densidade, J_j , e o da difusão, D_j , ocorrem em diferentes instantes do tempo, este é o fenômeno do retardo.

Expandindo em série de Taylor o termo $J_j(x, t + \tau_j)$ de (3.9), tem-se que

$$J_j(x, t + \tau_j) = J_j(x, t) + \tau_j \frac{\partial J_j}{\partial t}(x, t) + \mathcal{O}(\tau_j^2). \quad (3.10)$$

Truncando a equação (3.10) no segundo termo da expansão e substituindo em (3.9), resulta na Lei de Maxwell-Cattaneo, dada pela equação (3.8). O termo de relaxação τ_j é acrescentado de tal forma a tornar o modelo mais realístico, uma vez que as interações não reproduzem respostas imediatas, ou seja, na grande parte dos casos existe um tempo entre a interação da população e sua resposta à essa interação.

3.3 EQUAÇÃO REATIVA-DIFUSIVA COM RETARDO

Para obter a equação reativa-difusiva com retardo, inicialmente deriva-se a equação (3.7) em relação a t , resultando em

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial S_j}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial J_j}{\partial x} + F_j \right),$$

ou ainda,

$$\frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 J_j}{\partial t \partial x} + \frac{\partial F_j}{\partial t}. \quad (3.11)$$

Como F_j é o termo reativo e depende de S_j , ou seja, F_j está em função de S_j , e assim para calcular $\frac{\partial F_j}{\partial t}$ utiliza-se derivação implícita. Assim, utilizando regras de derivação implícita obtém-se que

$$\frac{\partial F_j(S_j)}{\partial t} = \frac{dF_j}{dS_j} \frac{\partial S_j}{\partial t}. \quad (3.12)$$

Substituindo a equação (3.12) na equação (3.11), tem-se

$$\frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 J_j}{\partial t \partial x} + \frac{dF_j}{dS_j} \frac{\partial S_j}{\partial t},$$

reorganizando os termos,

$$\frac{\partial^2 J_j}{\partial t \partial x} = \frac{dF_j}{dS_j} \frac{\partial S_j}{\partial t} - \frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2}. \quad (3.13)$$

Por outro lado, derivando a equação (3.8) em relação a x obtém-se que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_j \frac{\partial J_j}{\partial t} + J_j \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-D_j \frac{\partial S_j}{\partial x} \right).$$

Usando regras de derivação parcial e considerando a difusibilidade constante, tem-se que

$$\tau_j \frac{\partial^2 J_j}{\partial x \partial t} + \frac{\partial J_j}{\partial x} = -D_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2},$$

e após algumas manipulações algébricas tem-se que

$$\frac{\partial^2 J_j}{\partial x \partial t} = -\frac{D_j}{\tau_j} \frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2} - \frac{1}{\tau_j} \frac{\partial J_j}{\partial x}. \quad (3.14)$$

Como J_j , $\frac{\partial J_j}{\partial t}$ e $\frac{\partial J_j}{\partial x}$ são contínuas, tem-se que $\frac{\partial^2 J_j}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 J_j}{\partial t \partial x}$, assim a equação (3.14) torna-se,

$$\frac{\partial^2 J_j}{\partial t \partial x} = -\frac{D_j}{\tau_j} \frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2} - \frac{1}{\tau_j} \frac{\partial J_j}{\partial x}. \quad (3.15)$$

Igualando as equações (3.15) e (3.13) segue que

$$\frac{dF_j}{dS_j} \frac{\partial S_j}{\partial t} - \frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} = -\frac{D_j}{\tau_j} \frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2} - \frac{1}{\tau_j} \frac{\partial J_j}{\partial x}. \quad (3.16)$$

Multiplicando a equação (3.16) por τ_j , obtém-se

$$\tau_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} - \tau_j \frac{dF_j}{dS_j} \frac{\partial S_j}{\partial t} = D_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2} + \frac{\partial J_j}{\partial x}. \quad (3.17)$$

Substituindo a equação (3.7) na equação (3.17) tem-se

$$\tau_j \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} - \tau_j \frac{dF_j}{dS_j} \frac{\partial S_j}{\partial t} = D_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2} - \frac{\partial S_j}{\partial t} + F_j, \quad (3.18)$$

fazendo algumas operações matemáticas obtém-se a equação

$$\tau_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} + \left(1 - \tau_j \frac{dF_j}{dS_j} \right) \frac{\partial S_j}{\partial t} = D_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2} + F_j, \quad (3.19)$$

que é denominada como equação reativa-difusiva com retardo ou segunda Lei de Fick reativa com retardo. Quando considera-se o termo de retardo $\tau_j = 0$ na equação (3.19), obtém-se a segunda Lei clássica de Fick, também conhecida como segunda Lei de Fick reativa.

3.4 MODELAGEM DO SISTEMA PREDADOR-PRESA REATIVO-CONVECTIVO-DIFUSIVO COM RETARDO

Nesta seção considerar-se-a $S_1 = S_1(x, t)$ e $S_2 = S_2(x, t)$ como sendo as densidades de populações da presa e do predador, respectivamente. Para a modelagem do sistema predador-presa imerso em um fluido, serão consideradas as seguintes hipóteses sobre o problema:

H1 - Existe um fluido que transporta S_j , $j = 1, 2$;

H2 - Considera-se o fluido desacoplado das equações predador-presa reativa-convectiva-difusiva com retardo, em outras palavras, para estudar a influência do campo de velocidade prescreve-se um campo de velocidade uniforme para o fluido;

H3 - Os coeficientes de difusão da presa e do predador são desacoplados, isto é, a difusão da presa não altera a do predador e vice-versa, e portanto D_1 e D_2 não estão diretamente relacionados;

H4 - Os termos de relaxação, τ_j , $j = 1, 2$, independem um do outro;

H5 - Para a equação de reação-difusão dada em (3.7), também será considerada a contribuição da convecção, que pode ser reescrita como

$$\frac{\partial S_j(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial J_j(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial (S_j u)(x, t)}{\partial x} + F_j(S_j), \quad j = 1, 2. \quad (3.20)$$

Derivando a equação (3.20) em relação a t tem-se que

$$\frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 J_j}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 (S_j u)}{\partial t \partial x} + \frac{\partial (F_j)}{\partial t}. \quad (3.21)$$

Considerando a equação (3.12) e o fato de que $\frac{\partial^2 J_j}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 J_j}{\partial t \partial x}$, uma vez que J_j , $\frac{\partial J_j}{\partial t}$ e $\frac{\partial J_j}{\partial x}$ são contínuas, segue que a equação (3.21) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 J_j}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 (S_j u)}{\partial t \partial x} + \frac{dF_j}{dS_j} \frac{\partial S_j}{\partial t}$$

ou ainda,

$$\frac{\partial^2 J_j}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 (S_j u)}{\partial t \partial x} + \frac{dF_j}{dS_j} \frac{\partial S_j}{\partial t}. \quad (3.22)$$

Igualando as equações (3.15) e (3.22), tem-se que

$$-\frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 (S_j u)}{\partial t \partial x} + \frac{dF_j}{dS_j} \frac{\partial S_j}{\partial t} = -\frac{D_j}{\tau_j} \frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial J_j}{\partial x},$$

multiplicando por τ_j obtém-se

$$\tau_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} + \tau_j \frac{\partial^2 (S_j u)}{\partial t \partial x} - \tau_j \frac{dF_j}{dS_j} \frac{\partial S_j}{\partial t} = D_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2} + \frac{\partial J_j}{\partial x}. \quad (3.23)$$

Substituindo a equação (3.20) na equação (3.23), tem-se

$$\tau_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} + \tau_j \frac{\partial^2 (S_j u)}{\partial t \partial x} - \tau_j \frac{dF_j}{dS_j} \frac{\partial S_j}{\partial t} = D_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2} - \frac{\partial S_j}{\partial t} - \frac{\partial (S_j u)}{\partial x} + F_j. \quad (3.24)$$

Reorganizando e colocando alguns termos em evidência, segue que a equação (3.24) pode ser melhor escrita como,

$$\tau_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} + \tau_j \frac{\partial^2 (S_j u)}{\partial t \partial x} + \left(1 - \tau_j \frac{dF_j}{dS_j}\right) \frac{\partial S_j}{\partial t} = D_j \frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2} - \frac{\partial (S_j u)}{\partial x} + F_j, \quad (3.25)$$

que é denominada como sendo a equação reativa-convectiva-difusiva com retardo (*RCDR*).

A partir do desenvolvimento descrito, tem-se que o modelo proposto, neste trabalho, para a densidade populacional de um sistema predador-presa é dado por

$$\begin{cases} \tau_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} (S_1 u) \right) + \left(1 - \tau_1 \frac{dF_1}{dS_1}\right) \frac{\partial S_1}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (S_1 u) + D_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} + F_1 \\ \tau_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} + \tau_2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} (S_2 u) \right) + \left(1 - \tau_2 \frac{dF_2}{dS_2}\right) \frac{\partial S_2}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (S_2 u) + D_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} + F_2 \end{cases} \quad (3.26)$$

onde t e x são as variáveis temporal e espacial e u é o campo de velocidade. Os parâmetros τ_1 e τ_2 são os coeficientes de retardo, D_1 e D_2 são os coeficientes de difusibilidade, $S_1(x, t)$ e $S_2(x, t)$ são as densidades populacionais, F_1 e F_2 são os termos reativos da presa e do predador, respectivamente.

As condições iniciais do sistema (3.26) serão dadas por

$$S_j(x, 0) = S_j^0, \quad \left. \frac{\partial S_j(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad \forall x \in [0, L] \text{ e } j = 1, 2 \quad (3.27)$$

onde

$$S_j^0 = \begin{cases} B_j & ; A_j \leq x \leq C_j \\ 0 & ; \text{ caso contrário} \end{cases}, \quad (3.28)$$

onde $0 \leq A_j \leq C_j \leq L$, $B_j := B_j(x, 0)$ uma função estritamente positiva, para $j = 1, 2$.

As condições de contorno do sistema (3.26) serão do tipo Dirichlet, isto é,

$$S_j(0, t) = g_j^0(t), \quad S_j(L, t) = g_j^L(t), \quad \forall t \in [0, T] \text{ e } j = 1, 2, \quad (3.29)$$

onde,

$$g_j^0(t) = 0, \quad g_j^L(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \text{ e } j = 1, 2. \quad (3.30)$$

Os termos fontes F_1 e F_2 da presa e do predador, respectivamente, serão dados por

$$F_1 = F_1(S_1, S_2) = a_1 S_1 - b_1 S_1^2 - c_1 S_1 S_2 \quad (3.31)$$

e

$$F_2 = F_2(S_1, S_2) = -a_2 S_2 + c_2 S_1 S_2, \quad (3.32)$$

onde a_1 é a taxa de natalidade da presa, b_1 o termo de saturação da presa, c_1 é a taxa de mortalidade da presa devido à predação de S_2 , a_2 a taxa de mortandade dos predadores na ausência de presas e c_2 a taxa de biomassa de presas que é convertida em biomassa de predadores.

Utilizando diferenças finitas retroativa em $\frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2}$, tem-se

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 S_j}{\partial t^2} \right) \Big|_P^{k+1} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial S_j}{\partial t} \right) \right) \Big|_P^{k+1} \approx \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial S_j}{\partial t} \Big|_P^{k+1} - \frac{\partial S_j}{\partial t} \Big|_P^k \right) \\ &\approx \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{\Delta t} (S_j|_P^{k+1} - S_j|_P^k) - \frac{1}{\Delta t} (S_j|_P^k - S_j|_P^{k-1}) \right) \\ &\approx \frac{1}{(\Delta t)^2} (S_j|_P^{k+1} - 2S_j|_P^k + S_j|_P^{k-1}). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Utilizando diferenças finitas centrais no termo $\frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2}$, segue que

$$\left(\frac{\partial^2 S_j}{\partial x^2} \right) \Big|_P^{k+1} \approx \frac{1}{(\Delta x)^2} (S_j|_E^{k+1} - 2S_j|_P^{k+1} + S_j|_W^{k+1}). \quad (4.2)$$

Por outro lado, utilizando diferenças finitas retroativa em $\frac{\partial}{\partial x} (S_j u)$, tem-se que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} (S_j u) \right) \Big|_P^{k+1} \approx \frac{1}{2(\frac{\Delta x}{2})} (S_j|_e^{k+1} u|_e^{k+1} - S_j|_w^{k+1} u|_w^{k+1}). \quad (4.3)$$

Como não se pode calcular os valores de $S_j|_e^{k+1}$ e $S_j|_w^{k+1}$, pois as densidades das populações devem ser calculadas nas coordenadas do tipo $|_E^{k+1}$ e $|_W^{k+1}$, malha deslocada, utiliza-se o método *First Order Upwind* (F.O.U.) [2] para calcular uma aproximação de $S_j|_e^{k+1}$ e $S_j|_w^{k+1}$, logo tem-se que

$$S_j|_e^{k+1} \approx \left(\frac{1 + A|_e^{k+1}}{2} \right) S_j|_P^{k+1} + \left(\frac{1 - A|_e^{k+1}}{2} \right) S_j|_E^{k+1} \quad (4.4)$$

e

$$S_j|_w^{k+1} \approx \left(\frac{1 + A|_w^{k+1}}{2} \right) S_j|_W^{k+1} + \left(\frac{1 - A|_w^{k+1}}{2} \right) S_j|_P^k, \quad (4.5)$$

onde $A|_e^{k+1}$ é dada por

$$A|_e^{k+1} = \begin{cases} 1 & ; u|_e^{k+1} \geq 0 \\ -1 & ; u|_e^{k+1} < 0 \end{cases}. \quad (4.6)$$

Substituindo as equações (4.4) e (4.5) na equação (4.3) obtém-se que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x}(S_j u)\right)\Big|_P^{k+1} &\approx \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\left(\frac{1+A|_e^{k+1}}{2} \right) S_j|_P^{k+1} + \left(\frac{1-A|_e^{k+1}}{2} \right) S_j|_E^{k+1} \right) u|_e^{k+1} \right. \\
&\quad \left. - \left(\left(\frac{1+A|_w^{k+1}}{2} \right) S_j|_W^{k+1} + \left(\frac{1-A|_w^{k+1}}{2} \right) S_j|_P^{k+1} \right) u|_w^{k+1} \right] \\
&\approx \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{1-A|_e^{k+1}}{2} \right) u|_e^{k+1} S_j|_E^{k+1} - \left(\frac{1+A|_w^{k+1}}{2} \right) u|_w^{k+1} S_j|_W^{k+1} \right. \\
&\quad \left. + \left(\left(\frac{1+A|_e^{k+1}}{2} \right) u|_e^{k+1} - \left(\frac{1-A|_w^{k+1}}{2} \right) u|_w^{k+1} \right) S_j|_P^{k+1} \right]. \quad (4.7)
\end{aligned}$$

Por conveniência considera-se que

$$\delta|_e^{k+1} = \left(\frac{1+A|_e^{k+1}}{2} \right) u|_e^{k+1} \quad (4.8)$$

e

$$\bar{\delta}|_e^{k+1} = \left(\frac{1-A|_e^{k+1}}{2} \right) u|_e^{k+1}, \quad (4.9)$$

portanto a equação (4.7) pode ser reescrita como

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}(S_j u)\right)\Big|_P^{k+1} \approx \frac{1}{\Delta x} \left[\bar{\delta}|_e^{k+1} S_j|_E^{k+1} + (\delta|_e^{k+1} - \bar{\delta}|_w^{k+1}) S_j|_P^{k+1} - \delta|_w^{k+1} S_j|_W^{k+1} \right]. \quad (4.10)$$

No presente trabalho, utiliza-se o método *F.O.U* para adequar o modelo para quando o campo de velocidade não for prescrito, ou seja, nos casos onde o campo de velocidade for calculado, como por exemplo, por meio das Equações de Navier-Stokes.

Para o termo $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} (S_j u) \right)$ ao aplicar o método de diferenças finitas retroativa no tempo, tem-se que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} (S_j u) \right)\right)\Big|_P^{k+1} \approx \frac{1}{\Delta t} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} (S_j u) \right)\Big|_P^{k+1} - \left(\frac{\partial}{\partial x} (S_j u) \right)\Big|_P^k \right). \quad (4.11)$$

Pela equação (4.10) segue de (4.11) que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}(S_j u)\right)\Big|_P^k \approx \frac{1}{\Delta x} \left[\bar{\delta}|_e^k S_j|_E^k + (\delta|_e^k - \bar{\delta}|_w^k) S_j|_P^k - \delta|_w^k S_j|_W^k \right]. \quad (4.12)$$

Fazendo uso das equações (4.10) e (4.12) tem-se que a equação (4.11) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} (S_j u) \right) \right) \Big|_P^{k+1} &\approx \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1}{\Delta x} \left(\bar{\delta}|_e^{k+1} S_j|_E^{k+1} + (\delta|_e^{k+1} - \bar{\delta}|_w^{k+1}) S_j|_P^{k+1} - \delta|_w^{k+1} S_j|_W^{k+1} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Delta x} \left(\bar{\delta}|_e^k S_j|_E^k + (\delta|_e^k - \bar{\delta}|_w^k) S_j|_P^k - \delta|_w^k S_j|_W^k \right) \right] \\
&\approx \frac{1}{\Delta x \Delta t} \left[\bar{\delta}|_e^{k+1} S_j|_E^{k+1} + (\delta|_e^{k+1} - \bar{\delta}|_w^{k+1}) S_j|_P^{k+1} - \delta|_w^{k+1} S_j|_W^{k+1} \right. \\
&\quad \left. - \bar{\delta}|_e^k S_j|_E^k - (\delta|_e^k - \bar{\delta}|_w^k) S_j|_P^k + \delta|_w^k S_j|_W^k \right]. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Por fim, aplicando o método de diferenças finitas retroativa no tempo, tem-se que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} S_j \right) \Big|_P^{k+1} \approx \frac{1}{\Delta t} \left(S_j|_P^{k+1} - S_j|_P^k \right). \tag{4.14}$$

4.2 DISCRETIZAÇÕES DOS TERMOS NÃO COMUNS NA EQUAÇÃO DA PRESA

Para discretizar o termo $\left(1 - \tau_1 \frac{\partial F_1}{\partial S_1} \right) \frac{\partial S_1}{\partial t}$, note inicialmente que

$$\left(\left[1 - \tau_1 \frac{\partial F_1}{\partial S_1} \right] \frac{\partial S_1}{\partial t} \right) \Big|_P^{k+1} = \left(\frac{\partial S_1}{\partial t} \right) \Big|_P^{k+1} - \tau_1 \left(\frac{\partial F_1}{\partial S_1} \frac{\partial S_1}{\partial t} \right) \Big|_P^{k+1}. \tag{4.15}$$

Observe que

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial S_1} \frac{\partial S_1}{\partial t} \right) \Big|_P^{k+1} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial S_1} \right) \Big|_P^{k+1} \left(\frac{\partial S_1}{\partial t} \right) \Big|_P^{k+1}, \tag{4.16}$$

considerando F_1 como dado em (3.31) e utilizando regras de derivação, tem-se que

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial S_1} \right) \Big|_P^{k+1} = a_1 - 2b_1 S_1|_P^{k+1} - c_1 S_2|_P^{k+1}. \tag{4.17}$$

De (4.14), com $j = 1$, e de (4.17), a equação (4.16) torna-se

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial F_1}{\partial S_1} \frac{\partial S_1}{\partial t} \right) \Big|_P^{k+1} &\approx \left(a_1 - 2b_1 S_1|_P^{k+1} - c_1 S_2|_P^{k+1} \right) \left(\frac{1}{\Delta t} \left(S_1|_P^{k+1} - S_1|_P^k \right) \right) \\
&\approx \frac{1}{\Delta t} \left(a_1 - 2b_1 S_1|_P^{k+1} - c_1 S_2|_P^{k+1} \right) \left(S_1|_P^{k+1} - S_1|_P^k \right) \\
&\approx \frac{1}{\Delta t} \left(a_1 S_1|_P^{k+1} - 2b_1 S_1^2|_P^{k+1} - c_1 S_1|_P^{k+1} S_2|_P^{k+1} \right. \\
&\quad \left. - a_1 S_1|_P^k + 2b_1 S_1|_P^k S_1|_P^{k+1} + c_1 S_1|_P^k S_2|_P^{k+1} \right). \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Como na equação (4.18) há um termo quadrático, deve-se linearizá-lo a fim

de se obter um sistema linear. Utilizando o Teorema de Taylor, tem-se que

$$\begin{aligned}
S_1^2|_P^{k+1} &= S_1^2|_P^k + \Delta t \left(\frac{\partial S_1^2}{\partial t} \right) \Big|_P^k + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left(\frac{\partial S_1^2}{\partial t} \right) \Big|_P^{k+\epsilon} \\
&\approx S_1^2|_P^k + \Delta t \left(\frac{\partial S_1^2}{\partial t} \right) \Big|_P^k \approx S_1^2|_P^k + \Delta t \left(\frac{1}{\Delta t} \left(S_1^2|_P^k - S_1^2|_P^{k-1} \right) \right) \\
&\approx 2 S_1^2|_P^k - S_1^2|_P^{k-1}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Substituindo a equação (4.19) na equação (4.18),

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial F_1}{\partial S_1} \frac{\partial S_1}{\partial t} \right) \Big|_P^{k+1} &\approx \frac{1}{\Delta t} \left(a_1 S_1|_P^{k+1} - 2b_1 \left(2 S_1^2|_P^k - S_1^2|_P^{k-1} \right) - c_1 S_1|_P^{k+1} S_2|_P^{k+1} \right. \\
&\quad \left. - a_1 S_1|_P^k + 2b_1 S_1|_P^k S_1|_P^{k+1} + c_1 S_1|_P^k S_2|_P^{k+1} \right) \\
&\approx \frac{1}{\Delta t} \left[\left(a_1 - c_1 S_2|_P^{k+1} + 2b_1 S_1|_P^k \right) S_1|_P^{k+1} - a_1 S_1|_P^k \right. \\
&\quad \left. - 2b_1 \left(2 S_1^2|_P^k - S_1^2|_P^{k-1} \right) + c_1 S_1|_P^k S_2|_P^{k+1} \right].
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Substituindo a equação (4.20) na equação (4.15), segue que

$$\begin{aligned}
\left(\left[1 - \tau_1 \frac{\partial F_1}{\partial S_1} \right] \frac{\partial S_1}{\partial t} \right) \Big|_P^{k+1} &\approx \frac{1}{\Delta t} \left(S_1|_P^{k+1} - S_1|_P^k \right) - \frac{\tau_1}{\Delta t} \left[c_1 S_1|_P^k S_2|_P^{k+1} \right. \\
&\quad \left. + \left(a_1 - c_1 S_2|_P^{k+1} + 2b_1 S_1|_P^k \right) S_1|_P^{k+1} - a_1 S_1|_P^k \right. \\
&\quad \left. - 2b_1 \left(2 S_1^2|_P^k - S_1^2|_P^{k-1} \right) \right] \\
&\approx \frac{1}{\Delta t} \left[\left(1 - \tau_1 \left(a_1 - c_1 S_2|_P^{k+1} + 2b_1 S_1|_P^k \right) \right) S_1|_P^{k+1} \right. \\
&\quad \left. - \left(1 - \tau_1 \left(a_1 - c_1 S_2|_P^{k+1} + 4b_1 S_1|_P^k \right) \right) S_1|_P^k \right. \\
&\quad \left. - 2\tau_1 b_1 S_1^2|_P^{k-1} \right].
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Ainda pela equação (4.19) tem-se que

$$\begin{aligned}
F_1|_P^{k+1} &= a_1 S_1|_P^{k+1} - b_1 S_1^2|_P^{k+1} - c_1 S_1|_P^{k+1} S_2|_P^{k+1} \\
&\approx a_1 S_1|_P^{k+1} - b_1 \left(2 S_1^2|_P^k - S_1^2|_P^{k-1} \right) - c_1 S_1|_P^{k+1} S_2|_P^{k+1} \\
&\approx \left(a_1 - c_1 S_2|_P^{k+1} \right) S_1|_P^{k+1} - 2b_1 S_1^2|_P^k + b_1 S_1^2|_P^{k-1}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Substituindo as equações (4.1), (4.2), (4.10), (4.13), com $j = 1$, e as equações (4.21) e (4.22) na equação (3.25). Após algumas manipulações algébricas e reorganizando os termos a discretização da equação (3.25) é dada por

$$\Upsilon_{i,W}^{k+1} S_1 \Big|_W^{k+1} + \Phi_{i,P}^{k+1} S_1 \Big|_P^{k+1} + \Lambda_{i,E}^{k+1} S_1 \Big|_E^{k+1} = \Gamma_{P,1}^{k+1}, \tag{4.23}$$

onde

$$\Upsilon_{i,W}^{k+1} = -\frac{(\tau_1 + \Delta t) \delta|_w^{k+1}}{\Delta x \Delta t} - \frac{D_1}{(\Delta x)^2}, \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{i,P}^{k+1} &= \frac{(\tau_1 + \Delta t) (\delta|_e^{k+1} - \bar{\delta}|_w^{k+1})}{\Delta x \Delta t} + \frac{1 + \tau_1 (-a_1 - 2b_1 S_1|_P^k + c_1 S_2|_P^{k+1})}{\Delta t} \\ &+ c_1 S_2|_P^{k+1} + \frac{\tau_1}{(\Delta t)^2} + \frac{2D_1}{(\Delta x)^2} - a_1, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\Lambda_{i,E}^{k+1} = \frac{(\tau_1 + \Delta t) \bar{\delta}|_e^{k+1}}{\Delta x \Delta t} - \frac{D_1}{(\Delta x)^2}, \quad (4.26)$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma_{P,1}^{k+1} &= \left(\frac{2\tau_1}{(\Delta t)^2} - \frac{\tau_1 (\bar{\delta}|_w^k - \delta|_e^k)}{\Delta x \Delta t} + \frac{1 - \tau_1 (a_1 + 4b_1 S_1|_P^k - c_1 S_2|_P^{k+1})}{\Delta t} - 2b_1 S_1|_P^k \right) S_1|_P^k \\ &- \frac{\tau_1 \delta|_w^k}{\Delta x \Delta t} S_1|_W^k + \left(\frac{2b_1 \tau_1 S_1|_P^{k-1}}{\Delta t} - \frac{\tau_1}{(\Delta t)^2} + b_1 S_1|_P^{k-1} \right) S_1|_P^{k-1} + \frac{\tau_1 \bar{\delta}|_e^k}{\Delta x \Delta t} S_1|_E^k. \end{aligned} \quad (4.27)$$

4.3 DISCRETIZAÇÕES DOS TERMOS NÃO COMUNS NA EQUAÇÃO DO PREDADOR

Para discretizar o termo $\left(1 - \tau_2 \frac{\partial F_2}{\partial S_2}\right) \frac{\partial S_2}{\partial t}$, note que

$$\left(\left[1 - \tau_2 \frac{\partial F_2}{\partial S_2} \right] \frac{\partial S_2}{\partial t} \right) \Big|_P^{k+1} = \left(\frac{\partial S_2}{\partial t} \right) \Big|_P^{k+1} - \tau_2 \left(\frac{\partial F_2}{\partial S_1} \frac{\partial S_2}{\partial t} \right) \Big|_P^{k+1}. \quad (4.28)$$

Observe que

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial S_2} \frac{\partial S_2}{\partial t} \right) \Big|_P^{k+1} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial S_2} \right) \Big|_P^{k+1} \left(\frac{\partial S_2}{\partial t} \right) \Big|_P^{k+1}, \quad (4.29)$$

considerando F_2 como dado em (3.32) e que usando regras de derivação tem-se que

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial S_2} \right) \Big|_P^{k+1} = -a_2 + c_2 S_1|_P^{k+1}. \quad (4.30)$$

De (4.14), com $j = 2$, e de (4.30), a equação (4.29) torna-se

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_2}{\partial S_2} \frac{\partial S_2}{\partial t} \right) \Big|_P^{k+1} &\approx \left(-a_2 + c_2 S_1|_P^{k+1} \right) \left(\frac{1}{\Delta t} \left(S_2|_P^{k+1} - S_2|_P^k \right) \right) \\ &\approx \frac{1}{\Delta t} \left(-a_2 + c_2 S_1|_P^{k+1} \right) \left(S_2|_P^{k+1} - S_2|_P^k \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Substituindo a equação (4.31) em (4.28), segue que

$$\begin{aligned}
\left(\left[1 - \tau_2 \frac{\partial F_2}{\partial S_2} \right] \frac{\partial S_2}{\partial t} \right) \Big|_P^{k+1} &\approx \frac{1}{\Delta t} \left(S_2|_P^{k+1} - S_2|_P^k \right) - \frac{\tau_2}{\Delta t} \left[\left(-a_2 + c_2 S_1|_P^{k+1} \right) S_2|_P^{k+1} \right. \\
&\quad \left. - \left(-a_2 + c_2 S_1|_P^{k+1} \right) S_2|_P^k \right] \\
&\approx \frac{1}{\Delta t} \left[\left(1 - \tau_2 \left(-a_2 + c_2 S_1|_P^{k+1} \right) \right) S_2|_P^{k+1} \right. \\
&\quad \left. - \left(1 - \tau_2 \left(-a_2 + c_2 S_1|_P^{k+1} \right) \right) S_2|_P^k \right]. \tag{4.32}
\end{aligned}$$

Tem-se ainda que

$$F_2|_P^{k+1} = \left(-a_2 + c_2 S_1|_P^{k+1} \right) S_2|_P^{k+1}. \tag{4.33}$$

Substituindo as equações (4.1), (4.2), (4.10), (4.13), com $j = 2$, e as equações (4.32) e (4.33) na equação (3.25), tem-se após algumas manipulações algébricas e reorganização dos termos que a discretização da equação (3.25) é dada por

$$\overline{\Upsilon}_{i,W}^{k+1} S_2 \Big|_W^{k+1} + \overline{\Phi}_{i,P}^{k+1} S_2 \Big|_P^{k+1} + \overline{\Lambda}_{i,E}^{k+1} S_2 \Big|_E^{k+1} = \overline{\Gamma}_{P,1}^{k+1}, \tag{4.34}$$

onde

$$\overline{\Upsilon}_{i,W}^{k+1} = -\frac{(\tau_2 + \Delta t) \delta|_w^{k+1}}{\Delta x \Delta t} - \frac{D_2}{(\Delta x)^2}, \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\Phi}_{i,P}^{k+1} &= \frac{(\tau_2 + \Delta t) (\delta|_e^{k+1} - \bar{\delta}|_w^{k+1})}{\Delta x \Delta t} + \frac{1 - \tau_2 (c_2 S_1|_P^{k+1} - a_2)}{\Delta t} - c_2 S_1|_P^{k+1} \\
&+ \frac{\tau_2}{(\Delta t)^2} + \frac{2D_2}{(\Delta x)^2} + a_2, \tag{4.36}
\end{aligned}$$

$$\overline{\Lambda}_{i,E}^{k+1} = \frac{(\tau_2 + \Delta t) \bar{\delta}|_e^{k+1}}{\Delta x \Delta t} - \frac{D_2}{(\Delta x)^2} \tag{4.37}$$

e

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma}_{P,1}^{k+1} &= \frac{\tau_2 \bar{\delta}|_e^k}{\Delta x \Delta t} S_1|_E^k + \left(\frac{2\tau_2}{(\Delta t)^2} - \frac{\tau_2 (\bar{\delta}|_w^k - \delta|_e^k)}{\Delta x \Delta t} + \frac{1 - \tau_2 (c_2 S_1|_P^{k+1} - a_2)}{\Delta t} \right) S_2|_P^k \\
&- \frac{\tau_2 \delta|_w^k}{\Delta x \Delta t} S_2|_W^k - \frac{\tau_2}{(\Delta t)^2} S_2|_P^{k-1}. \tag{4.38}
\end{aligned}$$

4.4 SISTEMAS LINEARES RESULTANTES DAS DISCRETIZAÇÕES (4.23) E (4.34)

Utilizando o método das diferenças finitas, obteve-se nas subseções 4.2 e 4.3, dois sistemas lineares a serem resolvidos no nível de tempo $k + 1$, descritos nas equações (4.23)

e (4.34). Como os sistemas lineares estão no mesmo sistema de coordenadas, ou seja, estão sobre as coordenadas cardinais, assim pode-se considerar $W = i - 1$, $P = i$ e $E = i + 1$, com $i = 2, \dots, n$. Com o intuito de simplificar a notação, considera-se ainda que $S_j|_{x_i}^{t_k} = S_j|_i^k$. No caso da presa, o sistema linear obtido no nível de tempo $k + 1$ pode ser descrito por

$$A^{k+1} s_1^{k+1} = b^{k+1}, \quad (4.39)$$

onde

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} \Phi_{1,2}^{k+1} & \Lambda_{1,3}^{k+1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Upsilon_{2,2}^{k+1} & \Phi_{2,3}^{k+1} & \Lambda_{2,4}^{k+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Upsilon_{3,3}^{k+1} & \Phi_{3,4}^{k+1} & \Lambda_{3,5}^{k+1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \Upsilon_{n-3,n-3}^{k+1} & \Phi_{n-3,n-2}^{k+1} & \Lambda_{n-3,n-1}^{k+1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \Upsilon_{n-2,n-2}^{k+1} & \Phi_{n-2,n-1}^{k+1} & \Lambda_{n-2,n}^{k+1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \Upsilon_{n-1,n-1}^{k+1} & \Phi_{n-1,n}^{k+1} \end{pmatrix}, \quad (4.40)$$

$$s_1^{k+1} = \begin{pmatrix} S_{1|2}^{k+1} \\ S_{1|3}^{k+1} \\ S_{1|4}^{k+1} \\ \vdots \\ S_{1|n-2}^{k+1} \\ S_{1|n-1}^{k+1} \\ S_{1|n}^{k+1} \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

e

$$b^{k+1} = \begin{pmatrix} \Gamma_{2,1}^{k+1} - \Phi_{1,1}^{k+1} S_{1|1}^{k+1} \\ \Gamma_{3,1}^{k+1} \\ \Gamma_{4,1}^{k+1} \\ \vdots \\ \Gamma_{n-2,1}^{k+1} \\ \Gamma_{n-1,1}^{k+1} \\ \Gamma_{n,1}^{k+1} - \Lambda_{n,n+1}^{k+1} S_{1|n+1}^{k+1} \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

De maneira análoga, pode-se construir o sistema linear para o predador dado por

$$\bar{A}^{k+1} \bar{s}_2^{k+1} = \bar{b}^{k+1}, \quad (4.43)$$

onde

$$\bar{A}^{k+1} = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_{1,2}^{k+1} & \bar{\Lambda}_{1,3}^{k+1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{\Upsilon}_{2,2}^{k+1} & \bar{\Phi}_{2,3}^{k+1} & \bar{\Lambda}_{2,4}^{k+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{\Upsilon}_{3,3}^{k+1} & \bar{\Phi}_{3,4}^{k+1} & \bar{\Lambda}_{3,5}^{k+1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \bar{\Upsilon}_{n-3,n-3}^{k+1} & \bar{\Phi}_{n-3,n-2}^{k+1} & \bar{\Lambda}_{n-3,n-1}^{k+1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \bar{\Upsilon}_{n-2,n-2}^{k+1} & \bar{\Phi}_{n-2,n-1}^{k+1} & \bar{\Lambda}_{n-2,n}^{k+1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \bar{\Upsilon}_{n-1,n-1}^{k+1} & \bar{\Phi}_{n-1,n}^{k+1} \end{pmatrix}, \quad (4.44)$$

$$\bar{s}_2^{k+1} = \begin{pmatrix} S_2|_2^{k+1} \\ S_2|_3^{k+1} \\ S_2|_4^{k+1} \\ \vdots \\ S_2|_{n-2}^{k+1} \\ S_2|_{n-1}^{k+1} \\ S_2|_n^{k+1} \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

e

$$\bar{b}^{k+1} = \begin{pmatrix} \bar{\Gamma}_{2,1}^{k+1} - \bar{\Phi}_{1,1}^{k+1} S_2|_1^{k+1} \\ \bar{\Gamma}_{3,1}^{k+1} \\ \bar{\Gamma}_{4,1}^{k+1} \\ \vdots \\ \bar{\Gamma}_{n-2,1}^{k+1} \\ \bar{\Gamma}_{n-1,1}^{k+1} \\ \bar{\Gamma}_{n,1}^{k+1} - \bar{\Lambda}_{n-1,n+1}^{k+1} S_2|_{n+1}^{k+1} \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

Pelas discretizações apresentadas, equações (4.23) e (4.34), pode-se observar que para encontrar o valor da densidade das populações no nó $(P, k + 1)$ é necessário conhecer os valores dos nós $(W, k + 1)$, $(E, k + 1)$, (W, k) , (P, k) , (E, k) e $(P, k - 1)$. A figura 4.2 apresenta um esquema da célula computacional, evidenciando o esquema implícito..

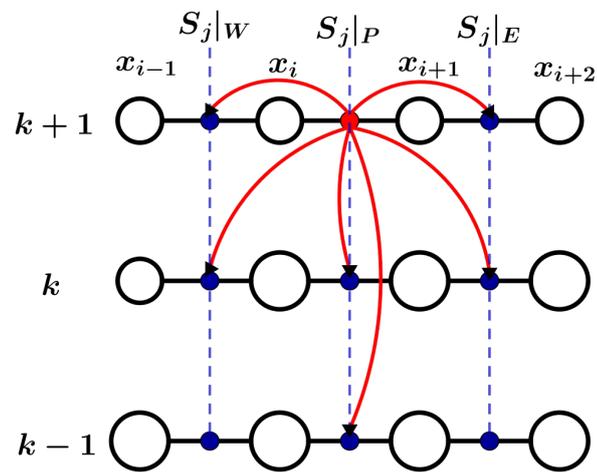


Figura 4.2: Célula computacional para resolução do sistema discretizado predador-presa proposto.

Fonte: Autor

5 ANÁLISE DA CONSISTÊNCIA

Ao resolver uma EDP numericamente, é natural perguntar se a solução numérica calculada está se aproximando da solução real da EDP que se está resolvendo. A resposta para essa pergunta, depende da consistência, estabilidade e convergência do método empregado [10]. Desta forma, neste capítulo será realizado uma análise de consistência das discretizações do sistema (3.26).

5.1 ANÁLISE DE CONSISTÊNCIA DAS DISCRETIZAÇÕES

Uma característica importante de uma discretização construída por diferenças finitas é a consistência com a equação diferencial parcial discretizada, isto é, ao substituir a expansão em série de Taylor na equação de diferenças finitas e considerar $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, o erro local de truncamento (ELT) também deve tender a zero, resultando apenas a EDP aplicada em um ponto da malha. Caso o ELT tenda para zero, a discretização é dita consistente com a EDP. Essencialmente, a análise de consistência é o caminho inverso do processo de discretização.

Neste capítulo serão feitas as análises da consistência das discretizações das equações que se encontram no capítulo 4. A fim de facilitar a compreensão dos cálculos envolvidos, inicialmente será analisada a consistência das discretizações quando $\tau_1 = \tau_2 = 0$ e $u \equiv 0$. Posteriormente será considerado $\tau_1 \neq 0, \tau_2 \neq 0$ e $u \equiv 0$. Por fim, será analisado a discretização da equação (3.25) considerando $\tau_1 \neq 0, \tau_2 \neq 0$ e $u \neq 0$.

5.1.1 Análise da consistência das discretizações com $\tau_1 = \tau_2 = 0$ e $u \equiv 0$.

Considerando $\tau_1 = \tau_2 = 0$ e $u \equiv 0$, obtém-se,

$$\begin{cases} \frac{\partial S_1}{\partial t} - D_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} - F_1 = 0 \\ \frac{\partial S_2}{\partial t} - D_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} - F_2 = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Quando $F_j = 0$, com $j = 1, 2$, as equações do sistema (5.1) são conhecidas como equação transiente de difusão ou simplesmente como equação de difusão de calor.

Para discretizar as equações do sistema (5.1) considera-se as discretizações dadas no capítulo 4 nas equações (4.23) e (4.34), com $\tau_1 = \tau_2 = 0$ e $u \equiv 0$. Assim, obtém-se

$$\begin{aligned}
& - \frac{D_1}{(\Delta x)^2} S_1 \Big|_W^{k+1} + \left(\frac{1}{\Delta t} + c_1 S_2 \Big|_P^{k+1} + \frac{2D_1}{(\Delta x)^2} - a_1 \right) S_1 \Big|_P^{k+1} - \frac{D_1}{(\Delta x)^2} S_1 \Big|_E^{k+1} \\
& - \left(\frac{1}{\Delta t} - 2b_1 S_1 \Big|_P^k \right) S_1 \Big|_P^k - b_1 S_1^2 \Big|_P^{k-1} = 0,
\end{aligned} \tag{5.2}$$

e

$$\begin{aligned}
& - \frac{D_2}{(\Delta x)^2} S_2 \Big|_W^{k+1} + \left(\frac{1}{\Delta t} - c_2 S_1 \Big|_P^{k+1} + \frac{2D_2}{(\Delta x)^2} + a_2 \right) S_2 \Big|_P^{k+1} - \frac{D_2}{(\Delta x)^2} S_2 \Big|_E^{k+1} \\
& - \left(\frac{1}{\Delta t} \right) S_2 \Big|_P^k = 0.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Primeiramente será analisada a consistência da equação (5.2). Para tal, aplicar-se-a a série de Taylor para duas variáveis nos termos $S_1 \Big|_P^k$, $S_1 \Big|_W^{k+1}$ e $S_1 \Big|_E^{k+1}$, levando em consideração que $W = P - \Delta x$ e $E = P + \Delta x$. Assim tem-se que

$$S_1 \Big|_P^k = S_1 \Big|_P^{k+1} - \Delta t \frac{\partial S_1}{\partial t} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta t^3), \tag{5.4}$$

$$S_1 \Big|_W^{k+1} = S_1 \Big|_P^{k+1} - \Delta x \frac{\partial S_1}{\partial x} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 S_1}{\partial t^3} \Big|_P^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta x^4) \tag{5.5}$$

e

$$S_1 \Big|_E^{k+1} = S_1 \Big|_P^{k+1} + \Delta x \frac{\partial S_1}{\partial x} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 S_1}{\partial t^3} \Big|_P^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta x^4). \tag{5.6}$$

Substituindo as equações (5.4), (5.5) e (5.6) na equação (5.2) e fazendo algumas manipulações algébricas e simplificações, obtém-se que

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial S_1}{\partial t} \Big|_P^{k+1} - D_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} - \left(a_1 S_1 \Big|_P^{k+1} - b_1 \left(2S_1^k \Big|_P - S_1^{k-1} \Big|_P \right) - c_1 S_1 \Big|_P^{k+1} S_2 \Big|_P^{k+1} \right) \\
& - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} - 2D_1 \frac{\mathcal{O}(\Delta x^4)}{(\Delta x)^2} - \frac{\mathcal{O}(\Delta t^3)}{\Delta t} = 0.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Observe que utilizando novamente série de Taylor para duas variáveis tem-se que

$$S_1^2 \Big|_P^k = S_1^2 \Big|_P^{k+1} - \Delta t \frac{\partial S_1^2}{\partial t} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 S_1^2}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta t^3) \tag{5.8}$$

e

$$S_1^2 \Big|_P^{k-1} = S_1^2 \Big|_P^{k+1} - 2\Delta t \frac{\partial S_1^2}{\partial t} \Big|_P^{k+1} + \frac{4(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 S_1^2}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta t^3), \tag{5.9}$$

portanto

$$2S_1^2 \Big|_P^k - S_1^2 \Big|_P^{k-1} = S_1^2 \Big|_P^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta t^3). \quad (5.10)$$

Substituindo a equação (5.10), na equação (5.7) segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial t} \Big|_P^{k+1} - D_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} - \left(a_1 S_1 \Big|_P^{k+1} - b_1 S_1^2 \Big|_P^{k+1} - c_1 S_1 \Big|_P^{k+1} S_2 \Big|_P^{k+1} \right) \\ + b_1 \mathcal{O}(\Delta t^3) - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} - 2D_1 \frac{\mathcal{O}(\Delta x^4)}{(\Delta x)^2} - \frac{\mathcal{O}(\Delta t^3)}{\Delta t} = 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Como

$$F_1 \Big|_P^{k+1} = a_1 S_1 \Big|_P^{k+1} - b_1 S_1^2 \Big|_P^{k+1} - c_1 S_1 \Big|_P^{k+1} S_2 \Big|_P^{k+1}, \quad (5.12)$$

tem-se que a equação (5.11) torna-se

$$\underbrace{\frac{\partial S_1}{\partial t} \Big|_P^{k+1} - D_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} - F_1 \Big|_P^{k+1}}_{\text{EDP}} = \underbrace{\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} - b_1 \mathcal{O}(\Delta t^3) + 2D_1 \frac{\mathcal{O}(\Delta x^4)}{(\Delta x)^2} + \frac{\mathcal{O}(\Delta t^3)}{\Delta t}}_{\text{Erro Local de Truncamento}}. \quad (5.13)$$

Quando $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$, o E.L.T. presente na equação (5.13) tende a zero, fornecendo

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} \Big|_P^{k+1} - D_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} - F_1 \Big|_P^{k+1} = 0. \quad (5.14)$$

Este fato indica que a discretização (5.2) é consistente com a EDP do sistema (5.1) relacionada a presa.

Similarmente, para a análise da consistência de (5.3), aplica-se a expansão em série de Taylor nos termos $S_2 \Big|_P^k$, $S_2 \Big|_W^{k+1}$ e $S_2 \Big|_E^{k+1}$, levando em consideração que $W = P - \Delta x$ e $E = P + \Delta x$, tem-se que

$$S_2 \Big|_P^k = S_2 \Big|_P^{k+1} - \Delta t \frac{\partial S_2}{\partial t} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta t^3), \quad (5.15)$$

$$S_2 \Big|_W^{k+1} = S_2 \Big|_P^{k+1} - \Delta x \frac{\partial S_2}{\partial x} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 S_2}{\partial x^3} \Big|_P^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (5.16)$$

e

$$S_2 \Big|_E^{k+1} = S_2 \Big|_P^{k+1} + \Delta x \frac{\partial S_2}{\partial x} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 S_2}{\partial x^3} \Big|_P^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta x^4). \quad (5.17)$$

Substituindo as equações (5.15), (5.16) e (5.17) na equação (5.3) e fazendo algumas manipulações algébricas e simplificações, obtém-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_2}{\partial t} \Big|_P^{k+1} - D_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} - \left(-a_2 S_2 \Big|_P^{k+1} + c_2 S_1 \Big|_P^{k+1} S_2 \Big|_P^{k+1} \right) &= \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} \\ &+ 2D_2 \frac{\mathcal{O}(\Delta x^4)}{(\Delta x)^2} + \frac{\mathcal{O}(\Delta t^3)}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Como

$$F_2 \Big|_P^{k+1} = -a_2 S_2 \Big|_P^{k+1} + c_2 S_1 \Big|_P^{k+1} S_2 \Big|_P^{k+1}, \quad (5.19)$$

tem-se que a equação (5.18) torna-se

$$\underbrace{\frac{\partial S_2}{\partial t} \Big|_P^{k+1} - D_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} - F_2 \Big|_P^{k+1}}_{\text{EDP}} = \underbrace{\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} + 2D_2 \frac{\mathcal{O}(\Delta x^4)}{(\Delta x)^2} + \frac{\mathcal{O}(\Delta t^3)}{\Delta t}}_{\text{Erro Local de Truncamento}} \quad (5.20)$$

Quando $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$, o ELT presente na equação (5.20) tende a zero, fornecendo

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} \Big|_P^{k+1} - D_1 \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} - F_2 \Big|_P^{k+1} = 0. \quad (5.21)$$

Este fato indica que a discretização (5.3) é consistente com a EDP do sistema (5.1) relacionada ao predador.

Portanto, quando se considera $\tau_1 = \tau_2 = 0$ e $u \equiv 0$ nas discretizações (4.23) e (4.34), segue que são consistentes com as EDP's.

5.1.2 Análise da consistência das discretizações com $\tau_1 \neq 0$, $\tau_2 \neq 0$ e $u \equiv 0$.

Considerando $\tau_1 \neq 0$, $\tau_2 \neq 0$ e $u \equiv 0$ na equação (3.25), com $j = 1, 2$, obtém-se

$$\begin{cases} \tau_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} + \left(1 - \tau_1 \frac{dF_1}{dS_1} \right) \frac{\partial S_1}{\partial t} - D_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} - F_1 = 0 \\ \tau_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} + \left(1 - \tau_2 \frac{dF_2}{dS_2} \right) \frac{\partial S_2}{\partial t} - D_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} - F_2 = 0. \end{cases} \quad (5.22)$$

Para discretizar as equações do sistema (5.22) considera-se a discretização dada no capítulo 4 nas equações (4.23) e (4.34), com $u \equiv 0$. Assim, obtém-se

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1 + \tau_1 (-a_1 - 2b_1 S_1|_P^k + c_1 S_2|_P^{k+1})}{\Delta t} + c_1 S_2|_P^{k+1} + \frac{\tau_1}{(\Delta t)^2} + \frac{2D_1}{(\Delta x)^2} - a_1 \right) S_1|_P^{k+1} \\
& - \frac{D_1}{(\Delta x)^2} S_1|_W^{k+1} - \frac{D_1}{(\Delta x)^2} S_1|_E^{k+1} - \left(\frac{2b_1 \tau_1 S_1|_P^{k-1}}{\Delta t} - \frac{\tau_1}{(\Delta t)^2} + b_1 S_1|_P^{k-1} \right) S_1|_P^{k-1} \\
& - \left(\frac{2\tau_1}{(\Delta t)^2} + \frac{1 - \tau_1 (a_1 + 4b_1 S_1|_P^k - c_1 S_2|_P^{k+1})}{\Delta t} - 2b_1 S_1|_P^k \right) S_1|_P^k = 0 \quad (5.23)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1 - \tau_2 (c_2 S_1|_P^{k+1} - a_2)}{\Delta t} - c_2 S_1|_P^{k+1} + \frac{\tau_2}{(\Delta t)^2} + \frac{2D_2}{(\Delta x)^2} + a_2 \right) S_2|_P^{k+1} - \frac{D_2}{(\Delta x)^2} S_2|_W^{k+1} \\
& - \frac{D_2}{(\Delta x)^2} S_2|_E^{k+1} - \left(\frac{2\tau_2}{(\Delta t)^2} + \frac{1 - \tau_2 (c_2 S_1|_P^{k+1} - a_2)}{\Delta t} \right) S_2|_P^k + \frac{\tau_2}{(\Delta t)^2} S_2|_P^{k-1} = 0. \quad (5.24)
\end{aligned}$$

Primeiramente será analisada a consistência da equação (5.23), que é reescrita

por

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\left(\frac{1}{\Delta t} + c_1 S_2|_P^{k+1} + \frac{2D_1}{(\Delta x)^2} - a_1 \right) S_1|_P^{k+1} - \frac{D_1}{(\Delta x)^2} S_1|_W^{k+1} - \frac{D_1}{(\Delta x)^2} S_1|_E^{k+1} - b_1 S_1^2|_P^{k-1}}_{\text{Equação (5.2)}} \\
& - \underbrace{\left(\frac{1}{\Delta t} - 2b_1 S_1|_P^k \right) S_1|_P^k}_{\text{Equação (5.2)}} + \left(\frac{\tau_1 (-a_1 - 2b_1 S_1|_P^k + c_1 S_2|_P^{k+1})}{\Delta t} + \frac{\tau_1}{(\Delta t)^2} \right) S_1|_P^{k+1} \\
& - \left(\frac{2\tau_1}{(\Delta t)^2} - \frac{\tau_1 (a_1 + 4b_1 S_1|_P^k - c_1 S_2|_P^{k+1})}{\Delta t} - 2b_1 S_1|_P^k \right) S_1|_P^k - \frac{2b_1 \tau_1 S_1^2|_P^{k-1}}{\Delta t} + \frac{\tau_1 S_1|_P^{k-1}}{(\Delta t)^2} = 0 \quad (5.25)
\end{aligned}$$

Como a primeira parte da discretização, que está sendo analisada, já foi calculada, ver equação (5.2), deve-se então avaliar os demais termos de (5.25), expressado em (5.26), ou seja,

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\tau_1 (-a_1 - 2b_1 S_1|_P^k + c_1 S_2|_P^{k+1})}{\Delta t} + \frac{\tau_1}{(\Delta t)^2} \right) S_1|_P^{k+1} - \frac{2b_1 \tau_1 S_1^2|_P^{k-1}}{\Delta t} + \frac{\tau_1 S_1|_P^{k-1}}{(\Delta t)^2} \\
& - \left(\frac{2\tau_1}{(\Delta t)^2} - \frac{\tau_1 (a_1 + 4b_1 S_1|_P^k - c_1 S_2|_P^{k+1})}{\Delta t} - 2b_1 S_1|_P^k \right) S_1|_P^k = 0. \quad (5.26)
\end{aligned}$$

Considerando as expansões de Taylor dadas nas equações (5.4), (5.8), (5.9) e que

$$S_1 \Big|_P^{k-1} = S_1 \Big|_P^{k+1} - 2\Delta t \frac{\partial S_1}{\partial t} \Big|_P^{k+1} + \frac{(2\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta t^3), \quad (5.27)$$

substituindo-as na equação (5.26), tem-se após algumas manipulações algébricas, simplificações e reagrupando

$$\begin{aligned} & \tau_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} - \tau_1 \left(a_1 - 2b_1 S_1 \Big|_P^{k+1} - c_1 S_2 \Big|_P^{k+1} \right) \frac{\partial S_1}{\partial t} \Big|_P^{k+1} + \Delta t \frac{4b_1 \tau_1}{2} \frac{\partial^2 S_1^2}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} \\ & + \Delta t \left[\left(\frac{a_1 \tau_1}{2} - b_1 \tau_1 S_1 \Big|_P^{k+1} - \frac{c_1 \tau_1}{2} S_2 \Big|_P^{k+1} \right) \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} - 4b_1 \tau_1 \frac{\partial S_1}{\partial t} \Big|_P^{k+1} \right] \\ & + \tau_1 \frac{\mathcal{O}(\Delta t^3)}{\Delta t} \left(a_1 - 2b_1 S_1 \Big|_P^{k+1} - 2b_1 - c_1 S_2 \Big|_P^{k+1} + 4b_1 \right) - \tau_1 \frac{\mathcal{O}(\Delta t^3)}{\Delta t^2} = 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Como

$$\frac{dF_1}{dS_1} \Big|_P^{k+1} = a_1 - 2b_1 S_1 \Big|_P^{k+1} - c_1 S_2 \Big|_P^{k+1}, \quad (5.29)$$

tem-se que a equação (5.28) torna-se

$$\begin{aligned} & \tau_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} - \tau_1 \frac{dF_1}{dS_1} \Big|_P^{k+1} \frac{\partial S_1}{\partial t} \Big|_P^{k+1} + \underbrace{\Delta t \frac{4b_1 \tau_1}{2} \frac{\partial^2 S_1^2}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1}}_{\text{ELT}} \\ & + \Delta t \left[\left(\frac{a_1 \tau_1}{2} - b_1 \tau_1 S_1 \Big|_P^{k+1} - \frac{c_1 \tau_1}{2} S_2 \Big|_P^{k+1} \right) \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} - 4b_1 \tau_1 \frac{\partial S_1}{\partial t} \Big|_P^{k+1} \right] \\ & + \tau_1 \frac{\mathcal{O}(\Delta t^3)}{\Delta t} \left(a_1 - 2b_1 S_1 \Big|_P^{k+1} - 2b_1 - c_1 S_2 \Big|_P^{k+1} + 4b_1 \right) - \tau_1 \frac{\mathcal{O}(\Delta t^3)}{\Delta t^2} = 0. \end{aligned} \quad (5.30)$$

ELT

Quando $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$, o ELT presente na equação (5.30) tende a zero, fornecendo

$$\tau_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} - \tau_1 \frac{dF_1}{dS_1} \Big|_P^{k+1} \frac{\partial S_1}{\partial t} \Big|_P^{k+1} = 0. \quad (5.31)$$

Assim, considerando os resultados dados na subseção 5.1.1 para a equação (5.2), segue que a equação (5.23), quando considera-se $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$, torna-se

$$\tau_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} + \frac{\partial S_1}{\partial t} \Big|_P^{k+1} - \tau_1 \frac{dF_1}{dS_1} \Big|_P^{k+1} \frac{\partial S_1}{\partial t} \Big|_P^{k+1} - D_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} - F_1 \Big|_P^{k+1} = 0, \quad (5.32)$$

ou ainda,

$$\tau_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} + \left(1 - \tau_1 \frac{dF_1}{dS_1} \Big|_P^{k+1} \right) \frac{\partial S_1}{\partial t} \Big|_P^{k+1} - D_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} - F_1 \Big|_P^{k+1} = 0. \quad (5.33)$$

Portanto a discretização dada na equação (5.23) é consistente com a EDP do sistema (5.22) relacionado a presa.

Por fim, será estudada a consistência da discretização dada pela equação (5.24). Reorganizando os termos da equação (5.24) segue

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\Delta t} - c_2 S_1 \Big|_P^{k+1} + \frac{2D_2}{(\Delta x)^2} + a_2 \right) S_2 \Big|_P^{k+1} - \frac{D_2}{(\Delta x)^2} S_2 \Big|_W^{k+1} - \frac{D_2}{(\Delta x)^2} S_2 \Big|_E^{k+1} - \frac{1}{\Delta t} S_2 \Big|_P^k}_{\text{Equação (5.3)}} + \left(\frac{\tau_2}{(\Delta t)^2} - \frac{\tau_2(c_2 S_1 \Big|_P^{k+1} - a_2)}{\Delta t} \right) S_2 \Big|_P^{k+1} - \left(\frac{2\tau_2}{(\Delta t)^2} - \frac{\tau_2(c_2 S_1 \Big|_P^{k+1} - a_2)}{\Delta t} \right) S_2 \Big|_P^k + \frac{\tau_2}{(\Delta t)^2} S_2 \Big|_P^{k-1} = 0., \quad (5.34)$$

Como a primeira parte da discretização, que está sendo analisada, já foi calculada, ver equação (5.3), deve-se então avaliar os demais termos de (5.34), expressado em (5.35), ou seja,

$$\left(\frac{\tau_2}{(\Delta t)^2} - \frac{\tau_2(c_2 S_1 \Big|_P^{k+1} - a_2)}{\Delta t} \right) S_2 \Big|_P^{k+1} - \left(\frac{2\tau_2}{(\Delta t)^2} - \frac{\tau_2(c_2 S_1 \Big|_P^{k+1} - a_2)}{\Delta t} \right) S_2 \Big|_P^k + \frac{\tau_2}{(\Delta t)^2} S_2 \Big|_P^{k-1} = 0. \quad (5.35)$$

Considerando a expansão da Série de Taylor dada em (5.15) e

$$S_2 \Big|_P^{k-1} = S_2 \Big|_P^{k+1} - 2\Delta t \frac{\partial S_2}{\partial t} \Big|_P^{k+1} + \frac{(2\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta t^3), \quad (5.36)$$

e substituindo-as na equação (5.35) tem-se, após algumas manipulações algébricas, simplificações e reagrupamentos, que

$$\begin{aligned} & \tau_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} - \tau_2 \left(c_2 S_1 \Big|_P^{k+1} - a_2 \right) \frac{\partial S_2}{\partial t} \Big|_P^{k+1} - \tau_2 \frac{\mathcal{O}(\Delta t^3)}{\Delta t^2} - a_2 \tau_2 \frac{\mathcal{O}(\Delta t^3)}{\Delta t} \\ & + c_2 \tau_2 S_1 \Big|_P^{k+1} \frac{\mathcal{O}(\Delta t^3)}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \left(c_2 \tau_2 S_1 \Big|_P^{k+1} \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} - a_1 \tau_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.37)$$

Como

$$\frac{dF_2}{dS_2} \Big|_P^{k+1} = c_2 S_1 \Big|_P^{k+1} - a_2. \quad (5.38)$$

Enfim a equação (5.37) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & \tau_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} - \tau_2 \frac{dF_2}{dS_2} \Big|_P^{k+1} \frac{\partial S_2}{\partial t} \Big|_P^{k+1} - \underbrace{\tau_2 \frac{\mathcal{O}(\Delta t^3)}{\Delta t^2} - a_2 \tau_2 \frac{\mathcal{O}(\Delta t^3)}{\Delta t} + c_2 \tau_2 S_1 \Big|_P^{k+1} \frac{\mathcal{O}(\Delta t^3)}{\Delta t}}_{\text{ELT}} \\ & + \frac{\Delta t}{2} \left(\underbrace{c_2 \tau_2 S_1 \Big|_P^{k+1} \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} - a_1 \tau_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1}}_{\text{ELT}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Quando $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$, o ELT presente na equação (5.39) tende a zero, fornecendo

$$\tau_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} - \tau_2 \frac{dF_2}{dS_2} \Big|_P^{k+1} \frac{\partial S_2}{\partial t} \Big|_P^{k+1} = 0. \quad (5.40)$$

Considerando os resultados dados na subseção 5.1.1 para a equação (5.3), segue que a equação (5.34), quando considera-se $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$, torna-se

$$\tau_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} + \frac{\partial S_2}{\partial t} \Big|_P^{k+1} - \tau_2 \frac{dF_2}{dS_2} \Big|_P^{k+1} \frac{\partial S_2}{\partial t} \Big|_P^{k+1} - D_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} - F_2 \Big|_P^{k+1} = 0, \quad (5.41)$$

ou ainda,

$$\tau_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} + \left(1 - \tau_2 \frac{dF_2}{dS_2} \Big|_P^{k+1} \right) \frac{\partial S_2}{\partial t} \Big|_P^{k+1} - D_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} - F_2 \Big|_P^{k+1} = 0. \quad (5.42)$$

Portanto a discretização dada na equação (5.24) é consistente com a EDP do sistema (5.22) relacionada com o predador.

5.1.3 Análise da consistência das discretizações com $\tau_1 \neq 0$, $\tau_2 \neq 0$ e $u \neq 0$.

Ao considerar $\tau_1 \neq 0$, $\tau_2 \neq 0$ e $u \neq 0$ na equação (3.25), com $j = 1, 2$, obtém-se o sistema (3.26) e suas discretizações são dadas pelas equações (4.23) e (4.34). Para analisar consistência da discretização dada pela equação (4.23), observe inicialmente que a equação (4.23) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\left(\frac{1}{\Delta t} + c_1 S_2 \Big|_P^{k+1} + \frac{2D_1}{(\Delta x)^2} - a_1 \right) S_1 \Big|_P^{k+1} - \frac{D_1}{(\Delta x)^2} S_1 \Big|_W^{k+1} - \frac{D_1}{(\Delta x)^2} S_1 \Big|_E^{k+1} + \frac{\tau_1 S_1 \Big|_P^{k-1}}{(\Delta t)^2}}_{\text{Equação (5.23)}} \\
& - \underbrace{\left(\frac{1}{\Delta t} - 2b_1 S_1 \Big|_P^k \right) S_1 \Big|_P^k + \left(\frac{\tau_1 (-a_1 - 2b_1 S_1 \Big|_P^k + c_1 S_2 \Big|_P^{k+1})}{\Delta t} + \frac{\tau_1}{(\Delta t)^2} \right) S_1 \Big|_P^{k+1}}_{\text{Equação (5.23)}} \\
& - \underbrace{\left(\frac{2\tau_1}{(\Delta t)^2} - \frac{\tau_1 (a_1 + 4b_1 S_1 \Big|_P^k - c_1 S_2 \Big|_P^{k+1})}{\Delta t} - 2b_1 S_1 \Big|_P^k \right) S_1 \Big|_P^k - \frac{2b_1 \tau_1 S_1 \Big|_P^{k-1}}{\Delta t} - b_1 S_1 \Big|_P^{k-1}}_{\text{Equação (5.23)}} \\
& + \frac{(\tau_1 + \Delta t)}{\Delta x \Delta t} \left(-\delta|_w^{k+1} S_1 \Big|_W^{k+1} - \bar{\delta}|_w^{k+1} S_1 \Big|_P^{k+1} + \delta|_e^{k+1} S_1 \Big|_P^{k+1} + \bar{\delta}|_e^{k+1} S_1 \Big|_E^{k+1} \right) \\
& + \frac{\tau_1}{\Delta x \Delta t} \left(\delta|_w^k S_1 \Big|_W^k + \bar{\delta}|_w^k S_1 \Big|_P^k - \delta|_e^k S_1 \Big|_P^k - \bar{\delta}|_e^k S_1 \Big|_E^k \right) = 0. \tag{5.43}
\end{aligned}$$

Como a primeira parte da discretização, que está sendo analisada, já foi calculada, ver equação (5.23) na subseção 5.1.2, deve-se então avaliar os demais termos de (5.43), descrito em (5.44), ou seja,

$$\begin{aligned}
& \frac{(\tau_1 + \Delta t)}{\Delta x \Delta t} \left(-\delta|_w^{k+1} S_1 \Big|_W^{k+1} - \bar{\delta}|_w^{k+1} S_1 \Big|_P^{k+1} + \delta|_e^{k+1} S_1 \Big|_P^{k+1} + \bar{\delta}|_e^{k+1} S_1 \Big|_E^{k+1} \right) \\
& + \frac{\tau_1}{\Delta x \Delta t} \left(\delta|_w^k S_1 \Big|_W^k + \bar{\delta}|_w^k S_1 \Big|_P^k - \delta|_e^k S_1 \Big|_P^k - \bar{\delta}|_e^k S_1 \Big|_E^k \right) = 0. \tag{5.44}
\end{aligned}$$

Observe inicialmente que pelas equações (4.5), (4.8) e (4.9), no nível de tempo $k + 1$, tem-se que

$$\begin{aligned}
-\delta|_w^{k+1} S_1 \Big|_W^{k+1} - \bar{\delta}|_w^{k+1} S_1 \Big|_P^{k+1} &= - \left(\frac{1 + A|_w^{k+1}}{2} \right) u|_w^{k+1} S_1 \Big|_W^{k+1} - \left(\frac{1 - A|_w^{k+1}}{2} \right) u|_w^{k+1} S_1 \Big|_P^{k+1} \\
&= - u|_w^{k+1} \underbrace{\left(\left(\frac{1 + A|_w^{k+1}}{2} \right) S_1 \Big|_W^{k+1} - \left(\frac{1 - A|_w^{k+1}}{2} \right) S_1 \Big|_P^{k+1} \right)}_{\text{Equação (4.5)}} \\
&= - u|_w^{k+1} S_1 \Big|_w^{k+1} = - (S_1 u) \Big|_w^{k+1}. \tag{5.45}
\end{aligned}$$

De maneira análoga, utilizando as equações (4.4), (4.8) e (4.9), no nível de tempo $k + 1$, tem-se que

$$\delta|_e^{k+1} S_1 \Big|_P^{k+1} + \bar{\delta}|_e^{k+1} S_1 \Big|_E^{k+1} = (S_1 u) \Big|_e^{k+1}. \quad (5.46)$$

Por fim, pelas equações (4.4), (4.5), (4.8) e (4.9), no nível de tempo k , tem-se que

$$\delta|_w^k S_1 \Big|_W^k + \bar{\delta}|_w^k S_1 \Big|_P^k = (S_1 u) \Big|_w^k \quad (5.47)$$

e

$$-\delta|_e^k S_1 \Big|_P^k - \bar{\delta}|_e^k S_1 \Big|_E^k = -(S_1 u) \Big|_e^k. \quad (5.48)$$

Substituindo as equações (5.45), (5.46), (5.47) e (5.48) na equação (5.44) obtém-se

$$\frac{(\tau_1 + \Delta t)}{\Delta x \Delta t} \left(-(S_1 u) \Big|_w^{k+1} + (S_1 u) \Big|_e^{k+1} \right) + \frac{\tau_1}{\Delta x \Delta t} \left((S_1 u) \Big|_w^k - (S_1 u) \Big|_e^k \right) = 0. \quad (5.49)$$

Para realizar a análise da consistência deve-se levar em consideração que $w = P - \frac{\Delta x}{2}$ e $e = P + \frac{\Delta x}{2}$. Assim as expansões em série de Taylor (Teorema 2.2) tornam-se

$$(S_1 u) \Big|_e^{k+1} = (S_1 u) \Big|_P^{k+1} + \left(\frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\partial (S_1 u)}{\partial x} \Big|_P^{k+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 \frac{\partial^2 (S_1 u)}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta t^3), \quad (5.50)$$

$$(S_1 u) \Big|_w^{k+1} = (S_1 u) \Big|_P^{k+1} - \left(\frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\partial (S_1 u)}{\partial x} \Big|_P^{k+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 \frac{\partial^2 (S_1 u)}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta t^3), \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} (S_1 u) \Big|_e^k &= (S_1 u) \Big|_P^{k+1} + \left(\frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\partial (S_1 u)}{\partial x} \Big|_P^{k+1} - \Delta t \frac{\partial (S_1 u)}{\partial t} \Big|_P^{k+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 \frac{\partial^2 (S_1 u)}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} \\ &\quad - \Delta t \Delta x \frac{\partial^2 (S_1 u)}{\partial t \partial x} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 (S_1 u)}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta x^3, \Delta t^3), \end{aligned} \quad (5.52)$$

e

$$\begin{aligned} (S_1 u) \Big|_w^k &= (S_1 u) \Big|_P^{k+1} - \left(\frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\partial (S_1 u)}{\partial x} \Big|_P^{k+1} - \Delta t \frac{\partial (S_1 u)}{\partial t} \Big|_P^{k+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 \frac{\partial^2 (S_1 u)}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} \\ &\quad + \Delta t \Delta x \frac{\partial^2 (S_1 u)}{\partial t \partial x} \Big|_P^{k+1} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 (S_1 u)}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta x^3, \Delta t^3). \end{aligned} \quad (5.53)$$

Substituindo as expansões dadas pelas equações (5.50), (5.51), (5.52) e (5.53) na equação (5.49), tem-se após algumas manipulações algébricas, simplificações e reagrupamentos, que

$$\tau_1 \frac{\partial^2 (S_1 u)}{\partial t \partial x} \Big|_P^{k+1} + \frac{\partial (S_1 u)}{\partial x} \Big|_P^{k+1} + \underbrace{\frac{\tau_1}{\Delta x \Delta t} (\mathcal{O}(\Delta x^3) + \mathcal{O}(\Delta x^3, \Delta t^3)) + \frac{\mathcal{O}(\Delta x^3)}{\Delta x}}_{ELT} = 0. \quad (5.54)$$

Quando se considera $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, o *ELT* presente na equação (5.54) tende a zero, fornecendo

$$\tau_1 \frac{\partial^2 (S_1 u)}{\partial t \partial x} \Big|_P^{k+1} + \frac{\partial (S_1 u)}{\partial x} \Big|_P^{k+1} = 0. \quad (5.55)$$

Assim, levando em consideração os resultados obtidos na subseção 5.1.2 para a equação (5.23), segue que a equação (5.43), quando considera-se $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, torna-se

$$\begin{aligned} & \tau_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} \Big|_P^{k+1} + \tau_1 \left(\frac{\partial^2 (S_1 u)}{\partial t \partial x} \right) \Big|_P^{k+1} + \left(1 - \tau_1 \frac{dF_1}{dS_1} \Big|_P^{k+1} \right) \frac{\partial S_1}{\partial t} \Big|_P^{k+1} + \frac{\partial (S_1 u)}{\partial x} \Big|_P^{k+1} \\ & - D_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} \Big|_P^{k+1} - F_1 \Big|_P^{k+1} = 0. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Portanto a discretização dada pela equação (5.43) é consistente com a EDP (3.25).

Para analisar a consistência da discretização da EDP do sistema (3.26) relacionado ao predador, deve-se considerar que na análise da consistência da discretização da EDP relacionada a presa, quando se considera os resultados da subseção 5.1.2, o termo que foi analisado separadamente não tem a influência do termo fonte, portanto a análise de consistência da discretização da EDP do sistema (3.26) relacionada ao predador segue de maneira análoga a realizada para a EDP da presa, ou seja, pode-se concluir que a discretização dada pela equação (4.34) é consistente com a EDP do sistema (3.26) relacionada ao predador.

5.2 CONVERGÊNCIA

Sabe-se que se a discretização for consistente, então quando considera-se $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, o *ELT* se anula e recupera-se a EDP. Caso a solução numérica se aproxime da solução exata da EDP, conforme $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, o método numérico é dito ser convergente.

A consistência é uma condição necessária para a convergência do método aplicado, pois ao considerar $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ e não se recuperar a EDP original, então a solução numérica também não se aproximará da solução exata da EDP original, mas sim da equação com a qual a discretização for consistente. Contudo, consistência por si só não é suficiente, caso a solução numérica não seja convergente.

A convergência é uma qualidade extremamente importante, porém difícil de ser demonstrada diretamente. Em geral, utiliza-se uma técnica baseada no Teorema de Equivalência de Lax. O Teorema de Equivalência de Lax garante que para um problema de valor inicial bem-posto e um método de discretização consistente, estabilidade é condição necessária e suficiente para a convergência [10], em resumo,

$$\text{Consistência} + \text{Estabilidade} \Leftrightarrow \text{Convergência} .$$

A análise da estabilidade da discretização do sistema predador-presa será realizada de forma numérica, devido a complexidade da EDP utilizada no modelo. Para a análise serão realizadas simulações numéricas no capítulo 6.

6 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS E ANÁLISE DE ESTABILIDADE

6.1 IMPLEMENTAÇÃO

As equações discretizadas foram implementadas na linguagem Fortran 90 e compilada no Linux/Ubuntu. A visualização dos resultados obtidos pelas soluções numéricas encontradas e as edições das figuras realiza-se por meio dos *softwares* Gnuplot e GIMP-GNU, respectivamente.

Para a resolução dos sistemas lineares resultantes das discretizações utiliza-se o método iterativo de Gauss-Seidel descrito pela equação (2.28) no capítulo 2. Como critério de parada considera-se o erro relativo dado por

$$E_j^{it+1} = \frac{\|S_j^{it+1} - S_j^{it}\|_\infty}{\|S_j^{it+1}\|_\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{|S_j^{it+1}|_i^{k+1} - S_j^{it}|_i^{k+1}|}{|S_j^{it+1}|_i^{k+1}} \right\} \leq tol_{sol}, \quad (6.1)$$

onde S_j^{k+1} indica as densidades populacionais no nível de tempo $k + 1$, $it + 1$ o nível iterativo do método de Gauss-Seidel e tol_{sol} é a tolerância do erro relativo para os sistemas. Para a verificação da convergência do método de Gauss-Seidel, utiliza-se o critério de Sassenfeld, descrito pelo Teorema 2.10.

Como S_1 e S_2 são as densidades populacionais da presa e do predador, respectivamente, para obter a população total, em um tempo t , deve-se calcular a área delimitada pelas curvas S_1 e S_2 e o eixo coordenado, utilizando o conceito de integral definida, ou seja,

$$P_j(t) = \int_{x_0}^{x_f} S_j(x, t) dx, \quad j = 1, 2, \quad (6.2)$$

onde P_1 e P_2 são, respectivamente, as populações da presa e do predador no tempo t . Para calcular as integrais numericamente, utiliza-se os métodos descritos na seção 2.3.2 do capítulo 2, ou seja, Regra do Trapézio, 1/3 e 3/8 de Simpson. Deve ser ressaltado que no código consta a implementação dos três métodos, de tal forma a utilizar o método conforme a necessidade.

Para uma melhor compreensão do código, apresenta-se no Algoritmo 1 um esquema resumido de seu desenvolvimento.

Algoritmo 1: Principal.f90

Entrada: $NI, NJ, \tau_j, D_j, F_j, L, T, S_j^0, k_j, tol_{sol}, tol_{per}$

Saída: $S_j, P_j(t)$

Inicialização: Declaração das variáveis

Dados: Leitura dos parâmetros: "PARAMETROS_PP.dat"

Sub-rotina: Condições Iniciais

enquanto ($t < T$) **faça**

$t = t + \Delta t$

Sub-rotina: Cálculo da População

Equação (6.2)

Sub-rotina: Solução do sistema linear

Equações (4.39) e (4.43)

Sub-rotina: Verificação do regime de permanência

fim

Gravação: Gravação dos dados

Gráficos: Geração dos gráficos utilizando o Gnuplot

Fonte: Próprio autor

Para a verificação do regime permanente, o código calcula a norma do máximo da diferença entre um nível de iteração e o nível subsequente, ou seja, $\|S_j^{k+1} - S_j^k\|_\infty$. Quando $\|S_j^{k+1} - S_j^k\|_\infty \leq tol_{per}$, onde tol_{per} é a tolerância para o regime permanente, para verificar se o regime permanente persiste e não ocorre oscilações, regista-se o tempo computacional levado para alcançar pela primeira vez esse estágio, e calcula-se mais 20% desse tempo. Caso o regime de permanência não se altere durante o tempo adicional, então a simulação é encerrada.

Para analisar a estabilidade das discretizações que descrevem o sistema reativo-convectivo-difusivo com retardo, realiza-se experimentações numéricas. Deste modo, para cada caso proposto são realizadas simulações com diferentes partições no espaço e no tempo, ou seja, para vários valores de NI e NJ e depois de alcançado o regime permanente regista-se as populações.

6.2 SIMULAÇÕES

Para analisar a estabilidade das discretizações serão considerados casos testes, envolvendo a equação de difusão, o modelo Lotka-Volterra logístico e o modelo proposto por este trabalho. Nos testes realizados utiliza-se a tolerância $tol_{per} = 10^{-7}$ para a verificação do estado de regime permanente.

6.2.1 Equação de Difusão

Para obter a solução da equação de difusão, a partir do sistema (3.26), consideram-se os parâmetros apresentados na tabela 6.1.

Tabela 6.1: Parâmetros para equação de difusão

Termos	Presa (j = 1)	Predador (j = 2)
Relaxação temporal (τ_j)	0.0	0.0
Taxa de Natalidade (a_j)	0.0	0.0
Coefficiente de Saturação (b_j)	0.0	—
Coefficiente de interação (c_j)	0.0	0.0
Coefficiente de Difusão (D_j)	1.0	1.0
Tempo final (T)	1.0	1.0
Espaçamento temporal (Δt)	0,00001	0,00001
Espaço (L)	1.0	1.0
Espaçamento espacial (Δx)	0,0025	0,0025
Condições iniciais (A_j)	0.0	0.0
Condições iniciais (B_j)	100 sen(πx)	100 sen(πx)
Condições iniciais (C_j)	1.0	1.0

Observe que ao considerar os termos fontes identicamente nulos (tabela 6.1), assim como a velocidade u e os termos de retardo τ_j , o sistema predador-presa (3.26), se resume no modelo de difusão dado pela equação

$$\frac{\partial S_1(x, t)}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 S_1(x, t)}{\partial x^2} \quad (6.3)$$

com condição inicial e de fronteira dadas por

$$S_1(x, 0) = 100 \text{sen}(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (6.4)$$

$$S_1(0, t) = S_1(1, t) = 0, \quad t > 0, \quad (6.5)$$

cuja solução analítica é [8]

$$S_1(x, t) = 100 \exp(-\pi^2 t) \text{sen}(\pi x). \quad (6.6)$$

Utilizando os parâmetros da tabela 6.1, tem-se o gráfico da condição inicial para o modelo de difusão apresentado na figura 6.1 e as soluções numérica e analítica, considerando $0 \leq t \leq 1.0$, na figura 6.2, utilizando $\Delta x = 0,0025$ e $\Delta t = 0,00001$.

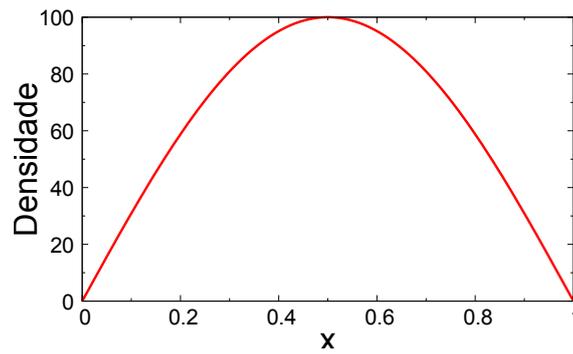


Figura 6.1: Condição inicial para a equação de difusão (6.3)

Fonte: Autor

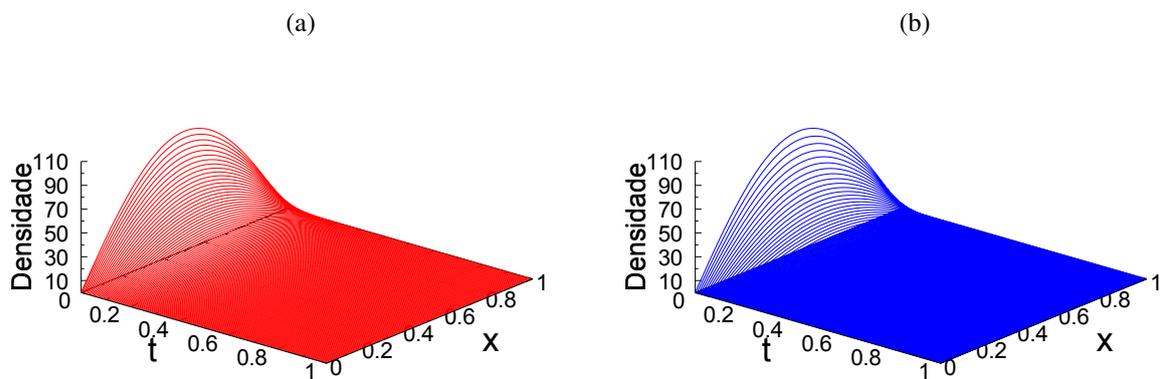


Figura 6.2: Equação da difusão (6.3): (a) Solução numérica. (b) Solução analítica.

Fonte: Autor

Pode-se observar, figura 6.2, que a solução numérica apresenta o mesmo decaimento exponencial que a solução analítica, figuras 6.2(a) e 6.2(b). Como uma alternativa para uma melhor compreensão dos resultados, apresenta na figura 6.3 uma mapa de cores dos resultados no plano xt .

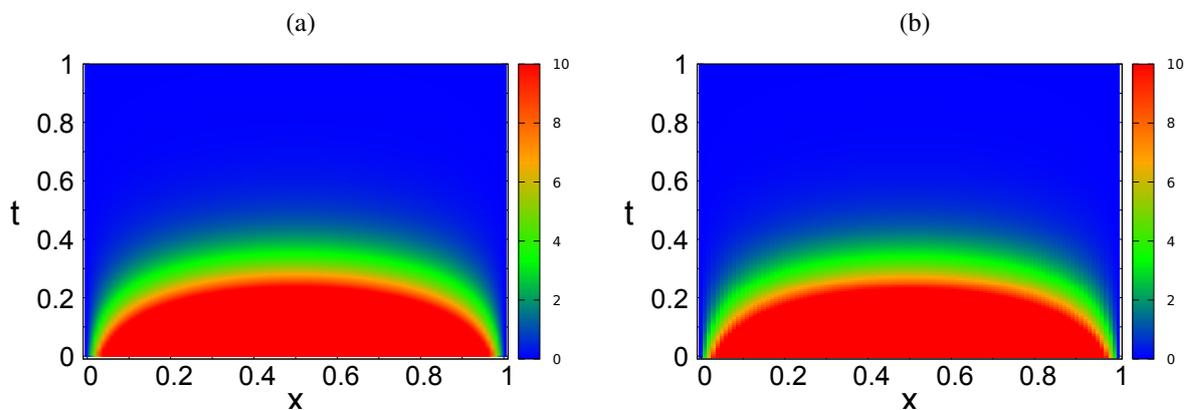


Figura 6.3: Mapa de cores para a equação de difusão (6.3): (a) Numérica. (b) Analítica.

Fonte: Autor

Apresenta-se um comparativo entre os valores em alguns pontos da solução numérica e analítica da equação de difusão por meio da tabela 6.2.

Tabela 6.2: Comparação entre solução numérica e analítica da equação do calor

(x, t)	Solução Numérica	Solução Analítica	$Erro = Sol_{num} - Sol_{ana} $
(0.2025, 0.2)	8.270322432	8.253002110	0.017320322
(0.3975, 0.2)	13.18863288	13.17711119	0.01152169
(0.6025, 0.2)	13.18863288	13.17711081	0.01152207
(0.8075, 0.2)	7.908158948	7.897955240	0.010203708
(0.2025, 0.4)	1.171627837	1.146433722	0.025194115
(0.3975, 0.4)	1.845006652	1.830447205	0.014559447
(0.6025, 0.4)	1.845006652	1.830447151	0.014559501
(0.8075, 0.4)	1.120321395	1.097113766	0.023207629
(0.2025, 0.6)	0.167610254	0.159252386	0.008357868
(0.3975, 0.6)	0.268861735	0.254269461	0.014592274
(0.6025, 0.6)	0.268861735	0.254269454	0.014592281
(0.8075, 0.6)	0.160270478	0.152401296	0.007869182
(0.2025, 0.8)	$2.270496169 \times 10^{-2}$	$2.212192651 \times 10^{-2}$	0.0005830352
(0.3975, 0.8)	$3.850690151 \times 10^{-2}$	$3.532085436 \times 10^{-2}$	0.0031860472
(0.6025, 0.8)	$3.850690151 \times 10^{-2}$	$3.532085333 \times 10^{-2}$	0.0031860482
(0.8075, 0.8)	$2.164297648 \times 10^{-2}$	$2.117023394 \times 10^{-2}$	0.0004727425

Pode-se observar pela tabela 6.2 que o erro máximo cometido foi de 0.025194115, utilizando $\Delta x = 0,0025$ e $\Delta t = 0,00001$.

6.2.2 Modelo predador-presa Lotka-Volterra logístico

O modelo Lotka-Volterra logístico apresentado por [32] considera a variação populacional somente no tempo, enquanto que o modelo proposto, sistema (3.26), além de considerar a variação temporal, também leva em consideração a variação espacial (densidade). Assim, para que se possa fazer comparações entre os métodos, com o objetivo de verificar a implementação numérica, deve-se considerar alguns parâmetros extras, tais como as condições iniciais, uma vez que no modelo proposto $S_j(x, t)$ representa a densidade das populações no tempo e espaço, enquanto que o modelo apresentado por [32] $S_j(t)$ representa a população em função do tempo.

Para se obter o modelo Lotka-Volterra logístico análogo ao apresentado em [32], considera-se os parâmetros dados na tabela 6.3.

Substituindo os valores da tabela 6.3 na equação (3.25), resulta no sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{\partial S_1}{\partial t} - D_1 \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} = S_1 - 0.5S_1^2 - 0.5S_1S_2 \\ \frac{\partial S_2}{\partial t} - D_2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} = -0.75S_2 + 0.5S_1S_2 \end{cases} \quad (6.7)$$

Tabela 6.3: Parâmetros Lotka-Volterra logístico

Termos	Presa (j = 1)	Predador (j = 2)
Relaxação temporal (τ_j)	0.0	0.0
Taxa de Natalidade (a_j)	1.0	0.75
Coefficiente de Saturação (b_j)	0.5	—
Coefficiente de interação (c_j)	0.5	0.5
Coefficiente de Difusão (D_j)	0.0 e 0.05	0.0 e 0.05
Tempo final (T)	100	100
Espaçamento temporal (Δt)	0.05, 0.025, 0.0012 e 0.0003	0.05, 0.025, 0.0012 e 0.0003
Espaço (L)	10	10
Espaçamento espacial (Δx)	0.9090, 0.4347, 0.0523, 0.0261, 0.0130, 0.00163, 0.00651 e 0.000814	0.9090, 0.4347, 0.0523, 0.0261, 0.0130, 0.00163, 0.00651 e 0.000814

com condições de fronteira do tipo Dirichlet, ou seja, $S_1(0, t) = S_1(L, t) = S_2(0, t) = S_2(L, t) = 0.0$ e condições iniciais dadas por

$$S_1^0 = \begin{cases} 1 & ; 4.5 \leq x \leq 5.5 \\ 0 & ; \text{caso contrário} \end{cases} ; \quad S_2^0 = \begin{cases} 0.5 & ; 4.5 \leq x \leq 5.5 \\ 0 & ; \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6.8)$$

e por

$$S_1^0 = \begin{cases} 1 & ; 3.5 \leq x \leq 4.5 \\ 0 & ; \text{caso contrário} \end{cases} ; \quad S_2^0 = \begin{cases} 0.5 & ; 5.5 \leq x \leq 6.5 \\ 0 & ; \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (6.9)$$

Para as condições (6.8), por exemplo, as populações iniciais são calculadas por

$$P_1(0) = \int_0^{10} S_1(x, 0) dx = \int_0^{4.5} 0 dx + \int_{4.5}^{5.5} 1.0 dx + \int_{5.5}^{10} 0 dx = 1.0, \quad (6.10)$$

$$P_2(0) = \int_0^{10} S_2(x, 0) dx = \int_0^{4.5} 0 dx + \int_{4.5}^{5.5} 0.5 dx + \int_{5.5}^{10} 0 dx = 0.5. \quad (6.11)$$

Similarmente obtêm-se as mesmas populações iniciais para as condições (6.9). As condições iniciais consideradas nos testes são tomadas de tal forma a manter a quantidade das populações iniciais equivalentes ao apresentado por [32].

Para o primeiro teste, considera-se a condição inicial (6.8) e os termos difusivos $D_1 = D_2 = 0.0$, cujos os resultados numéricos encontram-se apresentados nas figuras 6.4 e 6.5, utilizando $\Delta t = 0.0003$ e $\Delta x = 0.000814$. A figura 6.4 representa as densidades populacionais do sistema (6.7), onde a figura 6.4 (a) descreve a densidade da presa e a figura 6.4 (b) a do predador, para $0 \leq t \leq 25$.

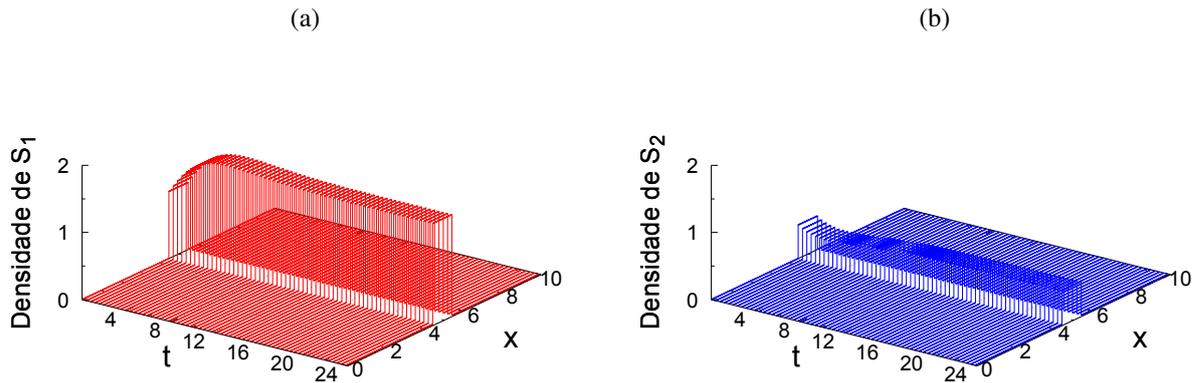


Figura 6.4: Densidade populacional até atingir o regime permanente para as condições iniciais (6.8): (a) Presa - (b) Predador.

Fonte: Autor

Na figura 6.5 (a) é apresentada as densidades iniciais e na figura 6.5 (b) a evolução das populações ao longo do tempo ($0 \leq t \leq 25$), onde as populações em cada instante do tempo t , são obtidas por

$$P_j(t) = \int_0^{10} S_j(x, t) dx, \quad j = 1, 2. \quad (6.12)$$

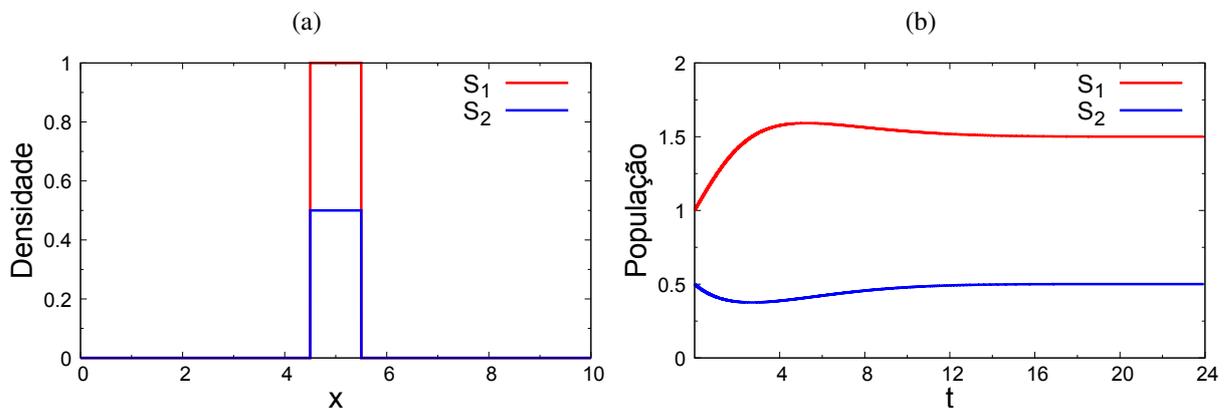


Figura 6.5: Modelo predador-presa logístico com condição inicial dada pela equação (6.8): (a) Densidade inicial. (b) Evolução das populações ao longo do tempo até atingir o regime de permanência.

Fonte: Autor

Ao comparar as figuras 6.5(b) e a figura 1.6, pode-se observar o mesmo comportamento e estabilidade populacional entre os modelos. A principal diferença entre os modelos de Lotka-Volterra logístico apresentado em [32] e o proposto por este trabalho encontra-se na variável espacial, porém, devido a inexistência da difusão espacial, o problema varia apenas no tempo, como em [32].

Para a análise de estabilidade numérica considere a tabela 6.4. Pode-se observar por meio das simulações que ao fixar Δx e variar Δt o valor das populações se diferenciam apenas após a quinta casa decimal, podendo ser considerada estável na variável temporal. Pode-se observar ainda que ao variar o valor de Δx , mantendo Δt fixo, a população também estabiliza, como pode ser observado na tabela 6.4, destacado em cinza.

Tabela 6.4: Valores das populações após atingirem o regime permanente de algumas das simulações para as condições iniciais (6.8)

Δx	Δt	População de Presa	População de Predador
0.9090	0.05	1.0227276	0.3409088
0.4347	0.025	1.9565228	0.6521731
0.0523	0.0003	1.4725071	0.4908375
0.0261	0.0003	1.5274089	0.5091382
0.0130	0.0003	1.5107500	0.5035852
0.00651	0.0003	1.5016673	0.5008735
0.00163	0.0003	1.5007316	0.5005696
0.000814	0.0003	1.5006254	0.5002236

Para o segundo teste, considera-se a condição inicial (6.9) e os termos difusivos $D_1 = D_2 = 0.0$, cujos resultados numéricos encontram-se apresentados nas figuras 6.6 e 6.7, utilizando $\Delta t = 0.0003$ e $\Delta x = 0.000814$.

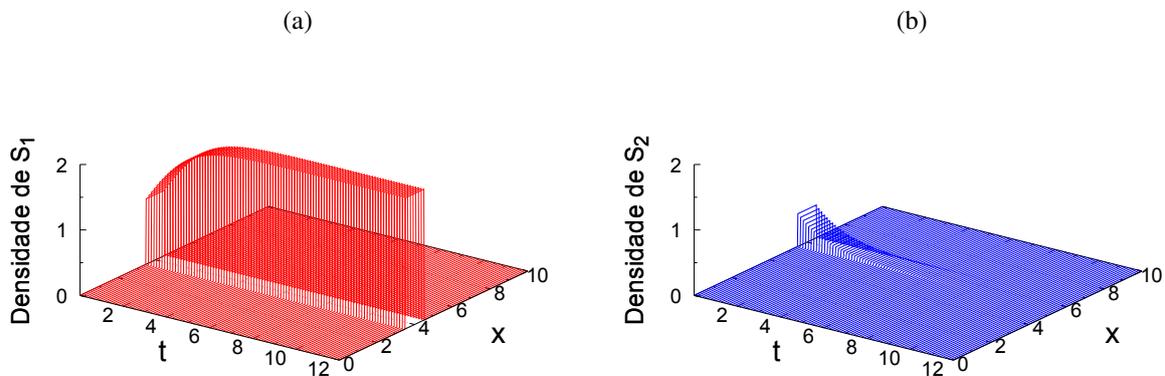


Figura 6.6: Densidade populacional para o modelo ao longo do tempo para as condições iniciais (6.9): (a) Presa - (b) Predador.

Fonte: Autor

Observa-se na figura 6.7(a) que as densidades iniciais não ocupam o mesmo espaço. Através das figuras 6.6 e 6.7(b) verifica-se que o efeito de predação não ocorre, o que pode ser justificado pelo fato das densidades iniciais estarem ocupando espaços distintos e dos coeficientes de difusibilidade serem nulos, desta forma o predador não encontra a presa, e como efeito, o predador vai a extinção enquanto que a presa atinge a saturação.

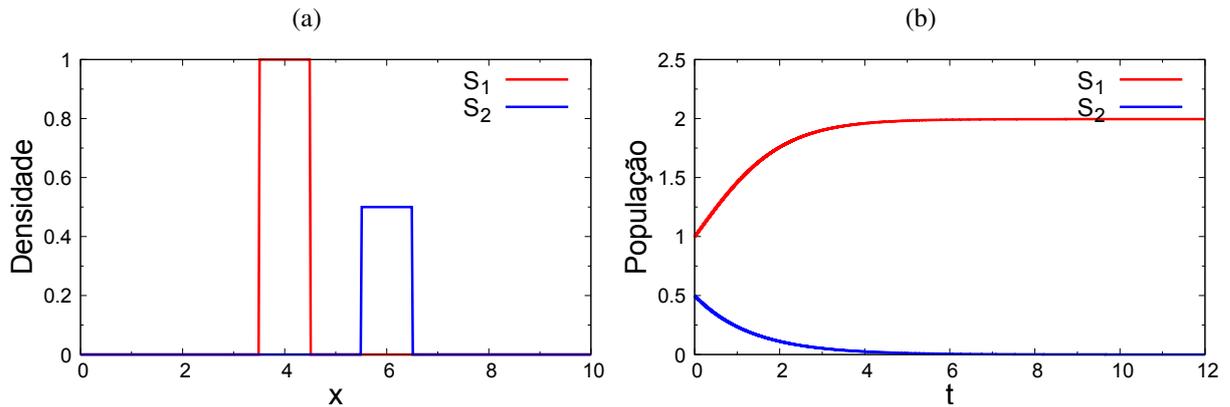


Figura 6.7: Modelo predador-presa logístico com condição inicial dada pela equação (6.9): (a) Densidade inicial. (b) Evolução das populações ao longo do tempo.

Fonte: Autor

Para o terceiro teste considera-se as condições iniciais (6.9), com os termos de difusão $D_1 = D_2 = 0.05$ e obtém-se os resultados dados pelas figuras 6.8 e 6.9, utilizando $\Delta t = 0.0003$ e $\Delta x = 0.000814$.

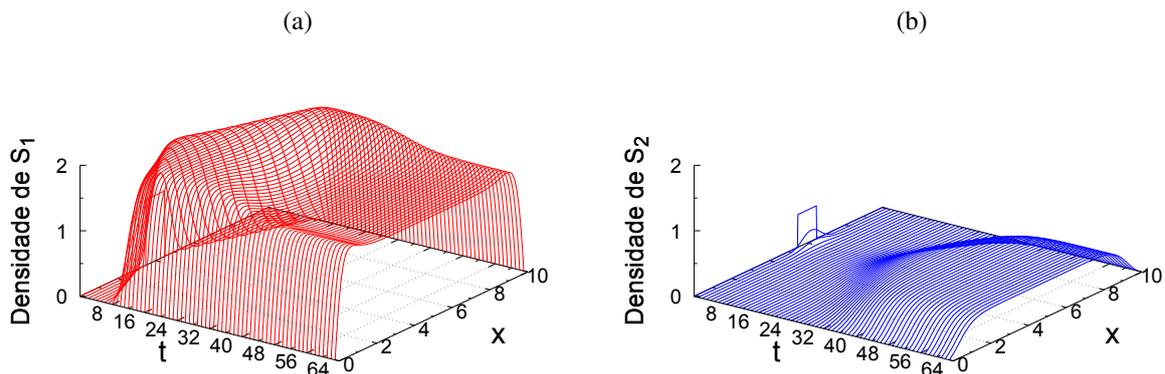


Figura 6.8: Densidade populacional ao longo do tempo para as condições iniciais (6.9) e difusão $D_1 = D_2 = 0.05$: (a) Presa - (b) Predador.

Fonte: Autor

Observa-se na figura 6.9(a) que as densidades iniciais não ocupam o mesmo espaço, contudo as figuras 6.8 e 6.9(b) mostram que o efeito de predação ocorre, isto é, os predadores, com o passar do tempo, encontraram as presas e não entram em extinção, que pode ser justificado pelo fato dos coeficientes de difusibilidade serem não nulos. Outro fato que pode ser observado é o aumento da população das presas, uma vez que tais populações se difundem no espaço.

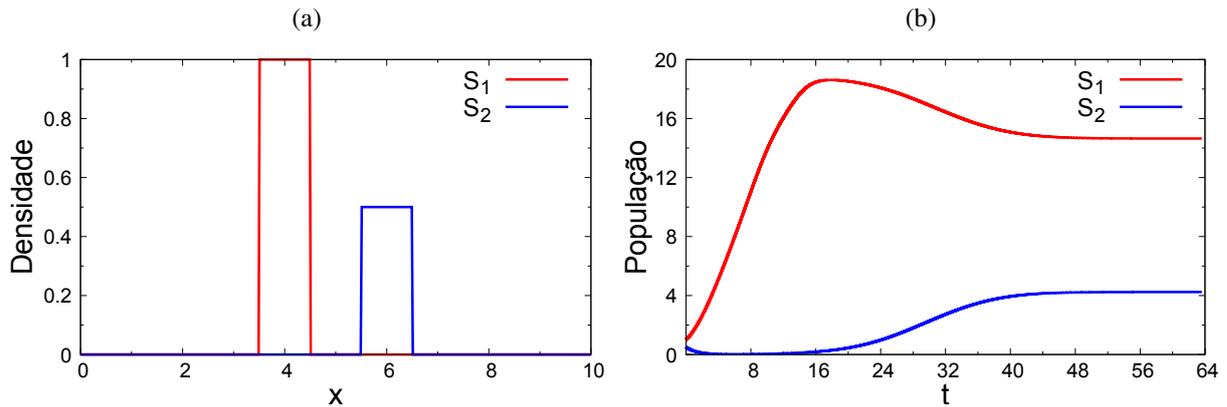


Figura 6.9: Modelo predador-presa logístico com condição inicial dada pela equação (6.9) e difusão $D_1 = D_2 = 0.05$: (a) Densidade inicial. (b) Evolução das populações ao longo do tempo.

Fonte: Autor

Para a análise de estabilidade numérica do terceiro teste considera-se a tabela 6.5. Pode-se observar por meio das simulações que, ao fixar Δx e variar Δt , o valor das populações se diferenciam apenas após a quinta casa decimal, podendo ser considerada estável na variável temporal. Pode-se observar ainda que ao variar o valor de Δx , mantendo Δt fixo, a população também estabiliza-se, ou seja, as variações começam a diminuir ao refinar a malha, como pode ser observado na tabela 6.5, destacado em azul.

Tabela 6.5: Valores das populações do sistema com difusão após atingirem o regime permanente

Δx	Δt	População de Presa	População de Predador
0.909090	0.05	15.5440508	4.6619882
0.4347	0.025	15.2711094	4.4390873
0.0523	0.0003	14.9577162	4.3352670
0.0261	0.0003	14.7795783	4.2808783
0.0130	0.0003	14.6960163	4.2541210
0.00651	0.0003	14.6556510	4.2409165
0.00163	0.0003	14.6357987	4.2343599
0.000814	0.0003	14.6259533	4.2310929

6.2.3 Modelo reativo-convectivo-difusivo com retardo predador-presa

Nesta subseção serão realizados dois testes nos quais, utilizam-se campos de velocidades distintos e em ambos os testes serão considerados as condições iniciais dadas pela equação (6.8). Para o primeiro teste será considerado o campo de velocidade uniforme nulo, ou seja, $u \equiv 0$. No segundo teste será considerado o campo de velocidade uniforme com velocidade constante $u \equiv 1.0$. O objetivo dos testes será observar qual a influência do campo de velocidade na dinâmica das populações.

Em ambos os teste utiliza-se os parâmetros dados pela tabela 6.6 e $\Delta x = 0.00613$ e $\Delta t = 0.000625$ para gerar as soluções do modelo. Considera-se em ambos os testes as condições iniciais dadas por

$$\left. \frac{\partial S_j(x, t)}{\partial t} \right|_x^{t=0} = 0, \quad \forall x \in [0, L] \text{ e } j = 1, 2. \quad (6.13)$$

Tabela 6.6: Parâmetros do modelo reativo-convectivo-difusivo com retardo

Termos	Presa (j = 1)	Predador (j = 2)
Relaxação temporal (τ_j)	0.0001	0.0001
Taxa de Natalidade (a_j)	1.0	0.75
Coefficiente de Saturação (b_j)	0.5	—
Coefficiente de interação (c_j)	0.5	0.5
Coefficiente de Difusão (D_j)	1.0	1.0
Tempo final (T)	100	100
Espaçamento temporal (Δt)	0.01, 0.005, 0.0025, 0.00125 e 0.000625	0.01, 0.005, 0.0025, 0.00125 e 0.000625
Espaço (L)	10	10
Espaçamento espacial (Δx)	0.099009, 0.04926, 0.02457, 0.012269, 0.00613	0.099009, 0.04926, 0.02457, 0.012269, 0.00613
Condições iniciais (A_j)	4.5	4.5
Condições iniciais (B_j)	1.0	0.5
Condições iniciais (C_j)	5.5	5.5

Para o primeiro teste considera-se os parâmetros da tabela 6.6 e o campo de velocidade $u \equiv 0$, cujos resultados numéricos encontram-se apresentados nas figuras 6.10-6.12.

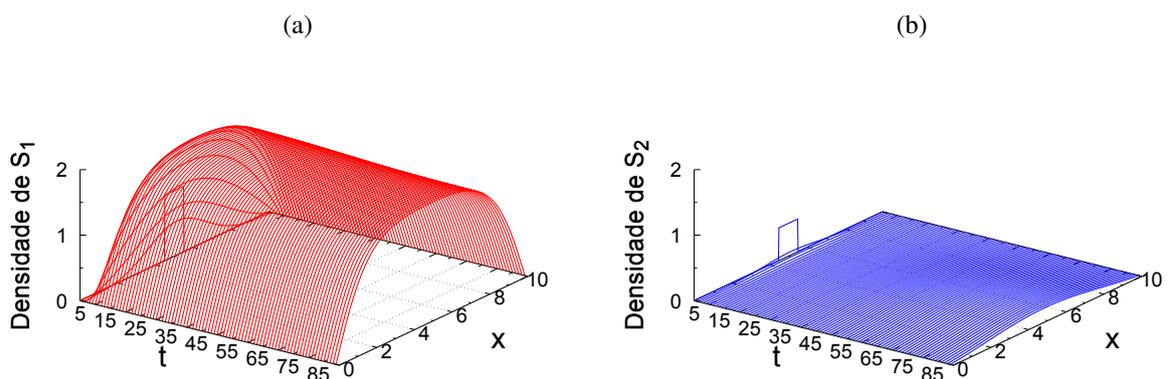


Figura 6.10: Densidade populacional para o modelo considerando $u \equiv 0.0$ para as condições iniciais 6.8: (a) Presa - (b) Predador.

Fonte: Autor

Para melhor visualizar a dinâmica populacional apresentada pela figura 6.10 mostra-se um mapa de cores das densidades populacionais, figura 6.11.

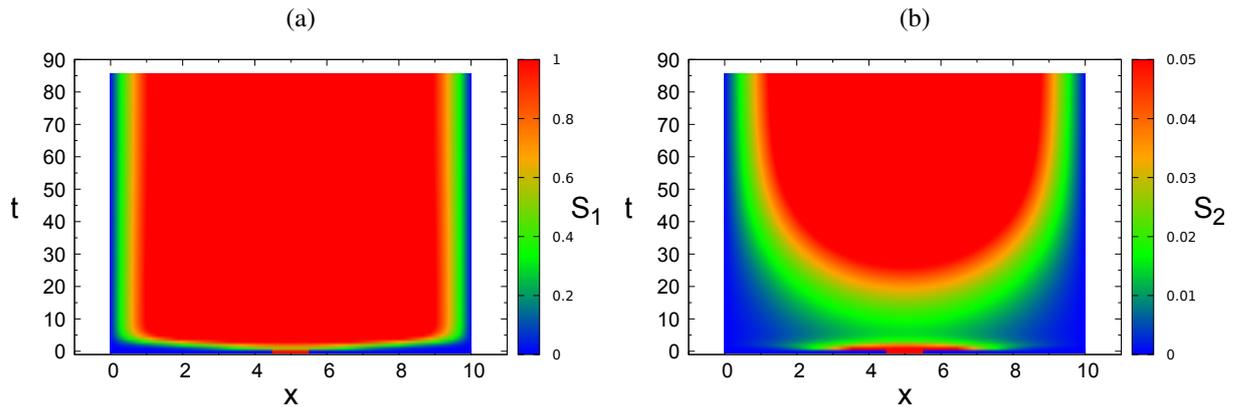


Figura 6.11: Mapa de cores da figura 6.10: (a) Presa. (b) Predador.

Fonte: Autor

Para o mapa de cores da figura 6.10 (b), representado na figura 6.11 (b), fez-se necessário diminuir a escala do mapa de cores do predador, tendo em vista a baixa densidade registrada para o predador, em relação a presa. Pode-se observar que não havendo a influência do campo de velocidade as densidades são simétricas em relação ao centro do domínio, figuras 6.10 e 6.11. Na figura 6.11 (b) pode-se observar que o predador se difunde e diminui a densidade, e para $t \geq 25$ volta a aumentar a densidade, como reflexo a população total também aumenta, figura 6.12 (b).

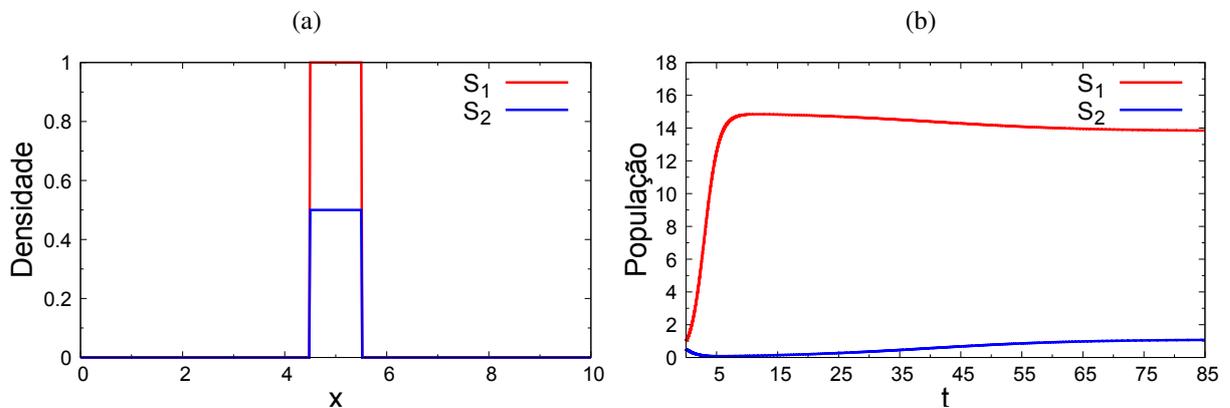


Figura 6.12: Modelo reativo-convectivo-difusivo com retardo pra a condição inicial dada pela equação (6.8) com $u \equiv 0$: (a) Densidade inicial. (b) Evolução das populações ao longo do tempo.

Fonte: Autor

Para o segundo teste considera-se os parâmetros da tabela 6.6 e o campo de velocidade $u \equiv 1$, cujos resultados numéricos encontram-se apresentados nas figuras 6.13-6.15.

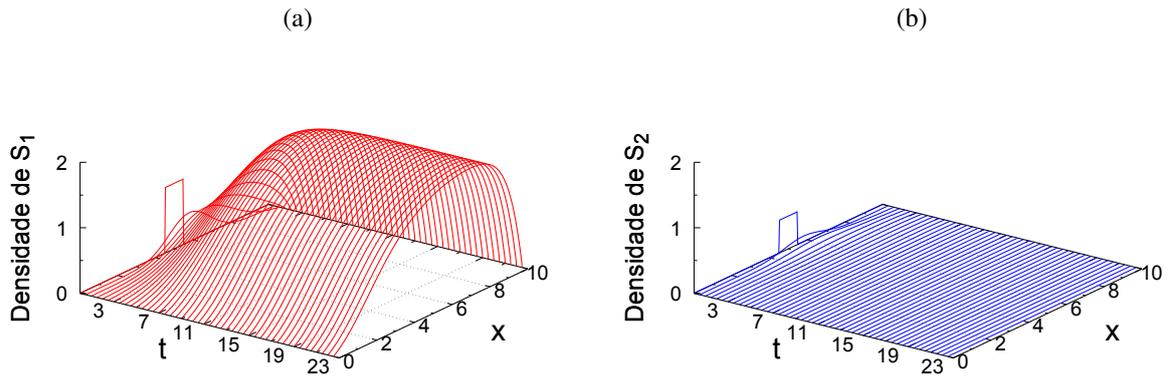


Figura 6.13: Densidade populacional para o modelo considerando $u \equiv 1.0$ para as condições iniciais (6.8): (a) Presa - (b) Predador.

Fonte: Autor

Para melhor visualizar a dinâmica populacional apresentada pela figura 6.13 mostra-se um mapa de cores das densidades populacionais, figura 6.14.

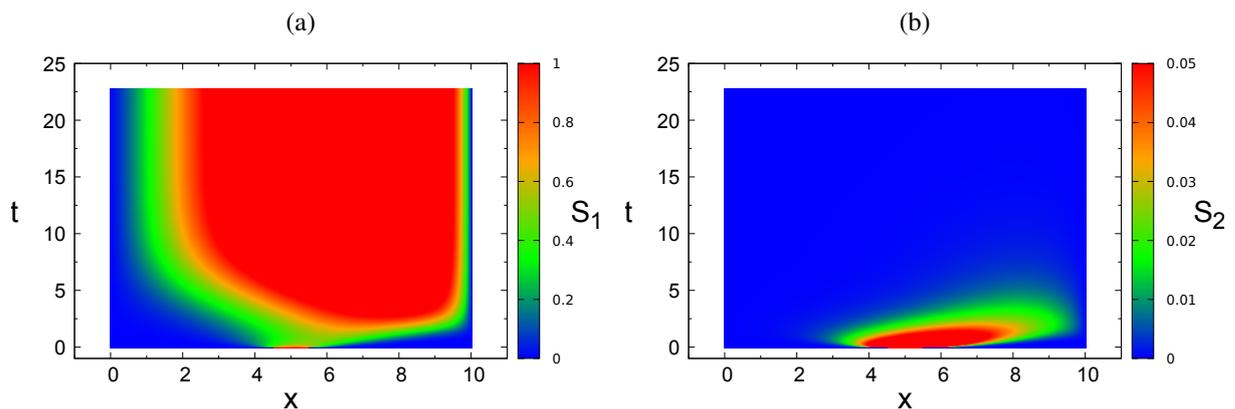


Figura 6.14: Mapa de cores da figura 6.13: (a) Presa. (b) Predador.

Fonte: Autor

Para o mapa de cores da figura 6.13 (b), representado na figura 6.14 (b), fez-se necessário diminuir a escala do mapa de cores do predador, tendo em vista a baixa densidade registrada para o predador, em relação a presa. Pode-se observar pela figura 6.14 o efeito do campo de velocidade não nulo sobre a densidade da presa e do predador. Para a dinâmica populacional da presa, quando não se considera a influência do campo de velocidade na dinâmica populacional, figura 6.11 (a), as densidades são simétricas em relação ao centro do domínio, contudo quando considera-se um campo de velocidade não nulo a simetria em relação ao centro do domínio não ocorre e as densidades máxima se desloca para a direita do domínio devido o efeito convectivo, como pode ser observado na figura 6.14 (a).

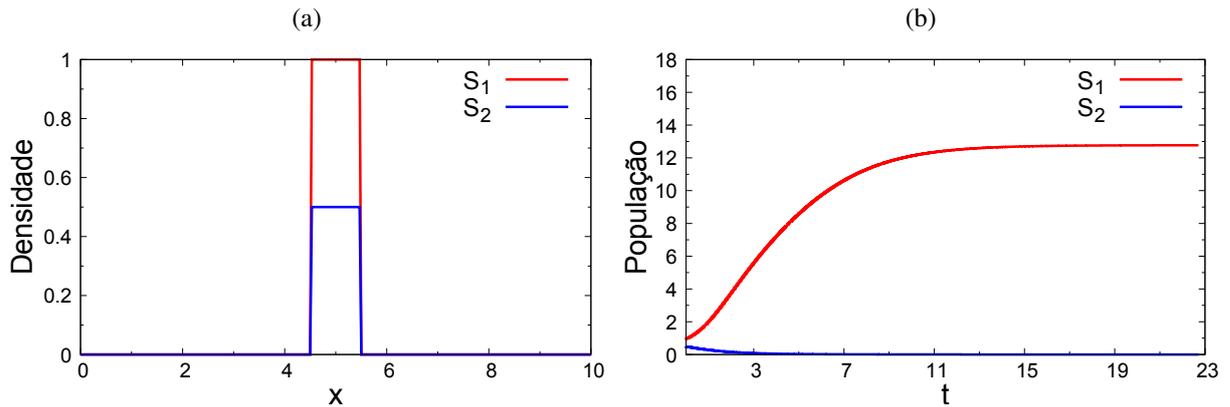


Figura 6.15: Modelo reativo-convectivo-difusivo com retardo pra a condição inicial dada pela equação (6.8): (a) Densidade inicial. (b) Evolução das populações ao longo do tempo.

Fonte: Autor

Para a verificar a estabilidade observe a tabela 6.7. Pode-se observar que ao variar o valor de Δx , mantendo Δt fixo, a população estabiliza, como pode ser observado na tabela 6.7, destacado em cinza.

Tabela 6.7: Estabilidade da discretização do sistema com retardo e $u \equiv 1.0$

Δx	Δt	População de Presa	População de Predador
0.0990099009	0.01	12.8696287	$5.6294691 \cdot 10^{-5}$
0.0990099009	0.005	12.8694170	$8.8451403 \cdot 10^{-5}$
0.0492610837	0.005	12.7950501	$6.5374391 \cdot 10^{-5}$
0.0492610837	0.0025	12.7945982	$1.0455914 \cdot 10^{-4}$
0.0245700245	0.0025	12.7579120	$8.9757384 \cdot 10^{-5}$
0.0245700245	0.00125	12.7569091	$1.4489932 \cdot 10^{-4}$
0.0122699386	0.00125	12.7386876	$1.3448623 \cdot 10^{-4}$
0.0122699386	0.000625	12.7364185	$2.1844618 \cdot 10^{-4}$
0.0061312078	0.000625	12.7273130	$2.1754711 \cdot 10^{-4}$

Por meio das figuras 6.12 (b) e 6.15 (b) pode-se observar que ao introduzir o efeito convectivo do meio extinguiu a população de predadores, em outras palavras, o efeito convectivo dificultou a predação.

Para uma melhor visualização das simulações realizadas observe a figura 6.16, onde para cada J considera-se os valores de $NJ = 2^J \cdot 100001$, e faz-se $\Delta t = \frac{T}{NJ}$. Pode-se observar pela figura 6.16, que ao refinar a malha no espaço as populações estabilizam-se.

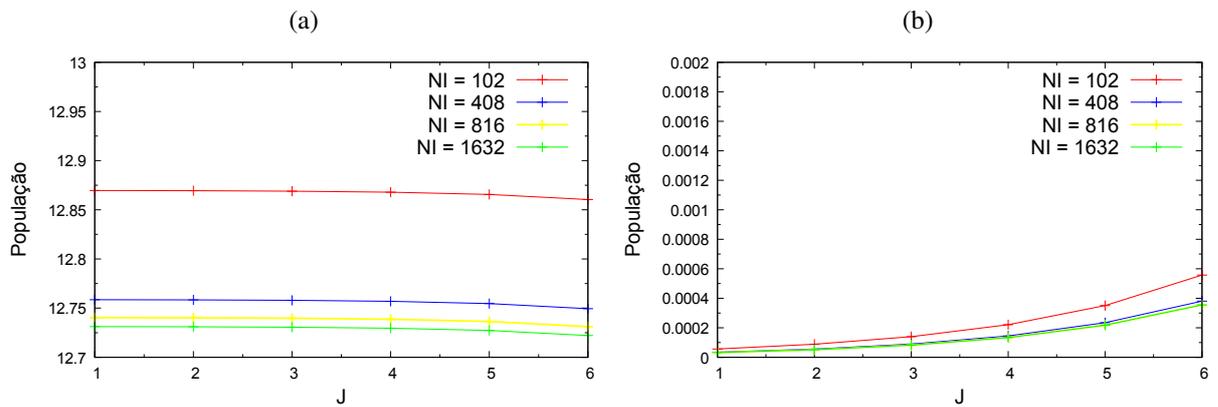


Figura 6.16: Simulações realizadas para verificação da estabilidade da equação com retardo: (a) Presa. (b) Predador.

Fonte: Autor

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi realizado uma revisão bibliográfica dos modelos de dinâmica populacional e de sistemas do tipo predador-presa. Com o objetivo de se obter um modelo que possa representar de forma mais significativa a dinâmica de populações, propôs-se um modelo de um sistema predador-presa que contempla os fenômenos difusivos, convectivos, reativos e de retardo.

Na sequência discretizou-se o modelo proposto usando o método de diferenças finitas para aproximar as derivadas parciais, afim de se obter uma solução numérica para o sistema predador-presa e comparar com modelos existentes na literatura.

Verificou-se que o método aplicado para discretizar as equações gerou uma discretização consistente com a equação que se deseja resolver numericamente.

Finalmente, verificou-se por intermédio de simulações numéricas, que o modelo proposto, quando considerado em situações equivalentes aos modelos existentes, obtêm resultados numéricos qualitativamente próximos. Outro ponto observado, foi a importância da difusão das populações na dinâmica populacional.

Nos testes realizados na subseção 6.2.2, o processo de difusão não foi considerado e as populações encontravam-se separadas espacialmente, assim a população de presa cresceu até atingir a saturação do ambiente, onde estavam confinadas, enquanto que a população de predadores foi a extinção, devido a falta de presas. No teste em que considerou as populações separadas espacialmente, contudo com o efeito da difusão nas populações, verificou-se que o efeito de predação ocorreu e a população dos predadores não extinguiu-se.

Nos testes realizados na subseção 6.2.3, onde foi considerado a influência do campo de velocidade, observou-se que a dinâmica das populações se alteram, de tal modo a perder a simetria nas densidades, quando comparadas ao caso onde não há influência do campo de velocidade, alterando a quantidade das populações. Observou-se ainda que o efeito convectivo do campo de velocidades do fluido dificultou a predação, ou seja, ao considerar o campo de velocidades uniforme não nulo, a população de presas atingiu a saturação do ambiente, em contrapartida a população de predadores extinguiu-se. Enquanto que ao considerar um campo de velocidade identicamente nulo, e os efeitos de difusão e predação ocorreram e a população dos predadores não resultou em extinção.

Como trabalhos futuros pretende-se acoplar ao modelo proposto pelo presente trabalho às equações de Navier-Stokes, fazendo assim com que o campo de velocidade deixe de ser prescrito e passe a ser calculado. Pretende-se ainda utilizar outras condições iniciais, algumas já implementadas no código, assim como outros termos fontes para a presa e para o predador apresentados na literatura. Por fim, pretende-se estudar o modelo em 2D.

As publicações obtidas a partir dos resultados desse trabalho são enumeradas abaixo:

1. ORGANISTA, J. ; ROMEIRO, N. M. L. ; CIRILO, E. R. ; NATTI, P. L.. Modelagem das equações telegráficas presa-predador em meio fluido. Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, p. 010177:1-2, 2018. Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.
2. LUIZ, K. S. ; ORGANISTA, J. ; ROMEIRO, N. M. L. ; CIRILO, E. R. ; NATTI, P. L. . Esquema Explícito e Implícito aplicado a um Modelo Predador-Presa: Simulações numéricas. Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, p. 010120:1-2. Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.
3. ORGANISTA, J.; CIRILO, E. R. ; ROMEIRO, N. M. L.; NATTI, P. L. Modelagem e simulações numéricas das equações telegráficas presa-predador em meio fluido. In: I Simpósio Paranaense em Equações Diferenciais, 2017, Londrina. Anais SPED2017, 2017. v. 1. p. 66-67

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALLEE, W.C.; BOWEN, E. Studies in animal aggregations: mass protection against colloidal silver among goldfishes. *Journal of Experimental Zoology* 61 (1932), 185–207.
- [2] BARBA, A. N. D. *Estudo e implementação de esquema upwind na resolução de um modelo de dinâmica dos fluidos computacionais em coordenadas generalizadas*. Dissertação (Mestrado), Londrina: UEL/PGMAC, fevereiro 2015.
- [3] BEARUP, D., ET AL. Revisiting brownian motion as a description of animal movement: a comparison to experimental movement data. *Methods Ecol. Evolut.* 7 (2016), 1525–1537.
- [4] BEARUP, D.;PETROVSKAYA, N. B., AND PETROVSKII, S. Some analytical and numerical approaches to understanding trap counts resulting from pest insect immigration. *Mathematical Biosciences* 263 (2015), 143–160.
- [5] BURDEN, R. L., AND FAIRES, J. D. *Análise numérica*. Cengage Learning, 2008.
- [6] CARSLAW, H. S., AND JAEGER, J. C. *Conduction of heat in solids*. Oxford: Clarendon Press, 2nd ed. (1959).
- [7] CENGEL, Y. A., AND CIMBALA, J. M. *Mecânica dos fluidos-3*. AMGH Editora, 2015.
- [8] CUMINATO, J. A., AND MENEGUETTE, M. *Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas*. ICMC/USP (2013), 1999.
- [9] DATTNER, I., ET AL. Modelling and parameter inference of predator–prey dynamics in heterogeneous environments using the direct integral approach. *Journal of The Royal Society Interface* 14, 126 (2017).
- [10] DE OLIVEIRA FORTUNA, A. *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações*. Edusp, 2000.
- [11] DE ROOS, A. M.;MCCAULEY, E., AND WILSON, W. G. Mobility versus density-limited predator-prey dynamics on different spatial scales. *Proceedings of the Royal Society of London B: Biological Sciences* 246, 1316 (1991), 117–122.
- [12] FIAŁKOWSKA, E., AND PAJDAK-STÓS, A. Temperature-dependence of predator-prey dynamics in interactions between the predatory fungus lecanium sp. and its prey l. inermis rotifers. *Microbial Ecology* 75, 2 (2018), 400–406.

- [13] HARLOW, F. H., AND WELCH, J. E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *The physics of fluids* 8, 12 (1965), 2182–2189.
- [14] HOLLING, C. S. The components of predation as revealed by a study of small-mammal predation of the european pine sawfly. *The Canadian Entomologist* 91 (5) (1959), 293–320.
- [15] HOLLING, C. S. Some characteristics of simple types of predation and parasitism. *The Canadian Entomologist* 91 (7) (1959), 385–398.
- [16] IÓRIO, V. Edp, um curso de graduação. *Coleção Matemática Universitária, IMPA* (2005).
- [17] JOSEPH, D. D., AND PREZIOSI, L. Heat waves. *Reviews of Modern Physics* 61, 1 (1989), 41.
- [18] LEWIS, M.A.; PETROVSKII, S., AND POTTS, J. *The Mathematics Behind Biological Invasions*. Springer, Interdisciplinary Applied Mathematics 44, 2016.
- [19] LI, HAIXIA; LI, Y., AND YANG, W. Existence and asymptotic behavior of positive solutions for a one-prey and two-competing-predators system with diffusion. *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 27 (2016), 261–282.
- [20] LIMA, E. L. Análise no \mathbb{R}^n . *Coleção Matemática Universitária-IMPA, Rio de Janeiro* (2002).
- [21] LIMA, E. L. Análise real: Funções de uma variável-vol. 1. *Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro* (2006).
- [22] LOTKA, A. J. Elements of physical biology. *Science Progress in the Twentieth Century (1919-1933)* 21, 82 (1926), 341–343.
- [23] MAGALHÃES, M. L. A., AND LEITE, N. M. G. Equações diferenciais aplicadas a dinâmica populacional. In *Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional, CMAC Nordeste, IFNMG-Campus Januária* (2012).
- [24] MALTHUS, T. R. *An essay on the principle of population: or, A view of its past and present effects on human happiness*. Reeves & Turner, 1888.
- [25] MENDEZ, V., FEDOTOV, S., AND HORSTHEMKE, W. *Reaction-transport systems: mesoscopic foundations, fronts, and spatial instabilities*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [26] MIRANVILLE, A., AND QUINTANILLA, R. A generalization of the caginalp phase-field system based on the cattaneo law. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 71, 5 (2009), 2278–2290.

- [27] ODUM, E. P. *Fundamentals of Ecology*, 2 ed. W. B. Saunders Company, 1959.
- [28] OKUBO, A., AND LEVIN, S. A. *Diffusion and ecological problems: modern perspectives*, vol. 14. Springer Science & Business Media, 2013.
- [29] OLIVEIRA, K. P. M. D., ET AL. Estudo comparativo de malhas e esquemas de discretização para as equações de navier stokes em escoamentos incompressíveis, 2009.
- [30] PAUL, A., LAURILA, T., VUORINEN, V., AND DIVINSKI, S. V. Fick's laws of diffusion. In *Thermodynamics, Diffusion and the Kirkendall Effect in Solids*. Springer, 2014, pp. 115–139.
- [31] PEIXOTO, P. D. S. *Análise de discretizações e interpolações em malhas icosaédricas e aplicações em modelos de transporte semi-lagrangianos*. PhD thesis, Universidade de São Paulo.
- [32] SANTOS DE OLIVEIRA SOBRINHO, A., FOGAÇA DE OLIVEIRA, C., MASSAE KITA, C., TAKANO NATTI, É. R., AND LAERTE NATTI, P. Mathematical Modeling and Stability of Predator-Prey Systems. *eprint arXiv:1504.06244* (april 2015).
- [33] SOLOMON, M. E. The natural control of animal populations. *Journal of Animal Ecology* 18 (1949), 1–35.
- [34] TZOU, D. Y., AND TRANSFER, M.-T. M. H. The lagging behavior, 1997.
- [35] VERHULST, P. F. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles* (1845).
- [36] VOLTERRA, V. Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together. *ICES Journal of Marine Science* 3, 1 (1928), 3–51.