Universidade Estadual de Londrina

BRUNA THAIS SILVA SOZZO

BOA COLOCAÇÃO PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS VIA SEMIGRUPOS LINEARES

Londrina
2018

BRUNA THAIS SILVA SOZZO

BOA COLOCAÇÃO PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS VIA SEMIGRUPOS LINEARES

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Marcio A. Jorge da Silva

Londrina
2018

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação -na-Publicação (CIP)

S232c Sozzo, Bruna Thais Silva.
Boa Colocação para Equações Diferenciais Via Semigrupos Lineares
Bruna Thais Silva Sozzo. - Londrina, 2018.
160 f. : il.

Orientador: Marcio Antonio Jorge da Silva.
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2018.

Inclui Bibliografia.

1. Análise Matemática - Teses. 2. Equações Diferenciais - Teses. 3. Boa Colocação - Teses. 4. Semigrupos Lineares -Teses. 5. Existência e Unicidade de Solução - Teses. I. Jorge da Silva, Marcio Antonio . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III.Título.

519.681-7

BRUNA THAIS SILVA SOZZO

BOA COLOCAÇÃO PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS VIA SEMIGRUPOS

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcio A. Jorge da Silva
Universidade Estadual de Londrina

Profª. Drª. Michele de Oliveira Alves
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Wellington José Corrêa
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Londrina, 16 de março de 2018.

Dedico este trabalho à Jurandir

AGRADECIMENTOS

A Deus, por toda força, companheirismo e amizade.

Aos meus pais Jair e Neide, por todo apoio e incentivo, aos meus irmãos Amanda e Jair, por todo acréscimo de tonalidades em minha vida e à minha prima Débora, pelo convívio e por compartilhar desabafos acadêmicos.

Aos meus avós, Assumpta, Aleixo (em memória), Maria (em memória), José (em memória) por toda contribuição e amparo em minha vida.

Ao meu namorado Gustavo, por todo auxílio, amor, carinho, compreensão e fonte de inspiração.

Ao meu orientador Marcio, exemplo motivador de professor e pesquisador, por todo meu crescimento acadêmico.

Aos amigos companheiros de Mestrado, em especial Arthur, pelo auxílio e os amigos de longa data Elias, Lucas e Weberty, por todas as discussões e horas de estudos compartilhadas.

Aos professores da graduação e do mestrado, por todo conhecimento proporcionado.

À CAPES e Fundação Araucária, pelo apoio financeiro.

"A alegria da escrita.
O poder de preservar.
A vingança da mão mortal."
(Wislawa Szymborska)

SOZZO, Bruna Thais Silva. **Boa Colocação para Equações Diferenciais via Semigrupos Lineares**. 2018. 160 páginas. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

RESUMO

Este trabalho apresenta a boa colocação para sistemas de equações diferenciais lineares empregando a técnica de semigrupos lineares. Ao longo do trabalho a boa colocação é estudada para diversos problemas, tais como equação do calor, equação da onda, equação da viga, sistemas termoelásticos, sistemas viscoelásticos, sistemas termoviscoelásticos, bem como sistemas de vigas de Timoshenko com leis elásticas, viscoelásticas e termoelásticas. Em todos os casos, podemos enxergar os problemas de valor inicial e de fronteira como um problema de Cauchy Abstrato da forma

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

onde $A : D(A) \subset H \to H$ é um operador linear não limitado definido em um espaço de Banach (ou Hilbert) H. Sendo assim, os resultados de existência, unicidade e dependência contínua dos dados iniciais são mostrados por meio da teoria de semigrupos lineares, o que requer estudar propriedades específicas para o operador A em cada caso abordado.

Palavras-chave: Boa colocação; Existência; Unicidade; Equações diferenciais; Semigrupos lineares.

SOZZO, Bruna Thais Silva. **Well-posedness for Differential Equations via Linear Semigroups**. 2018. 160 pages. Master thesis (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – State University of Londrina, Londrina, 2018.

ABSTRACT

This work presents the well-posedness for systems of linear differential equations employing the linear semigroup technique. Throughout the work, the well-posedness is studied for several problems, such as heat equation, wave equation, beam equation, thermoelastic systems, viscoelastic systems, thermoviscoelastic systems, as well as Timoshenko beam systems under elastic, viscoelastic and thermoelastic constitutive laws. In all cases, we can transform the initial-boundary value problems into abstract Cauchy problem like

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

where $A : D(A) \subset H \to H$ is an unbounded linear operator defined on a Banach (or Hilbert) space H. Thus, the results on existence, uniqueness and continuous dependence on the initial data are proved through the linear semigroup theory, which requires to study some suitable properties to the operator A in each case approached.

Keywords: Well-posedness; Existence; Uniqueness; Differential equations; Linear semigroups.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo de Equações Diferenciais surgiu com a criação do Cálculo Diferencial e Integral, o qual foi introduzido mais profundamente por Newton e Leibniz no final do século XVII com intuito de resolver problemas de natureza física e geométrica. Assim, o avanço significativo em tratar problemas utilizando Cálculo Diferencial consolidaram as Equações Diferenciais como um novo ramo da Matemática. O conceito do que era considerado solução de uma Equação Diferencial obteve mudanças progressivas ao longo do tempo e questões como existência, unicidade e regularidade se tornaram tópicos de estudo até os dias atuais, o que motiva e promove avanços de forma contínua nesta área da Matemática. Atualmente, existem diversas técnicas modernas para determinar uma (única) solução em equações diferencias e, neste trabalho, destacaremos uma delas conforme os parágrafos a seguir.

No presente trabalho de dissertação estudaremos equações e sistemas de equações diferenciais lineares. O principal objetivo é transformar todos os problemas abordados na seguinte forma abstrata de primeira ordem

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $A : D(A) \subset H \to H$ é um operador linear não limitado definido em um espaço de Banach (ou Hilbert) H. Com isto, a determinação de *solução* para (1.1) se reduzirá a determinar propriedades espectrais do operador A em cada caso abordado. Para isso, usaremos a teoria geral de Semigrupos Lineares como principal ferramenta no estudo do operador A. Tal teoria será apresentada de forma resumida no Capítulo 3, cuja principal referência base é livro do Pazy [38]. Para uma referência em português, citamos ainda Muñoz Rivera [35].

A teoria de semigrupos teve seu grande avanço no ano de 1948 com a demonstração do Teorema de Hille-Yosida, seguido do Teorema de Lumer-Phillips. O primeiro teorema mostra condições necessárias e suficientes para que um determinado operador linear seja gerador infinitesimal de um semigrupo, enquanto o segundo caracteriza quando um operador linear é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações. Como veremos no Capítulo 4, a Teoria de Semigrupos Lineares pode ser aplicada a uma vasta classe de Equações Diferenciais. Neste trabalho, a teoria exibida nos permitirá fazer aplicações em equações diferenciais lineares *autônomas*, isto é, equações que não dependem explicitamente da variável temporal t.

Todos os problemas apresentados Capítulo 4 foram retirados da literatura existente em equações diferenciais e possuem significados físicos importantes na matemática, física e engenharias. Em cada caso, será apresentada uma breve dedução física do modelo e, em alguns casos, faremos algumas considerações complementares a fim de torná-los problemas autônomos como, por exemplo, sistemas da forma (1.1). Nosso primeiro objetivo foi buscar diversos problemas na literatura com características distintas e mostrar como seria a abordagem de tais problemas na aplicação da teoria de semigrupos lineares. Neste sentido, ressaltamos ainda que em vários dos artigos, onde os modelos foram retirados, os autores não mostraram com detalhes a existência e unicidade de solução para o problema em questão. Em outras palavras, é bastante comum encontrar autores que admitem a Boa Colocação dos problemas sem apresentar os cálculos. Logo, nosso segundo (e principal) objetivo foi mostrar com detalhes, o máximo possível, a existência e unicidade de solução, apresentando diferentes ferramentas que podem ser utilizadas na obtenção de solução via semigrupos lineares. Ao final do Capítulo 4, concluímos ainda a Boa Colocação segundo Hamadard para todos os problemas de uma só vez, visto que todas as equações e sistemas de equações diferenciais podem ser convertidos na forma (1.1). O restante dessa dissertação está organizada como segue.

O Capítulo 2 apresenta uma série de resultados clássicos e fundamentais em Análise Funcional, assim como os principais resultados da teoria de Espaços de Sobolev unidimensionais, tais como definições e propriedades dos espaços que serão utilizados no decorrer deste trabalho. Outro importante resultado deste capítulo é o Teorema de Lax-Milgram, o qual será muito usado no capítulo de aplicações, a saber no Capítulo 4.

O Capítulo 3 traz uma breve construção da teoria de semigrupos. Neste capítulo será definido o conceito de semigrupo e condições para caracterização seu gerador infinitesimal. Também será demonstrado o importante Teorema de Lumer-Phillips. Tais resultados serão utilizados frequentemente na prova da boa colocação dos problemas estudados no Capítulo 4.

No Capítulo 4 apresentamos diversos modelos em equações diferenciais. Em cada caso, fizemos inicialmente uma breve dedução do problema, exibindo suas características físicas e apresentando sua versão autônoma. Em seguida, a existência e unicidade de solução foi provada via teoria de semigrupos lineares e, portanto, concluímos a boa colocação de todos os problemas abordados.

Por fim, mediante aos resultados obtidos no Capítulo 4, uma breve conclusão é apresentada, seguida pelas principais referências utilizadas nesse trabalho.

2 PRELIMINARES: ANÁLISE FUNCIONAL

Neste capítulo serão introduzidos alguns conceitos de Análise Funcional para ajudar na compreensão dos resultados nos próximos capítulos.

2.1 RESULTADOS FUNDAMENTAIS

2.1.1 Espaços de Banach

Definição 2.1. *Seja X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Uma norma em X é uma função $\|.\|_X : X \to \mathbb{R}^+$ tal que*

(i) $\|x\|_X = 0 \Leftrightarrow x = 0$*;*

(ii) $\|\alpha x\|_X = |\alpha|\|x\|_X, \ \ \forall x \in X, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$*;*

(iii) $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X, \ \ \forall x, y \in X.$

Observação 1. (i) O par $(X, \|.\|_X)$ é chamado espaço vetorial normado. Quando não houver confusão, será denotado por X um espaço vetorial normado e por $\|.\|$ a norma em X.

(ii) Nesta seção, $\mathbb{K}$ denotará o corpo dos números reais ($\mathbb{R}$) ou o corpo dos números complexos ($\mathbb{C}$).

Definição 2.2. *Seja X um espaço vetorial normado e $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ duas normas em X. Diz-se que a norma $\|.\|_1$ é equivalente à norma $\|.\|_2$ quando existem constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$, tais que*

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1, \quad \forall x \in X.$$

Definição 2.3. *Seja X um espaço vetorial normado. Uma sequência em X é uma função $x : \mathbb{N} \to X$. Denota-se por $x_n := x(n)$ e $x(\mathbb{N}) := (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente por (x_n). Uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma restrição $x|_{\mathbb{N}'} : \mathbb{N}' \to X$ da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$.*

Definição 2.4. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em um espaço vetorial normado X. Diz-se que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é:*

- *Convergente em X quando existe $x \in X$ satisfazendo a seguinte condição: para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \varepsilon$, para todo $n > n_0$. Denota-se a convergência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para x por $x_n \to x$.*

- *De Cauchy em X se para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$, para todo $m, n > n_0$.*

Definição 2.5. *Um espaço vetorial normado $(X, \|.\|_X)$ é chamado de espaço de Banach quando toda sequência de Cauchy em X é convergente em X com respeito à norma $\|.\|_X$.*

Definição 2.6. *Um espaço vetorial normado X é dito de separável quando existe um subconjunto $Y \subset X$ enumerável e denso em X, ou seja, as seguintes condições são satisfeitas:*

- *Dado $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $y \in Y$ tal que $\|x - y\|_X < \varepsilon$ (densidade);*
- *Existe uma função bijetora: $f : \mathbb{N} \to Y$ (enumerabilidade).*

2.1.2 Operadores Lineares

Proposição 2.7. *Se X é um espaço de Banach reflexivo e $M \subset X$ subespaço vetorial é fechado, então M é reflexivo.*

Demonstração. Ver [30], página 30, Teorema 1.4-7. □

Proposição 2.8. *Sejam Z e Y espaços de Banach. Se existe um isomorfismo $T : Z \to Y$ fechado tem-se: Z é reflexivo se, e somente se, Y é reflexivo.*

Demonstração. Ver [7]. □

Proposição 2.9. *Sejam (X, d) um espaço separável e $M \subset X$. Então (M, d) também é separável.*

Demonstração. Ver [30], página 140, Teorema 3.2-4 item (c). □

Definição 2.10. *Sejam X e Y dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais normados. Diz-se que um operador $T : D(T) \subset X \to Y$ é linear quando*

$$T(x + \alpha y) = T(x) + \alpha T(y), \quad \textit{para quaisquer } x, y \in D(T) \quad \textit{e} \quad \alpha \in \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

O conjunto $D(T)$ é o domínio de T. No caso particular $Y = \mathbb{K}$, diz-se que T é um funcional linear.

Definição 2.11. *Sejam X e Y dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais normados. Diz-se que um operador $T : D(T) \subset X \to Y$ é antilinear quando*

$$T(x + \alpha y) = T(x) + \overline{\alpha} T(y), \quad \textit{para quaisquer } x, y \in D(T) \quad \textit{e} \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

Definição 2.12. *Um operador linear $T : D(T) \subset X \to Y$ definido entre dois espaços vetoriais normados X e Y é dito:*

*(i) um **isomorfismo** quando T é bijetor;*

*(ii) um **isomorfismo isométrico** quando T é bijetor e $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$, para todo $x \in D(T)$;*

(iii) ***limitado*** *em X quando existe uma constante $c > 0$ tal que $\|T(x)\|_Y \leq c\|x\|_X$, para todo $x \in D(T)$;*

(iv) ***contínuo*** *em $a \in D(T)$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D(T)$ com $\|x - a\|_X < \delta$, então $\|T(x) - T(a)\|_Y < \varepsilon$;*

(v) ***contínuo*** *quando T é contínuo em todo $x \in D(T)$;*

(vi) ***compacto*** *se para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada em $D(T)$, a sequência $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente em Y.*

O conjunto dos operadores lineares limitados, que será denotado por $\mathcal{L}(X,Y)$, é um espaço vetorial normado com a norma $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup\{\|Tx\|_Y; \|x\|_X = 1\}$.

Observação 2. (i) Quando $Y = X$ o conjunto dos operadores lineares limitados será denotado por $\mathcal{L}(X)$ com norma $\|T\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup\{\|Tx\|_X; \|x\|_X = 1\}$.

(ii) Quando $Y = \mathbb{K}$, denota-se $\mathcal{L}(X,\mathbb{K}) := X'$. O espaço X' é chamado de espaço dual do espaço X. Para todo $f \in X'$ denota-se $f(x) := \langle f, x\rangle$, $x \in X$.

Teorema 2.13. *Seja $T : D(T) \subset X \to Y$ um operador linear definido entre dois espaços vetoriais normados X e Y. Então, T é limitado se, e somente se, T é contínuo.*

Demonstração. Ver [30], página 97, Teorema 2.7-9. □

Teorema 2.14. *Sejam X um espaço de Banach e $B_1 \in \mathcal{L}(X)$ um operador invertível tal que $B_1^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Se $B_2 \in \mathcal{L}(X)$ é tal que $\|B_2\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|B_1^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$, então o operador $B_1 + B_2$ é linear, limitado e invertível.*

Demonstração. Ver [35], página 90, Lema 2.12.1. □

Definição 2.15. *Sejam X e Y dois espaços de Banach com $Y \subset X$. É dito que Y está imerso continuamente em X quando a aplicação inclusão $i : Y \to X$ é contínua em Y, ou seja, quando existe $C > 0$ tal que $\|x\|_X \leq C\|x\|_Y$, $\forall x \in Y$.*
Denota-se a imersão contínua de Y em X por $Y \hookrightarrow X$.

Definição 2.16. *Sejam X e Y dois espaços de Banach com $Y \subset X$. É dito que Y está imerso compactamente em X quando a aplicação inclusão $i : Y \to X$ é compacta em Y.*
Denota-se a imersão compacta de Y em X por $Y \overset{c}{\hookrightarrow} X$.

Definição 2.17. *Um espaço vetorial normado X é dito reflexivo quando*

$$\begin{aligned} J : X &\to X'' \\ x &\mapsto J(x) \end{aligned}$$

definida por $J(x)(f) = \langle f, x\rangle$ é sobrejetora.

Teorema 2.18. *Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados. Se Y é um espaço de Banach, então $(\mathcal{L}(X,Y), \|.\|_{\mathcal{L}(X,Y)})$ é um espaço de Banach. Em particular, X' e $X'' = (X')'$ são espaços de Banach.*

Demonstração. Ver [30], página 118, Teorema 2.10-2. □

Teorema 2.19 (Banach-Steinhaus ou Princípio da Limitação Uniforme)**.** *Seja $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de operadores lineares limitados $T_n : X \to Y$ de um espaço de Banach X num espaço normado Y tal que a sucessão $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada para qualquer $x \in X$, digamos*

$$\|T_n x\|_Y \leq K(x), \;\; \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Então, a sucessão das normas $(\|T_n\|)_{n=1}^{\infty}$ também é limitada, isto é, existe C tal que

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq C, \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Ver [7], página 32, Teorema 2.2. □

2.1.3 O Teorema de Lax-Milgram e Espaços de Hilbert

Definição 2.20. *Sejam X e Y dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Uma aplicação $a : X \times Y \to \mathbb{K}$ é chamada de forma sesquilinear em $X \times Y$ se satisfaz as seguintes condições:*

(i) $a(x+y,z) = a(x,z) + a(y,z), \;\; \forall x,y \in X$ *e* $\forall z \in Y$;

(ii) $a(x,y+z) = a(x,y) + a(x,z), \;\; \forall x \in X$ *e* $\forall y,z \in Y$;

(iii) $a(\alpha x,y) = \alpha a(x,y), \;\; \forall x \in X, \;\; \forall y \in Y$ *e* $\forall \alpha \in \mathbb{K}$;

(iv) $a(x,\alpha y) = \overline{\alpha} a(x,y), \;\; \forall x \in X, \;\; \forall y \in Y$ *e* $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

No caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, a é chamada de forma bilinear.

Definição 2.21. *Sejam X um espaço vetorial normado e $a : X \times X \to \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear em X. Diz-se que a é hermitiana quando $a(x,y) = \overline{a(y,x)}, \;\; \forall x,y \in X$.*

Definição 2.22. *Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados e $a : X \times Y \to \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear. Diz-se que a é contínua (limitada) quando existe uma constante $C > 0$ tal que $|a(x,y)| \leq C\|x\|_X\|y\|_Y$, para todo par $(x,y) \in X \times Y$.*

Definição 2.23. *Sejam X um espaço vetorial normado, $a : X \times X \to \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear. Diz-se que a é coerciva quando existe uma constante $C > 0$ tal que $Re(a(x,x)) \geq C\|x\|_X^2$, para todo $x \in X$.*

Definição 2.24. *Sejam X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial uma forma sesquilinear hermitiana $a : X \times X \to \mathbb{K}$ é chamada de produto interno em X se satisfaz as seguintes condições:*

(i) $a(x,x) \geq 0, \quad \forall x \in X$;

(ii) $a(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Denota-se um produto interno em X por $(.,.)_X$.

Definição 2.25. *Sejam X um espaço vetorial e $(.,.)_X$ um produto interno em X. A função $\|.\|_X = (.,.)_X^{\frac{1}{2}}$, define uma norma em X. Esta norma é chamada de norma proveniente do produto interno $(.,.)_X$.*

Definição 2.26. *Um espaço de Banach $(H, \|.\|_H)$ é chamado de espaço de Hilbert quando a norma $\|.\|$ é proveniente de um produto interno em H.*

Teorema 2.27. *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

Demonstração. Ver [30], página 242, Teorema 4.6-6. $\square$

Teorema 2.28 (Teorema de Lax-Milgram)**.** *Sejam H um espaço de Hilbert real (complexo) e $a : H \times H \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ uma forma bilinear (sesquilinear) contínua e coerciva. Então, para todo f linear (antilinear) e limitado, existe um único $x \in H$ tal que $a(x,y) = \langle f, y\rangle, \quad \forall y \in H$.*

Demonstração. Para o caso real ver [7], página 140, Corolário 5.8 e para o caso complexo ver [37], página 595, Corolário 6.6.2. $\square$

Definição 2.29. *Seja A um operador linear de um espaço de Banach X. O conjunto formado pelos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o operador linear $(\lambda I_X - A)$ é inversível, seu inverso é limitado e densamente definido, é dito **conjunto resolvente de** A e representado por $\rho(A)$.*
*O conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$ é chamado **espectro de** A. Para $\lambda \in \rho(A)$, denota-se por $R(\lambda, A) = (\lambda I_X - A)^{-1}$ o **resolvente de** A.*

Proposição 2.30. *Sejam A um operador linear fechado de um espaço de Banach X e $\lambda \in \rho(A)$. Então, $D(R(\lambda, A)) = X$. Em particular, $R(\lambda, A)$ é fechado.*

Demonstração. Ver [30], página 376, Teorema 7.3-2. $\square$

2.1.4 Definições e Propriedades

Definição 2.31. *Sejam X um espaço vetorial normado e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X. Considere*

$$s_n := x_1 + \cdots + x_n$$

*a sequência das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Se existir o limite $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, diz-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é **convergente** e **s** será chamado a soma da série. Se $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não convergir, diz-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é **divergente**. Diz-se ainda que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é **absolutamente convergente**, se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X$ converge.*

Proposição 2.32. *Toda série absolutamente convergente é convergente. Além disto,*

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X.$$

Demonstração. Ver [31]. □

Proposição 2.33. *Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ um sequência em X tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe um número real $M_n \geq 0$ satisfazendo $\|x_n\|_X \leq M_n$. Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente.*

Demonstração. Ver [31]. □

Proposição 2.34. *Suponha que $\{f_n : \mathcal{M} \longrightarrow X\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções definidas em um conjunto $\mathcal{M}$ e que exista uma sequência de números positivos $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazendo $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathcal{M}$, $\|f_n(x)\|_X \leq M_n$. Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente e uniformemente.*

Demonstração. Ver [31]. □

Definição 2.35. *Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e considere a função*

$$\begin{aligned} g:\ & I \longrightarrow X \\ & t \longmapsto g(t). \end{aligned}$$

*(i) Diz-se que g é **contínua em** $t_0 \in I$, se $\lim\limits_{t\to t_0} \|g(t) - g(t_0)\|_X = 0$. Diz-se que g é **contínua** se g é contínua em todo $t \in I$.*

*(ii) Diz-se que g é **derivável à direita (esquerda) em** $t_0 \in int(I)$ se existe $y^+_{(-)} \in X$ tal que*

$$\lim_{h\to 0^+_{(-)}} \left\| \frac{g(t_0+h) - g(t_0)}{h} - y^+_{(-)} \right\| = 0.$$

*Quando ambas as derivadas existem e são iguais, diz-se que g é **derivável em** t_0 e denota-se*

$$y^+ = y_- = g'(t_0).$$

Define-se o espaço das curvas em X definidas em I por $C(I; X) := \{g : I \longrightarrow X; g$ é contínua$\}$.

Proposição 2.36. *Se $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo fechado e limitado, então $C(I; X)$ é um espaço de Banach munido da norma*

$$\|g\|_{C(I;X)} = \sup_{t\in I} \|g(t)\|_X.$$

Demonstração. Ver [30], página 118, Teorema 2.10-1. □

Proposição 2.37. *Se $g : I \longrightarrow X$ é derivável em $t_0 \in int(I)$, então g é contínua em t_0.*

Demonstração. Ver [31], página 91, Corolário do Teorema 1. $\square$

Proposição 2.38. *Seja $A \in \mathcal{L}(X)$. Para $t \in \mathbb{R}$ define-se*

$$T(t) := e^{tA} = I_X + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}. \tag{2.2}$$

Então,

(i) $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ *e* $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le e^{|t|\|A\|_{\mathcal{L}(X)}}, \ \forall t \in \mathbb{R}$*;*

(ii) $\lim\limits_{t\to 0} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$*;*

(iii) $\lim\limits_{t\to 0} \left\| \frac{T(t)-I_X}{t} - A \right\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$

Demonstração. (i) Lembre-se que dados quaisquer $A, B \in \mathcal{L}(X)$, vale que $A \circ B \in \mathcal{L}(X)$ e $\|A \circ B\|_{\mathcal{L}(X)} \le \|A\|_{\mathcal{L}(X)} \|B\|_{\mathcal{L}(X)}$. Assim, se $n \in \mathbb{N}$, então

$$\left\| \frac{t^n A^n}{n!} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{|t|^n}{n!} \|A\|^n_{\mathcal{L}(X)} := M_n.$$

Como a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente para $e^{|t|\|A\|_{\mathcal{L}(X)}}$, pela Proposição 2.33 a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ é absolutamente convergente e

$$\begin{aligned} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \left\| \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n A^n}{n!} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\le \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{|t|^n \|A\|^n_{\mathcal{L}(X)}}{n!} = e^{|t|\|A\|_{\mathcal{L}(X)}}. \end{aligned}$$

(ii) Tem-se

$$T(t) - I_X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - I_X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Não há perda de generalidade considerar $|t| \le 1$, visto que o interesse é em passar o limite quando $t \to 0$. Neste caso, defina $f_n : [-1, 1] \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ por

$$f_n(t) := \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $t \in [-1, 1]$, vem que

$$\|f_n(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = \left\| \frac{t^n A^n}{n!} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{\|A\|^n_{\mathcal{L}(X)}}{n!} = M_n.$$

Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente, pela Proposição 2.34 vem que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ converge absolutamente e uniformemente.
Por outro lado, fixado $n \in \mathbb{N}$, vale que

$$\lim_{t \to 0} \frac{|t|^n \|A\|^n_{\mathcal{L}(X)}}{n!} = 0.$$

Mais ainda,

$$0 \leq \|T(t) - I_X\|_{\mathcal{L}(X)} = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{|t|^n \|A\|^n_{\mathcal{L}(X)}}{n!}.$$

Isto, juntamente com o fato de que

$$\lim_{t \to 0} \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{|t|^n \|A\|^n_{\mathcal{L}(X)}}{n!} = \lim_{N \to \infty} \lim_{t \to 0} \sum_{n=1}^{N} \frac{|t|^n \|A\|^n_{\mathcal{L}(X)}}{n!} = 0,$$

implica que

$$\lim_{t \to 0} \|T(t) - I_X\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

(iii) Basta observar que

$$\frac{T(t) - I_X}{t} - A = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^n}{n!},$$

e utilizar argumentos análogos aos já usados para provar o item (ii).

□

Observação 3. Se $A \in \mathcal{L}(X)$ e $T(t) = e^{tA}$, então $T(t+s) = T(t)T(s)$. Além disto, de acordo com a Proposição 2.38, a curva T é contínua e diferenciável em $0 \in \mathbb{R}$, sendo $T'(0) = A$.

2.2 Espaços L^p

2.2.1 Definições e Desigualdades

Definição 2.39. *Diz-se que uma propriedade vale quase sempre $(q.s.)$ em um conjunto Ω, se o conjunto dos pontos onde ela não se verifica tem medida nula. Denota-se ainda a medida de Ω por $|\Omega|$.*

Definição 2.40. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $0 < p < \infty$. Seja $\mathscr{L}^p(\Omega)$ o conjunto de todas as funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $|f|^p$ é integrável (no sentido de Lebesgue) em Ω, ou seja,*

$$\mathscr{L}^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R};\ \ f \textit{ é mensurável e } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Diz-se que duas funções $f, g \in \mathscr{L}^p(\Omega)$ são equivalentes $(f \sim g)$, se $f = g$ quase sempre em Ω. Indica-se por $L^p(\Omega)$ o conjunto

$$L^p(\Omega) = \mathscr{L}^p(\Omega)\backslash \sim.$$

Para $p = \infty$ *define-se* $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; \quad f$ *é limitada quase sempre (q.s.) em* $\Omega\}$

Observação 4. Os elementos do conjunto $L^p(\Omega)$ são classes de equivalência de funções em $\mathscr{L}^p(\Omega)$. Entretanto, é conveniente olhar esses elementos como sendo funções. Assim, escreve-se $f \in L^p(\Omega)$ no lugar de $[f] \in L^p(\Omega)$, admitindo que f é o representante da classe de equivalência.

Definição 2.41. *Seja* $1 \leq p \leq \infty$. *Diz-se que um número real* q *é expoente conjugado de* p *quando* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ *se* $p \in (1, \infty)$, $q = \infty$ *se* $p = 1$ *e* $q = 1$ *se* $p = \infty$.

Lema 2.42. *Se* $1 \leq p < \infty$ *e* $a, b > 0$, *então* $a^p + b^p \leq (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$.

Demonstração. Ver [8], página 87, Lema 5.2.3. □

Lema 2.43. *Sejam* a *e* b *números reais não negativos e* $0 < \lambda < 1$. *Então,*

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b$$

.

Demonstração. Ver [8], página 171, Lema 8.2.12. □

Lema 2.44. *(i) (Desigualdade de Young) Sejam* A *e* B *números reais não negativos, e seja* $1 < p < \infty$ *e* q *seu expoente conjugado. Usando o Lema 2.43 com* $\lambda = \dfrac{1}{p}$, $a = A^p$ *e* $b = B^q$, *obtém-se*

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}.$$

(ii) (Desigualdade de Young com ε*) Dados* $a, b \geq 0$ *e* $\varepsilon > 0$, *vale*

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

Demonstração. Ver [8], página 171, Lema 8.2.12. □

Teorema 2.45 (Desigualdade de Hölder)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto e sejam* p *e* q *expoentes conjugados,* $1 \leq p \leq \infty$. *Se* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$, *então* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [7], página 92, Teorema 4.6. □

Teorema 2.46 (Desigualdade de Minkowiski)**.** *Sejam* $f, g \in L^p(\Omega)$ *e,* $1 \leq p \leq \infty$. *Então,*

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver em [30], páginas 13-15. □

Proposição 2.47. *Suponha que* $|\Omega| < \infty$ *e que* $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

(i) Se $f \in L^q(\Omega)$*, então* $f \in L^p(\Omega)$ *e*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(\Omega)}.$$

(ii) Se $f \in L^\infty(\Omega)$*, então*

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [7]. □

Observação 5. O item (i) da Proposição 2.47 significa que se $1 \leq p \leq q \leq \infty$, então $L^q(\Omega)$ é imerso em $L^p(\Omega)$, isto é, $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ e a aplicação inclusão

$$i : L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)$$

é contínua. Neste caso, denota-se imersão por

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

Definição 2.48. *Uma função mensurável* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *é dita localmente integrável se*

$$\int_K f(x)dx < \infty, \ \forall K \subset \Omega \text{ compacto.}$$

Indica-se por $L^p_{loc}(\Omega)$ *o conjunto de todas as funções mensuráveis* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *tais que* $|f|^p$ *é localmente integrável, isto é,*

$$L^p_{loc}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R};\ \ f \text{ é mensurável e } \int_K |f(x)|^p dx < \infty,\ \ \forall K \subset \Omega \text{ compacto} \right\}.$$

Corolário 2.49. *Sejam* Ω *aberto de* $\mathbb{R}^N$ *e* $1 \leq p \leq \infty$*. Então*

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^p_{loc}(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega).$$

Demonstração. A demonstração segue dos resultados de imersões de Sobolev que podem ser encontrados em [10]. □

Definição 2.50. *Seja* Ω *um aberto do* $\mathbb{R}^N$ *e* $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. O Suporte de* ϕ *é o conjunto*

$$\text{supp}(\phi) = \overline{\{x \in \Omega |\ \ \phi(x) \neq 0\}}^{\Omega}.$$

Denota-se por $C_0(\Omega) = \{\phi \in C(\Omega);\ \ \text{supp}(\phi) \ \ \text{é compacto}\}$.

2.2.2 Propriedades

Proposição 2.51. *(i) Se $0 < p < \infty$, então $L^p(\Omega)$ é um espaço vetorial.*

(ii) O conjunto $L^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial.

(iii) Se $f \in L^p(\Omega)$, denota-se por

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(\Omega)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p \leq \infty,$$

e para $p = \infty$,

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |f(x)| := \inf\{c > 0; \ \ |f(x)| \leq c \textit{ q.s. em } \Omega\}.$$

Demonstração. Ver [7], página 93, Teorema 4.7. □

Corolário 2.52. *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$.*

(i) Se $1 \leq p < \infty$, então a função

$$\begin{aligned} \|.\|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

é uma norma para o espaço vetorial $L^p(\Omega)$.

(ii) A função

$$\begin{aligned} \|.\|_{L^\infty(\Omega)} : L^\infty(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |f(x)| \end{aligned}$$

é uma norma para o espaço vetorial $L^\infty(\Omega)$.

Demonstração. Ver [7], página 93, Teorema 4.7. □

Teorema 2.53. *Se $1 \leq p < \infty$. Os espaços $(L^p(\Omega), \|.\|_p)$ e $(L^\infty(\Omega), \|.\|_\infty)$ são espaços de Banach. Em particular, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno e norma definidos por*

$$(u, v)_2 = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)} dx \quad \textit{e} \quad \|u\|_2 = (u, u)_2^{1/2}.$$

Demonstração. Ver [7], página 93, Teorema 4.7. □

Teorema 2.54. *Se $1 < p \leq \infty$, então $L^p(\Omega)$ é reflexivo.*

Demonstração. Ver [7], página 95, Teorema 4.10. □

Teorema 2.55. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $1 \leq p < \infty$, então $L^p(\Omega)$ é separável.*

Demonstração. Ver [7], página 98, Teorema 4.13. □

Proposição 2.56. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e $1 \leq p < \infty$, então $C_0(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.*

Demonstração. Ver [7], página 96, Teorema 4.12. □

Corolário 2.57. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e $1 \leq p < \infty$, então $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.*

Demonstração. Análoga à demonstração da Proposição 2.56. □

Proposição 2.58. *(Lema de Du Bois Raymond) Seja $u \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Então, $u(x) = 0$ para quase todo x em Ω.

Demonstração. Ver [7], página 110, Corolário 4.24. □

Corolário 2.59. *Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0, \ \ \forall \varphi \in C_0(\Omega).$$

Então, $f(x) = 0$ para quase todo x em Ω.

Demonstração. Consequência da proposição anterior. □

Teorema 2.60. *Seja $1 < p < \infty$ e $q > 1$ o expoente conjugado de p. Então, $[L^p(\Omega)]'$ é isometricamente isomorfo ao espaço $L^q(\Omega)$. Em particular, $L^p(\Omega)$ é reflexivo.*

Demonstração. Ver [28], página 169, Teorema 6.2.1. □

Teorema 2.61. *O espaço $[L^1(\Omega)]'$ é isometricamente isomorfo ao espaço $L^\infty(\Omega)$.*

Demonstração. Ver [28], página 174, Teorema 6.3.2. □

Por abuso de notação, identifica-se os espaços isometricamente isomorfos acima descritos e, neste trabalho, indica-se por

$$[L^p(\Omega)]' = L^q(\Omega) \text{ para } 1 < p, q < \infty \text{ e } [L^1(\Omega)]' = L^\infty(\Omega).$$

Lema 2.62. *São válidas as seguintes afirmações:*

(a) Seja E um espaço vetorial. Dado um subespaço vetorial G de E, se $g \in G'$, então existe $f \in E'$ tal que $f|_G = g$ (Corolário do Teorema de Hahn-Banach).

(b) Sejam $1 < p < \infty$ *e* $1 < q < \infty$ *tal que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Se* $\phi \in (L^p(\Omega))'$, *então existe uma única* $u \in L^q(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \phi, f \rangle = \int_\Omega u(x) f(x) dx, \quad \textit{para toda } f \in L^p(\Omega).$$

(c) Se $p = 1$ *e* $\phi \in (L^1(\Omega))'$, *então existe uma única* $u \in L^\infty(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \phi, f \rangle = \int_\Omega u(x) f(x) dx, \quad \textit{para toda } f \in L^1(\Omega).$$

Demonstração. Ver [7], páginas 97-99, Teorema 4.14. □

2.3 Espaços de Sobolev Unidimensionais

Esta seção define e caracteriza conceitos muito importantes relacionados aos espaços de Hilbert e/ou Banach que são utilizados ao longo do trabalho.

2.3.1 Os Espaços $W^{1,p}(I)$

Seja $I = (a, b)$ com $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$.

Definição 2.63. *O espaço de Sobolev* $W^{1,p}(I)$ *é definido por*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I);\ \exists g \in L^p(I) \textit{ com } \int_I u\varphi' dx = -\int_I g\varphi dx,\ \ \forall \varphi \in C_0^1(I) \right\}.$$

No caso particular $p = 2$, *denota-se* $W^{1,2}(I) = H^1(I)$, *ou seja,*

$$H^1(I) = \left\{ u \in L^2(I);\ \exists g \in L^2(I) \textit{ com } \int_I u\varphi' dx = -\int_I g\varphi dx,\ \ \forall \varphi \in C_0^1(I) \right\}.$$

Observação 6. Dada $u \in W^{1,p}(I)$, a função g é chamada de derivada fraca de u em $W^{1,p}(I)$ e será denotada por u'.

Afirmação 1. A função u' é única a menos de um conjunto de medida nula. Com efeito, suponha que exista $h = u' \in L^p(I)$ que também é derivada fraca de u em $W^{1,p}(I)$. Assim,

$$\begin{aligned} &\int_I g\varphi dx = -\int_I u\varphi' dx = \int_I h\varphi dx,\ \ \forall \varphi \in C_0^1(I) \\ \Rightarrow &\int_I (g - h)\varphi dx = 0,\ \ \forall \varphi \in C_0^1(I). \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.58 tem-se que $g - h = 0$, q.s em I. Logo $h(x) = g(x)$ para quase todo x em I, como desejado.

Observação 7. (i) Na definição de $W^{1,p}(I)$ pode-se usar $\varphi \in C_0^\infty(I)$ no lugar de $\varphi \in C_0^1(I)$. Neste caso φ é chamada função teste.

(ii) Se $u \in C^1(I) \cap L^p(I)$ e a derivada $u' \in L^p(I)$, então $u \in W^{1,p}(I)$ e a derivada usual u' coincide com a derivada fraca $g = u'$ de u em $W^{1,p}(I)$.

(iii) Se I é limitado, então $C^1(\overline{I}) \subset W^{1,p}(I)$, e para qualquer que seja I, $C_0^1(I) \subset W^{1,p}(I)$.

Proposição 2.64. *(i) O espaço $W^{1,p}(I)$ é um espaço vetorial normado, munido da norma (usual)*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}, \quad \forall u \in W^{1,p}(I),\ 1 \leq p \leq \infty.$$

Além disso, se $1 < p < \infty$, então pode-se definir a norma

$$\|u\|_p = (\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p)^{1/p}$$

em $W^{1,p}(I)$, a qual é equivalente à norma usual.

(ii) O espaço $H^1(I)$ é um espaço vetorial com produto interno e norma definidos, respectivamente, por

$$\begin{aligned} (u,v)_{H^1} &= (u,v)_{L^2} + (u_x, v_x)_{L^2} = \int_I u\overline{v}dx + \int_I u_x\overline{v}dx, \ \ \forall u, v \in H^1(I) \\ \|u\|_{H^1} &= \left(\int_I |u|^2dx + \int_I |u_x|^2dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|u_x\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

.

Demonstração. A demonstração dos itens (i) e (ii) seguem mostrando as propriedades de norma e produto interno para os espaços definidos. $\square$

Teorema 2.65. *Os espaços $W^{1,p}(I)$ são espaços de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração. Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}(I)$ uma sequência de Cauchy. Como

$$\|u_n - u_m\|_{W^{1,p}} = \|u_n - u_m\|_{L^p} + \|u_n' - u_m'\|_{L^p},$$

então (u_n) e (u_n') são sequências de Cauchy em $L^p(I)$, o qual é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$. Assim, existem $u, v \in L^p$ tais que $u_n \to u$ e $u_n' \to v$ em $L^p(I)$, ou seja, $\|u_n - u\|_{L^p} \to 0$ e $\|u_n' - v\|_{L^p} \to 0$ quando $n \to \infty$. Além disso, note que para toda função $\varphi \in C_0^1(I)$ tem-se

$$\int_I u_n(x)\varphi'(x)dx = -\int_I u_n'(x)\varphi(x)dx. \tag{2.3}$$

Deste modo, pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}\left|\int_I u_n(x)\varphi'(x)dx - \int_I u(x)\varphi'(x)dx\right| &= \left|\int_I (u_n(x)-u(x))\varphi'(x)dx\right| \\ &\leq \int_I |u_n(x)-u(x)||\varphi'(x)|dx \\ &\leq \|u_n - u\|_{L^p}\|\varphi'\|_{L^q} \to 0,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_I u_n(x)\varphi'(x)dx \to \int_I u(x)\varphi'(x)dx. \tag{2.4}$$

Analogamente, pode-se mostrar que

$$\int_I u_n'(x)\varphi(x)dx \to \int_I v(x)\varphi(x)dx. \tag{2.5}$$

Sendo assim, de (2.3), (2.4), (2.5) e pela unicidade do limite obtém-se

$$\int_I u(x)\varphi'(x)dx = -\int_I v(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in C_0^1(I),$$

isto é, $u \in W^{1,p}(I)$ e $v = u'$ é a derivada fraca de u em $W^{1,p}(I)$. Além disso,

$$\|u_n - u\|_{W^{1,p}} = \|u_n - u\|_{L^p} + \|u_n' - u'\|_{L^p} \to 0.$$

Portanto, $u_n \to u$ em $W^{1,p}(I)$, de onde concluí-se que $W^{1,p}(I)$ é Banach. $\square$

Teorema 2.66. *Os espaços $W^{1,p}(I)$ são espaços reflexivos para $1 < p < \infty$.*

Demonstração. Sabe-se que os espaços $L^p(I)$ são de Banach e reflexivos para $1 < p < \infty$, assim como o espaço $X_p = L^p(I) \times L^p(I)$ é reflexivo. Agora defina o operador

$$\begin{aligned} T : W^{1,p}(I) &\longrightarrow X_p = L^p(I) \times L^p(I) \\ u &\longmapsto T(u) = (u, u'). \end{aligned}$$

Tem-se que T é linear. Além disso, T é também uma isometria. De fato,

$$\|T(u)\|_{X_p} = \|(u, u')\|_{X_p} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p} = \|u\|_{W^{1,p}}.$$

Temos ainda que T é injetora. Com efeito,

$$u \in Ker(T) \Rightarrow \|T(u)\|_{X_p} = 0 \Rightarrow \|u\|_{W^{1,p}} = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow Ker(T) = \{0\}.$$

Sendo $T : W^{1,p}(I) \longrightarrow M = T(W^{1,p}(I))$ sobrejetora, conclui-se que T é um isomorfismo sobre sua imagem. Afirma-se que $M = T(W^{1,p}(I))$, subespaço vetorial de X_p, é fechado. De fato, seja $v \in \overline{M}$, então existe uma sequência $v_n = T(u_n) \in M$, com $u_n \in W^{1,p}(I)$, tal que $v_n = T(u_n) \to v$ quando $n \to \infty$ em X_p. Assim, (v_n) é de Cauchy em X_p, ou seja, $\|v_n - v_m\| \to 0$ se m e n tendem ao infinito. Como

$$\begin{aligned}\|u_n - u_m\|_{W^{1,p}} &= \|T(u_n) - T(u_m)\|_{X_p} = \|T(u_n - u_m)\|_{X_p}\\ &= \|v_n - v_m\|_{W^{1,p}} \to 0,\end{aligned}$$

então (u_n) é de Cauchy em $W^{1,p}(I)$, o qual é Banach. Logo existe $u \in W^{1,p}(I)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(I)$, e assim

$$\|v_n - T(u)\|_{X_p} = \|T(u_n) - T(u)\|_{X_p} = \|T(u_n - u)\|_{X_p} = \|u_n - u\|_{W^{1,p}} \to 0.$$

Então, $v_n \to T(u)$ em X_p, de onde segue que $v = T(u) \in M$. Portanto, $M = \overline{M}$, como desejado. Pela Proposição 2.7, $M = T(W^{1,p}(I))$ é reflexivo.
Afirmação: T é fechada. Com efeito, sejam $u_n \in W^{1,p}(I)$, $u_n \longrightarrow u$ e $T(u_n) \longrightarrow v$. Como $u \in W^{1,p}(I)$, $u_n \longrightarrow u$ e $\|T(u_n) - T(u)\| \longrightarrow 0$, então $T(u_n) \longrightarrow T(u)$ e pela unicidade do limite $v = T(u)$.
Como T é fechada, segue da Proposição 2.8 que $W^{1,p}(I)$ é reflexivo, $1 < p < \infty$. □

Teorema 2.67. *Os espaços $W^{1,p}(I)$ são espaços separáveis para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Sabe-se que $L^p(I)$ é Banach separável para $1 \leq p < \infty$, assim como $X_p = L^p(I) \times L^p(I)$. Defina

$$\begin{aligned} T : W^{1,p}(I) &\longrightarrow X_p = L^p(I) \times L^p(I)\\ u &\longmapsto T(u) = (u, u'). \end{aligned}$$

Assim, $M = T(W^{1,p}(I)) \subset X_p$ é separável pela Proposição 2.9, ou seja, existe um subconjunto $Y \subset M$ enumerável e denso em M. Afirma-se que

$$A = T^{-1}(Y) = \{u \in W^{1,p}(I);\ \ T(u) \in Y\} \subset W^{1,p}(I)$$

é subespaço vetorial enumerável e denso em $W^{1,p}(I)$. Com efeito, A é enumerável, pois $T|_A : A \longrightarrow T(A) = T(T^{-1}(Y)) \subseteq Y$ é uma bijeção e Y é enumerável. Além disso, A é denso em $W^{1,p}(I)$. De fato, seja $u \in W^{1,p}(I)$, então $v = T(u) \in T(W^{1,p}(I))$ e como $T(W^{1,p})$ é separável, existe uma sequência $(v_n) \subset Y \subset T(W^{1,p})$, $v_n = T(u_n)$ com $u_n \in W^{1,p}(I)$, tal que $v_n \to v$ em X_p, isto é, $\|v_n - v\|_{X_p} \to 0$. Agora note que

$$\|u_n - u\|_{W^{1,p}} = \|T(u_n - u)\|_{X_p} = \|T(u_n) - T(u)\|_{X_p} = \|v_n - v\|_{X_p} \to 0,$$

ou seja, $u_n \to u$ em $W^{1,p}(I)$ com $u_n \in A$, uma vez que $u_n \in W^{1,p}(I)$ e $T(u_n) \in Y$, isto implica que $u \in \overline{A}$, mostrando que $\overline{A} = W^{1,p}(I)$ e, consequentemente, que $W^{1,p}(I)$ é separável. $\square$

Teorema 2.68. *O espaço $H^1(I) = W^{1,2}(I)$ é um espaço de Hilbert (separável).*

Demonstração. $H^1(I) = W^{1,2}(I)$ é um espaço de Hilbert pela Proposição 2.64 e pelo Teorema 2.65. $\square$

Lema 2.69. *Seja $f \in L^1_{loc}(I)$ tal que $\displaystyle\int_I f(x)\varphi'(x)dx = 0$, para toda $\varphi \in C^1_0(I)$. Então, existe uma constante C tal que $f = C$ quase sempre em I.*

Demonstração. Ver [7], páginas 204 e 205, Lema 8.1. $\square$

Corolário 2.70. *Se $u \in W^{1,p}(I)$ e $u' = 0$ quase sempre em I, então u é constante quase sempre em I.*

Demonstração. Observe que $u \in W^{1,p}(I) \subset L^p(I) \subset L^1_{loc}(I)$ e

$$\int_I u(x)\varphi'(x)dx = -\int_I u'(x)\varphi(x)dx = 0,$$

para todo $\varphi \in C^1_0(I)$, então pelo Lema 2.69 tem-se que u é constante quase sempre em I. $\square$

Lema 2.71. *Seja $g \in L^1_{loc}(I)$. Para algum $y_0 \in I$, considere*

$$v(x) = \int_{y_0}^{x} g(t)dt, \quad \textit{com } x \in I.$$

Então, $v \in C(I)$ e $\displaystyle\int_I v(x)\varphi'(x)dx = -\int_I g(x)\varphi(x)dx$, para toda $\varphi \in C^1_0(I)$.

Demonstração. Ver [7], página 205, Lema 8.2. $\square$

Observação 8. Como consequência do Lema 2.71 se $g, v \in L^p(I)$, então $v \in W^{1,p}(I)$. Mais ainda, se I for limitado, então $g \in L^p(I)$ implica em $v \in W^{1,p}(I)$.

Teorema 2.72. *Seja $u \in W^{1,p}(I)$, com $1 \leq p \leq \infty$. Então, existe uma função $\tilde{u} \in C(\overline{I})$ tal que $u = \tilde{u}$ quase sempre em I e $\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \displaystyle\int_y^x u'(t)dt$, para quaisquer que sejam $x, y \in I$.*

Demonstração. Ver [7], página 204, Teorema 8.2. $\square$

Proposição 2.73. *Seja $u \in L^p(I)$ com $1 < p \leq \infty$. As seguintes propriedades são equivalentes:*

(a) $u \in W^{1,p}(I)$.

(b) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left| \int_I u(x)\varphi(x)dx \right| \leq C\|\varphi\|_{L^q},$$

sendo $1 \leq q < \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. ($C := \|u'\|_{L^p}$).

Demonstração. Ver [7], página 208, Proposição 8.5. □

Proposição 2.74. *Seja $u \in L^\infty(I)$. Então, $u \in W^{1,\infty}(I)$ se, e somente se, existe $C > 0$ tal que*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|$$

quase sempre, para quaisquer que sejam $x, y \in I$.

Demonstração. Ver [7], página 207, Proposição 8.4. □

Lema 2.75. *Seja $u \in W^{1,p}(I)$. Então,*

$$\eta u \in W^{1,p}(0,\infty) \quad e \quad (\eta u)' = \eta' u + \eta u'.$$

Demonstração. Ver [7], página 210, Lema 8.3. □

Lema 2.76. *Seja I um intervalo ilimitado e seja $u \in W^{1,p}(I)$, com $1 \leq p < \infty$. Então,*

$$\lim_{x \to \infty} u(x) = 0.$$

Demonstração. Ver [7], página 214, Corolário 8.9. □

Teorema 2.77 (Operador extensão)**.** *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Então, existe um operador linear e contínuo*

$$P : W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$$

chamado operador extensão, satisfazendo

(i) $Pu|_I = u, \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$.

(ii) $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq c\|u\|_{L^p(I)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$.

(iii) $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(I)}$, *onde* $c = c(|I|)$, $|I| \leq \infty$.

Demonstração. Ver [7], página 209, Teorema 8.6. □

Teorema 2.78 (Imersões de Sobolev)**.** *Tem-se que*

(a) $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$, *para todo* $1 \leq p \leq \infty$, *com inclusão contínua, ou seja, existe uma constante* $c = c(|I|)$, $|I| \leq \infty$, *tal que* $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(I)}$, *para todo* $u \in W^{1,p}(I)$.

(b) Se I é limitado ($|I| < \infty$), então $W^{1,p}(I) \subset C(\overline{I})$, para todo $1 < p \leq \infty$, com inclusão compacta.

(c) Se I é limitado ($|I| < \infty$), então $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$, para todo $1 \leq q < \infty$, onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, com inclusão compacta.

Demonstração. Ver [7], páginas 212 a 214, Teorema 8.8. □

Corolário 2.79 (Derivação do produto)**.** *Sejam $u, v \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então tem-se $uv \in W^{1,p}(I)$ e $(uv)' = u'v + uv'$. Além disso, vale a fórmula de integração por partes*

$$\int_y^x u'(s)v(s)ds = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x u(s)v'(s)ds.$$

Demonstração. Ver [7], página 215, Corolário 8.10. □

Corolário 2.80 (Derivação da composição)**.** *Sejam $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$ e $u \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $G \circ u \in W^{1,p}(I)$ e $(G \circ u)' = (G' \circ u)u'$.*

Demonstração. Ver [7], páginas 215 e 216, Corolário 8.11. □

2.3.2 Os Espaços $W_0^{1,p}(I)$

Definição 2.81. *Seja $1 \leq p < \infty$. O espaço $W_0^{1,p}(I)$ é dado por*

$$W_0^{1,p}(I) = \overline{C_0^1(I)}^{W^{1,p}}.$$

No caso de $p = 2$ denota-se por

$$H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I).$$

Observação 9. O espaço $W_0^{1,p}(I)$, também é definido como

$$W_0^{1,p}(I) = \{u \in W^{1,p}(I);\ u(x) = 0 \text{ para } x \in \partial I\}.$$

Quando $p = 2$,

$$H_0^1(I) = \{u \in H^1;\ u(x) = 0 \text{ para } x \in \partial I\}.$$

Observação 10. (i) Os espaços $W_0^{1,p}(I)$ e $H_0^1(I)$ são subespaços de $W^{1,p}(I)$ e $H^1(I)$, respectivamente, com norma e produto interno induzidos de $W^{1,p}(I)$ e $H^1(I)$.

(ii) Se $1 < p \leq \infty$, então $W_0^{1,p}(I)$ são espaços de Banach.

(iii) Se $1 \leq p < \infty$, então $W_0^{1,p}(I)$ são espaços separáveis.

(iv) Se $1 < p < \infty$, então $W_0^{1,p}(I)$ são espaços reflexivos.

(v) $H_0^1(I)$ é um espaço de Hilbert com produto interno e norma induzidos de $H^1(I)$.

(vi) $C_0^\infty(I)$ é denso em $W_0^{1,p}(I)$, para qualquer $I \subset \mathbb{R}$.

Lema 2.82. *Seja $I \subset \mathbb{R}$. Os espaços $W_0^{1,p}(I)$ são densos em $L^p(I)$, para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Do Corolário 2.57 vem que $\overline{C_0^\infty(I)}^{L^p(I)} = L^p(I)$, e sabe-se também que $C_0^\infty(I) \subset W^{1,p}(I) \subset L^p(I)$, deste modo $L^p(I) = \overline{C_0^\infty(I)}^{L^p(I)} \subset \overline{W_0^{1,p}(I)}^{L^p(I)} \subset L^p(I)$. Portanto, $L^p(I) = \overline{W_0^{1,p}}^{L^p(I)}$.
Um resultado muito utilizado neste trabalho é para o caso $p = 2$, isto é, $L^2(I) = \overline{H_0^1(I)}^{L^2(I)}$. □

Teorema 2.83 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja I um intervalo limitado. Então existe $C > 0$, tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq C\|u'\|_{L^p(I)}, \ \ \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

Demonstração. Ver [7], página 218, Proposição 8.13. □

Observação 11. Do Teorema 2.83 vem que $\|u\|_{W_0^{1,p}} = \|u'\|_{L^p}$ define uma norma equivalente em $W_0^{1,p}(I)$. Além disso, é possível mostrar que $C = |I|$.

2.3.3 Os Espaços $L_*^p(I)$ e $W_*^{1,p}(I)$

Definição 2.84. *Denota-se por $L_*^p(I)$ e $W_*^{1,p}(I)$, respectivamente, os espaços de média nula, em que*

$$L_*^p(I) = \left\{ u \in L^p(I); \ \frac{1}{|I|}\int_I u(x)dx = 0 \right\}$$

e

$$W_*^{1,p}(I) = \left\{ u \in W^{1,p}(I); \ \frac{1}{|I|}\int_I u(x)dx = 0 \right\}. \tag{2.6}$$

No caso de $p = 2$ denota-se por

$$H_*^1(I) = W_*^{1,2}(I).$$

Observação 12. Os espaços $W_*^{1,p}(I)$ e $H_*^1(I)$ são subespaços de $W^{1,p}(I)$ e $H^1(I)$, respectivamente, com norma e produto interno induzidos de $W^{1,p}(I)$ e $H^1(I)$.

Teorema 2.85. *(i) Se $1 < p \leq \infty$, então $W_*^{1,p}(I)$ são espaços de Banach.*

(ii) Se $1 \leq p < \infty$, então $W_*^{1,p}(I)$ são espaços separáveis.

(iii) Se $1 < p < \infty$, então $W_*^{1,p}(I)$ são espaços reflexivos.

(iv) $H_*^1(I)$ é um espaço de Hilbert com produto interno e norma induzidos de $H^1(I)$.

Demonstração. As demonstrações dos itens (i), (ii), (iii) e (iv) são consequências da Observação 12 e resultados de Análise Funcional que podem ser encontrados em [7] e [11]. □

Lema 2.86. *Seja $I \subset \mathbb{R}$. Os espaços $W_*^{1,p}(I)$ são densos em $L_*^p(I)$, para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Considere o caso particular em que $p = 2$, ou seja,

$$\overline{H_*^1(I)}^{L_*^2} = L_*^2(I).$$

Observe que $\overline{H_*^1(I)}^{L_*^2(I)} \subset L_*^2(I)$. Falta mostrar que $L_*^2(I) \subset \overline{H_*^1(I)}^{L_*^2(I)}$, então seja $f \in L_*^2(I)$, será mostrado que existe $f_n \in H_*^1(I)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0, \text{ com } f \in L_*^2(I). \tag{2.7}$$

Sabe-se ainda que $\overline{H^1(I)}^{L^2(I)} = L^2(I)$. Logo, existe uma sequência $g_n \in H^1(I)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n - f\| = 0. \tag{2.8}$$

Defina $f_n := g_n - \frac{1}{|I|}\int_I g_n(x)dx$, uma vez que

$$\int_0^L f_n(x)dx = 0, \tag{2.9}$$

então $f_n \in H_*^1(I)$, e ainda,

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{L^2(I)} &= \left\| g_n - \frac{1}{|I|}\int_I g_n(x)dx - f \right\|_{L^2(I)} \\ &= \left\| g_n - \frac{1}{|I|}\int_I g_n(x)dx - f + \int_I f(x)dx \right\|_{L^2(I)} \\ &\leq \|g_n - f\|_{L^2(I)} + \left\| \frac{1}{|I|}\int_I (g_n - f)(x) \right\|_{L^2(I)} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

deste modo, $f \in \overline{H_*^1(I)}^{L_*^2(I)}$, concluindo que $\overline{H_*^1(I)}^{L_*^2(I)} = L_*^2(I)$.
Para $p \neq 2$, a demosntração segue análoga. □

Teorema 2.87 (Desigualdade de Poincaré para espaço de medida nula)**.** *Seja I um intervalo limitado. Então existe $C > 0$, tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq C\|u'\|_{L^p(I)}, \quad \forall u \in W_*^{1,p}(I),$$

onde $W_*^{1,p}(I)$ é dado em (2.6)*.*

Demonstração. Considere $I = (a, b) = (0, L)$ limitado, x e $y \in (0, L)$ e $u \in W_*^{1,p}(I)$. Pelo Teorema 2.72, sabe-se que existe $\widetilde{u} \in C([0, L])$ tal que $\widetilde{u} = u \;\; q.s.$ em $(0, L)$ e

$$\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt.$$

Assim,

$$\begin{aligned}|u(x)-u(y)| &= \left|\int_y^x u'(t)dt\right| \leq \int_y^x |u'(t)|dt \\ \Rightarrow \quad |u(x)-u(y)| &\leq \int_y^x |u'(t)|dt. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Integrando ambos os membros de (2.10), obtém-se

$$\begin{aligned}\int_I |u(x)-u(y)|dy &\leq \int_I \int_y^x |u'(t)|dtdy \\ \Rightarrow \left|\int_I u(x)-u(y)dy\right| &\leq \int_I \int_y^x |u'(t)|dtdy \\ \Rightarrow \left|\int_I u(x)dy - \int_I u(y)dy\right| &\leq \int_I \int_y^x |u'(t)|dtdy.\end{aligned}$$

Por hipótese, $\int_I u(y)dy = 0$, e tem-se também que

$$\int_y^x |u'(t)|dt \leq \int_I |u'(t)|dt.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left|\int_I u(x)dy\right| &\leq \int_I \int_I |u'(t)|dtdy \\ \Rightarrow |u(x) \int_I dy| &\leq \int_I |u'(t)|dt \int_I dy,\end{aligned}$$

pois $\int_I |u'(t)|dt$ e $u(x)$ são constantes em relação a y. Deste modo,

$$|u(x)|I|| \leq \int_I |u'(t)|dt|I|.$$

Como $|I| > 0$, então

$$|u(x)| \leq \int_I |u'(t)|dt. \tag{2.11}$$

Elevando ambos os membros de (2.11) a p, obtém-se

$$|u(x)|^p \leq \left(\int_I |u'(t)1|dt\right)^p. \tag{2.12}$$

Aplicando Hölder no lado direito de (2.12), tem-se

$$|u(x)|^p \leq \left(\left(\int_I |u'(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \cdot \left(\left(\int_I |1|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right)^p,$$

com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Assim,

$$|u(x)|^p \leq \|u'\|_{L^p}^p |I|^{\frac{p}{q}}. \tag{2.13}$$

Integrando ambos os membros de (2.13), obtém-se

$$\begin{aligned} & \int_I |u(x)|^p dx \leq \int_I \|u'\|_{L^p}^p |I|^{\frac{p}{q}} dx \\ \Rightarrow \quad & \int_I |u(x)|^p dx \leq \|u'\|_{L^p}^p |I|^{\frac{p}{q}} \int_I dx \\ \Rightarrow \quad & \int_I |u(x)|^p dx \leq \|u'\|_{L^p}^p |I|^{\frac{p}{q}+1}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Elevando ambos os membros de (2.14) a $\frac{1}{p}$, tem-se

$$\left(\int_I |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\|u'\|_{L^p}^p |I|^{\frac{p}{q}+1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Finalmente, recordando que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, conclui-se

$$\begin{aligned} & \|u\|_{L^p(I)} \leq \|u'\|_{L^p(I)} |I|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \\ \Rightarrow & \|u\|_{L^p(I)} \leq \|u'\|_{L^p(I)} |I| \\ \Rightarrow & \|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)} \leq \|u'\|_{L^p(I)} |I| + \|u'\|_{L^p(I)} \\ \Rightarrow & \|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq \|u'\|_{L^p(I)} (1 + |I|) \\ \Rightarrow & \|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq c \|u'\|_{L^p(I)}. \end{aligned}$$

Portanto, tem-se que, para todo $u \in W_*^{1,p}(I)$, vale $\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq c\|u'\|_{L^p(I)}$. □

Observação 13. Do Teorema 2.87 vem que $\|u\|_{W_*^{1,p}} = \|u'\|_{L^p}$ define uma norma equivalente em $W_*^{1,p}(I)$.

Notação 1. O dual dos espaços $W_0^{1,p}(I)$ com $1 \leq p < \infty$ e $H_0^1(I)$ serão denotados por $W^{-1,q}(I)$ e $H^{-1}(I)$, respectivamente, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

2.3.4 Os Espaços $W^{m,p}(I)$ e $W_0^{m,p}(I)$

Definição 2.88. *Dado $m \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$ e $I \subset \mathbb{R}$, os espaços de Sobolev $W^{m,p}(I)$ são definidos como*

$$W^{m,p}(I) = \{u \in L^p;\ \exists\, u', u'', ..., u^{(m)} \in L^p\},$$

onde as funções $u', u'', ..., u^{(m)}$ são chamadas de derivada fraca de ordem 1, 2,..., m, respectivamente. Além disso, se $u \in W^{m,p}(I)$

$$\int_I u D^j \varphi dx = (-1)^j \int_I u^{(j)} \varphi dx, \ \ \forall \varphi \in C_0^\infty(I), \ \ 1 \leq j \leq m,$$

onde D^j representa a derivada clássica de ordem j.

Observação 14. (i) $W^{m,p}(I)$ é um espaço vetorial normado com norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(I)} = \|u\|_{L^p(I)} + \sum_{j=1}^{m} \|D^j u\|_{L^p(I)}.$$

(ii) Quando $p = 2$, denota-se $W^{m,2}(I) = H^m(I)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno e norma dados por

$$(u,v)_{H^m(I)} = (u,v)_{L^2(I)} + \sum_{j=1}^{m} (D^j u, D^j v)_{L^2(I)}.$$

$$\|u\|_{H^m(I)} = \left(\|u\|^2_{L^p(I)} + \sum_{j=1}^{m} \|D^j u\|^2_{L^p(I)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(iii) Para $m \geq 2$ e $1 \leq p \leq \infty$. Também pode-se escrever

$$W^{m,p} = \{u \in W^{m-1,p}(I);\ \ u' \in W^{m-1,p}(I)\}.$$

Então, $W^{m,p}(I) \subset W^{1,p}(I),\ \ \forall m \geq 2$, com inclusão contínua.

Teorema 2.89. *(i) $W^{m,p}(I)$ são espaços de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.*

(ii) $W^{m,p}(I)$ são espaços reflexivos para $1 < p < \infty$.

(iii) $W^{m,p}(I)$ são espaços separáveis para $1 \leq p < \infty$.

(iv) $H^m(I)$ é um espaço de Hilbert.

(v) $C_0^\infty(\mathbb{R})$ é denso em $W^{m,p}(\mathbb{R})$.

Demonstração. Ver [10]. □

Lema 2.90. *Seja $I \subset \mathbb{R}$. Então, $H_0^1(I) = \overline{H_0^1(I) \cap H^2(I)}^{H_0^1(I)}$.*

Demonstração. Da Observação 10 item (iv) vem que $\overline{C_0^\infty(I)}^{H_0^1(I)} = H_0^1(I)$, e sabe-se também que $C_0^\infty(I) \subset H^2(I)$, deste modo,

$$H_0^1(I) = \overline{C_0^\infty(I)}^{H_0^1(I)} = \overline{C_0^\infty(I) \cap H^2(I)}^{H_0^1(I)} \subset \overline{H_0^1(I) \cap H^2(I)}^{H_0^1(I)} \subset H_0^1(I).$$

Portanto, $H_0^1(I) = \overline{H_0^1(I) \cap H^2(I)}^{H_0^1(I)}$. □

Definição 2.91. *Dado $m \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$ e $I \subset \mathbb{R}$, os espaços de Sobolev $W_0^{m,p}(I)$ são definidos como*

$$W_0^{m,p}(I) = \{u \in W^{m,p}(I);\ u(x) = u'(x) = u''(x) = ... = u^{(m-1)}(x) = 0 \ \text{para } x \in \partial I\},$$

onde as funções $u', u'', ..., u^{(m-1)}$ são chamadas de derivada fraca de ordem 1, 2,..., m-1, respectivamente, da função u. Em particular $H_0^2(I) = \{u \in H^2(I);\ u(x) = u'(x) = 0 \text{ para } \partial I\}$.

Observação 15. Os espaços $W_0^{m,p}(I)$ e $H_0^m(I)$ são subespaços de $W^{m,p}(I)$ e $H^m(I)$, respectivamente, com norma e produto interno induzidos de $W^{m,p}(I)$ e $H^m(I)$.

Teorema 2.92. *(i) $W_0^{m,p}(I)$ são espaços de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.*

(ii) $W_0^{m,p}(I)$ são espaços reflexivos para $1 < p < \infty$.

(iii) $W_0^{m,p}(I)$ são espaços separáveis para $1 \leq p < \infty$.

(iv) $H_0^m(I)$ é um espaço de Hilbert.

(v) $C_0^\infty(\mathbb{R})$ é denso em $W_0^{m,p}(\mathbb{R})$.

Demonstração. Ver [10]. □

Lema 2.93. *Seja $I \subset \mathbb{R}$. Os espaços $W^{m,p}(I)$ e $W_0^{m,p}(I)$ são densos em $L^p(I)$, para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Do Corolário 2.57 vem que $\overline{C_0^\infty(I)}^{L^p(I)} = L^p(I)$, e sabe-se também que $C_0^\infty(I) \subset W^{m,p}(I) \subset L^p(I)$, deste modo $L^p(I) = \overline{C_0^\infty(I)}^{L^p(I)} \subset \overline{W^{m,p}(I)}^{L^p(I)} \subset L^p(I)$. Portanto, $L^p(I) = \overline{W^{m,p}}^{L^p(I)}$.
O caso $p = 2$, isto é, $L^2(I) = \overline{H^m(I)}^{L^2(I)}$, é um resultado que será muito utilizado neste trabalho.
De modo análogo mostra-se que $L^p(I) = \overline{H_0^m(I)}^{L^p(I)}$. □

2.3.5 Espaços com Peso

No decorrer do trabalho será utilizado a notação $\mathbb{R}^+$, para o conjunto $[0, \infty)$, isto é $x \in \mathbb{R}^+$, se $0 \leq x < \infty$.
Seja $g \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R})$ uma função positiva com $g(0) > 0$.

Definição 2.94. *Seja X um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. Define-se **espaço com peso** g por*

$$L_g^p(\mathbb{R}^+, X) := \left\{\eta : [0, \infty) \to X;\ \int_0^\infty g(s)\|\eta(s)\|_X^p ds < \infty\right\}. \tag{2.15}$$

Proposição 2.95. *Se $1 \leq p < \infty$, então o espaço $L_g^p(\mathbb{R}^+, X)$ é um espaço de Banach com norma*

$$\|\eta\|_{L_g^p(\mathbb{R}^+,X)} := \left(\int_0^\infty g(s)\|\eta(s)\|_X^p ds\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Em particular, se X é um espaço de Hilbert, então $L_g^p(\mathbb{R}^+, X)$ é um espaço de Hilbet com produto interno definido por

$$(\eta, \zeta)_{L_g^p(\mathbb{R}^+,X)} := \int_0^\infty g(s)(\eta(s), \zeta(s))_X ds.$$

Demonstração. Ver [46]. □

Proposição 2.96. *Seja $1 \leq p < \infty$. A aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I}_g : L_g^p(\mathbb{R}^+, X) & \to & X \\ \eta & \mapsto & \mathcal{I}_g\eta = \displaystyle\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds \end{array}$$

é limitada com

$$\|\mathcal{I}_g\|_X \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{\frac{(p-1)}{p}} \|\eta\|_{L_g^p(\mathbb{R}^+,X)}, \quad \forall \eta \in L_g^p(\mathbb{R}^+, X).$$

Demonstração. Da Desigualdade de Hölder, tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(s)\|\eta(s)\|_X ds &= \int_0^\infty g^{\frac{(p-1)}{p}}(s) g^{\frac{1}{p}}(s)\|\eta(s)\|_X ds \\ &\leq \left(\int_0^\infty g(s)ds\right)^{\frac{(p-1)}{p}} \|\eta\|_{L_g^p(\mathbb{R}^+,X)} \\ &\leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{\frac{(p-1)}{p}} \|\eta\|_{L_g^p(\mathbb{R}^+,X)}. \end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{I}_g$ está bem definida e vale

$$\|\mathcal{I}_g\|_X \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{\frac{(p-1)}{p}} \|\eta\|_{L_g^p(\mathbb{R}^+,X)}, \quad \forall \eta \in L_g^p(\mathbb{R}^+, X).$$

A linearidade de $\mathcal{I}_g$ é imediata. □

O Teorema 2.97 caracteriza o conceito de Convolução que será utilizado para a demosntraçao do Lema 2.98.

Teorema 2.97. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então para quase todo*

$x \in \mathbb{R}^N$, a função

$$\begin{array}{rcl} F:\mathbb{R}^N & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & F(y)=f(x-y)g(y) \end{array}$$

é integrável sobre $\mathbb{R}^N$. Define-se convolução de f com g por

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^N}F(y)dy=\int_{\mathbb{R}^N}f(x-y)g(y)dy.$$

Então, $f*g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|f*g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Demonstração. Ver [7], página 104, Teorema 4.15. □

Lema 2.98. *Se $\eta \in L^2_g(\mathbb{R}^+, X)$, com X espaço de Hilbert. Então a função ϕ_η dada por*

$$\phi_\eta(s)=\int_0^s e^{y-s}\eta(y)dy$$

pertence a $L^2_g(\mathbb{R}^+, X)$. Em particular,

$$\int_0^\infty g(s)\int_0^s e^{y-s}\eta(y)dyds < +\infty.$$

Demonstração. Seja $\eta \in L^2_g(\mathbb{R}^+, X)$. Observe que

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^\infty g(s)\|(\phi_\eta)_x(s)\|_2^2 ds & = & \displaystyle\int_0^\infty g(s)((\phi_\eta)_x(s),(\phi_\eta)_x(s))ds \\ & = & \displaystyle\int_0^\infty g(s)\left(\int_0^s e^{y-s}\eta_x(y)dy, \int_0^s e^{w-s}\eta_x(w)dw\right)ds \\ & = & \displaystyle\int_0^\infty g(s)\int_0^s e^{y-s}\int_0^s e^{w-s}(\eta_x(y),\eta_x(w))dwdyds \\ & \leq & \displaystyle\int_0^\infty g(s)\left(\int_0^s e^{y-s}\|\eta_x(y)\|_2dy\right)\left(\int_0^s e^{w-s}\|\eta_x(w)\|_2dw\right)ds. \end{array}$$

Denotando por

$$\varepsilon_1(s)=e^{-s} \text{ e } \varepsilon_2(s)=[g(s)]^{\frac{1}{2}}\|\eta_x(s)\|_2,$$

tem-se que $\varepsilon_1 \in L^1(\mathbb{R}^+),\ \varepsilon_2 \in L^2(\mathbb{R}^+)$ e $\varepsilon_1 * \varepsilon_2 \in L^2(\mathbb{R}^+)$. Ver Teorema 2.97, assim

$$(\varepsilon_1*\varepsilon_2)(s):=\int_0^s \varepsilon_1(y-s)\varepsilon_2(y).$$

Portanto, utilizando novamente o Teorema 2.97, obtém-se

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty g(s)\|(\phi_\eta)_x(s)\|_2^2 ds &\leq \int_0^\infty g(s)\left(\int_0^s e^{y-s}\|\eta_x(y)\|_2 dy\right)\left(\int_0^s e^{w-s}\|\eta_x(w)\|_2 dw\right) ds \\
&= \int_0^\infty (\varepsilon_1 * \varepsilon_2)^2(s) ds \\
&= \|\varepsilon_1 * \varepsilon_2\|_{2(\mathbb{R}^+)}^2 \\
&\leq \|\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^2 \|\varepsilon_2\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 \\
&= \underbrace{\left(\int_0^\infty e^{-s} ds\right)^2}_{=1} \left(\int_0^\infty g(s)\|\eta_x(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 ds\right) \\
&= \|\eta\|_{L_g^2(\mathbb{R}^+,X)}^2 < \infty.
\end{aligned}
$$

$\square$

3 SEMIGRUPOS LINEARES

A teoria de semigrupos de operadores lineares em espaços de Banach tem um papel importante no estudo de Equações Diferenciais. Historicamente, teve seu grande avanço a partir de 1948 com a demonstração do famoso Teorema de Hille-Yosida, ver por exemplo Pazy [38]. Decorrente deste, tem-se o principal resultado do presente capítulo, a saber, o Teorema de Lumer-Phillips. Ambos resultados serão apresentados posteriormente. Iniciaremos com conceitos e resultados preliminares da teoria de semigrupos lineares.

3.1 SEMIGRUPOS DE OPERADORES LIMITADOS

3.1.1 Motivação

Consideremos um problema de valor inicial da forma

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = A(u(t)), \ \ t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

em que u_0 é um elemento do espaço de Banach X e $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear.

Quando $X = \mathbb{R}$ e $A = a \in \mathbb{R}$, sabe-se da teoria em equações diferenciais ordinárias que a única solução do problema (3.1) é dada por

$$u(t) = u_0 e^{at}.$$

No caso em que $X = \mathbb{R}^n$, $n > 1$, e $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é uma matriz, ou seja, um operador (matricial) linear limitado, ainda assim pode-se determinar uma única solução para o problema (3.1), a saber, uma função (vetorial) da forma

$$u(t) = e^{At} u_0,$$

onde e^{At} pode (e deve) ser entendido como operador matricial da forma (2.2), também chamado de exponencial de matrizes.

Em ambos os casos acima descritos, lidamos com o problema (3.1) em espaços de dimensão finita. No entanto, como veremos a seguir, a teoria de semigrupos lineares (a qual também poderia ser simplesmente chamada de "exponencial de operadores") nos permitirá estender o estudo do problema (3.1) em espaços de Banach X com dimensão infinita.

3.1.2 Definições e Propriedades

Definição 3.1. *Diz-se que uma aplicação $S : [0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X se*

(i) $S(0) = I_X$;

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, *para todos* $t, s \in [0,\infty)$.
Além disso, diz-se que o semigrupo S é de classe C_0, ou é um C_0-semigrupo, se

(iii) $\lim_{t\to 0_+} \|S(t)x - x\|_X = 0,$ *para cada* $x \in X$.

Exemplo 1. Se $A \in \mathcal{L}(X)$, então $S(t) := e^{tA},\ t \geq 0$, definido em (2.2) é um C_0-semigrupo.

Proposição 3.2. *Se $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo, então a função $t \mapsto \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é limitada em intervalos limitados.*

Demonstração. Basta provar para intervalos da forma $[0,T]$, $T > 0$. Pelo Teorema 2.19 é suficiente provar que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|S(t)x\|_X < \infty, \quad \forall x \in X.$$

De (iii) na Definição 3.1, existe $\delta > 0$ tal que se $0 \leq t \leq \delta$ então

$$\|S(t)x - x\|_X \leq 1.$$

Consequentemente,

$$|\|S(t)x\|_X - \|x\|_X| \leq \|S(t)x - x\|_X \leq 1,$$

onde $\|S(t)x\|_X \leq 1 + \|x\|_X$, para todo $t \in [0,\delta]$. Isto prova que

$$\sup_{t\in[0,\delta]} \|S(t)x\|_X < \infty, \quad \forall x \in X.$$

Logo, pelo Teorema 2.19, existe $M \geq 1$ satisfazendo

$$\sup_{t\in[0,\delta]} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M.$$

Vamos provar que a limitação se estende a qualquer subintervalo $[0,t] \subseteq [0,T]$, mas com uma constante possivelmente diferente. Fixado $t \in [0,T]$, pode-se escrever $t = n\delta + r$, para algum $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq r < \delta$. Logo da Proposição 3.2 e da Definição 3.1 (ii), obtém-se

$$\begin{aligned}
\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|S(n\delta + r)\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&= \|S(\delta)^n S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq \|S(\delta)\|^n_{\mathcal{L}(X)} \|S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq M^n M.
\end{aligned}$$

$\square$

Observação 16. Se $\omega = \dfrac{t-r}{\delta t} ln(M)$, então $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$.

Corolário 3.3. *Se $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo e $t_0 \in \mathbb{R}_+$, então $\lim\limits_{t\to t_0} S(t)x = S(t_0)x, \ \ x \in X$.*

Demonstração. Vamos calcular os limites laterais $t \to t_0^+$ e $t \to t_0^-$. Se $h \geq 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \|S(t_0+h)x - S(t_0)x\|_X &= \|S(t_0)\left[S(h) - I_X\right]x\|_X \\ &\leq \|S(t_0)\|_{\mathcal{L}(X)}\|S(h)x - x\|_X \longrightarrow 0, \text{ quando } h \to 0. \end{aligned}$$

Se $h < 0$, então

$$\begin{aligned} \|S(t_0-h)x - S(t_0)x\|_X &= \|S(t_0-h)\left[I_X - S(h)\right]x\|_X \\ &\leq \|S(t_0-h)\|_{\mathcal{L}(X)}\|S(h)x - x\|_X \longrightarrow 0, \text{ quando } h \to 0, \end{aligned}$$

onde nos limites acima, uma parcela é limitada pela Proposição 3.2 e a outra tende a zero pela Definição 3.1. $\square$

Observação 17. (i) O Corolário 3.3 mostra que $S(t)x \in C(\mathbb{R}_+, X)$, justificando o nome de semigrupo de classe C_0 em $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$.

(ii) Na demonstração da Proposição 3.2 foi visto que, se $S(t)$ é um C_0-semigrupo, então existem números reais $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}, \ \ \forall t \geq 0.$$

A proposição a seguir refina ainda mais este resultado.

Proposição 3.4. *Seja $S(t)$ um semigrupo de classe C_0. Então,*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} = \inf_{t>0} \frac{\ln(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} := \omega_0,$$

com $-\infty \leq \omega_0 < \infty$. Além disso, para cada $\omega > \omega_0$, existe uma constante $M \geq 1$ tal que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}, \ \ \forall t \geq 0.$$

Demonstração. Ver em [38], página 4, Teorema 2.2. $\square$

Definição 3.5. *Quando $\omega = 0$, tem-se que $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$, para todo $t \geq 0$. Neste caso, diz-se que $S(t)$ é um semigrupo uniformemente limitado. Se, além disto, $M = 1$, $S(t)$ é dito um semigrupo de contrações.*

3.1.3 Gerador Infinitesimal de um C_0-semigrupo

Definição 3.6. *Seja $S(t)$ um C_0-semigrupo em X. O operador $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in X;\ \lim_{h \to 0} \left(\frac{S(h) - I_X}{h} \right) x \textit{ existe} \right\}$$

e

$$Ax := \lim_{h \to 0} \left(\frac{S(h) - I_X}{h} \right) x, \ \ x \in D(A),$$

é dito o gerador infinitesimal (g.i.) do semigrupo $S(t)$.

Observação 18. $D(A)$ é um subespaço vetorial de X e A é um operador linear.

Proposição 3.7. *Sejam $S(t)$ um C_0-semigrupo e A seu g.i. As seguintes propriedades são válidas:*

(i) Se $x \in D(A)$, então $S(t)x \in D(A)$ para todo $t \geq 0$ e

$$\frac{dS}{dt}(t)x = AS(t)x = S(t)Ax,\ \forall t \geq 0.$$

(ii) Se $x \in D(A)$, então

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\xi)x d\xi = \int_s^t S(\xi)Ax d\xi,\ 0 \leq s \leq t.$$

(iii) Se $x \in X$, então $\int_0^t S(\xi)x d\xi \in D(A)$ e

$$A\left(\int_0^t S(\xi)x d\xi \right) = S(t)x - x.$$

Demonstração. Ver [38], página 5, Teorema 2.4. □

Exemplo 2. Sejam $S(t)$ um C_0-semigrupo, A o seu g.i. e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então, $\tilde{S}(t) := e^{-\lambda t}S(t)$, $t \geq 0$, é um C_0-semigrupo com g.i. $\tilde{A} = A - \lambda I_X$.
É fácil ver que $\tilde{S}(t) := e^{-\lambda t}S(t)$ é um C_0-semigrupo de contrações, basta verificar as propriedades da Definição 3.1, e usando a Definição 3.6 mostra-se que o g.i. é $\tilde{A} = A - \lambda I_X$.

Proposição 3.8. *Sejam S um C_0-semigrupo e A seu $g.i.$. Então, $D(A)$ é denso em X e A é um operador linear fechado.*

Demonstração. Ver [38], página 6, Corolário 2.5. □

Observação 19. A Proposição 3.8 nos dá condições necessárias para que um operador A seja o $g.i.$ de algum semigrupo de classe C_0. A partir de agora será investigado condições suficientes para que um operador A seja $g.i.$ de um C_0-semigrupo. A importância desta caracterização se dá no item (i) da Proposição 3.7, uma vez que, se A for o g.i. de um C_0-semigrupo $S(t)$, então poderemos estudar problemas de valor inicial, tal conceito será abordado logo após o Teorema de Lumer-Phillips.

3.2 TEOREMA DE HILLE-YOSIDA

Teorema 3.9 (Hille-Yosida)**.** *Seja $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ um operador linear. Então, A é g.i. de um C_0-semigrupo se, e somente se, são válidas*

(i) A é fechado e $D(A)$ é denso em X;

(ii) existem números reais M e ω tais que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda > \omega$, tem-se $\lambda \in \rho(A)$ e

$$\|R(\lambda, A)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $\rho(A)$ e $R(\Lambda, A)$, estão definidos em 2.29. Neste caso,

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}, \ \ t > 0.$$

Demonstração. Ver [38], página 20, Teorema 5.2. □

O Teorema 3.9 nos dá condições necessárias e suficientes para a caracterização de um C_0-semigrupo, mas a verificação de suas hipóteses não são simples. Deste modo, serão apresentados na próxima seção alguns resultados preliminares para a verificação de um resultado muito importante para este trabalho, o qual decorre do Teorema de Hille-Yosida. Além disso, a verificação de suas hipóteses são bem mais simples como veremos.

3.3 TEOREMA DE LUMER-PHILLIPS

3.3.1 Teorema de Lumer-Phillips

Definição 3.10. *Escreve-se $A \in G(M, \omega)$ para exprimir que o operador linear A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $S(t)$ que satisfaz*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}, \ \ t \geq 0.$$

Observação 20. (i) No caso em que $\omega = 0$, tem-se que $A \in G(M, 0)$ e significa que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo limitado com

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \ \ t \geq 0.$$

(ii) No caso particular em que $M = 1$, e $\omega = 0$, então $A \in G(1, 0)$, significa que A é g.i. de um C_0-semigrupo de contrações, pois

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1, \;\; t \geq 0.$$

Proposição 3.11 (Hille-Yosida para Contrações)**.** *Um operador linear A é um $g.i.$ de um C_0-semigrupo de contrações $(A \in G(1, 0))$ se, e somente se,*

(i) A é um operador linear fechado e densamente definido, isto é, $\overline{D(A)} = A$.

(ii) Para todos $\lambda > 0$ e $\lambda \in \rho(A)$, tem-se

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração. Ver [38], página 8, Teorema 3.1. □

Proposição 3.12. *$A \in G(M, \omega)$ se, e somente se, $(A - \omega I_X) \in G(M, 0)$.*

Demonstração. A demonstração é consequência do Exemplo 2. □

Definição 3.13. *Uma aplicação dualidade, é qualquer aplicação $j : X \longrightarrow X'$ tal que para cada $x \in X$, tem-se $j(x) \in F_x$, onde*

$$F_x = \left\{x^* \in X'; \langle x^*, x\rangle_{X',X} = \|x^*\|_{X'}^2 = \|x\|_X^2\right\}.$$

Definição 3.14. *Um operador linear A é dito dissipativo relativamente à aplicação dualidade j, se*

$$Re\langle j(x), Ax\rangle_{X',X} \leq 0, \;\; \forall x \in D(A). \tag{3.2}$$

Se A é um operador dissipativo (relativamente à alguma aplicação dualidade) e, além disto, $Im(I_X - A) = X$, diz-se que A é m-dissipativo.

Lema 3.15. *Se A é dissipativo relativamente à alguma aplicação dualidade, então*

$$\|(\lambda I_X - A)x\| \geq Re\lambda\|x\|_X, \;\; \forall \lambda \in \mathbb{C}, \;\; \forall x \in D(A).$$

Demonstração. Ver [38], página 14, Teorema 4.2. □

Teorema 3.16. *Sejam H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear dissipativo. Se $Im(\lambda_0 I - A) = H$ para algum $\lambda_0 > 0$, então $Im(\lambda I - A) = H$ para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração. Ver [38], página 15, Teorema 4.5. □

Lema 3.17. *Seja $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ fechado e dissipativo relativamente à alguma aplicação dualidade. Então, $\rho(A) \cap (0, \infty)$ é aberto em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Ver [38], página 15. □

Teorema 3.18. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador dissipativo tal que $Im(I - A) = X$. Se X é um espaço reflexivo, então $\overline{D(A)} = X$.*

Demonstração. Ver [38], página 16, Teorema 4.6. □

Teorema 3.19 (Lumer-Phillips)**.** *Se A é um $g.i.$ de um C_0-semigrupo de contrações em espaços de Banach, então*

(i) A é dissipativo relativamente a qualquer aplicação dualidade;

(ii) $Im(\lambda I_X - A) = X$, para todo $\lambda > 0$.

Reciprocamente, se

(iii) $D(A)$ é denso em X;

(iv) A é dissipativo relativamente a alguma aplicação dualidade;

(v) $Im(\lambda_0 I_X - A) = X$, para algum $\lambda_0 > 0$,

então A é um $g.i.$ de um C_0-semigrupo de contrações.

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponha que $A \in G(1, 0)$. Logo, A é o g.i. de um C_0-semigrupo de contrações, ou seja,

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1, \ \ \forall t \geq 0.$$

Seja $j : X \longrightarrow X'$ uma aplicação dualidade e considere $x \in D(A)$ e $t \geq 0$. Então

$$\begin{aligned} Re\langle j(x), S(t)x - x\rangle_{X',X} &= Re\langle j(x), S(t)x\rangle_{X',X} - Re\langle j(x), x\rangle_{X',X} \\ &\leq |\langle j(x), S(t)x\rangle_{X',X}| - \|x\|_X^2 \\ &\leq \|j(x)\|_X \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|x\|_X - \|x\|_X^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Assim, se $t > 0$, então

$$Re \left\langle j(x), \frac{S(t)x - x}{t} \right\rangle_{X',X} \leq 0.$$

Tomando o limite $t \longrightarrow 0^+$ obtém-se

$$Re \left\langle j(x), Ax \right\rangle_{X',X} \leq 0,$$

o que prova o item (i).

Por outro lado, da Proposição 3.11 segue que $(0, \infty) \subseteq \rho(A)$. Resulta daí que $R(\lambda, A) = (\lambda I_X - A)^{-1}$ existe, é contínuo e pela Proposição 2.30

$$Im(\lambda I_X - A) = D(R(\lambda, A)) = X, \ \ \forall \lambda > 0,$$

o que prova o item (ii).

$(\Longleftarrow)$ Reciprocamente, seja $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ um operador linear densamente definido que satisfaz as propriedades (iv) e (v). Será mostrado que $A \in G(1,0)$, usando novamente a Proposição 3.11.

<u>*Parte 1:*</u> A é fechado. Com efeito, o item (iv) juntamente com o Lema 3.15 implicam

$$\|(\lambda I_X - A)x\|_X \geq \lambda \|x\|_X, \ \ \forall \lambda > 0, \ \forall x \in D(A).$$

Logo, $\{(\lambda I_X - A)\}_{\lambda > 0}$ é uma família de operadores injetivos. Pelo item (v), $Im(\lambda_0 I_X - A) = X$ para algum $\lambda_0 > 0$. Neste caso, $\lambda_0 I_X - A : D(A) \longrightarrow X$ é uma bijeção e, consequentemente, $(\lambda_0 I_X - A)^{-1}x \in D(A)$, para todo $x \in X$. Assim, novamente do Lema 3.15 obtém-se que

$$\|x\|_X = \|(\lambda_0 I_X - A)\underbrace{(\lambda_0 I_X - A)^{-1}x}_{y \in D(A)}\|_X \geq \lambda_0 \|(\lambda_0 I_X - A)^{-1}x\|_X,$$

ou ainda,

$$\|(\lambda_0 I_X - A)^{-1}x\|_X \leq \frac{1}{\lambda_0}\|x\|_X.$$

Por definição,

$$(\lambda_0 I_X - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X) \ \text{ e } \ \|(\lambda_0 I_X - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \lambda_0^{-1}.$$

Lembrando que $(\lambda_0 I_X - A)^{-1}$ toma valores em $D(A)$, considere então $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D(A)$ tal que $x_n \longrightarrow x$ em X e $Ax_n \longrightarrow y$ em X. Portanto,

$$-Ax_n \longrightarrow -y \ \text{ e } \ \lambda_0 x_n \longrightarrow \lambda_0 x,$$

então

$$(\lambda_0 I_X - A)x_n \longrightarrow \lambda_0 x - y,$$

implicando em

$$(\lambda_0 I_X - A)^{-1}(\lambda_0 I_X - A)x_n \longrightarrow (\lambda_0 I_X - A)^{-1}(\lambda_0 x - y).$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} x = \lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} (\lambda_0 I_X - A)^{-1}(\lambda_0 I_X - A)x_n \\ &= (\lambda_0 I_X - A)^{-1}(\lambda_0 x - y) \in D(A). \end{aligned}$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} (\lambda_0 I_X - A)x &= (\lambda_0 I_X - A)\left[(\lambda_0 I_X - A)^{-1}(\lambda_0 x - y)\right] \\ &= \lambda_0 x - y, \end{aligned}$$

onde $Ax = y$, provando que A é fechado.

<u>*Parte 2:*</u> Dado $\lambda > 0$, tem-se

$$\lambda \in \rho(A) \;\text{ e }\; \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(A)} \leq \lambda^{-1}.$$

De fato, considere o conjunto

$$\Lambda = (0, \infty) \cap \rho(A).$$

Pelo Lema 3.17 junto com o item (v), tem-se que Λ é um aberto não vazio de $(0, \infty)$. Será provado que Λ é fechado em $(0, \infty)$. Seja $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Lambda$ tal que $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ em $(0, \infty)$. Objetiva-se mostrar que $\lambda \in \rho(A)$. Como $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Lambda \subseteq \rho(A)$ e A é fechado (propriedade já provada na *Parte 1*), pela Proposição 2.30,

$$Im(\lambda_n I_X - A) = D(R(\lambda_n, A)) = X.$$

Por conseguinte, dado $y \in X$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in D(A)$ tal que

$$\lambda_n x_n - A x_n = y.$$

Sendo $\lambda_n > 0$, do Lema 3.15 vem que

$$\|x_n\|_X \leq \lambda_n^{-1} \|(\lambda_n I_X - A)x_n\|_X = \lambda_n^{-1} \|y\|_X.$$

Logo,

$$\|x_n\|_X \leq C(\|y\|_X), \;\; \forall n \in \mathbb{N},$$

visto que a sequência $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada (convergente).
Afirmação: $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em X. Do Lema 3.15, temos para $m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\lambda_m \|x_m - x_n\|_X &\leq \|(\lambda_m I_X - A)(x_m - x_n)\|_X \\
&= \|\lambda_m (x_m - x_n) - A(x_m - x_n)\|_X \\
&= \|\underbrace{\lambda_m x_m - A x_m}_{y} - \lambda_m x_n + \underbrace{A x_n - \lambda_n x_n}_{-y} + \lambda_n x_n\|_X \\
&= |\lambda_n - \lambda_m| \cdot \|x_n\|_X.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|x_m - x_n\|_X \leq \tilde{C}(\|y\|_X) \cdot |\lambda_m - \lambda_n| \longrightarrow 0.$$

Obtem-se, a partir do que foi provado, que existe $x \in X$ tal que

$$x_n \longrightarrow x \;\text{ em }\; X. \tag{3.3}$$

De (3.3) é óbvio que $\lambda_n x_n \longrightarrow \lambda x$, pois $\lambda_n \longrightarrow \lambda$. Isto implica que

$$Ax_n = \lambda_n x_n - y \longrightarrow \lambda x - y \text{ em } X.$$

Como A é fechado, então $x \in D(A)$ e $Ax = \lambda x - y$, ou seja $(\lambda I_X - A)x = y$. Fica, então provado que dado $y \in X$, existe $x \in D(A)$ tal que $(\lambda I_X - A)x = y$, isto é,

$$Im(\lambda I_X - A) = X.$$

Do Lema 3.15, segue que $(\lambda I_X - A)$ é injetor de $D(A)$ em X. Portanto, existe

$$(\lambda I_X - A)^{-1} : X \longrightarrow D(A) \subseteq X,$$

e para todo $x \in X$ vale

$$\|x\|_X = \|(\lambda I_X - A)(\lambda I_X - A)^{-1}x\|_X \geq \lambda \|(\lambda I_X - A)^{-1}x\|_X,$$

ou ainda,

$$\|(\lambda I_X - A)^{-1}x\|_X \leq \lambda^{-1}\|x\|_X. \tag{3.4}$$

Isto prova que $\lambda \in \rho(A)$ e, consequentemente, que Λ é um subconjunto fechado de $(0, \infty)$. Da conexidade de $(0, \infty)$, obtem-se que $\Lambda = (0, \infty)$, provando que $(0, \infty) \subseteq \rho(A)$. Que $\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \lambda^{-1}$ é consequência imediata de (3.4). Pela Proposição 3.11, $A \in G(1, 0)$, como queria-se demonstrar. $\square$

Observação 21. As aplicações do próximo capítulo serão realizadas em espaços de Hilbert

$$(H, (.,.)_H, \|.\|_H).$$

Deste modo, no próximo capítulo utiliza-se a aplicação dualidade $j(x) = x$. Neste caso, (3.2) resume-se a $Re(Ax, x)_H \leq 0, \ \forall x \in D(A)$.

O Teorema 3.20, é um resultado muito importante e bastante utilizado no Capítulo 4. Esse resultado é consequência do Teorema 3.19 com a dualidade definida na Observação 21.

Teorema 3.20. *(Lumer-Phillips1) Se A é um $g.i.$ de um C_0-semigrupo de contrações em espaços de Hilbert $(H, (.,.)_H, \|.\|_H)$, então*

(i) A é dissipativo, isto é, $Re(Ax, x)_H \leq 0, \ \forall x \in D(A)$.

(ii) $Im(\lambda I_H - A) = H$, para todo $\lambda > 0$.

Reciprocamente, se

(iii) $D(A)$ *é denso em* H*;*

(iv) A *é dissipativo;*

(v) $Im(\lambda_0 I_H - A) = H$*, para algum* $\lambda_0 > 0$*,*

então A *é um* $g.i.$ *de um* C_0*-semigrupo de contrações.*

Demonstração. A demontração segue do Teorema 3.19. □

Corolário 3.21. *Seja* A *um operador linear dissipativo com domínio* $D(A)$ *denso em um espaço de Hilbert* H*. Se* $0 \in \rho(A)$*, então* A *é um gerador infinitesimal de um* C_0*-semigrupo de contrações em* H*.*

Demonstração. Ver [35], página 88, Teorema 2.12.3. □

O Corolário 3.21, consequência do Teorema 3.20, é também um resultado muito utilizado no Capítulo 4. Além disso, de posse de toda a teoria descrita anteriormente, estamos aptos a considerar um resultado de existência e unicidade para problemas de valores iniciais abstratos da forma (3.1). Em outras palavras, a teoria de semigrupos nos permite estudar problemas de valor inicial para equações de evolução abstratas do tipo

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t), \ \ t > 0, \\ u(0) = x, \end{cases} \tag{3.5}$$

onde A é um operador linear com domínio $D(A) \subset X$, sendo X um espaço de Banach (ou Hilbert) e $u : \mathbb{R}^+ \to X$.

Definição 3.22. *A grosso modo, um sistema de equações diferenciais é chamado autônomo, quando suas equações não dependem explicitamente da variável temporal* t*. E diz-se que o mesmo é não autônomo em caso contrário.*

Observe que no caso do sistema (3.5) temos um problema autônomo, visto que $A = A(u(t))$ não depende explicitamente da variável temporal t. Por outro lado, se tivéssemos $A = A(t, u(t))$, então teríamos um problema não autônomo, cuja resolução via teoria de semigrupo dependeria da relação de A com respeito a variável temporal.

Definição 3.23. *Diz-se que* $u : [0, \infty) \to X$ *é uma solução (ou solução clássica) para o problema* (3.5) *se* $u(t)$ *é contínua para todo* $t \in [0, \infty)$*,* $u(t) \in D(A)$ *para todo* $t \in (0, \infty)$*,* $u(t)$ *é continuamente diferenciável e satisfaz* (3.5) *quase sempre em* $[0, \infty)$*. No caso em que* $x \in X$*, a função* $u \in C([0, \infty), X)$ *dada por* $u(t) = S(t)x$*,* $t \geq 0$*, é chamada de solução generalizada ("mild solution") de* (3.5)*.*

No âmbito de determinar soluções (clássica e generalizada) para PVIs do tipo (3.5), o próximo resultado mostra a importância em caracterizar um $g.i.$ A de um C_0-semigrupo de contrações $S(t)$.

Teorema 3.24. *Considere o problema de Cauchy abstrato*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = A(u(t)), \;\; t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Se A é o g.i. de um C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ em um espaço de Banach X, então para cada $u_0 \in D(A)$ ($u_0 \in X$), existe uma única função na classe

$$u \in C([0,\infty); D(A)) \cap C^1((0,\infty); X) \; \big(u \in C([0,\infty), X)\big)$$

que é solução clássica (generalizada) do PVI (3.6)*, dada por $u(t) = S(t)u_0$. Além disso, se $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ for um C_0-semigrupo de contrações, tem-se que*

$$\|u(t)\|_X \leq \|u_0\|_X \;\; e \;\; \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_X \leq \|Au_0\|_X.$$

Demonstração. Ver [7], página 185, Teorema 7.4. □

Observação 22. O problema (3.6) também pode ser abordado sob o ponto de vista de operadores maximais monótonos, ver por exemplo [7, Capítulo 8] e/ou [12, Capítulo 3]. Neste caso, o problema (3.6) é abordado na forma

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + B(u(t)) = 0, \;\; t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

com $B := -A$. Portanto, as propriedades obtidas para o operador A se refletem para $-B$ e vice-versa.

4 APLICAÇÕES EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

Neste Capítulo, será utilizada a teoria estudada no Capítulo 3, juntamente com as ferramentas apresentadas no Capítulo 2, para resolver diversos problemas de valores inicial e de fronteira envolvendo equações diferenciais lineares da física-matemática. Em cada caso, será apresentada uma breve dedução do modelo e, em seguida, o resultado de existência e unicidade via semigrupos lineares.

4.1 Equação da Transferência de Calor

4.1.1 Dedução da Equação da Transferência de Calor

De acordo com alguns textos encontrados na literatura, na metade do século XVIII os matemáticos D'Alembert, Euler, Bernoulli e Lagrange, motivados pelos estudos da teoria de vibração de cordas, desenvolveram a matemática da época aproximando-se do que hoje é conhecido como série de Fourier. Utilizando a teoria de vibrações de cordas, em 1807 Fourier submeteu uma trabalho a Academia Francesa, onde formalizou e solucionou o problema de condução de calor. Atualmente, a equação do calor (segundo a Lei Constitutiva de Fourier) é um modelo matemático que representa a difusão do calor em sólidos sob certas considerações, a qual tem sido extremamente estudada por físicos e matemáticos em aspectos teóricos, computacionais e aplicados. O modelo consiste em uma equação de derivadas parciais que também é chamada de equação de difusão térmica. Para dedução do modelo, seguiremos inicialmente as notações e hipóteses assumidas em Figueiredo [19, Capítulo 1], por comodidade ao leitor no que diz respeito ao fácil acesso em referências em português.

Considere uma barra feita de um material condutor uniforme de calor, de comprimento $l > 0$, cuja seção transversal possui área A e seção longitudinal de comprimento l com as laterais isoladas termicamente conforme Figura 4.1.

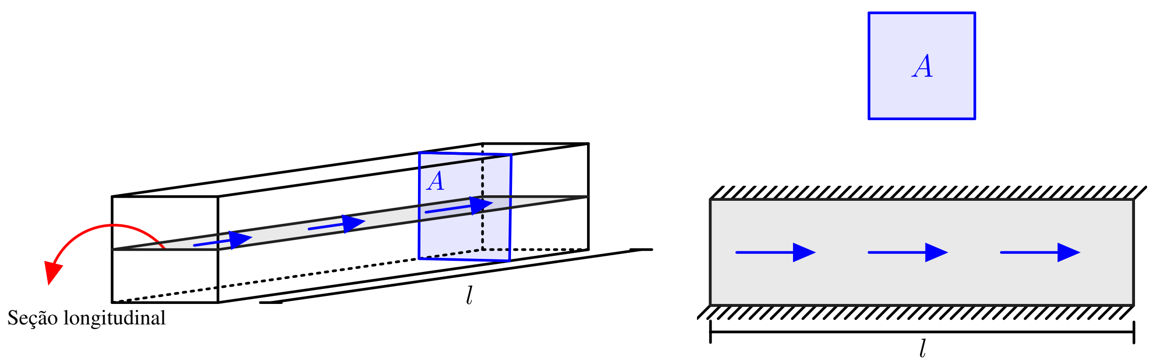

Figura 4.1: Barra condutora de calor, seção transversal e seção longitudinal

Fonte: Autor

Suponha que a superfície lateral da barra esteja isolada termicamente (como na seção longitudinal) de modo a não permitir, através dela, transferência de calor com o meio ambiente. A uniformidade do material e o isolamento térmico lateral implicam que o fluxo de calor se dê somente na direção longitudinal e, assim, possuímos um problema de condução de calor em uma dimensão apenas. A temperatura de um ponto de abscissa x no tempo t será representada por $u := u(x,t)$, enquanto que o fluxo de calor é usualmente denotado por $q := q(x,t)$.

De acordo com a Lei Constitutiva de Fourier, ver por exemplo [19], sabe-se que a taxa de fluxo de calor em uma superfície é proporcional ao gradiente (negativo) da temperatura. Em termos matemáticos, temos

$$q(x,t) = -Aku_x(x,t), \tag{4.1}$$

onde k é a condutibilidade térmica do material. Fixando um elemento da barra x_0 e $x_0+\delta$, a quantidade de calor q que entra no intervalo $[t_0, t_0+\tau]$ pode ser representada por

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0,t)dt - \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0+\delta,t)dt,$$

ou seja, de (4.1) e do Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos que

$$\begin{aligned} q &= \int_{t_0}^{t_0+\tau} k[u_x(x_0+\delta,t) - u_x(x_0,t)]A\,dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0+\tau}\int_{x_0}^{x_0+\delta} ku_{xx}(x,t)dxA\,dt. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Por outro lado, de acordo com [19], sabe-se que o fluxo de calor q também pode ser representado como

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\tau}\int_{x_0}^{x_0+\delta} c\rho u_t(x,t)dxA\,dt, \tag{4.3}$$

onde c e ρ representam o calor específico e a densidade do material, respectivamente. Logo, combinando (4.2) e (4.3), obtém-se

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau}\int_{x_0}^{x_0+\delta} [c\rho u_t(x,t) - ku_{xx}(x,t)]dxdt = 0,$$

para todo $t_0 > 0$, todo $0 < x_0 < l$ e todos $\tau, \delta > 0$. Desta forma, pelo Lema Fundamental do Cálculo das Variações, ver por exemplo [21], deduz-se que

$$u_t - Ku_{xx} = 0, \tag{4.4}$$

onde $K = k/c\rho > 0$ representa a difusibilidade térmica. A equação (4.4) é considerada no domínio $(0,l)\times(0,\infty)$ e como assume-se que nas extremidades 0 e l da barra não variação da temperatura u, então chegamos à seguinte condição de fronteira

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{4.5}$$

a qual é chamada também de condição de fronteira de Dirichlet. Com repeito à variável temporal, a equação do calor (4.4) possui uma derivada e, portanto, para eliminarmos (a grosso modo) a constante de integração basta que seja considerada uma condição inicial, a qual é fornecida no tempo $t = 0$ e deve ser previamente conhecida. Assim sendo, denotamos a condição inicial por

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in (0, l). \tag{4.6}$$

O problema (4.4)-(4.6) é também chamado de Problema de Valor Inicial e de Fronteira (PVIF). No que segue, apresentaremos um resultado de existência e unicidade de solução para o PVIF (4.4)-(4.6) usando a teoria de semigrupos e espaços de Sobolev apresentadas nos capítulos 2 e 3. Como a constante $K > 0$ não influencia nos cálculos, assumiremos por simplicidade (e para simplificar a notação) que $K = 1$, ou seja, consideraremos a equação do calor (4.4) normalizada.

4.1.2 Existência e Unicidade

Mediante ao exposto na dedução do modelo da equação do calor, abordaremos o seguinte problema:

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad (0,l) \times (0, \infty), \tag{4.7}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \ \ x \in (0, l), \tag{4.8}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \ \ t \geq 0. \tag{4.9}$$

No que segue, mostraremos que o problema (4.7)-(4.9) possui uma única solução utilizando teoria de semigrupos lineares. Para isso, denotemos inicialmente o operador diferencial $A_1 = \partial_{xx}$ e a função vetorial $U(t) = u(\cdot, t)$. Então, podemos reescrever o problema $(4.7) - (4.9)$ como o seguinte problema de Cauchy abstrato:

$$\begin{cases} U_t = A_1 U, \ \ t > 0, \\ U(0) = U_0 := u_0. \end{cases} \tag{4.10}$$

Para contemplar a condição de fronteira (4.9) dentro do problema abstrato (4.10), definiremos os seguintes espaços de Hilbert:

- $\mathcal{H}_1 = L^2(0, l)$ com produto interno e norma dados por

  $$(U, \hat{U})_{\mathcal{H}_1} = (u, \hat{u})_2 \quad \text{e} \quad \|U\|^2_{\mathcal{H}_1} = \|u\|^2_2 = (u, u)_2,$$

  para todos $U = u$, $\hat{U} = \hat{u} \in \mathcal{H}_1$, onde $(\cdot, \cdot)_2$ e $\| \cdot \|_2$ designam o produto interno e a norma em $L^2(0, l)$, definidos no Teorema 2.53 do Capítulo 2. Por comodidade, omitiremos o subíndice 2 e denotaremos o produto interno em $L^2(0,l)$ apenas por $(\cdot,\cdot)$. No caso da norma continuaremos usando a notação $\|\cdot\|_2$.

- Neste caso, pode-se concluir que o domínio do operador diferencial A_1 é dado por

$$D(A_1) = H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l).$$

Com as notações acima, temos o seguinte resultado de existência e unicidade para o problema (4.10) e, consequentemente, para o PVIF (4.7)-(4.9).

Teorema 4.1 (Existência e Unicidade)**.** *Se* $U_0 \in D(A_1)$*, então o problema* (4.10) *possui uma única solução*

$$U \in C([0,\infty), D(A_1)) \cap C^1([0,\infty), \mathcal{H}_1),$$

dada por $U(t) = e^{A_1 t},\ t \geq 0.$

Em outras palavras, se $u_0 \in H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)$*, então o sistema* (4.7)-(4.9)*, possui uma única solução* u *na classe*

$$u \in C([0,\infty), H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)) \cap C^1([0,\infty), L^2(0,l)).$$

Demonstração. Face ao Teorema 3.24, basta mostrar que o operador $A_1 = \partial_{xx}$ é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em $\mathcal{H}_1$. Neste caso, pelo Corolário 3.21, é suficiente mostrar que:

(i) $\overline{D(A_1)} = \mathcal{H}_1$;

(ii) A_1 é dissipativo em $\mathcal{H}_1$, ou seja, $Re(A_1U,U)_{\mathcal{H}_1} \leq 0$;

(iii) $0 \in \rho(A_1)$, onde $\rho(A_1)$ denota o resolvente de A_1, ver na Definição 2.29, isto é, $(-A_1)^{-1}$ existe e é limitado.

A verificação do o item (i) segue da teoria de espaços de Sobolev, ver Lema 2.82 e Lema 2.93. No que segue verificaremos os itens (ii) e (iii).
(ii) Dado $U \in D(A_1)$, então usando integração por partes e (4.9), obtém-se

$$(A_1U,U)_{\mathcal{H}_1} = (u_{xx},u) = \int_0^l u_{xx}\overline{u}dx = -\int_0^l u_x\overline{u}_x dx = -\|u_x\|_2^2.$$

Logo,

$$Re(A_1U,U)_{\mathcal{H}_1} = -\|u_x\|_2^2 \leq 0.$$

Portanto, A_1 é dissipativo em $\mathcal{H}_1$.
(iii) Primeiro será mostrado que $-A_1$ é invertível. Considere a equação $-A_1U = f$, isto é,

$$-u_{xx} = f \quad \text{em} \quad L^2(0,l). \tag{4.11}$$

Afirmação: Existe um único $u \in H_0^1(0,l)$, satisfazendo a seguinte equação variacional

$$\int_0^l u_x(x)\overline{v_x(x)}dx = -\int_0^l f(x)\overline{v(x)}dx, \ \ \forall v \in H_0^1(0,l). \tag{4.12}$$

De fato, defina

$$\begin{array}{rcl} a : H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (u,v) & \longmapsto & a(u,v) = (u_x, v_x) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \Phi : H_0^1(0,L) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ u & \longmapsto & \Phi(u) = (f,u). \end{array}$$

Note que a é uma forma sesquilinear contínua e coerciva. Com efeito, pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Poincaré (ver Teorema 2.83)

$$|a(u,v)| = |(u_x,v_x)| \le \|u_x\|_2\|v_x\|_2 = \|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}, \ \ \forall u,v \in H_0^1(0,l)$$

e

$$a(u,u) = (u_x,u_x) = \|u_x\|_2^2 = \|u\|_{H_0^1}^2, \ \ \forall u \in H_0^1(0,l).$$

Além disso, é fácil ver que Φ é antilinear de acordo com a Definição 2.11, e ainda, da desigualdade de Poincaré obtém-se

$$|\Phi(u)| = |(f,u)| \le \|f\|_2\|u\|_2 \le C\|u\|_{H_0^1}, \ \ \forall u \in H_0^1(0,l),$$

onde $C = \|f\|_2$. Deste modo, pelo Teorema de Lax-Milgram (ver Teorema 2.28), existe um único $u \in H_0^1(0,l)$ tal que

$$a(u,v) = \Phi(v), \ \ \forall v \in H_0^1(0,l),$$

isto é, $u \in H_0^1(0,l)$ satisfaz (4.12). Em particular, a equação (4.12) é satisfeita para toda $v \in C_0^1(0,l)$, ou seja,

$$\int_0^l u_x(x)\overline{v_x(x)}dx = -\int_0^l f(x)\overline{v(x)}dx, \ \ \forall v \in C_0^1(0,l). \tag{4.13}$$

Como $u_x, f \in L^2(0,l)$, e vale (4.13), segue da definição de derivada fraca que $u_x \in H^1(0,l)$. Logo $u \in H^2(0,l)$ e

$$u_{xx} = -f \in L^2(0,l), \tag{4.14}$$

mostrando que (4.11) possui uma única solução $u \in H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)$, como desejado. Logo

$-A_1$ é invertível.
Resta provar que $(-A_1)^{-1}$ é limitado. Para isso, considere $u \in D(A_1)$ a única solução de $-A_1U = F \in \mathcal{H}_1$. Então, usando que $H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l) \hookrightarrow L^2(0,l)$, obtém-se

$$\|(-A_1)^{-1}F\|_2 = \|U\|_2 \leq C_1\|A_1U\|_2 = C_1\|F\|_2.$$

Isto conclui a prova do item (iii). Portanto, fica provado o Teorema 4.1. $\square$

4.2 Equação da Onda com Dissipação Friccional (fraca)

4.2.1 Dedução da Equação da Onda

De acordo com a literatura, os anos entre 1687 e 1788 constitui um período de grande avanço no desenvolvimento matemático e em aplicações da mecânica. No entanto, foi apenas no início da década de 1750 que as equações analíticas que expressam o princípio geral de impulso linear (segunda Lei de Newton) apareceu pela primeira vez na literatura, no estudo de Euler de análise de corpo rígido. Foram as pesquisas de Euler combinadas com trabalhos em paralelo de D'Alembert e Clairaut, que lançaram as bases para a teoria clássica que hoje temos acesso. A evolução da dinâmica e a teoria da vibração de 1687 a 1742 por John T. Cannon e Sigalia Dostrovsky constituem grandes contribuições seguidas do Princípio de Newton e precedendo os estudos de Euler e D'Alembert. Esses autores acompanharam e desenvolveram pesquisas em uma variedade de problemas envolvendo pequenas vibrações. Dentre eles, as vibrações de cordas, surgindo o que conhecemos atualmente como *Equação da Onda*.

A equação da onda é uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem que descreve a propagação das ondas, tais como ondas sonoras, luminosas ou aquáticas. Existem atualmente inúmeras formas de apresentar o modelo de ondas, dependendo do contexto em que os autores consideram. Nesse sentido, apresentaremos o modelo para equação de ondas com dissipação friccional (fraca) sobre três abordagens diferentes, as quais levam essencialmente ao mesmo problema normalizado. Na primeira abordagem faremos uma dedução mais detalhada e, nas demais, daremos apenas uma breve ideia e/ou comentário sobre o modelo.
Abordagem 1. Nessa primeira dedução do modelo de ondas, usaremos as mesmas notações e considerações físicas apresentadas, por exemplo, em Fox-MacDonald [20]. Iniciamos considerando uma corda elástica de comprimento l sob oscilações de pequena amplitude e desconsiderando, a princípio, a dissipação de energia (amortecimento).

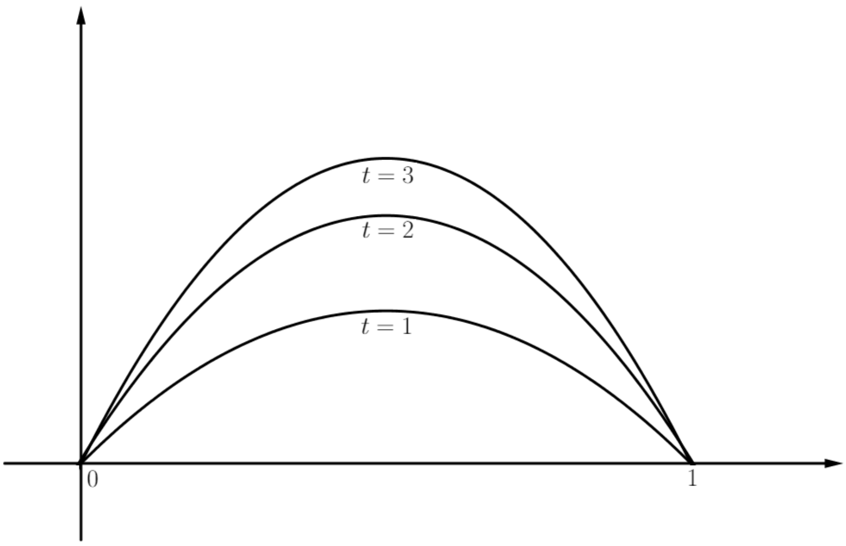

Figura 4.2: Representação geométrica da oscilação de uma corda de comprimento $l = 1$.
Fonte: Autor

Representaremos por $u = u(x,t)$ o deslocamento vertical dos pontos da corda na posição $x \in (0,l)$ e instante $t > 0$. Assume-se que a corda esteja fixada nas extremidades $x \in \{0,l\}$ e que no instante inicial $t = 0$ a corda esteja em repouso, sendo colocada em movimento a partir do instante inicial sob pequenas oscilações sem perturbação. A Figura 4.3 representa as forças agindo num elemento de comprimento Δx, entre x e $x + \Delta x$.

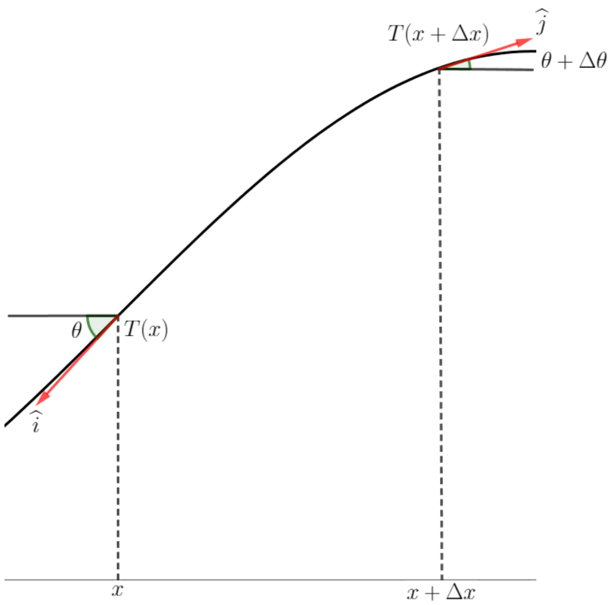

Figura 4.3: Oscilação da Corda
Fonte: Autor

Considerando oscilações de pequena amplitude, de modo que cada ponto da corda mova-se somente na vertical, tem-se que u representa, de fato, o deslocamento vertical da corda na posição x e instante t, como já mencionado anteriormente. Considere também $T = T(x,t)$

a tensão (força) da corda e $\rho = \rho(x,t)$ a massa da corda por unidade de comprimento, ambos na posição x e instante t. Denota-se ainda $\hat{\imath} = (1,0)$, $\hat{\jmath} = (0,1)$, θ o ângulo de deslocamento da corda e $\overline{x} \in [x, x+\Delta x]$. De acordo com a segunda Lei de Newton, ver [20], temos as seguintes identidades:

- Na direção horizontal, como não há movimento da corda, então

$$T(x+\Delta x,t)\cos(\theta,\Delta\theta)\hat{\imath} + T(x,t)\cos\theta(-\hat{\imath}) = 0.$$

- Na direção vertical, tem-se

$$T(x+\Delta x,t)\sin(\theta,\Delta\theta)\hat{\jmath} + T(x,t)\sin\theta(-\hat{\jmath}) = \rho(\overline{x},t)\ \Delta x\ u_{tt}(\overline{x},t)\hat{\jmath}.$$

- As componentes de tensão horizontal e vertical são dadas, respectivamente, por

$$H(x,t) = T(x,t)\cos\theta \quad \text{e} \quad V(x,t) = T(x,t)\sin\theta.$$

Assim, destas relações, deduzimos a identidade

$$\rho(\overline{x},t)u_{tt}(\overline{x},t) \ = \ \frac{V(x+\Delta x,t) - V(x,t)}{\Delta x}. \tag{4.15}$$

Tomando o limite $\Delta x \to 0$ em (4.15), chegamos a seguinte Equação de Momento, que relaciona a aceleração e o gradiente de tensão vertical

$$\rho(x,t)u_{tt}(x,t) \ = \ V_x(x,t). \tag{4.16}$$

Também deduzimos das relações acima a seguinte igualdade de deformação

$$V(x,t) = H(x,t)\tan\theta = H(x,t)u_x(x,t).$$

Além disso, quando a corda oscila com pequenas amplitudes, podemos considerar $H(x,t) = H > 0$ constante e, com isto, obtém-se a seguinte Lei de Tensão-Deformação

$$V(x,t) = Hu_x(x,t). \tag{4.17}$$

Logo, substituindo (4.17) em (4.16) e considerando, por simplicidade, massa constante $\rho(x,t) = \rho > 0$, obtemos a seguinte Equação da Onda unidimensional oscilando em pequenas amplitudes

$$\rho u_{tt}(x,t) = Hu_{xx}(x,t),$$

ou ainda,

$$u_{tt}(x,t) - \alpha^2 u_{xx}(x,t) = 0, \tag{4.18}$$

a qual é considerada equação da onda sem dissipação e com peso (massa constante) desprezível em relação ao comprimento da corda, cuja raiz da tensão horizontal sobre a densidade linear $\alpha = \sqrt{\frac{H}{\rho}} > 0$ representa a velocidade de propagação de onda na corda.

A dedução acima para equação da onda (4.18) não leva em consideração efeitos dissipativos do meio externo, como por exemplo a resistência do ar. Nesse sentido, seguindo as notações e considerações físicas como em [19], quando a corda está sujeita a uma força exterior podendo variar em x e t, a equação da onda torna-se

$$u_{tt}(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t) + F_e, \tag{4.19}$$

onde F_e representa uma força externa adicional aplicada à corda. Neste trabalho, assim como em [19], vamos supor que a corda se encontra imersa em um fluido (neste caso o ar), o qual impõe uma resistência de amortecimento ao movimento da corda. Logo, vamos admitir que a resistência do ar representa uma (e será apenas esta) componente da força externa F_e, causando um efeito dissipativo (no movimento da corda) que está relacionado com a velocidade de deslocamento. Em termos matemáticos, temos

$$F_e = -bu_t(x,t), \tag{4.20}$$

onde $b > 0$ é uma constante dependendo do material que compõe a corda e o sinal negativo é devido à força de resistência atuar no sentido contrário ao movimento. Substituindo (4.20) em (4.19), obtemos a seguinte equação da onda com dissipação friccional

$$u_{tt}(x,t) - \alpha^2 u_{xx}(x,t) + bu_t(x,t) = 0. \tag{4.21}$$

A equação (4.21) será o objeto de estudo deste capítulo, sendo considerada no domínio $(0,l) \times (0,\infty)$. O termo bu_t é chamado de *dissipação friccional (ou fraca)*, pois representa um termo dissipativo de fricção no sistema. Mais precisamente, o mesmo causa uma dissipação de energia fazendo com que o sistema se estabilize de forma exponencial ao longo do tempo. No que segue, veremos mais duas maneiras de se considerar a equação (4.21).

Abordagem 2. Nesta segunda abordagem, veremos que a equação da onda com dissipação fraca (4.21) pode ser obtida pela combinação da equação de fluxo de calor com a lei constitutiva de Cattaneo, em vez da lei de Fourier (4.1). Com efeito, assumindo que $u := u(x,t)$ representa a diferença de temperatura e $q := q(x,t)$ o fluxo de calor numa barra, então é conhecido que a equação (normalizada) que modela a propagação de calor, ver por exemplo [14, 18], pode ser escrita como

$$u_t + q_x = 0. \tag{4.22}$$

Além disso, de acordo com a Lei Constitutiva de Cattaneo, conforme a referência [9], sabemos que a relação entre o fluxo de calor e gradiente da temperatura é dada pela seguinte equação

$$\tau q_t + k_0 q + k u_x = 0, \tag{4.23}$$

onde $\tau, k_0, k > 0$ são parâmetros positivos dependendo do material da barra (corda), sendo $\tau > 0$ o fator que descreve o tempo de retardo na resposta do fluxo de calor ao gradiente de temperatura.

Vale a pena observar que se $\tau = 0$, então a identidade (4.23) se torna, em particular, o caso clássico da lei constitutiva de Fourier dada em (4.1) com $A = \frac{1}{k_0}$ e, neste caso, a substituição em (4.22) levaria novamente à equação do calor (4.4) com $K = \frac{k}{k_0}$. Retornando ao caso $\tau > 0$, tem-se de (4.23) que

$$q_x = -\frac{\tau}{k_0} q_{tx} - \frac{k}{k_0} u_{xx}.$$

Além disso, de (4.22) segue que $q_{tx} = -u_{tt}$, de onde obtemos

$$q_x = \frac{\tau}{k_0} u_{tt} - \frac{k}{k_0} u_{xx}. \tag{4.24}$$

Substituindo (4.24) em (4.22) chegamos à seguinte equação

$$u_t = -\frac{\tau}{k_0} u_{tt} + \frac{k}{k_0} u_{xx},$$

ou ainda,

$$\tau u_{tt} - k u_{xx} + k_0 u_t = 0. \tag{4.25}$$

Denotando por $\alpha^2 = \frac{k}{\tau}$ e $b = \frac{k_0}{\tau}$, então observe que a equação (4.25) representa exatamente a equação da onda com dissipação friccional (4.21).

Abordagem 3. Uma terceira maneira de enxergar a equação (4.21) é por meio da Equação do Telégrafo, a qual surge em problemas de telecomunicação. Nesse caso, como podemos ver em Evans [16], por exemplo, a equação unidimensional do telégrafo é dada por

$$u_{tt} - u_{xx} + d u_t = 0, \tag{4.26}$$

a qual representa exatamente a equação (4.21) com $\alpha^2 = 1$ e $b = d > 0$ uma constante positiva. Para o leitor interessado em mais detalhes sobre a dedução da equação telégrafo (4.26), recomendamos o livro [16] e sua ampla lista de referências.

Após as três abordagens anteriores para equação da onda com dissipação friccional (4.21) (ou (4.25) ou ainda (4.26)), na próxima subseção estudaremos a existência e unicidade de solução para a mesma no domínio $(0,l) \times (0,\infty)$. Para tanto, é necessário introduzirmos as condições iniciais e de fronteira como segue. Na dedução de (4.21) assumimos que as extremidades da corda permanecem fixadas, ou seja, não há movimento (vibração) quando $x \in \{0,l\}$. Neste caso, consideramos a condição de Dirichlet na fronteira

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t \geq 0. \tag{4.27}$$

Além disso, na variável temporal, a equação da onda (4.21) possui derivadas de segunda ordem e, sendo assim, precisamos (a grosso modo) considerar duas condições iniciais, as quais serão fornecidas no tempo $t = 0$. Denotamos essas condições iniciais por

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),\ \ x \in (0,l). \tag{4.28}$$

A seguir, na próxima subseção, vamos mostrar um resultado de existência e unicidade de solução para o PVIF (4.26)-(4.28) usando novamente a teoria de semigrupos e espaços de Sobolev apresentadas nos capítulos 2 e 3. Assumiremos por simplicidade que $d = 1$, visto que a mesma não exerce diferença nos cálculos efetuados, ou seja, estudaremos a equação normalizada.

4.2.2 Existência e Unicidade

Considere o seguinte Problema de Valor Inicial e de Fronteira

$$u_{tt} - u_{xx} + u_t = 0 \quad \text{em} \quad (0,l) \times (0,\infty), \tag{4.29}$$

$$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x),\ \ x \in (0,l), \tag{4.30}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ \ t \geq 0. \tag{4.31}$$

Mostraremos que o problema (4.29)-(4.31) possui uma única solução utilizando teoria de semigrupos lineares. Para isso, denotamos $v = u_t$ e $U = (u,v)^T$. Assim,

$$U_t = \begin{bmatrix} v \\ u_{xx} - v \end{bmatrix} := A_2 U \tag{4.32}$$

e

$$U(0) = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} := U_0.$$

Logo, é possível reescrever (4.29)-(4.31) no seguinte problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} U_t = A_2 U,\ \ t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{4.33}$$

onde o operador A_2 é definido em (4.32). Para contemplar a condição de fronteira (4.31), definiremos os seguintes espaços de Hilbert:

- $\mathcal{H}_2 = H_0^1(0,l) \times L^2(0,l)$ com produto interno e norma dados por

$$(U, \hat{U})_{\mathcal{H}_2} = (u_x, \hat{u}_x) + (v, \hat{v}) \quad \text{e} \quad \|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \|u_x\|_2^2 + \|v\|_2^2,$$

para todos $U = (u,v)^T$, $\hat{U} = (\hat{u}, \hat{v})^T \in \mathcal{H}_2$.

- O domínio do operador diferencial A_2 é dado por

$$D(A_2) = (H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)) \times H_0^1(0,l).$$

Com estas notações, temos o seguinte resultado de existência e unicidade para o problema (4.33) e, consequentemente, para o PVIF (4.29)-(4.31), conforme segue.

Teorema 4.2 (Existência e Unicidade)**.** *Se $U_0 \in D(A_2)$, então o problema* (4.33) *possui uma única solução*

$$U \in C([0,\infty), D(A_2)) \cap C^1([0,\infty), \mathcal{H}_2),$$

dada por $U(t) = e^{A_2 t} U_0, \;\; \forall t \geq 0$.

Noutras palavras, se $u_0 \in H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)$ e $u_1 \in H_0^1(0,l)$, então o sistema (4.29)-(4.31) *possui uma única solução u na classe*

$$u \in C([0,\infty), H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)) \cap C^1([0,\infty), H_0^1(0,l)) \cap C^2([0,\infty), L^2(0,l)).$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.24, basta mostrar que o operador A_2 definido em (4.32) é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em $\mathcal{H}_2$. Neste caso, pelo Teorema de Lumer-Phillips (ver Teorema 3.20), é suficiente mostrar que:

(i) $\overline{D(A_2)} = \mathcal{H}_2$;

(ii) A_2 é dissipativo em $\mathcal{H}_2$, ou seja, $Re(A_2 U, U)_{\mathcal{H}_2} \leq 0$;

(iii) $I - A_2 : D(A_2) \subset \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ é sobrejetor.

A verificação do item (i) segue da teoria de espaços de Sobolev, ver Lema 2.82 e Lema 2.90.

(ii) Dado $U \in D(A_2)$, integrando por partes e usando a condição de fronteira (4.31)

$$\begin{aligned}
(A_2 U, U) = (v_x, u_x) + (u_{xx} - v, v) &= \int_0^l v_x \overline{u}_x dx + \int_0^l (u_{xx} - v)\overline{v} dx \\
&= \int_0^l v_x \overline{u}_x dx - \int_0^l u_x \overline{v}_x dx - \int_0^l v \overline{v} dx \\
&= (v_x, u_x) - \overline{(v_x, u_x)} - \|v\|_2^2.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Lembre que, dado $z \in \mathbb{C}$, temos $Re(z - \overline{z}) = 0$. Deste modo, tomando a parte real em (4.34), tem-se

$$Re(A_2U, U) = -\|v\|_2^2 \leq 0.$$

Logo, $Re(A_2U, U) \leq 0$ e A_2 é dissipativo em $\mathcal{H}_2$.
(iii) Dado $F = (f_1, f_2) \in \mathcal{H}_2$, vamos mostrar que a equação resolvente $(I - A_2)U = F$ possui uma única solução $U \in D(A_2)$. De fato, reescrevendo-a em termos de suas componentes obtém-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} u - v = f_1 & \text{em} \quad H_0^1(0, L), \\ -u_{xx} + 2v = f_2 & \text{em} \quad L^2(0, L). \end{cases} \tag{4.35}$$

Da primeira equação $v = u - f_1$, e considerando $h = 2f_1 + f_2 \in L^2(0, l)$, podemos reduzir o sistema (4.35) na seguinte equação

$$-u_{xx} + 2u = h \quad \text{em} \quad L^2(0, l). \tag{4.36}$$

Afirmação: Existe um único $u \in H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l)$, satisfazendo (4.36) quase sempre em $(0, l)$. Primeiro será mostrado que existe uma única função $u \in H_0^1(0, l)$ satisfazendo a equação variacional

$$\int_0^l u_x \varphi_x dx + 2 \int_0^l u \varphi dx = \int_0^l h \varphi dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(0, l). \tag{4.37}$$

Para isso será utilizado o Teorema 2.28. Com efeito, defina

$$\begin{aligned} a : H_0^1(0, l) \times H_0^1(0, l) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, \varphi) &\longmapsto a(u, \varphi) = (u_x, \varphi_x) + 2(u, \varphi) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Phi : H_0^1(0, l) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto \Phi(\varphi) = (h, \varphi). \end{aligned}$$

Note que a é uma forma sesquilinear contínua e coerciva, pois é simples verificar que

$$|a(u, \varphi)| \leq C \|u\|_{H_0^1} \|\varphi\|_{H_0^1}, \;\; \forall u, \varphi \in H_0^1(0, l)$$

e

$$a(u, u) = (u_x, u_x) + 2(u, u) \geq \|u\|_{H_0^1}^2, \;\; \forall u \in H_0^1(0, l).$$

Além disso, da Desigualdade de Poincaré obtém-se

$$|\Phi(\varphi)| = |(h,\varphi)| \leq \|h\|_2\|\varphi\|_2 \leq C\|\varphi\|_{H_0^1}, \;\; \forall\varphi \in H_0^1(0,l).$$

Portanto, $\Phi \in H^{-1}(0,l)$. Pelo Teorema de Lax-Milgram (ver Teorema 2.28), existe uma única $u \in H_0^1(0,l)$ tal que

$$a(u,\varphi) = \Phi(\varphi), \;\; \forall\varphi \in H_0^1(0,l),$$

ou seja, $u \in H_0^1(0,l)$ é solução de 4.37.
Observe agora que de (4.37) vem que

$$\int_0^l u_x\varphi_x dx = -\int_0^l (2u-h)\varphi dx, \quad \forall\varphi \in C_0^1(0,l) \subset H_0^1(0,l). \tag{4.38}$$

Como u_x, $2u-h \in L^2(0,l)$ e vale (4.38), então $u_x \in H^1(0,l)$, pela noção de derivada fraca (Definição 2.63). Logo, $u \in H^2(0,l)$, e ainda de (4.38) tem-se que

$$\begin{aligned} & u_{xx} = 2u - h \\ \Rightarrow \quad & -u_{xx} + 2u = h \text{ em } L^2(0,l), \end{aligned}$$

o que prova (4.36). De (4.35) observa-se que $v = u - f_1 \in H_0^1(0,l)$. Portanto, conclui-se que $U = (u,v)^T \in D(A_2)$ e fica demonstrado o item (iii) do Teorema 4.2. □

4.3 Sistema Termoelástico

4.3.1 Dedução do Sistema Termoelástico

Como encontrado na literatura, o estudo da termoelasticidade começou com o físico Clarence Zener (1905-1993). A termoelasticidade estuda efeitos do campo de temperatura sobre a tensão-deformação sólidos elásticos em determinadas condições térmicas, ou seja, o estudo aplica-se a sólidos elásticos submetidos a pequenas deformações e flutuações infinitesimais de temperatura. Se a variação de algumas propriedades mecânicas e térmicas com a temperatura puderem ser desprezadas, então a equação termoelástica resultante é linear. No caso da equação da onda considerada na Seção 4.2, a temperatura do ambiente não foi levada em consideração, ou seja, as leis constitutivas foram consideradas em meios isotérmicos. Por outro lado, em meios não isotérmicos, isto é, onde há influências térmicas agindo sobre o sólido (corda), então o problema resultante é um sistema termoelástico envolvendo a equação da onda.

Nosso ponto de partida é a equação de momento (normalizada) (4.16), ou seja,

$$u_{tt} \; = \; V_x, \tag{4.39}$$

onde V representa a tensão vertical da corda. Agora, como também estamos considerando a influência da temperatura no meio em que se encontra a corda, então Dafermos [14] nos diz que a Lei de Tensão-Deformação deve depender de um fator que representa a diferença de temperatura na posição $x \in (0, l)$ da corda e tempo t, a qual denotamos por $\theta = \theta(x, t)$. Neste caso, de acordo com [14] (ver também [39]), em vez da lei (4.17) temos a seguinte relação para tensão-deformação:

$$V = u_x - \gamma\theta, \tag{4.40}$$

onde $\gamma > 0$ é um coeficiente de acoplamento do sistema, representando a variação térmica de acordo com o material da barra. Note que se $\gamma = 0$, então (4.40) reduziria-se em (4.17) com $H = 1$, de onde chegaríamos novamente na equação da onda. Substituindo (4.40) em (4.39), obtemos

$$u_{tt} - u_{xx} + \gamma\theta_x = 0 \quad \text{em} \quad (0, l) \times (0, \infty). \tag{4.41}$$

Agora observe que (4.41) é uma equação com duas variáveis, a saber, o deslocamento vertical e temperatura u e θ, respectivamente. Sendo assim, precisamos de uma equação adicional com respeito à variável θ, ou seja, uma equação que represente a condução de calor na corda assim como obtido em (4.4). Para isto, ainda seguindo as ideias introduzidas por Dafermos [14], temos a seguinte equação do calor na variável θ :

$$\theta_t - \theta_{xx} + \gamma u_{xt} = 0 \quad \text{em} \quad (0, l) \times (0, \infty), \tag{4.42}$$

onde, após usar a lei térmica de Fourier, os dois primeiros termos de (4.42) representam a equação do calor (4.4) com $K = 1$ e o terceiro termo é devido ao fato que o sistema depende também da velocidade de deformação, uma vez que considera-se a lei (4.40).

Mediante ao exposto, o sistema composto pelas equações (4.41)-(4.42) representa um sistema termoelástico constituído pelo acoplamento de uma equação elástica e uma equação do calor. Logo, um modelo linear que descreve vibrações de corda termoelástica de comprimento $l > 0$ e material homogêneo é dado pelo seguinte sistema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \gamma\theta_x = 0 & \text{em} \quad (0, l) \times (0, \infty), \\ \theta_t - \theta_{xx} + \gamma u_{xt} = 0 & \text{em} \quad (0, l) \times (0, \infty). \end{cases} \tag{4.43}$$

O sistema (4.43) é estudado no domínio $(0, l) \times (0, \infty)$ de forma que as extremidades da barra permaneçam fixadas e sem transferência de calor, ou seja,

$$u(0, t) = u(l, t) = \theta(0, t) = \theta(l, t) = 0, \;\; t \geq 0, \tag{4.44}$$

o que chamamos de condições de fronteira de Dirichlet. As condições iniciais neste caso são dadas por

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),\ \theta(x,0) = \theta_0(x),\ \ x \in (0,l). \tag{4.45}$$

Na próxima subseção apresentamos um resultado de existência e unicidade para o PVIF (4.43)-(4.45) via semigrupos lineares.

4.3.2 Existência e Unicidade

Considere o seguinte PVIF:

$$u_{tt} - u_{xx} + \gamma\theta_x = 0 \quad \text{em} \quad (0,l) \times (0,\infty), \tag{4.46}$$

$$\theta_t - \theta_{xx} + \gamma u_{xt} = 0 \quad \text{em} \quad (0,l) \times (0,\infty), \tag{4.47}$$

$$u(\cdot,0) = u_0(\cdot),\ u_t(\cdot,0) = u_1(\cdot),\ \theta(\cdot,0) = \theta_0(\cdot), \tag{4.48}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = \theta(0,t) = \theta(l,t) = 0,\ t \geq 0. \tag{4.49}$$

Como já mencionado, por meio da teoria de semigrupos lineares, mostraremos que o PVIF (4.46)-(4.49) possui uma única solução. Para isto, considere inicialmente a seguinte mudança de variávei $v = u_t$ e $U = (u, v, \theta)^T$. Assim, obtemos formalmente que

$$U_t = \begin{bmatrix} v \\ u_{xx} - \gamma\theta_x \\ -\gamma v_x + \theta_{xx} \end{bmatrix} := A_3 U \tag{4.50}$$

e

$$U(0) = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \theta_0 \end{bmatrix} := U_0.$$

Então, é possível reescrever (4.46)-(4.49) como o seguinte problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} U_t = A_3 U, \ \ t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{4.51}$$

onde $A_3 U$ é dado em (4.50). Para contemplar as condições de fronteira (4.49), definimos os seguintes espaços de Hilbert:

- $\mathcal{H}_3 = H_0^1(0,l) \times L^2(0,l) \times L^2(0,l)$ com produto interno e norma dados por

  $$(U, \hat{U})_{\mathcal{H}_3} = (u_x, \hat{u_x}) + (v, \hat{v}) + (\theta, \hat{\theta}) \quad \text{e} \quad \|U\|_{\mathcal{H}_3}^2 = \|u_x\|_2^2 + \|v\|_2^2 + \|\theta\|_2^2,$$

  para todos $U = (u, v, \theta)$, $\hat{U} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{\theta}) \in \mathcal{H}_3$.

- Neste caso, mostra-se que o domínio do operador diferencial A_3 é dado por

$$D(A_3) = (H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)) \times H_0^1(0,l) \times ((H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)).$$

Sob estas notações, temos o seguinte resultado de existência e unicidade para o problema (4.51) e, consequentemente, para o PVIF (4.46)-(4.49), conforme o teorema a seguir.

Teorema 4.3 (Existência e Unicidade)**.** *Se $U_0 \in D(A_3)$, então o problema* (4.51) *possui uma única solução*

$$U \in C([0,\infty), D(A_3)) \cap C^1([0,\infty), \mathcal{H}_3),$$

dada por $U(t) = e^{A_3 t}U_0$.

Em outras palavras, se $u_0, \theta_0 \in H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)$ e $u_1 \in H_0^1(0,l)$, então o sistema (4.46)-(4.49) *possui uma única solução na classe*

$$\begin{aligned} u \in C([0,\infty), H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)) \cap C^1([0,\infty), H_0^1(0,l)) \cap C^2([0,\infty), L^2(0,l)), \\ \theta \in C([0,\infty), H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)) \cap C^1([0,\infty), L^2(0,l)). \end{aligned}$$

Demonstração. Em virtude do Teorema 3.24, basta mostrar que o operador A_3 é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em $\mathcal{H}_3$. Neste caso, usando o Corolário 3.21, devemos verificar que:

(i) $\overline{D(A_3)} = \mathcal{H}_3$;

(ii) A_3 é dissipativo em $\mathcal{H}_3$, ou seja, $Re(A_3U, U)_{\mathcal{H}_3} \leq 0$;

(iii) $0 \in \rho(A_3)$, isto é, $(-A_3)^{-1}$ existe e é limitado.

A verificação do item (i) é imediata da teoria de espaço de Sobolev. Com efeito, a densidade desejada segue dos Lemas 2.82, 2.90 e 2.93.

(ii) Dado $U \in D(A_3)$, fazendo integração por partes e usando as condições de fronteira (4.49), obtém-se

$$\begin{aligned} (A_3U, U) &= (v_x, u_x) + (u_{xx} - \gamma\theta_x, v) + (-\gamma v_x + \theta_{xx}, \theta) \\ &= \int_0^l v_x \overline{u}_x dx - \int_0^l u_x \overline{v}_x dx - \int_0^l \gamma\theta_x \overline{v} dx + \int_0^l \gamma v \overline{\theta}_x dx - \int_0^l \theta_x \overline{\theta}_x dx \\ &= (v_x, u_x) - \overline{(v_x, u_x)} - \gamma(\theta_x, v) + \gamma\overline{(\theta_x, v)} - \|\theta_x\|_2^2. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Tomando a parte real em (4.52), obtém-se

$$Re(A_3U, U) = -\|\theta_x\|_2^2 \leq 0. \tag{4.53}$$

Logo, A_3 é dissipativo em $\mathcal{H}_3$.

(iii) Mostraremos inicialmente que $-A_3$ é invertível.

Afirmação: Dado $F = (f_1, f_2, f_3)^T \in \mathcal{H}_3$, existe um único $U \in D(A_3)$ tal que $-A_3U = F$. Reescrevendo esta última equação em termos de suas componentes, obtém-se

$$-v = f_1 \quad \text{em} \quad H_0^1(0,l), \tag{4.54}$$
$$-u_{xx} + \gamma\theta_x = f_2 \quad \text{em} \quad L^2(0,l), \tag{4.55}$$
$$\gamma v_x - \theta_{xx} = f_3 \quad \text{em} \quad H_0^1(0,l). \tag{4.56}$$

De (4.54) tem-se $v = -f_1 \in H_0^1(0,l)$. De (4.56) vem que

$$-\theta_{xx} = f_3 - \gamma v_x \in L^2(0,l),$$

a qual sabe-se ter uma única solução $\theta \in H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)$, assim como obtido para (4.11). Logo, de (4.55) tem-se

$$-u_{xx} = f_2 - \gamma\theta_x \in L^2(0,l),$$

que de forma análoga, possui uma única solução $u \in H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)$. Isto implica que existe uma terna (u, v, θ) é a única solução de (4.54) – (4.56), como desejado.

Resta mostrar que $(-A_3)^{-1}$ é um operador limitado. Mais precisamente, mostrar que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|A^{-1}F\|_{\mathcal{H}_3} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_3}, \;\; \forall F \in \mathcal{H}_3. \tag{4.57}$$

De fato, $F = (f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{H}_3$, seja $U = (u, v, \theta) \in D(A_3)$ a única solução de $-A_3U = F$, a qual pode ser escrita em termos de suas componentes como em (4.54) – (4.56). Em primeiro lugar, da estimativa (4.53) e das desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young (ver Observação 2.44) com $\epsilon > 0$, nota-se que

$$\|\theta_x\|_2^2 \leq \|A_3U\|_{\mathcal{H}_3}\|U\|_{\mathcal{H}_3} \leq \epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_3}^2 + C_\epsilon\|A_3U\|_{\mathcal{H}_3}^2 = \epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_3}^2 + C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}_3}^2, \tag{4.58}$$

para $C_\epsilon > 0$. Pela Desigualdade de Poincaré, (ver Teorema 2.83)

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}_3}^2 &= \|u_x\|_2^2 + \|v\|_2^2 + \|\theta\|_2^2 \\ &\leq \|u_x\|_2^2 + \|v\|_2^2 + l\|\theta_x\|_2^2 \\ &\leq \max\{1, l\}(\|u_x\|_2^2 + \|v\|_2^2 + \|\theta_x\|_2^2). \end{aligned} \tag{4.59}$$

Além disso, multiplicando (4.54) por $-v$, (4.55) por u, (4.56) por θ, integrando de 0 a l, e somando as expressões, obtém-se

$$\begin{aligned} \|u_x\|_2^2 + \|v\|_2^2 + \|\theta_x\|_2^2 &= -\int_0^l f_1\overline{v}dx + \int_0^l f_2\overline{u}dx \\ &\quad -\gamma\int_0^l \theta_x\overline{u}dx + \int_0^l \gamma\theta_x\overline{v}dx + \int_0^l f_3\overline{\theta}dx. \end{aligned} \tag{4.60}$$

De (4.59) e (4.60) e pelas Desigualdades Triangular, de Cauchy-Schwarz e de Poincaré, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_3}^2 \leq C(\|f_1\|_2\|v\|_2 + \|f_2\|_2\|u\|_2 + \|f_3\|_2\|\theta_x\|_2) + C|\gamma|\|\theta_x\|_2(\|u_x\|_2 + \|v\|_2). \tag{4.61}$$

Pela Desigualdade de Young com $\eta = \frac{1}{4}$, tem-se

$$(C|\gamma|\|\theta_x\|_2)(\|u_x\|_2+\|v\|_2) \leq \frac{1}{4}(\|u_x\|_2+\|v\|_2)^2+C^2\gamma^2\|\theta_x\|_2^2 \leq \frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}^2+C^2\gamma^2\|\theta_x\|_2^2. \tag{4.62}$$

Combinando (4.62) e (4.61) vem que

$$\frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}^2 \leq C(\|f_1\|_2\|v\|_2 + \|f_2\|_2\|u\|_2) + C\|f_3\|_2\|\theta_x\|_2 + C^2\gamma^2\|\theta_x\|_2^2. \tag{4.63}$$

Pelas desigualdades de Poincaré e Young com $\epsilon > 0$, e também de (4.58), obtém-se

$$\begin{aligned} C\|f_1\|_2\|v\|_2 + C\|f_2\|_2\|u\|_2 &\leq C_\epsilon(\|(f_1)_x\|_2^2 + \|f_2\|_2^2) + \epsilon(\|u_x\|_2 + \|v\|_2^2) \\ &\leq C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}_3}^2 + \epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_3}^2 \end{aligned} \tag{4.64}$$

e

$$\begin{aligned} C\|f_3\|_2\|\theta_x\|_2 + C^2\gamma^2\|\theta_x\|_2^2 &\leq \frac{1}{4}\|f_3\|_2^2 + C^2(1+\gamma^2)\|\theta_x\|_2^2 \\ &\leq C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}_3}^2 + \epsilon C^2(1+\gamma^2)\|U\|_{\mathcal{H}_3}^2. \end{aligned} \tag{4.65}$$

Substituindo (4.64) e (4.65) em (4.63) e tomando $\epsilon = \dfrac{1}{4(1+C^2(1+\gamma^2))} > 0$ segue que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_3}^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_3}^2, \tag{4.66}$$

para alguma constante $C > 0$. Isto é suficiente para mostrar (4.57), pois $\|U\|_{\mathcal{H}_3} = \|A^{-1}F\|_{\mathcal{H}_3}$. Isto conclui a prova do Teorema 4.3. $\square$

4.4 SISTEMA TERMOVISCOELÁSTICO

4.4.1 Dedução do Sistema Termoviscoelástico

Para tratar do assunto *termoviscoelasticidade*, falaremos primeiro de viscoelasticidade. Os materiais viscoelásticos são fluidos que possuem características de líquidos viscosos com propriedades elásticas e de sólidos com propriedades viscosas, ou seja, possuem propriedades elásticas e viscosas acopladas. Quando submetidas a uma tensão de cisalhamento, estes tipos materiais sofrem naturalmente uma deformação e, quando esta cessa, ocorre uma certa recuperação da deformação sofrida, a qual é conhecida como comportamento elástico. Já um material termoviscoelástico é a classe de materiais que sofre simultaneamente deformações elásticas e viscosas levando em consideração sua temperatura, ou seja, estamos em meios não isotérmicos.

Nesta seção, trataremos um sistema unidimensional linear proveniente de um sistema não linear termoviscoelástico que pode ser encontrado em Hsiao e Luo [27], o qual é a descrição referencial (lagrangiana) do equilíbrio das leis de massa, impulso e energia para materiais unidimensionais. Ver também Raposo et al. [43]. De acordo com [27, 43], as equações que modelam o sistema termoviscoelástico não-linear são descritas como

$$\begin{cases} u_t - \alpha v_x = 0, \\ v_t - \sigma_x = 0, \\ \left[e + \dfrac{1}{2}v^2\right]_t - [\sigma v]_x + q_x = 0, \end{cases} \tag{4.67}$$

onde u, v, e, σ e q representam a deformação do material, a velocidade, energia interna, tensão e o fluxo de calor, respectivamente. Ainda seguindo [27], para materiais do tipo sólido, considera-se as seguintes relações constitutivas simplificadas para energia e, tensão σ e fluxo de calor q:

$$e = c\theta, \quad \sigma = \mu(u)v_x - f(u)\theta, \quad q = -k\frac{\theta_x}{u}, \tag{4.68}$$

onde c e k são constantes positivas de acordo com material, θ é a temperatura, $f(u)$ e $\mu(u)$ representam a rigidez e a viscosidade do material, respectivamente. A substituição de (4.68) em (4.67) nos levaria ao sistema termoviscoelástico não linear tratado em [27]. No entanto, nosso objetivo é estudar o sistema linear correspondente, o qual foi abordado em [41], aplicando a teoria de semigrupos lineares. Para isto, faremos algumas considerações físicas como segue.

Iniciamos com as duas primeiras equações lineares de (4.67), a saber,

$$\begin{cases} u_t - \alpha v_x = 0, \\ v_t - \sigma_x = 0. \end{cases} \tag{4.69}$$

Além disso, como já mencionado anteriormente, no sistema termoviscoelástico levamos em consideração deformações elásticas e viscosas de acordo com a temperatura. Neste sentido, assumiremos que a relação de tensão-deformação é dada (de forma similar a (4.40)) por

$$\sigma = \alpha u - \beta\theta, \tag{4.70}$$

onde β é uma constante positiva correspondente à variação térmica. Substituindo (4.70) em (4.69) obtemos

$$\begin{cases} u_t - \alpha v_x = 0, \\ v_t - \alpha u_x + \beta\theta_x = 0. \end{cases} \tag{4.71}$$

Para contemplar a equação envolvendo a temperatura θ, consideraremos a parte linear da terceira equação (4.67) com o termo de acoplamento relativo à velocidade de deformação $\frac{\beta}{\alpha}u_t$, devido à lei (4.70) (assim como feito em (4.42) no caso de ondas), ou seja,

$$e_t + q_x + \frac{\beta}{\alpha}u_t = 0. \tag{4.72}$$

Agora, usando a Lei de Hooke (ver, por exemplo, Halliday [25]) para a energia e e a Lei de Fourier para o fluxo de calor q, ambas com respeito a temperatura, temos

$$e = c\theta \quad \text{e} \quad q = -k\theta_x, \tag{4.73}$$

as quais correspondem a primeira equação e a linearização da terceira equação em (4.68), respectivamente. Substituindo (4.73) em (4.72) e usando a primeira equação de (4.71), obtemos

$$c\theta_t - k\theta_{xx} + \beta v_x = 0. \tag{4.74}$$

Deste modo, de (4.71) e (4.74), chegamos ao seguinte sistema termoviscoelástico linear nas variáveis u, v e θ dado por

$$\begin{cases} u_t - \alpha v_x = 0 & \text{em} \quad (0,l) \times (0,\infty), \\ v_t - \alpha u_x + \beta\theta_x = 0 & \text{em} \quad (0,l) \times (0,\infty), \\ c\,\theta_t - k\theta_{xx} + \beta v_x = 0 & \text{em} \quad (0,l) \times (0,\infty), \end{cases} \tag{4.75}$$

o qual foi estudado em [41]. Ao sistema (4.75) acoplamos as seguintes condições iniciais

$$u(x,0) = u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x),\ \theta(x,0) = \theta_0(x),\ x \in (0,l), \tag{4.76}$$

e condições de fronteira

$$v(0,t) = v(l,t) = \theta(0,t) = \theta(l,t) = 0,\ t \geq 0. \tag{4.77}$$

Observe que em (4.77) não é necessário atribuir condição de fronteira para a função u.

De fato, isto se deve ao fato do acoplamento que a mesma possui com a função v no sistema (4.75). Uma vez que atribuímos à função v uma condição de fronteira, é possível encontrar uma solução para o problema via teoria de semigrupos lineares sem atribuirmos condição de fronteira à função u. Vale a pena observar ainda que ao tentar atribuir uma condição de fronteira para u, digamos, $u(0,t) = u(l,t) = 0, t \geq 0$, então da primeira equação em (4.75) poderíamos deduzir que v assumiria também a condição de fronteira de Neumann $v_x(0,t) = v_x(l,t) = 0, t \geq 0$, o que resultaria num sistema inconsistente.

Na próxima subseção estudaremos a existência e unicidade de solução para o PVIF (4.75)-(4.77). Por comodidade, assumiremos que $c = 1$.

4.4.2 Existência e Unicidade

Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} u_t - \alpha v_x = 0 & \text{em} \quad (0,l) \times (0,\infty), \\ v_t - \alpha u_x + \beta \theta_x = 0 & \text{em} \quad (0,l) \times (0,\infty), \\ \theta_t - k\theta_{xx} + \beta v_x = 0 & \text{em} \quad (0,l) \times (0,\infty), \end{cases} \tag{4.78}$$

onde $\alpha, k > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$, com $\beta \neq 0$, com as seguintes condições iniciais

$$u(x,0) = u_0(x),\; v(x,0) = v_0(x),\; \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad x \in (0,l), \tag{4.79}$$

e condições de fronteira dadas por

$$v(0,t) = v(l,t) = \theta(0,t) = \theta(l,t) = 0, \;\; t \geq 0. \tag{4.80}$$

Para aplicar a teoria de semigrupos lineares, denotamos inicialmente a função vetorial $U = (u, v, \theta)^T$. Assim,

$$U_t = \begin{bmatrix} \alpha v_x \\ \alpha u_x - \beta\theta_x \\ k\theta_{xx} - \beta v_x \end{bmatrix} := A_4 U \tag{4.81}$$

e

$$U(0) = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix} := U_0.$$

Então, é possível reescrever o PVIF (4.78)-(4.80) no seguinte problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} U_t = A_4 U, \;\; t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{4.82}$$

onde A_4 é definido em (4.81). Para contemplar a condição de fronteira (4.80), definimos os seguintes espaços de Hilbert:

- $\mathcal{H}_4 = L^2_*(0,l) \times L^2(0,l) \times L^2(0,l)$ com produto interno e norma dados por

$$(U,\hat{U})_{\mathcal{H}_4} = (u,\hat{u}) + (v,\hat{v}) + (\theta,\hat{\theta}) \;\text{ e }\; \|U\|^2_{\mathcal{H}_4} = \|u\|^2_2 + \|v\|^2_2 + \|\theta\|^2_2,$$

  para todos $U = (u,v,\theta)^T$, $\hat{U} = (\hat{u},\hat{v},\hat{\theta})^T \in \mathcal{H}_4$.

- O domínio do operador diferencial A_4 definido em (4.81) é dado por

$$D(A_4) = H^1_*(0,l) \times H^1_0(0,l) \times (H^2(0,l) \cap H^1_0(0,l)).$$

Sendo assim, temos o seguinte resultado de existência para o PVI (4.82) e, consequentemente, para o PVIF (4.78)-(4.80).

Teorema 4.4 (Existência e Unicidade)**.** *Se* $U_0 \in D(A_4)$*, então o problema* (4.82) *possui uma única solução*

$$U \in C([0,\infty), D(A_4)) \cap C^1([0,\infty), \mathcal{H}_4),$$

dada por $U(t) = e^{A_4 t}U_0$.

Em outras palavras, se

$$(u_0, v_0, \theta_0) \in H^1_*(0,l) \times H^1_0(0,l) \times (H^2(0,l) \cap H^1_0(0,l)),$$

então o problema (4.78)-(4.80) *possui uma única solução na classe*

$$\begin{aligned} u &\in C([0,\infty), H^1_*(0,l)) \cap C^1([0,\infty), L^2_*(0,l)),\\ v &\in C([0,\infty), H^1_0(0,l)) \cap C^1([0,\infty), L^2(0,l)),\\ \theta &\in C([0,\infty), H^1_0(0,l) \cap H^2(0,l)) \cap C^1([0,\infty), L^2(0,l)). \end{aligned}$$

Demonstração. Face ao Teorema 3.24, basta mostrar que o operador A_4 definido em (4.81) é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em $\mathcal{H}_4$. Neste caso, pelo Teorema 3.20, é suficiente mostrar que:

(i) $\overline{D(A_4)} = \mathcal{H}_4$;

(ii) A_4 é dissipativo em $\mathcal{H}_4$, ou seja, $Re(A_4U,U)_{\mathcal{H}_4} \leq 0$;

(iii) $0 \in \rho(A_4)$, isto é, $(-A_4)^{-1}$ existe e é limitado.

A verificação do item (i) decorre dos Lemas 2.82, 2.86 e 2.93.

(ii) Dado $U \in D(A_4)$, então

$$\begin{aligned}
(A_4U, U) &= (\alpha v_x, u) + (\alpha u_x - \beta\theta_x, v) + (k\theta_{xx} - \beta v_x, \theta) \\
&= \int_0^l \alpha v_x \overline{u} dx - \int_0^l \alpha u \overline{v}_x dx - \int_0^l \beta\theta_x \overline{v} dx \\
&\quad + \int_0^l \beta v \overline{\theta}_x dx - \int_0^l k\theta_x \overline{\theta}_x dx \\
&= \beta(v, \theta_x) - \beta\overline{(v, \theta_x)} + \alpha(v_x, u) - \alpha\overline{(v_x, u)} - k\|\theta_x\|_2^2.
\end{aligned}$$

Tomando a parte real, obtém-se

$$Re(A_4U, U) = -k\|\theta_x\|_2^2 \leq 0. \tag{4.83}$$

Logo, A_4 é dissipativo em $\mathcal{H}_4$.
(iii) Primeiro será mostrado que o operador $-A_4$ é invertível, isto é, dado $F = (f_1, f_2, f_3)^T \in \mathcal{H}_4$, existe um único $U \in D(A_4)$ tal que $-A_4U = F$. Reescrevendo esta última equação em termos de suas componentes, obtém-se

$$-\alpha v_x = f_1 \quad \text{em} \quad L^2_*(0, l), \tag{4.84}$$

$$-\alpha u_x + \beta\theta_x = f_2 \quad \text{em} \quad L^2(0, l), \tag{4.85}$$

$$-k\theta_{xx} + \beta v_x = f_3 \quad \text{em} \quad L^2(0, l). \tag{4.86}$$

De (4.84) segue que

$$v(x) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^x f_1(s)ds + c_0, \ \ \forall x \in (0, l). \tag{4.87}$$

Como queremos $v(0) = v(l) = 0$, pois $f_1 \in L^2_*(0, l)$, então $c_0 = 0$. Logo, $v \in H^1_0(0, l)$ é única e é dada por

$$v(x) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^x f_1(s)ds, \quad \text{com} \quad v_x \in L^2_*(0, l). \tag{4.88}$$

De (4.86), vem que

$$-k\theta_{xx} = f_3 - \beta v_x \in L^2(0, l), \tag{4.89}$$

a qual possui uma única solução $\theta \in H^2(0, l) \cap H^1_0(0, l)$, assim como obtido para (4.11). Prosseguindo, de (4.85) vem que

$$u_x = -\frac{1}{\alpha}(f_2 - \beta\theta_x) \in L^2(0, l). \tag{4.90}$$

Logo, $u \in H^1(0,l)$, sendo expressada por

$$u(x) = -\frac{1}{\alpha}\left(\int_0^x f_2(s)ds - \beta\theta(x)\right) + c_1. \tag{4.91}$$

Como queremos $u \in H^1_*(0,l)$, isto é, $\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l u(x)dx = 0$, então

$$c_1 = \frac{1}{\alpha l}\left(\int_0^l \int_0^x f_2(s)dsdx - \beta\int_0^l \theta(x)dx\right). \tag{4.92}$$

Com isto, $\displaystyle\int_0^l u(x)dx = 0$. Deste modo, $u \in H^1_*(0,l)$ é a única solução de (4.85) e é dada por

$$u(x) = -\frac{1}{\alpha}\left(\int_0^x f_2(s)ds - \beta\theta_x\right) + \frac{1}{\alpha l}\left(\int_0^l \int_0^x f_2(s)dsdx - \beta\int_0^l \theta(x)dx\right). \tag{4.93}$$

Assim, a terna $(u,v,\theta)^T = U \in D(A_4)$ é a única solução de (4.84)-(4.86), ou seja, existe uma única solução $U \in D(A_4)$ para a equação resolvente $-A_4U = F$, como desejado.

Resta mostrar que $(-A_4)^{-1}$ é limitado. Com efeito, dado $F = (f_1,f_2,f_3)^T \in \mathcal{H}_4$, seja $U = (u,v,\theta)^T \in D(A_4)$. De (4.83) vem que

$$\|\theta_x\|_2^2 \leq \frac{1}{k}\|A_4U\|_{\mathcal{H}_4}\|U\|_{\mathcal{H}_4} = \frac{1}{k}\|U\|_{\mathcal{H}_4}\|F\|_{\mathcal{H}_4}. \tag{4.94}$$

Além disso, de (4.84) e (4.85), obtém-se

$$\|v_x\|_2^2 = \frac{1}{\alpha^2}\|f_1\|_2^2 \leq \frac{1}{\alpha^2}\|F\|_{\mathcal{H}_4}^2 \tag{4.95}$$

e

$$\|u_x\|_2^2 = \frac{2}{\alpha^2}(\|f_2\|_2^2 + \beta^2\|\theta_x\|_2^2) \leq \frac{2}{\alpha^2}(\|F\|_{\mathcal{H}_4}^2 + \frac{\beta^2}{k}\|U\|_{\mathcal{H}_4}\|F\|_{\mathcal{H}_4}). \tag{4.96}$$

Usando (4.94), (4.95), (4.96) e a Desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}_4}^2 &= \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2 + \|\theta\|_2^2 \\
&\leq l^2(\|u_x\|_2^2 + \|v_x\|_2^2 + \|\theta_x\|_2^2) \\
&\leq C_1\|U\|_{\mathcal{H}_4}\|F\|_{\mathcal{H}_4} + C_2\|F\|_{\mathcal{H}_4}^2,
\end{aligned}$$

onde $C_1 = \dfrac{l^2}{k}\left(1 + \dfrac{2\beta^2}{\alpha^2}\right)$ e $C_2 = \dfrac{3l^2}{\alpha^2}$. Usando a Desigualdade de Young, conclui-se que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_4}^2 \leq C_3\|F\|_{\mathcal{H}_4}^2,$$

em que $C_3 = (C_1^2 + 2C_2) > 0$. Lembrando que $\|U\|_{\mathcal{H}_4} = \|A_4^{-1}F\|_{\mathcal{H}_4}$, prova-se que $(A_4)^{-1}$ é limitado, como desejado. Isto conclui a prova do Teorema 4.4. □

4.5 Equação da Viga com Dissipação Friccional

4.5.1 Dedução da Equação da Viga com Dissipação Friccional

A equação da viga estudada nesta seção também é conhecida como modelo de viga de Euler-Bernoulli e sua dedução se assemelha à dedução da equação da onda em certos sentidos. O modelo de viga de Euler-Bernoulli nos fornece meios de calcular as características de deflexão de uma viga sob uma determinada carga, a qual é constituída por uma equação diferencial parcial linear de quarta ordem. A atribuição do nome viga de Euler-Bernoulli se dá pelas descobertas significativas de Leonhard Euler (1707-1783) e Daniel Bernoulli (1700-1782). A teoria desenvolvida por Euler-Bernoulli pode ser encontrada em diversas referências e a modelagem da equação da viga pode ser vista sob diversos aspectos. Dentre as inúmeras referências, consideramos os livros de Rao [40] e Hibbeler [26], sendo este último uma referência em português de fácil acesso ao leitor interessado nas considerações físicas que modelam equação da viga de Euler-Bernoulli. Para a dedução de um modelo de vigas viscoelásticas extensíveis, cuja modelagem abrange leis constitutivas e a equação de vigas de Euler-Bernoulli, sugerimos a leitura do artigo de Giorgi et al. [22, Apêndice A].

Por uma questão de escolha e simplicidade na colocação do problema, seguiremos aqui as considerações e notações de Rao [40]. Partimos do princípio que o material de uma viga de comprimento $l > 0$ é elástico, isotrópico e homogêneo. Como o ângulo de rotação de um filamento da viga é muito pequeno quando comparado à deflexão, então o ângulo de rotação é desprezado na teoria de Euler-Bernoulli. Além disso, a energia envolvida no cisalhamento também é desprezada. Com essas imposições, por vezes denominadas *hipóteses Euler-Bernoulli*, ver por exemplo [40], é possível chegar na seguinte equação da viga

$$EI\varphi_{xxxx} + \rho A\varphi_{tt} = q, \tag{4.97}$$

onde $\varphi = \varphi(x,t)$ representa a deflexão da viga no ponto x e instante t, $q = q(x,t)$ representa a carga no ponto x e tempo t, ρ a densidade do material da viga, A a área de seção transversal da viga, E representa o módulo de elasticidade e I o momento de inércia. Quando nenhuma força externa é aplicada à viga, ainda assim ela pode vibrar, esse movimento é denominado oscilação ou vibração livre. Deste modo, na ausência de termos forçantes ($q = 0$) a equação (4.97) reduz-se a

$$EI\varphi_{xxxx} + \rho A\varphi_{tt} = 0. \tag{4.98}$$

Por outro lado, assim como para equação da onda, a densidade do ar pode causar alguma resistência contrária à deflexão da viga, de onde surge um amortecimento de fricção no movimento da mesma. Neste sentido, uma força externa q pode ser considerada (matematicamente) como

$$q = -\alpha\varphi_t, \tag{4.99}$$

onde $\alpha > 0$ é uma constante dependendo do material que compõe a viga e o sinal negativo é devido à resistência do ar causar uma força no sentido contrário ao movimento de deflexão. Substituindo (4.99) em (4.97) e normalizando os coeficientes por motivos de simplicidade ($EI = \rho A = \alpha = 1$), obtemos a seguinte equação da viga com dissipação friccional

$$\varphi_{tt} + \varphi_{xxxx} + \varphi_t = 0, \tag{4.100}$$

a qual é considerada no domínio $(0, l) \times (0, \infty)$. Assumindo que as extremidades da viga estão fixadas, então as seguintes condições de fronteiras são levadas em consideração

$$\varphi(0, t) = \varphi(l, t) = \varphi_x(0, t) = \varphi_x(l, t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{4.101}$$

As condições iniciais associadas a equação da viga (4.100) são dadas por

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x),\ \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad x \in (0, l). \tag{4.102}$$

Mediante ao exposto, o objetivo da próxima subseção é mostrar que o PVIF (4.100)-(4.102) possui um única solução utilizando a teoria de semigrupos lineares.

4.5.2 Existência e Unicidade

Considere o seguinte PVIF para equação da viga

$$\varphi_{tt} + \varphi_{xxxx} + \varphi_t = 0 \quad \text{em} \quad (0, l) \times (0, \infty), \tag{4.103}$$
$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x),\ \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x),\ x \in (0, l), \tag{4.104}$$
$$\varphi(0, t) = \varphi(l, t) = \varphi_x(0, t) = \varphi_x(l, t) = 0,\ t \geq 0. \tag{4.105}$$

Para aplicar a teoria de semigrupos lineares, vamos considerar inicialmente as seguinte notações $\varphi_t = \Phi$ e $U = (\varphi, \Phi)^T$. Assim,

$$U_t = \begin{bmatrix} \Phi \\ -\varphi_{xxxx} - \Phi \end{bmatrix} := A_5 U \tag{4.106}$$

e

$$U(0) = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} := U_0.$$

Deste modo, é possível escrever o problema (4.103)-(4.105) no seguinte problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} U_t = A_5 U, \ \ t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{4.107}$$

onde A_5 é definido em (4.106). Para contemplar as condições de fronteira (4.105) no domínio de A_5, consideramos os seguintes espaços de Hilbert:

- $\mathcal{H}_5 = H_0^2(0,l) \times L^2(0,l)$ com produto interno e norma dados por

$$(U, \hat{U})_{\mathcal{H}_5} = (\varphi_{xx}, \hat{\varphi}_{xx}) + (\Phi, \hat{\Phi}) \quad \text{e} \quad \|U\|^2_{\mathcal{H}_5} = \|\varphi_{xx}\|_2^2 + \|\Phi\|_2^2,$$

  para todos $U = (\varphi, \Phi)^T$, $\hat{U} = (\hat{\varphi}, \hat{\Phi})^T \in \mathcal{H}_5$.

- Neste caso mostra-se que o domínio do operador diferencial A_5 definido em (4.106) é dado por

$$D(A_5) = (H^4(0,l) \cap H_0^2(0,l)) \times H_0^2(0,l).$$

Sendo assim, segue o resultado de existência e unicidade para o problema (4.107) e, consequentemente, para o PVIF (4.103)-(4.105).

Teorema 4.5 (Existência e Unicidade)**.** *Se* $U_0 \in D(A_5)$*, então o problema* (4.107) *possui uma única solução*

$$U \in C([0,\infty), D(A_5)) \cap C^1([0,\infty), \mathcal{H}_5),$$

dada por $U(t) = e^{A_5 t} U_0$*.*

Em outras palavras, se $\varphi_0, \in H_0^2(0,L) \cap H^4(0,L)$ *e* $\varphi_1 \in H_0^2(0,L)$*, então o sistema* (4.103)-(4.105) *possui uma única solução* u *na classe*

$$u \in C([0,\infty), H^4(0,l)) \cap C^1([0,\infty), H_0^2(0,l)) \cap C^2([0,\infty), L^2(0,l)).$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.24, basta mostrar que o operador A_5 é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em $\mathcal{H}_5$. Neste caso, pelo Teorema de Lumer-Phillips (ver Teorema 3.20), é suficiente mostrar que:
(i) $\overline{D(A_5)} = \mathcal{H}_5$;
(ii) A_5 é dissipativo em $\mathcal{H}_5$, ou seja, $Re(A_5 U, U)_{\mathcal{H}_5} \leq 0$;
(iii) $I - A_5 : D(A_5) \subset \mathcal{H}_5 \to \mathcal{H}_5$ é sobrejetor.

O item (i) segue diretamente da teoria para Espaços de Sobolev. No entanto, o mesmo também será obtido como consequência dos itens (ii)-(iii) posteriormente.

(ii) Seja $U \in D(A_5)$ e relembre que

$$A_5 U = \begin{bmatrix} \Phi \\ -\varphi_{xxxx} - \Phi \end{bmatrix}.$$

Fazendo integração por partes e usando as condições de fronteira (4.105), obtém-se

$$\begin{aligned}(A_5U,U)_{\mathcal{H}_5} &= (\Phi_{xx},\varphi_{xx})+(-\varphi_{xxxx}-\Phi,\Phi)\\ &= \int_0^l \Phi\overline{\varphi}_{xxxx}dx-\int_l^l \varphi_{xxxx}\overline{\Phi}dx-\int_0^l \Phi\overline{\Phi}dx\\ &= (\Phi,\varphi_{xxxx})-\overline{(\Phi,\varphi_{xxxx})}-\|\Phi\|_2^2.\end{aligned}$$

Deste modo, tomando a parte real

$$Re(A_5U,U)_{\mathcal{H}_5}=-\|\Phi\|_2^2\leq 0.$$

Portanto, A_5 é dissipativo em $\mathcal{H}_5$.
(iii) Dado $F=(f_1,f_2)^T\in\mathcal{H}_5$, será mostrado que a equação resolvente $(I-A_5)U=F$ possui uma única solução $U\in D(A_5)$. De fato, reescrevendo-a em termos de suas componentes, obtém-se o seguinte sistema

$$\begin{cases}\varphi-\Phi=f_1\in H_0^1(0,l),\\ \varphi_{xxxx}+2\Phi=f_2\in L^2(0,l).\end{cases}\tag{4.108}$$

Da primeira equação $\Phi=\varphi-f_1$, e considerando $g=2f_1+f_2\in L^2(0,l)$, podemos reduzir o sistema (4.108) na seguinte equação

$$\varphi_{xxxx}+2\varphi=g\in L^2(0,l).\tag{4.109}$$

Afirmação: Existe $\varphi\in H^4(0,l)\cap H_0^2(0,l)$ satisfazendo (4.109) quase sempre em $(0,l)$. Primeiro será mostrado que existe uma única função $\varphi\in H_0^2(0,l)$ satisfazendo a equação variacional

$$\int_0^l \varphi_{xx}\overline{\widetilde{\varphi}}_{xx}dx+2\int_0^l \varphi\overline{\widetilde{\varphi}}dx=\int_0^l g\overline{\widetilde{\varphi}}dx,\ \ \forall\widetilde{\varphi}\in H_0^2(0,l).\tag{4.110}$$

Para isso, será utilizado o Teorema de Lax-Milgram. De fato, defina

$$\begin{aligned}a:H_0^2(0,l)\times H_0^2(0,l) &\longrightarrow \mathbb{C}\\ (\varphi,\widetilde{\varphi}) &\longmapsto a(\varphi,\widetilde{\varphi})=(\varphi_{xx},\widetilde{\varphi}_{xx})+2(\varphi,\widetilde{\varphi})\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\phi:H_0^2(0,l) &\longrightarrow \mathbb{C}\\ \varphi &\longmapsto \phi(\varphi)=(g,\varphi).\end{aligned}$$

Note que a é uma forma sesquilinear contínua e coerciva. Com efeito, usando que

$H_0^2(0,l) \hookrightarrow L^2(0,l)$ (ou ainda usando a Desigualdade de Poincaré duas vezes) tem-se

$$|a(\varphi,\widetilde{\varphi})| \leq C\|\varphi\|_{H_0^2}\|\widetilde{\varphi}\|_{H_0^2}, \ \ \forall \varphi, \widetilde{\varphi} \in H_0^2(0,l),$$

e ainda

$$a(u,u) \geq \|\varphi\|_{H_0^2}^2, \ \ \forall \varphi \in H_0^2(0,l).$$

Além disso, usando a desigualdade de Poincaré duas vezes, obtém-se

$$|\phi(\varphi)| = |(g,\widetilde{\varphi})| \leq \|g\|_2\|\widetilde{\varphi}\|_2 \leq C\|\varphi\|_{H_0^2}, \ \ \forall \widetilde{\varphi} \in H_0^2(0,l),$$

onde $C = \|g\|_2$. Portanto, $\phi \in H^{-2}(0,l)$. Pelo Teorema de Lax-Milgram existe uma única $\varphi \in H_0^2(0,l)$ tal que

$$a(\varphi,\widetilde{\varphi}) = \phi(\widetilde{\varphi}), \ \ \forall \widetilde{\varphi} \in H_0^2(0,l),$$

ou seja, solução de (4.110). Observe agora que de (4.110) vem que

$$\int_0^l \varphi_{xx}\overline{\widetilde{\varphi}}_{xx}dx = \int_0^l (g-2\varphi)\overline{\widetilde{\varphi}}dx, \ \ \forall \varphi \in C_0^2(0,l) \subset H_0^2(0,l). \tag{4.111}$$

Como $\varphi_{xx}, 2\varphi - g \in L^2(0,l)$ e vale (4.111), então $\varphi_{xx} \in H^2(0,l)$ pela noção de derivada fraca (ver em Definição 2.88). Logo, $\varphi \in H^4(0,l)$, e ainda de (4.111) tem-se que

$$\varphi_{xxxx} = g - 2\varphi \Rightarrow -\varphi_{xxxx} + 2\varphi = g \text{ em } L^2(0,l),$$

mostrando (4.109). Finalmente, tomando $\Phi = \varphi - f_1 \in H_0^2(0,l)$, fica provado que existe um único $U \in D(A_5)$ tal que $(I - A_5)U = F$. Portanto, fica demonstrado o item (iii).
(i) Em (ii) mostramos que A_5 é dissipativo e em (iii) mostramos que $I - A_5$ é sobrejetor. Logo, como $\mathcal{H}_5$ é um espaço de Hilbert, então pelo Teorema 2.27 $\mathcal{H}_5$ é reflexivo. Portanto, do Teorema 3.18 segue que $\overline{D(A_5)} = \mathcal{H}_5$. □

4.6 Sistema de Vigas de Timoshenko

4.6.1 Dedução do Sistema de Timoshenko

O sistema de Timoshenko, assim chamado em referência ao engenheiro ucraniano Sthephen P. Timoshenko (1878-1972), é um sistema de equações diferenciais parciais que descreve a vibração de uma viga levando em consideração o deslocamento transversal (vertical) e o ângulo de rotação. Por este motivo, o sistema de vigas de Timoshenko é considerado mais geral (e realista) que o sistema de vigas de Euler-Bernoulli, tendo suas origens nos trabalhos de Timoshenko [44, 45].

Como mencionado acima, as duas variáveis consideradas no sistema de Timoshenko são o deslocamento vertical e ângulo de rotação de uma seção transversal com relação a seção normal, as quais denotamos por $\varphi = \varphi(x,t)$ e $\psi = \psi(x,t)$, respectivamente, ambas dependendo da posição $x \in [0,l]$ e do tempo $t \geq 0$, onde l é o comprimento da viga.

No que segue, apresentamos um exemplo de Viga de Timoshenko e ao lado uma representação geométrica para as variáveis φ e ψ.

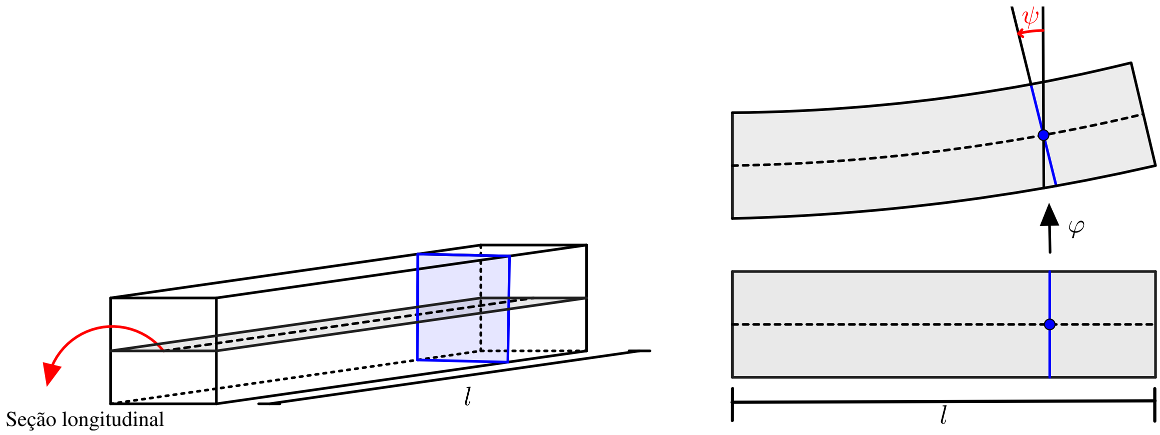

Figura 4.4: Viga de Timoshenko
Fonte: Autor

De acordo com Timoshenko [44, 45] as Equações de Momento para as variáveis φ e ψ são dadas por

$$\rho A\varphi_{tt} = S_x, \tag{4.112}$$

$$\rho I\psi_{tt} = M_x - S, \tag{4.113}$$

onde ρ é a densidade de massa, A e I representam área e o momento de inércia de uma seção transversal da viga, S designa força de cisalhamento e M o momento fletor. De acordo com [44, 45] as Leis Constitutivas Elásticas para a força de cisalhamento e momento fletor são dadas por

$$S = k'GA(\varphi_x + \psi), \tag{4.114}$$

$$M = EI\psi_x, \tag{4.115}$$

as quais, de maneira ilustrativa são representadas na Figura 4.5 onde as flechas representam a força aplicada sobre o objeto

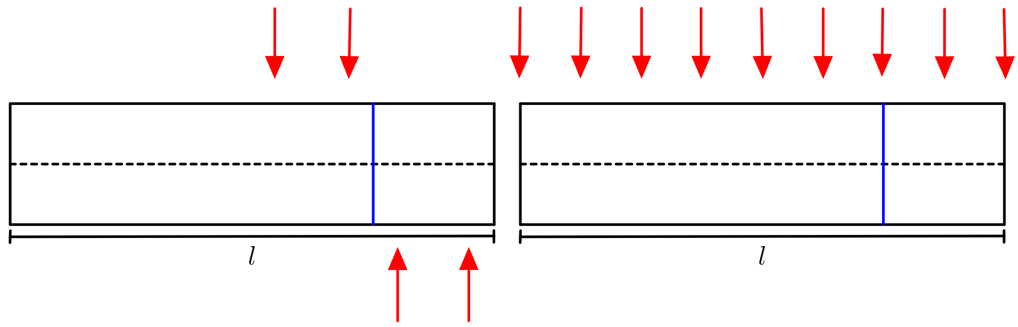

Figura 4.5: Força de cisalhamento e momento fletor

Fonte: Autor

Nas equações (4.114) e (4.115), k' é um fator de correção de cisalhamento, G e E denotam os módulos de cilhamento e de elasticidade de Young, respectivamente. Fisicamente, todas as constantes do sistema são positivas.

Substituindo (4.114)-(4.115) em (4.112)-(4.113) e denotando as constantes por

$$\rho_1 = \rho A, \quad \rho_2 = \rho I, \quad k = k'GA, \quad b = EI, \tag{4.116}$$

chegamos ao seguinte sistema elástico (conservativo) de vigas de Timoshenko

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 & \text{em} \quad (0,l) \times (0,\infty), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0 & \text{em} \quad (0,l) \times (0,\infty). \end{cases} \tag{4.117}$$

Assim como para as equações da onda e da viga, e de acordo com trabalhos de Muñoz Rivera et al. [1, 34] e Raposo et al. [42], podemos considerar mecanismos dissipativos friccionais atuando no sistema (4.117), os quais representam o atrito na vibração vertical $\alpha\varphi_t$ e no ângulo de rotação $\beta\psi_t$, com $\alpha, \beta \geq 0$. Logo, chegamos ao seguinte sistema de Timoshenko com dissipações friccionais (fracas)

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \alpha\varphi_t = 0 & \text{em} \quad (0,l) \times (0,\infty), \\ \rho_2\varphi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \beta\psi_t = 0 & \text{em} \quad (0,l) \times (0,\infty), \end{cases} \tag{4.118}$$

cuja existência de solução via semigrupos foi estudada inicialmente em [42]. Considerando ainda que as extremidade da viga estão fixadas, consideramos as seguintes condições na fronteira $\{0, l\}$ da viga

$$\varphi(0,t) = \varphi(l,t) = \psi(0,t) = \psi(l,t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{4.119}$$

denominadas condições de fronteira de Dirichlet. Como ambas equações do sistema possuem derivadas temporais de segunda ordem, então as condições iniciais associadas ao sistema

(4.118) são dadas por

$$\varphi(x,0)=\varphi_0(x),\ \varphi_t(x,0)=\varphi_1(x),\ \psi(x,0)=\psi_0(x),\ \psi_t(x,0)=\psi_1(x),\ x\in(0,l). \quad (4.120)$$

No que segue, o objetivo é determinar a existência e unicidade de solução para o PVIF (4.118)-(4.120) via teoria de semigrupos lineares.

4.6.2 Existência e Unicidade

Considere o seguinte PVIF para o sistema de Timoshenko

$$\begin{aligned}
&\rho_1\varphi_{tt}-k(\varphi_x+\psi)_x+\alpha\varphi_t=0 \qquad \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty), && (4.121)\\
&\rho_2\psi_{tt}-b\psi_{xx}+k(\varphi_x+\psi)+\beta\psi_t=0 \quad \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty), && (4.122)\\
&\varphi(\cdot,0)=\varphi_0(\cdot),\ \varphi_t(\cdot,0)=\varphi_1(\cdot),\ \psi(\cdot,0)=\psi_0(\cdot),\ \psi_t(\cdot,0)=\psi_1(\cdot), && (4.123)\\
&\varphi(0,t)=\varphi(l,t)=\psi(0,t)=\psi(l,t)=0, \quad t\geq 0, && (4.124)
\end{aligned}$$

onde $\rho_1,\rho_2,k,b>0$ e $\alpha,\beta\geq 0$. A fim de usar a teoria de semigrupos lineares, vamos considerar inicialmente as seguintes notações

$$\Phi=\varphi_t, \quad \Psi=\psi_t \quad \text{e} \quad U=(\varphi,\Phi,\psi,\Psi)^T.$$

Deste modo,

$$U_t=\begin{bmatrix} \Phi \\ \dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x-\dfrac{\alpha}{\rho_1}\Phi \\ \Psi \\ \dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx}-\dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x+\psi)-\dfrac{\beta}{\rho_2}\Psi \end{bmatrix} := A_6U \qquad (4.125)$$

e

$$U(0)=(\varphi_0,\varphi_1,\psi_0,\psi_1)^T:=U_0.$$

Logo, é possível reescrever o PVIF (4.121)-(4.124) no seguinte sistema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} U_t=A_6U, \quad t>0, \\ U(0)=U_0, \end{cases} \qquad (4.126)$$

onde A_6 é definido em (4.125). Para abordar o problema (4.126) incluindo as condições de fronteira (4.124) no domínio do operador A_6, definamos os seguintes espaços de Hilbert:

- $\mathcal{H}_6 = H_0^1(0,l) \times L^2(0,l) \times H_0^1(0,l) \times L^2(0,l)$ com produto interno e norma

$$(U, \hat{U})_{\mathcal{H}_6} = k(\varphi_x + \psi, \hat{\varphi}_x + \hat{\psi}) + \rho_1(\Phi, \hat{\Phi}) + \rho_2(\Psi, \hat{\Psi}) + b(\psi_x, \hat{\psi}_x) \tag{4.127}$$

  e

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}_6} = k\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \rho_1\|\Phi\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2, \tag{4.128}$$

  para todos $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi)^T$ e $\hat{U} = (\hat{\varphi}, \hat{\Phi}, \hat{\psi}, \hat{\Psi})^T$ no espaço de fase $\mathcal{H}_6$.

- Neste caso, mostra-se que o domínio do operador A_6 é dado por

$$D(A_6) = (H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l)) \times H_0^1(0,l) \times (H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l)) \times H_0^1(0,l).$$

Sendo assim, o resultado de existência e unicidade para (4.126) lê-se como segue.

Teorema 4.6 (Existência e Unicidade)**.** *Se $U_0 \in D(A_6)$, então o problema* (4.126) *possui uma única solução*

$$U \in C([0,\infty), D(A_6)) \cap C^1([0,\infty), \mathcal{H}_6),$$

dada por $U(t) = e^{A_6 t}U_0$.

Consequentemente, se $\varphi_0, \psi_0 \in H_0^1(0,l) \cap H^2(0,l)$ e $\varphi_1, \psi_1 \in H_0^1(0,l)$, então o sistema (4.121)-(4.123) *possui uma única solução na classe*

$$\varphi, \psi \in C([0,\infty), H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)) \cap C^1([0,\infty), H_0^1(0,l)) \cap C^2([0,\infty), L^2(0,l)).$$

Demonstração. Aplicando novamente o Teorema 3.24, basta mostrar que o operador A_6 definido em (4.125) é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em $\mathcal{H}_6$. Neste caso, pelo Teorema 3.20, é suficiente mostrar que:

(i) $\overline{D(A_6)} = \mathcal{H}_6$;

(ii) A_6 é dissipativo em $\mathcal{H}_6$, ou seja, $Re(A_6U, U)_{\mathcal{H}_6} \leq 0$;

(iii) $I - A_6 : D(A_6) \subset \mathcal{H}_6 \to \mathcal{H}_6$ é sobrejetor.

O item (i) sairá como consequência dos itens (ii) e (iii).

(ii) Seja $U \in D(A_6)$ e

$$A_6U = \begin{bmatrix} \Phi \\ \dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x - \dfrac{\alpha}{\rho_1}\Phi \\ \Psi \\ \dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \dfrac{\beta}{\rho_2}\Psi \end{bmatrix}.$$

Usando o produto interno definido em (4.127), integrando por partes e utilizando as condições de fronteira (4.123), obtém-se

$$
\begin{aligned}
(A_6U,U)_{\mathcal{H}_6} &= k(\Phi_x+\Psi,\varphi_x+\psi)+(k(\varphi_x+\psi)_x-\alpha\Phi,\Phi)\\
&\quad +(b\psi_{xx}-k(\varphi_x+\psi)-\beta\Psi,\Psi)+b(\Psi_x,\psi_x)\\
&= \int_0^l k(\Phi_x+\Psi)(\overline{\varphi}_x+\overline{\psi})dx-\int_0^l k(\varphi_x+\psi)(\overline{\Phi}_x+\overline{\Psi})dx\\
&\quad -\int_0^l b\psi_x\overline{\Psi}_x dx+\int_0^l b\Psi_x\overline{\psi}_x dx\\
&\quad -\int_0^l \alpha\Phi\overline{\Phi}dx-\int_0^l \beta\Psi\overline{\Psi}dx\\
&= -\alpha\|\Phi\|_2^2-\beta\|\Psi\|_2^2-b(\psi_x,\Psi_x)+b\overline{(\psi_x,\Psi_x)}\\
&\quad +k(\Phi_x+\Psi,\varphi_x+\psi)-k\overline{(\Phi_x+\Psi,\varphi_x+\psi)}.
\end{aligned}
$$

Tomando a parte real

$$Re(A_6U,U)_{\mathcal{H}_6}=-\alpha\|\Phi\|_2^2-\beta\|\Psi\|_2^2\leq 0.$$

Portanto, A_6 é dissipativo em $\mathcal{H}_6$.
(iii) Dado $F=(f_1,f_2,f_3,f_4)^T\in\mathcal{H}_6$, mostraremos que a equação resolvente $(I-A_6)U=F$ possui uma única solução $U\in D(A_6)$. De fato, reescrevendo-a em termos de suas componentes, obtém-se o seguinte sistema

$$\varphi-\Phi=f_1 \in H_0^1(0,l), \tag{4.129}$$

$$\Phi-\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x+\frac{\alpha}{\rho_1}\Phi=f_2 \in L^2(0,l), \tag{4.130}$$

$$\psi-\Psi=f_3 \in H_0^1(0,l), \tag{4.131}$$

$$\Psi-\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}+\frac{k}{\rho_2}(\varphi_x+\psi)+\frac{\beta}{\rho_2}\Psi=f_4 \in L^2(0,l). \tag{4.132}$$

De (4.129) vem que $\Phi=\varphi-f_1$ e de (4.131) vem que $\Psi=\psi-f_3$, substituindo em (4.130) e (4.132), obtém-se

$$
\left\{
\begin{array}{l}
(\rho_1+\alpha)\varphi-k(\varphi_x+\psi)_x=\alpha f_1+\rho_1(f_1+f_2)\in L^2(0,l),\\
(\rho_2+\beta)\psi-b\psi_{xx}-k(\varphi_x+\psi)=\beta f_3+\rho_2(f_3+f_4)\in L^2(0,l).
\end{array}
\right. \tag{4.133}
$$

Definindo

$$
\left\{
\begin{array}{l}
g_1:=\alpha f_1+\rho_1(f_1+f_2)\in L^2(0,l),\\
g_2:=\beta f_3+\rho_2(f_3+f_4)\in L^2(0,l),
\end{array}
\right. \tag{4.134}
$$

o sistema (4.133) pode ser escrito da seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{l} (\rho_1+\alpha)\varphi - k(\varphi_x+\psi)_x = g_1 \in L^2(0,l), \\ (\rho_2+\beta)\psi - b\psi_{xx} - k(\varphi_x+\psi) = g_2 \in L^2(0,l). \end{array} \right. \tag{4.135}$$

No que segue resolveremos (4.135) em duas etapas.

Etapa 1: Existe um único par $(\varphi,\psi) \in H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l)$ satisfazendo o seguinte problema variacional

$$\int_0^l \left[(\rho_1+\alpha)\varphi\overline{\widetilde{\varphi}} + (\rho_2+\beta)\psi\overline{\widetilde{\psi}} + k(\varphi_x+\psi)(\overline{\widetilde{\varphi}}_x + \overline{\widetilde{\psi}}) + b\psi_x\overline{\widetilde{\psi}}_x\right] dx = \int_0^l \left[g_1\overline{\widetilde{\varphi}} + g_2\overline{\widetilde{\psi}}\right] dx, \tag{4.136}$$

para todos $(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}) \in H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l)$.
Para isso utilizamos o Teorema de Lax-Milgram. Definamos inicialmente

$$\begin{array}{rcl} a : (H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l))^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ ((\varphi,\psi),(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})) & \longmapsto & a((\varphi,\psi),(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})) = \displaystyle\int_0^l \Big\{(\rho_1+\alpha)\varphi\overline{\widetilde{\varphi}} + (\rho_2+\beta)\psi\overline{\widetilde{\psi}} \\ & & +k(\varphi_x+\psi)(\overline{\widetilde{\varphi}}_x + \overline{\widetilde{\psi}}) + b\psi_x\overline{\widetilde{\psi}}_x\Big\} dx \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \phi : H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}) & \longmapsto & \phi(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}) = \displaystyle\int_0^l \left\{g_1\overline{\widetilde{\varphi}} + g_2\overline{\widetilde{\psi}}\right\} dx. \end{array}$$

Assim definida, a é uma forma sesquilinear contínua e coerciva. De fato, usando as desigualdades triangular e de Poincaré, note que

$$\begin{array}{rcl} |a((\varphi,\psi),(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}))| & \leq & |\rho_1+\alpha||(\varphi,\widetilde{\varphi})| + k|(\varphi_x+\psi,\widetilde{\varphi}_x+\widetilde{\psi})| \\ & & +|\rho_2+\beta||(\psi,\widetilde{\psi})| + b|(\psi_x,\widetilde{\psi}_x)| \\ & \leq & (|\rho_1+\alpha|l^2+k)\|\varphi_x\|_2\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 + kl\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 + kl\|\varphi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 \\ & & +(b+(|\rho_2-\beta|+k)l^2)\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 \\ & \leq & C(\|\varphi_x\|_2\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 + \|\psi_x\|_2\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 + \|\varphi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 + \|\psi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2) \\ & = & C\|(\varphi,\psi)\|_{H_0^1\times H_0^1}\|(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})\|_{H_0^1\times H_0^1}, \end{array}$$

onde $C = \max\{|\rho_1+\alpha|l^2+k, kl, b+(|\rho_2+\beta|+k)l^2\}$. Além disso, note que

$$\begin{aligned}
\|(\varphi,\psi)\|^2_{H_0^1\times H_0^1} &= (\|\varphi_x\|_2+\|\psi_x\|_2)^2\\
&\le (\|\varphi_x+\psi\|_2+\|\psi\|_2+\|\psi_x\|_2)^2\\
&\le 3\|\varphi_x+\psi\|_2^2+3\|\psi\|_2^2+3\|\psi_x\|_2^2\\
&\le (\rho_1+\alpha)\|\varphi\|_2^2+\frac{3}{k}k\|\varphi_x+\psi\|_2^2+\frac{3}{(\rho_2+\beta)}(\rho_2+\beta)\|\psi\|_2^2+\frac{3}{b}b\|\psi_x\|_2^2\\
&\le C_1a((\varphi,\psi),(\varphi,\psi)),
\end{aligned}$$

onde $C_1=\max\left\{1,\dfrac{3}{k},\dfrac{3}{\rho_2+\beta},\dfrac{3}{b}\right\}$. Tomando $C_2=\dfrac{1}{C_1}>0$, obtém-se

$$a((\varphi,\psi),(\varphi,\psi))\ge C_2\|(\varphi,\psi)\|^2_{H_0^1\times H_0^1},\ \ \forall(\varphi,\psi)\in H_0^1(0,l)\times H_0^1(0,l).$$

Portanto, a é contínua e coerciva.
Além disso, novamente das desigualdades triangular e de Poincaré, obtém-se

$$|\phi(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})|=\|g_1\|_2\|\widetilde{\varphi}\|_2+\|g_2\|_2\|\widetilde{\psi}\|_2\le l\|g_1\|_2\|\widetilde{\varphi}_x\|_2+l\|g_2\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2\le C_0\|(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})\|_{H_0^1\times H_0^1},$$

onde $C_0=l\max\{\|g_1\|_2,\|g_2\|_2\}$, isto é, ϕ é limitada. A antilinearidade mostra-se facilmente. Então, pelo Teorema 2.28 existe um único par $(\varphi,\psi)\in H_0^1(0,l)\times H_0^1(0,l)$ tal que

$$a((\varphi,\psi),(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}))=\phi(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}),\forall(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})\in H_0^1(0,l)\times H_0^1(0,l),$$

ou seja, satisfazendo (4.133), como desejado.

Etapa 2: Mostrar que $(\varphi,\psi)\in H^2(0,l)\times H^2(0,l)$ e satisfaz (4.133). Com efeito, aplicando em (4.136) $\widetilde{\varphi}=\zeta\in C_0^1(0,l)$ e $\widetilde{\psi}=0$, tem-se

$$\int_0^l\varphi_x\overline{\zeta}_xdx=-\frac{1}{k}\int_0^l((\rho_2+\alpha)\varphi-g_1-k\psi_x)\overline{\zeta}dx,\ \ \forall\zeta\in C_0^1(0,l). \tag{4.137}$$

Como φ_x, $(\rho_2+\alpha)\varphi-g_1-k\psi_x\in L^2(0,l)$ e vale (4.137), então pela definição de derivada fraca $\varphi_x\in H^1(0,l)$, ou seja, $\varphi\in H^2(0,l)$. E ainda

$$k\varphi_{xx}=(\rho_2+\alpha)\varphi-g_1-k\psi_x \text{ em } L^2(0,l).$$

Isto mostra $(4.135)_1$. Além disso, recordando g_1 em $(4.134)_1$ e tomando $\Phi=\varphi-f_1\in H_0^1(0,l)$, obtém-se

$$\Phi-\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x-\frac{\alpha}{\rho_1}\Phi=f_2.$$

Logo, (4.129) e (4.130) estão satisfeitas.

Por outro lado, aplicando em (4.136) $\widetilde{\psi} = \eta \in C_0^1(0, l)$ e $\widetilde{\varphi} = 0$, tem-se

$$\int_0^l \psi_x \overline{\eta}_x dx = -\frac{1}{b} \int_0^l ((\rho_2 + \alpha)\psi - g_2 + k(\varphi_x + \psi))\overline{\eta} dx, \quad \forall \eta \in C_0^1(0, l). \tag{4.138}$$

Como ψ_x, $(\rho_2+\alpha)\psi - g_2 + k(\varphi_x+\psi) \in L^2(0, l)$ e vale (4.138), então pela definição de derivada fraca $\psi_x \in H^1(0, l)$, de onde $\psi \in H^2(0, l)$. E ainda

$$b\psi_{xx} = (\rho_2 + \alpha)\psi - g_2 + k(\varphi_x + \psi) \text{ em } L^2(0, l),$$

mostrando $(4.135)_2$. Além disso, de $(4.134)_2$ e $\Psi = \psi - f_3 \in H_0^1(0, l)$, obtém-se

$$\Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \frac{\beta}{\rho_2}\Psi = f_4 \text{ em } L^2(0, l).$$

Portanto, (4.131) e (4.132), ficam provadas, concluindo a prova do item (iii).
(i) Mostramos que A_6 é dissipativo e que $I - A_6$ é sobrejetor. Sendo $\mathcal{H}_6$ é um espaço de Hilbert, então pelo Teorema 2.27 $\mathcal{H}_6$ é reflexivo. Portanto, do Teorema 3.18 vem que $\overline{D(A_6)} = \mathcal{H}_6$. $\square$

4.7 Sistema Viscoelástico com História

4.7.1 Dedução do Sistema Viscoelástico com História

Um dos trabalhos pioneiros no estudo da equação de ondas com memória no contexto com história, ou simplesmente equação viscoelástica (de ondas) com história, pode ser encontrado no artigo de Dafermos [13], o qual surgiu por volta de 1970. Um estudo mais recente e moderno sobre a modelagem da equação da onda com memória (infinita) pode ser encontrado em Fabrizio et al. [17]. Para a dedução do modelo, consideramos uma corda em meios viscoelásticos e usamos uma lei viscoelástica de acordo com a teoria de Boltzmann [5, 6] para a relação de Tensão-Deformação conforme segue.

Novamente nosso ponto de partida é a equação de momento (4.16) normalizada. Aqui, por questões de notação, denotamos por φ o deslocamento vertical de uma corda de comprimento $l > 0$ e por σ a tensão vertical. Logo, a Equação de Momento nas variáveis φ e σ se escreve como

$$\varphi_{tt} = \sigma_x. \tag{4.139}$$

Para materiais viscoelásticos o princípio de Boltzmann sugere que a tensão não dependa apenas da deformação instantânea (como em (4.17)), mas sim da história de deformação $\{\varphi_x(s); 0 \leq s \leq t\}$. Neste sentido, a seguinte Lei Constitutiva de Tensão-Deformação considerada em meios viscoelásticos é dada por

$$\sigma(t) = E\left\{\varphi_x(t) - \int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)\varphi_x(\tau)\,d\tau\right\}, \tag{4.140}$$

onde E é o módulo de elasticidade de Young para tensão e g é conhecida como uma *medida de relaxamento,* ou simplesmente, *núcleo da memória*. Substituindo (4.140) em (4.139) e considerando, por simplicidade, $E = 1$, obtemos a seguinte equação da onda viscoelástica

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)\varphi_{xx}(\tau)d\tau = 0. \tag{4.141}$$

Fazendo a mudança de variáveis $s = t - \tau$, podemos reescrever formalmente o termo

$$\int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)\varphi_{xx}(\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} g(s)\varphi_{xx}(t-s)ds.$$

Logo, podemos reescrever (4.141) como

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \int_{0}^{\infty} g(s)\varphi_{xx}(t-s)ds = 0. \tag{4.142}$$

Ambas equações (4.141) e (4.142) são não-autônomas. Com efeito, note que do termo integral teríamos um coeficiente dependendo explicitamente da variável t e, então, pela Definição 3.22 não temos uma equação autônoma. Logo, para aplicar a teoria de semigrupos lineares vamos transformá-las em um sistema de equações autônomas. Para tanto, seguiremos as ideias de Grasselli e Pata [23] introduzindo uma nova variável no sistema. De fato, definamos a seguinte variável

$$\eta(\cdot,t,s) = \varphi(\cdot,t) - \varphi(\cdot,t-s), \quad t \geq 0,\ s > 0, \tag{4.143}$$

a qual é conhecida como *história de deslocamento relativo*. Neste caso, de (4.143) obtemos

$$\int_{0}^{\infty} g(s)\varphi_{xx}(t-s)ds = \left(\int_{0}^{\infty} g(s)\,ds\right)\varphi_{xx} - \int_{0}^{\infty} g(s)\eta_{xx}(t,s)ds. \tag{4.144}$$

Substituindo (4.144) em (4.142) e denotando por $g_0 = 1 - \displaystyle\int_{0}^{\infty} g(s)\,ds$, chegamos a

$$\varphi_{tt} - g_0\varphi_{xx} - \int_{0}^{\infty} g(s)\eta_{xx}(t,s)ds = 0 \quad \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty). \tag{4.145}$$

Neste momento, para que a equação (4.145) tenha sentido físico, devemos ter $g_0 > 0$ e, portanto, assumi-se que $g \in L^1(0,\infty)$ é tal que $\displaystyle\int_{0}^{\infty} g(s)\,ds \in (0,1)$. Com isto, temos agora uma equação autônoma com duas variáveis e precisamos de uma equação adicional com respeito a variável de deslocamento relativo η. Mas note que novamente de (4.143) a função η satisfaz formalmente a seguinte equação

$$\eta_t + \eta_s = \varphi_t \quad \text{em} \quad (0,l) \times (0,\infty) \times (0,\infty). \tag{4.146}$$

Das equações (4.145) e (4.146) chegamos finalmente ao seguinte sistema viscoelástico autônomo com história que será estudado nesta seção

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - g_0\varphi_{xx} - \displaystyle\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(t,s)ds = 0 \quad \text{em} \quad (0,l) \times (0,\infty), \\ \eta_t + \eta_s = \varphi_t \quad \text{em} \quad (0,l) \times (0,\infty) \times (0,\infty), \end{cases} \tag{4.147}$$

onde $g_0 > 0$ é uma constante. Assumindo que as extremidades da viga estão fixadas, então as seguintes condições de fronteira de Dirichlet são consideradas

$$\varphi(0,t) = \varphi(l,t) = \eta(0,t,s) = \eta(l,t,s) = 0, \ t \geq 0, \ s > 0. \tag{4.148}$$

As condições iniciais (e de fronteira para $s = 0$) associadas ao sistema (4.147) são dadas por

$$\begin{aligned} &\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \ \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \ x \in (0,l), \\ &\eta(x,0,s) = \eta_0(x,s), \ \eta(x,t,0) = 0, \ x \in (0,l), t \geq 0, s > 0. \end{aligned} \tag{4.149}$$

Notamos que as condições para η em (4.149) são necessárias para a boa colocação do problema, conforme o estudo da equação auxiliar (4.146) feito em [23]. Além disso, tais condições também podem ser deduzidas formalmente de (4.143) com as seguintes notações

$$\eta_0(x,s) := \varphi_0(x) - \varphi_0(x,-s), \quad \eta(x,t,0) := \lim_{s \to 0^+} \eta(x,t,s) = 0.$$

A seguir, mostraremos que o Problema de Valor Inicial e de Fronteira (4.147)-(4.149) possui uma única solução via teoria de semigrupos lineares. Como $g_0 > 0$ não influencia nos cálculos, estudaremos o problema normalizado.

4.7.2 Existência e Unicidade

Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - \varphi_{xx} - \displaystyle\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds = 0 & \text{em} \quad (0,l) \times (0,\infty), \\ \eta_t + \eta_s = \varphi_t & \text{em} \quad (0,l) \times (0,\infty)^2, \end{cases} \tag{4.150}$$

com condições iniciais e de fronteira

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \ \ \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \ \ \eta(x,0,s) = \eta_0(x,s), \ \ x \in (0,l), \ \ s > 0, \tag{4.151}$$

$$\begin{aligned} &\varphi(0,t) = \varphi(l,t) = \eta(0,t,s) = \eta(l,t,s) = 0, \quad t \geq 0,\ s > 0, \\ &\eta(x,t,0) = 0, \quad x \in (0,l),\ t \geq 0. \end{aligned} \tag{4.152}$$

Assumiremos que o núcleo da memória g é uma função satisfazendo as seguintes condições

$$g \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+) \quad \text{com} \quad g'(s) \leq 0 < g(s),\ \ s > 0. \tag{4.153}$$

Observação 23. Exemplos de funções que satisfazem as hipóteses da função g, $g_1(t) = e^{-t}$, $g_2(t) = \dfrac{1}{ln(t)}$, $g_3(t) = \dfrac{1}{(1+t)^p}$, $p > 1$.

Sob a hipótese (4.153), mostraremos que o PVIF (4.150)-(4.152) possui uma única solução utilizando teoria de semigrupos lineares. Para isso, considere inicialmente a mudança de variáveis $\Phi = \varphi_t$ e $U = (\varphi, \Phi, \eta)^T$. Assim, note que

$$U_t = \begin{bmatrix} \Phi \\ \varphi_{xx} + \displaystyle\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds \\ -\eta_s + \Phi \end{bmatrix} := A_7 U \tag{4.154}$$

e

$$U(0) = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \eta_0 \end{bmatrix} := U_0.$$

Deste modo, podemos escrever o problema (4.150)-(4.152) no seguinte problema de Cauchy abstrato,

$$\begin{cases} U_t = A_7 U, \ \ t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{4.155}$$

onde A_7 é definido em (4.154). Para contemplar a condição de fronteira (4.152), definiremos os seguintes espaços de Hilbert:

- $\mathcal{H}_7 = H_0^1(0,l) \times L^2(0,l) \times L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,l))$, onde o espaço

$$L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,l)) = \left\{ \eta : \mathbb{R}^+ \to H_0^1(0,l); \int_0^\infty g(s)\|\eta(s)\|_{H_0^1}^2 ds < \infty \right\}$$

é introduzido na Definição 2.94. Em $\mathcal{H}_7$ consideramos o produto interno

$$(U, \hat{U})_{\mathcal{H}_7} = (\varphi_x, \hat{\varphi_x}) + (\Phi, \hat{\Phi}) + \int_0^\infty g(s)(\eta_x(s), \hat{\eta_x}(s))ds$$

e norma

$$\|U\|_{\mathcal{H}_7}^2 = \|\varphi_x\|_2^2 + \|\Phi\|_2^2 + \int_0^\infty g(s)\|\eta_x(s)\|_2^2 ds,$$

para todos $U = (\varphi, \Phi, \eta)$ e $\hat{U} = (\hat{\varphi}, \hat{\Phi}, \hat{\eta}) \in \mathcal{H}_7$.

- Neste caso, o domínio do operador diferencial A_7 é dado por

$$D(A_7) = \Big\{U \in \mathcal{H}_7;\ \ \Phi \in H_0^1(0,l),\ \ \varphi + \int_0^\infty g(s)\eta(s)ds \in H^2(0,l),$$
$$\eta_s \in L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,l)),\ \ \eta(0) = 0\Big\}.$$

Sob as notações acima, estamos aptos a enunciar e demonstrar o resultado de existência e unicidade de solução para o problema (4.155) conforme o teorema a seguir.

Teorema 4.7 (Existência e Unicidade)**.** *Suponhamos que vale* (4.153). *Se* $U_0 \in D(A_7)$*, então o problema* (4.155) *possui uma única solução*

$$U \in C([0,\infty), D(A_7)) \cap C^1([0,\infty), \mathcal{H}_7),$$

dada por $U(t) = e^{A_7 t}U_0$.

Em outras palavras, se $(\varphi_0, \varphi_1, \eta_0) \in D(A_7)$*, então o PVIF* (4.150)-(4.152) *possui uma única solução na classe*

$$\varphi \in C([0,\infty), H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)) \cap C^1([0,\infty), H_0^1(0,l)) \cap C^2([0,\infty), L^2(0,l)),$$
$$\eta \in C([0,\infty), D(A_\eta)) \cap C^1([0,\infty) \cap L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,l))),$$

onde

$$D(A_\eta) = \left\{\eta \in L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,l));\ \ \eta_s \in L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,l)) \text{ e } \eta(0) = 0\right\}.$$

Demonstração. Em virtude do Teorema 3.24 basta mostrar que o operador A_7 é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em $\mathcal{H}_7$. Então, em vista do Teorema 3.20, é suficiente mostrar que:

(i) $\overline{D(A_7)} = \mathcal{H}_7$;

(ii) A_7 é dissipativo em $\mathcal{H}_7$, ou seja, $Re(A_7U, U)_{\mathcal{H}_7} \leq 0$;

(iii) $I - A_7 : D(A_7) \subset \mathcal{H}_7 \to \mathcal{H}_7$ é sobrejetor.

Provaremos os itens (ii) e (iii). O item (i) seguirá como consequência do Teorema 3.18.

(ii) Dado $U = (\varphi, \Phi, \eta)^T \in D(A_7)$, lembramos que $A_7U = \begin{bmatrix} \Phi \\ \varphi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds \\ -\eta_s + \Phi \end{bmatrix}$.

Usando o produto interno em $\mathcal{H}_7$, integração por partes e as condições de fronteira (4.152), obtém-se

$$
\begin{aligned}
(A_7U,U)_{\mathcal{H}_7} &= (\Phi_x,\varphi_x)+(\varphi_{xx}+\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds,\Phi)\\
&\quad+\int_0^\infty g(s)((-\eta_s)_x(s)+\Phi_x,\eta_x(s))ds\\
&= \int_0^l \Phi_x\overline{\varphi}_x dx-\int_0^l \varphi_x\overline{\Phi}_x dx\\
&\quad+\int_0^\infty g(s)(\eta_x(s),\Phi_x)ds-\int_0^\infty g(s)(\Phi_x(s),\eta_x)ds\\
&\quad-\int_0^\infty g(s)((\eta_s)_x(s),\eta_x(s))ds\\
&= -\int_0^\infty g(s)(\eta_x(s),\eta_x(s))ds+(\Phi_x,\varphi_x)-\overline{(\Phi_x,\varphi_x)}\\
&\quad-\int_0^\infty g(s)(\eta_x(s),\Phi_x)ds+\overline{\int_0^\infty g(s)(\eta_x(s),\Phi_x(s))ds}.
\end{aligned}
$$

Tomando a parte real

$$
Re(A_7U,U)_{\mathcal{H}_7}=-\frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\frac{d}{ds}\|\eta_x(s)\|_2^2ds.
$$

Integrando por partes novamente, obtém-se

$$
Re(A_7U,U)_{\mathcal{H}_7}=-\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\left(g(1/y)\|\eta_x(1/y)\|_2^2-g(y)\|\eta_x(y)\|_2^2-\int_y^{\frac{1}{y}} g'(s)\|\eta_x(s)\|_2^2ds\right). \tag{4.156}
$$

Como $\eta\in L^2_g(\mathbb{R}^+,H^1_0(0,l))$, segue que $g\|\eta_x(\cdot)\|_2^2\in L^1(\mathbb{R}^+)$ e, consequentemente,

$$
\lim_{y\to 0} g(1/y)\|\eta_x(1/y)\|_2^2=\lim_{z\to\infty} g(z)\|\eta_x(z)\|_2^2=0.
$$

Além disso, usando que g é decrescente, pela Desigualdade Triangular para integrais e pela Desigualdade de Hölder, tem-se:

$$
\begin{aligned}
g(y)\|\eta_x(y)\|_2^2 &= g(y)\left\|\int_0^y (\eta_s)_x(s)ds\right\|_2^2\\
&\le g(y)\left(\int_0^y \|(\eta_s)_x(s)\|_2 ds\right)^2\\
&\le \left(\int_0^y [g(s)]^{1/2}\|(\eta_s)_x(s)\|_2 ds\right)^2\\
&\le y\int_0^y g(s)\|(\eta_s)_x(s)\|_2^2ds,\ \forall y\in\mathbb{R}^+.
\end{aligned}
$$

Como $\eta_s \in L^2_g(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l))$, temos

$$0 \leq \lim_{y\to 0} g(y)\|\eta_x(y)\|_2^2 \leq \lim_{y\to 0} y \int_0^y g(s)\|(\eta_s)_x(s)\|_2^2 ds = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{y\to 0} g(y)\|\eta_x(y)\|_2^2 = 0.$$

Portanto, de (4.156) e (4.153), vem que

$$Re(A_7U,U)_{\mathcal{H}_7} = \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\eta_x(s)\|_2^2 ds \leq 0, \tag{4.157}$$

de onde concluímos que A_7 é dissipativo em $\mathcal{H}_7$.
(iii) Dado $(f_1, f_2, f_3)^T \in \mathcal{H}_7$, mostraremos que existe uma única solução $(\varphi, \Phi, \eta)^T \in D(A_7)$ para o seguinte sistema de equações:

$$\varphi - \Phi = f_1 \quad \text{em} \quad H^1_0(0,l), \tag{4.158}$$

$$\Phi - \varphi_{xx} - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds = f_2 \quad \text{em} \quad L^2(0,l), \tag{4.159}$$

$$\eta + \eta_s - \Phi = f_3 \quad \text{em} \quad L^2_g(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l)). \tag{4.160}$$

Multiplicando a equação (4.160) por e^s, tem-se

$$\eta(s)e^s - \Phi e^s + \eta_s e^s = f_3(s)e^s.$$

Isto é,

$$\frac{d}{ds}(\eta(s)e^s) = \Phi e^s + f_3(s)e^s.$$

Se $0 \leq y \leq s$, podemos reescrever a última igualdade como

$$\frac{d}{dy}(\eta(y)e^y) = \Phi e^y + f_3 e^y.$$

Integrando com relação a y de 0 a s, tem-se:

$$\int_0^s \frac{d}{dy}(\eta(y)e^y)dy = \Phi\int_0^s e^y dy + \int_0^s f_3(y)e^y dy.$$

Pondo que $\eta(0) = 0$, vem

$$\eta(s)e^s = \Phi(e^s - 1) + \int_0^s f_3(y)e^y dy,$$

ou seja,

$$\eta(s) = (1 - e^{-s})\Phi + \phi_{f_3}(s), \tag{4.161}$$

onde $\phi_{f_3}(s) = \int_0^s f_3(y)e^{y-s}dy$ está bem definida conforme o Lema 2.98, encontrado no Capítulo 2.
Da equação (4.158), vem que

$$\Phi = \varphi - f_1. \tag{4.162}$$

Substituindo (4.162) em (4.161), segue que

$$\eta(s) = (1 - e^{-s})(\varphi - f_1) + \phi_{f_3}(s). \tag{4.163}$$

Além disso, substituindo (4.162) e (4.163) em (4.159)

$$\varphi - \left(1 + \int_0^\infty g(s)(1 - e^{-s})ds\right)\varphi_{xx} = h, \tag{4.164}$$

onde denotamos

$$h = \left(\int_0^\infty g(s)(1 - e^{-s})ds\right)(f_1)_{xx} + f_1 + \int_0^\infty g(s)(\phi_{f_3})_{xx}(s)ds. \tag{4.165}$$

Observação 24. Dado $u \in H_0^1(0,l)$, então podemos definir

$$\begin{aligned} -\partial_{xx}u : H_0^1(0,l) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \langle -\partial_{xx}u, v\rangle := (\partial_x v, \partial_x u)_2. \end{aligned} \tag{4.166}$$

O operador $-\partial_{xx}$, está bem definido como em (4.166). Agora, note que $-\partial_{xx}u$ é contínuo e linear. De fato, utilizando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Poincaré, obtém-se

$$\begin{aligned} &|\langle -\partial_{xx}u, v\rangle| = |(\partial_x v, \partial_x u)_2| \leq \|\partial_x v\|_2 \|\partial_x u\|_2 = \|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1} \\ \Rightarrow\ &\| - \partial_{xx}u\|_{H^{-1}} \leq \|u\|_{H_0^1},\ \ \forall\, u \in H_0^1(0,l). \end{aligned}$$

Logo, $-\partial_{xx}$ é contínuo, a linearidade é verificada facilmente. Portanto, dada $u \in H_0^1(0,l)$ tem-se $-\partial_{xx}u \in H^{-1}(0,l)$.

Sabemos que $f_1 \in H_0^1(0,l)$ e do Lema 2.98, tem-se que $\Phi_{f_3}(s) \in H_0^1(0,l)$, então usando a Observação 24 é possível verificar que $(f_1)_{xx}$, $\displaystyle\int_0^\infty g(s)(\phi_{f_3})_{xx}(s)ds \in [H_0^1(0,l)]'$, ou seja, pondo $c_g = 1 + \displaystyle\int_0^\infty g(s)(1 - e^{-s})ds > 0$, pode-se reescrever (4.164) na forma

$$\varphi - c_g\varphi_{xx} = h \in [H_0^1(0,l)]'. \tag{4.167}$$

Consideremos agora a forma sesquilinear

$$\begin{array}{rcl} a : H_0^1(0,l) \times H_0^1(0,l) & \to & \mathbb{C} \\ (\varphi, \widetilde{\varphi}) & \mapsto & a(\varphi, \widetilde{\varphi}) = (\varphi, \widetilde{\varphi}) + c_g(\varphi_x, \widetilde{\varphi}_x). \end{array}$$

Note que a é sesquilinear. Além disso,

- a é limitada. Com efeito, pela Desigualdade de Poincaré, $\|u\|_2 \leq l\|u_x\|_2$. Então,

$$\begin{array}{rcl} |a(\varphi, \widetilde{\varphi})| \leq |(\varphi, \widetilde{\varphi})| + c_g|(\varphi_x, \widetilde{\varphi}_x)| & \leq & \|\varphi\|_2\|\widetilde{\varphi}\|_2 + c_g\|\varphi_x\|_2\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 \\ & \leq & C\|\varphi\|_{H_0^1}\|\widetilde{\varphi}\|_{H_0^1}, \end{array}$$

  onde $C := (l^2 + c_g)$.

- a é coerciva. Note que

$$a(\varphi, \varphi) = \|\varphi\|_2^2 + c_g\|\varphi_x\|_2^2 \geq c_g\|\varphi_x\|_2^2 = c_g\|\varphi\|_{H_0^1}^2.$$

Portanto, a é coerciva.
Tome $\Delta : H_0^1(0,L) \to \mathbb{R}$, tal que $\Delta(\widetilde{\varphi}) = \displaystyle\int_0^l h\overline{\widetilde{\varphi}}dx$ é antilinear de acordo com a Definição 2.11 e limitado pois $h \in [H_0^1(0,l)]'$. Então, pelo Teorema de Lax-Milgram existe um único $\varphi \in H_0^1(0,l)$ tal que

$$a(\varphi, \widetilde{\varphi}) = \Delta(\widetilde{\varphi}).$$

E ainda, como $\langle -\varphi_{xx}, \widetilde{\varphi}\rangle = (-\varphi_x, \widetilde{\varphi}_x)$, para todos $\varphi, \widetilde{\varphi} \in H_0^1(0,l)$, segue que $\varphi \in H_0^1(0,l)$ satizfaz a seguinte equação

$$\langle \varphi - c_g\varphi_{xx}, \widetilde{\varphi}\rangle = \langle h, \widetilde{\varphi}\rangle, \forall \widetilde{\varphi} \in H_0^1(0,l),$$

ou seja, $u \in H_0^1(0,l)$ é solução de (4.167). Sendo assim, da equação (4.162) vem que
$\Phi = \varphi - f_1 \in H_0^1(0,l)$. Consequentemente, da equação (4.161) e do Lema 2.98, tem-se

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^\infty g(s)\|\eta_x(s)\|_2^2 ds & = & \displaystyle\int_0^\infty g(s)\|(1 - e^{-s})\Phi_x + (\phi_{f_3})_x(s)ds\|_2^2 \\ & \leq & 2\displaystyle\int_0^\infty g(s)(1 - e^{-s})^2\|\Phi_x\|_2^2 ds + 2\int_0^\infty g(s)\|\phi_{f_3}(s)\|_2^2 ds \\ & \leq & 2(\|g(s)\|_{L^1(\mathbb{R}^+)})\|\Phi\|_{H_0^1}^2 + \|\phi_{f_3}(s)\|_{L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,l))}^2) < \infty. \end{array}$$

Assim, $\eta \in L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,l)$. E ainda, $\eta(0) = 0$. Lembrando que Φ não depende de s e aplicando o Teorema de Leibniz, segue por (4.161) que

$$\begin{aligned}
\eta + \eta_s &= \left[(1-e^{-s})\Phi + \int_0^s e^{y-s} f_3(y)dy\right] + \left[e^{-s}\Phi - \int_0^s e^{y-s} f_3(y)dy + f_3(s)\right] \\
&= \Phi + \int_0^s e^{y-s} f_3(y)dy - \int_0^s e^{y-s} f_3(y)dy + f_3(s) \\
&= \Phi + f_3(s), \ s \in \mathbb{R}^+.
\end{aligned}$$

Então, η satisfaz a equação (4.160) com $\eta_s \in L^2_g(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l))$ e $\eta(0) = 0$.

Finalmente, substituindo a expressão de h em (4.164) conclui-se que

$$\varphi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds = \Phi - f_2 \in L^2(0,l),$$

de onde vem que $\varphi + \displaystyle\int_0^l g(s)\eta(s)ds \in H^2(0,l)$ e a equação (4.159) é satisfeita. Portanto, o sistema (4.158)- (4.160) possui uma única solução $(\varphi, \Phi, \eta)^T \in D(A_7)$, como desejado.
(i) Mostramos que A_7 é dissipativo e $I - A_7$ é sobrejetor. Como $\mathcal{H}_7$ é um espaço de Hilbert, então pelo Teorema 2.27, $\mathcal{H}_7$ é reflexivo. Portanto, pelo Teorema 3.18, $\overline{D(A_7)} = \mathcal{H}_7$. $\square$

4.8 Sistema de Timoshenko com Memória

4.8.1 Dedução do Sistema de Timoshenko com Memória

Nesta seção estudaremos o sistema de Timoshenko com acoplamento viscoelástico no momento fletor, ou seja, com termo de memória na equação do ângulo de rotação. Tal sistema origina-se considerando as equações de momento para o sistema de Timoshenko (4.112)-(4.113), mas considerando a viga em meios viscoelásticos e, portanto, uma lei constitutiva viscoelástica para o momento fletor M assim como feito para onda em (4.140), em vez da relação (4.115). Neste caso, a lei constitutiva (4.114) permanece inalterada. Os trabalhos pioneiros no estudo do sistema de Timoshenko com memória (com e sem história) podem ser vistos em Muñoz Rivera et al. [4, 36]. Para uma referência em português, ver também o livro [35].

Usaremos as mesmas notações introduzidas na Seção 4.6. Novamente nosso ponto de partida são as equações de momento para o deslocamento transversal e ângulo de rotação

$$\rho_1\varphi_{tt} = S_x \quad \text{e} \quad \rho_2\psi_{tt} = M_x - S, \tag{4.168}$$

onde ρ_1 e ρ_2 são introduzidos em (4.116). Além disso, de acordo com o exposto inicialmente nesta seção, consideramos as seguintes leis constitutivas

$$S = k(\varphi_x + \psi) \quad \text{e} \quad M = b_0\psi_x - \int_0^\infty g(s)\psi_x(t-s)\, ds, \tag{4.169}$$

onde k e b_0 também são definidos em (4.116) (trocamos, por hora, b por b_0 apenas por questões de notação). Note que usamos o princípio de Boltzmann para a relação de tensão-deformação do momento fletor M, de forma semelhante a (4.140). Logo, substituindo (4.169) em (4.168), obtemos o seguinte sistema de Timoshenko com memória

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \quad \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty), \\ \rho_2\psi_{tt} - b_0\psi_{xx} + k(\varphi_x+\psi) + \displaystyle\int_0^\infty g(s)\psi_{xx}(t-s)ds = 0 \;\; \text{em} \;\; (0,l)\times(0,\infty). \end{cases} \tag{4.170}$$

Neste caso, assim como feito para a equação da onda com memória (4.142), devemos introduzir a história de deslocamento relativo com respeito ao ângulo de rotação ψ, ou seja, definamos a seguinte variável

$$\eta(\cdot,t,s) = \psi(\cdot,t) - \psi(\cdot,t-s), \quad t \geq 0,\ s > 0, \tag{4.171}$$

Com isto, podemos reescrever o termo integral de (4.170) como

$$\int_0^\infty g(s)\psi_{xx}(t-s)ds = \left(\int_0^\infty g(s)\,ds\right)\psi_{xx} - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(t,s)ds. \tag{4.172}$$

Além disso, derivando (4.171) com respeito a t e s, temos

$$\eta_t + \eta_s = \psi_t \quad \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty)\times(0,\infty). \tag{4.173}$$

De (4.172)-(4.173) e denotando por $b = b_0 - \displaystyle\int_0^\infty g(s)ds$, podemos reescrever (4.170) no seguinte sistema de Timoshenko com memória

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \quad \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x+\psi) - \displaystyle\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(t,s)ds = 0 \quad \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty), \\ \eta_t + \eta_s = \psi_t \quad \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty)\times(0,\infty). \end{cases} \tag{4.174}$$

Para que $b > 0$, vamos assumir que $g \in L^1(0,\infty)$ satisfaz $\displaystyle\int_0^\infty g(s)\,ds \in (0,b_0)$. Acoplaremos ao sistema (4.174) as seguintes condições iniciais e de fronteira

$$\begin{aligned} &\varphi(x,0) = \varphi_0(x),\ \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x),\ \psi(x,0) = \psi_0(x),\ \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \\ &\eta(x,0,s) = \eta_0(x,s), \quad x \in (0,l),\ s > 0, \end{aligned} \tag{4.175}$$

e

$$\begin{aligned} &\varphi(x,t) = \psi(x,t) = \eta(x,t,s) = 0, \quad x \in \{0,l\},\ t \geq 0,\ s > 0, \\ &\eta(x,t,0) = 0,\ x \in (0,l),\ t \geq 0. \end{aligned} \tag{4.176}$$

No que segue, mostraremos a existência e unicidade de solução via teoria de semigrupos lineares para o PVIF (4.174)-(4.176).

4.8.2 Existência e Unicidade

Considere o seguinte sistema

$$
\begin{cases}
\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 & \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty), \\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - \displaystyle\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds = 0 & \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty), \\
\eta_t + \eta_s = \psi_t & \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty)^2,
\end{cases}
\tag{4.177}
$$

com condições inciais

$$
\begin{cases}
\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \;\; \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \;\; \psi(x,0) = \psi_0(0), \\
\psi_t(x,0) = \psi_1(x), \;\; \eta(x,0,s) = \eta_0(x,s), \;\; x \in (0,l), \;\; s > 0,
\end{cases}
\tag{4.178}
$$

e de fronteira

$$
\begin{cases}
\varphi(0,t) = \varphi(l,t) = \psi(0,t) = \psi(l,t) = \eta(0,t,s) = \eta(l,t,s) = 0, \;\; t \geq 0, \; s > 0, \\
\eta(x,t,0) = 0, \;\; x \in (0,l), \;\; t \geq 0.
\end{cases}
\tag{4.179}
$$

Assumiremos que o núcleo da memória g satisfaz a seguinte hipótese:

$$
g \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+) \text{ com } g'(s) \leq 0 < g(s), \;\; s \in (0,\infty).
\tag{4.180}
$$

Com isto, mostraremos que o PVIF (4.177)-(4.179) possui uma única solução utilizando teoria de semigrupos lineares. Considere inicialmente $\Phi = \varphi_t, \Psi = \psi_t$ e $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \eta)^T$. Assim,

$$
U_t = \begin{bmatrix}
\Phi \\
\dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x \\
\Psi \\
\dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) + \dfrac{1}{\rho_2}\displaystyle\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds \\
\Psi - \eta_s
\end{bmatrix} := A_8 U
\tag{4.181}
$$

e

$$
U(0) = [\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \eta_0]^T := U_0.
$$

Deste modo, é possível reescrever o problema (4.177)-(4.179) no seguinte problema de Cauchy abstrato

$$
\begin{cases}
U_t = A_8 U, \;\; t > 0, \\
U(0) = U_0,
\end{cases}
\tag{4.182}
$$

onde A_8 é definido em (4.181). Para contemplar a condição de fronteira (4.179), defini-se os seguintes espaços de Hilbert

$$\mathcal{H}_8 = H_0^1(0,l) \times L^2(0,l) \times H_0^1(0,l) \times L^2(0,l) \times L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,l)),$$

onde $L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,l)) = \left\{ \eta : \mathbb{R}^+ \to H_0^1(0,l); \int_0^\infty g(s)\|\eta(s)\|_{H_0^1(0,l)}^2 ds < \infty \right\}$, com produto interno e norma dados por

$$\begin{aligned}(U,\hat{U})_{\mathcal{H}_8} &= k(\varphi_x + \psi, \hat{\varphi}_x + \hat{\psi}) + \rho_1(\Phi, \hat{\Phi}) + b(\psi_x, \hat{\psi}_x) + \rho_2(\Psi, \hat{\Psi}) \\ &\quad + \int_0^\infty g(s)(\eta_x(s), \hat{\eta_x}(s))ds\end{aligned}$$

e

$$\|U\|_{\mathcal{H}_8}^2 = \rho_1\|\Phi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + k\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \int_0^\infty g(s)\|\eta_x(s)\|_2^2 ds,$$

para todos $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \eta)^T$, $\hat{U} = (\hat{\varphi}, \hat{\Phi}, \hat{\psi}, \hat{\Psi}, \hat{\eta})^T \in \mathcal{H}_8$. Neste caso, o domínio do operador diferencial A_8 é dado por

$$\begin{aligned}D(A_8) = \Big\{ U \in \mathcal{H}_8;\ \ \varphi, \psi + \int_0^\infty g(s)\eta(s)ds \in H^2(0,l),\ \ \Phi, \Psi \in H_0^1(0,l), \\ \eta_s \in L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,l)), \eta(0) = 0 \Big\}.\end{aligned}$$

Sob as notações acima temos o seguinte resultado de existência e unicidade para (4.182).

Teorema 4.8 (Existência e Unicidade)**.** *Se g satisfaz* (4.180) *e $U_0 \in D(A_8)$, então o problema* (4.182) *possui uma única solução*

$$U \in C([0,\infty), D(A_8)) \cap C^1([0,\infty), \mathcal{H}_8),$$

dada por $U(t) = e^{A_8 t}U_0$.

Demonstração. Usando o Teorema 3.24, é suficiente mostrar que o operador A_8 é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $S(t) = e^{A_8 t}$ em $\mathcal{H}_8$. Neste caso, pelo Teorema de Lumer-Phillips, basta mostrar que:

(i) $\overline{D(A_8)} = \mathcal{H}_8$;

(ii) A_8 é dissipativo em $\mathcal{H}_8$, ou seja, $Re(A_8U, U)_{\mathcal{H}_8} \leq 0$;

(iii) $I - A_8 : D(A_8) \subset \mathcal{H}_8 \to \mathcal{H}_8$ é sobrejetor.

Inicialmente, mostraremos os itens (ii) e (iii).
(ii) Seja $U=(\varphi,\Phi,\psi,\Psi,\eta)^T\in D(A_8)$ e relembre que

$$A_8U=\begin{bmatrix}\Phi\\ \dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x\\ \Psi\\ \dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx}-\dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x+\psi)+\dfrac{1}{\rho_2}\displaystyle\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds\\ \Psi-\eta_s\end{bmatrix}.$$

Tomando o produto interno em $\mathcal{H}_8$, usando integração por partes e as condições de fronteira (4.179), obtém-se

$$\begin{aligned}(A_8U,U)_{\mathcal{H}_8} &= k(\Phi_x+\Psi,\varphi_x+\psi)+b(\Psi_x,\psi_x)+k((\varphi_x+\psi)_x,\Phi)\\ &\quad+(b\psi_{xx}-k(\varphi_x+\psi)+\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds,\Psi)\\ &\quad+\int_0^\infty g(s)((-\eta_s)_x(s)+\Psi_x,\eta_x(s))ds\\ &= k\int_0^l(\Phi_x+\Psi)(\overline{\varphi}_x+\overline{\psi})dx-k\int_0^l(\varphi_x+\psi)(\overline{\Phi}_x+\overline{\Psi})dx\\ &\quad+b\int_0^l\Psi_x\overline{\psi}_xdx-b\int_0^l\psi_x\overline{\Psi}_xdx\\ &\quad+\int_0^\infty g(s)(\eta_x(s),\Psi_x)ds-\int_0^\infty g(s)(\Psi_x,\eta_x(s))ds\\ &\quad-\int_0^\infty g(s)((\eta_s)_x(s),\eta_x(s))ds\\ &= -\int_0^\infty g(s)((\eta_s)_x(s),\eta_x(s))ds\\ &\quad+k(\Phi_x+\Psi,\varphi_x+\psi)-k\overline{(\Phi_x+\Psi,\varphi_x+\psi)}\\ &\quad+b(\Psi_x,\psi_x)-b\overline{(\Psi_x,\psi_x)}\\ &\quad-\int_0^\infty g(s)(\eta_x(s),\Psi_x)ds+\overline{\int_0^\infty g(s)(\eta_x(s),\Psi_x)ds}.\end{aligned}$$

Tomando a parte real e integrando por partes,

$$\begin{aligned}Re(A_8U,U)_{\mathcal{H}_8} &= -\int_0^\infty g(s)Re((\eta_s)_x(s),\eta_x(s))ds\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\frac{d}{ds}\|\eta_x(s)\|_2^2ds\\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\eta_x(s)\|_2^2ds,\end{aligned}$$

onde procedemos como de (4.156) em diante. Portanto, da condição (4.180), concluímos que

A_8 é dissipativo em $\mathcal{H}_8$.
(iii) Dado $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)^T \in \mathcal{H}_8$, encontraremos uma solução $(\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \eta)^T \in D(A_8)$ para o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \varphi - \Phi &= f_1, && (4.183)\\ \Phi - \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x &= f_2, && (4.184)\\ \psi - \Psi &= f_3, && (4.185)\\ \Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \frac{b}{\rho_2}\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds &= f_4, && (4.186)\\ \eta - \Psi + \eta_s &= f_5. && (4.187) \end{aligned}$$

De modo análogo à equação (4.160), encontra-se

$$\eta(s) = (1 - e^{-s})\Psi + \phi_{f_5}(s), \tag{4.188}$$

e onde $\phi_{f_5}(s) = \int_0^s f_5(y)e^{y-s}dy$ está bem definida pelo Lema 2.98 e $\phi_{f_5}(s) \in L^2_g(\mathbb{R}^+, H^1_0(0, l))$.
Da equação (4.185), vem que $\Psi = \psi - f_3$, substituindo em (4.188), segue que

$$\eta(s) = (1 - e^{-s})(\psi - f_3) + \phi_{f_5}(s). \tag{4.189}$$

De (4.183), vem que $\Phi = \varphi - f_1$, substituindo em (4.184), segue que

$$\rho_1\varphi - k(\varphi_x + \psi)_x = \rho_1(f_1 + f_2). \tag{4.190}$$

De (4.185) vem que $\Psi = \psi - f_3$ e de (4.189) vem que $\eta_{xx}(s) = (1 - e^{-s})(\psi_{xx} - f_{3xx}) + \phi_{f_{5xx}}(s)$.
Substituindo em (4.186), segue que

$$\begin{aligned} \rho_2\psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - b\int_0^\infty g(s)(1 - e^{-s})ds\psi_{xx} &= \rho_2(f_3 + f_4)\\ -b\int_0^\infty g(s)(1 - e^{-s})dsf_{3xx} + b\int_0^\infty g(s)\phi_{f_{5xx}}(s)ds. & \qquad (4.191) \end{aligned}$$

Denotando por

$$\begin{aligned} \rho_1(f_1 + f_2) &:= g_1,\\ \rho_2(f_3 + f_4) - b\int_0^\infty g(s)(1 - e^{-s})dsf_{3xx} + b\int_0^\infty g(s)\phi_{f_{5xx}}(s)ds &:= g_2 \end{aligned} \tag{4.192}$$

e $c_g = 1 + \int_0^\infty g(s)(1 - e^{-s})ds$, assim é possível escrever (4.190)-(4.191) como

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi - k(\varphi_x+\psi)_x &= g_1 \in L^2(0,l), & (4.193)\\ \rho_2\psi - bc_g\psi_{xx} + k(\varphi_x+\psi) &= g_2 \in H^{-1}(0,l). & (4.194)\end{aligned}$$

Uma vez que $f_3,\ \phi_{f_5} \in H_0^1(0,l)$, então pela Observação 24 tem-se que

$$(f_3)_{xx},\ (\phi_{f_5})_{xx} \in H^{-1}(0,l).$$

Deste modo, $g_2 \in H^{-1}(0,l)$.

Afirmação: Existe uma única solução $(\varphi,\psi) \in H_0^1(0,l)\times H_0^1(0,l)$ para o seguinte problema variacional

$$\int_0^l \rho_1\varphi\overline{\widetilde{\varphi}}dx + \int_0^l k(\varphi_x+\psi)(\overline{\widetilde{\varphi}}_x+\overline{\widetilde{\psi}})dx + \int_0^l \rho_2\psi\overline{\widetilde{\psi}}dx + bc_g\int_0^l \psi_x\overline{\widetilde{\psi}}_x dx = \int_0^l (g_1\overline{\widetilde{\varphi}} + g_2\overline{\widetilde{\psi}})dx, \tag{4.195}$$

com $\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi} \in H_0^1(0,l)$. Para isso, será utilizado o Teorema de Lax-Milgram. Com efeito, considere a seguinte forma sesquilinear

$$\begin{aligned} a : (H_0^1(0,l)\times H_0^1(0,l))^2 &\to \mathbb{C}\\ ((\varphi,\psi),(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})) &\mapsto \rho_1(\varphi,\widetilde{\varphi}) + k(\varphi_x+\psi,\widetilde{\varphi}_x+\widetilde{\psi}) + \rho_2(\psi,\widetilde{\psi}) + bc_g(\psi_x,\widetilde{\psi}_x).\end{aligned}$$

Observe que a é contínua e coerciva. Seja $(\varphi,\psi),(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}) \in H_0^1(0,l)\times H_0^1(0,l)$ e note que pelas Desigualdades Triangular e de Poincaré, tem-se

$$\begin{aligned} |a((\varphi,\psi),(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}))| &\le \rho_1\|\varphi\|_2\|\widetilde{\varphi}\|_2 + k(\|\varphi_x\|_2\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 + \|\varphi_x\|_2\|\widetilde{\psi}\|_2 + \|\psi\|_2\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 + \|\psi\|_2\|\widetilde{\psi}\|_2)\\ &\quad +\rho_2\|\psi\|_2\|\widetilde{\psi}\|_2 + bc_g\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2\\ &\le \rho_1 l^2\|\varphi_x\|_2\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 + k(\|\varphi_x\|_2\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 + l\|\varphi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 + l\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\varphi}_x\|_2\\ &\quad +l^2\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2) + \rho_2 l^2\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 + bc_g\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2\\ &= (\rho_1 l^2 + kl)\|\varphi_x\|_2\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 + [kl^2 + \rho_2 l^2 + bc_g]\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2\\ &\quad +kl\|\varphi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 + kl\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\varphi}_x\|_2\\ &\le C(\|\varphi_x\|_2\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 + \|\varphi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 + \|\psi_x\|_2\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 + \|\psi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2)\\ &= C(\|\varphi_x\|_2 + \|\psi_x\|_2)(\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 + \|\widetilde{\psi}_x\|_2)\\ &= C(\|(\varphi,\psi)\|_{H_0^1\times H_0^1})(\|(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})\|_{H_0^1\times H_0^1}),\end{aligned}$$

onde $C := \max\{\rho_1 l^2 + kl, kl^2 + \rho_2 l^2 + bc_g, kl\}$. Logo, a é contínua. Note ainda que usando a Desigualdade Triangular Inversa ($\|a+b\| \ge \|a\| - \|b\|$) e $(a+b+c)^2 \le 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$, tem-se

$$
\begin{aligned}
\|(\varphi,\psi)\|^2_{H_0^1\times H_0^1} &= (\|\varphi_x\|_2+\|\psi_x\|_2)^2 \\
&\leq (\|\psi_x\|_2+\|\psi\|_2+\|\varphi_x+\psi\|_2)^2 \\
&\leq 3\|\psi_x\|_2^2+3\|\psi\|_2^2+3\|\varphi_x+\psi\|_2^2+\rho_1\|\varphi\|_2^2 \\
&\leq \frac{3}{bc_g}bc_g\|\psi_x\|_2^2+\frac{3}{\rho_2}\rho_2\|\psi\|_2^2+\frac{3}{k}k\|\varphi_x+\psi\|_2^2+\rho_1\|\varphi\|_2^2 \\
&\leq R(bc_g\|\psi_x\|_2^2+\rho_1\|\varphi\|_2^2+k\|\varphi_x+\psi\|_2^2+\rho_2\|\psi\|_2^2) \\
&= R\cdot a((\varphi,\psi),(\varphi,\psi)),
\end{aligned}
$$

onde $R=\max\left\{\dfrac{3}{bc_g},\dfrac{3}{\rho_2},\dfrac{3}{k},1\right\}$. Pondo $S:=\dfrac{1}{R}$, tem-se

$$
a((\varphi,\psi),(\varphi,\psi))\geq S\|(\varphi,\psi)\|^2_{H_0^1\times H_0^1},\;\; \forall(\varphi,\psi)\in H_0^1(0,l)\times H_0^1(0,l),
$$

mostrando que a é coerciva. Agora considere

$$
\begin{aligned}
\Delta: H_0^1(0,l)\times H_0^1(0,l) &\to \mathbb{C} \\
\Delta(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}) &\mapsto (g_1,\widetilde{\varphi})+\langle g_2,\widetilde{\psi}\rangle.
\end{aligned}
$$

Então Δ é antilinear e limitado (contínuo). De fato, a antlinearidade segue facilmente. Quanto a limitação, tem-se:

$$
\begin{aligned}
|\Delta(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})| &\leq \|g_1\|_2\|\widetilde{\varphi}\|_2+\|g_2\|_{H^{-1}}\|\widetilde{\psi}\|_{H_0^1} \\
&\leq l\|g_1\|_2\|\widetilde{\varphi}\|_{H_0^1}+\|g_2\|_{H^{-1}}\|\widetilde{\psi}\|_{H_0^1} \\
&\leq K\|(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})\|_{H_0^1\times H_0^1},
\end{aligned}
$$

onde $K=\max\{l\|g_1\|_2,\|g_2\|_{H^{-1}}\}$. Então, pelo Teorema de Lax-Milgram existe um único par $(\varphi,\psi)\in H_0^1\times H_0^1$ tal que

$$
a((\varphi,\psi),(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}))=\Delta((\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})),
$$

ou seja, solução de (4.195).

Como $\varphi,\psi,f_1,f_3\in H_0^1(0,l)$, então $\Phi=\varphi-f_1$ e $\Psi=\psi-f_3$ pertencem a $H_0^1(0,l)$, e assim obtém-se (4.183) e (4.185).

Sabendo que $\Psi\in H_0^1(0,l)$ e $\phi_{f_5}\in L_g^2(\mathbb{R}^+,H_0^1(0,l))$, da equação (4.188) e do Lema 2.98, tem-se

$$\begin{aligned}\int_0^\infty g(s)\|\eta_x(s)\|_2^2 ds &= \int_0^\infty g(s)\|(1-e^{-s})\Psi_x + (\phi_{f_5})_x(s)ds\|_2^2 ds\\ &\leq 2\int_0^\infty g(s)(1-e^{-s})^2\|\Psi_x\|_2^2 ds + 2\int_0^\infty g(s)\|\phi_{f_5}(s)\|_2^2 ds\\ &\leq 2(\|g(s)\|_{L^1(\mathbb{R}^+),L^2_g(\mathbb{R}^+,H^1_0(0,l))}\|\Psi\|^2_{H^1_0} + \|f_5(s)\|_2^2) < \infty.\end{aligned}$$

Assim, $\eta \in L^2_g(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l))$.
Lembrando que Ψ não depende de s e aplicando o regra de Leibniz, segue por (4.188) que

$$\begin{aligned}\eta + \eta_s &= \left[(1-e^{-s})\Psi + \int_0^s e^{y-s} f_5(y)dy\right] + \left[e^{-s}\Psi - \int_0^s e^{y-s} f_5(y)dy + f_5(s)\right]\\ &= \Psi + \int_0^s e^{y-s} f_5(y)dy - \int_0^s e^{y-s} f_5(y)dy + f_5(s)\\ &= \Psi + f_5(s), \quad s \in \mathbb{R}^+.\end{aligned}$$

Então, η satisfaz a equação (4.187) com $\eta,\ \eta_s \in L^2_g(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l))$ e $\eta(0) = 0$.

Resta mostrar que $\psi_x + \int_0^l g(s)\eta_x(s)ds \in H^2(0,l)$. Com efeito, de (4.195) em particular para $\widetilde{\varphi} = \zeta \in C^1_0(0,l) \subset H^1_0(0,l)$ e $\widetilde{\psi} = 0$, vem que

$$\int_0^l \varphi_x \overline{\zeta}_x dx = -\frac{1}{k}\int_0^l [\rho_1\varphi - g_1 - k\psi_x]\overline{\zeta} dx, \quad \forall \zeta \in C^1_0(0,l). \tag{4.196}$$

Como φ_x e $\rho_1\varphi - g_1 - k\psi_x$ pertencem a $L^2(0,l)$, e vale (4.196), segue que $\varphi_x \in H^1(0,l)$. Portanto, $\varphi \in H^2(0,l)$ pela noção de derivada fraca, e ainda,

$$k\varphi_{xx} = \rho_1\varphi - g_1 - k\psi_x \text{ em } L^2(0,l).$$

Da definição de $g_1 = \rho_1(f_1 + f_2)$ e $\Phi = \varphi - f_1$, concluímos

$$\Phi - \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x = f_2 \text{ em } L^2(0,l).$$

Então, $\varphi \in H^2(0,l)$ e satisfaz (4.184).

Por outro lado, para $\widetilde{\psi} = \zeta \in C^1_0(0,l) \subset H^1_0(0,l)$ e $\widetilde{\varphi} = 0$ em (4.195), obtém-se

$$\int_0^l k(\varphi_x + \psi)\overline{\zeta} dx + \int_0^l \rho_2\psi\overline{\zeta} dx + bc_g\int_0^l \psi_x\overline{\zeta}_x dx = \int_0^l g_2\overline{\zeta} dx. \tag{4.197}$$

Substituindo g_2 dado em $(4.192)_2$ e $c_g = 1 + \displaystyle\int_0^\infty g(s)(1-e^{-s})ds$, teremos

$$\int_0^l k(\varphi_x+\psi)\overline{\zeta}dx+\int_0^l \rho_2\psi\overline{\zeta}dx+b\left(1+\int_0^\infty g(s)(1-e^-s)ds\right)\int_0^l \psi_{xx}\overline{\zeta}dx$$
$$=\int_0^l\left(\rho_2(f_3+f_4)-b\int_0^\infty g(s)(1-e^{-s})dsf_{3xx}+b\int_0^\infty g(s)\phi_{f_{5xx}}(s)ds\right)\overline{\zeta}dx.$$

Fazendo integração por partes e usando (4.190) , tem-se

$$\int_0^l k(\varphi_x+\psi)\overline{\zeta}dx+\int_0^l \rho_2\psi\overline{\zeta}dx-b\int_0^l \psi_x\overline{\zeta}_xdx$$
$$=b\int_0^l\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)ds\overline{\zeta}_xdx+\int_0^l \rho_2(f_3+f_4)\overline{\zeta}dx.$$

Assim,

$$\int_0^l\left(\psi_x+\int_0^l g(s)\eta_x(s)ds\right)\overline{\zeta}_xdx$$
$$=-\frac{1}{b}\int_0^l\Big(-k(\varphi_x+\psi)-\rho_2(\psi+f_3+f_4)\Big)\overline{\zeta}dx,\ \ \forall\zeta\in C_0^1(0,l), \tag{4.198}$$

como $\psi_x+\displaystyle\int_0^l g(s)\eta_x(s)ds,\ -k(\varphi_x+\psi)-\rho_2(\psi+f_3+f_4)\in L^2(0,l)$ e vale (4.198), então pela definição de derivada fraca vem que

$$\psi_x+\int_0^l g(s)\eta_x(s)ds\in H^1(0,l).$$

Portanto, $\psi+\displaystyle\int_0^l g(s)\eta(s)ds\in H^2(0,l)$. Ainda,

$$b\left(\psi_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)ds\right)=\rho_2f_3+\rho_2f_4-k(\varphi_x+\psi)-\rho_2\psi.$$

Lembrando que $\psi-f_3=\Psi$, tem-se

$$\Psi-\frac{b}{\rho_2}\psi_x+\frac{k}{\rho_2}(\varphi_x+\psi)-b\int_0^l g(s)\eta_x(s)ds=f_4\text{ em }L^2(0,l).$$

Então, ψ satisfaz (4.186). E assim fica provada a existência e unicidade do vetor
$U=(\varphi,\Phi,\psi,\Psi,\eta)^T\in D(A_8)$ tal que $U-A_8U=F$.
(i) No item (ii) mostramos que o operador A_8 é dissipativo e no item (iii) mostramos que $I-A_8$ é sobrejetor. Como $\mathcal{H}_8$ é um espaço de Hilbert, então pelo Teorema 2.27, $\mathcal{H}_8$ é reflexivo. Finalmente, pelo Teorema 3.18 segue a densidade desejada, ou seja, $\overline{D(A_8)}=\mathcal{H}_8$.

$\square$

4.9 Sistema de Timoshenko com Lei Térmica de Fourier

4.9.1 Dedução do Sistema de Timoshenko com Lei Térmica de Fourier

Nesta seção continuaremos usando as notações introduzidas na Seção 4.6. No entanto, a diferença do problema a ser abordado para o sistema elástico introduzido na Seção 4.6 e o sistema viscoelástico abordado na Seção 4.8 é que agora consideraremos o sistema de Timoshenko em meios não isotérmicos, ou seja, sob a influência de temperatura, o que resulta num sistema termoelástico de vigas de Timoshenko. Mais precisamente, tal sistema origina-se considerando as equações de momento para o sistema de Timoshenko (4.112)-(4.113), porém considerando uma lei constitutiva termoelástica para o momento fletor M, assim como feito para onda em (4.40), em vez da relação (4.115). Neste caso, a lei constitutiva (4.114) permanece inalterada. Para título de informação, ressaltamos que os trabalhos pioneiros no estudo de sistemas de Timoshenko termoelásticos podem ser encontrados em Racke et al. [18, 33].

Novamente nosso ponto de partida são as equações de momento para o deslocamento transversal e ângulo de rotação

$$\rho_1\varphi_{tt} = S_x \quad \text{e} \quad \rho_2\psi_{tt} = M_x - S, \tag{4.199}$$

onde ρ_1 e ρ_2 são introduzidos em (4.116), bem como k e b nas relações abaixo. Consideramos ainda as seguintes leis constitutivas

$$S = k(\varphi_x + \psi) \quad \text{e} \quad M = b\psi_x - m\theta, \tag{4.200}$$

onde $m > 0$ é uma constante de acoplamento térmico e θ representa a variação da temperatura. Note que a relação de tensão-deformação do momento fletor M é dada de forma semelhante a (4.40), como sugerido em [14, 18, 33].

Substituindo (4.200) em (4.199) chegamos ao seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + m\theta_x = 0, \end{cases} \tag{4.201}$$

o qual possui duas equações e três funções incógnitas. Sendo assim, precisamos de uma equação adicional com respeito à variável θ, ou seja, uma equação que represente a condução de calor na viga. Para isto, de acordo com [18, 33], lembramos que a equação que descreve a propagação de calor no sistema de vigas de Timoshenko tem a forma

$$\rho_3\theta_t + \beta q_x + m\psi_{xt} = 0, \tag{4.202}$$

onde ρ_3 e β são constantes positivas, $q = q(x,t)$ designa o fluxo do calor e o termo $m\psi_{xt}$ representa a velocidade de deformação, uma vez que considera-se a lei térmica no momento fletor em (4.200). Ainda como apresentado em [18, 33], a Lei Térmica de Fourier é dada pela expressão

$$q = -\kappa\theta_x, \tag{4.203}$$

com $\kappa > 0$ um coeficiente de difusão térmica. Logo, substituindo (4.203) em (4.202) e denotando $c = \kappa\beta > 0$, obtemos a seguinte equação

$$\rho_3\theta_t - c\,\theta_{xx} + m\psi_{xt} = 0, \tag{4.204}$$

a qual representa a equação do calor na variável θ sob a Lei de Fourier, assim como obtido em (4.42) no caso da equação da onda.

Mediante as considerações acima descritas, o sistema composto pelas equações (4.201) e (4.204) representa um sistema termoelástico de Timoshenko constituído pelas equações elásticas de vigas de Timoshenko e uma equação do calor acoplada ao ângulo de rotação. Oras, com isto um modelo linear que descreve vibrações de vigas de Timoshenko de comprimento $l > 0$ em meios não isotérmicos segundo a Lei de Fourier é dado pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 & \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + m\theta_x = 0 & \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty), \\ \rho_3\theta_t - c\,\theta_{xx} + m\psi_{xt} = 0 & \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty). \end{cases} \tag{4.205}$$

O sistema (4.205) será estudado no domínio $(0,l)\times(0,\infty)$. Para diferenciar dos casos anteriores no que diz respeito às condições de fronteira, assumiremos neste caso que a viga não possui deslocamento vertical e transferência de calor nas extremidades da viga, ao passo que o ângulo poderá variar. Em termos matemáticos, adotaremos condições de fronteira de Dirichlet para as variáveis φ, θ e de Neumann para ψ, ou seja, as seguintes condições de fronteira

$$\varphi(0,t) = \varphi(l,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(l,t) = \theta(0,t) = \theta(l,t) = 0, \;\; t \geq 0. \tag{4.206}$$

As condições inicias associadas ao sistema (4.205) são dadas por

$$\begin{aligned} &\varphi(x,0) = \varphi_0(x),\; \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x),\; \psi(x,0) = \psi_0(x),\; \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \\ &\theta(x,0) = \theta_0(x), \quad x \in (0,l). \end{aligned} \tag{4.207}$$

A seguir, mostraremos que o Problema de Valor Inicial e de Fronteira (4.205)-(4.207) possui uma única solução via teoria de semigrupos lineares.

4.9.2 Existência e Unicidade

Consideremos o seguinte sistema termoelástico de Timoshenko

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 & \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x+\psi) + m\theta_x = 0 & \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty), \\ \rho_3\theta_t - c\,\theta_{xx} + m\psi_{xt} = 0 & \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty), \end{cases} \tag{4.208}$$

com condições iniciais

$$\begin{aligned} &\varphi(x,0) = \varphi_0(x),\ \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x),\ \psi(x,0) = \psi_0(x), \\ &\psi_t(x,0) = \psi_1(x),\ \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad x \in (0,l), \end{aligned} \tag{4.209}$$

e de fronteira

$$\varphi(0,t) = \varphi(l,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(l,t) = \theta(0,t) = \theta(l,t) = 0,\ \ t \geq 0. \tag{4.210}$$

Para aplicar a teoria de semigrupos lineares, introduzimos inicialmente as seguintes notações $\Phi = \varphi_t$, $\Psi = \psi_t$ e $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta)^T$. Assim,

$$U_t = \begin{bmatrix} \Phi \\ \dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x \\ \Psi \\ \dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x+\psi) - \dfrac{m}{\rho_2}\theta_x \\ \dfrac{c}{\rho_3}\theta_{xx} - m\Psi_x \end{bmatrix} := A_9 U \tag{4.211}$$

e

$$U(0) = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0)^T := U_0.$$

Deste modo, é possível reescrever o PVIF (4.208)-(4.210) no seguinte problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} U_t = A_9 U, \ \ t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{4.212}$$

onde A_9 é o operador dado em (4.211). Para contemplar as condições de fronteira (4.210), define-se os seguintes espaços de Hilbert:

- $\mathcal{H}_9 = H_0^1(0,l) \times L^2(0,l) \times H_*^1(0,l) \times L_*^2(0,l) \times L^2(0,l)$ com produto interno e norma dados por

$$(U, \hat{U})_{\mathcal{H}_9} = k(\varphi_x + \psi, \hat{\varphi}_x + \hat{\psi}) + \rho_1(\Phi, \hat{\Phi}) + b(\psi_x, \hat{\psi}_x) + \rho_2(\Psi, \hat{\Psi}) + \rho_3(\theta, \hat{\theta})$$

e

$$\|U\|_{\mathcal{H}_9}^2 = k\|(\varphi_x + \psi)\|_2^2 + \rho_1\|\Phi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + \rho_3\|\theta\|_2^2,$$

para todos $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta)$, $\hat{U} = (\hat{\varphi}, \hat{\Phi}, \hat{\psi}, \hat{\Psi}, \hat{\theta}) \in \mathcal{H}_9$. Os espaços de Hilbert com média nula $L_*^2(0,l)$ e $H_*^1(0,l)$ foram introduzidos na Subseção 2.3.3 do Capítulo 2.

- O domínio do operador diferencial A_9 é dado por

$$D(A_9) = \{U \in \mathcal{H}_9;\ \ \psi_x, \theta, \Phi \in H_0^1(0,l),\ \ \varphi, \psi, \theta \in H^2(0,l),\ \ \Psi \in H_*^1(0,l)\}.$$

Sob as considerações acima, temos o seguinte resultado de existência e unicidade para o PVI (4.212) conforme segue.

Teorema 4.9 (Existência e Unicidade)**.** *Se $U_0 \in D(A_9)$, então o problema* (4.212) *possui uma única solução*

$$U \in C([0,\infty), D(A_9)) \cap C^1([0,\infty), \mathcal{H}_9),$$

dada por $U(t) = e^{A_9 t}U_0$.

Demonstração. Pelo Teorema 3.24, basta mostrar que o operador A_9 é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $S(t) = e^{A_9 t}$ em $\mathcal{H}_9$. Neste caso, pelo Teorema de Lumer-Phillips, é suficiente mostrar que:

(i) $\overline{D(A_9)} = \mathcal{H}_9$;

(ii) A_9 é dissipativo em $\mathcal{H}_9$, ou seja, $Re(A_9U, U)_{\mathcal{H}_9} \leq 0$;

(iii) $I - A_9 : D(A_9) \subset \mathcal{H}_9 \to \mathcal{H}_9$ é sobrejetor.

No que segue demonstraremos os itens (ii) e (iii), o item (i) segue como consequência.
(ii) Seja $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta)^T \in D(A_9)$ e relembre que

$$A_9U = \begin{bmatrix} \Phi \\ \dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x \\ \Psi \\ \dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \dfrac{m}{\rho_2}\theta_x \\ \dfrac{c}{\rho_3}\theta_{xx} - m\Psi_x \end{bmatrix}. \tag{4.213}$$

Assim, tomando o produto interno em $\mathcal{H}_9$, integrando por partes e utilizando as condições de fronteira de (4.210), obtém-se

$$
\begin{aligned}
(A_9U,U)_{\mathcal{H}_9} &= k(\Phi_x+\Psi,\varphi_x+\psi)+k((\varphi_x+\psi)_x,\Phi)+b(\Psi_x,\psi_x)\\
&\quad +(b\psi_{xx}-k(\varphi_x+\psi)-m\theta_x,\Psi)+(c\theta_{xx}-m\Psi_x,\theta)\\
&= \int_0^l k(\Phi_x+\Psi)(\overline{\varphi}_x+\overline{\psi})dx-\int_0^l k(\varphi_x+\psi)(\overline{\Phi}_x+\overline{\Psi})dx\\
&\quad +b\int_0^l \Psi_x\overline{\psi}_x dx-b\int_0^l \psi_x\overline{\Psi}_x dx\\
&\quad +m\int_0^l \theta\overline{\Psi}_x dx-m\int_0^l \Psi_x\overline{\theta}dx-c\int_0^l \theta_x\overline{\theta}_x dx\\
&= -c\|\theta_x\|_2^2+b(\Psi_x,\psi_x)-b\overline{(\Psi_x,\psi_x)}\\
&\quad +m(\theta,\Psi_x)-m\overline{(\theta,\Psi_x)}\\
&\quad +k(\Phi_x+\Psi,\varphi_x+\psi)-k\overline{(\Phi_x+\Psi,\varphi_x+\psi)}.
\end{aligned}
$$

Tomando a parte real, vem que

$$Re(A_9U,U)_{\mathcal{H}_9}=-c\|\theta_x\|_2^2\leq 0.$$

Portanto, A_9 é dissipativo em $\mathcal{H}_9$.

(iii) Dado $F=(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5)^T\in\mathcal{H}_9$, será mostrado que a equação $(I-A_9)U=F$ possui uma única solução $U\in D(A_9)$. De fato, reescrevendo $U-A_9U=F$ em termos de suas componentes, obtém-se

$$
\begin{aligned}
\varphi-\Phi &= f_1, && (4.214)\\
\Phi-\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x &= f_2, && (4.215)\\
\psi-\Psi &= f_3, && (4.216)\\
\Psi-\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}+\frac{k}{\rho_2}(\varphi_x+\psi)+\frac{m}{\rho_2}\theta_x &= f_4, && (4.217)\\
\theta-\frac{c}{\rho_3}\theta_{xx}+\frac{m}{\rho_3}\Psi_x &= f_5. && (4.218)
\end{aligned}
$$

De (4.214) tem-se $\Phi=\varphi-f_1$ e de (4.216) tem-se $\Psi=\psi-f_3$. Substituindo em (4.215), (4.217) e (4.218) obtém-se o seguinte sistema nas variáveis φ,ψ,θ.

$$
\begin{cases}
\varphi-f_1-\dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x=f_2,\\
\psi-f_3-\dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx}+\dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x+\psi)+\dfrac{m}{\rho_2}\theta_x=f_4,\\
\theta-\dfrac{c}{\rho_3}\theta_{xx}+\dfrac{m}{\rho_3}(\psi-f_3)_x=f_5,
\end{cases}
$$

de onde vem que

$$\begin{cases} \rho_1\varphi - k(\varphi_x+\psi)_x = \rho_1 f_2 + \rho_1 f_1, \\ \rho_2\psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x+\psi) + m\theta_x = \rho_2 f_4 + \rho_2 f_3, \\ \rho_3\theta - c\theta_{xx} + m\psi_x = m(f_3)_x + \rho_3 f_5. \end{cases} \tag{4.219}$$

Denotando por

$$\begin{aligned} g_1 &:= \rho_1(f_1+f_2) \in L^2(0,l), \\ g_2 &:= \rho_2(f_3+f_4) \in L^2_*(0,l), \\ g_3 &:= \rho_3 f_5 + m(f_3)_x \in L^2(0,l), \end{aligned} \tag{4.220}$$

então podemos reescrever (4.219) como

$$\rho_1\varphi - k(\varphi_x+\psi)_x = g_1, \tag{4.221}$$

$$\rho_2\psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x+\psi) + m\theta_x = g_2, \tag{4.222}$$

$$\rho_3\theta - c\theta_{xx} + m\psi_x = g_3. \tag{4.223}$$

A solução de (4.221)-(4.223) será feita em duas etapas.

Etapa 1: Existe uma única terna $(\varphi,\psi,\theta) \in H^1_0(0,l)\times H^1_*(0,l)\times H^1_0(0,l)$ satisfazendo o seguinte problema variacional

$$\begin{aligned} \int_0^l \Big(\rho_1\varphi\overline{\widetilde{\varphi}} + k(\varphi_x+\psi)(\overline{\widetilde{\varphi}_x} + \overline{\widetilde{\psi}}) + \rho_2\psi\overline{\widetilde{\psi}} + b\psi_x\overline{\widetilde{\psi}}_x + m\theta_x\overline{\widetilde{\psi}} + c\theta_x\overline{\widetilde{\theta}}_x + \rho_3\theta\overline{\widetilde{\theta}} + m\psi_x\overline{\widetilde{\theta}}\Big)\,dx \\ = \int_0^l \Big(g_1\overline{\widetilde{\varphi}} + g_2\overline{\widetilde{\psi}} + g_3\overline{\widetilde{\theta}}\Big)\,dx, \end{aligned} \tag{4.224}$$

para todos $(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\theta}) \in H^1_0(0,l)\times H^1_*(0,l)\times H^1_0(0,l)$. A prova é feita utilizando o Teorema de Lax-Milgram. Considere a seguinte forma sesquilinear

$$a(.,.) : (H^1_0(0,l)\times H^1_*(0,l)\times H^1_0(0,l))^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

dada por

$$\begin{aligned} a((\varphi,\psi,\theta),(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\theta})) &= \rho_1(\varphi,\widetilde{\varphi}) + k(\varphi_x+\psi,\widetilde{\varphi}_x+\widetilde{\psi}) + \rho_2(\psi,\widetilde{\psi}) + b(\psi_x,\widetilde{\psi}_x) \\ &\quad + m(\theta_x,\widetilde{\psi}) + c(\theta_x,\widetilde{\theta}_x) + \rho_3(\theta,\widetilde{\theta}) + m(\psi_x,\widetilde{\theta}). \end{aligned}$$

Observe que a é contínua e coerciva. Com efeito, usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Poincaré (ver Teorema 2.83), obtém-se

$$\begin{aligned}
|a((\varphi,\psi,\theta),(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\theta}))| &\le \rho_1\|\varphi\|_2\|\widetilde{\varphi}\|_2 + k\|\varphi_x\|_2\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 + k\|\psi\|_2\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 + k\|\varphi_x\|_2\|\widetilde{\psi}\|_2 \\
&\quad + k\|\psi\|_2\|\widetilde{\psi}\|_2 + \rho_2\|\psi\|_2\|\widetilde{\psi}\|_2 + b\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 \\
&\quad + m\|\theta_x\|_2\|\widetilde{\psi}\|_2 + c\|\theta_x\|_2\|\widetilde{\theta}_x\|_2 + \rho_3\|\theta\|_2\|\widetilde{\theta}\|_2 + m\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\theta}\|_2 \\
&\le \rho_1 l^2\|\varphi_x\|_2\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 + k\|\varphi_x\|_2\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 + lk\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 \\
&\quad + lk\|\varphi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 + l^2k\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 + l^2\rho_2\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 \\
&\quad + b\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 + lm\|\theta_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 + c\|\theta_x\|_2\|\widetilde{\theta}_x\|_2 \\
&\quad + l^2\rho_3\|\theta_x\|_2\|\widetilde{\theta}_x\|_2 + lm\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\theta}_x\|_2 \\
&= (\rho_1 l^2 + k)\|\varphi_x\|_2\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 + lk\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 + lk\|\varphi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 \\
&\quad + (kl^2 + l^2\rho_2 + b)\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 + lm\|\theta_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 \\
&\quad + (c + l^2\rho_3)\|\theta_x\|_2\|\widetilde{\theta}_x\|_2 + lm\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\theta}_x\|_2 \\
&\le \alpha(\|\varphi_x\|_2 + \|\psi_x\|_2 + \|\theta_x\|_2)(\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 + \|\widetilde{\psi}_x\|_2 + \|\widetilde{\theta}_x\|_2) \\
&= \alpha\|(\varphi,\psi,\theta)\|_{H_0^1\times H_*^1\times H_0^1}\|(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\theta})\|_{H_0^1\times H_*^1\times H_0^1}, \qquad (4.225)
\end{aligned}$$

onde $\alpha := \max\{\rho_1 l^2 + k, lk, l^2k + l^2\rho_2 + b, lm, l^2\rho_3 + c, 1\}$. Logo,

$$|a((\varphi,\psi,\theta),(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\theta}))| \le \alpha\|(\varphi,\psi,\theta)\|_{H_0^1\times H_*^1\times H_0^1}\|(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\theta})\|_{H_0^1\times H_*^1\times H_0^1},$$

para todos $(\varphi,\psi,\theta),(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\theta}) \in H_0^1(0,l)\times H_*^1(0,l)\times H_0^1(0,l)$.
Além disso, note que

$$\begin{aligned}
a((\varphi,\psi,\theta),(\varphi,\psi,\theta)) &= \rho_1\|\varphi\|_2^2 + k\|\varphi_x+\psi\|_2^2 + \rho_2\|\psi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 + c\|\theta_x\|_2^2 + \rho_3\|\theta\|_2^2 \\
&\quad + m(\theta_x,\psi) + m(\psi_x,\theta). \qquad (4.226)
\end{aligned}$$

Integrando por partes e usando as condições de fronteira (4.210), tem-se

$$m(\theta_x,\psi) + m(\psi_x,\theta) = m(\theta_x,\psi) - m\overline{(\theta_x,\psi)}.$$

Tomando a parte real em (4.226), usando a Desigualdade Triangular Inversa e observando que $4a^2+4b^2+4c^2+4d^2 \ge (a+b+c+d)^2$, tem-se

$$
\begin{aligned}
Re(a((\varphi,\psi,\theta),(\varphi,\psi,\theta))) &= \|\varphi\|_2^2 + k\|\varphi_x+\psi\|_2^2 + \rho_2\|\psi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 + c\|\theta_x\|_2^2 + \rho_3\|\theta\|_2^2 \\
&\geq k\|\varphi_x+\psi\|_2^2 + \rho_2\|\psi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 + c\|\theta_x\|_2^2 \\
&= 4\left(\frac{k}{4}\|\varphi_x+\psi\|_2^2 + \frac{\rho_2}{4}\|\psi\|_2^2 + \frac{b}{4}\|\psi_x\|_2^2 + \frac{c}{4}\|\theta_x\|_2^2\right) \\
&\geq C(4\|\varphi_x+\psi\|_2^2 + 4\|\psi\|_2^2 + 4\|\psi_x\|_2^2 + 4\|\theta_x\|_2^2) \\
&\geq C(\|\varphi_x+\psi\|_2 + \|\psi\|_2 + \|\psi_x\|_2 + \|\theta_x\|_2)^2 \\
&\geq C(\|\varphi_x\|_2 + \|\psi_x\|_2 + \|\theta_x\|_2)^2 \\
&= C\|(\varphi,\psi,\theta)\|^2_{H_0^1\times H_*^1\times H_0^1},
\end{aligned}
$$

onde, $C = \min\left\{\frac{k}{4},\frac{\rho_2}{4},\frac{b}{4},\frac{c}{4}\right\}$. Agora, definindo

$$
\begin{aligned}
\phi : H_0^1(0,l)\times H_*^1(0,l)\times H_0^1(0,l) &\longrightarrow \mathbb{C} \\
(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\theta}) &\longmapsto \phi(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\theta}) = \int_0^l \left(g_1\overline{\widetilde{\varphi}} + g_2\overline{\widetilde{\psi}} + g_3\overline{\widetilde{\theta}}\right)dx,
\end{aligned}
$$

observe que ϕ é antilinear e limitada. É trivial ver que ϕ é antilinear. Além disso, usando a Desigualdade de Poincaré note que

$$
\begin{aligned}
|\phi(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\theta})| &\leq |(g_1,\widetilde{\varphi})| + |(g_2,\widetilde{\psi})| + |(g_3,\widetilde{\theta})| \\
&\leq \|g_1\|_2\|\widetilde{\varphi}\|_2 + \|g_2\|_2\|\widetilde{\psi}\|_2 + \|g_3\|_2\|\widetilde{\theta}\|_2 \\
&\leq C(\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 + \|\widetilde{\psi}_x\|_2 + \|\widetilde{\theta}_x\|_2) \\
&= C(\|\widetilde{\varphi}\|_{H_0^1} + \|\widetilde{\psi}\|_{H_*^1} + \|\widetilde{\theta}\|_{H_0^1}) \\
&= C\|(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\theta})\|_{H_0^1\times H_*^1\times H_0^1},\ \forall(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\theta}) \in H_0^1(0,l)\times H_*^1(0,l)\times H_0^1(0,l),
\end{aligned}
$$

onde $C = l\max_{1\leq i\leq 3}\{\|g_i\|_2\}$. Portanto, ϕ é limitada. Pelo Teorema de Lax-Milgram (ver Teorema 2.28), existe uma única terna

$$
(\varphi,\psi,\theta) \in H_0^1(0,l)\times H_*^1(0,l)\times H_0^1(0,l),
$$

tal que

$$
a((\varphi,\psi,\theta),(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\theta})) = \phi(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\theta}),\ \ \forall(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\theta}) \in H_0^1(0,l)\times H_*^1(0,l)\times H_0^1(0,l),
$$

ou seja, $(\varphi,\psi,\theta) \in H_0^1(0,l)\times H_*^1(0,l)\times H_0^1(0,l)$ é a única solução de (4.224), como desejado. Isto conclui a prova da etapa 1.

Etapa 2: As variáveis $\varphi,\psi,\theta \in H^2(0,l)$ satisfazem (4.221)-(4.223), deste modo, $U = (\varphi,\Phi,\psi,\Psi,\theta)^T \in D(A_9)$ é solução de (4.214)-(4.218).

Seja $(\varphi,\psi,\theta)\in H_0^1(0,l)\times H_*^1(0,l)\times H_0^1(0,l)$. Então, $\Phi=\varphi-f_1\in H_0^1(0,l)$ e $\Psi=\psi-f_3\in H_*^1(0,l)$ satisfazem as equações (4.214) e (4.216), respectivamente.

Aplicando em (4.224), $\widetilde{\varphi}=\gamma\in C_0^1(0,l)\subset H_0^1(0,l)$ e $\widetilde{\psi}=\widetilde{\theta}=0$, tem-se

$$\int_0^l \varphi_x\overline{\gamma}_x dx=-\frac{1}{k}\int_0^l(\rho_1\varphi-k\psi_x-g_1)\overline{\gamma}dx,\ \ \forall\gamma\in C_0^1(0,l). \tag{4.227}$$

Como φ_x, $\rho_1\varphi-k\psi_x-g_1\in L^2(0,l)$ e vale (4.227), então pela definição de derivada fraca, $\varphi_x\in H^1(0,l)$. Logo, $\varphi\in H^2(0,l)$ e ainda

$$k\varphi_{xx}=\rho_1\varphi-k\psi_x-g_1 \text{ em } L^2(0,l).$$

Usando o fato de que $g_1=\rho_1(f_1+f_2)$ e $\Phi=\varphi-f_1$, conclui-se

$$\Phi-\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x=f_2 \text{ em } L^2(0,l).$$

Portanto, $\varphi\in H^2(0,l)\cap H_0^1(0,l)$ e satisfaz (4.215).

Considere $\zeta\in C_0^1(0,l)$. Note que $\widetilde{\zeta}=\zeta-\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l\zeta(x)dx$ é tal que $\widetilde{\zeta}\in H_*^1(0,l)$. Logo, aplicando em (4.224) $\widetilde{\psi}=\widetilde{\zeta}\in H_*^1(0,l)\subset H^1(0,l)$ onde $\widetilde{\zeta}$ é construída acima e $\widetilde{\varphi}=\widetilde{\theta}=0$, tem-se

$$\int_0^l\Big(k(\varphi_x+\psi)\overline{\widetilde{\zeta}}+\rho_2\psi\overline{\widetilde{\zeta}}+b\psi_x\overline{\widetilde{\zeta}}_x+m\theta_x\overline{\widetilde{\zeta}}\Big)\,dx=\int_0^l g_2\overline{\widetilde{\zeta}}dx. \tag{4.228}$$

Substituindo $\widetilde{\zeta}=\zeta-\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l\zeta dx$, obtém-se

$$\begin{aligned}&\int_0^l k(\varphi_x+\psi)\overline{\left(\zeta-\frac{1}{l}\int_0^l\zeta dx\right)}dx+\int_0^l\rho_2\psi\overline{\left(\zeta-\frac{1}{l}\int_0^l\zeta dx\right)}dx\\ &+\int_0^l b\psi_x\overline{\left(\zeta-\frac{1}{l}\int_0^l\zeta dx\right)}_x dx+\int_0^l m\theta_x\overline{\left(\zeta-\frac{1}{l}\int_0^l\zeta dx\right)}\\ &=\int_0^l g_2\overline{\left(\zeta-\frac{1}{l}\int_0^l\zeta dx\right)}dx.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}&\int_0^l k\varphi_x\overline{\zeta}dx-\int_0^l k\varphi_x dx\overline{\left(\frac{1}{l}\int_0^l\zeta dx\right)}+\int_0^l\rho_2\psi\overline{\zeta}dx-\int_0^l\rho_2\psi dx\overline{\left(\frac{1}{l}\int_0^l\zeta dx\right)}\\ &+\int_0^l m\theta_x\overline{\zeta}dx-\int_0^l m\theta_x dx\overline{\left(\frac{1}{l}\int_0^l\zeta dx\right)}+\int_0^l b\psi_x\overline{\zeta}dx-\int_0^l b\psi_x dx\overline{\left(\frac{1}{l}\int_0^l\zeta dx\right)}_x\\ &=\int_0^l g_2\overline{\zeta}dx-\int_0^l g_2 dx\overline{\left(\frac{1}{l}\int_0^l\zeta dx\right)}.\end{aligned}$$

Usando o fato de que $\varphi, \theta \in H_0^l(0,l)$, $\psi, g_2 \in H_*^1(0,l)$ e $\overline{\left(\frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\right)_x} = 0$, tem-se que

$$\int_0^l \psi_x \overline{\zeta_x} dx = -\frac{1}{b}\int_0^l (k(\varphi_x + \psi) + \rho_2\psi + m\theta_x - g_2)\overline{\zeta} dx, \ \ \forall \zeta \in C_0^1(0,l). \tag{4.229}$$

Como ψ_x, $(\rho_2\psi + m\theta_x + k(\varphi_x + \psi) - g_2) \in L^2(0,l)$ e vale (4.229), então pela definição de derivada fraca temos que $\psi_x \in H^1(0,l)$. Logo, $\psi \in H^2(0,l)$ e ainda

$$b\psi_{xx} = \rho_2\psi + m\theta_x + k(\varphi_x + \psi) - g_2 \text{ em } L^2(0,l). \tag{4.230}$$

Lembrando que $g_2 = \rho_2(f_3 + f_4)$ e $\Psi = \psi - f_3$ vem que

$$\Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) + \frac{m}{\rho_2}\theta_x = f_4.$$

Portanto, $\psi \in H^2(0,l) \cap H_*^1(0,l)$ satisfaz (4.222).
De (4.230) vem que

$$g_2 = \rho_2\psi + m\theta_x + k(\varphi_x + \psi) - b\psi_{xx}. \tag{4.231}$$

Assim, substituindo (4.231) em (4.229) e integrando por partes, obtém-se

$$\int_0^l b\psi_x\overline{\zeta}_x dx = -b[\overline{\zeta}\psi_x]_0^l + \int_0^l b\psi_x\overline{\zeta}_x dx.$$

Logo,

$$-b[\overline{\zeta}\psi_x]_0^l = 0 \Rightarrow -b[\psi_x(l)\overline{\zeta}(l) - \psi_x(0)\overline{\zeta}(0)] = 0, \ \forall \overline{\zeta} \in C^1[0,l].$$

Como $\zeta \in C^1[0,l]$, tome $\overline{\zeta}(0) = 0$ e $\overline{\zeta}(l) = 1$, e daí $\psi_x(l) = 0$. Agora tome $\overline{\zeta}(l) = 0$ e $\overline{\zeta}(0) = 1$, então $\psi_x(0) = 0$. Deste modo, $\psi_x \in H_0^1(0,l)$. Portanto, ψ satisfaz (4.217).

Finalmente, aplicando em (4.224) $\widetilde{\theta} = \eta \in C_0^1(0,l) \subset H_0^1(0,l)$ e $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\psi} = 0$, vem que

$$\int_0^l \theta_x\overline{\eta}_x dx = -\frac{1}{c}\int_0^l (\rho_3\theta + m\psi_x - g_3)\overline{\eta} dx, \ \ \forall \eta \in C_0^1(0,l). \tag{4.232}$$

Como θ_x, $\rho_3\theta + m\psi_x - g_3 \in L^2(0,l)$ e vale (4.232), então $\theta_x \in H^1(0,l)$ pela definição de derivada fraca. Logo, $\theta \in H^2(0,l)$ com

$$c\theta_{xx} = \rho_3\theta + m\psi_x - g_3 \text{ em } L^2(0,l).$$

Lembrando que $g_3 = \rho_3 f_5 + m(f_3)_x$ e $\Psi = \psi - f_3$ vem que

$$\theta - \frac{c}{\rho_3}\theta_{xx} + \frac{m}{\rho_3}\Psi_x = f_5 \text{ em } L^2(0,l).$$

Isto mostra que $\theta \in H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)$ e satisfaz a equação (4.218). Portanto
$U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta)^T \in D(A_9)$ satisfaz $(I - A_9)U = F$.
(i) Mostramos que o operador A_9 é dissipativo e no item (iii) mostramos que $I - A_9$ é sobrejetor. Como $\mathcal{H}_9$ é um espaço de Hilbert, então pelo Teorema 2.27, $\mathcal{H}_9$ é reflexivo. Portanto, pelo Teorema 3.18 segue que $\overline{D(A_9)} = \mathcal{H}_9$. □

4.10 SISTEMA DE TIMOSHENKO COM LEI TÉRMICA DE CATTANEO

4.10.1 Dedução do Sistema de Timoshenko com Lei Térmica de Cattaneo

O sistema termoelástico de Timoshenko com Lei Térmica de Cattaneo é resultado do acoplamento do sistema de vigas de Timoshenko com a equação do calor associada ao ângulo de rotação, sendo que neste caso a equação do calor é regida pela Lei Térmica de Cattaneo dada em (4.23), ver [9], em vez da Lei Térmica de Fourier (4.203). A principal motivação física para considerar a lei de Catanneo em vez da lei de Fourier consiste no de que a mesma remove o paradoxo da propagação infinita de sinais gerado pela Lei de Fourier, ver por exemplo o artigo de Fernández Sare e Racke [18] onde o sistema termoelástico de Timoshenko com lei de Cattaneo foi abordado. Ver também Dell'Oro e Pata [15].

Utilizando as notações da Seção 4.9, nosso ponto de partida são as equações dadas em (4.201) e (4.202), as quais reescreveremos aqui como

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x = 0, \\ \rho_3\theta_t + q_x + \delta\psi_{xt} = 0, \end{cases} \tag{4.233}$$

onde relembramos que $\varphi = \varphi(x,t)$, $\psi = \psi(x,t)$ e $\theta = \theta(x,t)$ representam, respectivamente, o deslocamento vertical, o ângulo de rotação da seção transversal e a variação da temperatura na coordenada x e instante t de uma viga de comprimento $l > 0$, denotamos $\delta = m$ e as demais constantes ρ_1, ρ_2, b, k são dadas em (4.116). Novamente precisamos de uma equação que descreve a relação entre o fluxo de calor q e a temperatura θ. Para isto, como já mencionado anteriormente, utilizaremos a Lei Térmica de Cattaneo como em [18], a saber,

$$\tau q_t + \beta q + \theta_x = 0, \tag{4.234}$$

onde $\tau > 0$ representa o tempo de retardo no atraso do fluxo de calor com respeito ao gradiente de temperatura e $\beta > 0$ é uma constante dependendo do material da viga. Vale a pena observar que, se admitirmos grosseiramente $\tau = 0$ em (4.234), então a mesma reduz-se na equação (4.203) com $\kappa = \frac{1}{\beta}$, cuja substituição no sistema (4.233) recai no problema estudado na Seção 4.9. Voltando ao caso $\tau > 0$, temos das equações em (4.233) e (4.234), o seguinte sistema termoelástico de Timoshenko sob a Lei Constitutiva de Cattaneo:

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 & \text{em} \quad (0,l) \times (0,\infty), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x = 0 & \text{em} \quad (0,l) \times (0,\infty), \\ \rho_3\theta_t + q_x + \delta\psi_{xt} = 0 & \text{em} \quad (0,l) \times (0,\infty), \\ \tau q_t + \beta q + \theta_x = 0 & \text{em} \quad (0,l) \times (0,\infty). \end{cases} \tag{4.235}$$

Ao sistema (4.235) acoplamos as condições de fronteira de Dirichlet-Neumann

$$\varphi(0,t) = \varphi(l,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(l,t) = \theta(0,t) = \theta(l,t) = 0, \;\; t \geq 0, \tag{4.236}$$

e condições iniciais

$$\begin{aligned} &\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \; \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \; \psi(x,0) = \psi_0(x), \; \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \\ &\theta(x,0) = \theta_0(x), \; q(x,0) = q_0(x), \quad x \in (0,l). \end{aligned} \tag{4.237}$$

Nosso próximo objetivo é estudar o PVIF (4.235)-(4.237), mostrando que o mesmo possui uma única solução via teoria de semigrupos lineares. Ressaltamos ainda que, assim como no problema termoviscoelástico, devido à relação entre as variáveis q e θ como descrito nas duas últimas equações em (4.235), é possível obter um sistema apenas nas variáveis φ, ψ e θ. Deste modo, não é necessário atribuir condição de fronteira para a função q (ou então para θ). Observe que, caso atribuíssemos, por exemplo, condição de Dirichlet para a função q, então θ assumiria também a condição de fronteira de Neumann, o que resultaria num sistema inconsistente.

4.10.2 Existência e Unicidade

Consideremos o seguinte PVIF

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 & \text{em} \quad (0,l) \times (0,\infty), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x = 0 & \text{em} \quad (0,l) \times (0,\infty), \\ \rho_3\theta_t + q_x + \delta\psi_{xt} = 0 & \text{em} \quad (0,l) \times (0,\infty), \\ \tau q_t + \beta q + \theta_x = 0 & \text{em} \quad (0,l) \times (0,\infty), \end{cases} \tag{4.238}$$

$$\begin{cases} \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \;\; \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \;\; \psi(x,0) = \psi_0(x), \;\; \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \\ \theta(x,0) = \theta_0(x), \;\; q(x,0) = q_0(x), \quad x \in (0,l), \end{cases} \tag{4.239}$$

$$\varphi(0,t) = \varphi(l,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(l,t) = \theta(0,t) = \theta(l,t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{4.240}$$

Para aplicar a teoria de semigrupos lineares, consideremos inicialmente as seguintes notações $\Phi = \varphi_t$, $\Psi = \psi_t$ e $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, q)^T$. Assim,

$$U_t = \begin{bmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x \\ \Psi \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \frac{\delta}{\rho_2}\theta_x \\ -\frac{1}{\rho_3}q_x - \frac{\delta}{\rho_3}\Psi_x \\ -\frac{\beta}{\tau}q - \frac{1}{\tau}\theta_x \end{bmatrix} := A_{10}U \tag{4.241}$$

e

$$U(0) = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0, q)^T := U_0.$$

Logo, podemos reescrever o PVIF (4.238)-(4.240) no seguinte PVI de Abstrato

$$\begin{cases} U_t = A_{10}U, \ \ t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{4.242}$$

onde o operador A_{10} é definido em (4.241). Neste caso, os seguintes espaços de Hilbert serão considerados:

$$\mathcal{H}_{10} = H_0^1(0,l) \times L^2(0,l) \times H_*^1(0,l) \times L_*^2(0,l) \times L^2(0,l) \times L^2(0,l),$$

com produto interno e norma dados por

$$(U,\hat{U})_{\mathcal{H}_{10}} = \rho_1(\Phi,\hat{\Phi}) + \rho_2(\Psi,\hat{\Psi}) + \rho_3(\theta,\hat{\theta}) + \tau(q,\hat{q}) + k(\varphi_x + \psi, \hat{\varphi_x} + \hat{\psi}) + b(\psi_x, \hat{\psi_x})$$

e

$$\|U\|_{\mathcal{H}_{10}}^2 = \rho_1\|\Phi\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + \rho_3\|\theta\|_2^2 + \tau\|q\|_2^2 + k\|(\varphi_x + \psi)\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2,$$

para todos $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, q)^T$, $\hat{U} = (\hat{\varphi}, \hat{\Phi}, \hat{\psi}, \hat{\Psi}, \hat{\theta}, \hat{q})^T$ em $\mathcal{H}_{10}$. O domínio do operador diferencial A_{10} é dado por

$$D(A_{10}) = \{U \in \mathcal{H}_{10}; \ \ \Psi \in H_*^1(0,l), \ \ \varphi, \psi \in H^2(0,l), \ \ \Phi, \psi_x, \theta \in H_0^1(0,l), \ q \in H^1(0,l)\}.$$

Sob estas notações, temos o seguinte resultado de existência e unicidade para (4.242) e, consequentemente, para o PVIF (4.238)-(4.240).

Teorema 4.10 (Existência e Unicidade)**.** *Se* $U_0 \in D(A_{10})$, *então o problema* (4.242) *possui uma única solução*

$$U \in C([0,\infty), D(A_{10})) \cap C^1([0,\infty), \mathcal{H}_{10}),$$

dada por $U(t)=e^{A_{10}t}U_0$.

Demonstração. Pelo Teorema 3.24, basta mostrar que o operador A_{10} é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $e^{A_{10}t}$ em $\mathcal{H}_{10}$. Neste caso, pelo Corolário 3.21, é suficiente mostrar que

(i) $\overline{D(A_{10})}=\mathcal{H}_{10}$;

(ii) A_{10} é dissipativo em $\mathcal{H}_{10}$, ou seja, $Re(A_{10}U,U)_{\mathcal{H}_{10}}\leq 0$;

(iii) $0\in\rho(A_{10})$, isto é, o operador $-A_{10}$ é invertível com inverso limitado.

Primeiramente mostraremos os itens (ii) e (iii), o item (i) seguirá por consequência desses.

(ii) Seja $U=(\varphi,\Phi,\psi,\Psi,\theta,q)^T\in D(A_{10})$ e relembremos que

$$A_{10}U=\begin{bmatrix}\Phi\\ \dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x\\ \Psi\\ \dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx}-\dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x+\psi)-\dfrac{\delta}{\rho_2}\theta_x\\ -\dfrac{1}{\rho_3}q_x-\dfrac{\delta}{\rho_3}\Psi x\\ -\dfrac{\beta}{\tau}q-\dfrac{1}{\tau}\theta_x\end{bmatrix}.$$

Utilizando o produto interno em $\mathcal{H}_{10}$, integrando por partes e usando as condições de fronteira (4.240), obtém-se

$$\begin{aligned}(A_{10}U,U)_{\mathcal{H}_{10}} &= k(\Phi_x+\Psi,\varphi_x+\psi)+k((\varphi_x+\psi)_x,\Phi)+b(\Psi_x,\psi_x)\\ &\quad+(b\psi_{xx}-k(\varphi_x+\psi)-\delta\theta_x,\Psi)+(-q_x-\delta\Psi_x,\theta)\\ &\quad+(-\beta q-\theta_x,q)\\ &= \int_0^l k(\Phi_x+\Psi)(\overline{\varphi}_x+\overline{\psi})dx-\int_0^l k(\varphi_x+\psi)(\overline{\Phi}_x+\overline{\Psi})dx\\ &\quad+b\int_0^l \Psi_x\overline{\psi}_xdx-b\int_0^l\psi_x\overline{\Psi}_xdx\\ &\quad-\delta\int_0^l\theta_x\overline{\Psi}dx+\delta\int_0^l\Psi\overline{\theta}_xdx\\ &\quad+\int_0^l\theta\overline{q}_xdx-\int_0^l q_x\overline{\theta}dx-\beta\int_0^l q\overline{q}dx\\ &= -\beta\|q\|_2^2+(\theta,q_x)-\overline{(\theta,q_x)}\\ &\quad-\delta(\theta_x,\Psi)+\delta\overline{(\theta_x,\Psi)}\\ &\quad+b(\Psi_x,\psi_x)-b\overline{(\Psi_x,\psi_x)}\\ &\quad+k(\Phi_x+\Psi,\varphi_x+\psi)-k\overline{(\Phi_x+\Psi,\varphi_x+\psi)}.\end{aligned}$$

Tomando a parte real, chegamos a

$$Re(A_{10}U,U)_{\mathcal{H}_{10}} = -\beta\|q\|_2^2 \leq 0, \quad \forall\, U \in D(A_{10}). \tag{4.243}$$

Portanto, A_{10} é dissipativo em $\mathcal{H}_{10}$.
(iii) Vamos mostrar que $0 \in \rho(A_{10})$, isto é, $(-A_{10})^{-1}$ existe e é limitado. A prova será feita em duas etapas como segue.

Etapa 1: Existe $(-A_{10})^{-1}$. Com efeito, dado $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \in \mathcal{H}_{10}$ mostraremos que a equação $-A_{10}U = F$ possui uma única solução $U \in D(A_{10})$. Com efeito, reescrevendo $-A_{10}U = F$ em termos de suas componentes, obtém-se

$$\begin{aligned}
-\Phi &= f_1, && (4.244)\\
-\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x &= f_2, && (4.245)\\
-\Psi &= f_3, && (4.246)\\
-\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x+\psi) + \frac{\delta}{\rho_2}\theta_x &= f_4, && (4.247)\\
\frac{1}{\rho_3}q_x + \frac{\delta}{\rho_3}\Psi_x &= f_5, && (4.248)\\
\frac{\beta}{\tau}q + \frac{1}{\tau}\theta_x &= f_6. && (4.249)
\end{aligned}$$

Da equação (4.244) sabe-se que $\Phi = -f_1 \in H_0^1(0,l)$ e de (4.246) sabe-se que
$\Psi = -f_3 \in H_*^1(0,l)$. Substituindo Φ em (4.248), obtém-se o seguinte sistema nas variáveis φ, ψ, θ e q. então

$$\begin{aligned}
-k(\varphi_x+\psi)_x = \rho_1 f_2 \quad &\text{em} \quad L^2(0,l), && (4.250)\\
-b\psi_{xx} + k(\varphi_x+\psi) + \delta\theta_x = \rho_2 f_4 \quad &\text{em} \quad L_*^2(0,l), && (4.251)\\
q_x = \rho_3 f_5 + \delta(f_3)_x \quad &\text{em} \quad L^2(0,l), && (4.252)\\
\beta q + \theta_x = \tau f_6 \quad &\text{em} \quad L^2(0,l). && (4.253)
\end{aligned}$$

De (4.252) tem-se a equação

$$q_x = \rho_3 f_5 + \delta(f_3)_x,$$

de onde vem que

$$q(x) = \rho_3 \int_0^x f_5(s)ds + \delta f_3 + c_0, \tag{4.254}$$

para algum $c_0 \in \mathbb{R}$. Logo, $q \in H^1(0,l)$ e ainda q satisfaz (4.252). Substituindo (4.254) em

(4.253), obtém-se

$$\beta\left(\rho_3\int_0^x f_5(s)ds+\delta f_3(x)+c_0\right)+\theta_x=\tau f_6,$$

cuja solução em θ é dada por

$$\theta(x)=\tau\int_0^x f_6(y)dy-\int_0^x\left(\beta\rho_3\int_0^y f_5(s)ds+\delta\beta f_3(y)+\beta c_0\right)dy+c_1.$$

Como queremos $\theta(0)=\theta(l)=0$, então de $\theta(0)=0$ tem-se que $c_1=0$. Além disso, de $\theta(l)=0$ e $\displaystyle\int_0^l f_3(y)dy=0$, temos

$$\begin{aligned}
\theta(l) &= \tau\int_0^l f_6(y)dy-\beta\rho_3\int_0^l\left(\int_0^y f_5(s)ds+\beta\delta f_3(y)+\beta c_0\right)dy\\
\Rightarrow\quad 0 &= \tau\int_0^l f_6(y)dy-\beta\rho_3\int_0^l\int_0^y f_5(s)dsdy-l\beta c_0-\delta\beta\int_0^l f_3(y)dy\\
\Rightarrow\quad \beta c_0 &= \frac{1}{l}\left(\tau\int_0^l f_6(y)dy-\rho_3\beta\int_0^l\int_0^y f_5(s)dsdy\right). \qquad (4.255)
\end{aligned}$$

Logo, para que $\theta(0)=\theta(l)=0$, θ assume a seguinte forma

$$\begin{aligned}
\theta(x) &= \int_0^x \tau f_6(y)dy-\int_0^x\rho_3\beta\int_0^y f_5(s)dsdy-\beta\delta\int_0^x f_3(y)dy\\
&\quad-\left(\frac{\tau}{l}\int_0^l f_6(y)dy-l\beta\frac{\rho_3}{l}\int_0^l\int_0^z f_5(s)dsdz\right)x. \qquad (4.256)
\end{aligned}$$

Observe que construímos θ em (4.256) de modo que $\theta(0)=\theta(l)=0$, e ainda $\theta,\theta_x\in L^2(0,l)$, ou seja, $\theta\in H_0^1(0,l)$ satisfazendo a equação (4.253). Além disso, substituindo a expressão c_0 dada em (4.255) em (4.254), tem-se

$$\begin{aligned}
q(x) &= \rho_3\int_0^x f_5(s)ds+c_0+\delta f_3\\
&= \frac{1}{l\beta}\left(\tau\int_0^l f_6(y)dy-\rho_3\int_0^l\int_0^y f_5(s)dsdy\right)+\int_0^x f_5(s)ds+\delta f_3. \qquad (4.257)
\end{aligned}$$

Agora, resta mostrar que φ e ψ satisfazem (4.250) e (4.251), respectivamente. Para isso, considere

$$-k(\varphi_x+\psi)_x=\rho_1 f_2 \quad \text{em} \quad L^2(0,l), \qquad (4.258)$$

$$-b\psi_{xx}+k(\varphi_x+\psi)=\rho_2 f_4-\delta\theta_x \quad \text{em} \quad L^2(0,l). \qquad (4.259)$$

Denotando por

$$g_1 := \rho_1 f_2 \quad \text{em} \quad L^2(0,l), \tag{4.260}$$
$$g_2 := \rho_2 f_4 - \delta\theta_x \quad \text{em} \quad L^2(0,l), \tag{4.261}$$

o sistema (4.258)-(4.259) toma a seguinte forma

$$-k(\varphi_x + \psi)_x = g_1 \quad \text{em} \quad L^2(0,l), \tag{4.262}$$
$$-b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = g_2 \quad \text{em} \quad L^2(0,l). \tag{4.263}$$

Afirmação: Existe uma única solução $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H}'_{10} := H_0^1(0,l) \times H_*^1(0,l)$ satisfazendo o seguinte problema variacional

$$\int_0^l \Big(k(\varphi_x + \psi)\overline{(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi})} + b\psi_x \overline{\widetilde{\psi}_x} \Big)\, dx = \int_0^l \Big(g_1 \overline{\widetilde{\varphi}} + g_2 \overline{\widetilde{\psi}} \Big)\, dx, \tag{4.264}$$

para todo $(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) \in \mathcal{H}'_{10}$. Para isso, será utilizado o Teorema de Lax-Milgram, então considere a seguinte forma sesquilinear

$$a(.,.) : \mathcal{H}'_{10} \times \mathcal{H}'_{10} \longrightarrow \mathbb{C},$$

dada por

$$a((\varphi, \psi), (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})) = \int_0^l \Big(k(\varphi_x + \psi)\overline{(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi})} + b\psi_x \overline{\widetilde{\psi}_x} \Big)\, dx.$$

Tem-se que a é uma forma sesquilinear contínua e coerciva. Com efeito, usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Poincaré (ver Teorema 2.83), obtém-se

$$\begin{aligned}
|a((\varphi, \psi), (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}))| &\leq k\|\varphi_x\|_2 \|\widetilde{\varphi}_x\|_2 + lk\|\psi_x\|_2 \|\widetilde{\varphi}_x\|_2 \\
&\quad + lk\|\varphi_x\|_2 \|\widetilde{\psi}_x\|_2 + l^2 k\|\psi_x\|_2 \|\widetilde{\psi}_x\|_2 + b\|\psi_x\|_2 \|\widetilde{\psi}_x\|_2 \\
&\leq C(\|\varphi_x\|_2 + \|\psi_x\|_2)(\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 + \|\widetilde{\psi}_x\|_2) \\
&\leq C\|(\varphi, \psi)\|_{\mathcal{H}'_{10}} \|(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})\|_{\mathcal{H}'_{10}},
\end{aligned}$$

onde $C := \max\{k, kl, l^2 k + b\}$, de onde obtém-se

$$|a((\varphi, \psi), (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}))| \leq \|(\varphi, \psi)\|_{\mathcal{H}'_{10}} \|(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})\|_{\mathcal{H}'_{10}},$$

para todos $(\varphi, \psi), (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) \in \mathcal{H}'_{10}$. Além disso, note que usando a desigualdade
$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ e a Desigualdade Triangular Inversa

$$
\begin{aligned}
0 \leq \|(\varphi,\psi)\|^2_{\mathcal{H}'_{10}} &= (\|\varphi_x\|_2 + \|\psi_x\|_2)^2 \\
&= (\|\varphi_x\|_2 + \|\psi_x\|_2 + \|\psi\|_2 - \|\psi\|_2)^2 \\
&\leq (\|\varphi_x + \psi\|_2 + \|\psi_x\|_2 + l\|\psi_x\|_2)^2 \\
&\leq 3\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + 3\|\psi_x\|_2^2 + 3l^2\|\psi_x\|_2^2 \\
&= \frac{3}{k}k\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \frac{3+3l^2}{b}b\|\psi_x\|_2^2 \\
&\leq C(k\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2) \\
&= Ca((\varphi,\psi),(\varphi,\psi)), \qquad (4.265)
\end{aligned}
$$

onde $C = \max\left\{\frac{3}{k}, \frac{3+3l^2}{b}\right\}$. Tomando $C_1 = \frac{1}{C} > 0$, tem-se que

$$a((\varphi,\psi),(\varphi,\psi)) \geq C_1\|(\varphi,\psi)\|_{\mathcal{H}'_{10}}, \ \ \forall\, (\varphi,\psi) \in \mathcal{H}'_{10}.$$

Portanto, a é coerciva. Agora definamos

$$
\begin{aligned}
\phi : \mathcal{H}'_{10} &\longrightarrow \mathbb{C} \\
(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}) &\longmapsto \phi(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}) = \int_0^l \left(g_1\overline{\widetilde{\varphi}} + g_2\overline{\widetilde{\psi}}\right) dx.
\end{aligned}
$$

Afirmação: ϕ é antilinear e limitada. De fato, é fácil ver que ϕ é antilinear. Além disso, usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Poincaré note que

$$
\begin{aligned}
|\phi(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})| &\leq |(g_1,\widetilde{\varphi})| + |(g_2,\widetilde{\psi})| \\
&\leq \|g_1\|_2\|\widetilde{\varphi}\|_2 + \|g_2\|_2\|\widetilde{\psi}\|_2 \\
&\leq C(\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 + \|\widetilde{\psi}_x\|_2) \\
&= C(\|\widetilde{\varphi}\|_{H_0^1} + \|\widetilde{\psi}\|_{H_*^1}) \\
&= C\|(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})\|_{\mathcal{H}'_{10}}, \ \forall (\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}) \in \mathcal{H}'_{10},
\end{aligned}
$$

onde $C = \max\{l\|g_1\|_2, l\|g_2\|_2\}$. Portanto, ϕ é limitada. Então, pelo Teorema de Lax-Milgram, existe um único $(\varphi,\psi) \in \mathcal{H}'_{10}$, tal que

$$a((\varphi,\psi),(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})) = \phi(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}), \ \ \forall (\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}) \in \mathcal{H}'_{10},$$

ou seja, $(\varphi,\psi) \in \mathcal{H}'_{10}$ é a única solução de (4.264), como desejado. Aplicando em (4.264) $\widetilde{\varphi} = \zeta \in C_0^1(0,l)$ e $\widetilde{\psi} = 0$, tem-se

$$\int_0^l (\varphi_x + \psi)\overline{\zeta_x} dx = -\frac{1}{k}\int_0^l (-g_1)\overline{\zeta} dx, \ \ \forall \zeta \in C_0^1(0,l). \qquad (4.266)$$

Como $\varphi_x + \psi$, $g_1 \in L^2(0,l)$ e vale (4.266), então $\varphi_x \in H^1(0,l)$. Logo, $\varphi \in H^2(0,l)$ pela definição de derivada fraca, e ainda

$$k(\varphi_x + \psi)_x = -g_1 \text{ em } L^2(0,l).$$

Usando a definição de $g_1 = \rho_1 f_2$, obtém-se

$$-\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x = f_2 \text{ em } L^2(0,l).$$

Portanto, $\varphi \in H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)$ e satisfaz (4.245).

Consideremos agora $\zeta \in H^1(0,l)$. Note que $\widetilde{\zeta} = \zeta - \frac{1}{l}\int_0^l \zeta(x)dx$ é tal que $\widetilde{\zeta} \in H_*^1(0,l)$. Logo, aplicando em (4.264) $\widetilde{\psi} = \widetilde{\zeta} \in H_*^1(0,l) \subset H^1(0,l)$ e $\widetilde{\varphi} = 0$, tem-se

$$\int_0^l \left(k(\varphi_x + \psi)\overline{\widetilde{\zeta}} + b\psi_x \overline{\widetilde{\zeta}_x} \right) dx = \int_0^l g_2 \overline{\widetilde{\zeta}} dx. \tag{4.267}$$

Substituindo $\widetilde{\zeta} = \zeta - \frac{1}{l}\int_0^l \zeta(x)dx$ e lembrando que $g_2 = \rho_2 f_4 - \delta\theta_x$ obtém-se

$$\begin{aligned}
&\int_0^l k(\varphi_x + \psi)\overline{\left(\zeta - \frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\right)}dx + \int_0^l b\psi_x \overline{\left(\zeta - \frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\right)_x} dx \\
&= \int_0^l (\rho_2 f_4 - \delta\theta_x)\overline{\left(\zeta - \frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\right)}dx.
\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
&\int_0^l k(\varphi_x + \psi)\overline{\zeta}dx - \int_0^l k(\varphi_x - \psi)dx\overline{\left(\frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\right)} + \int_0^l b\psi_x\overline{\zeta}_x dx \\
&= \int_0^l (\rho_2 f_4 - \delta\theta_x)\overline{\zeta}dx - \int_0^l (\rho_2 f_4 - \delta\theta_x)dx\overline{\left(\frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\right)}.
\end{aligned}$$

Usando o fato de que $\varphi, \theta \in H_0^1(0,l)$, $\psi, f_4 \in L_*^2(0,l)$ tem-se que

$$\int_0^l \psi_x \overline{\zeta_x} dx = -\frac{1}{b}\int_0^l (k(\varphi_x + \psi) - (\rho_2 f_4 - \delta\theta_x))\overline{\zeta}dx, \quad \forall \zeta \in H^1(0,l). \tag{4.268}$$

Como ψ_x, $(k(\varphi_x + \psi) - g_2) \in L^2(0,l)$ e vale (4.268) em particular para todo $\zeta \in C_0^1(0,l)$, tem-se $\psi_x \in H^1(0,l)$. Logo, $\psi \in H^2(0,l)$ e ainda

$$\begin{aligned}
&b\psi_{xx} = k(\varphi_x + \psi) - (\rho_2 f_4 - \delta\theta_x) \\
\Rightarrow \quad &-b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = (\rho_2 f_4 - \delta\theta_x) \quad \text{em} \quad L^2(0,l),
\end{aligned} \tag{4.269}$$

satisfazendo (4.259). Assim,

$$\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}+\frac{k}{\rho_2}(\varphi_x+\psi)+\frac{\delta}{\rho_2}\theta_x=f_4.$$

Portanto, $\psi\in H^2(0,l)\cap H^1_*(0,l)$ satisfaz (4.251). Além disso, aplicando em (4.268) o resultado encontrado em (4.269), obtém-se

$$\begin{aligned} -b\int_0^l \psi_x\overline{\zeta_x}dx &= \int_0^l (k(\varphi_x+\psi)-(-b\psi_{xx}+k(\varphi_x+\psi))\overline{\zeta}dx \\ \Rightarrow\quad -b\int_0^l \psi_x\overline{\zeta_x}dx &= b\int_0^l \psi_{xx}\overline{\zeta}dx, \end{aligned} \tag{4.270}$$

Integrando (4.270) por partes, obtém-se

$$-b\int_0^l \psi_x\overline{\zeta}dx = b[\overline{\zeta}\psi_x]_0^l-\int_0^l b\psi_x\overline{\zeta}_x dx.$$

Logo

$$b[\overline{\zeta}\psi_x]_0^l=0\Rightarrow b[\psi_x(l)\overline{\zeta}(l)-\psi_x(0)\overline{\zeta}(0)]=0,\ \forall\zeta\in C^1[0,l].$$

Como $\zeta\in C^1[0,l]$, tome $\overline{\zeta}(0)=0$ e $\overline{\zeta}(l)=1$, então $\psi_x(l)=0$, agora tome $\overline{\zeta}(l)=0$ e $\overline{\zeta}(0)=1$, então $\psi_x(0)=0$. Deste modo, $\psi_x\in H_0^1(0,l)$. Portanto, ψ satisfaz (4.247).

Observe que mostramos existência e unicidade de solução para φ,ψ via Lax-Milgram e soluções explícitas para as variáveis θ e q. Logo, dado $F\in\mathcal{H}_{10}$, existe $U\in D(A_{10})$ tal que $-A_{10}U=F$, ou seja, mostramos que $-A_{10}$ é sobrejetora. Para garantir que $-A_{10}$ possua inversa é necessário mostrar que U é única, isto é, $-A_{10}$ é injetora. Mostraremos que, se $-A_{10}U=0$, então $U=0$. De fato, reescrevamos $-A_{10}U=0$ em termos de suas componentes

$$-\Phi=0, \tag{4.271}$$

$$-\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x=0, \tag{4.272}$$

$$-\Psi=0, \tag{4.273}$$

$$-\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}+\frac{k}{\rho_2}(\varphi_x+\psi)+\frac{\delta}{\rho_2}\theta_x=0, \tag{4.274}$$

$$\frac{1}{\rho_3}q_x+\frac{\delta}{\rho_3}\Psi_x=0, \tag{4.275}$$

$$\frac{\beta}{\tau}q+\frac{1}{\tau}\theta_x=0. \tag{4.276}$$

Da equação (4.271) sabe-se que $\Phi=0$ e de (4.273) vem que $\Psi=0$. Assim o sistema acima resume-se a

$$\begin{cases} -k(\varphi_x+\psi)_x = 0, \\ -b\psi_{xx} + k(\varphi_x - \psi) + \delta\theta_x = 0, \\ q_x = 0, \\ \beta q + \theta_x = 0. \end{cases} \tag{4.277}$$

Uma vez que estamos supondo $F = (0,0,0,0,0,0)$, considerando as soluções de θ em (4.256) e de q em (4.257), vem que $\theta = 0 = q$. Falta verificar se $\varphi = \psi = 0$. Tomando o produto interno em $L^2(0,l)$ de $(4.277)_1$ com φ e o produto interno de $(4.277)_2$ com ψ, integrando por partes, utilizando as condições de fronteira (4.240) e somando as equações vem quem

$$k\|(\varphi_x+\psi)\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 = 0.$$

Assim, tem-se de (4.265)

$$0 \leq \|(\varphi,\psi)\|^2_{\mathcal{H'}_{10}} \leq k\|(\varphi_x+\psi)\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 = 0.$$

Portanto, $\varphi = \psi = 0$. E fica provado que se $-A_{10}U = 0$, então $U = 0$, ou seja, $-A_{10}$ é injetor. Logo, $-A_{10}$ é invertível e denotaremos seu inverso por $-A_{10}^{-1}$.

Etapa 2: Mostraremos que $-A_{10}^{-1}$ é limitado, isto é, $\|-A_{10}^{-1}F\|_{\mathcal{H}_{10}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_{10}}$ para toda $F \in \mathcal{H}_{10}$. Uma vez que a equação $-A_{10}U = F$ é equivalente a $U = -A_{10}^{-1}F$, nosso problema resume-se a mostrar existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_{10}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_{10}}, \quad \forall\, F \in \mathcal{H}_{10}, \tag{4.278}$$

com $U \in D(A_{10})$ solução de $-A_{10}U = F$. Como

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}_{10}} = \rho_1\|\Phi\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + \rho_3\|\theta\|_2^2 + \tau\|q\|_2^2 + k\|(\varphi_x+\psi)\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2, \tag{4.279}$$

então para mostrar que (4.278) é válida, vamos majorar os termos de (4.279) em função das componentes do vetor $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$.

De (4.244) vem que

$$\begin{aligned} \rho_1\|\Phi\|_2^2 &\leq \rho_1 l^2\|(f_1)_x\|_2^2 \\ &= l^2\rho_1\|(f_1)_x - f_3 + f_3\|_2^2 \\ &\leq \rho_1 l^2(\|(f_1)_x + f_3\|_2 + \|f_3\|_2)^2 \\ &\leq \frac{2\rho_1 l^2}{k}k\|(f_1)_x + f_3\|_2^2 + \frac{2\rho_1 l^4}{b}b\|(f_3)_x\|_2^2 \\ &\leq C(k\|(f_1)_x + f_3\|_2^2 + b\|(f_3)_x\|_2^2) \\ &\leq C\|F\|^2_{\mathcal{H}_{10}}, \end{aligned} \tag{4.280}$$

onde $C = \max\left\{\frac{2\rho_1 l^2}{k}, \frac{2\rho_1 l^4}{b}\right\}$. De (4.246) vem que

$$\rho_2\|\Psi\|_2^2 \leq \rho_2 l^2\|(f_3)_x\|_2^2 = \frac{l^2\rho_2}{b} b\|(f_3)_x\|_2^2 \leq \frac{l^2\rho_2}{b}\|F\|_{\mathcal{H}_{10}}^2. \tag{4.281}$$

De (4.243), tem-se

$$Re(-A_{10}U, U)_{\mathcal{H}_{10}} = \beta\|q\|_2^2.$$

Assim, usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e o fato de que $-A_{10}U = F$, tem-se

$$\begin{aligned} & \beta\|q\|_2^2 = |Re(-A_{10}U, U)_{\mathcal{H}_{10}}| \leq |(-A_{10}U, U)_{\mathcal{H}_{10}}| \leq \|F\|_{\mathcal{H}_{10}}\|U\|_{\mathcal{H}_{10}} \\ \Rightarrow\ & \tau\|q\|_2^2 \leq \frac{\tau}{\beta}\|F\|_{\mathcal{H}_{10}}\|U\|_{\mathcal{H}_{10}} \end{aligned} \tag{4.282}$$

De (4.253) e de (4.282) conseguimos a seguinte estimativa para a norma de θ

$$\begin{aligned} \rho_3\|\theta\|_2^2 \leq l^6\rho_3\|\theta_x\|_2^2 &= l^2\rho_3\|\tau f_6 - \beta q\|_2^2 \\ &\leq l^2\rho_3(2\tau^2\|f_6\|_2^2 + 2\beta^2\|q\|_2^2) \\ &\leq l^2\rho_3(2\tau\|F\|_{\mathcal{H}_{10}}^2 + 2\beta\|F\|_{\mathcal{H}_{10}}\|U\|_{\mathcal{H}_{10}}). \end{aligned} \tag{4.283}$$

Tomando o produto interno em $L^2(0,l)$ de (4.250) com φ e o produto interno de (4.253) com ψ, integrando por partes e somando as equações, obtém-se

$$\int_0^l \left(k(\varphi_x + \psi)(\overline{\varphi_x + \psi}) + b\psi_x\overline{\psi}_x\right) dx = \int_0^l \left(\rho_1 f_2\overline{\varphi} + (\rho_2 f_4 + \delta\theta_x)\overline{\psi}\right) dx.$$

Assim, utilizando as Desigualdades Triangular, de Young com ϵ e (4.283), tem-se

$$
\begin{aligned}
k\|\varphi_x+\psi\|_2^2+b\|\psi_x\|_2^2 &= \rho_1(f_2,\varphi)+\rho_2(f_4,\psi)-\delta(\theta,\psi_x)\\
&\leq \rho_1\|f_2\|_2\|\varphi\|_2+\rho_2 l\|f_4\|_2\|\psi_x\|_2+\delta\|\theta\|_2\|\psi_x\|_2\\
&\leq \rho_1 l\|f_2\|_2(\|\varphi_x+\psi\|_2+l\|\psi_x\|_2)+\rho_2\|f_4\|_2\|\psi_x\|_2+\delta\|\theta\|_2\|\psi_x\|_2\\
&\leq \rho_1 l\|f_2\|_2\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}}\|\varphi_x+\psi\|_2+\rho_1 l^2\|f_2\|_2\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\|\psi_x\|_2\\
&\quad +\rho_2 l\|f_4\|_2\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\|\psi_x\|_2+\delta\|\theta\|_2\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\|\psi_x\|_2\\
&\leq \frac{\rho_1^2 l^2 C_\epsilon}{k}\|f_2\|_2^2+\epsilon k\|\varphi_x+\psi\|_2^2+\frac{\rho_1^2 l^4 C_\epsilon}{b}\|f_2\|_2^2+\epsilon b\|\psi_x\|_2^2\\
&\quad +\frac{\rho_2^2 l^2 C_\epsilon}{b}\|f_4\|_2^2+\epsilon b\|\psi_x\|_2^2+\frac{\delta^2 C_\epsilon}{b}\|\theta\|_2^2+\epsilon b\|\psi_x\|_2^2\\
&\leq \frac{\rho_1 l^2 C_\epsilon}{k}\|F\|_{\mathcal{H}_{10}}^2+\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_{10}}^2+\frac{\rho_1 l^4 C_\epsilon}{b}\|F\|_{\mathcal{H}_{10}}^2+\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_{10}}^2\\
&\quad +\frac{\rho_2 l^2 C_\epsilon}{b}\|F\|_{\mathcal{H}_{10}}^2+\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_{10}}^2\\
&\quad +\frac{\delta^2 C_\epsilon}{b}(2l^2\|F\|_{\mathcal{H}_{10}}^2+2l^2\|F\|_{\mathcal{H}_{10}}\|U\|_{\mathcal{H}_{10}})+\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_{10}}^2\\
&\leq \underbrace{\left(\frac{\rho_1 l^2 C_\epsilon}{k}+\frac{\rho_1 l^4 C_\epsilon}{b}+\frac{\rho_2 l^2 C_\epsilon}{b}+\frac{2\delta^2 l^2 C_\epsilon}{b}+\frac{4\delta^4 l^4 C_\epsilon^3}{b}\right)}_{C'}\|F\|_{\mathcal{H}_{10}}\\
&\quad +5\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_{10}}. \qquad (4.284)
\end{aligned}
$$

Então de (4.280), (4.281), (4.282), (4.283), (4.284) e usando a Desigualdade de Young para ϵ, tem-se

$$
\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}_{10}}^2 &= \rho_1\|\Phi\|_2^2+\rho_2\|\Psi\|_2^2+\rho_3\|\theta\|_2^2+\tau\|q\|_2^2+k\|(\varphi_x+\psi)\|_2^2+b\|\psi_x\|_2^2\\
&\leq \underbrace{\left(C+\frac{l^2\rho_2}{b}\right)\|F\|_{\mathcal{H}_{10}}^2}_{(4.280),(4.281)}+\underbrace{\frac{\tau^2}{\beta^2}C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}_{10}}^2+\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_{10}}^2}_{(4.282)}\\
&\quad +\underbrace{2l\rho_3\tau\|F\|_{\mathcal{H}_{10}}^2+4l^4\beta^2\rho_3^2 C_\epsilon\|F\|_{\mathcal{H}_{10}}^2+\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_{10}}^2}_{(4.283)}\\
&\quad +\underbrace{5\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_{10}}^2+C'\|F\|_{\mathcal{H}_{10}}^2}_{(4.284)}.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\|U\|_{\mathcal{H}_{10}}^2 \leq 7\epsilon\|U\|_{\mathcal{H}_{10}}^2+\left(C+\frac{l^2\rho_2}{b}+\frac{\tau^2}{\beta^2}C_\epsilon+2l\rho_3\tau+4l^4\beta^2\rho_3^2 C_\epsilon+C'\right)\|F\|_{\mathcal{H}_{10}}^2.
$$

Tomando $\epsilon < \frac{1}{7}$, obtemos

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}_{10}} \leq K'\|F\|^2_{\mathcal{H}_{10}}, \quad \text{com } K' > 0. \tag{4.285}$$

E assim concluímos que $-A_{10}^{-1}$ é limitado provando o item (iii) do Teorema 4.10.
(i) $D(A_{10})$ é denso em $\mathcal{H}_{10}$. Com efeito, note que $(\lambda_0 I - A_{10}) : D(A_{10}) \to \mathcal{H}_{10}$ pode ser escrito como composição dos operadores

$$A_{10} : D(A_{10}) \to \mathcal{H}_{10} \ \text{ e } \ (\lambda_0 A_{10}^{-1} - I) : D(A_{10}) \to D(A_{10}),$$

por meio da expressão $(\lambda_0 I - A_{10}) = A_{10}(\lambda_0 A_{10}^{-1} - I)$. Em (iii) foi mostrado que A_{10}^{-1} é limitado, assim pode-se tomar $B_1 = -I$ e $B_2 = \lambda_0 A_{10}^{-1}$ (para algum λ_0 suficientemente pequeno) e, pelo Teorema 2.14 concluir que $B_1 + B_2 = \lambda_0 A_{10}^{-1} - I$ é invertível. Como $\lambda_0 I - A_{10}$ é uma composição de operadores invertíveis, segue que $\lambda_0 I - A_{10}$ também é invertível e, portanto, sobrejetor para algum $\lambda_0 > 0$ suficientemente pequeno. Pelo Teorema 3.16, $\lambda I - A_{10}$ é sobrejetor para todo $\lambda > 0$ e, em particular, para $\lambda = 1$. No item (ii) foi mostrado que A_{10} é dissipativo, e como $\mathcal{H}_{10}$ é um espaço Reflexivo (pois é Hilbert), então usando o Teorema 3.18 conclui-se que $\overline{D(A_{10})} = \mathcal{H}_{10}$.

Isto conclui a prova do Teorema 4.10.

□

4.11 Sistema de Timoshenko com Lei Térmica de Gurtin-Pipkin

4.11.1 Dedução do Sistema de Timoshenko com Lei Térmica de Gurtin-Pipkin

Nesta seção consideraremos mais um sistema de Timoshenko termoelástico, mas agora com acoplamento térmico segundo a lei constitutiva de Gurtin-Pipkin [24]. Utilizando a lei térmica de Gurtin-Pipkin para o fluxo de calor, Dell'Oro e Pata [15] mostraram um resultado de estabilidade exponencial para o sistema que será apresentado a seguir. Utilizaremos todas as notações introduzidas nas seções 4.9 e 4.10. Novamente nosso ponto de partida são as equações (4.201) e (4.202), as quais reescreveremos como em (4.233), ou seja, partimos do seguinte sistema termoelástico de Timoshenko

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x = 0, \\ \rho_3\theta_t + q_x + \delta\psi_{xt} = 0, \end{cases} \tag{4.286}$$

Agora, assim como em [15] (ver equação (1.4) do artigo), assumimos que fluxo de calor q obedece a seguinte lei térmica de Gurtin-Pipkin

$$\beta q + \int_0^\infty \mu(s)\theta_x(t-s)ds = 0, \tag{4.287}$$

onde $\beta > 0$ e $\mu \in L^1(0,\infty)$ é uma função dada que representa o *núcleo da memória*. Logo, substituindo (4.287) em (4.286), obtemos o seguinte sistema termoelástico de Timoshenko com Lei Constitutiva de Gurtin-Pipkin:

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x = 0, \\ \rho_3\theta_t - \dfrac{1}{\beta}\displaystyle\int_0^\infty \mu(s)\theta_{xx}(t-s)ds + \delta\psi_{xt} = 0. \end{cases} \tag{4.288}$$

Neste caso, assim como na equação da onda com memória (4.142) ou como no sistema de Timoshenko com memória (4.170), temos que o sistema (4.288) é não-autônomo e, em consequência disto, para aplicar a teoria de semigrupos lineares é necessário transformá-lo em um sistema autônomo por meio de uma mudança de variáveis com respeito a temperatura θ. Seguindo as notações apresentadas em [15, Seção 4], as quais foram originalmente introduzidas em Grasseli e Pata [23], vamos introduzir a *história de deslocamento relativo* $\eta := \eta(x,t,s)$ com respeito a variável θ por

$$\eta(\cdot,t,s) = \int_0^s \theta(\cdot,t-y)dy = \int_{t-s}^t \theta(\cdot,y)dy,\ t \geq 0,\ s > 0. \tag{4.289}$$

Então, derivando formalmente com respeito a t e s, obtemos em primeiro lugar de (4.289) as seguintes identidades

$$\eta_t(\cdot,t,s) = \theta(\cdot,t) - \theta(\cdot,t-s),\ \ \eta_s(\cdot,t,s) = \theta(\cdot,t-s), \quad t,s > 0,$$

ou seja, de forma análoga a (4.173), deduzimos a seguinte equação diferencial com respeito à variável η

$$\eta_t + \eta_s = \theta \quad \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty)\times(0,\infty). \tag{4.290}$$

Por outro lado, denotando por $g(s) = -\mu'(s),\ s > 0$, com $\mu \in L^1(0,\infty)$ e observando que $\eta(x,t,0) := \lim\limits_{s\to 0^+} \eta(x,t,s) = 0$, então integrando por partes vem que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(s)\eta(\cdot,t,s)ds &= -\int_0^\infty \mu'(s)\eta(\cdot,t,s)ds \\ &= \int_0^\infty \mu(s)\eta_s(\cdot,t,s)ds \\ &= \int_0^\infty \mu(s)\theta(\cdot,t-s)ds. \end{aligned}$$

Deste modo, podemos reescrever o termo de memória na terceira equação de (4.288) como

$$\frac{1}{\beta}\int_0^\infty \mu(s)\theta_{xx}(t-s)ds = \frac{1}{\beta}\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(t,s)ds, \quad t > 0. \tag{4.291}$$

Finalmente, substituindo (4.291) em (4.288) e usando (4.290), chegamos ao sistema

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 & \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x+\psi) + \delta\theta_x = 0 & \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty), \\ \rho_3\theta_t - \dfrac{1}{\beta}\displaystyle\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds + \delta\psi_{xt} = 0 & \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty), \\ \eta_t + \eta_s = \theta & \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty)^2, \end{cases} \tag{4.292}$$

o qual será o sistema abordado a seguir com respeito a existência de solução. As hipóteses sobre a função g serão dadas posteriormente. Consideraremos ainda as condições mistas de fronteira

$$\begin{aligned} &\varphi(0,t) = \varphi(l,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(l,t) = \theta(0,t) = \theta(l,t) = 0, \\ &\eta(0,t,s) = \eta(l,t,s) = 0,\ t \geq 0,\ s > 0, \end{aligned} \tag{4.293}$$

e condições iniciais (e de fronteira para $s = 0$)

$$\begin{aligned} &\varphi(x,0) = \varphi_0(x),\ \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x),\ \psi(x,0) = \psi_0(x),\ \psi_t(x,0) = \psi_1(x),\ \theta(x,0) = \theta_0(x), \\ &\eta(x,0,s) = \eta_0(x,s),\ \eta(x,t,0) = 0,\ \ x \in (0,l),\ t \geq 0,\ s > 0. \end{aligned} \tag{4.294}$$

A seguir, mostraremos que o Problema de Valor Inicial e de Fronteira (4.292)-(4.294) possui uma única solução via teoria de semigrupos lineares.

4.11.2 Existência e Unicidade

Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 & \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x+\psi) + \delta\theta_x = 0 & \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty), \\ \rho_3\theta_t - \dfrac{1}{\beta}\displaystyle\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds + \delta\psi_{xt} = 0 & \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty), \\ \eta_t + \eta_s = \theta & \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty)^2, \end{cases} \tag{4.295}$$

com condições iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} \varphi(x,0) = \varphi_0(x),\ \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x),\ \psi(x,0) = \psi_0(0),\ \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \\ \theta(x,0) = \theta_0(x),\ \eta(x,0,s) = \eta_0(x,s),\ \ x \in (0,l),\ s > 0, \end{cases} \tag{4.296}$$

$$\begin{cases} \varphi(x,t) = \psi_x(x,t) = \theta(x,t) = \eta(x,t,s) = 0,\ \ x \in \{0,l\},\ t \geq 0,\ s > 0, \\ \eta(x,t,0) = 0,\ \ x \in (0,l),\ \ t \geq 0. \end{cases} \tag{4.297}$$

Assumiremos que a função g satisfaz a seguinte condição:

$$g \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+) \text{ com } g'(s) \leq 0 < g(s),\ s \in (0,\infty). \tag{4.298}$$

Para converter o PVIF (4.295)-(4.297) num PVI abstrato de primeira ordem, iniciamos com as seguintes notações. Considere $\Phi = \varphi_t, \Psi = \psi_t$ e $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \eta)^T$. Assim,

$$U_t = \begin{bmatrix} \Phi \\ \dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x \\ \Psi \\ \dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \dfrac{\delta}{\rho_2}\theta_x \\ \dfrac{1}{\beta\rho_3}\displaystyle\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds - \dfrac{\delta}{\rho_3}\Psi_x \\ \theta - \eta_s \end{bmatrix} := A_{11}U \tag{4.299}$$

e

$$U(0) = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0, \eta_0)^T := U_0.$$

Deste modo, é possível escrever o problema (4.295)-(4.297) como o seguinte problema de Cauchy Abstrato

$$\begin{cases} U_t = A_{11}U, \;\; t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{4.300}$$

onde A_{11} é definido em (4.299). Para contemplar a condição de fronteira (4.297), introduzimos ainda os seguintes espaços de Hilbert

$$\mathcal{H}_{11} = H_0^1(0,l) \times L^2(0,l) \times H_*^1(0,l) \times L_*^2(0,l) \times L^2(0,l) \times L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,l)),$$

onde $L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,l)) = \left\{\eta : \mathbb{R}^+ \to H_0^1(0,l); \displaystyle\int_0^\infty g(s)\|\eta(s)\|_{H_0^1}^2 < \infty\right\}$, com produto interno e norma dados por

$$\begin{aligned} (U, \hat{U})_{\mathcal{H}_{11}} &= k(\varphi_x + \psi, \hat{\varphi_x} + \hat{\psi}) + \rho_1(\Phi, \hat{\Phi}) + b(\psi_x, \hat{\psi_x}) + \rho_2(\Psi, \hat{\Psi}) + \rho_3(\theta, \hat{\theta}) \\ &\quad + \frac{1}{\beta}\int_0^\infty g(s)(\eta_x(s), \hat{\eta_x}(s))ds \end{aligned}$$

e

$$\|U\|_{\mathcal{H}_{11}}^2 = b\|\psi_x\|_2^2 + \rho_1\|\Phi\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + \rho_3\|\theta\|_2^2 + k\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \frac{1}{\beta}\int_0^\infty g(s)\|\eta_x(s)\|_2^2 ds,$$

para todos $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \eta)^T$, $\hat{U} = (\hat{\varphi}, \hat{\Phi}, \hat{\psi}, \hat{\Psi}, \hat{\theta}, \hat{\eta})^T$ em $\mathcal{H}_{11}$. O domínio do operador diferencial A_{11} é dado por

$$\begin{aligned} D(A_{11}) = \Bigg\{U \in \mathcal{H}_{11};\;\; \varphi, \psi, \int_0^\infty g(s)\eta ds \in H^2(0,l), \;\; \Phi, \psi_x, \theta \in H_0^1(0,l), \;\; \Psi \in H_*^1(0,l), \\ \eta_s \in L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,l)), \;\; \eta(0) = 0\Bigg\}. \end{aligned}$$

Sob estas notações, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.11. *(Existência e Unicidade) . Suponhamos que a hipótese* (4.298) *seja válida. Se* $U_0 \in D(A_{11})$*, então o problema* (4.300) *possui uma única solução*

$$U \in C([0,\infty), D(A_{11})) \cap C^1([0,\infty), \mathcal{H}_{11}),$$

dada por $U(t) = e^{A_{11}t}U_0$.

Demonstração. Face ao Teorema 3.24, basta mostrar que o operador A_{11} é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $S(t) = e^{A_{11}t}$ em $\mathcal{H}_{11}$. Neste caso, pelo Teorema de Lumer-Phillips, é suficiente mostrar que:

(i) $\overline{D(A_{11})} = \mathcal{H}_{11}$;

(ii) A_{11} é dissipativo em $\mathcal{H}_{11}$, ou seja, $Re(A_{11}U, U)_{\mathcal{H}_{11}} \leq 0$;

(iii) $I - A_{11} : D(A_{11}) \subset \mathcal{H}_{11} \to \mathcal{H}_{11}$ é sobrejetor.

Vamos mostrar os itens (ii) e (iii), o item (i) seguirá como consequência.
(ii) Seja $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \eta)^T \in D(A)$ e

$$A_{11}U = \begin{bmatrix} \Phi \\ \dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x \\ \Psi \\ \dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \dfrac{\delta}{\rho_2}\theta_x \\ \dfrac{1}{\beta\rho_3}\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds - \dfrac{\delta}{\rho_3}\Psi_x \\ \theta - \eta_s \end{bmatrix}.$$

Então utilizando a definição de produto interno em $\mathcal{H}_{11}$, fazendo integração por partes e usando as condições de fronteira (4.297), obtém-se

$$
\begin{aligned}
(A_{11}U, U)_{\mathcal{H}_{11}} &= k(\Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi) + b(\Psi_x, \psi_x) + (k(\varphi_x + \psi)_x, \Phi) \\
&\quad + (b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) - \delta\theta_x, \Psi) + \left(\frac{1}{\beta}\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds - \delta\Psi_x, \theta\right) \\
&\quad + \int_0^\infty g(s)((\theta_x - (\eta_s)_x(s)), \eta_x(s))ds \\
&= k\int_0^l (\Phi_x + \Psi)(\overline{\varphi}_x + \overline{\psi})dx - k\int_0^l (\varphi_x + \psi)(\overline{\Phi}_x + \overline{\Psi})dx \\
&\quad + b\int_0^l \Psi_x\overline{\psi}_x dx - b\int_0^l \psi_x\overline{\Psi}_x dx \\
&\quad + \delta\int_0^l \theta\overline{\Psi}_x dx - \delta\int_0^l \Psi_x\overline{\theta}dx \\
&\quad - \int_0^\infty g(s)(\eta_x(s), \theta_x)ds + \int_0^\infty g(s)(\theta_x, \eta_x(s))ds \\
&\quad - \int_0^\infty g(s)((\eta_s)_x(s), \eta_x(s))ds \\
&= -\int_0^\infty g(s)((\eta_s)_x(s), \eta_x(s))ds \\
&\quad + k(\Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi) - k\overline{(\Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi)} \\
&\quad + b(\Psi_x, \psi_x) - b\overline{(\Psi_x, \psi_x)} \\
&\quad + \delta(\theta, \Psi_x) - \delta\overline{(\theta, \Psi_x)} \\
&\quad - \int_0^\infty g(s)(\eta_x(s), \theta_x)ds + \overline{\int_0^\infty g(s)(\eta_x(s), \theta_x)ds}.
\end{aligned}
$$

Tomando a parte real e integrando por partes

$$
\begin{aligned}
Re(A_{11}U, U)_{\mathcal{H}_{11}} &= -\int_0^\infty g(s)((\eta_s)_x(s), \eta_x(s))ds \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\frac{d}{ds}\|\eta_x(s)\|_2^2 ds \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\eta_x(s)\|_2^2 ds,
\end{aligned}
$$

onde procedemos como de (4.156) a (4.157) para concluir a última igualdade acima. Portanto, da condição (4.298), concluímos que A_{11} é dissipativo em $\mathcal{H}_{11}$.

(iii) Dado $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^T \in \mathcal{H}_{11}$, será mostrado que existe única solução $(\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \eta)^T \in D(A_{11})$ para o seguinte sistema de equações:

$$\varphi - \Phi = f_1, \tag{4.301}$$

$$\Phi - \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x = f_2, \tag{4.302}$$

$$\psi - \Psi = f_3, \tag{4.303}$$

$$\Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) + \frac{\delta}{\rho_2}\theta_x = f_4, \tag{4.304}$$

$$\theta - \frac{1}{\beta\rho_3}\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds + \frac{\delta}{\rho_3}\Psi_x = f_5, \tag{4.305}$$

$$\eta - \theta + \eta_s = f_6. \tag{4.306}$$

De modo análogo à equação (4.160), a solução de (4.306) é dada por

$$\eta(s) = (1 - e^{-s})\theta + \phi_{f_6}(s), \tag{4.307}$$

onde $\phi_{f_6}(s) = \int_0^s f_6(y)e^{y-s}dy$ está bem definida pelo Lema 2.98 e $\phi_{f_6} \in L^2_g(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,l))$. Substituindo $\eta_{xx}(s) = (1-e^{-s})\theta_{xx}+(\phi_{f_6})_{xx}(s)$ em (4.305), $\Phi = \varphi - f_1$ em (4.302) e $\Psi = \psi - f_3$ em (4.304) e (4.305), obtém-se o seguinte sistema reduzido

$$\begin{cases} \rho_1\varphi - k(\varphi_x + \psi)_x = \rho_1(f_1 + f_2), \\ \rho_2\psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x = \rho_2(f_3 + f_4), \\ \rho_3\theta - \dfrac{1}{\beta}\displaystyle\int_0^\infty g(s)(1 - e^{-s})ds\theta_{xx} + \delta\psi_x = \rho_3 f_5 + \delta f_{3x} + \dfrac{1}{\beta}\displaystyle\int_0^\infty g(s)(\phi_{f_6})_{xx}(s)ds, \end{cases}$$

ou seja,

$$\rho_1\varphi - k(\varphi_x + \psi)_x = g_1 \in L^2(0,l), \tag{4.308}$$

$$\rho_2\psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x = g_2 \in L^2_*(0,l), \tag{4.309}$$

$$\rho_3\theta - \frac{1}{\beta}\alpha\theta_{xx} + \delta\psi_x = g_3 \in H^{-1}(0,l), \tag{4.310}$$

onde denotamos $\alpha = \displaystyle\int_0^\infty g(s)(1 - e^{-s})ds > 0$ e

$$\begin{cases} \rho_1(f_1 + f_2) := g_1, \\ \rho_2(f_3 + f_4) := g_2, \\ \rho_3 f_3 + \delta f_{3x} + \dfrac{1}{\beta}\displaystyle\int_0^\infty g(s)(\phi_{f_6})_{xx}(s)ds := g_3. \end{cases} \tag{4.311}$$

Observe que $f_3 \in H^1_*(0,l)$, logo $(f_3)_x \in L^2_*(0,l)$ e pelo Lema 2.98 $(\phi_{f_6}) \in H^1_0(0,l)$. Então pela Observação 24, tem-se que $(\phi_{f_6})_{xx} \in H^{-1}(0,l)$. Logo, $g_3 \in H^{-1}(0,l)$.

Afirmação: Existe uma única solução $(\varphi, \psi, \theta) \in H^1_0(0,l) \times H^1_*(0,l) \times H^1_0(0,l)$ para o seguinte problema variacional

$$\int_0^l \left(\rho_1 \varphi \overline{\widetilde{\varphi}} + k(\varphi_x + \psi)(\overline{\widetilde{\varphi}}_x + \overline{\widetilde{\psi}}) + \rho_2 \psi \overline{\widetilde{\psi}} + \rho_3 \theta \overline{\widetilde{\theta}} + b\psi_x \overline{\widetilde{\psi}}_x + \delta \psi_x \overline{\widetilde{\theta}} + \delta \theta_x \overline{\widetilde{\psi}} + \frac{\alpha}{\beta} \theta_x \overline{\widetilde{\theta}_x} \right) dx$$
$$= \int_0^l \left(g_1 \overline{\widetilde{\varphi}} + g_2 \overline{\widetilde{\psi}} + g_3 \overline{\widetilde{\theta}} \right) dx, \tag{4.312}$$

para todos $(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}, \widetilde{\theta}) \in H_0^1(0,l) \times H_*^1(0,l) \times H_0^1(0,l)$. Para isso, será utilizado o Teorema de Lax-Milgram. Com efeito, considere a seguinte forma sesquilinear

$$\begin{aligned} a : (H_0^1(0,l) \times H_*^1(0,l) \times H_0^1(0,l))^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ ((\varphi,\psi,\theta),(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\theta})) &\mapsto \rho_1(\varphi,\widetilde{\varphi}) + k(\varphi_x + \psi, \widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi}) + \rho_2(\psi,\widetilde{\psi}) + \rho_3(\theta,\widetilde{\theta}) \\ &\quad + b(\psi_x,\widetilde{\psi}_x) + \frac{\alpha}{\beta}(\theta_x,\widetilde{\theta}_x) + \delta(\psi_x,\widetilde{\theta}) + \delta(\theta_x,\widetilde{\psi}). \end{aligned}$$

A menos do termo $\frac{\alpha}{\beta}(\theta_x,\widetilde{\theta}_x)$, a continuidade deste problema segue de maneira análoga à continuidade verificada em (4.225). Para a coercividade de a, note que

$$\begin{aligned} a((\varphi,\psi,\theta),(\varphi,\psi,\theta)) &= \rho_1\|\varphi\|_2^2 + k\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \rho_2\|\psi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 + \rho_3\|\theta\|_2^2 \\ &\quad + \frac{\alpha}{\beta}\|\theta_x\|_2^2 + \delta(\theta_x,\psi) + \delta(\psi_x,\theta). \end{aligned} \tag{4.313}$$

Integrando por partes e usando as condições de fronteira (4.210), tem-se

$$\delta(\theta_x,\psi) + \delta(\psi_x,\theta) = \delta(\theta_x,\psi) - \delta\overline{(\theta_x,\psi)}.$$

Tomando a parte real em (4.313), utilizando a Desigualdade Triangular Inversa e o fato de que $4(a^2+b^2+c^2+d^2) \geq (a+b+c+d)^2$, tem-se

$$\begin{aligned} Re(a((\varphi,\psi,\theta),(\varphi,\psi,\theta))) &= \|\varphi\|_2^2 + k\|\varphi_x+\psi\|_2^2 + \rho_2\|\psi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 \\ &\quad + \rho_3\|\theta\|_2^2 + \frac{\alpha}{\beta}\|\theta_x\|_2^2 \\ &\geq k\|\varphi_x+\psi\|_2^2 + \rho_2\|\psi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 + \frac{\alpha}{\beta}\|\theta_x\|_2^2 \\ &= 4\left(\frac{k}{4}\|\varphi_x+\psi\|_2^2 + \frac{\rho_2}{4}\|\psi\|_2^2 + \frac{b}{4}\|\psi_x\|_2^2 + \frac{\alpha}{\beta 4}\|\theta_x\|_2^2\right) \\ &\geq C(4\|\varphi_x+\psi\|_2^2 + 4\|\psi\|_2^2 + 4\|\psi_x\|_2^2 + 4\|\theta_x\|_2^2) \\ &\geq C(\|\varphi_x+\psi\|_2 + \|\psi\|_2 + \|\psi_x\|_2 + \|\theta_x\|_2)^2 \\ &\geq C(\|\varphi_x\|_2 + \|\psi_x\|_2 + \|\theta_x\|_2)^2 \\ &= C(\|\varphi\|_{H_0^1} + \|\psi\|_{H_*^1} + \|\theta\|_{H_0^1})^2 \\ &= C\|(\varphi,\psi,\theta)\|^2_{H_0^1 \times H_*^1 \times H_0^1}, \end{aligned}$$

onde usamos (4.313) e denotamos $C = \min\left\{\frac{k}{4}, \frac{\rho_2}{4}, \frac{b}{4}, \frac{\alpha}{\beta 4}\right\}$.

Agora considere

$$\begin{array}{rcl} \Delta : H_0^1(0,l) \times H_*^1(0,l) \times H_0^1(0,l) & \to & \mathbb{C} \\ \Delta((\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}, \widetilde{\theta})) & \mapsto & (g_1, \widetilde{\varphi}) + (g_2, \widetilde{\psi}) + \langle g_3, \widetilde{\theta} \rangle. \end{array}$$

Então, Δ é antilinear e limitado (contínuo). De fato, a antlinearidade segue trivialmente. Quanto a limitação, tem-se:

$$\begin{array}{rcl} |\Delta(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})| & \leq & \|g_1\|_2 \|\widetilde{\varphi}\|_2 + \|g_2\|_2 \|\widetilde{\psi}\|_2 + \|g_3\|_{H^{-1}} \|\widetilde{\theta}\|_{H_0^1} \\ & \leq & l\|g_1\|_2 \|\widetilde{\varphi}\|_{H_0^1} + l\|g_2\|_2 \|\widetilde{\psi}\|_{H_*^1} + \|g_3\|_{H^{-1}} \|\widetilde{\theta}\|_{H_0^1} \\ & \leq & K\|(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}, \widetilde{\theta})\|_{H_0^1 \times H_*^1 \times H_0^1}, \end{array}$$

onde $K = \max\{l\|g_1\|_2, l\|g_2\|_2, \|g_3\|_{H^{-1}}\}$. Então, pelo Teorema de Lax-Milgram existe uma única terna $(\varphi, \psi, \theta) \in H_0^1(0,l) \times H_*^1(0,l) \times H_0^1(0,l)$ tal que

$$a((\varphi, \psi, \theta), (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}, \widetilde{\theta})) = \Delta(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}, \widetilde{\theta}).$$

Tomando $\Phi = \varphi - f_1 \in H_0^1(0,l)$ e $\Psi = \psi - f_3 \in H_*^1(0,l)$, obtém-se (4.301) e (4.303) satisfeitas.

Sabendo que $\theta \in H_0^1(0,l)$ e $\phi_{f_6} \in L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,l))$, da equação (4.307) e do Lema 2.98, tem-se

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^\infty g(s)\|\eta_x(s)\|_2^2 ds & = & \displaystyle\int_0^\infty g(s)\|(1-e^{-s})\theta_x + (\phi_{f_6})_x(s) ds\|_2^2 \\ & \leq & \displaystyle 2\int_0^\infty g(s)(1-e^{-s})^2\|\theta_x\|_2^2 ds + 2\int_0^\infty g(s)\|\phi_{f_6}\|_2^2 ds \\ & \leq & 2(\|g(s)\|_{L^1(\mathbb{R}^+)})\|\theta\|_{H_0^1}^2 + \|\phi_{f_6}(s)\|_{L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,l))}^2) < \infty. \end{array}$$

Assim, $\eta \in L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,l))$ com $\eta(0) = 0$. Lembrando que θ não depende de s e aplicando o Teorema de Leibniz para integrais, segue-se ainda por (4.307) que

$$\begin{array}{rcl} \eta + \eta_s & = & \displaystyle\left[(1-e^{-s})\theta + \int_0^s e^{y-s} f_6(y) dy\right] + \left[e^{-s}\theta - \int_0^s e^{y-s} f_6(y) dy + f_6(s)\right] \\ & = & \displaystyle\theta + \int_0^s e^{y-s} f_6(y) dy - \int_0^s e^{y-s} f_6(y) dy + f_6(s) \\ & = & \theta + f_6(s), \ s \in \mathbb{R}^+. \end{array}$$

Então, η satisfaz a equação (4.306) com $\eta_s \in L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,l))$ e $\eta(0) = 0$.

Aplicando em (4.312), $\widetilde{\varphi} = \zeta \in C_0^1(0,l)$ e $\widetilde{\psi} = \widetilde{\theta} = 0$, obtém-se

$$\int_0^l (\varphi_x - \psi)\overline{\zeta}_x dx = -\frac{1}{k}\int_0^l [\rho_1 \varphi - g_1]\overline{\zeta} dx, \ \ \forall \zeta \in C_0^1(0,l). \tag{4.314}$$

Como $\varphi_x - \psi$, $\rho_1\varphi - g_1 \in L^2(0,l)$ e vale (4.314), segue que $\varphi_x \in H^1(0,l)$. Portanto, $\varphi \in H^2(0,l)$. Além disso, pela definição de solução fraca

$$k(\varphi_x + \psi)_x = \rho_1\varphi - g_1 \text{ em } L^2(0,l).$$

e ainda, lembrando que $g_1 = \rho_1(f_1 + f_2)$ e $\Phi = \varphi - f_1$, tem-se

$$\Phi - \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x = f_2 \text{ em } L^2(0,l).$$

Então, $\varphi \in H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)$ e satisfaz (4.302).

Aplicando em (4.312) $\widetilde{\psi} = \widetilde{\zeta}$, onde $\widetilde{\zeta} = \gamma - \frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx$ com $\zeta \in H^1(0,l)$ e $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\theta} = 0$, tem-se

$$\int_0^l \left(k(\varphi_x + \psi)\overline{\widetilde{\zeta}} + \rho_2\psi\overline{\widetilde{\zeta}} + b\psi_x\overline{\widetilde{\zeta}}_x + \delta\theta_x\overline{\widetilde{\zeta}} \right) dx = \int_0^l g_2\overline{\widetilde{\zeta}}dx. \tag{4.315}$$

Substituindo $\widetilde{\zeta} = \zeta - \frac{1}{l}\int_0^l \zeta(x)dx$, obtém-se

$$\begin{aligned}
&\int_0^l k(\varphi_x + \psi)\overline{\left(\zeta - \frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\right)}dx + \int_0^l \rho_2\psi\overline{\left(\zeta - \frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\right)}dx \\
&+ \int_0^l b\psi_x\overline{\left(\zeta - \frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\right)_x}dx + \int_0^l \delta\theta_x\overline{\left(\zeta - \frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\right)} \\
&= \int_0^l g_2\overline{\left(\zeta - \frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\right)}dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\int_0^l k(\varphi_x + \psi)\overline{\zeta}dx - \int_0^l k(\varphi_x + \psi)dx\overline{\left(\frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\right)} + \int_0^l \rho_2\psi\overline{\zeta}dx - \int_0^l \rho_2\psi dx\overline{\left(\frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\right)} \\
&+ \int_0^l \delta\theta_x\overline{\zeta}dx - \int_0^l \delta\theta_x dx\overline{\left(\frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\right)} + \int_0^l b\psi_x\overline{\zeta}dx - \int_0^l b\psi_x dx\overline{\left(\frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\right)_x} \\
&= \int_0^l g_2\overline{\zeta}dx - \int_0^l g_2 dx\overline{\left(\frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\right)}.
\end{aligned}$$

Usando o fato de que $\varphi, \theta \in H_0^l(0,l)$, $\psi, g_2 \in H_*^1(0,l)$ e $\overline{\left(\frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\right)_x} = 0$, tem-se que

$$\int_0^l \psi_x\overline{\zeta_x}dx = -\frac{1}{b}\int_0^l (k(\varphi_x + \psi) + \rho_2\psi + \delta\theta_x - g_2)\overline{\zeta}dx, \ \ \forall\zeta \in H^1(0,l). \tag{4.316}$$

Como ψ_x, $(\rho_2\psi + \delta\theta_x + k(\varphi_x + \psi) - g_2) \in L^2(0,l)$ e vale (4.316) em particular para todo $\zeta \in C_0^1(0,l)$, então $\psi_x \in H^1(0,l)$. Logo, $\psi \in H^2(0,l)$ e ainda

$$b\psi_{xx} = \rho_2\psi + \delta\theta_x + k(\varphi_x + \psi) - g_2 \text{ em } L^2(0,l). \tag{4.317}$$

Lembrando a expressão de g_2 em $(4.311)_2$ e que $\Psi = \psi - f_3$, obtém-se

$$\Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) + \frac{\delta}{\rho_2}\theta_x = f_4.$$

Portanto, $\psi \in H^2(0,l) \cap H^1_*(0,l)$ e satisfaz (4.309). Além disso, de (4.317) vem que

$$g_2 = \rho_2\psi + \delta\theta_x + k(\varphi_x + \psi) - b\psi_{xx} \text{ em } L^2(0,l), \tag{4.318}$$

e substituindo (4.318) em (4.316), obtém-se

$$\begin{aligned} &\int_0^l \psi_x\overline{\zeta_x}dx = -\frac{1}{b}\int_0^l (k(\varphi_x + \psi) + \rho_2\psi + \delta\theta_x - (\rho_2\psi + \delta\theta_x + k(\varphi_x + \psi) - b\psi_{xx}))\overline{\zeta}dx \\ \Rightarrow\ &\int_0^l b\psi_x\overline{\zeta}_x dx = -\int_0^l b\psi_{xx}\overline{\zeta}dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes, obtemos

$$\int_0^l b\psi_x\overline{\zeta}_x dx = -b[\overline{\zeta}\psi_x]_0^l + \int_0^l b\psi_x\overline{\zeta}_x dx.$$

Logo

$$-b[\overline{\zeta}\psi_x]_0^l = 0 \Rightarrow -b[\psi_x(l)\overline{\zeta}(l) - \psi_x(0)\overline{\zeta}(0)] = 0,\ \forall\zeta \in C^1[0,l]$$

Como $\zeta \in C^1[0,l]$, tome $\overline{\zeta}(0) = 0$ e $\overline{\zeta}(l) = 1$, então $\psi_x(l) = 0$, agora tome $\overline{\zeta}(l) = 0$ e $\overline{\zeta}(0) = 1$, então $\psi_x(0) = 0$. Deste modo, $\psi_x \in H_0^1(0,l)$. Portanto, ψ satisfaz (4.304).

Aplicando em (4.312), $\widetilde{\theta} = \epsilon \in H^1(0,l)$ e $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\psi} = 0$ vem que

$$\int_0^l \left(\rho_3\theta\overline{\epsilon} + \delta\psi_x\overline{\epsilon} + \frac{\alpha}{\beta}\theta_x\overline{\epsilon}_x\right)dx = \int_0^l g_3\overline{\epsilon}dx. \tag{4.319}$$

Lembrando que $g_3 = \rho_3\theta - \frac{1}{\beta}\alpha\theta_{xx} + \delta\psi_x$ e $\eta = (1 - e^{-s})\theta + \phi_{f_6}(s)$, obtém-se

$$\int_0^l \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)ds\right)\overline{\epsilon}_x dx = -\beta\int_0^l (\rho_3\theta + \delta\psi_x - \rho_3 f_5 - \delta f_{3x})\,\overline{\epsilon}dx,\ \ \forall\epsilon \in H^1(0,l). \tag{4.320}$$

Como $\displaystyle\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)ds$ e $\rho_3 + \delta\psi_x - \rho_3 f_5 - \delta f_{3x} \in L^2(0,l)$ e vale (4.320), segue que

$\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)ds \in H^1(0,l)$. Portanto, $\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds \in H^2(0,l)$. E ainda,

$$\frac{1}{\beta}\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds = \rho_3\theta + \delta\psi_x - \rho_3 f_5 - \delta f_{3x} \text{ em } L^2(0,l)$$

Lembrando que $\Psi = \psi - f_3$, tem-se

$$\theta - \frac{1}{\rho_3\beta}\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds + \frac{\delta}{\rho_3}\Psi_x = f_5 \text{ em } L^2(0,l).$$

Então, θ e η satisfazem (4.305).

Portanto, fica provado que existe um único $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \eta)^T \in D(A_{11})$ tal que

$$U - A_{11}U = F.$$

(i) No item (ii) mostramos que o operador A_{11} é dissipativo e no item (iii) mostramos que $I - A_{11}$ é sobrejetor. Como $\mathcal{H}_{11}$ é um espaço de Hilbert e, portanto, reflexivo, segue do Teorema 3.18 que $\overline{D(A_{11})} = \mathcal{H}_{11}$. □

4.12 Sistema de Timoshenko com Lei Térmica de Fourier e Duas Temperaturas

4.12.1 Dedução do Sistema de Timoshenko com Lei Térmica de Fourier e Duas Temperaturas

Nesta seção estudaremos um sistema termoelástico de Timoshenko com duas temperaturas, ou seja, dois acoplamentos térmicos, sendo um no momento fletor e outro na força de cisalhamento. Observamos que, até o momento, foram estudados sistemas termoelásticos de Timoshenko constituídos de apenas uma variável retratando a temperatura, conforme as seções 4.9, 4.10 e 4.11, onde o termo que exprime a temperatura é acoplado apenas no momento fletor. Nesta seção, não teremos apenas um termo representando a variação de temperatura como em (4.200), mas sim duas variáveis com respeito a temperatura. Além disso, como usaremos a Lei de Fourier para o fluxo de calor em ambas temperaturas, então o sistema apresentado nessa seção generaliza o problema estudado na Seção 4.9 em um certo sentido.

Iniciamos considerando as seguintes equações constitutivas

$$S = k(\varphi_x + \psi) + m\theta \quad \text{e} \quad M = b\psi_x + \delta\vartheta, \tag{4.321}$$

onde m, δ são constantes de acoplamento térmico e θ, ϑ representam variações da temperatura. Ressaltamos que as Leis Térmicas de Tensão-Deformação para momento fletor M são dadas [33, 18] e para a força de cisalhamento S são apresentadas em Almeida Júnior et al. [2]. Em outras palavras, temos um acoplamento térmico no momento fletor representado pela variável

ϑ e outro na força do cisalhamento representado pela variável θ.

Substituindo (4.321) em (4.199), obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + m\theta_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \delta\vartheta_x = 0, \end{cases} \tag{4.322}$$

o qual possui duas equações e quatro funções incógnitas. Logo, precisamos de equações com respeito as variáveis θ e ϑ que representem a condução de calor na viga. Procedendo de forma semelhante à Seção 4.9, consideramos as equações

$$\begin{cases} \rho_3\theta_t - c_0\theta_{xx} + m(\varphi_x + \psi_x)_t = 0, \\ \rho_4\vartheta_t - c_1\vartheta_{xx} + \delta\psi_{xt} = 0, \end{cases} \tag{4.323}$$

as quais representam equações do calor nas variáveis θ e ϑ sob a Lei de Fourier, assim como obtido em (4.42) no caso da equação da onda e em (4.204) no caso do sistema termoelástico de Timoshenko. Aqui, $c_0, c_1 > 0$ representam constantes de condutividade térmica e $\rho_3, \rho_4 > 0$ são constantes que dependem do material da viga. Portanto, de (4.322) e (4.323) obtemos o seguinte sistema termoelástico de Timoshenko com duas temperaturas

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + m\theta_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \delta\vartheta_x = 0, \\ \rho_3\theta_t - c_0\theta_{xx} + m(\varphi_x + \psi_x)_t = 0, \\ \rho_4\vartheta_t - c_1\vartheta_{xx} + \delta\psi_{xt} = 0. \end{cases} \tag{4.324}$$

A estabilidade do sistema (4.324) tem sido objeto de estudos recentes do autores em [3] nos casos em que $\vartheta = \theta$ e $\vartheta \neq \theta$. O sistema (4.324) será estudado no domínio $(0, l) \times (0, \infty)$ com condições de fronteira mista, sendo que φ e ϑ possuem condições de fronteira de Dirichlet e as funções ψ e θ possuem condições de fronteira de Neumann, isto é,

$$\varphi(x, t) = \psi_x(x, t) = \theta_x(x, t) = \vartheta(x, t) = 0, \; x \in \{0, l\}, \; t \geq 0. \tag{4.325}$$

No que diz respeito às condições iniciais, quando $t = 0$, as funções $\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, \theta$ e ϑ são conhecidas, sendo denotadas por

$$\begin{aligned} &\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \; \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \; \psi(x, 0) = \psi_0(x), \; \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \\ &\theta(x, 0) = \theta_0(x), \; \vartheta(x, 0) = \vartheta_0(x), \quad x \in (0, l). \end{aligned} \tag{4.326}$$

A seguir, mostraremos a existência e unicidade de solução para o PVIF (4.324)-(4.326).

4.12.2 Existência e Unicidade

Consideremos o seguinte PVIF

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x+\psi)_x + m\theta_x = 0 & \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x+\psi) - m\theta + \delta\vartheta_x = 0 & \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty), \\ \rho_3\theta_t - c_0\theta_{xx} + m(\varphi_{xt}+\psi_t) = 0 & \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty), \\ \rho_4\vartheta_t - c_1\vartheta_{xx} + \delta\psi_{xt} = 0 & \text{em} \quad (0,l)\times(0,\infty), \end{cases} \tag{4.327}$$

$$\begin{cases} \varphi(x,0)=\varphi_0(x),\ \varphi_t(x,0)=\varphi_1(x),\ \psi(x,0)=\psi_0(x),\ \psi_t(x,0)=\psi_1(x), \\ \theta(x,0)=\theta_0(x),\ \vartheta(x,0)=\vartheta_0(x), \quad x\in(0,l), \end{cases} \tag{4.328}$$

$$\begin{cases} \varphi(0,t)=\varphi(l,t)=\psi_x(0,t)=\psi_x(l,t)=\theta_x(0,t)=\theta_x(l,t)=0, \\ \vartheta(0,t)=\vartheta(l,t)=0,\ t\geq 0. \end{cases} \tag{4.329}$$

Será mostrado que o problema (4.327)-(4.329) possui uma única solução utilizando teoria de semigrupos lineares. Para isso, considere $\Phi=\varphi_t$, $\Psi=\psi_t$ e $U=(\varphi,\Phi,\psi,\Psi,\theta,\vartheta)^T$. Assim,

$$U_t = \begin{bmatrix} \Phi \\ \dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x - \dfrac{m}{\rho_1}\theta_x \\ \Psi \\ \dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x+\psi) + \dfrac{m}{\rho_2}\theta - \dfrac{\delta}{\rho_2}\vartheta_x \\ \dfrac{c_0}{\rho_3}\theta_{xx} - \dfrac{m}{\rho_3}(\Phi_x+\Psi) \\ \dfrac{c_1}{\rho_4}\vartheta_{xx} - \dfrac{\delta}{\rho_4}\Psi_x \end{bmatrix} := A_{12}U \tag{4.330}$$

e

$$U(0)=(\varphi_0,\varphi_1,\psi_0,\psi_1,\theta_0,\vartheta_0)^T := U_0.$$

Deste modo, é possível escrever o problema (4.327)-(4.329) no seguinte problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} U_t = A_{12}U, \quad t>0, \\ U(0)=U_0, \end{cases} \tag{4.331}$$

onde A_{12} é definido em (4.330). Para contemplar a condição de fronteira (4.329), defini-se os seguintes espaços de Hilbert:

$$\mathcal{H}_{12} = H_0^1(0,l)\times L^2(0,l)\times H_*^1(0,l)\times L_*^2(0,l)\times L_*^2(0,l)\times L^2(0,l),$$

com produto interno e norma dados por

$$(U,\hat{U})_{\mathcal{H}_{12}} = \rho_1(\Phi,\hat{\Phi}) + \rho_2(\Psi,\hat{\Psi}) + \rho_3(\theta,\hat{\theta}) + \rho_4(\vartheta,\hat{\vartheta}) + k(\varphi_x+\psi,\hat{\varphi}_x+\hat{\psi}) + b(\psi_x,\hat{\psi}_x)$$

e

$$\|U\|_{\mathcal{H}_{12}}^2 = \rho_1\|\Phi\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + \rho_3\|\theta\|_2^2 + \rho_4\|\vartheta\|_2^2 + k\|(\varphi_x+\psi)\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2,$$

para todos $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \vartheta)^T$, $\hat{U} = (\hat{\varphi}, \hat{\Phi}, \hat{\psi}, \hat{\Psi}, \hat{\theta}, \hat{\vartheta})^T \in \mathcal{H}_{12}$.

Neste caso, o domínio do operador diferencial A_{12} é dado por

$$D(A_{12}) = \{U \in \mathcal{H}_{12};\ \ \theta, \Psi \in H_*^1(0,l),\ \ \varphi, \psi, \theta, \vartheta \in H^2(0,l),\ \ \Phi, \psi_x, \theta_x, \vartheta \in H_0^1(0,l)\}.$$

Sendo assim, tem-se o seguinte resultado enunciado no Teorema abaixo.

Teorema 4.12. *(Existência e Unicidade) Se $U_0 \in D(A_{12})$, então o problema* (4.331) *possui uma única solução*

$$U \in C([0,\infty), D(A_{12})) \cap C^1([0,\infty), \mathcal{H}_{12}),$$

dada por $U(t) = e^{A_{12}t}U_0$.

Demonstração. Pelo Teorema 3.24, basta mostrar que o operador A_{12} é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em $\mathcal{H}_{12}$. Neste caso, pelo Teorema de Lumer-Phillips, é suficiente mostrar que

(i) $\overline{D(A_{12})} = \mathcal{H}_{12}$;

(ii) A_{12} é dissipativo em $\mathcal{H}_{12}$, ou seja, $Re(A_{12}U,U)_{\mathcal{H}_{12}} \leq 0$;

(iii) $I - A_{12} : D(A_{12}) \subset \mathcal{H}_{12} \to \mathcal{H}_{12}$ é sobrejetor.

No que segue, mostraremos os itens (ii) e (iii), o item (i) seguirá como consequência.
(ii) Seja $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \vartheta)^T \in D(A_{12})$ e

$$A_{12}U = \begin{bmatrix} \Phi \\ \dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x - \dfrac{m}{\rho_1}\theta_x \\ \Psi \\ \dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x+\psi) + \dfrac{m}{\rho_2}\theta - \dfrac{\delta}{\rho_2}\vartheta_x \\ \dfrac{c_0}{\rho_3}\theta_{xx} - \dfrac{m}{\rho_3}(\Phi_x+\Psi) \\ \dfrac{c_1}{\rho_4}\vartheta_{xx} - \dfrac{\delta}{\rho_4}\Psi_x. \end{bmatrix}.$$

Então, usando a definição de produto interno em $\mathcal{H}_{12}$, integrando por partes e usando as condições de froteira (4.329), obtém-se

$$\begin{aligned}(A_{12}U,U)_{\mathcal{H}_{12}} \;&=\; (k(\varphi_x+\psi)_x - m\theta_x, \Phi) + (b\psi_{xx} - k(\varphi_x+\psi) + m\theta - \delta\vartheta_x, \Psi) + b(\Psi_x, \psi_x) \\ &\quad + k(\Phi_x+\Psi, \varphi_x+\psi) + (c_0\theta xx - m(\Phi_x+\Psi), \theta) + (c_1\vartheta_{xx} - \delta\Psi_x, \vartheta),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}(A_{12}U,U)_{\mathcal{H}_{12}} &= k\int_0^L (v_x+\Psi)(\overline{\varphi}_x+\overline{\psi})dx - k\int_0^L (\varphi_x+\psi)(\overline{\Phi}_x+\overline{\Psi})dx \\ &\quad +m\int_0^L \theta\overline{\Phi}_x dx - m\int_0^L \Phi_x\overline{\theta}dx \\ &\quad +b\int_0^L \Psi_x\overline{\psi}_x dx - b\int_0^L \psi_x\overline{\Psi}_x dx \\ &\quad +m\int_0^L \theta\overline{\Psi}dx - m\int_0^L \Psi\overline{\theta}dx \\ &\quad +\delta\int_0^L \vartheta\overline{\Psi}_x dx - \delta\int_0^L \Psi_x\overline{\vartheta}dx \\ &\quad -c_0\int_0^L \theta_x\overline{\theta}_x dx - c_1\int_0^L \vartheta_x\overline{\vartheta}_x dx \\ &= -c_0\|\theta_x\|_2^2 - c_1\|\vartheta_x\|_2^2 \\ &\quad +m(\theta,\Psi_x) - m\overline{(\theta,\Psi_x)} + b(\Psi_x,\psi_x) - b\overline{(\Psi_x,\psi_x)} \\ &\quad +m(\theta,\Phi) - m\overline{(\theta,\Phi)} + \delta(\vartheta,\Psi_x) - \delta\overline{(\vartheta,\Psi_x)}.\end{aligned}$$

Tomando a parte real,

$$Re(A_{12}U,U)_{\mathcal{H}_{12}} = -c_0\|\theta_x\|_2^2 - c_1\|\vartheta_x\|_2^2 \leq 0,$$

Portanto, A_{12} é dissipativo em $\mathcal{H}_{12}$.
(iii) Dado $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^T \in \mathcal{H}_{12}$, será mostrado que a equação $(I - A_{12})U = F$ possui uma única solução $U \in D(A_{12})$. Para isso, reescrevemos $U - A_{12}U = F$ em termos de suas componentes como

$$\varphi - \Phi = f_1, \tag{4.332}$$
$$\Phi - \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x + \frac{m}{\rho_1}\theta_x = f_2, \tag{4.333}$$
$$\psi - \Psi = f_3, \tag{4.334}$$
$$\Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x+\psi) - \frac{m}{\rho_2}\theta + \frac{\delta}{\rho_2}\vartheta_x = f_4, \tag{4.335}$$
$$\theta - \frac{c_0}{\rho_3}\theta_{xx} + \frac{m}{\rho_3}(\Phi_x+\Psi) = f_5, \tag{4.336}$$
$$\vartheta - \frac{c_1}{\rho_4}\vartheta_{xx} + \frac{\delta}{\rho_4}\Psi_x = f_6. \tag{4.337}$$

Da equação (4.332) sabe-se que $\Phi = \varphi - f_1$ e de (4.334) sabe-se que $\Psi = \psi - f_3$. Substituindo em (4.333), (4.335), (4.336) e (4.337), obtém-se

$$\begin{cases} \varphi - f_1 - \dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x + \dfrac{m}{\rho_1}\theta_x = f_2, \\ \psi - f_3 - \dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x - \psi) - \dfrac{m}{\rho_2}\theta + \dfrac{\delta}{\rho_2}\vartheta_x = f_4, \\ \theta - \dfrac{c_0}{\rho_3}\theta_{xx} + \dfrac{m}{\rho_3}(\varphi_x - (f_1)_x + \psi - f_3) = f_5, \\ \vartheta - \dfrac{c_1}{\rho_4}\vartheta_{xx} + \dfrac{\delta}{\rho_4}(\psi_x - (f_3)_x) = f_6, \end{cases}$$

ou ainda

$$\begin{cases} \rho_1\varphi - k(\varphi_x + \psi)_x + m\theta_x = \rho_1 f_2 + \rho_1 f_1, \\ \rho_2\psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \delta\vartheta_x = \rho_2 f_4 + \rho_2 f_3, \\ \rho_3\theta - c_0\theta_{xx} + m(\varphi_x + \psi) = \rho_3 f_5 + m((f_1)_x + f_3), \\ \rho_4\vartheta - c_1\vartheta_{xx} + \delta\psi_x = \rho_4 f_6 + \delta(f_3)_x. \end{cases}$$

Definindo

$$\begin{aligned} g_1 &:= \rho_1(f_1 + f_2) \in L^2(0,l), \\ g_2 &:= \rho_2(f_3 + f_4) \in L^2_*(0,l), \\ g_3 &:= \rho_3 f_5 + m((f_1)_x + f_3) \in L^2_*(0,l), \\ g_4 &:= \rho_4((f_3)_x + f_6) \in L^2(0,l), \end{aligned} \tag{4.338}$$

tem-se

$$\rho_1\varphi - k(\varphi_x + \psi)_x + m\theta_x = g_1, \tag{4.339}$$

$$\rho_2\psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \delta\varphi_x = g_2, \tag{4.340}$$

$$\rho_3\theta - c_0\theta_{xx} + m(\varphi_x + \psi) = g_3, \tag{4.341}$$

$$\rho_4\vartheta - c_1\vartheta_{xx} + \delta\psi_x = g_4. \tag{4.342}$$

Afirmação: Existe uma única solução

$$(\varphi, \psi, \theta, \vartheta) \in \mathcal{H}''_{12} := H^1_0(0,l) \times H^1_*(0,l) \times H^1_*(0,l) \times H^1_0(0,l)$$

satisfazendo o seguinte problema variacional

$$\begin{aligned} &\int_0^L \Big(\rho_1\varphi\overline{\widetilde{\varphi}} + \rho_2\psi\overline{\widetilde{\psi}} + k(\varphi_x + \psi)\overline{(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi})} + b\psi_x\overline{\widetilde{\psi}}_x + \rho_3\theta\overline{\widetilde{\theta}} + \rho_4\vartheta\overline{\widetilde{\vartheta}} - \delta\vartheta\overline{\widetilde{\psi}}_x - m\theta\overline{(\widetilde{\varphi}_x + \widetilde{\psi})} \\ &+ m(\varphi_x + \psi)\overline{\widetilde{\theta}} + \delta\psi_x\overline{\widetilde{\vartheta}} + c_0\theta_x\overline{\widetilde{\theta}}_x + c_1\vartheta_x\overline{\widetilde{\vartheta}}_x\Big)dx = \int_0^l \Big(g_1\overline{\widetilde{\varphi}} + g_2\overline{\widetilde{\psi}} + g_3\overline{\widetilde{\theta}} + g_4\overline{\widetilde{\vartheta}}\Big)\,dx, \end{aligned} \tag{4.343}$$

para todo $(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}, \widetilde{\theta}, \widetilde{\vartheta}) \in \mathcal{H}''_{12}$. Para isso, será utilizado o teorema de Lax-Milgram, então considere a seguinte forma sesquilinear

$$a(.,.) : \mathcal{H}''_{12} \times \mathcal{H}''_{12} \longrightarrow \mathbb{C},$$

dada por

$$\begin{aligned}
a((\varphi,\psi,\theta,\vartheta),(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\theta},\widetilde{\vartheta})) &= \int_0^L \Big(\rho_1\varphi\overline{\widetilde{\varphi}} + \rho_2\psi\overline{\widetilde{\psi}} + k(\varphi_x+\psi)\overline{(\widetilde{\varphi}_x+\widetilde{\psi})} + b\psi_x\overline{\widetilde{\psi}}_x \\
&\quad +\rho_3\theta\overline{\widetilde{\theta}} + \rho_4\vartheta\overline{\widetilde{\vartheta}} - \delta\vartheta\overline{\widetilde{\psi}}_x - m\theta\overline{(\widetilde{\varphi}_x+\widetilde{\psi})} \\
&\quad +m(\varphi_x+\psi)\overline{\widetilde{\theta}} + \delta\psi_x\overline{\widetilde{\vartheta}} + c_0\theta_x\overline{\widetilde{\theta}}_x + c_1\vartheta_x\overline{\widetilde{\vartheta}}_x\Big)dx.
\end{aligned}$$

Observe que a é contínua e coerciva, de fato, utilizando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Poincaré, tem-se

$$\begin{aligned}
|a((\varphi,\psi,\theta,\vartheta),(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\theta},\widetilde{\vartheta}))| &\leq \rho_1 l^2\|\varphi_x\|_2\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 + k\|\varphi_x\|_2\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 + lk\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 \\
&\quad +lk\|\varphi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 + l^2k\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 + l^2\rho_2\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 \\
&\quad +b\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 + l^2m\|\theta_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 + c_0\|\theta_x\|_2\|\widetilde{\theta}_x\|_2 \\
&\quad +l^2\rho_3\|\theta_x\|_2\|\widetilde{\theta}_x\|_2 + lm\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\theta}_x\|_2 + \rho_4 l^2\|\vartheta_x\|_2\|\widetilde{\vartheta}_x\|_2 \\
&\quad +lm\|\theta_x\|_2\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 + \delta l\|\vartheta_x\|_2\|\widetilde{\psi}_x\|_2 + ml\|\varphi_x\|_2\|\widetilde{\theta}_x\|_2 \\
&\quad +l\delta\|\psi_x\|_2\|\widetilde{\vartheta}_x\|_2 + c_1\|\vartheta_x\|_2\|\widetilde{\vartheta}_x\|_2 + \|\varphi_x\|_2\|\widetilde{\vartheta}_x\|_2 \\
&\quad +\|\vartheta_x\|_2\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 + \|\theta_x\|_2\|\widetilde{\vartheta}_x\|_2 + \|\vartheta_x\|_2\|\widetilde{\theta}_x\|_2 \\
&\leq C(\|\varphi_x\|_2 + \|\psi_x\|_2 + \|\theta_x\|_2 + \|\vartheta_x\|_2) \\
&\quad (\|\widetilde{\varphi}_x\|_2 + \|\widetilde{\psi}_x\|_2 + \|\widetilde{\theta}_x\|_2 + \|\widetilde{\vartheta}_x)\|_2) \\
&= C\|(\varphi,\psi,\theta,\vartheta)\|_{\mathcal{H}''_{12}}\|(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\theta},\widetilde{\vartheta})\|_{\mathcal{H}''_{12}}.
\end{aligned}$$

onde $C := \max\{1, \rho_1 l^2 + k, \rho_2 l^2, c_0 + \rho_3 l^2, c_1 + \rho_4 l^2, kl + b, l\delta, ml, l^2 m\}$.

Note que

$$\begin{aligned}
a((\varphi,\psi,\theta,\vartheta),(\varphi,\psi,\theta,\vartheta)) &= \rho_1\|\varphi\|_2^2 + k\|\varphi_x+\psi\|_2^2 + \rho_2\|\psi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 + \rho_3\|\theta\|_2^2 \\
&\quad +\rho_3\|\theta\|_2^2 + \rho_4\|\vartheta\|_2^2 + c_0\|\theta_x\|_2^2 + c_1\|\vartheta_x\|_2^2 - \delta(\vartheta,\psi_x) \\
&\quad +\delta\overline{(\vartheta,\psi_x)} - m(\theta,\varphi_x+\psi) + m\overline{(\theta,\varphi_x+\psi)}. \qquad (4.344)
\end{aligned}$$

Tomando a parte real em (4.344), usando a Desigualdade Triangular Inversa e o Lema 2.42, tem-se

$$
\begin{aligned}
Re(a((\varphi,\psi,\theta),(\varphi,\psi,\theta))) &= \rho_1\|\varphi\|_2^2+k\|\varphi_x+\psi\|_2^2+\rho_2\|\psi\|_2^2+b\|\psi_x\|_2^2+\rho_3\|\theta\|_2^2\\
&\quad +c_0\|\theta_x\|_2^2+\rho_4\|\vartheta\|_2^2+c_1\|\vartheta_x\|_2^2\\
&\geq k\|\varphi_x+\psi\|_2^2+\rho_2\|\psi\|_2^2+b\|\psi_x\|_2^2+c_0\|\theta_x\|_2^2+c_1\|\vartheta_x\|_2^2\\
&= 8\left(\frac{k}{8}\|\varphi_x+\psi\|_2^2+\frac{\rho_2}{8}\|\psi\|_2^2+\frac{b}{8}\|\psi_x\|_2^2+\frac{c_0}{8}\|\theta_x\|_2^2+\frac{c_1}{8}\|\vartheta_x\|_2^2\right)\\
&\geq C(8\|\varphi_x+\psi\|_2^2+8\|\psi\|_2^2+8\|\psi_x\|_2^2+8\|\theta_x\|_2^2+8\|\vartheta_x\|_2^2)\\
&\geq C(\|\varphi_x+\psi\|_2+\|\psi\|_2+\|\psi_x\|_2+\|\theta_x\|_2+\|\vartheta_x\|_2)^2\\
&\geq C(\|\varphi_x\|_2+\|\psi_x\|_2+\|\theta_x\|_2+\|\vartheta_x\|_2)^2\\
&= C(\|\varphi\|_{H_0^1}+\|\psi\|_{H_*^1}+\|\theta\|_{H_*^1}+\|\vartheta\|_{H_0^1})^2\\
&= C\|(\varphi,\psi,\theta,\vartheta)\|^2_{\mathcal{H}''_{12}},
\end{aligned}
$$

onde $C=\min\left\{\frac{k}{8},\frac{\rho_2}{8},\frac{b}{8},\frac{c_0}{8},\frac{c_1}{8}\right\}$.

Agora definamos

$$
\begin{aligned}
\phi:\mathcal{H}''_{12} &\longrightarrow \mathbb{C}\\
(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\theta},\widetilde{\vartheta}) &\longmapsto \Phi(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\theta},\widetilde{\vartheta})=\int_0^l\left(g_1\overline{\widetilde{\varphi}}+g_2\overline{\widetilde{\psi}}+g_3\overline{\widetilde{\theta}}+g_4\overline{\widetilde{\vartheta}}\right)dx.
\end{aligned}
$$

Observe que ϕ é antilinear e limitada. De fato, é fácil ver que ϕ é antilinear, agora observe que pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Poincaré, tem-se

$$
\begin{aligned}
|\phi(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\theta},\widetilde{\vartheta})| &\leq |(g_1,\widetilde{\varphi})|+|(g_2,\widetilde{\psi})|+|(g_3,\widetilde{\theta})|+|(g_4,\widetilde{\vartheta})|\\
&\leq \|g_1\|_2\|\widetilde{\varphi}\|_2+\|g_2\|_2\|\widetilde{\psi}\|_2+\|g_3\|_2\|\widetilde{\theta}\|_2+\|g_4\|_2\|\widetilde{\vartheta}\|_2\\
&\leq C(\|\widetilde{\varphi}_x\|_2+\|\widetilde{\psi}_x\|_2+\|\widetilde{\theta}_x\|_2+\|\widetilde{\vartheta}_x\|_2)\\
&= C(\|\widetilde{\varphi}\|_{H_0^1}+\|\widetilde{\psi}\|_{H_*^1}+\|\widetilde{\theta}\|_{H_*^1}+\|\widetilde{\vartheta}\|_{H_0^1})\\
&= C\|(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\theta},\widetilde{\vartheta})\|_{\mathcal{H}''_{12}},
\end{aligned}
$$

onde $C=l\max\limits_{1\leq i\leq 4}\{\|g_i\|_2\}$. Pelo Teorema de Lax-Milgram, existe um único $(\varphi,\psi,\theta,\vartheta)\in\mathcal{H}''_{12}$, tal que

$$
a((\varphi,\psi,\theta,\vartheta),(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\theta},\widetilde{\vartheta}))=\phi(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\theta},\widetilde{\vartheta}),\ \ \forall(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\theta},\widetilde{\vartheta})\in\mathcal{H}''_{12},
$$

ou seja, $(\varphi,\psi,\theta,\vartheta)\in\mathcal{H}''_{12}$ é a única solução de (4.343), como desejado. Seja $(\varphi,\psi,\theta,\vartheta)\in\mathcal{H}''_{12}$ a solução de (4.343). Tomando $\Phi=\varphi-f_1\in H_0^1(0,L)$ e
$\Psi=\psi-f_3\in H_*^1(0,L)$, então as equações (4.332) e (4.334) são satisfeitas.

Aplicando em (4.343) $\widetilde{\varphi}=\zeta\in C_0^1(0,l)$, e $\widetilde{\psi}=\widetilde{\theta}=\widetilde{\vartheta}=0$, tem-se

$$
\int_0^l\varphi_x\overline{\zeta_x}dx=-\frac{1}{k}\int_0^l(\rho_1\varphi+m\theta_x-k\psi_x-g_1)\overline{\zeta}dx,\ \ \forall\zeta\in C_0^1(0,l). \tag{4.345}
$$

Como φ_x, $\rho_1\varphi + m\theta_x - k\psi_x - g_1 \in L^2(0,l)$ e vale (4.345), então $\varphi_x \in H^1(0,l)$. Logo, $\varphi \in H^2(0,l)$, com

$$k\varphi_{xx} = \rho_1\varphi - k\psi_x + m\theta_x - g_1 \text{ em } L^2(0,l).$$

De $(4.338)_1$ e lembrando que $\Phi = \varphi - f_1$, tem-se

$$\Phi - \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x + \frac{m}{\rho_1}\theta_x = f_2 \text{ em } L^2(0,l).$$

Portanto, $\varphi \in H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)$ satisfaz (4.333).

Aplicando em (4.343) $\widetilde{\psi} = \widetilde{\zeta}$, onde $\widetilde{\zeta} = \zeta - \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l \zeta(x)dx$ com $\zeta \in H^1(0,l)$ e $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\theta} = \widetilde{\varphi} = 0$, tem-se

$$\int_0^l \Big(k(\varphi_x + \psi)\overline{\widetilde{\zeta}} + \rho_2\psi\overline{\widetilde{\zeta}} + b\psi_x\overline{\widetilde{\zeta}_x} - \delta\vartheta\overline{\widetilde{\zeta}}_x - m\theta\overline{\widetilde{\zeta}}\Big)\, dx = \int_0^l g_2\overline{\widetilde{\zeta}}dx. \tag{4.346}$$

Substituindo $\widetilde{\zeta} = \zeta - \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l \zeta(x)dx$, obtém-se

$$\begin{aligned}
& \int_0^l k(\varphi_x+\psi)\overline{\Big(\zeta - \frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\Big)}dx + \int_0^l \rho_2\psi\overline{\Big(\zeta - \frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\Big)}dx \\
+ & \int_0^l b\psi_x\overline{\Big(\zeta - \frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\Big)_x}dx - \int_0^l \delta\vartheta\overline{\Big(\zeta - \frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\Big)_x} \\
- & \int_0^l m\theta\overline{\Big(\zeta - \frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\Big)}dx \\
= & \int_0^l g_2\overline{\Big(\zeta - \frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\Big)}dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
& \int_0^l k(\varphi_x+\psi)\overline{\zeta}dx - \int_0^l k(\varphi_x+\psi)dx\overline{\Big(\frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\Big)} - \int_0^l \rho_2\psi\overline{\zeta}dx \int_0^l \rho_2\psi dx\overline{\Big(\frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\Big)} \\
- & \int_0^l \delta\vartheta\overline{\zeta}_x dx - \int_0^l \delta\vartheta dx\overline{\Big(\frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\Big)_x} + \int_0^l b\psi_x\overline{\zeta}_x dx + \int_0^l b\psi_x dx\overline{\Big(\frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\Big)_x} \\
- & \int_0^l m\theta\overline{\zeta}dx + \int_0^1 m\theta\overline{\Big(\frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\Big)}dx \\
= & \int_0^l g_2\overline{\zeta}dx - \int_0^l g_2 dx\overline{\Big(\frac{1}{l}\int_0^l \zeta dx\Big)}.
\end{aligned}$$

Usando o fato de que $\varphi \in H_0^1(0,l)$, $\psi, g_2, \theta \in H_*^1(0,l)$ e $\overline{\left(\frac{1}{l}\int_0^l \zeta(x)dx\right)_x} = 0$, tem-se que

$$\int_0^l \psi_x \overline{\zeta_x} dx = -\frac{1}{b}\int_0^l (k(\varphi_x+\psi)+\rho_2\psi - m\theta + \delta\vartheta_x - g_2)\overline{\zeta} dx, \ \ \forall \zeta \in H^1(0,l). \tag{4.347}$$

Como ψ_x, $(\rho_2\psi - m\theta + \delta\vartheta_x + k(\varphi_x+\psi) - g_2) \in L^2(0,l)$ e vale (4.347) em particular para todo $\zeta \in C_0^1(0,l)$, então $\psi_x \in H^1(0,l)$. Logo, $\psi \in H^2(0,l)$ e ainda

$$b\psi_{xx} = \rho_2\psi + k(\varphi_x+\psi) - m\theta + \delta\vartheta_x - g_2 \text{ em } L^2(0,l) \tag{4.348}$$

Lembrando a expressão de g_2 em $(4.338)_2$ e que $\Psi = \psi - f_3$, obtém-se

$$\Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x+\psi) - \frac{m}{\rho_2}\theta + \frac{\delta}{\rho_2}\vartheta_x.$$

Portanto, $\psi \in H^2(0,l)$ satisfaz (4.342).
Além disso, de (4.348) vem que

$$g_2 = \rho_2\psi + k(\varphi_x+\psi) + m\theta + \delta\vartheta_x - b\psi_{xx}, \tag{4.349}$$

substituindo (4.349) em (4.347), obtém-se

$$\begin{aligned} \int_0^l \psi_x\overline{\zeta_x}dx \ &= \ -\frac{1}{b}\int_0^l \Big(k(\varphi_x+\psi) + \rho_2\psi + m\theta + \delta\vartheta_x - (\rho_2\psi + k(\varphi_x+\psi) \\ &\quad -m\theta + \delta\vartheta_x - b\psi_{xx})\Big)\overline{\zeta}dx. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$b\int_0^l \psi_x\overline{\zeta_x}dx = \int_0^l -b\psi_{xx}\overline{\zeta}dx.$$

Integrando por partes, tem-se

$$\int_0^l b\psi_x\overline{\zeta}_x dx = -b[\overline{\zeta}\psi_x]_0^l + \int_0^l b\psi_x\overline{\zeta}_x dx.$$

Logo

$$-b[\overline{\zeta}\psi_x]_0^l = 0 \Rightarrow -b[\psi_x(l)\overline{\zeta}(l) - \psi_x(0)\overline{\zeta}(0)] = 0, \ \forall \zeta \in C^1[0,l]$$

Como $\zeta \in C^1[0,l]$, tome $\overline{\zeta}(0) = 0$ e $\overline{\zeta}(l) = 1$, então $\psi_x(l) = 0$, agora tome $\overline{\zeta}(l) = 0$ e $\overline{\zeta}(0) = 1$, então $\psi_x(0) = 0$. Deste modo, $\psi_x \in H_0^1(0,l)$. Portanto, ψ satisfaz (4.335).

Aplicando em (4.343) $\widetilde{\theta} = \widetilde{\eta}$, de modo que $\widetilde{\eta} = \eta - \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l \eta dx$ com $\eta \in H^1(0,l)$ e

$\widetilde{\varphi} = \widetilde{\psi} = \widetilde{\vartheta} = 0$, tem-se

$$\int_0^l \left(c_0\theta_x \overline{\widetilde{\eta}}_x + \rho_3\theta\overline{\widetilde{\eta}} + m(\varphi_x + \psi)\overline{\widetilde{\eta}} \right) dx = \int_0^l g_3\overline{\widetilde{\eta}} dx. \tag{4.350}$$

Aplicando $\widetilde{\eta} = \overline{\left(\eta - \frac{1}{l}\int_0^l \eta dx\right)}$ em (4.350), obtém-se

$$\begin{aligned}
&\int_0^l c_0\theta_x \overline{\left(\eta - \frac{1}{l}\int_0^l \eta dx\right)}_x + \rho_3\theta\overline{\left(\eta - \frac{1}{l}\int_0^l \eta dx\right)} \\
&+ m(\varphi_x + \psi)\overline{\left(\eta - \frac{1}{l}\int_0^l \eta dx\right)} dx \\
&= \int_0^l g_3\overline{\left(\eta - \frac{1}{l}\int_0^l \eta dx\right)} dx.
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
&\int_0^l c_0\theta_x\overline{\eta}_x dx - \int_0^l c_0\theta_x\overline{\left(\frac{1}{l}\int_0^l \eta dx\right)}_x + \int_0^l \rho_3\theta\overline{\eta} dx - \int_0^l \theta\overline{\left(\frac{1}{l}\int_0^l \eta dx\right)} \\
&+ \int_0^l m(\varphi_x + \psi)\overline{\eta} dx - \int_0^l m(\varphi_x + \psi)\overline{\left(\frac{1}{l}\int_0^l \eta dx\right)} dx \\
&= \int_0^l g_3\overline{\eta} dx - \int_0^l g_3\overline{\left(\frac{1}{l}\int_0^l \eta dx\right)} dx,
\end{aligned}$$

usando o fato de que $\varphi \in H_0^1(0,l)$, $\psi, \theta \in H_*^1(0,l)$ e $g_3 \in L_*^2(0,l)$, tem-se

$$\int_0^l \theta_x \overline{\eta_x} dx = -\frac{1}{c_0}\int_0^l (\rho_3\theta + m\varphi_x + m\psi - g_3)\overline{\eta} dx, \ \ \forall \eta \in H^1(0,l). \tag{4.351}$$

Como θ_x e $\rho_3\theta + m\varphi_x + m\psi - g_3 \in L^2(0,l)$ e vale (4.351), então pela definição de derivada fraca vem que $\theta_x \in H^1(0,l)$. Logo, $\theta \in H^2(0,l)$, e ainda

$$c_0\theta_{xx} = \rho_3\theta + m\psi + m\varphi_x - g_3 \text{ em } L^2(0,l) \tag{4.352}$$

Lembrando $g_3 = \rho_3 f_5 + m((f_1)_x + f_3)$ e que $\Psi = \psi - f_3$, tem-se

$$\theta - \frac{c_0}{\rho_3}\theta_{xx} + \frac{m}{\rho_3}(\Phi_x + \Psi) = f_5.$$

Portanto, $\theta \in H^2(0,l)$ satisfaz a equação (4.341).
De (4.352) vem que

$$g_3 = \rho_3\theta + m\psi + m\varphi_x - c_0\theta_{xx}. \tag{4.353}$$

Substituindo (4.353) em (4.351), vem que

$$\int_0^l \theta_x\overline{\eta_x}dx = -\frac{1}{c_0}\int_0^l \Big(\rho_3\theta + m\varphi_x + m\psi - (\rho_3\theta + m\psi + m\varphi_x - c\theta_{xx})\Big)\overline{\eta}dx$$
$$\Rightarrow \quad c_0\int_0^l \theta_x\overline{\eta_x}dx = -\int_0^l c_0\theta_x\overline{\eta}_x dx.$$

Integrando por partes, tem-se

$$c_0\int_0^l \theta_x\overline{\eta_x}dx = -c_0[\theta_x(x)\eta(x)]_0^l + \int_0^l c_0\theta_{xx}\overline{\eta}dx. \tag{4.354}$$

Deste modo,
$$-c_0[\overline{\eta}(x)\theta_x(x)]_0^l = 0 \Rightarrow -c_0[\theta_x(l)\overline{\eta}(l) - \theta_x(0)\overline{\eta}(0)] = 0.$$

Como $\eta \in C^1[0,l]$, tome $\overline{\eta}(0) = 0$ e $\overline{\eta}(l) = 1$. Logo $\theta_x(l) = 0$, agora tome $\overline{\eta}(l) = 0$ e $\overline{\eta}(0) = 1$, então $\theta_x(0) = 0$. Deste modo, $\theta_x \in H_0^1(0,l)$, satisfazendo (4.336).

Finalmente aplicando em (4.343), $\widetilde{\vartheta} = \tau \in H^1(0,l)$ e $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\theta} = \widetilde{\psi} = 0$, tem-se

$$\int_0^l \vartheta_x\overline{\tau_x}dx = -\frac{1}{c_1}\int_0^l (\delta\psi_x + \rho_4\vartheta - g_4)\overline{\tau}dx, \ \ \forall\tau \in H^1(0,l). \tag{4.355}$$

Como ϑ_x, $\delta\psi_x + \rho_4\vartheta - g_4 \in L^2(0,l)$ e vale (4.355), então $\vartheta_x \in H^1(0,l)$. Logo $\vartheta \in H^2(0,l)$, e ainda pela solução de derivada fraca, tem-se

$$c_1\vartheta_{xx} = \delta\psi_x + \rho_4\vartheta - g_4 \text{ em } L^2(0,l).$$

Lembrando da definição de g_4 em $(4.338)_4$, obtém-se

$$\vartheta - \frac{c_1}{\rho_4}\vartheta_{xx} + \frac{\delta}{\rho_4}\Psi_x = f_6 \text{ em } L^2(0,l).$$

Portanto, $\vartheta \in H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)$ satisfazendo a equação (4.337). Isto mostra que existe um único $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \vartheta) \in D(A_{12})$, tal que $(I - A_{12})U = F$.

(i) Mostramos que o operador A_{12} é dissipativo e que $I - A_{12}$ é sobrejetor. Como $\mathcal{H}_{12}$ é um espaço de Hilbert, então pelo Teorema 2.27 $\mathcal{H}_{12}$ é reflexivo. Logo, pelo Teorema 3.18 $\overline{D(A_{12})} = \mathcal{H}_{12}$. □

4.13 Boa Colocação

Para encerrar este capítulo, vamos concluir que todos os sistemas abordados nas seções 4.1 - 4.12 são bem postos segundo Hadamard, ou seja, temos existência e unicidade de solução, bem como dependência contínua dos dados inciais (ver, por exemplo, Definição 1.2.1 em [29]). Mais precisamente, isso seguirá do fato que todos os problemas são lineares e podem ser reescritos no seguinte problema abstrato de primeira ordem

$$\begin{cases} U_t = AU, \ \ t > 0, \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{4.356}$$

Assim sendo, como mostrado em todos os casos, se $U_0 \in D(A)$, então (4.356) possui solução única via teoria de semigrupos lineares, a qual é dada por $U(t) = e^{At}U_0,\ t \geq 0$, onde $\{e^{At}\}_{t \geq 0}$ é um C_0-semigrupo de contrações com gerador infinitesimal $A : D(A) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Logo, resta mostrar apenas que a solução depende continuamente dos dados inciais, cuja prova será feita seguir como uma consequência imediata do Teorema de Hille-Yosida.

Com efeito, consideremos $U(t) = e^{At}U_0$ e $V(t) = e^{At}V_0$ soluções de (4.356) com dados iniciais U_0 e V_0 em $D(A)$, respectivamente. Então, pelo Teorema de Hille-Yosida (ver Teorema 3.9) existem constantes positivas C, w tais que

$$||e^{At}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq Ce^{wt}, \quad \forall\, t > 0.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \|U(t) - V(t)\|_{\mathcal{H}} &= \|e^{At}(U_0 - V_0)\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \|e^{At}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\|U_0 - V_0\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq Ce^{wt}\|U_0 - V_0\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall\, t > 0, \end{aligned}$$

o que prova a dependência contínua de solução com respeito aos dados iniciais.

CONCLUSÃO

Neste trabalho estudamos a existência e unicidade de solução para problemas que modelam diversos fenômenos físicos usando a Teoria de Semigrupos Lineares. Alguns destes problemas encontrados na literatura não surgem de forma que consigamos, a priori, aplicar a Teoria de Semigrupos Lineares diretamente. Deste modo, em alguns problemas foram feitas considerações físicas e introduzidas novas variáveis com modificações específicas em cada caso a fim de chegarmos a sistemas autônomos passíveis de aplicar a Teoria de Semigrupos Lineares.

Mediante aos resultados apresentados no Capítulo 4, no que concerne a existência e unicidade de solução para problemas de valores inciais e de fronteira, concluímos que a Teoria de Semigrupos Lineares é bastante eficaz e abrangente na resolução de problemas lineares em equações diferenciais, uma vez que foram abordados diversos problemas com características distintas e foram apresentadas, em cada caso, as ferramentas necessárias para a resolução dos problemas.

Além disso, para problemas lineares como os abordados no Capítulo 4, vê-se que a Teoria de Semigrupos Lineares é bem dinâmica, ao passo que outros métodos como o método de Faedo-Galerkin e o método do Ponto Fixo podem exigir mais esforço e trabalho para resolver o mesmo problema. No entanto, tais métodos podem ser mais eficazes na resolução de problemas não lineares.

REFERÊNCIAS

[1] Almeida Junior, D. S.; Santos, M, L.; Muñoz Rivera, J. E.; *Stability to weakly dissipative Timoshenko systems* . Math. Methods Appl. Sci. 36 (2013) 1965-1976.

[2] Almeida Junior, D. S.; Santos, M, L.; Muñoz Rivera, J. E.; *Stability to 1-D thermoelastic Timoshenko beam acting on shear force* . Z. Angew. Math. Phys. 65 (2014), 1233–1249.

[3] Alves, M. O.; Caixeta, A. H.; Jorge Silva, M. A.; Rodrigues, J. H.; *On the Exponencial stability of thermoelastic Timoshenko beams*. Preprint.

[4] Ammar-Khodja, F.; Benabdallah, A.; Muñoz Rivera, J. E.; Racke, R.; *Energy decay for Timoshenko systems of memory type*. J. Differential equations 194 (2003), no. 1, 82-115.

[5] Boltzmann, L.; *Zur theorie der elastischen Nachwirkung*. Wien. Ber. 70 (1874), 275-306.

[6] Boltzmann, L.; *Zur theorie der elastischen Nachwirkung*, Wied. Ann. 5 (1878), 430-432.

[7] Brezis, H.; *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Universitext, Springer New York, 2010.

[8] Carvalho A. N.; *Análise Funcional II*. Notas de aula- Universidade de São Paulo, 2007.

[9] Cattaneo C.; *Sulla conduzione del calore*, Atti Semin. Matemat. Univ. Modena 3 (1948) 83–101.

[10] Cavalcanti, M. M.; Domingos Cavalcanti, V. N.; *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*. Eduem, Maringá, PR, 2009.

[11] Cavalcanti, M. M.; Domingos Cavalcanti, V. N.; Komornik, V.; *Introdução à Análise Funcional*. Eduem, Maringá, PR, 2011.

[12] Chapman; Hall; *Nonlinear Evolution Equations*. Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 2004.

[13] Dafermos, C. M.; *Asymptotic Stability in Viscoelasticity*. Cornell University Ithaca, New York, 1970.

[14] Dafermos, C. M.; *On the existence and the asymptotic stability of solution to the equations of linear thermoelasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal. 29 (1968), 241-271.

[15] Dell'Oro, F.; Pata, V.; *On the stability of Timoshenko systems with Gurtin–Pipkin thermal law*. J. Differential Equations 257 (2014) 523–548.

[16] Evans, L. C.; *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[17] Fabrizio, M.; Giorgi, C.; Pata, V.; *A new approach to equations with memory*. Arch. Rational Mech. Anal. 198 (2010) 189–232.

[18] Fernández Sare, H. D.; Racke, R.; *On the stability of damped Timoshenko Systems: Cattaneo Versus Fourier Law.* Arch. Rational Mech. Anal. 194 (2009) 221–251.

[19] Figueiredo D. G.; *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. Instituto de matemática pura e aplicada, 1977.

[20] Fox, R. W.; McDonald, A. T.; Pritchard, P. J.; *Introdução à Mecânida dos Fluidos*. LTC 6ª edição. Rio de Janeiro, 2006.

[21] Gelfand, I. M.; Fomin, S. V.; *Calculus of Variations,* Prentice-Hall (transl. from Russian), 1963.

[22] Giorgi, C.; Pata, V.; Vuk, E.; *On the extensible viscoelastic beam*. Nonlinearity 21 (2008) 713–733.

[23] Grasselli, M.; Pata V.; *Uniform attractors of nonautonomous dynamical systems with memory*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications 50 (2002) 155-178.

[24] Gurtin, M. E.; Pipkin A. C.; *A general theory of heat conduction with finite wave speeds*. Arch. Ration. Mech. Anal. 31 (1968) 113-126.

[25] Halliday, D.; Resnick, R.; Walker, J.; *Fundamentos de Física, Volume 2: Gravitação, Ondas e Termodinâmica*.- 10ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

[26] Hibbeler, H. B.; *Resistência dos Materiais.* 7. ed. São Paulo. Pearson Education do Brasil, 2010.

[27] Hsiao, L.; Luo, T.; *Large-time Behavior of solutions to the equation of one-dimensional nonlinear thermovicoelasticity.* Quarterly of Applied Mathematics. Volume LVI, 1998.

[28] Kesavan, S.; *Functional Analysis*. Texts and Readings in Mathematics, 2009.

[29] Klibanov, M. V.; Timonov, A.; *Carleman Estimates for Coefficient Inverse Problems and Numerical Applications*. VSP, UTRECHT, Boston, 2004.

[30] Kreysizg, E.; *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley Classics Library, 1989.

[31] Lima E. L.; *Espaços Métricos*. Projeto Euclides-IMPA. Edição 3, Volume 1, 1993.

[32] Muñoz Rivera, J. E.; *Energy decay rate in linear thermoelasticity*. Funkcial. Ekvac. 35 (1992), 19-30.

[33] Muñoz Rivera, J. E.; Racke, R.; *Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems-global existence and exponential stability*. J. Math. Anal. Appl. 276 (2002) 248–278.

[34] Muñoz Rivera, J. E.; Racke, R.; *Global stability for damped Timoshenko systems*. Discrete Contin. Dyn. Syst. B 9 (2003) 1625-1639.

[35] Muñoz Rivera, J. E.; *Estabilização de semigrupos e aplicações.* Série de métodos matemáticos, Rio de Janeiro, 2008.

[36] Muñoz Rivera, J. E.; Hugo, D.; Fernández Sare, H. D.; *Stability of Timoshenko systems with past history.* J. Math. Anal. Appl. 339 (2008) 482–502.

[37] Oden J. T.; Demkowicz L. F.; *Applied Functional Analysis*. Computational Mechanics and Applied Analysis, 1996.

[38] Pazy, A.; *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied mathematical sciences, Springer 1983.

[39] Racke, R.; *Nonlinear Evolutions Equations in Thermoelasticíty*. Math, Reserarch Note, 96-004, Institute of Mathematics at the University of Tsukuba, 1996.

[40] Rao, S. S.; *Mechanical Vibrations.* 4. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2004.

[41] Raposo, C. A.; *Semigrupos Aplicados a Sistemas Dissipativos em EDP*. SBMAC, Florianópolis, 2007.

[42] Raposo, C. A.; Ferreira, J.; Santos, M. L.; Castro, N. N. O.; *Exponential stability for the Timoshenko system with two weak dampings*. Applied Mathematics Letters 18 (2005) 535–541.

[43] Raposo, C. A.; Ferreira, J.; Santos, M. L.; Matos, M. P.; *Large-time behaviour of solutions to the equations of one-dimensional nonlinear thermoviscoelasticity with memory*. Mathematical and Computer Modelling 45 (2007) 1021-1032.

[44] Timoshenko, S. P.; *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibra- tions of prismatic bars*. Philosophical Magazine, Series 6, 41, issue 245, (1921) 744-746.

[45] Timoshenko, S. P.; *Vibration Problems in Engineering*. Van Nostrand, New York, 1955.

[46] Zeidler, E.; Boron, L.; *Nonlinear Function Analysis and Its Applications II/ A: Linear Monotone Operators*. Transl. by the Author and by Leo F. Boron. Springer New York, 1989.