



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

TADASI MATSUBARA JUNIOR

ESQUEMA DE LINEARIZAÇÃO PARA RESOLUÇÃO DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS BIDIMENSIONAIS

Londrina
2017

TADASI MATSUBARA JUNIOR

ESQUEMA DE LINEARIZAÇÃO PARA RESOLUÇÃO DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS BIDIMENSIONAIS

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientadora: Prof^ª. Dra. Neyva Maria Lopes Romeiro

Londrina
2017

TADASI MATSUBARA JUNIOR

ESQUEMA DE LINEARIZAÇÃO PARA RESOLUÇÃO DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS BIDIMENSIONAIS

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Prof^ª. Dra. Neyva Maria Lopes Romeiro
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Cosmo Damião Santiago
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dr. Eliandro Rodrigues Cirilo
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 17 de fevereiro de 2017.

Dedico este trabalho aos meus pais, Tadasi e Laurinda.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família, por me apoiarem em todas as minhas escolhas e em todos os momentos de minha vida, por estarem sempre ao meu lado.

Agradeço à minha orientadora professora Neyva Maria Lopes Romeiro, pelo seus ensinamentos, sua dedicação, e pelo seu incentivo que tornaram possível a conclusão deste trabalho.

Agradeço aos professores Eliandro Rodrigues Cirilo e Paulo Laerte Natti pela colaboração, sugestões, contribuições com a transmissão de conhecimentos e pelo estímulo para o aperfeiçoamento deste trabalho. Também aos demais professores do programa PGMAC pela competência e disposição em compartilhar experiências e conhecimentos.

Aos meus colegas, Alex Issamu Moriya, Camila Hiromi Tamura, Tatiana Mari Saita e Júlio César Coelho que fizeram parte do processo de elaboração deste trabalho, compartilhando os momentos de dificuldades e ajudando uns aos outros a atingir os objetivos.

Enfim, a todos aqueles que de uma maneira ou de outra contribuíram para a conclusão de mais uma etapa em minha vida.

MATSUBARA JR, Tadasi. **Esquema de Linearização para resolução de Equações Diferenciais Parciais Bidimensionais**. 2017. 84. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

RESUMO

Métodos numéricos tornaram-se ferramentas indispensáveis na determinação de soluções aproximadas de equações diferenciais parciais não lineares (EDP's), uma vez que muitas das soluções analíticas encontradas na literatura envolvem simplificações e descartam as não linearidades presentes nas equações. Dentro deste cenário, o método de diferenciais finitas (MDF) é usado para gerar soluções de EDP's bidimensionais, em particular, a equação de Burgers, a equação de convecção-difusão, sistemas acoplados de equações de Burgers e sistema de equações de Navier-Stokes. O esquema resultante das discretizações das equações pelo MDF resulta em um sistema semi-implícito de equações não lineares. Como uma alternativa para evitar a necessidade da resolução de um sistema não linear, será aplicada uma técnica numérica no qual lineariza-se os termos convectivos do sistema, obtendo um sistema implícito linearizado. A linearização do sistema é realizada aplicando a expansão da série de Taylor. Verificou-se que o esquema linearizado, quando comparado com soluções analíticas e análise de erros, mostrou-se satisfatório.

Palavras-chave: Diferenças Finitas. Equação de Burgers. Equação de Convecção-Difusão. Equações de Navier-Stokes. Linearização. Análise de erros.

MATSUBARA JR, Tadasi. **Linearization Scheme for solving two-dimensional Partial Differential Equations**. 2017. 84. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

ABSTRACT

Numerical methods have become indispensable tools in determine some approximated solutions of nonlinear partial differential equations (PDE). Since many of the analytical solutions were founded in the literature in which involve simplification and do not use linearities in these equations. So, the finite-difference methods (FDM) is used to generate the two-dimensional EDP solutions, in particular way, a Burgers' equation, a convection-diffusion equation, coupled systems of Burgers equations and a Navier-Stokes equations. The resulting difference scheme of the discrepancies from the FDM equations results in a semi-implicit system of non-linear equations. As an alternative to avoid the need for the resolution of a non-linear system, a numerical technique will be applied without linearization of the convective terms of the system to obtain an implicit linearized system. A linearization of the system is performed by applying an expansion of the Taylor series. It was verified that the linearized difference scheme, when compared with analytical solutions and error analysis studies, was satisfied.

Keywords: Finite Differences. Burgers equation. Convection-Diffusion Equation. Navier-Stokes equations. Linearization. Error analysis.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	20
2.1	EQUAÇÕES EM REGIME TRANSIENTE	20
2.1.1	Equação de Burgers 2D	20
2.1.2	Sistema Acoplado de Equações de Burgers 2D	20
2.1.3	Sistema de Equações de Navier-Stokes 2D	21
2.2	EQUAÇÕES EM REGIME PERMANENTE	22
2.2.1	Equação de Convecção-Difusão 2D	22
2.2.2	Sistema Acoplado de Equações de Burgers 2D em Regime Permanente	23
3	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	24
3.1	MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS	24
3.2	ERRO NA NORMA L_1 E L_2	26
4	DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES	28
4.1	DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES EM REGIME TRANSIENTE	28
4.1.1	Discretização da Equação de Burgers 2D	28
4.1.2	Discretização do Sistema Acoplado de Equações de Burgers 2D	33
4.1.3	Discretização do Sistema de Equações de Navier-Stokes 2D	40
4.2	DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES EM REGIME PERMANENTE	43
4.2.1	Discretização da Equação de Convecção-Difusão	43
4.2.2	Discretização do Sistema Acoplado de Equações de Burgers 2D em Regime Permanente	46
5	RESULTADOS NUMÉRICOS	52
5.1	RESULTADOS NUMÉRICOS DAS EQUAÇÕES EM REGIME TRANSIENTE	52
5.1.1	Teste 1: Equação de Burgers 2D	52
5.1.2	Teste 2: Sistema Acoplado de Equações de Burgers 2D	57
5.1.3	Teste 3: Sistema de Equações de Navier-Stokes 2D	63
5.2	RESULTADOS NUMÉRICOS DAS EQUAÇÕES EM REGIME PERMANENTE	68
5.2.1	Teste 4: Equação de Convecção-Difusão 2D	69
5.2.2	Teste 5: Sistema Acoplado de Equações de Burgers 2D em Regime Permanente	71
6	CONCLUSÃO	77

LISTA DE FIGURAS

3.1	Malha computacional unidimensional.	24
3.2	Malha bidimensional uniforme.	25
4.1	Estêncil da equação (4.6), destacando a relação explícita na variável temporal e implícita nas variáveis espaciais.	30
4.2	Estêncil da equação (4.17), ilustrando o sistema implícito de equações lineares em função de $U_{i,j}$	32
4.3	Estêncil da equação (4.22), destacando a relação explícita na variável temporal e implícita nas variáveis espaciais.	34
4.4	Estêncil da equação (4.31), ilustrando o sistema implícito linearizado.	36
4.5	Estêncil da equação (4.36), destacando a relação explícita na variável temporal e implícita nas variáveis espaciais.	38
4.6	Estêncil da equação (4.41), ilustrando o sistema implícito linear.	39
4.7	Representação das localizações de u_x^{atual} e u_x^{ant}	43
4.8	Estêncil da equação (4.63), ilustrando o sistema implícito linearizado, em destaque encontram-se os nós nas posições onde a expansão de Taylor (círculo) e a média (quadrado) serão aplicados.	45
4.9	Estêncil das equações (4.82) e (4.83), ilustrando o esquema implícito linearizado onde, destaca-se as posições onde a expansão de Taylor (círculo) e média (quadrado) serão aplicadas: (a) referente à equação (4.82); (b) referente à equação (4.83).	49
5.1	Soluções da equação de Burgers 2D, para $M_x = M_y = 40$, $\nu = 0.01$, $M_t = 200$ e $t = 1$: (a) Solução Analítica e (b) Solução Numérica.	53
5.2	Soluções da Equação de Burgers 2D com $M_t = 200$, $\theta = 0.5$ e $t = 1$: (a) corte em $y = 0.5$; (b) corte em $y = 0.9$, para $M_x = M_y = 40$; (c) corte em $y = 0.5$; (d) corte em $y = 0.9$, para $M_x = M_y = 80$	54
5.3	Linhas de contorno das soluções da equação de Burgers 2D: (a) Solução analítica, (b-d) Soluções numéricas para $M_x = M_y = 40, 80$ e 160 , respectivamente, $M_t = 200$	55
5.4	Gráfico do erro para diferentes malhas: (a) erro na norma L_1 ao refinar a malha; (b) erro na norma L_2 ao refinar a malha.	56
5.5	Comparação qualitativa dos resultados dos erros na norma L_2 entre os esquemas implícito linearizado, linha pontilhada, e o esquema ADBQUICKEST, linha sólida.	57
5.6	Superfícies das soluções para o sistema acoplado (2.4) com $M_x = M_y = 80$, $M_t = 200$, $\nu = 0.001$, e $t = 1$: (a) Solução Analítica de u ; (b) Solução Numérica de u ; (c) Solução Analítica de v ; (d) Solução Numérica de v	60

5.7	Soluções analítica e numérica de $u(x, y)$ para: (a) $y = 0.5$ e $y = 0.9$ e $t = 1$; (b) $x = 0.5$ e $x = 0.9$ e $t = 1$. Soluções analítica e numérica de $v(x, y)$ para: (c) $y = 0.5$ e $y = 0.9$ e $t = 1$; (d) $x = 0.5$ e $x = 0.9$ e $t = 1$	61
5.8	Linhas de correntes das soluções para $M_x = M_y = 80$ e $M_t = 200$: (a) Solução analítica; (b) Solução numérica.	62
5.9	Gráficos dos erros para diferentes malhas: (a) erros na norma L_1 para u e v ; (b) erros na norma L_2 para u e v	62
5.10	Superfície das soluções para equação (2.7) com $M_x = M_y = 80$, $M_t = 10000$, $\nu = 0.0002$ e $t = 1$: (a) Solução Analítica de u ; (b) Solução Numérica de u ; (c) Solução Analítica de v ; (d) Solução Numérica de v	65
5.11	Soluções analítica e numérica de $u(x, y)$ para: (a) $y = 0.5$ e $y = 0.9$ e $t = 1$; (b) $x = 0.5$ e $x = 0.9$ e $t = 1$. Soluções analítica e numérica de $v(x, y)$ para: (c) $y = 0.5$ e $y = 0.9$ e $t = 1$; (d) $x = 0.5$ e $x = 0.9$ e $t = 1$	66
5.12	Gráficos dos erros: (a) erros na norma L_1 ao refinar a malha; (b) erros na norma L_2 ao refinar a malha.	67
5.13	Linhas de correntes para $M_x = M_y = 80$: (a) Solução analítica; (b) Solução numérica.	67
5.14	Gráficos dos erros das linhas de correntes: (a) erro na Norma L_1 ; (b) erro na Norma L_2	68
5.15	Solução da equação de convecção-difusão com $M_x = M_y = 40$ e $\theta = 1.0$: (a) Solução Analítica; (b) Solução Numérica; (c) corte em $y = 0.5$ e $y = 0.9$	70
5.16	(a) erro na norma L_1 ao refinar a malha; (b) erro na norma L_2 ao refinar a malha.	71
5.17	Superfícies das soluções para o sistema acoplado (2.13) com $M_x = M_y = 40$ e $\theta = 0.5$: (a) Solução Analítica de u ; (b) Solução Numérica de u ; (c) Solução Analítica de v ; (d) Solução Numérica de v	74
5.18	Soluções analítica e numérica de $u(x, y)$ para: (a) $y = 0.5$ e $y = 0.9$; (b) $x = 0.5$ e $x = 0.9$. Soluções analítica e numérica de $v(x, y)$ para: (c) $y = 0.5$ e $y = 0.9$; (d) $x = 0.5$ e $x = 0.9$	75
5.19	(a) erros de u e v na norma L_1 ao refinar a malha; (b) erros de u e v na norma L_2 ao refinar a malha.	76
5.20	Linhas de correntes das soluções para $M_x = M_y = 40$: (a) Solução Analítica; (b) Solução Numérica.	76

LISTA DE TABELAS

5.1	Soluções numérica e analítica de $u(x, y, t)$, para $t = 1$	53
5.2	Erro de aproximação para diferentes malhas.	56
5.3	Soluções numérica e analítica de $u(x, y, t)$, $t = 1$	58
5.4	Soluções numérica e analítica de $v(x, y, t)$, $t = 1$	59
5.5	Norma do erro L_1 e L_2 para diferentes valores de θ , com $\delta_x = \delta_y = 0.0125$	59
5.6	Normas do erro L_1 e L_2 para u e v para diferentes malhas e $\theta = 1.0$	63
5.7	Soluções numérica e analítica de $u(x, y, t)$, para $t = 1$	64
5.8	Soluções numérica e analítica de $v(x, y, t)$, para $t = 1$	64
5.9	Normas do erro L_1 e L_2 para u e v para diferentes malhas.	66
5.10	Erro de aproximação	68
5.11	Soluções numérica e analítica de $u(x, y)$, para alguns valores de x e $y = 0.5$	69
5.12	Erro de aproximação	70
5.13	Erro de aproximação nas normas L_1 e L_2 para diferentes malhas	70
5.14	Soluções numérica e analítica de $u(x, y)$, para alguns valores de x e $y = 0.5$	72
5.15	Soluções numérica e analítica de $v(x, y)$, para alguns valores de x e $y = 0.5$	73
5.16	Norma do erro L_1 e L_2 para diferentes valores de θ , $\delta_x = \delta_y = 0.025$	73
5.17	Normas do erro L_1 e L_2 para u e v para diferentes malhas e com $\theta = 0.5$	75

LISTA DE SIGLAS

EDP's - "Equações diferenciais parciais "

MVF - "Método de volumes finitos "

MEF - "Método de elementos finitos "

MDF - "Método de diferenças finitas"

VC - "Volume de controle "

MEFG - "Método de elementos finitos via Galerkin "

MEFMQ - "Método de elementos finitos via mínimos quadrados "

SUPG - "Método *streamline-upwind* Petrov-Galerkin "

ADBQUICKEST - "*Adaptative bounded QUICKEST* "

ET - "Erro de truncamento "

CUBISTA - "*Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for the Treatment of Advection.* "

LISTA DE SÍMBOLOS E NOTAÇÕES

δ_x : espaçamento da malha em x

δ_y : espaçamento da malha em y

δ_t : espaçamento da malha em t

ν : coeficiente de viscosidade cinemática do fluido

Re : número de Reynolds

1D: unidimensional

2D: bidimensional

M_x : partição do espaço em x

M_y : partição do espaço em y

M_t : partição do tempo em t

U_0 : escala de velocidade

L_0 : escala de comprimento característico

1 INTRODUÇÃO

Modelos matemáticos envolvendo equações diferenciais parciais (EDP's) estão presentes em quase todas as áreas da engenharia e da física. Durante muito tempo, várias técnicas analíticas clássicas, como por exemplo, método da decomposição de Adomian, método de iteração variacional, método da decomposição de Laplace, a transformação de Hopf-Cole, entre outros, vem sendo aplicadas com sucesso para a obtenção de soluções destas equações [1, 2, 3, 4, 5, 6]. No entanto, para problemas descritos por EDP's não lineares muitas das técnicas não são aplicáveis, sendo capazes de resolver somente problemas aplicados a modelos que apresentam estruturas matemáticas mais simples. Assim, com o desenvolvimento científico surgiu a necessidade de se obter métodos que englobassem procedimentos numéricos e analíticos para obtenção de soluções de problemas mais realísticos. Esses métodos tornaram-se uma ferramenta indispensável na determinação de soluções aproximadas, já que as soluções analíticas encontradas na literatura envolvem simplificações e, muitas vezes, descartam a não linearidades das equações [7].

Para encontrar uma solução numérica para a equação diferencial parcial é necessário fazer uma aproximação numérica das derivadas por meio de uma metodologia matemática (discretização) que possa ser operacionalizada pelos computadores, esse processo reduz o problema contínuo, com um número infinito de pontos, em um problema discreto com um número finito de pontos. Existem alguns métodos utilizados com este fim, dentre os quais pode-se citar: método de volumes finitos (MVF), método de elementos finitos (MEF), método de diferenças finitas (MDF) entre outros [8].

No método de volumes finitos (MVF), o domínio da solução é dividido em um número finito de volumes de controle (VC) contínuos, e a equação da conservação na forma integral é aplicada a cada volume de controle. No centro do VC encontra-se um nó, no qual é calculado os valores das variáveis, enquanto que os valores nas superfícies dos VC são obtidos por interpolação em função dos nós. Desta forma, obtém-se uma equação algébrica para cada VC, no qual aparecem os valores das variáveis no nó e nos nós vizinhos. O método pode ser aplicado em qualquer tipo de malha, estruturada ou não estruturada. A malha define apenas as fronteiras do volume de controle e não necessita estar relacionada com um sistema de coordenadas [9].

O método de elementos finitos (MEF) é semelhante ao de volumes finitos, o domínio contínuo é dividido em um conjunto de pequenas regiões de formato simples, chamadas de elementos finitos, o que permite convertê-lo em um domínio discreto, no entanto as equações são multiplicadas por uma função *peso* antes de serem integradas sobre todo o domínio. A solução é aproximada, por exemplo, por uma função linear, com os elementos de uma maneira que garanta a continuidade da solução através das fronteiras dos elementos. Esta aproximação é substituída na integral da lei de conservação e as equações a serem resolvidas são derivadas requerendo que a derivação da integral relativo ao valor de cada nó seja zero, isto corresponde em selecionar a melhor solução dentro do conjunto de funções permitidas. Assim o resultado é um conjunto de

equações algébricas não lineares. O método pode ser aplicado em geometrias mais complexas [9, 10].

No método de diferenças finitas (MDF), o ponto de partida é a conservação da equação na forma diferencial. Se cria uma malha sobre o domínio de solução, e em cada nó da malha a equação é aproximada substituindo as derivadas parciais por aproximações em termos de valores das funções nos nós da malha. Essas aproximações são obtidas a partir da expansão da série de Taylor. Com as substituições das derivadas parciais pelas aproximações das derivadas na equação diferencial, obtém-se um sistema de equações algébricas, chamadas de equações de diferenças finitas [11].

As aproximações das derivadas usando diferenças finitas é um dos métodos mais simples para resolver equações diferenciais. Ao longo das últimas décadas, avanços têm sido obtidos em relação à precisão, convergência e estabilidade desse método [12].

Várias técnicas numéricas baseadas em diferenças finitas têm sido desenvolvidas para a obtenção da solução de equações diferenciais parciais de todos os tipos. Por exemplo, para a solução de equações elípticas, destaque para os métodos iterativos de Gauss-Seidel, os métodos das relaxações sucessivas, o método implícito da direção alternada (*Alternating Direction Implicit Method*), e o método direto com Eliminação de Gauss. Para as equações parabólicas, usa-se os métodos explícitos centrais com avanço no tempo, o de Richardson e o de Dufort-Frankel, além dos métodos implícitos de Crank-Nicolson, o de Laasonen, e o método β . Por vez para as equações hiperbólicas tem-se o método explícito com diferença progressiva no tempo e no espaço, o método de Lax, e o de Lax-Wendroff, bem como os implícitos [12].

Baseados nesses métodos e seus derivados muitos pesquisadores têm desenvolvido estudos na busca da solução numérica de equações diferenciais e suas aplicações. A seguir uma breve revisão bibliográfica dos últimos anos sobre a resolução da equação de convecção-difusão, da equação de Burgers e de Navier-Stokes.

Li, Chen e Liu (2006) elaboraram um método implícito de direção alternada de sexta ordem de acurácia aplicado às equações parabólicas bidimensionais e tridimensionais. Mostraram a estabilidade do método usando problema de difusão linear com condições de contorno periódicas [13].

You (2006) aplicou um método implícito de direção alternada de alta ordem para obtenção de soluções das equações de convecção-difusão transientes. Usando as aproximações de Padé de quarta ordem para as derivadas espaciais, obtiveram uma precisão de quarta ordem com propriedade de alta resolução no espaço, enquanto que a precisão de segunda ordem foi mantida no tempo. O método apresentado é incondicionalmente estável, produzindo melhores soluções que o método implícito da direção alternada de segunda ordem [14].

No trabalho de Tian e Ge (2007) é aplicado um método implícito de direção alternada exponencial de alta ordem para a resolução de problemas de convecção-difusão bidimensionais, usando o método de implícito de Crank-Nicolson para discretização do termo temporal e um esquema de diferenças finitas exponencial de quarta ordem para a discretização espacial. Por

meio da análise de Fourier (ou Von Neumann) verificou-se que o método é incondicionalmente estável [15].

Em seus estudos Youg et al. (2008) demonstraram a eficácia de um método Euleriano-Lagrangeano para obter soluções das equações de Burgers 2D, comparando os resultados numéricos obtidos com outras soluções analíticas e numéricas [16].

Em seu trabalho Qin (2010) apresentou um novo esquema implícito de direção alternada para solução de equações parabólicas tridimensionais com condições de contornos não homogêneas. O esquema propõe uma aproximação de quarta ordem no espaço e de segunda ordem no tempo, permitindo uma economia no custo computacional. Verificou-se que o esquema é incondicionalmente estável por análise de Fourier [17].

Liao (2010) desenvolveu um novo método de diferenças finitas compacto de quarta ordem para resolver o sistema de equações de Burgers bidimensionais. O método baseia-se na transformação bidimensional de Hopf-Cole que transforma o sistema de equações de Burgers bidimensional em uma equação linear térmica. Assim, a equação linear é resolvida por um esquema implícito compacto de quarta ordem. Os resultados numéricos demonstraram a eficiência e a precisão do método [18].

Ma e Ge (2010) expandiram o método de diferenças finitas usado para calcular soluções de equações convecção-difusão 1D e 2D, proposto por Sun e Zhang (2004), para obter solução da equação tridimensional. O método é um derivado do método implícito da direção alternada baseado em diferenças finitas de quarta ordem e também na técnica de extrapolação de Richardson. Os resultados numéricos apresentados comprovaram a validade do método, em comparação com resultados obtidos por meio de outros esquemas encontrados na literatura [19].

Tian (2011) desenvolveu um método implícito de direção alternada de alta ordem para resolução de problemas de convecção-difusão bidimensionais. O método é de segunda ordem no tempo e de quarta ordem no espaço. Por meio da análise de Fourier foi verificado que o método é incondicionalmente estável. Embora o método tenha sido proposto para problemas de convecção-difusão, também pode ser aplicado em caso de difusão pura ou convecção pura [20].

Para obter a solução numérica do sistema acoplado da equação de Burgers 2D, Srivastava e Tamsir (2011), utilizou o método de diferença finitas, no caso o método implícito de Crank-Nicolson. Ao aplicar o método, foi gerado um sistema de equações não lineares para cada passo de tempo, para linearizar o sistema é aplicado o método de Newton. O esquema proposto mostrou-se incondicionalmente estável [21].

Fernandes e Fairweather (2012) desenvolveram um método implícito de direção alternada para resolução de equações bidimensionais de reação-difusão baseado na extrapolação de Crank-Nicolson, nomeado de *orthogonal spline collocation method*, sua eficácia foi verificada em soluções de exemplos conhecidos e as comparações foram feitas com outras técnicas disponíveis na literatura [22].

Atualmente, o método de diferenças finitas de alta ordem têm se mostrado uma ferramenta muito utilizada por autores para resolver a equação de convecção-difusão não linear.

Com isso, Liao (2012) propôs uma técnica de diferenças finitas de quarta ordem para solução de equação de convecção-difusão transiente. Tal técnica transforma a equação de convecção-difusão em uma equação de reação-difusão, a qual é resolvida por um método de alta ordem compacto. Essa técnica é considerada condicionalmente estável e tem precisão de quarta ordem no tempo e no espaço [23].

Ladeia (2012), aplicou uma formulação semi-discreta, em que a variável temporal é discretizada utilizando métodos implícitos multi-estágios e na variável espacial método de elementos finitos, para obtenção de soluções numéricas das equações 1D de convecção-difusão-reação e de Burgers. No trabalho considera os métodos implícitos multi-estágios de segunda ordem, R_{11} , e de quarta ordem R_{22} , na discretização da variável temporal, na variável espacial utiliza-se três formulações do método de elementos finitos: mínimos quadrados (MEFMQ), Galerkin (MEFG) e *stremline-upwind* Petrov-Galerkin (SUPG). Verificou-se que o método implícito multi-estágio de quarta ordem, R_{22} quando adicionado aos MEFMQ, MEFF e SUPG aumenta a região de convergência das soluções numéricas das equações [24, 25].

Souza (2013) utilizou o método de elementos finitos para realizar a discretização das equações de Navier-Stokes, e para linearizar os termos convectivos estudou-se dois métodos: o do ponto fixo e o método de Newton. Ainda comparou três métodos para discretização do termo temporal das equações, Euler implícito, Crank-Nicolson e o método θ de passo fracionado [26].

Romão (2013) apresentou um esquema de diferenças centrais de sexta ordem para a discretização dos termos espaciais juntamente com o método de Crank-Nicolson para o termo transiente da equação de Burgers 1D. O método proposto mostrou-se eficiente, com fácil implementação e de baixo custo computacional [27].

No seu trabalho Medeiros (2013), utilizou o método de diferença finitas para aproximação dos termos temporal, convectivo e difusivo da equação de Burgers 1D e 2D. Para estudar a solução numérica das equações de Burgers, usou aproximação progressiva e central nos termos temporal e difusivo, respectivamente, no termo convectivo foi feita uma discretização pelo método *upwind* de alta ordem utilizando o esquema ADBQUICKEST. O esquema explícito mostrou-se eficiente quando comparado com soluções analíticas [28].

Em seu trabalho Campos (2014) implementou um método de diferenças finitas de alta ordem para obter a solução de problemas bi e tridimensionais convectivo-difusivo transientes. Para os problemas não lineares, no caso a equação de Burgers bi e tridimensionais foi usado o método de Newton para a linearização dos termos convectivos [12].

Azevedo (2016) desenvolveu um esquema aproximativo não linear de alta resolução para o tratamento dos termos convectivos das equações de Navier-Stokes, para isso discretizou-se as equações utilizando o método de diferença finitas, e o domínio foi discretizado por intermédio de malhas do tipo deslocada, escritas no sistema de coordenadas generalizadas. Para a aproximação dos termos convectivos, optou-se pelo esquema *upwind* de alta resolução CUBISTA (*Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for the Treatment of Advection*). As soluções aproximadas obtidas foram avaliadas em cada ponto de interesse do domínio computacional e

comparadas com dados disponíveis na literatura [29].

Dentro deste cenário, o método de diferenças finitas (MDF) é usado neste trabalho para gerar soluções de equações diferenciais parciais (EDP's) bidimensionais, em particular a equação de Burgers, a equação de convecção-difusão, sistemas acoplados de equações de Burgers e de Navier-Stokes. Por simplicidade e organização do trabalho as mesmas são divididas em ordem de regime transiente e permanente. Para a obtenção das soluções das equações utiliza-se diferença regressiva no termo temporal (para o caso transiente), diferença central nos termos difusivos e diferença central ponderada nos termos convectivos das equações. O esquema obtido, resultante das discretizações das equações em regime transiente, preserva a não linearidade no termo convectivo gerando um sistema semi-implícito de equações não lineares. Para evitar a necessidade da resolução do sistema não linear de equações, em cada passo do tempo, será aplicada uma técnica numérica no qual lineariza-se os termos convectivos do sistema, transformando-o em um sistema implícito linearizado. A linearização do sistema é realizada aplicando a expansão da série de Taylor, método de Richtmyer's [11, 30]. Quanto ao esquema resultante das discretizações das equações em regime permanente, este resulta em um sistema implícito não linear, que para contornar a não linearidade e também solucionar o problema de instabilidade, lineariza-se os termos convectivos aplicando a expansão da série de Taylor e utiliza-se uma média nos termos de valores entre alguns dos estágios. Os resultados numéricos obtidos serão comparados com as soluções analíticas encontradas na literatura e uma análise do erro nas normas L_1 e L_2 também será realizada.

Desta forma, este trabalho encontra-se dividido em 5 capítulos. No capítulo 2 apresentam-se as equações estudadas: equação de Burgers 2D, sistemas acoplados de equações de Burgers 2D e de Navier-Stokes e a equação de convecção-difusão 2D. No capítulo 3 mostra-se a formalização do método de diferenças finitas e do erro nas normas L_1 e L_2 . No capítulo 4 faz-se a discretização das equações descritas no capítulo 2. No capítulo 5 apresenta-se os resultados numéricos das equações estudadas, avaliando o método de linearização utilizado na discretização do termo não linear das equações. Por fim, no capítulo 6 têm-se as considerações finais deste trabalho.

2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Nesse capítulo apresenta-se as EDP's a serem estudadas neste trabalho, sendo, a equação de Burgers 2D, a equação de convecção-difusão 2D e sistemas acoplados de equações de Burgers 2D e de Navier-Stokes. Por simplicidade as mesmas, serão apresentadas em ordem de regime transiente e permanente. Apresenta-se também, as condições iniciais para os casos não estacionários e as condições de fronteiras associadas as EDP's abordadas. Observa-se que todas as equações apresentadas possuem solução analítica encontradas na literatura.

2.1 EQUAÇÕES EM REGIME TRANSIENTE

2.1.1 Equação de Burgers 2D

Considere a equação

$$u_t + uu_x + uu_y - \nu(u_{xx} + u_{yy}) = 0, \quad (2.1)$$

com condição inicial

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2.2)$$

e condições de fronteiras,

$$\begin{aligned} u(x_0, y, t) &= T_1(x_0, y, t) \\ u(x_f, y, t) &= T_2(x_f, y, t) \\ u(x, y_0, t) &= T_3(x, y_0, t) \\ u(x, y_f, t) &= T_4(x, y_f, t), \quad t > 0, (x, y) \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.3)$$

em que $u = u(x, y, t)$ é a componente da velocidade a ser determinada, sendo t a variável temporal, x e y as variáveis espaciais, com u_0 em Ω e T_i na $\partial\Omega$, $i = 1, 2, \dots, 4$, são funções dadas em pontos específicos, sendo $\Omega = \{(x, y)/x_0 \leq x \leq x_f, y_0 \leq y \leq y_f\}$ o domínio de interesse e $\partial\Omega$ a fronteira, ν o coeficiente de viscosidade cinemática do fluido, dado por $\nu = \frac{U_0 L_0}{Re}$, onde U_0 e L_0 representam as escalas de velocidade e comprimento característico, respectivamente, Re o número de Reynolds [21]. Neste trabalho a unidade de medida adotada para U_0 e L_0 são m/s e m , respectivamente.

2.1.2 Sistema Acoplado de Equações de Burgers 2D

Um modelo simplificado das equações de Navier-Stokes, sem os termos do gradiente de pressão, porém, com os mesmos efeitos não lineares convectivos e dissipativos, é dado

peelo sistema acoplado de equações de Burgers 2D, definido por

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y - \nu(u_{xx} + u_{yy}) = 0 \\ v_t + uv_x + vv_y - \nu(v_{xx} + v_{yy}) = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

onde $u = u(x, y, t)$ e $v = v(x, y, t)$ representam as componentes da velocidade as serem determinadas nas direções das coordenadas x e y . No sistema (2.4) é considerado a condição de potencial simétrico $u_y = v_x$, tal que a solução analítica possa ser obtida via a transformação de Holf-Cole [28].

As condições iniciais para (2.4) são dadas por

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= u_0(x, y), \\ v(x, y, 0) &= v_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \end{aligned} \quad (2.5)$$

e as condições de fronteiras,

$$\begin{aligned} u(x_0, y, t) &= T_1(x_0, y, t) \\ u(x_f, y, t) &= T_2(x_f, y, t) \\ u(x, y_0, t) &= T_3(x, y_0, t) \\ u(x, y_f, t) &= T_4(x, y_f, t) \\ v(x_0, y, t) &= T_5(x_0, y, t) \\ v(x_f, y, t) &= T_6(x_f, y, t) \\ v(x, y_0, t) &= T_7(x, y_0, t) \\ v(x, y_f, t) &= T_8(x, y_f, t), \quad t > 0, (x, y) \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.6)$$

sendo t a variável temporal, x e y as variáveis espaciais, ν o coeficiente de viscosidade cinemática do fluido e as funções em pontos específicos dadas por u_0, v_0 em Ω e T_i em $\partial\Omega$, com $i = 1, 2, \dots, 8$, onde $\Omega = \{(x, y)/x_0 \leq x \leq x_f, y_0 \leq y \leq y_f\}$ é o domínio de interesse e $\partial\Omega$ é a fronteira.

2.1.3 Sistema de Equações de Navier-Stokes 2D

As equações de Navier-Stokes são utilizados para modelar escoamentos de fluidos, que dependendo da característica do fluido e do escoamento as mesmas podem ser simplificadas, facilitando a obtenção da solução numérica [31].

Para descrição de escoamento de fluido incompressível, no caso bidimensional, as equações de Navier-Stokes são definidas por,

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vv_y + p_x - \nu(u_{xx} + u_{yy}) = f_1 \\ v_t + uv_x + vv_y + p_y - \nu(v_{xx} + v_{yy}) = f_2 \end{cases} \quad (2.7)$$

com a equação da continuidade

$$u_x + v_y = 0, \quad (2.8)$$

em que $u(x, y, t)$ e $v(x, y, t)$ descrevem as componentes das velocidades nas direções das coordenadas x e y , respectivamente, sendo $f_1 = f_1(x, y, t)$ e $f_2 = f_2(x, y, t)$ termos fontes [32].

As condições iniciais para (2.7) são dadas por

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= u_0(x, y), \\ v(x, y, 0) &= v_0(x, y), \quad x, y \in \Omega \end{aligned} \quad (2.9)$$

e as condições de fronteiras,

$$\begin{aligned} u(x_0, y, t) &= T_1(x_0, y, t) \\ u(x_f, y, t) &= T_2(x_f, y, t) \\ u(x, y_0, t) &= T_3(x, y_0, t) \\ u(x, y_f, t) &= T_4(x, y_f, t) \\ v(x_0, y, t) &= T_5(x_0, y, t) \\ v(x_f, y, t) &= T_6(x_f, y, t) \\ v(x, y_0, t) &= T_7(x, y_0, t) \\ v(x, y_f, t) &= T_8(x, y_f, t) \quad t > 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

em que t representa a variável temporal, x e y as variáveis espaciais, ν o coeficiente de viscosidade cinemática do fluido e $p = p(x, y, t)$ o termo de pressão, as funções em pontos específicos dadas por u_0, v_0 em Ω e T_i em $\partial\Omega$, $i = 1, 2, \dots, 8$, em que $\Omega = \{(x, y) / x_0 \leq x \leq x_f, y_0 \leq y \leq y_f\}$ é o domínio de interesse e $\partial\Omega$ é a fronteira.

2.2 EQUAÇÕES EM REGIME PERMANENTE

2.2.1 Equação de Convecção-Difusão 2D

A equação de convecção-difusão em regime permanente é dada por,

$$uu_x + vv_y - K(u_{xx} + u_{yy}) = f, \quad (2.11)$$

com condições de fronteiras

$$\begin{aligned} u(x_0, y) &= F_1(x_0, y) \\ u(x_f, y) &= F_2(x_f, y) \\ u(x, y_0) &= F_3(x, y_0) \\ u(x, y_f) &= F_4(x, y_f), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.12)$$

em que $u = u(x, y)$ e $f = f(x, y)$ são funções das variáveis independentes x e y , $v = v(y)$ e $K = K(x)$ são funções de apenas uma das variáveis independentes, F_i em $\partial\Omega$, com $i = 1, 2, \dots, 4$, são funções dadas em pontos específicos, em que $\Omega = \{(x, y)/x_0 \leq x \leq x_f, y_0 \leq y \leq y_f\}$ é o domínio de interesse e $\partial\Omega$ é a fronteira [33].

2.2.2 Sistema Acoplado de Equações de Burgers 2D em Regime Permanente

O sistema acoplado de equações de Burgers 2D com propriedades constantes, em regime permanente é definida por,

$$\begin{cases} u_x^2 + (vu)_y + p_x - \nu(u_{xx} + u_{yy}) = 0 \\ (vu)_x + v_y^2 + p_y - \nu(v_{xx} + v_{yy}) = B \end{cases} \quad (2.13)$$

com condições de fronteiras,

$$\begin{aligned} u(x_0, y) &= F_1(x_0, y) \\ u(x_f, y) &= F_2(x_f, y) \\ u(x, y_0) &= F_3(x, y_0) \\ u(x, y_f) &= F_4(x, y_f) \\ v(x_0, y) &= F_5(x_0, y) \\ v(x_f, y) &= F_6(x_f, y) \\ v(x, y_0) &= F_7(x, y_0) \\ v(x, y_f) &= F_8(x, y_f), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.14)$$

sendo que $p = p(x, y, Re)$ é termo da pressão, conhecida analiticamente, $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ são as componentes da velocidades nas direções coordenadas x e y , respectivamente, F_i em $\partial\Omega$, com $i = 1, 2, \dots, 8$ são funções em pontos específicos, $B = B(x, y, Re)$ é um termo fonte, e $\Omega = \{(x, y)/x_0 \leq x \leq x_f, y_0 \leq y \leq y_f\}$ é o domínio de interesse e $\partial\Omega$ é a fronteira [34, 35, 36].

3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

A proposta deste trabalho encontra-se na análise de um método numérico utilizado para resolver as EDP's apresentadas no capítulo 2. Nos próximos capítulos ilustrada-se as soluções analíticas, as condições iniciais para os casos não estacionários e as condições de fronteiras, assim como um procedimento numérico das soluções aproximadas. Neste capítulo apresenta-se alguns tópicos que servirão de base teórica para o bom desenvolvimento do trabalho.

3.1 MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

Para resolver equações diferenciais parciais por meio de métodos numéricos, primeiramente é preciso discretizar a região onde se procura a solução. Para realizar a discretização define-se uma malha, que é um conjunto finitos de pontos pertencentes ao domínio, chamados nós da malha [37].

Uma malha unidimensional uniforme, isto é, um malha com espaçamentos iguais para cada subintervalo representado por δ_x , encontra-se ilustrada na figura 3.1.

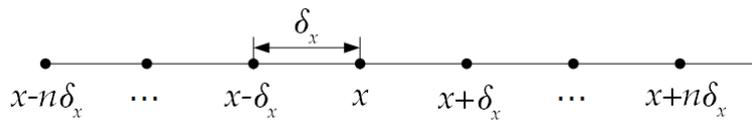


Figura 3.1: Malha computacional unidimensional.

Fonte: Autor.

A figura 3.2 representa uma malha cartesiana num plano xy subdividido em retângulos iguais de lados δ_x e δ_y , onde qualquer ponto P de coordenada (x, y) fica representado na malha por (i, j) e os pontos vizinhos a esse são representados por $(i \pm 1, j \pm 1)$, com i e j inteiros. Os valores de δ_x e δ_y são espaçamentos da malha em x e y , respectivamente. Se δ_x e δ_y são iguais, a malha é dita uniforme. Usaremos neste trabalho apenas malhas uniformes, porém toda teoria poderia ser desenvolvida para malhas uniformes por direção, onde $\delta_x = k\delta_y$, ou ainda, em malhas não uniformes onde δ_x e δ_y tem espaçamentos diferentes em suas direções.

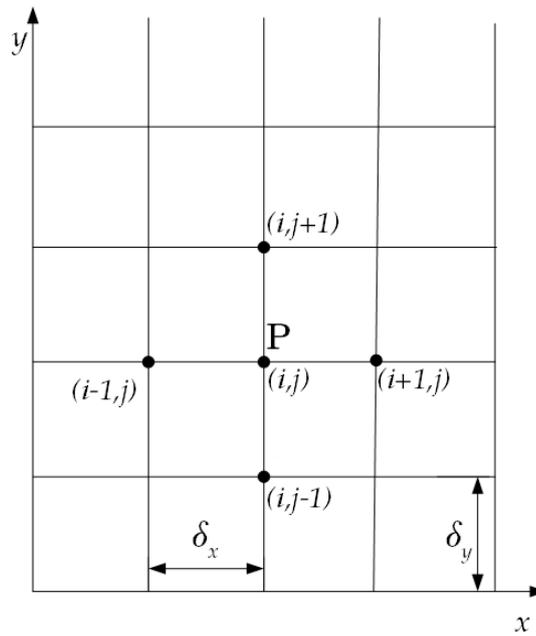


Figura 3.2: Malha bidimensional uniforme.
Fonte: Adaptado de [28].

O método de diferenças finitas é utilizado para obter a aproximação da solução da equação diferencial parcial, onde a ideia básica do método consiste na discretização do domínio e na substituição das derivadas presentes na equação diferencial por aproximações, transformando a resolução da equação diferencial em um conjunto de equações algébricas. A ferramenta matemática para os cálculos das aproximações das derivadas é a fórmula da expansão de série de Taylor que relaciona valores da função e suas derivadas num ponto x , com os valores dessa mesma função numa vizinhança do ponto x [38].

Seja $u = u(x, t)$ uma função contínua de duas variáveis independentes x e t , e que possua derivadas contínuas, então é possível expandi-la em série de Taylor da seguinte maneira,

$$u(x + \delta_x, t) = u(x, t) + (\delta_x)u_x(x, t) + \frac{(\delta_x)^2}{2!}u_{xx}(x, t) + \frac{(\delta_x)^3}{3!}u_{xxx}(x, t) + \dots \quad (3.1)$$

e

$$u(x - \delta_x, t) = u(x, t) - (\delta_x)u_x(x, t) + \frac{(\delta_x)^2}{2!}u_{xx}(x, t) - \frac{(\delta_x)^3}{3!}u_{xxx}(x, t) + \dots \quad (3.2)$$

Nas equações (3.1) e (3.2), desprezando-se os termos de ordem superior a (δ_x) obtém-se duas aproximações para a derivada primeira de u em relação a x ,

$$u_x(x, t) \approx \frac{u(x + \delta_x, t) - u(x, t)}{\delta_x}, \quad (3.3)$$

e

$$u_x(x, t) \approx \frac{u(x, t) - u(x - \delta_x, t)}{\delta_x}. \quad (3.4)$$

A equação (3.3) é chamada diferença finita *progressiva* (ou *avançada*), cujo erro de truncamento (ET) é dado por

$$ET = \frac{\delta_x}{2!} u_{xx}(x, t) + \frac{(\delta_x)^2}{3!} u_{xxx}(x, t) + \dots = O(\delta_x), \quad (3.5)$$

enquanto a equação (3.4) é conhecida por diferença finita *regressiva* (ou *atrasada*), em que o erro de truncamento se dá por

$$ET = \frac{\delta_x}{2!} u_{xx}(x, t) - \frac{(\delta_x)^2}{3!} u_{xxx}(x, t) + \dots = O(\delta_x). \quad (3.6)$$

De outra forma, fazendo a subtração da equação (3.1) com a (3.2), tem-se

$$u_x(x, t) \approx \frac{u(x + \delta_x, t) - u(x - \delta_x, t)}{2\delta_x} \quad (3.7)$$

denominada diferença finita *centrada* para a primeira derivada de u em x , cujo ET é

$$ET = \frac{(\delta_x)^2}{3!} u_{xxx}(x, t) + \frac{(\delta_x)^4}{120} u_{xxxx}(x, t) + \dots = O(\delta_x^2). \quad (3.8)$$

Por outro lado, somando (3.1) e (3.2) tem-se uma aproximação para a derivada segunda de u em relação a x

$$u_{xx}(x, t) \approx \frac{u(x + \delta_x, t) - 2u(x, t) + u(x - \delta_x, t)}{(\delta_x)^2}, \quad (3.9)$$

denominada por diferença finita *centrada* para a segunda derivada, em que o erro de truncamento se dá por,

$$ET = \frac{(\delta_x)^2}{4!} u_{xxxx}(x, t) + \dots = O(\delta_x^2). \quad (3.10)$$

De modo análogo, obtém-se aproximações para derivadas nas variáveis t e y .

3.2 ERRO NA NORMA L_1 E L_2

Para uma análise quantitativa sobre o comportamento do método utilizado, os resultados serão avaliados por meio das normas L_1 e L_2 . Apresenta-se então as definições de erro nas normas L_1 e L_2 .

Considerando o erro relativo por E_h , com $h = \delta_x$, defini-se as normas L_1 e L_2 do erro relativo, respectivamente por [28, 30]

$$\|E_h\|_1 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} \left| \frac{u_{i,\text{analítica}} - u_{i,\text{numérica}}}{u_{i,\text{analítica}}} \right|, \quad (3.11)$$

$$\|E_h\|_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^N |u_{i,\text{analítica}} - u_{i,\text{numérica}}|^2}{\sum_{i=0}^N |u_{i,\text{analítica}}|^2}}, \quad (3.12)$$

em que N é o número de pontos da malha.

4 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

Neste capítulo mostra-se as discretizações das EDP's descritas no capítulo 2. Observando que as EDP's abordadas referem-se a equações em regime transiente e permanente, o processo de discretização nas equações diferenciais é obtido usando diferença regressiva no termo temporal (para o caso transiente), diferença central ponderada nos termos espaciais de primeira ordem e diferença central nos termos espaciais de segunda ordem.

O esquema resultante das discretizações das equações em regime transiente resulta em um sistema explícito na variável temporal e implícito não linear nas variáveis espaciais, no nível de tempo $k + 1$, ocasionando a resolução de um sistema semi-implícito de equações não lineares. Para evitar a necessidade da resolução do sistema não linear de equações, em cada passo do tempo, será aplicada uma técnica numérica no qual lineariza-se os termos convectivos do sistema, transformando-o em um sistema implícito linearizado na variável temporal. Quanto ao esquema resultante das discretizações das equações em regime permanente, este resulta em um sistema implícito não linear envolvendo os nós de posições $j - 1$, j e $j + 1$. Desta forma o mesmo procedimento, quanto a linearização é empregado, porém, utiliza-se uma média nos termos de valores dos estágios $j - 1$ e $j + 1$, como opção para solucionar o problema de instabilidade [38].

4.1 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES EM REGIME TRANSIENTE

4.1.1 Discretização da Equação de Burgers 2D

A equação de Burgers bidimensional definida em (2.1), pode ser reescrita na forma conservativa,

$$u_t + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}u_y^2 - \nu(u_{xx} + u_{yy}) = 0. \quad (4.1)$$

Os termos da equação (4.1) são discretizados no ponto (i, j) no nível de tempo $k + 1$. O termo temporal u_t é aproximado por diferença regressiva, dado por

$$(u_t)_{i,j}^{k+1} \cong \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\delta_t}. \quad (4.2)$$

Nos termos convectivos não lineares da primeira derivada da equação (4.1), $CONV(uu) = \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2)$, aplica-se o método de relaxação padrão, *standard relaxation method*, baseado em $(u_x^2)^{k+1} = \theta(u_x^2)^{k+1} + (1 - \theta)(u_x^2)^k$, onde \mathbf{x} representa a primeira derivada de u em

relação a x ou y , com $0 \leq \theta \leq 1$. Na sequência aplica-se diferença central [11], resultando em

$$\begin{aligned}
CONV(uu)_{i,j}^{k+1} &\cong \frac{1}{2} [(u_x^2)_{i,j}^{k+1} + (u_y^2)_{i,j}^{k+1}] \\
&= \frac{1}{2} [\theta(u_x^2)_{i,j}^{k+1} + (1-\theta)(u_x^2)_{i,j}^k] + \frac{1}{2} [\theta(u_y^2)_{i,j}^{k+1} + (1-\theta)(u_y^2)_{i,j}^k] \\
&= \frac{1}{2} \left[\theta \left(\frac{(u^2)_{i+1,j}^{k+1} - (u^2)_{i-1,j}^{k+1}}{2\delta_x} \right) + (1-\theta) \left(\frac{(u^2)_{i+1,j}^k - (u^2)_{i-1,j}^k}{2\delta_x} \right) \right] \\
&+ \frac{1}{2} \left[\theta \left(\frac{(u^2)_{i,j+1}^{k+1} - (u^2)_{i,j-1}^{k+1}}{2\delta_y} \right) + (1-\theta) \left(\frac{(u^2)_{i,j+1}^k - (u^2)_{i,j-1}^k}{2\delta_y} \right) \right] \\
&= \frac{1}{4\delta_x} [\theta((u^2)_{i+1,j}^{k+1} - (u^2)_{i-1,j}^{k+1}) + (1-\theta)((u^2)_{i+1,j}^k - (u^2)_{i-1,j}^k)] \\
&+ \frac{1}{4\delta_y} [\theta((u^2)_{i,j+1}^{k+1} - (u^2)_{i,j-1}^{k+1}) + (1-\theta)((u^2)_{i,j+1}^k - (u^2)_{i,j-1}^k)]. \quad (4.3)
\end{aligned}$$

Enfim nos termos difusivos da equação (4.1), utilizam-se diferenças centrais,

$$(u_{xx})_{i,j}^{k+1} + (u_{yy})_{i,j}^{k+1} \cong \frac{u_{i+1,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1}}{\delta_x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}}{\delta_y^2}. \quad (4.4)$$

Substituindo as discretizações (4.2)-(4.4) na equação (4.1) obtemos,

$$\begin{aligned}
\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\delta_t} &+ \frac{1}{4\delta_x} [\theta((u^2)_{i+1,j}^{k+1} - (u^2)_{i-1,j}^{k+1}) + (1-\theta)((u^2)_{i+1,j}^k - (u^2)_{i-1,j}^k)] \\
&+ \frac{1}{4\delta_y} [\theta((u^2)_{i,j+1}^{k+1} - (u^2)_{i,j-1}^{k+1}) + (1-\theta)((u^2)_{i,j+1}^k - (u^2)_{i,j-1}^k)] \\
&- \nu \left(\frac{u_{i+1,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1}}{\delta_x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}}{\delta_y^2} \right) = 0, \quad (4.5)
\end{aligned}$$

ou na forma agrupada,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\delta_t} + \frac{2\nu}{\delta_x^2} + \frac{2\nu}{\delta_y^2} \right) u_{i,j}^{k+1} + \frac{\theta(u^2)_{i+1,j}^{k+1}}{4\delta_x} - \frac{\nu u_{i+1,j}^{k+1}}{\delta_x^2} - \frac{\theta(u^2)_{i-1,j}^{k+1}}{4\delta_x} - \frac{\nu u_{i-1,j}^{k+1}}{\delta_x^2} \\
&+ \frac{\theta(u^2)_{i,j+1}^{k+1}}{4\delta_y} - \frac{\nu u_{i,j+1}^{k+1}}{\delta_y^2} - \frac{\theta(u^2)_{i,j-1}^{k+1}}{4\delta_y} - \frac{\nu u_{i,j-1}^{k+1}}{\delta_y^2} - \frac{u_{i,j}^k}{\delta_t} \\
&+ \frac{(1-\theta)((u^2)_{i+1,j}^k - (u^2)_{i-1,j}^k)}{4\delta_x} + \frac{(1-\theta)((u^2)_{i,j+1}^k - (u^2)_{i,j-1}^k)}{4\delta_y} = 0, \quad (4.6)
\end{aligned}$$

para $i = 1 \dots M_x - 1$ e $j = 1 \dots M_y - 1$ e $k = 0 \dots M_t$, com erro de truncamento de ordem um em δ_t , e de ordem dois em δ_x e δ_y , ou seja, $O(\delta_t) + O(\delta_x^2, \delta_y^2)$.

O esquema resultante da discretização da equação (4.1), dada em (4.6), exige o cálculo de u nos nós de posições $(i \pm 1, j)$, (i, j) e $(i, j \pm 1)$, como pode ser visto na figura 4.1, resultando em um sistema explícito na variável temporal e implícito não linear nas variáveis

espaciais, ocasionando a resolução de um sistema semi-implícito de equações não lineares em cada passo de tempo, para gerar a solução numérica.

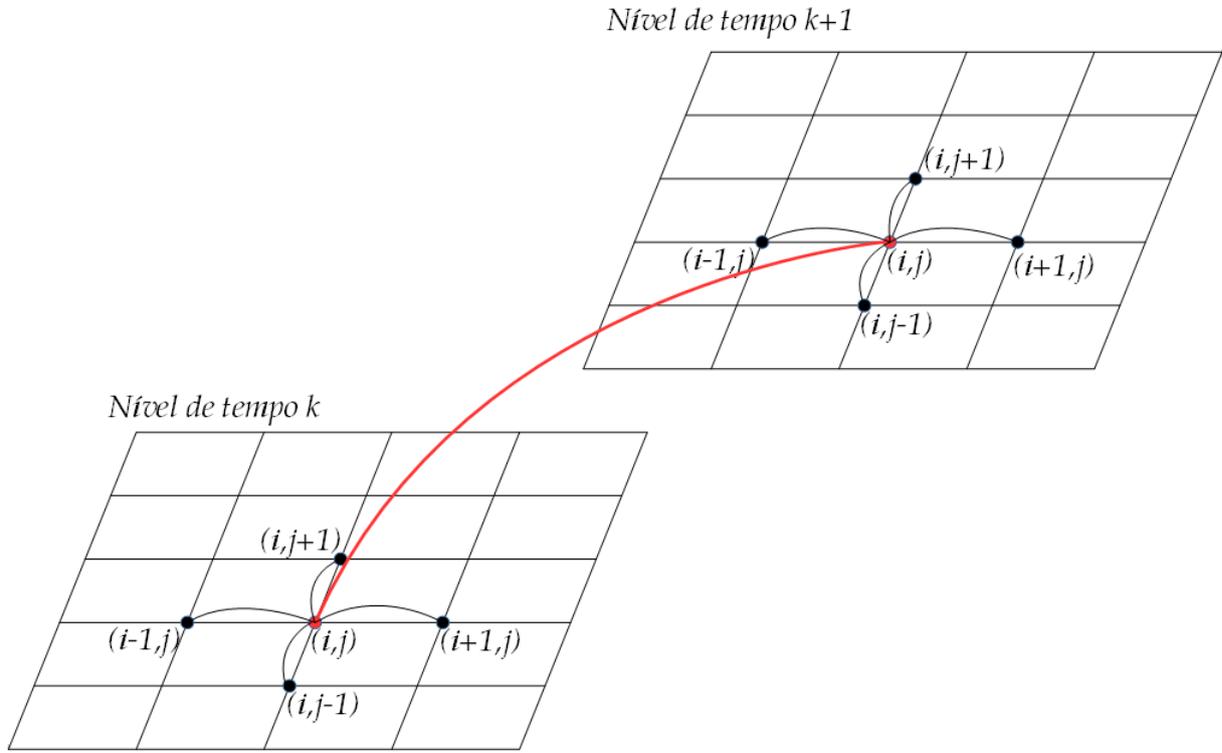


Figura 4.1: Estêncil da equação (4.6), destacando a relação explícita na variável temporal e implícita nas variáveis espaciais.

Fonte: Autor.

Como alternativa para evitar a necessidade da resolução do sistema não linear de equações em cada passo de tempo, linearizam-se os termos convectivos no nível do tempo $k + 1$, aplicando a expansão da série de Taylor [11], ou seja,

$$\begin{aligned} (u^2)_{i,j}^{k+1} &= (u^2)_{i,j}^k + \delta_t \frac{\partial (u^2)_{i,j}^k}{\partial t} + \dots \\ &= (u^2)_{i,j}^k + 2u_{i,j}^k \delta_t \frac{\partial u_{i,j}^k}{\partial t} + \dots \end{aligned} \quad (4.7)$$

usando o fato de $(u_t)_{i,j}^k \cong \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\delta_t}$ (diferença progressiva),

$$(u^2)_{i,j}^{k+1} \cong (u^2)_{i,j}^k + 2u_{i,j}^k U_{i,j}, \quad (4.8)$$

onde $U_{i,j} = u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k$. De maneira análoga obtém-se,

$$(u^2)_{i+1,j}^{k+1} \cong (u^2)_{i+1,j}^k + 2u_{i+1,j}^k U_{i+1,j}, \quad (4.9)$$

$$(u^2)_{i-1,j}^{k+1} \cong (u^2)_{i-1,j}^k + 2u_{i-1,j}^k U_{i-1,j}, \quad (4.10)$$

$$(u^2)_{i,j+1}^{k+1} \cong (u^2)_{i,j+1}^k + 2u_{i,j+1}^k U_{i,j+1}, \quad (4.11)$$

$$(u^2)_{i,j-1}^{k+1} \cong (u^2)_{i,j-1}^k + 2u_{i,j-1}^k U_{i,j-1}, \quad (4.12)$$

em que $U_{i+1,j} = u_{i+1,j}^{k+1} - u_{i+1,j}^k$, $U_{i-1,j} = u_{i-1,j}^{k+1} - u_{i-1,j}^k$, $U_{i,j+1} = u_{i,j+1}^{k+1} - u_{i,j+1}^k$, $U_{i,j-1} = u_{i,j-1}^{k+1} - u_{i,j-1}^k$.

Substituindo as equações (4.8)-(4.12) em (4.3) e fazendo manipulações algébricas, os termos convectivos tornam-se da forma,

$$\begin{aligned} CONV Lin(uu)_{i,j}^{k+1} &= \frac{1}{4\delta_x} [2\theta u_{i+1,j}^k U_{i+1,j} - 2\theta u_{i-1,j}^k U_{i-1,j} + (u^2)_{i+1,j}^k - (u^2)_{i-1,j}^k] \\ &+ \frac{1}{4\delta_y} [2\theta u_{i,j+1}^k U_{i,j+1} - 2\theta u_{i,j-1}^k U_{i,j-1} + (u^2)_{i,j+1}^k - (u^2)_{i,j-1}^k]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Assim substituindo os termos convectivos linearizados (4.13) em (4.5), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j}}{\delta_t} &+ \frac{1}{4\delta_x} [2\theta u_{i+1,j}^k U_{i+1,j} - 2\theta u_{i-1,j}^k U_{i-1,j} + (u^2)_{i+1,j}^k - (u^2)_{i-1,j}^k] \\ &+ \frac{1}{4\delta_y} [2\theta u_{i,j+1}^k U_{i,j+1} - 2\theta u_{i,j-1}^k U_{i,j-1} + (u^2)_{i,j+1}^k - (u^2)_{i,j-1}^k] \\ &- \frac{\nu}{\delta_x^2} (u_{i+1,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1}) - \frac{\nu}{\delta_y^2} (u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}) = 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

agora considerando as equações,

$$\begin{aligned} u_{i+1,j}^{k+1} &= U_{i+1,j} + u_{i+1,j}^k, \\ u_{i-1,j}^{k+1} &= U_{i-1,j} + u_{i-1,j}^k, \\ u_{i,j}^{k+1} &= U_{i,j} + u_{i,j}^k, \\ u_{i,j+1}^{k+1} &= U_{i,j+1} + u_{i,j+1}^k, \\ u_{i,j-1}^{k+1} &= U_{i,j-1} + u_{i,j-1}^k, \end{aligned} \quad (4.15)$$

e fazendo mais algumas manipulações algébricas em (4.14), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j}}{\delta_t} &+ \frac{1}{2\delta_x} \theta u_{i+1,j}^k U_{i+1,j} - \frac{1}{2\delta_x} \theta u_{i-1,j}^k U_{i-1,j} + \frac{1}{4\delta_x} ((u^2)_{i+1,j}^k - (u^2)_{i-1,j}^k) \\ &+ \frac{1}{2\delta_y} \theta u_{i,j+1}^k U_{i,j+1} - \frac{1}{2\delta_y} \theta u_{i,j-1}^k U_{i,j-1} + \frac{1}{4\delta_y} ((u^2)_{i,j+1}^k - (u^2)_{i,j-1}^k) \\ &- \frac{\nu}{\delta_x^2} (U_{i+1,j} + u_{i+1,j}^k - 2U_{i,j} - 2u_{i,j}^k + U_{i-1,j} + u_{i-1,j}^k) \\ &- \frac{\nu}{\delta_y^2} (U_{i,j+1} + u_{i,j+1}^k - 2U_{i,j} - 2u_{i,j}^k + U_{i,j-1} + u_{i,j-1}^k) = 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Por fim, agrupando os termos semelhantes de (4.16), obtém-se um sistema im-

plícito linearizado em função de $U_{i,j}$, dado por

$$\begin{aligned}
 & \left(-\frac{1}{2\delta_x} \theta u_{i-1,j}^k - \frac{\nu}{\delta_x^2} \right) U_{i-1,j} + \left(\frac{1}{\delta_t} + \frac{2\nu}{\delta_x^2} + \frac{2\nu}{\delta_y^2} \right) U_{i,j} + \left(\frac{1}{2\delta_x} \theta u_{i+1,j}^k - \frac{\nu}{\delta_x^2} \right) U_{i+1,j} \\
 & + \left(\frac{1}{2\delta_y} \theta u_{i,j-1}^k + \frac{\nu}{\delta_y^2} \right) U_{i,j-1} - \left(\frac{1}{2\delta_y} \theta u_{i,j+1}^k - \frac{\nu}{\delta_y^2} \right) U_{i,j+1} = -\frac{1}{4\delta_x} \left((u^2)_{i+1,j}^k - (u^2)_{i-1,j}^k \right) \\
 & - \frac{1}{4\delta_y} \left((u^2)_{i,j+1}^k - (u^2)_{i,j-1}^k \right) + \frac{\nu}{\delta_x^2} (u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k) \\
 & + \frac{\nu}{\delta_y^2} (u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k). \tag{4.17}
 \end{aligned}$$

Assim, o procedimento de linearização por série de Taylor, utilizado transformou o sistema semi-implícito de equações não lineares em função de $u_{i,j}$, equação (4.5), em um sistema implícito linearizado em função de $U_{i,j}$, equação (4.17), com as equações (4.15) retornam os valores da função u .

Uma visualização do processo de linearização pode ser verificada na figura 4.2, onde a solução numérica do sistema implícito será obtida via o método de Gauss-Seidel.

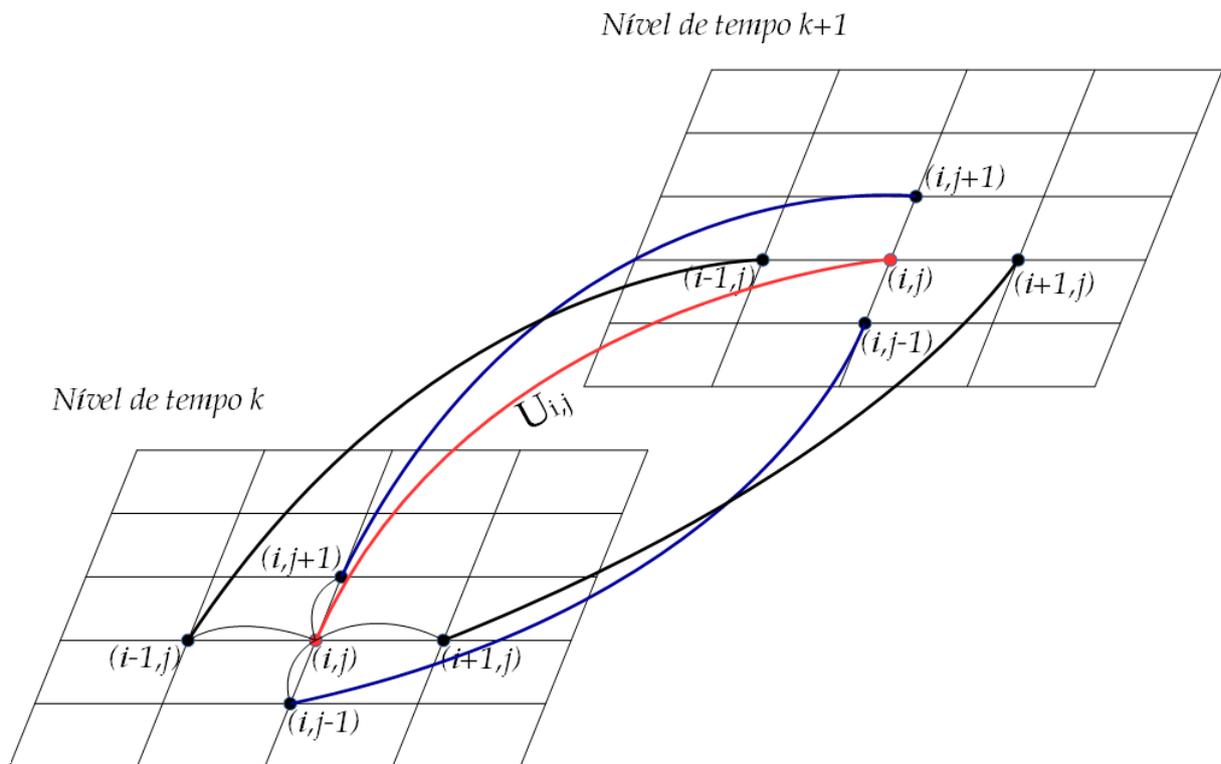


Figura 4.2: Estêncil da equação (4.17), ilustrando o sistema implícito de equações lineares em função de $U_{i,j}$.

Fonte: Autor.

4.1.2 Discretização do Sistema Acoplado de Equações de Burgers 2D

O sistema acoplado de equações de Burgers 2D, apresentados em (2.4), para o propósito deste trabalho, satisfaz a condição de potencial simétrico [18], dada por $u_y = v_x$, assim, reescrevendo-o na forma conservativa, tem-se

$$u_t + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}v_x^2 - \nu(u_{xx} + u_{yy}) = 0, \quad (4.18)$$

$$v_t + \frac{1}{2}u_y^2 + \frac{1}{2}v_y^2 - \nu(v_{xx} + v_{yy}) = 0, \quad (4.19)$$

em que $\nu = \frac{1}{Re}$.

O método de diferenças finitas é utilizado para discretizar as equações (4.18) e (4.19), que por simplicidade e organização do trabalho, serão apresentadas separadamente.

Para a discretização da equação (4.18), a derivada temporal é aproximada por diferença regressiva e as derivadas espaciais do termo difusivo por diferenças centrais, como descritas respectivamente nas equações (4.2) e (4.4). Enquanto que, os termos convectivos, definidos por $CONV(uv) = \frac{1}{2}(u_x^2 + v_x^2)$ de (4.18), são discretizados utilizando um procedimento similar ao apresentado na equação (4.3), resultando em,

$$\begin{aligned} CONV(uv)_{i,j}^{k+1} &\cong \frac{1}{4\delta_x} [\theta((u^2)_{i+1,j}^{k+1} - (u^2)_{i-1,j}^{k+1}) + (1-\theta)((u^2)_{i+1,j}^k - (u^2)_{i-1,j}^k)] \\ &+ \frac{1}{4\delta_x} [\theta((v^2)_{i+1,j}^{k+1} - (v^2)_{i-1,j}^{k+1}) + (1-\theta)((v^2)_{i+1,j}^k - (v^2)_{i-1,j}^k)]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Deste modo, substituindo as equações (4.2), (4.4) e (4.20) em (4.18), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\delta_t} &+ \frac{1}{4\delta_x} [\theta((u^2)_{i+1,j}^{k+1} - (u^2)_{i-1,j}^{k+1}) + (1-\theta)((u^2)_{i+1,j}^k - (u^2)_{i-1,j}^k)] \\ &+ \frac{1}{4\delta_x} [\theta((v^2)_{i+1,j}^{k+1} - (v^2)_{i-1,j}^{k+1}) + (1-\theta)((v^2)_{i+1,j}^k - (v^2)_{i-1,j}^k)] \\ &- \nu \left(\frac{u_{i+1,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1}}{\delta_x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}}{\delta_y^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.21)$$

ou na forma agrupada,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\delta_t} + \frac{2\nu}{\delta_x^2} + \frac{2\nu}{\delta_y^2} \right) u_{i,j}^{k+1} + \frac{\theta(u^2)_{i+1,j}^{k+1}}{4\delta_x} - \frac{\nu u_{i+1,j}^{k+1}}{\delta_x^2} - \frac{\theta(u^2)_{i-1,j}^{k+1}}{4\delta_x} - \frac{\nu u_{i-1,j}^{k+1}}{\delta_x^2} \\ &+ \frac{\theta(v^2)_{i+1,j}^{k+1}}{4\delta_x} - \frac{\theta(v^2)_{i-1,j}^{k+1}}{4\delta_x} - \frac{\nu u_{i,j+1}^{k+1}}{\delta_y^2} - \frac{\nu u_{i,j-1}^{k+1}}{\delta_y^2} - \frac{u_{i,j}^k}{\delta_t} \\ &+ \frac{(1-\theta)((u^2)_{i+1,j}^k - (u^2)_{i-1,j}^k)}{4\delta_x} + \frac{(1-\theta)((v^2)_{i+1,j}^k - (v^2)_{i-1,j}^k)}{4\delta_x} = 0, \end{aligned} \quad (4.22)$$

para $i = 1, \dots, M_x - 1$, $j = 1, \dots, M_y - 1$ e $k = 0, \dots, M_t$, com erro de truncamento de ordem um

em δ_t e de ordem dois em δ_x e δ_y , ou seja, $O(\delta_t) + O(\delta_x^2, \delta_y^2)$.

Observa-se que a discretização da equação (4.18), dada em (4.22), exige o cálculo de u nos nós de posições $(i \pm 1, j)$, (i, j) e $(i, j \pm 1)$, e de v nos nós de posições $(i \pm 1, j)$, como pode ser visto na figura 4.3, resultando na resolução do sistema semi-implícito de equações não lineares.

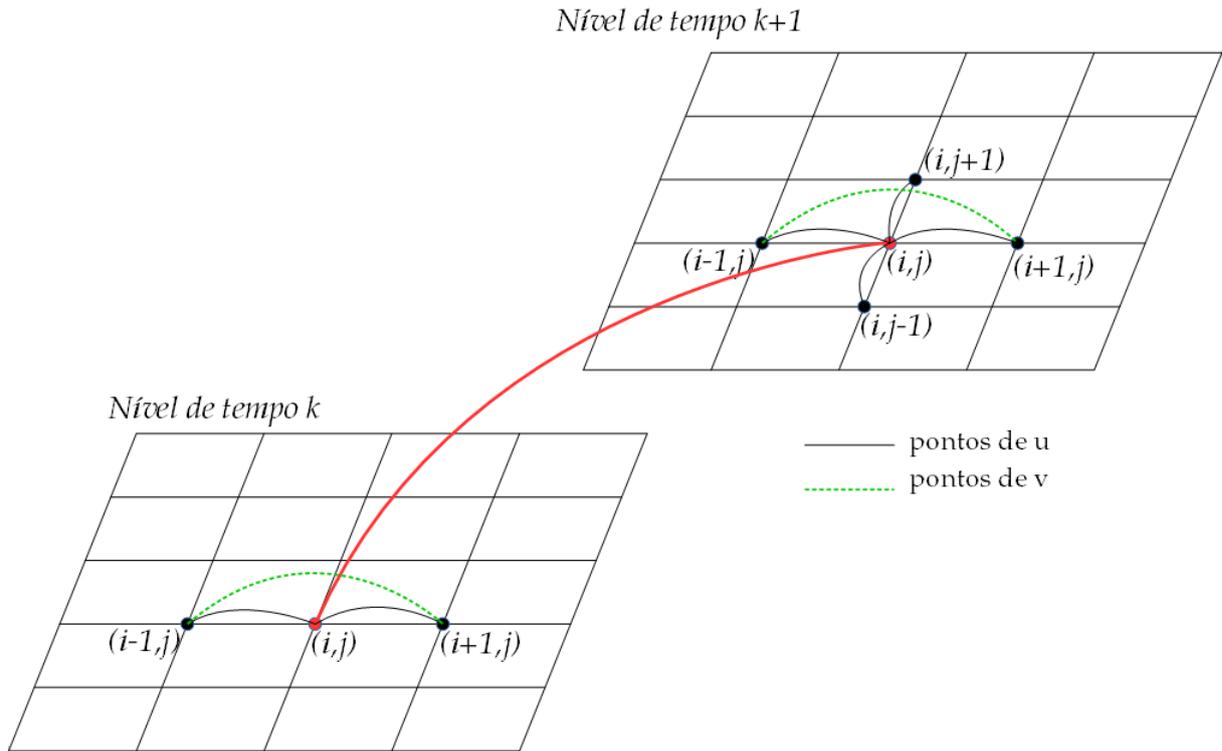


Figura 4.3: Estêncil da equação (4.22), destacando a relação explícita na variável temporal e implícita nas variáveis espaciais.

Fonte: Autor.

Com o uso da técnica iterativa apresentada na subseção 4.1.1, linearizam-se os termos convectivos, no nível de tempo $k + 1$, aplicando a expansão da série de Taylor, como descritas nas equações (4.8)-(4.12). Similarmente, obtêm-se as equações,

$$(v^2)_{i+1,j}^{k+1} \cong (v^2)_{i+1,j}^k + 2v_{i+1,j}^k V_{i+1,j}, \quad (4.23)$$

$$(v^2)_{i-1,j}^{k+1} \cong (v^2)_{i-1,j}^k + 2v_{i-1,j}^k V_{i-1,j}, \quad (4.24)$$

$$(v^2)_{i,j+1}^{k+1} \cong (v^2)_{i,j+1}^k + 2v_{i,j+1}^k V_{i,j+1}, \quad (4.25)$$

$$(v^2)_{i,j-1}^{k+1} \cong (v^2)_{i,j-1}^k + 2v_{i,j-1}^k V_{i,j-1}, \quad (4.26)$$

$$(v^2)_{i,j}^{k+1} \cong (v^2)_{i,j}^k + 2v_{i,j}^k V_{i,j}, \quad (4.27)$$

onde $V_{i+1,j} = v_{i+1,j}^{k+1} - v_{i+1,j}^k$, $V_{i-1,j} = v_{i-1,j}^{k+1} - v_{i-1,j}^k$, $V_{i,j+1} = v_{i,j+1}^{k+1} - v_{i,j+1}^k$, $V_{i,j-1} = v_{i,j-1}^{k+1} - v_{i,j-1}^k$,

$$V_{i,j} = v_{i,j}^{k+1} - v_{i,j}^k.$$

A partir das equações (4.9), (4.10), (4.23) e (4.24) e com algumas manipulações algébricas em (4.20), os termos convectivos linearizados são descritos por

$$\begin{aligned} CONVLin(uv)_{i,j}^{k+1} &= \frac{1}{4\delta_x} [2\theta u_{i+1,j}^k U_{i+1,j} - 2\theta u_{i-1,j}^k U_{i-1,j} + (u^2)_{i+1,j}^k - (u^2)_{i-1,j}^k] \\ &+ \frac{1}{4\delta_x} [2\theta v_{i+1,j}^k V_{i+1,j} - 2\theta v_{i-1,j}^k V_{i-1,j} + (v^2)_{i+1,j}^k - (v^2)_{i-1,j}^k]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Substituindo (4.28) em (4.21), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j}}{\delta_t} &+ \frac{1}{4\delta_x} [2\theta u_{i+1,j}^k U_{i+1,j} - 2\theta u_{i-1,j}^k U_{i-1,j} + (u^2)_{i+1,j}^k - (u^2)_{i-1,j}^k] \\ &+ \frac{1}{4\delta_x} [2\theta v_{i+1,j}^k V_{i+1,j} - 2\theta v_{i-1,j}^k V_{i-1,j} + (v^2)_{i+1,j}^k - (v^2)_{i-1,j}^k] \\ &- \frac{\nu}{\delta_x^2} (u_{i+1,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1}) - \frac{\nu}{\delta_y^2} (u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}) = 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Agora, utilizando as equações (4.15) e fazendo mais manipulações algébricas em (4.29) tem-se,

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j}}{\delta_t} &+ \frac{1}{2\delta_x} \theta u_{i+1,j}^k U_{i+1,j} - \frac{1}{2\delta_x} \theta u_{i-1,j}^k U_{i-1,j} + \frac{1}{4\delta_x} ((u^2)_{i+1,j}^k - (u^2)_{i-1,j}^k) \\ &+ \frac{1}{2\delta_x} \theta v_{i+1,j}^k V_{i+1,j} - \frac{1}{2\delta_x} \theta v_{i-1,j}^k V_{i-1,j} + \frac{1}{4\delta_x} ((v^2)_{i+1,j}^k - (v^2)_{i-1,j}^k) \\ &- \frac{\nu}{\delta_x^2} (U_{i+1,j} + u_{i+1,j}^k - 2U_{i,j} - 2u_{i,j}^k + U_{i-1,j} + u_{i-1,j}^k) \\ &- \frac{\nu}{\delta_y^2} (U_{i,j+1} + u_{i,j+1}^k - 2U_{i,j} - 2u_{i,j}^k + U_{i,j-1} + u_{i,j-1}^k) = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Por fim, reagrupando os termos semelhantes em (4.30), tem-se a equação discretizada de (4.18), gerando um sistema implícito linearizado, dado por

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{1}{2\delta_x} \theta u_{i-1,j}^k - \frac{\nu}{\delta_x^2}\right) U_{i-1,j} + \left(\frac{1}{\delta_t} + \frac{2\nu}{\delta_x^2} + \frac{2\nu}{\delta_y^2}\right) U_{i,j} + \left(\frac{1}{2\delta_x} \theta u_{i+1,j}^k - \frac{\nu}{\delta_x^2}\right) U_{i+1,j} \\ &+ \frac{1}{2\delta_x} \theta (v_{i+1,j}^k V_{i+1,j} - v_{i-1,j}^k V_{i-1,j}) - \frac{\nu}{\delta_y^2} (U_{i,j+1} + U_{i,j-1}) = -\frac{1}{4\delta_x} ((u^2)_{i+1,j}^k - (u^2)_{i-1,j}^k) \\ &- \frac{1}{4\delta_x} ((v^2)_{i+1,j}^k - (v^2)_{i-1,j}^k) + \frac{\nu}{\delta_x^2} (u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k) \\ &+ \frac{\nu}{\delta_y^2} (u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Uma visualização do processo de linearização obtido em (4.31) pode ser visto na figura 4.4.

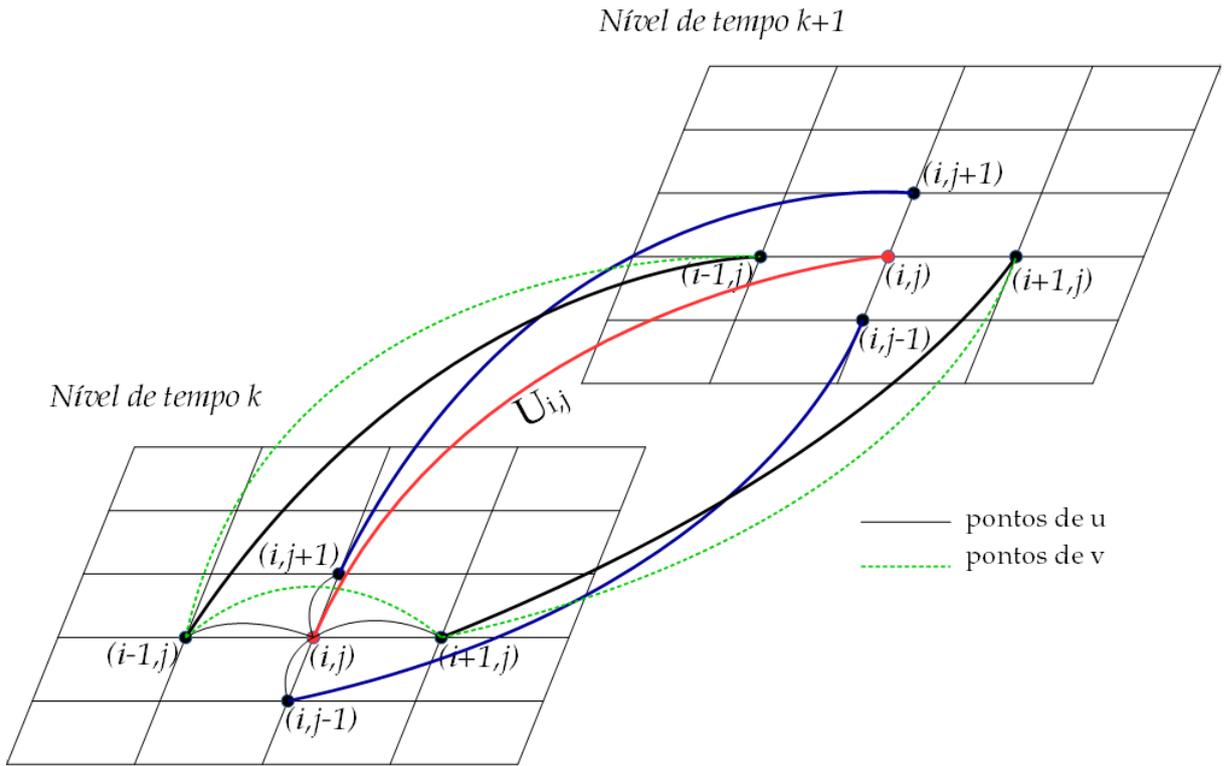


Figura 4.4: Estêncil da equação (4.31), ilustrando o sistema implícito linearizado.
Fonte: Autor.

Com as devidas adaptações, obtém-se a discretização da equação (4.19) do sistema de equações de Burgers 2D, onde considera as discretizações do termo da derivada temporal e das derivadas espaciais dos termos difusivos da seguinte maneira

$$(v_t)_{i,j}^{k+1} \cong \frac{v_{i,j}^{k+1} - v_{i,j}^k}{\delta_t}, \quad (4.32)$$

$$(v_{xx})_{i,j}^{k+1} + (v_{yy})_{i,j}^{k+1} \cong \frac{v_{i+1,j}^{k+1} - 2v_{i,j}^{k+1} + v_{i-1,j}^{k+1}}{\delta_x^2} + \frac{v_{i,j+1}^{k+1} - 2v_{i,j}^{k+1} + v_{i,j-1}^{k+1}}{\delta_y^2}. \quad (4.33)$$

A discretização do termo convectivo de (4.19), $CONV(vu) = \frac{1}{2}(u_y^2 + v_y^2)$, é dada por

$$\begin{aligned} CONV(vu)_{i,j}^{k+1} &\cong \frac{1}{4\delta_y} [\theta((u^2)_{i,j+1}^{k+1} - (u^2)_{i,j-1}^{k+1}) + (1-\theta)((u^2)_{i,j+1}^k - (u^2)_{i,j-1}^k)] \\ &+ \frac{1}{4\delta_y} [\theta((v^2)_{i,j+1}^{k+1} - (v^2)_{i,j-1}^{k+1}) + (1-\theta)((v^2)_{i,j+1}^k - (v^2)_{i,j-1}^k)]. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Utilizando as aproximações (4.32)-(4.34) na equação (4.19) tem-se,

$$\begin{aligned} \frac{v_{i,j}^{k+1} - v_{i,j}^k}{\delta_t} &+ \frac{1}{4\delta_y} [\theta((u^2)_{i,j+1}^{k+1} - (u^2)_{i,j-1}^{k+1}) + (1-\theta)((u^2)_{i,j+1}^k - (u^2)_{i,j-1}^k)] \\ &+ \frac{1}{4\delta_y} [\theta((v^2)_{i,j+1}^{k+1} - (v^2)_{i,j-1}^{k+1}) + (1-\theta)((v^2)_{i,j+1}^k - (v^2)_{i,j-1}^k)] \\ &- \nu \left(\frac{v_{i+1,j}^{k+1} - 2v_{i,j}^{k+1} + v_{i-1,j}^{k+1}}{\delta_x^2} + \frac{v_{i,j+1}^{k+1} - 2v_{i,j}^{k+1} + v_{i,j-1}^{k+1}}{\delta_y^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.35)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\delta_t} + \frac{2\nu}{\delta_x^2} + \frac{2\nu}{\delta_y^2} \right) v_{i,j}^{k+1} + \frac{\theta(u^2)_{i,j+1}^{k+1}}{4\delta_y} - \frac{\theta(u^2)_{i,j-1}^{k+1}}{4\delta_y} - \frac{\nu v_{i+1,j}^{k+1}}{\delta_x^2} - \frac{\nu v_{i-1,j}^{k+1}}{\delta_x^2} \\ &+ \frac{\theta(v^2)_{i,j+1}^{k+1}}{4\delta_y} - \frac{\theta(v^2)_{i,j-1}^{k+1}}{4\delta_y} - \frac{\nu v_{i,j+1}^{k+1}}{\delta_y^2} - \frac{\nu v_{i,j-1}^{k+1}}{\delta_y^2} - \frac{v_{i,j}^k}{\delta_t} \\ &+ \frac{(1-\theta)((u^2)_{i,j+1}^k - (u^2)_{i,j-1}^k)}{4\delta_y} + \frac{(1-\theta)((v^2)_{i,j+1}^k - (v^2)_{i,j-1}^k)}{4\delta_y} = 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Similarmente a discretização de (4.18), a discretização de (4.19), apresentada em (4.36), exige o cálculo de v nos nós de posições $(i \pm 1, j)$, (i, j) e $(i, j \pm 1)$, e de u nos nós de posições $(i, j \pm 1)$, conforme pode ser visto na figura 4.5, ocasionando na resolução de um sistema semi-implícito de equações não lineares.

Assim, aplicando a expansão de Taylor, como apresentadas em (4.11), (4.12), (4.25) e (4.26), linearizam-se os termos convectivos de (4.25), resultando em

$$\begin{aligned} CONVLin(vu)_{i,j}^{k+1} &= \frac{1}{4\delta_y} [2\theta u_{i,j+1}^k U_{i,j+1} - 2\theta u_{i,j-1}^k U_{i,j-1} + (u^2)_{i,j+1}^k - (u^2)_{i,j-1}^k] \\ &+ \frac{1}{4\delta_y} [2\theta v_{i,j+1}^k V_{i,j+1} - 2\theta v_{i,j-1}^k V_{i,j-1} + (v^2)_{i,j+1}^k - (v^2)_{i,j-1}^k]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Substituindo (4.37) em (4.35),

$$\begin{aligned} \frac{V_{i,j}}{\delta_t} &+ \frac{1}{4\delta_y} (2\theta u_{i,j+1}^k U_{i,j+1} - 2\theta u_{i,j-1}^k U_{i,j-1} + (u^2)_{i,j+1}^k - (u^2)_{i,j-1}^k) \\ &+ \frac{1}{4\delta_y} (2\theta v_{i,j+1}^k V_{i,j+1} - 2\theta v_{i,j-1}^k V_{i,j-1} + (v^2)_{i,j+1}^k - (v^2)_{i,j-1}^k) \\ &- \frac{\nu}{\delta_x^2} (v_{i+1,j}^{k+1} - 2v_{i,j}^{k+1} + v_{i-1,j}^{k+1}) - \frac{\nu}{\delta_y^2} (v_{i,j+1}^{k+1} - 2v_{i,j}^{k+1} + v_{i,j-1}^{k+1}) = 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

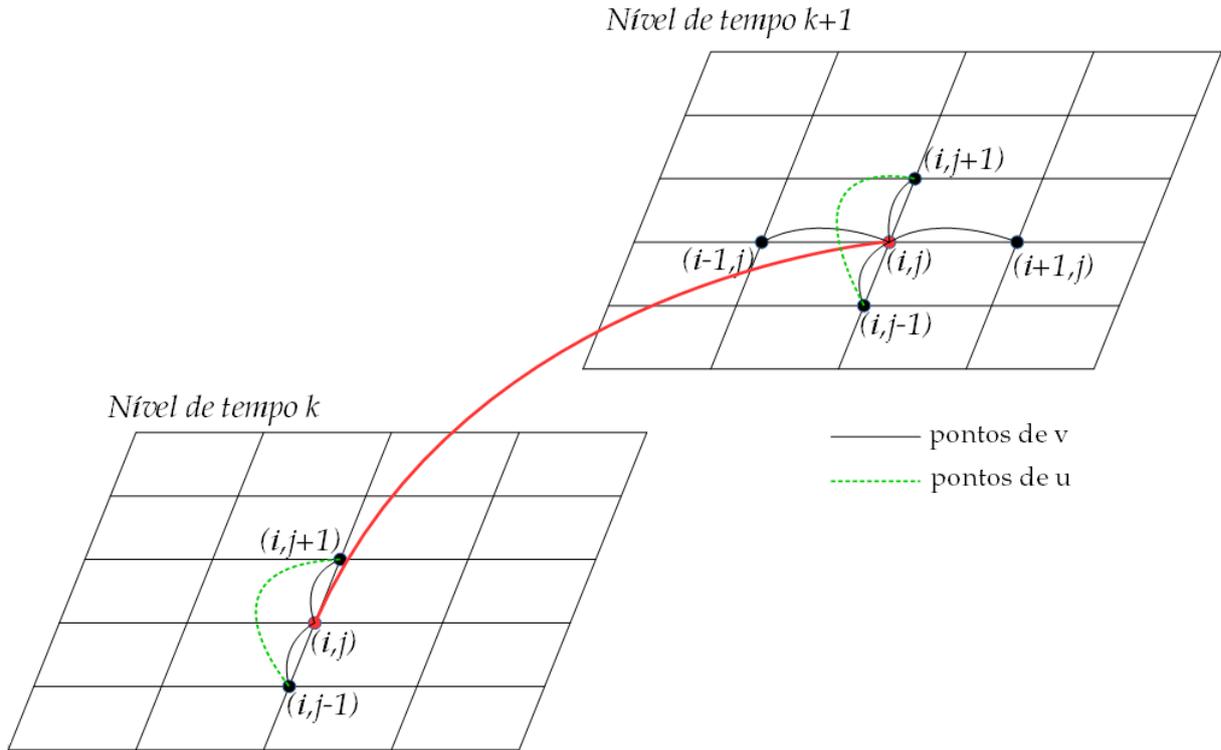


Figura 4.5: Estêncil da equação (4.36), destacando a relação explícita na variável temporal e implícita nas variáveis espaciais.

Fonte: Autor.

Tomando as equações,

$$\begin{aligned}
 v_{i+1,j}^{k+1} &= V_{i+1,j} + v_{i+1,j}^k, \\
 v_{i-1,j}^{k+1} &= V_{i-1,j} + v_{i-1,j}^k, \\
 v_{i,j}^{k+1} &= V_{i,j} + v_{i,j}^k, \\
 v_{i,j+1}^{k+1} &= V_{i,j+1} + v_{i,j+1}^k, \\
 v_{i,j-1}^{k+1} &= V_{i,j-1} + v_{i,j-1}^k.
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

A partir das equações (4.39) e com algumas manipulações algébricas em (4.38) tem-se,

$$\begin{aligned}
 &\frac{V_{i,j}}{\delta t} + \frac{1}{2\delta_y} \theta u_{i,j+1}^k U_{i,j+1} - \frac{1}{2\delta_y} \theta u_{i,j-1}^k U_{i,j-1} + \frac{1}{4\delta_y} ((u^2)_{i,j+1}^k - (u^2)_{i,j-1}^k) \\
 &+ \frac{1}{2\delta_y} \theta v_{i,j+1}^k V_{i,j+1} - \frac{1}{2\delta_y} \theta v_{i,j-1}^k V_{i,j-1} + \frac{1}{4\delta_y} ((v^2)_{i,j+1}^k - (v^2)_{i,j-1}^k) \\
 &- \frac{\nu}{\delta_x^2} (V_{i+1,j} + v_{i+1,j}^k - 2V_{i,j} - 2v_{i,j}^k + V_{i-1,j} + v_{i-1,j}^k) \\
 &- \frac{\nu}{\delta_y^2} (V_{i,j+1} + v_{i,j+1}^k - 2V_{i,j}^{k+1} - 2v_{i,j}^k + V_{i,j-1} + v_{i,j-1}^k) = 0.
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Organizando os termos de (4.40), finalmente obtém-se a equação discretizada de (4.19) que gera um sistema implícito linearizado dado por,

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{1}{2\delta_y} \theta v_{i,j-1}^k - \frac{\nu}{\delta_y^2} \right) V_{i,j-1} + \left(\frac{1}{\delta_t} + \frac{2\nu}{\delta_x^2} + \frac{2\nu}{\delta_y^2} \right) V_{i,j} + \left(\frac{1}{2\delta_y} \theta v_{i,j+1}^k - \frac{\nu}{\delta_y^2} \right) V_{i,j+1} \\
& + \frac{1}{2\delta_y} \theta (u_{i,j+1}^k U_{i,j+1} - u_{i,j-1}^k U_{i,j-1}) - \frac{\nu}{\delta_x^2} (V_{i+1,j} + V_{i-1,j}) = -\frac{1}{4\delta_y} ((u^2)_{i,j+1}^k - (u^2)_{i,j-1}^k) \\
& - \frac{1}{4\delta_y} ((v^2)_{i,j+1}^k - (v^2)_{i,j-1}^k) + \frac{\nu}{\delta_x^2} (v_{i+1,j}^k - 2v_{i,j}^k + v_{i-1,j}^k) \\
& + \frac{\nu}{\delta_y^2} (v_{i,j+1}^k - 2v_{i,j}^k + v_{i,j-1}^k). \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Pode-se observar, na figura 4.6, o processo de linearização obtido na equação (4.41).

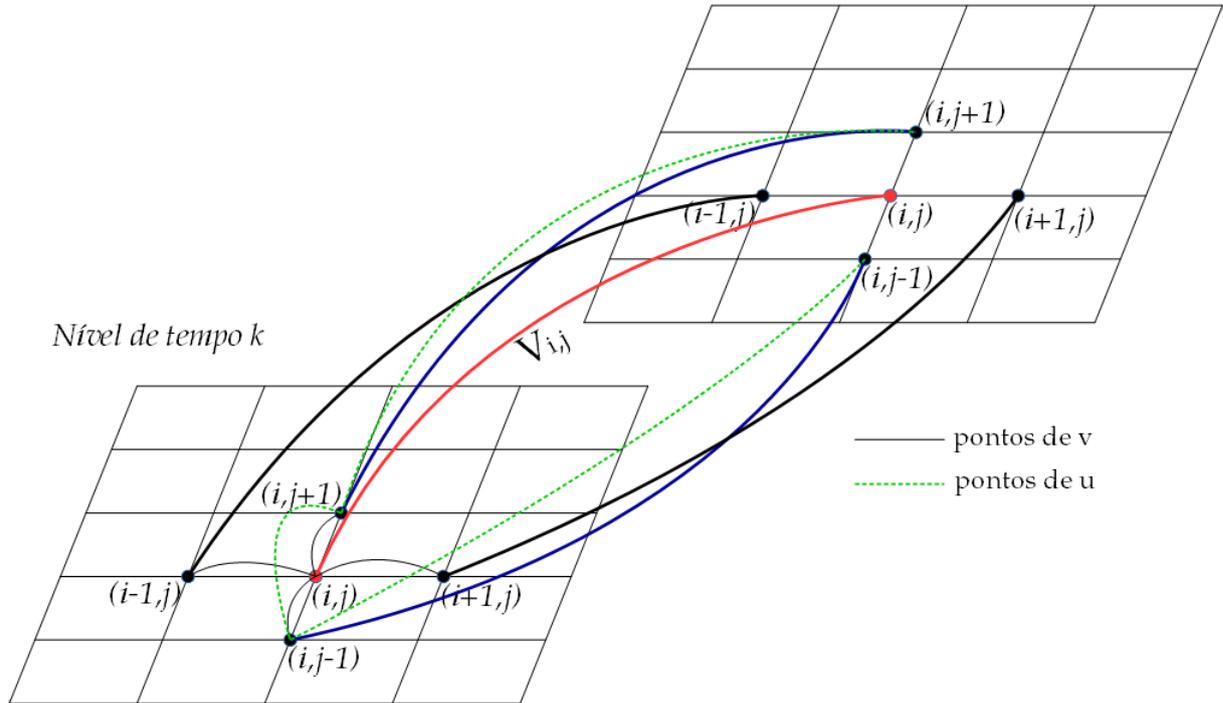


Figura 4.6: Estêncil da equação (4.41), ilustrando o sistema implícito linear.

Fonte: Autor.

Portanto o processo de linearização por série de Taylor transformou o sistema semi-implícito acoplado de equações não lineares em função de $u_{i,j}$ e de $v_{i,j}$, dado em (4.22) e (4.36), em sistemas acoplados implícitos linearizados em função de $U_{i,j}$ e de $V_{i,j}$, dado por (4.31) e (4.41), respectivamente. A solução do sistema de equações implícito será via o método de Gauss-Seidel, e na sequência, utiliza-se as relações necessárias para voltar as variáveis originais u e v .

4.1.3 Discretização do Sistema de Equações de Navier-Stokes 2D

Para a proposta abordada neste trabalho, temos que o sistema de equação (2.7), satisfaz a condição $u_x = -v_y$, podendo reescrevê-lo na seguinte maneira

$$u_t + \frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{2}v_x^2 + p_x - \nu(u_{xx} + u_{yy}) = f_1, \quad (4.42)$$

$$v_t - \frac{1}{2}u_y^2 + \frac{1}{2}v_y^2 + p_y - \nu(v_{xx} + v_{yy}) = f_2 \quad (4.43)$$

em que $\nu = \frac{1}{Re}$.

As discretizações das equações (4.42) e (4.43) também são realizadas aplicando o método de diferenças finitas, em que as derivadas são aproximadas em um ponto (i, j) no nível de tempo $k + 1$.

Observa-se que os termos temporal e difusivos das equações (4.42) e (4.43) são similares aos termos das equações (4.18) e (4.19), respectivamente. Assim as discretizações desses termos são as mesmas realizadas para o sistema de equações de Burgers 2D na subseção 4.1.2. Desta forma, a derivada temporal das duas equações são aproximados por diferença regressiva, conforme as equações (4.2) e (4.32), respectivamente. Os termos difusivos de ambas equações são aproximados utilizando diferenças centrais, dadas pelas equações (4.4) e (4.33). E os termos convectivos $CONV(uv) = \frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{2}v_x^2$ e $CONV(vu) = -\frac{1}{2}u_y^2 + \frac{1}{2}v_y^2$ das equações (4.42) e (4.43), respectivamente, são discretizados utilizando diferenças centrais ponderadas, dadas por

$$\begin{aligned} CONV(uv)_{i,j}^{k+1} &\cong \frac{1}{4\delta_x} [\theta((u^2)_{i+1,j}^{k+1} - (u^2)_{i-1,j}^{k+1}) + (1-\theta)((u^2)_{i+1,j}^k - (u^2)_{i-1,j}^k)] \\ &- \frac{1}{4\delta_x} [\theta((v^2)_{i+1,j}^{k+1} - (v^2)_{i-1,j}^{k+1}) + (1-\theta)((v^2)_{i+1,j}^k - (v^2)_{i-1,j}^k)] \end{aligned} \quad (4.44)$$

e

$$\begin{aligned} CONV(vu)_{i,j}^{k+1} &\cong -\frac{1}{4\delta_y} [\theta((u^2)_{i,j+1}^{k+1} - (u^2)_{i,j-1}^{k+1}) + (1-\theta)((u^2)_{i,j+1}^k - (u^2)_{i,j-1}^k)] \\ &+ \frac{1}{4\delta_y} [\theta((v^2)_{i,j+1}^{k+1} - (v^2)_{i,j-1}^{k+1}) + (1-\theta)((v^2)_{i,j+1}^k - (v^2)_{i,j-1}^k)]. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Deste modo, substituindo as equações (4.2), (4.4) e (4.44) em (4.42), tem-se

$$\begin{aligned} &\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\delta_t} + \frac{1}{4\delta_x} [\theta((u^2)_{i+1,j}^{k+1} - (u^2)_{i-1,j}^{k+1}) + (1-\theta)((u^2)_{i+1,j}^k - (u^2)_{i-1,j}^k)] \\ &- \frac{1}{4\delta_x} [\theta((v^2)_{i+1,j}^{k+1} - (v^2)_{i-1,j}^{k+1}) + (1-\theta)((v^2)_{i+1,j}^k - (v^2)_{i-1,j}^k)] + (p_x)_{i,j}^{k+1} \\ &- \nu \left(\frac{u_{i+1,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1}}{\delta_x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}}{\delta_y^2} \right) = (f_1)_{i,j}^{k+1}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

e analogamente substituindo (4.32), (4.33), e (4.45) em (4.43),

$$\begin{aligned}
& \frac{v_{i,j}^{k+1} - v_{i,j}^k}{\delta_t} - \frac{1}{4\delta_y} \left[\theta((u^2)_{i,j+1}^{k+1} - (u^2)_{i,j-1}^{k+1}) + (1 - \theta)((u^2)_{i,j+1}^k - (u^2)_{i,j-1}^k) \right] \\
& + \frac{1}{4\delta_y} \left[\theta((v^2)_{i,j+1}^{k+1} - (v^2)_{i,j-1}^{k+1}) + (1 - \theta)((v^2)_{i,j+1}^k - (v^2)_{i,j-1}^k) \right] + (p_y)_{i,j}^{k+1} \\
& - \nu \left(\frac{v_{i+1,j}^{k+1} - 2v_{i,j}^{k+1} + v_{i-1,j}^{k+1}}{\delta_x^2} + \frac{v_{i,j+1}^{k+1} - 2v_{i,j}^{k+1} + v_{i,j-1}^{k+1}}{\delta_y^2} \right) = (f_2)_{i,j}^{k+1}. \quad (4.47)
\end{aligned}$$

para $i = 1 \dots M_x - 1$ e $j = 1 \dots M_y - 1$ e $k = 0 \dots M_t$, com erro de truncamento de ordem um em δ_t , e de ordem dois em δ_x e δ_y , ou seja, $O(\delta_t) + O(\delta_x^2, \delta_y^2)$.

Com as discretizações das equações (4.42) e (4.43) a partir de (4.45) e (4.47), obtém-se um sistema semi-implícito acoplado de equações não lineares em função de u e v , assim para linearizar os termos convectivos no nível de tempo $k + 1$, será usado a técnica aplicada na seção 4.1.2, ou seja, conforme as equações (4.8)-(4.12) e (4.23)-(4.27), resultando em termos convectivos na forma linearizada,

$$\begin{aligned}
CONVLin(uv)_{i,j}^{k+1} &= \frac{1}{4\delta_x} \left[2\theta u_{i+1,j}^k U_{i+1,j} - 2\theta u_{i-1,j}^k U_{i-1,j} + (u^2)_{i+1,j}^k - (u^2)_{i-1,j}^k \right] \\
&- \frac{1}{4\delta_x} \left[2\theta v_{i+1,j}^k V_{i+1,j} - 2\theta v_{i-1,j}^k V_{i-1,j} + (v^2)_{i+1,j}^k - (v^2)_{i-1,j}^k \right] \quad (4.48)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
CONVLin(vu)_{i,j}^{k+1} &= -\frac{1}{4\delta_y} \left[2\theta u_{i,j+1}^k U_{i,j+1} - 2\theta u_{i,j-1}^k U_{i,j-1} + (u^2)_{i,j+1}^k - (u^2)_{i,j-1}^k \right] \\
&+ \frac{1}{4\delta_y} \left[2\theta v_{i,j+1}^k V_{i,j+1} - 2\theta v_{i,j-1}^k V_{i,j-1} + (v^2)_{i,j+1}^k - (v^2)_{i,j-1}^k \right]. \quad (4.49)
\end{aligned}$$

Agora substituindo (4.48) em (4.46) e (4.49) em (4.47) temos,

$$\begin{aligned}
& \frac{U_{i,j}}{\delta_t} + \frac{1}{4\delta_x} \left[2\theta u_{i+1,j}^k U_{i+1,j} - 2\theta u_{i-1,j}^k U_{i-1,j} + (u^2)_{i+1,j}^k - (u^2)_{i-1,j}^k \right] \\
& - \frac{1}{4\delta_x} \left[2\theta v_{i+1,j}^k V_{i+1,j} - 2\theta v_{i-1,j}^k V_{i-1,j} + (v^2)_{i+1,j}^k - (v^2)_{i-1,j}^k \right] + (p_x)_{i,j}^{k+1} \\
& - \frac{\nu}{\delta_x^2} (u_{i+1,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1}) - \frac{\nu}{\delta_y^2} (u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}) = (f_1)_{i,j}^{k+1} \quad (4.50)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{V_{i,j}}{\delta_t} &- \frac{1}{4\delta_y} (2\theta u_{i,j+1}^k U_{i,j+1} - 2\theta u_{i,j-1}^k U_{i,j-1} + (u^2)_{i,j+1}^k - (u^2)_{i,j-1}^k) \\
&+ \frac{1}{4\delta_y} (2\theta v_{i,j+1}^k V_{i,j+1} - 2\theta v_{i,j-1}^k V_{i,j-1} + (v^2)_{i,j+1}^k - (v^2)_{i,j-1}^k) + (p_y)_{i,j}^{k+1} \\
&- \frac{\nu}{\delta_x^2} (v_{i+1,j}^{k+1} - 2v_{i,j}^{k+1} + v_{i-1,j}^{k+1}) - \frac{\nu}{\delta_y^2} (v_{i,j+1}^{k+1} - 2v_{i,j}^{k+1} + v_{i,j-1}^{k+1}) = (f_2)_{i,j}^{k+1}. \quad (4.51)
\end{aligned}$$

Utilizando as equações (4.15) e (4.39) e fazendo algumas manipulações algébricas em (4.50) e (4.51), tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{U_{i,j}}{\delta_t} &+ \frac{1}{2\delta_x} \theta u_{i+1,j}^k U_{i+1,j} - \frac{1}{2\delta_x} \theta u_{i-1,j}^k U_{i-1,j} + \frac{1}{4\delta_x} ((u^2)_{i+1,j}^k - (u^2)_{i-1,j}^k) \\
&- \frac{1}{2\delta_x} \theta v_{i+1,j}^k V_{i+1,j} + \frac{1}{2\delta_x} \theta v_{i-1,j}^k V_{i-1,j} - \frac{1}{4\delta_x} ((v^2)_{i+1,j}^k - (v^2)_{i-1,j}^k) \\
&- \frac{\nu}{\delta_x^2} (U_{i+1,j} + u_{i+1,j}^k - 2U_{i,j} - 2u_{i,j}^k + U_{i-1,j} + u_{i-1,j}^k) \\
&- \frac{\nu}{\delta_y^2} (U_{i,j+1} + u_{i,j+1}^k - 2U_{i,j} - 2u_{i,j}^k + U_{i,j-1} + u_{i,j-1}^k) + (p_x)_{i,j}^{k+1} = (f_1)_{i,j}^{k+1} \quad (4.52)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{V_{i,j}}{\delta_t} &- \frac{1}{2\delta_y} \theta u_{i,j+1}^k U_{i,j+1} + \frac{1}{2\delta_y} \theta u_{i,j-1}^k U_{i,j-1} - \frac{1}{4\delta_y} ((u^2)_{i,j+1}^k - (u^2)_{i,j-1}^k) \\
&+ \frac{1}{2\delta_y} \theta v_{i,j+1}^k V_{i,j+1} - \frac{1}{2\delta_y} \theta v_{i,j-1}^k V_{i,j-1} + \frac{1}{4\delta_y} ((v^2)_{i,j+1}^k - (v^2)_{i,j-1}^k) \\
&- \frac{\nu}{\delta_x^2} (V_{i+1,j} + v_{i+1,j}^k - 2V_{i,j} - 2v_{i,j}^k + V_{i-1,j} + v_{i-1,j}^k) \\
&- \frac{\nu}{\delta_y^2} (V_{i,j+1} + v_{i,j+1}^k - 2V_{i,j}^{k+1} - 2v_{i,j}^k + V_{i,j-1} + v_{i,j-1}^k) + (p_y)_{i,j}^{k+1} = (f_2)_{i,j}^{k+1}. \quad (4.53)
\end{aligned}$$

Por fim, reagrupando os termos semelhantes de (4.53) e (4.54), obtém-se o sistema de equações de Navier-Stokes discretizado, gerando o sistema implícito linearizado, dado por

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{1}{2\delta_x} \theta u_{i-1,j}^k - \frac{\nu}{\delta_x^2}\right) U_{i-1,j} + \left(\frac{1}{\delta_t} + \frac{2\nu}{\delta_x^2} + \frac{2\nu}{\delta_y^2}\right) U_{i,j} + \left(\frac{1}{2\delta_x} \theta u_{i+1,j}^k - \frac{\nu}{\delta_x^2}\right) U_{i+1,j} \\
&+ \frac{1}{2\delta_x} \theta (v_{i-1,j}^k V_{i-1,j} - v_{i+1,j}^k V_{i+1,j}) - \frac{\nu}{\delta_y^2} (U_{i,j+1} + U_{i,j-1}) = -\frac{1}{4\delta_x} ((u^2)_{i+1,j}^k - (u^2)_{i-1,j}^k) \\
&+ \frac{1}{4\delta_x} ((v^2)_{i+1,j}^k - (v^2)_{i-1,j}^k) + \frac{\nu}{\delta_x^2} (u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k) \\
&+ \frac{\nu}{\delta_y^2} (u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k) - (p_x)_{i,j}^{k+1} + (f_1)_{i,j}^{k+1}. \quad (4.54)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{1}{2\delta_y} \theta v_{i,j-1}^k - \frac{\nu}{\delta_y^2} \right) V_{i,j-1} + \left(\frac{1}{\delta_t} + \frac{2\nu}{\delta_x^2} + \frac{2\nu}{\delta_y^2} \right) V_{i,j} + \left(\frac{1}{2\delta_y} \theta v_{i,j+1}^k - \frac{\nu}{\delta_y^2} \right) V_{i,j+1} \\
& + \frac{1}{2\delta_y} \theta (u_{i,j-1}^k U_{i,j-1} - u_{i,j+1}^k U_{i,j+1}) - \frac{\nu}{\delta_x^2} (V_{i+1,j} + V_{i-1,j}) = \frac{1}{4\delta_y} ((u^2)_{i,j+1}^k - (u^2)_{i,j-1}^k) \\
& - \frac{1}{4\delta_y} ((v^2)_{i,j+1}^k - (v^2)_{i,j-1}^k) + \frac{\nu}{\delta_x^2} (v_{i+1,j}^k - 2v_{i,j}^k + v_{i-1,j}^k) \\
& + \frac{\nu}{\delta_y^2} (v_{i,j+1}^k - 2v_{i,j}^k + v_{i,j-1}^k) - (p_y)_{i,j}^{k+1} + (f_2)_{i,j}^{k+1}.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Observe que o sistema de equações resultante, dado por (4.54) e (4.55), refere-se a um sistema implícito acoplado, porém linearizado. A resolução do sistema em cada passo iterativo será pelo método de Gauss-Seidel.

4.2 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES EM REGIME PERMANENTE

4.2.1 Discretização da Equação de Convecção-Difusão

Reescrevendo a equação de convecção-difusão definida em (2.11), na forma conservativa, tem-se

$$\frac{1}{2} (u^2)_x + v u_y - K(u_{xx} + u_{yy}) = f. \tag{4.56}$$

Discretizando as derivadas em um ponto (i, j) . Aplica-se nos termos convectivos um procedimento similar ao apresentado na subseção 4.1.1, em relação ao método de relaxação padrão, sendo $u_{\mathbf{x}}^{atual} = \theta u_{\mathbf{x}}^{atual} + (1 - \theta) u_{\mathbf{x}}^{ant}$, em que \mathbf{x} representa a primeira derivada de u em relação a x ou y , com $0 \leq \theta \leq 1$ [33], os índices *atual* e *ant* referem-se aos estágios nos níveis atual e anterior, respectivamente, como ilustrado na figura 4.7.

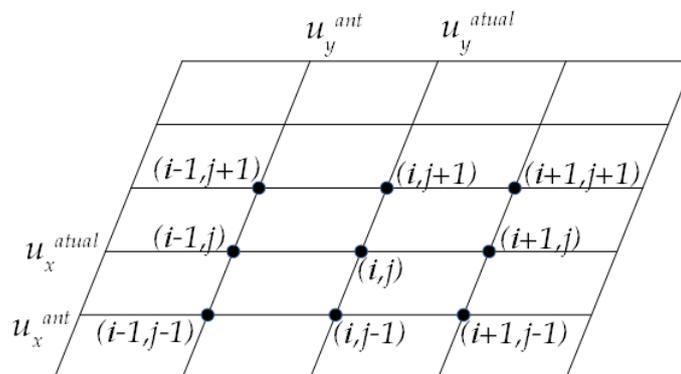


Figura 4.7: Representação das localizações de $u_{\mathbf{x}}^{atual}$ e $u_{\mathbf{x}}^{ant}$.

Fonte: Autor.

Deste modo, os termos convectivos da primeira derivada, (4.56), definido por

$CONV(uu_x - vu_y) = \frac{1}{2}(u^2)_x + vu_y$, tornam-se

$$\begin{aligned} CONV(uu_x - vu_y)_{i,j} &= \frac{1}{2}(u_x^2)_{i,j} + v_j(u_y)_{i,j} \\ &= \frac{1}{2}(\theta(u_x^2)_{i,j} + (1-\theta)(u_x^2)_{i,j-1}) + v_j(\theta(u_y)_{i,j} + (1-\theta)(u_y)_{i-1,j}). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Utilizando diferença central no termo não linear u_x^2 e no termo u_y de (4.57),

$$(u_x^2)_{i,j} \cong \frac{\theta(u_{i+1,j}^2 - u_{i-1,j}^2) + (1-\theta)(u_{i+1,j-1}^2 - u_{i-1,j-1}^2)}{2\delta_x} \quad (4.58)$$

e

$$(u_y)_{i,j} = \frac{\theta(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + (1-\theta)(u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1})}{2\delta_y}, \quad (4.59)$$

tem-se que o termo convectivo da equação (4.56) fica discretizado da seguinte maneira

$$\begin{aligned} CONV(uu_x - vu_y)_{i,j} &= \frac{\theta(u_{i+1,j}^2 - u_{i-1,j}^2) + (1-\theta)(u_{i+1,j-1}^2 - u_{i-1,j-1}^2)}{4\delta_x} \\ &+ v_j \left(\frac{\theta(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + (1-\theta)(u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1})}{2\delta_y} \right). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Os termos difusivos da equação (4.56) são discretizados utilizando diferenças centrais, resultando em

$$(u_{xx})_{i,j} + (u_{yy})_{i,j} \cong \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\delta_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\delta_y^2}. \quad (4.61)$$

Substituindo (4.60) e (4.61) em (4.56), tem-se a equação de convecção-difusão discretizada, dada por

$$\begin{aligned} &\frac{\theta(u_{i+1,j}^2 - u_{i-1,j}^2) + (1-\theta)(u_{i+1,j-1}^2 - u_{i-1,j-1}^2)}{4\delta_x} \\ &+ v_j \left(\frac{\theta(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + (1-\theta)(u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1})}{2\delta_y} \right) \\ &- K_i \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\delta_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\delta_y^2} \right) - f_{i,j} = 0. \end{aligned} \quad (4.62)$$

ou ainda, com os termos agrupados

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{2K_i}{\delta_x^2} + \frac{2K_i}{\delta_y^2} \right) u_{i,j} + \frac{\theta u_{i+1,j}^2}{4\delta_x} - \frac{\theta u_{i-1,j}^2}{4\delta_x} - \frac{K_i u_{i+1,j}}{\delta_x^2} - \frac{K_i u_{i-1,j}}{\delta_x^2} \\
& + \left(\frac{\theta v_j}{2\delta_y} - \frac{K_i}{\delta_y^2} \right) u_{i,j+1} - \left(\frac{\theta v_j}{2\delta_y} + \frac{K_i}{\delta_y^2} \right) u_{i,j-1} + \frac{(1-\theta)(u_{i+1,j-1}^2 - u_{i-1,j-1}^2)}{4\delta_x} \\
& + \frac{v_j(1-\theta)(u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1})}{2\delta_y} - f_{i,j} = 0,
\end{aligned} \tag{4.63}$$

para $i = 1, \dots, M_x - 1$ e $j = 1, \dots, M_y - 1$, com erro de truncamento de ordem dois em δ_x e δ_y , ou seja, $O(\delta_x^2, \delta_y^2)$.

Observa-se que a discretização da equação (4.56), dada em (4.63), exige o cálculo de u nos nós de posições $(i \pm 1, j)$, (i, j) , $(i, j \pm 1)$ e $(i \pm 1, j \pm 1)$, como pode ser visto na figura 4.8, ocasionando na resolução de um sistema implícito não linear para gerar a solução numérica.

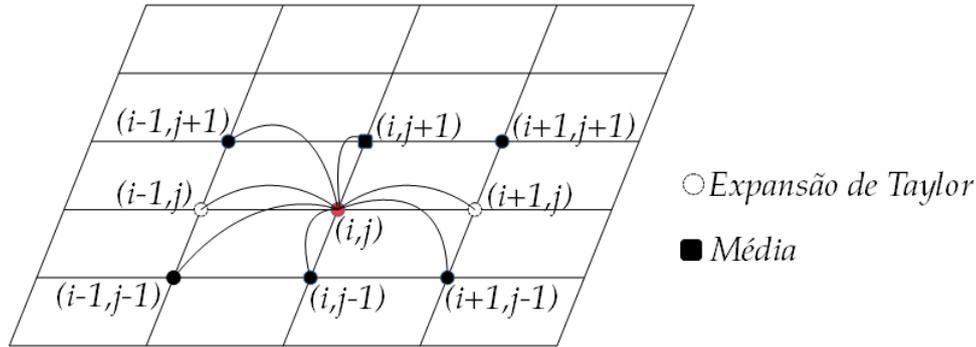


Figura 4.8: Estêncil da equação (4.63), ilustrando o sistema implícito linearizado, em destaque encontram-se os nós nas posições onde a expansão de Taylor (círculo) e a média (quadrado) serão aplicados.

Fonte: Autor.

Seguindo o mesmo padrão desenvolvido para as EDP's em regime estacionário, porém como alternativa para evitar a necessidade de resolução do sistema não linear, nas posições j em (4.62), lineariza-se os termos convectivos, $u_{i+1,j}^2$ e $u_{i-1,j}^2$, aplicando a expansão da série de Taylor, resultando em,

$$u_{i+1,j}^2 = u_{i+1,j-1}^2 + 2u_{i+1,j-1}(u_{i+1,j} - u_{i+1,j-1}), \tag{4.64}$$

$$u_{i-1,j}^2 = u_{i-1,j-1}^2 + 2u_{i-1,j-1}(u_{i-1,j} - u_{i-1,j-1}). \tag{4.65}$$

Além da linearização, no termo $u_{i,j+1}$ de (4.59) utiliza-se uma média nos termos de valores dos estágios $j - 1$ e $j + 1$, como opção para solucionar o problema de instabilidade do

método. Desta forma, considerando a média dada por $u_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{2}$, tem-se que

$$u_{i,j+1} = 2u_{i,j} - u_{i,j-1}. \quad (4.66)$$

Assim, usando as equações (4.64)-(4.66) em (4.60), e fazendo algumas manipulações algébricas, obtemos o termo convectivo linearizado com média, dado por

$$\begin{aligned} CONVMedLin(uu_x - vu_y)_{i,j} &= \frac{v_j \theta u_{i,j}}{\delta_y} + \frac{\theta u_{i+1,j-1} u_{i+1,j}}{2\delta_x} - \frac{\theta u_{i-1,j-1} u_{i-1,j}}{2\delta_x} - \frac{v_j \theta u_{i,j-1}}{\delta_y} \\ &+ \frac{(2\theta - 1)u_{i-1,j-1}^2}{4\delta_x} + \frac{(1 - 2\theta)u_{i+1,j-1}^2}{4\delta_x} - \frac{v_j(1 - \theta)u_{i-1,j-1}}{2\delta_y} \\ &+ \frac{v_j(1 - \theta)u_{i-1,j+1}}{2\delta_y}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Agora, substituindo (4.67) em (4.62) e fazendo mais algumas manipulações algébricas obtém-se a equação (4.56) na forma discretizada com termo convectivo linearizado com média, dado por

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{\theta u_{i-1,j-1}}{2\delta_x} - \frac{K_i}{\delta_x^2} \right) u_{i-1,j} + \left(\frac{v_j \theta}{\delta_y} + \frac{2K_i}{\delta_x^2} + \frac{2K_i}{\delta_y^2} \right) u_{i,j} + \left(\frac{\theta u_{i+1,j-1}}{2\delta_x} - \frac{K_i}{\delta_x^2} \right) u_{i+1,j} \\ &- \left(\frac{\theta v_j}{\delta_y} + \frac{K_i}{\delta_y^2} \right) u_{i,j-1} - \frac{K_i}{\delta_y^2} u_{i,j+1} - \frac{v_j(1 - \theta)u_{i-1,j-1}}{2\delta_y} + \frac{v_j(1 - \theta)u_{i-1,j+1}}{2\delta_y} \\ &+ \left(\frac{1}{4\delta_x} - \frac{\theta}{2\delta_x} \right) u_{i+1,j-1}^2 + \left(\frac{\theta}{2\delta_x} - \frac{1}{4\delta_x} \right) u_{i-1,j-1}^2 - f_{i,j} = 0. \end{aligned} \quad (4.68)$$

A equação (4.68), encontra-se linearizada nas posições i e j , resultando em sistema implícito de equações a ser resolvido, em cada passo iterativo pelo método de Gauss-Seidel.

4.2.2 Discretização do Sistema Acoplado de Equações de Burgers 2D em Regime Permanente

Considera-se o sistema acoplado de equações de Burgers em regime permanente dado por

$$u_x^2 + (vu)_y + p_x - \nu(u_{xx} + u_{yy}) = 0 \quad (4.69)$$

$$(vu)_x + v_y^2 + p_y - \nu(v_{xx} + v_{yy}) = B \quad (4.70)$$

As discretizações das equações (4.69) e (4.70) serão realizadas em um ponto (i, j) . Nos termos convectivos não lineares $CONV(uu_x - vu_y) = u_x^2 + (vu)_y$ e $CONV(vu_x - vv_y) = (vu)_x + v_y^2$ das equações (4.69) e (4.70), respectivamente, utiliza-se o procedimento apresentado na subseção 4.2.1, sendo $u_{\mathbf{x}}^{atual} = \theta u_{\mathbf{x}}^{atual} + (1 - \theta)u_{\mathbf{x}}^{ant}$, em que \mathbf{x} representa a derivada primeira de u e de v em relação a x ou y , com $0 \leq \theta \leq 1$. Desta maneira, os termos convectivos de (4.69) e (4.70),

tornam-se

$$\begin{aligned} CONV(uu_x - vu_y)_{i,j} &= u_x^2 + (vu)_y & (4.71) \\ &= \theta(u_x^2)_{i,j} + (1 - \theta)(u_x^2)_{i,j-1} + \theta((vu)_y)_{i,j} + (1 - \theta)((vu)_y)_{i-1,j}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CONV(vu_x - vv_y)_{i,j} &= (vu)_x + v_y^2 & (4.72) \\ &= \theta((vu)_x)_{i,j} + (1 - \theta)((vu)_x)_{i,j-1} + \theta(v_y^2)_{i,j} + (1 - \theta)(v_y^2)_{i-1,j}. \end{aligned}$$

Utilizando diferença central nos termos u_x^2 , v_y^2 e nos termos $(vu)_y$ e $(vu)_x$, das equações (4.71) e (4.72), respectivamente, tem-se

$$(u_x^2)_{i,j} \cong \frac{\theta(u_{i+1,j}^2 - u_{i-1,j}^2) + (1 - \theta)(u_{i+1,j-1}^2 - u_{i-1,j-1}^2)}{2\delta_x}; \quad (4.73)$$

$$(v_y^2)_{i,j} \cong \frac{\theta(v_{i,j+1}^2 - v_{i,j-1}^2) + (1 - \theta)(v_{i-1,j+1}^2 - v_{i-1,j-1}^2)}{2\delta_y}; \quad (4.74)$$

$$((vu)_y)_{i,j} = \frac{\theta(v_{i,j+1}u_{i,j+1} - v_{i,j-1}u_{i,j-1}) + (1 - \theta)(v_{i-1,j+1}u_{i-1,j+1} - v_{i-1,j-1}u_{i-1,j-1})}{2\delta_y}; \quad (4.75)$$

$$((vu)_x)_{i,j} = \frac{\theta(v_{i+1,j}u_{i+1,j} - v_{i-1,j}u_{i-1,j}) + (1 - \theta)(v_{i+1,j-1}u_{i+1,j-1} - v_{i-1,j-1}u_{i-1,j-1})}{2\delta_x}. \quad (4.76)$$

Desta forma, substituindo (4.73) e (4.75) em (4.71), o termo convectivo de (4.69), fica discretizado da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} CONV(uu_x - vu_y)_{i,j} &= \frac{1}{2\delta_x}(\theta(u_{i+1,j}^2 - u_{i-1,j}^2) + (1 - \theta)(u_{i+1,j-1}^2 - u_{i-1,j-1}^2)) \\ &+ \frac{1}{2\delta_y}(\theta(v_{i,j+1}u_{i,j+1} - v_{i,j-1}u_{i,j-1}) \\ &+ (1 - \theta)(v_{i-1,j+1}u_{i-1,j+1} - v_{i-1,j-1}u_{i-1,j-1})). \end{aligned} \quad (4.77)$$

Similarmente, substituindo (4.74) e (4.76) em (4.72), o termo convectivo de (4.70), fica discretizado por,

$$\begin{aligned} CONV(vu_x - vv_y)_{i,j} &= \frac{1}{2\delta_y}(\theta(v_{i,j+1}^2 - v_{i,j-1}^2) + (1 - \theta)(v_{i-1,j+1}^2 - v_{i-1,j-1}^2)) \\ &+ \frac{1}{2\delta_x}(\theta(v_{i+1,j}u_{i+1,j} - v_{i-1,j}u_{i-1,j}) \\ &+ (1 - \theta)(v_{i+1,j-1}u_{i+1,j-1} - v_{i-1,j-1}u_{i-1,j-1})). \end{aligned} \quad (4.78)$$

Os termos difusivos da equação (4.69), são discretizados utilizando diferenças centrais, como apresentado em (4.61), e da equação (4.70) de forma similar, resultando em

$$(v_{xx})_{i,j} + (v_{yy})_{i,j} \cong \frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{\delta_x^2} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{\delta_y^2}. \quad (4.79)$$

Lembrando que as funções $p(x, y)$ e $B(x, y)$ da equação (2.13) são conhecidas, logo as mesmas são avaliadas nos pontos (i, j) , deste modo, substituindo (4.61) e (4.77) em (4.69), (4.78) e (4.79) em (4.70), obtém-se o sistema de equações de Burgers 2D em regime permanente discretizado

$$\begin{aligned} & \frac{\theta(u_{i+1,j}^2 - u_{i-1,j}^2) + (1-\theta)(u_{i+1,j-1}^2 - u_{i-1,j-1}^2)}{2\delta_x} \\ & + \frac{\theta(v_{i,j+1}u_{i,j+1} - v_{i,j-1}u_{i,j-1}) + (1-\theta)(v_{i-1,j+1}u_{i-1,j+1} - v_{i-1,j-1}u_{i-1,j-1})}{2\delta_y} + (p_x)_{i,j} \\ & - \nu \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\delta_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\delta_y^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.80)$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{\theta(v_{i,j+1}^2 - v_{i,j-1}^2) + (1-\theta)(v_{i-1,j+1}^2 - v_{i-1,j-1}^2)}{2\delta_y} \\ & + \frac{\theta(v_{i+1,j}u_{i+1,j} - v_{i-1,j}u_{i-1,j}) + (1-\theta)(v_{i+1,j-1}u_{i+1,j-1} - v_{i-1,j-1}u_{i-1,j-1})}{2\delta_x} + (p_y)_{i,j} \\ & - \nu \left(\frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{\delta_x^2} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{\delta_y^2} \right) - B_{i,j} = 0, \end{aligned} \quad (4.81)$$

ou ainda, com os termos agrupados

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\theta v_{i,j-1}}{2\delta_y} - \frac{\nu}{\delta_y^2} \right) u_{i,j-1} + \left(\frac{2\nu}{\delta_x^2} + \frac{2\nu}{\delta_y^2} \right) u_{i,j} + \left(\frac{\theta v_{i,j+1}}{2\delta_y} - \frac{\nu}{\delta_y^2} \right) u_{i,j+1} \\ & - \frac{\theta u_{i-1,j}^2}{2\delta_x} - \frac{\nu u_{i-1,j}}{\delta_x^2} + \frac{\theta u_{i+1,j}^2}{2\delta_x} - \frac{\nu u_{i+1,j}}{\delta_x^2} + \frac{(\theta-1)u_{i-1,j-1}^2}{2\delta_x} - \frac{(1-\theta)v_{i-1,j-1}u_{i-1,j-1}}{2\delta_y} \\ & + \frac{(1-\theta)u_{i+1,j-1}^2}{2\delta_x} + \frac{(1-\theta)v_{i-1,j+1}u_{i-1,j+1}}{2\delta_y} + (p_x)_{i,j} = 0, \end{aligned} \quad (4.82)$$

e

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\theta u_{i-1,j}}{2\delta_x} - \frac{\nu}{\delta_x^2} \right) v_{i-1,j} + \left(\frac{2\nu}{\delta_x^2} + \frac{2\nu}{\delta_y^2} \right) v_{i,j} + \left(\frac{\theta u_{i+1,j}}{2\delta_x} - \frac{\nu}{\delta_x^2} \right) v_{i+1,j} \\ & - \frac{\theta v_{i,j-1}^2}{2\delta_y} - \frac{\nu v_{i,j-1}}{\delta_y^2} + \frac{\theta v_{i,j+1}^2}{2\delta_y} - \frac{\nu v_{i,j+1}}{\delta_y^2} + \frac{(\theta-1)v_{i-1,j-1}^2}{2\delta_y} - \frac{(1-\theta)u_{i-1,j-1}v_{i-1,j-1}}{2\delta_x} \\ & + \frac{(1-\theta)v_{i-1,j+1}^2}{2\delta_y} + \frac{(1-\theta)v_{i+1,j-1}u_{i+1,j-1}}{2\delta_x} + (p_y)_{i,j} - B_{i,j} = 0, \end{aligned} \quad (4.83)$$

para $i = 1, \dots, M_x - 1$ e $j = 1, \dots, M_y - 1$, com erro de truncamento de ordem dois em δ_x e δ_y , ou seja, $O(\delta_x^2, \delta_y^2)$.

Verifica-se que o processo de discretização do sistema (2.13) exige o cálculo do produto dos termos das funções u e v , no nó de posição $(i, j + 1)$, para a resolução do sistema não linear obtido em (4.82), e do nó de posição $(i + 1, j)$ para a resolução do sistema não linear obtido em (4.83), como ilustrado na figura 4.9a-b, respectivamente.

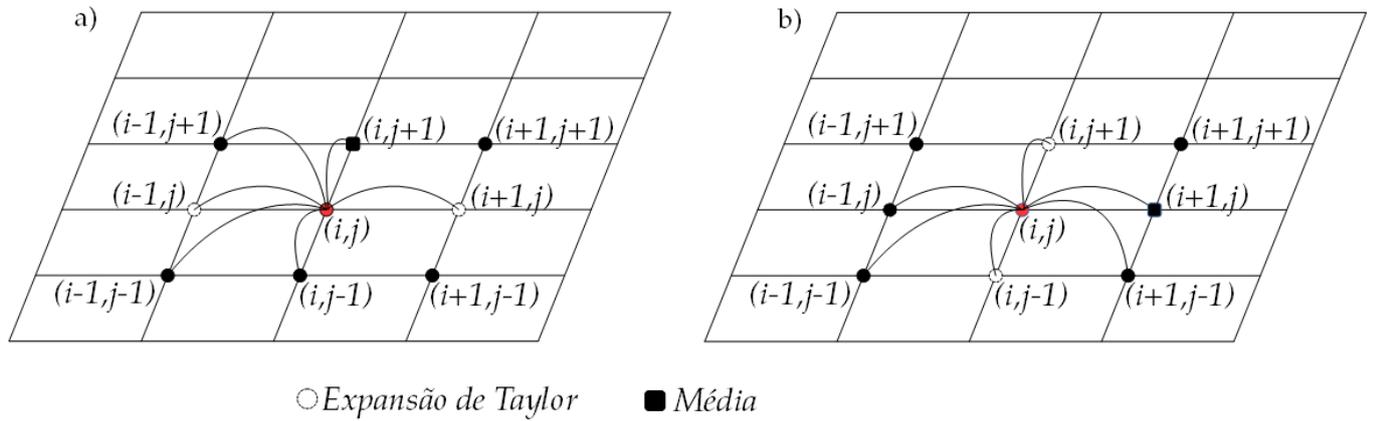


Figura 4.9: Estêncil das equações (4.82) e (4.83), ilustrando o esquema implícito linearizado onde, destaca-se as posições onde a expansão de Taylor (círculo) e média (quadrado) serão aplicadas: (a) referente à equação (4.82); (b) referente à equação (4.83).

Fonte: Autor.

Desta forma, lineariza-se os termos convectivos aplicando a expansão da série de Taylor, como descrito em (4.64)-(4.65) e (4.84)-(4.87),

$$v_{i,j}u_{i,j} = v_{i-1,j}u_{i-1,j} + v_{i-1,j}(u_{i,j} - u_{i-1,j}) + u_{i-1,j}(v_{i,j} - v_{i-1,j}); \quad (4.84)$$

$$v_{i,j+1}^2 = v_{i-1,j+1}^2 + 2v_{i-1,j+1}(v_{i,j+1} - v_{i-1,j+1}); \quad (4.85)$$

$$v_{i,j-1}^2 = v_{i-1,j-1}^2 + 2v_{i-1,j-1}(v_{i,j-1} - v_{i-1,j-1}), \quad (4.86)$$

$$u_{i,j}v_{i,j} = u_{i,j-1}v_{i,j-1} + u_{i,j-1}(v_{i,j} - v_{i,j-1}) + v_{i,j-1}(u_{i,j} - u_{i,j-1}). \quad (4.87)$$

Além disso, nos termos $v_{i,j+1}u_{i,j+1}$ e $u_{i+1,j}v_{i+1,j}$, são consideradas as médias, como opção para solucionar a instabilidade do método, Desta maneira, as médias são dadas por,

$$v_{i,j}u_{i,j} = \frac{v_{i,j+1}u_{i,j+1} + v_{i,j-1}u_{i,j-1}}{2}; \quad (4.88)$$

$$u_{i,j}v_{i,j} = \frac{v_{i+1,j}u_{i+1,j} + v_{i-1,j}u_{i-1,j}}{2}; \quad (4.89)$$

resultando, respectivamente em

$$v_{i,j+1}u_{i,j+1} = 2v_{i,j}u_{i,j} - v_{i,j-1}u_{i,j-1}; \quad (4.90)$$

$$v_{i+1,j}u_{i+1,j} = 2u_{i,j}v_{i,j} - v_{i-1,j}u_{i-1,j}. \quad (4.91)$$

Assim substituindo (4.64),(4.65), (4.84) e (4.90) em (4.77), e de modo análogo (4.85)-(4.87) e (4.91) em (4.78) obtém-se os termos convectivos das equações (4.69) e (4.70) linearizado com média dados por

$$\begin{aligned} CONVMedLin(uu_x_vu_y) &= \frac{1}{2\delta_x}(2\theta u_{i+1,j-1}u_{i+1,j} - 2\theta u_{i+1,j-1}^2 - 2\theta u_{i-1,j-1}u_{i-1,j} \\ &+ 2\theta u_{i-1,j-1}^2 + u_{i+1,j-1}^2 + u_{i-1,j-1}^2) \\ &+ \frac{1}{2\delta_y}(-\theta u_{i,j-1}(v_{i-1,j+1} + v_{i-1,j-1}) + 2\theta v_{i,j}u_{i-1,j+1} \\ &- \theta v_{i-1,j+1}u_{i-1,j+1} + \theta v_{i-1,j-1}u_{i-1,j-1} \\ &- \theta v_{i,j-1}(u_{i-1,j-1} + u_{i-1,j+1}) \\ &+ (1 - \theta)(v_{i-1,j+1}u_{i-1,j+1} - v_{i-1,j-1}u_{i-1,j-1})). \end{aligned} \quad (4.92)$$

e

$$\begin{aligned} CONVMedLin(vu_x_vv_y) &= \frac{1}{2\delta_y}(2\theta v_{i-1,j+1}v_{i+1,j} - 2\theta v_{i-1,j-1}^2 - 2\theta v_{i-1,j-1}v_{i,j-1} \\ &+ 2\theta v_{i-1,j-1}^2 + v_{i-1,j+1}^2 - v_{i-1,j-1}^2) \\ &+ \frac{1}{2\delta_x}(-\theta v_{i-1,j}(u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1}) + 2\theta u_{i,j}v_{i+1,j-1} \\ &- \theta v_{i+1,j+1}u_{i+1,j+1} + \theta v_{i-1,j-1}u_{i-1,j-1} \\ &- \theta u_{i-1,j}(v_{i-1,j-1} + v_{i+1,j-1}) \\ &+ (1 - \theta)(v_{i+1,j-1}u_{i+1,j-1} - v_{i-1,j-1}u_{i-1,j-1})). \end{aligned} \quad (4.93)$$

Portanto substituindo (4.92), (4.93) em (4.80) e (4.81), respectivamente, obtemos o sistema acoplado de equações de Burgers 2D em regime permanente dado em (2.13), na sua forma discretizada com termos convectivos linearizados com média, dado por

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{\theta u_{i-1,j-1}}{\delta_x} - \frac{\nu}{\delta_x^2}\right)u_{i-1,j} + \left(\frac{2\nu}{\delta_x^2} + \frac{2\nu}{\delta_y^2} + \frac{\theta v_{i-1,j+1}}{\delta_y}\right)u_{i,j} + \left(\frac{\theta u_{i+1,j-1}}{\delta_x} - \frac{\nu}{\delta_x^2}\right)u_{i+1,j} \\ &- \left(\frac{\theta v_{i-1,j-1}}{2\delta_y} + \frac{\nu}{\delta_y^2} + \frac{\theta v_{i-1,j+1}}{2\delta_y}\right)u_{i,j-1} - \frac{\nu u_{i,j+1}}{\delta_y^2} + \left(\frac{\theta}{\delta_x} - \frac{1}{2\delta_x}\right)u_{i-1,j-1}^2 \\ &+ \left(\frac{1}{2\delta_x} - \frac{\theta}{\delta_x}\right)u_{i+1,j-1}^2 + \left(-\frac{v_{i-1,j-1}}{2\delta_y} + \frac{\theta v_{i-1,j-1}}{\delta_y} - \frac{\theta v_{i,j-1}}{2\delta_y}\right)u_{i-1,j-1} \\ &+ \left(\frac{\theta v_{i,j}}{\delta_y} + \frac{v_{i-1,j+1}}{2\delta_y} - \frac{\theta v_{i-1,j+1}}{\delta_y} - \frac{\theta v_{i,j-1}}{2\delta_y}\right)u_{i-1,j+1} + (p_x)_{i,j} = 0, \end{aligned} \quad (4.94)$$

e

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{-\theta v_{i-1,j-1}}{\delta_y} - \frac{\nu}{\delta_y^2} \right) v_{i,j-1} + \left(\frac{2\nu}{\delta_x^2} + \frac{2\nu}{\delta_y^2} + \frac{\theta u_{i+1,j-1}}{\delta_x} \right) v_{i,j} + \left(\frac{\theta v_{i-1,j+1}}{\delta_y} + \frac{\nu}{\delta_y^2} \right) v_{i,j+1} \\
+ & \left(-\frac{\theta u_{i-1,j-1}}{2\delta_x} - \frac{\nu}{\delta_x^2} - \frac{\theta u_{i+1,j-1}}{2\delta_x} \right) v_{i-1,j} - \frac{\nu v_{i+1,j}}{\delta_x^2} + \left(\frac{\theta}{\delta_y} - \frac{1}{2\delta_y} \right) v_{i-1,j-1}^2 \\
+ & \left(\frac{1}{2\delta_y} - \frac{\theta}{\delta_y} \right) v_{i-1,j+1}^2 + \left(-\frac{u_{i-1,j-1}}{2\delta_x} + \frac{\theta u_{i-1,j-1}}{\delta_x} - \frac{\theta u_{i-1,j}}{2\delta_x} \right) v_{i-1,j-1} \\
+ & \left(\frac{\theta u_{i,j}}{\delta_x} + \frac{u_{i+1,j-1}}{2\delta_x} - \frac{\theta u_{i-1,j}}{2\delta_x} - \frac{\theta u_{i+1,j-1}}{\delta_x} \right) v_{i+1,j-1} + (p_y)_{i,j} - B_{i,j} = 0. \tag{4.95}
\end{aligned}$$

Observe que o sistema de equações resultante, dado por (4.94) e (4.95), refere-se a um sistema implícito acoplado porém linearizado nas posições i e j . A resolução do sistema em cada passo iterativo será pelo método de Gauss-Seidel.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Este capítulo apresenta os resultados das simulações numéricas das EDP's obtidos pelos esquemas apresentados no Capítulo 4, em conjunto com as específicas condições iniciais e de fronteiras. Também faz-se uma análise qualitativa, comparando as soluções numéricas e analíticas e analisando os erros utilizando as normas L_1 e L_2 do erro relativo, dados em (3.11) e (3.12).

5.1 RESULTADOS NUMÉRICOS DAS EQUAÇÕES EM REGIME TRANSIENTE

Nesta seção avalia a precisão do esquema implícito linearizado considerando a equação de Burgers 2D e os sistemas acoplados de equações de Burgers 2D e de Navier-Stokes, em regime transiente, comparando qualitativamente os resultados com soluções analíticas conhecidas na literatura.

5.1.1 Teste 1: Equação de Burgers 2D

A solução analítica da equação de Burgers 2D, definida em (2.1), com condição inicial

$$u(x, y, 0) = \frac{1}{(1 + \exp(\frac{x+y}{2\nu}))}, \quad (x, y) \in [0, 1], \quad (5.1)$$

e condições de fronteiras

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= \frac{1}{(1 + \exp(\frac{y-t}{2\nu}))}, \\ u(1, y, t) &= \frac{1}{(1 + \exp(\frac{2+y-t}{2\nu}))}, \\ u(x, 0, t) &= \frac{1}{(1 + \exp(\frac{x-t}{2\nu}))}, \\ u(x, 1, t) &= \frac{1}{(1 + \exp(\frac{2+x-t}{2\nu}))}, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

para $\nu = 1/Re$, obtida a partir da transformação de Hopf-Cole, [40], é dada por

$$u(x, y, t) = \frac{1}{(1 + \exp(\frac{x+y-t}{2\nu}))}. \quad (5.3)$$

Para analisar resultados do esquema implícito linearizado, apresentado na equação (4.17), considera-se o domínio em $0 \leq x, y \leq 1$, adotando $\delta_x = \delta_y = 0.025$, equivalente à $M_x = M_y = 40$, $\nu = 0.01$, $\delta_t = 0.005$ ou $M_t = 200$, um tempo final de simulação $t = 1$ e uma tolerância de 10^{-3} para resolver o sistema iterativo de Gauss Seidel.

Na Tabela 5.1, apresenta-se os resultados da solução numérica de $u(x, y, t = 1)$, para diferentes valores de θ , de acordo com a equação discretizada (4.17) e da solução analítica (5.3), em conjunto com as condições (5.1) e (5.2), para alguns valores de x e $y = 0.5$.

Tabela 5.1: Soluções numérica e analítica de $u(x, y, t)$, para $t = 1$

x	Sol. Numérica					Sol. Analítica
	$\theta = 0.1$	$\theta = 0.3$	$\theta = 0.5$	$\theta = 0.8$	$\theta = 1.0$	
0.15	1	1	1	1	1	1
0.3	1	1	1	1	1	0.99998
0.45	1.0259	1.0132	1.0013	0.98505	0.97512	0.97069
0.6	0.024431	0.026499	0.028751	0.03250	0.035264	0.017986
0.75	5.0502e-005	5.4988e-005	5.9918e-005	6.8231e-005	7.4447e-005	1.013e-005
0.9	1.0374e-007	1.1201e-007	1.2103e-007	1.3607e-007	1.4721e-007	5.6028e-009

Observa-se na Tabela 5.1, que os valores de θ não geraram grandes variações entre as soluções numéricas. Assim, considerando $\theta = 0.5$ ilustra-se na figura 5.1, as soluções numérica e analítica da equação (2.1) com as condições (5.1) e (5.2).

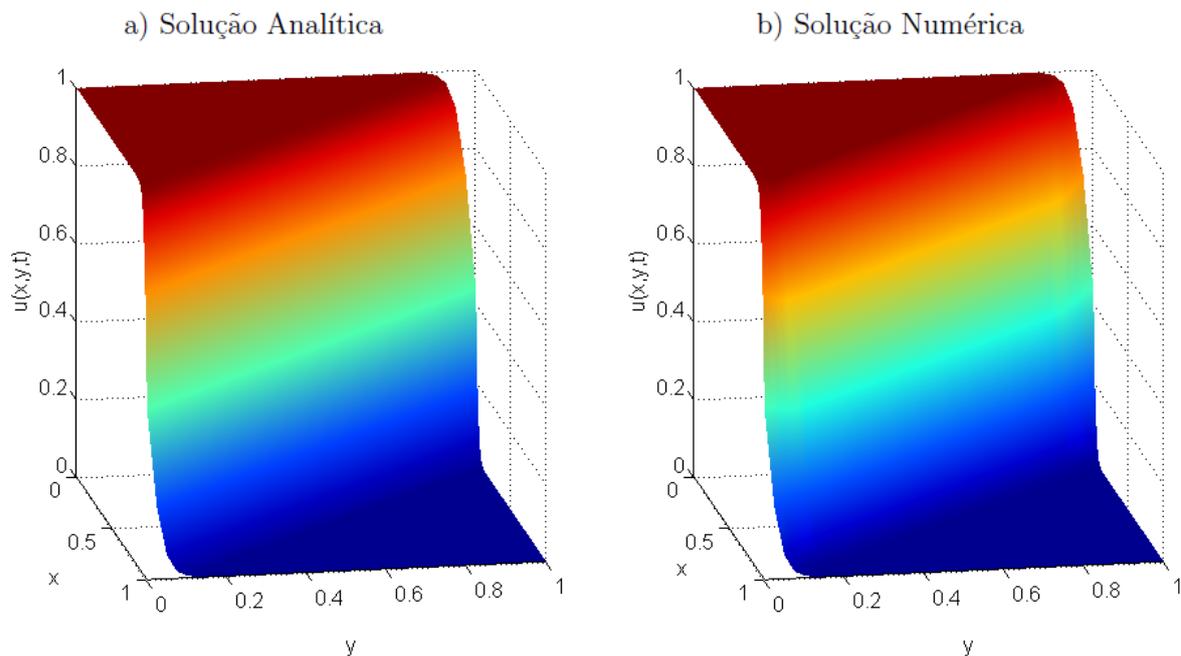


Figura 5.1: Soluções da equação de Burgers 2D, para $M_x = M_y = 40$, $\nu = 0.01$, $M_t = 200$ e $t = 1$: (a) Solução Analítica e (b) Solução Numérica.

Verifica-se que as soluções apresentadas na figura 5.1 são praticamente as mesmas. No entanto, para uma melhor compreensão do resultado numérico ilustrado, realiza-se um corte na solução em $y = 0.5$ e $y = 0.9$, avalia-se os resultados considerando as malhas para $M_x = M_y = 40$ e 80 e mantém os valores para os demais parâmetros, que podem ser observados na figura 5.2.

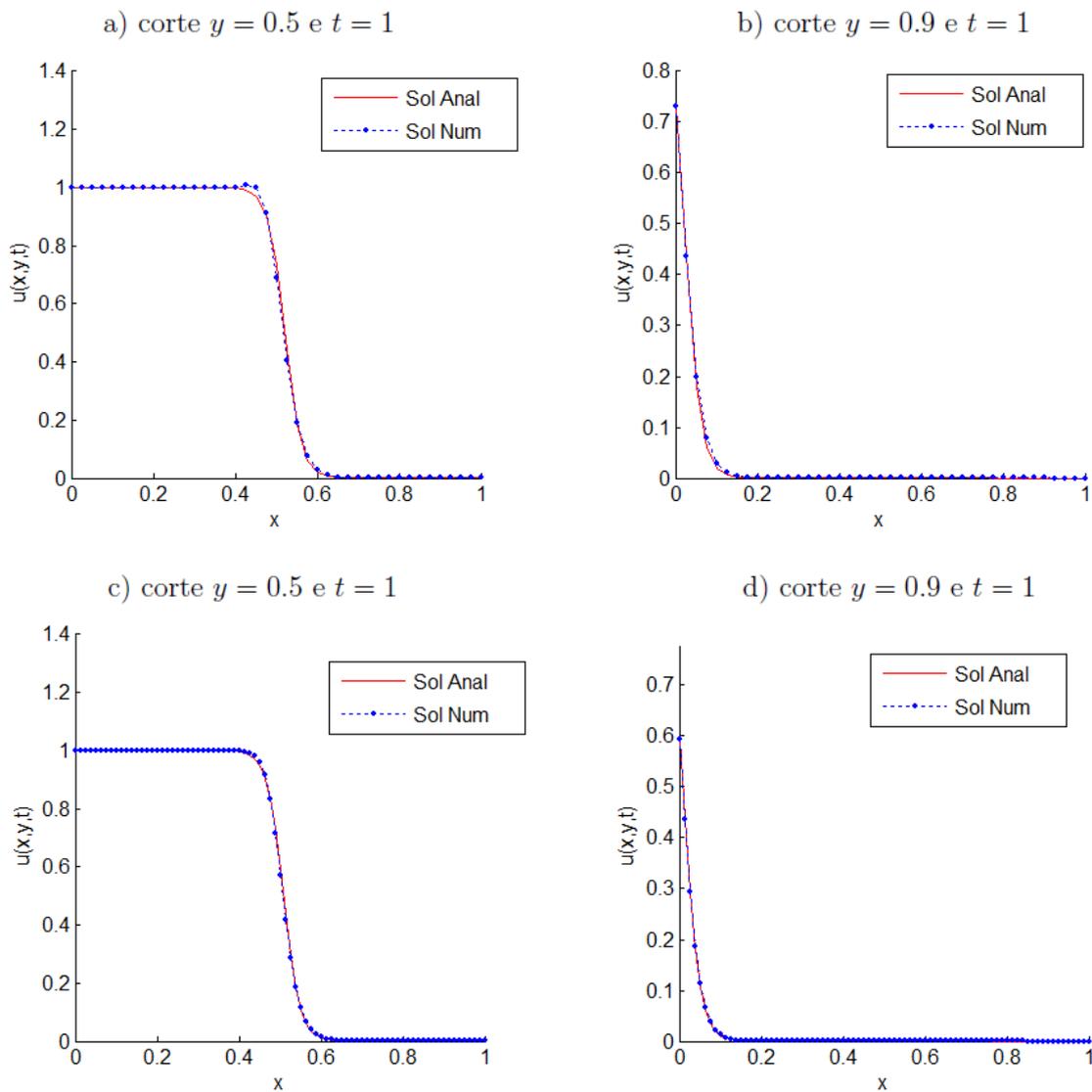


Figura 5.2: Soluções da Equação de Burgers 2D com $M_t = 200$, $\theta = 0.5$ e $t = 1$: (a) corte em $y = 0.5$; (b) corte em $y = 0.9$, para $M_x = M_y = 40$; (c) corte em $y = 0.5$; (d) corte em $y = 0.9$, para $M_x = M_y = 80$.

Nota-se na figura 5.2a-b, para o qual foi utilizado $M_x = M_y = 40$, uma pequena oscilação na solução numérica, que com o refinamento da malha, figura 5.2c-d, os resultados tornaram-se mais precisos, diminuindo as oscilações. Estes resultados ficam mais evidentes quando avaliados considerando as linhas de contorno das soluções, ilustrados na figura 5.3, no qual foi incluído a solução para $M_x = M_y = 160$.

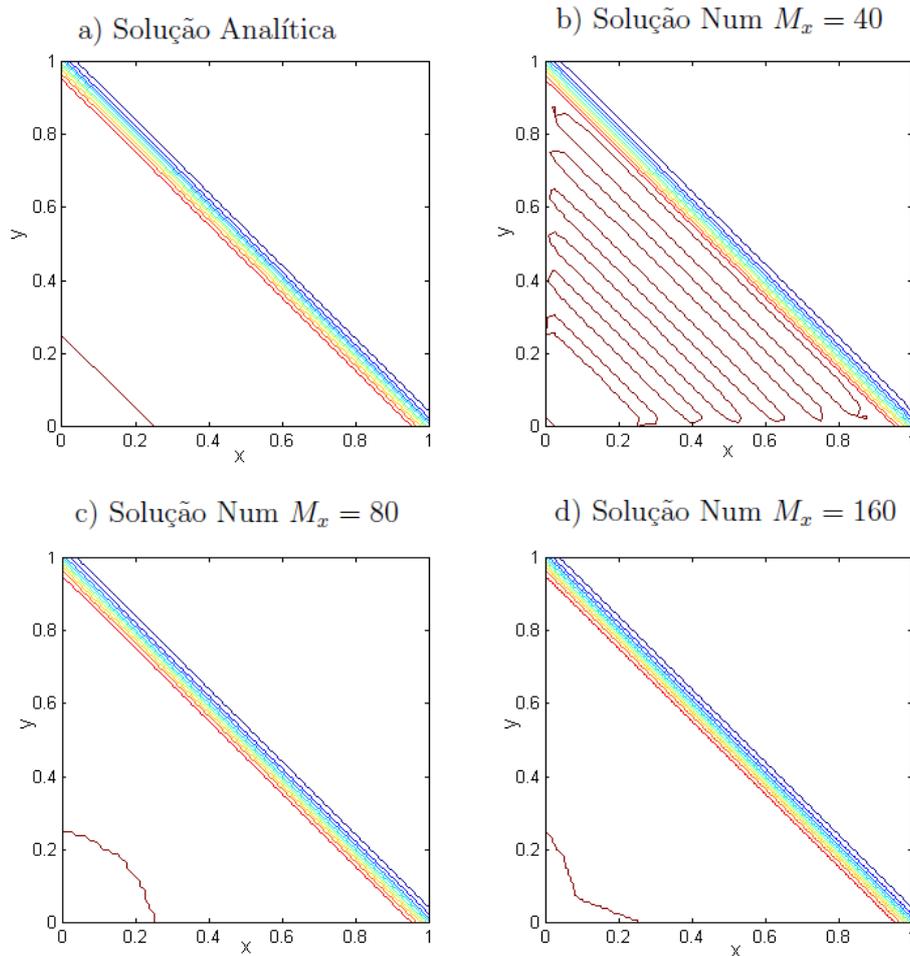


Figura 5.3: Linhas de contorno das soluções da equação de Burgers 2D: (a) Solução analítica, (b-d) Soluções numéricas para $M_x = M_y = 40, 80$ e 160 , respectivamente, $M_t = 200$.

Assim, por meio das linhas de contorno, foi possível realizar um acompanhamento rigoroso sobre o comportamento do esquema implícito linearizado, devido ao fato da solução analítica ser conhecida, onde constatou-se que com o refinamento da malha os resultados tornaram-se mais precisos, contornando as oscilações na solução numérica, figura 5.3. Outro parâmetro importante, para resultados mais precisos, refere-se ao refinamento do tempo, observou-se que para os resultados apresentados na figura 5.3d, refinando o tempo, isto é considerando $M_t = 400$, as linhas de contorno da solução numérica tornam-se similares às linhas de contorno da solução analítica. Porém, tanto o refinamento no espaço quanto no tempo levam a um custo computacional alto. Desta forma, optou-se por avaliar as normas L_1 e L_2 do erro relativo considerando diferentes malhas, isto é, $M_x = M_y = 20, 40, 80$ e 160 , $M_t = 200$.

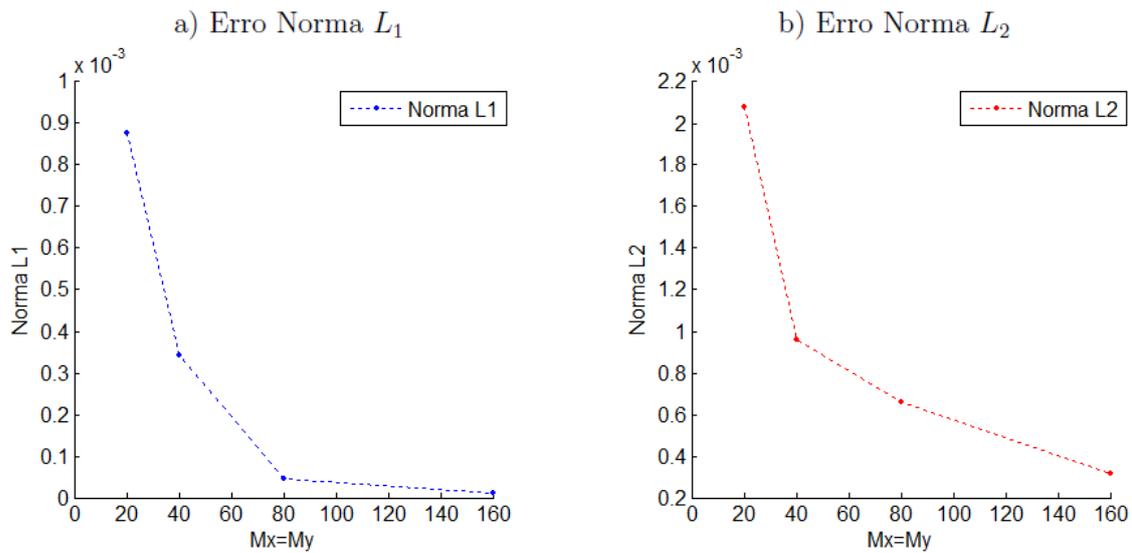


Figura 5.4: Gráfico do erro para diferentes malhas: (a) erro na norma L_1 ao refinar a malha; (b) erro na norma L_2 ao refinar a malha.

Conforme o esperado verifica-se que os resultados numéricos melhoram quando o número das partições é aumentado, figura 5.4, gerando erros de ordem 10^{-3} nas normas L_1 e L_2 , para os diferentes tipos de malhas, resultados que podem ser confirmados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Erro de aproximação para diferentes malhas.

$M_x = M_y$	$\ E\ _1$	$\ E\ _2$
20	0.00087726	0.00207730
40	0.00034351	0.00095964
80	4.5034e-005	0.00065668
160	9.8453e-006	0.00031478

Pelas figuras 5.1-5.4, pode-se concluir que o esquema implícito linearizado permitiu obter uma solução numérica próxima à solução analítica, com erros da ordem de 10^{-3} segundo as normas L_1 e L_2 .

Ainda, como uma outra alternativa para avaliar o método apresentado neste trabalho, compara-se qualitativamente os resultados dos erros na norma L_2 do esquema implícito linearizado com um esquema *upwind* de alta ordem explícito [28]. O esquema obtido por Medeiros (2013) utiliza aproximação progressiva e central nos termos temporal e difusivo, respectivamente, e no termo convectivo uma discretização pelo método *upwind* utilizando o esquema ADBQUICK-KEST.

Os resultados dos erros na norma L_2 , para $0 \leq t \leq 1$, $M_x = M_y = 40$, $M_t = 200$, $\nu = 0.01$, entre os esquemas implícito linearizado e *upwind* de alta ordem explícito, [28], encontram-se apresentados na figura 5.5.

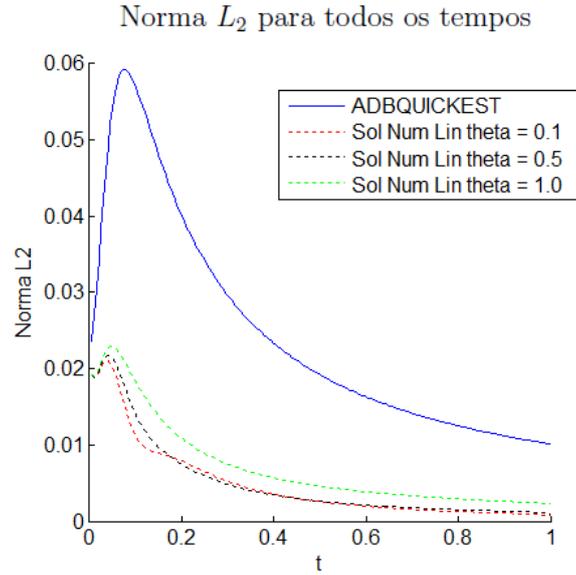


Figura 5.5: Comparação qualitativa dos resultados dos erros na norma L_2 entre os esquemas implícito linearizado, linha pontilhada, e o esquema ADBQUICKEST, linha sólida.

Observa-se, na figura 5.5 que o esquema implícito linearizado quando comparado com o esquema ADBQUICKEST apresentou erros menores, desta forma pode-se afirmar que os resultados obtidos pelo mesmo são melhores. Também, é importante ressaltar que a implementação do esquema implícito linearizado, via Gauss Seidel, apesar de um grande número de manipulações algébricas, é mais simples do que do sistema explícito resultante do esquema ADBQUICKEST apresentado por Medeiros (2013).

Avaliado o esquema implícito linearizado para a equação de Burgues 2D, faz-se, então uma análise de forma similar para os sistemas acoplados de equações de Burgues 2D e de Navier-Stokes.

5.1.2 Teste 2: Sistema Acoplado de Equações de Burgues 2D

O sistema acoplado de equações de Burgues 2D, definido em (2.4), com as condições iniciais

$$\begin{aligned}
 u(x, y, 0) &= \frac{-4\nu\pi\cos(2\pi x)\text{sen}(\pi y)}{2 + \text{sen}(2\pi x)\text{sen}(\pi y)}, \\
 v(x, y, 0) &= \frac{-2\nu\pi\text{sen}(2\pi x)\cos(\pi y)}{2 + \text{sen}(2\pi x)\text{sen}(\pi y)}, \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1,
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Tabela 5.4: Soluções numérica e analítica de $v(x, y, t)$, $t = 1$

x	Sol. Numérica de v					Sol. Analítica de v
	$\theta = 0.1$	$\theta = 0.3$	$\theta = 0.5$	$\theta = 0.8$	$\theta = 1.0$	
0.15	-6.858e-005	-6.858e-005	-6.858e-005	-6.858e-005	-6.858e-005	-6.859e-005
0.30	-7.688e-005	-7.688e-005	-7.688e-005	-7.688e-005	-7.688e-005	-7.688e-005
0.45	-3.162e-005	-3.162e-005	-3.162e-005	-3.162e-005	-3.162e-005	-3.163e-005
0.60	9.576e-005	9.577e-005	9.577e-005	9.577e-005	9.577e-005	9.577e-005
0.75	0.00022391	0.00022391	0.00022391	0.00022391	0.00022391	0.00022386
0.90	9.576e-005	9.577e-005	9.577e-005	9.577e-005	9.577e-005	9.577e-005

Observa-se nas Tabelas 5.3 e 5.4, que independente do valor de θ , todas as soluções numéricas se aproximaram da solução analítica, tais resultados podem ser confirmados utilizando as normas L_1 e L_2 do erro relativo, apresentado na Tabela 5.5.

Tabela 5.5: Norma do erro L_1 e L_2 para diferentes valores de θ , com $\delta_x = \delta_y = 0.0125$.

θ	Norma do erro $\ E\ _1$		Norma do erro $\ E\ _2$	
	$u(x, y, t)$	$v(x, y, t)$	$u(x, y, t)$	$v(x, y, t)$
0.1	1.7464e-006	6.0129e-007	0.00019323	7.4139e-005
0.3	1.7588e-006	5.5844e-007	0.00019488	7.6186e-005
0.5	1.7961e-006	4.2988e-007	0.00019967	8.2158e-005
0.8	1.8333e-006	3.0133e-007	0.00020422	8.7916e-005
1.0	1.8581e-006	2.1563e-007	0.00020714	9.1655e-005

Considerando $\theta = 0.5$, e em concordância com os resultados das Tabelas 5.3 e 5.4, ilustra-se na figura 5.6 as soluções numérica e analítica do sistema (2.4) para $M_x = M_y = 80$, $M_t = 200$, $\nu = 0.001$ e $t = 1$.

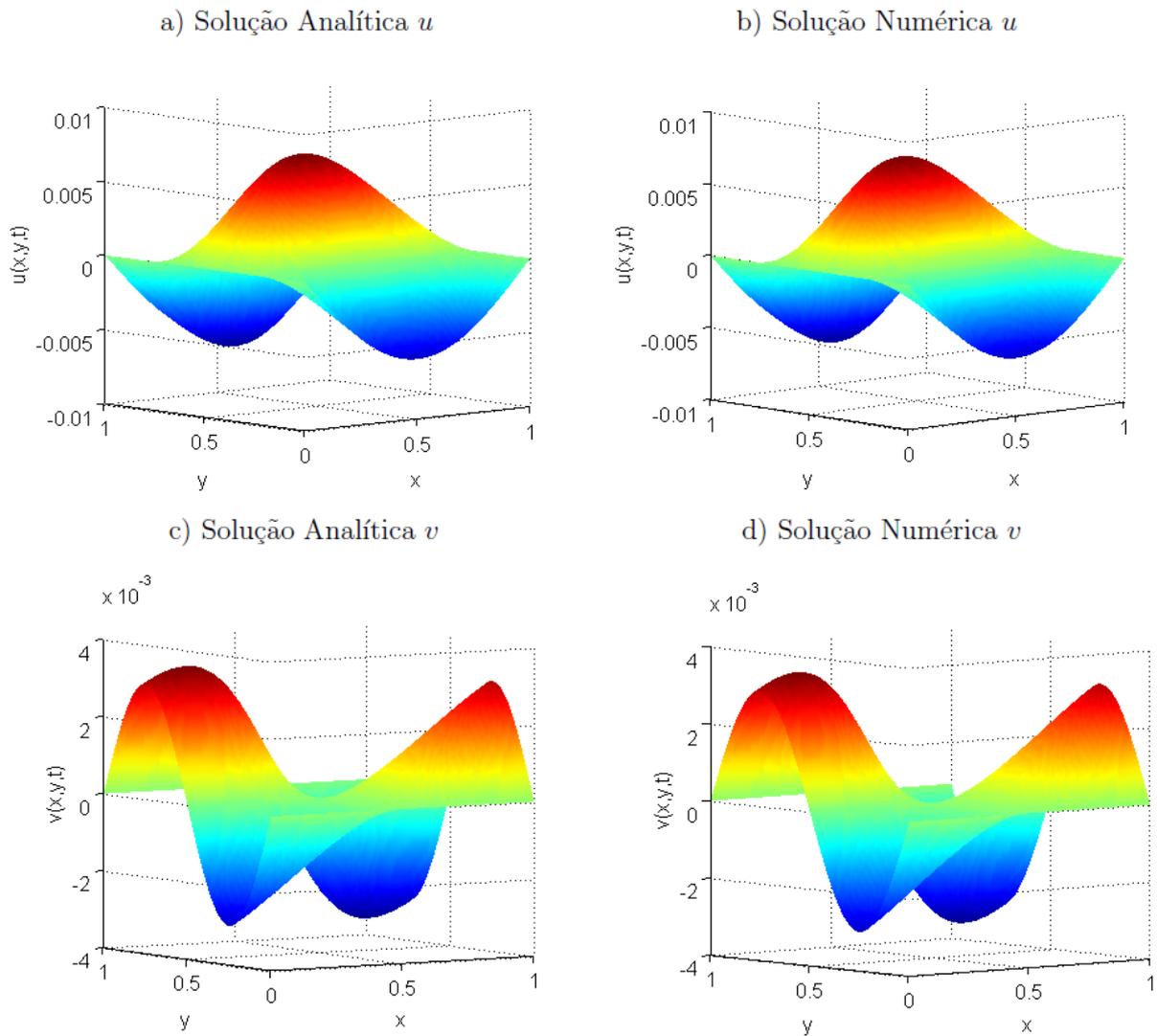


Figura 5.6: Superfícies das soluções para o sistema acoplado (2.4) com $M_x = M_y = 80$, $M_t = 200$, $\nu = 0.001$, e $t = 1$: (a) Solução Analítica de u ; (b) Solução Numérica de u ; (c) Solução Analítica de v ; (d) Solução Numérica de v .

A partir dos resultados apresentados na figura 5.6 pode-se concluir que o esquema implícito linearizado gera soluções numéricas similares as soluções analíticas, tais resultados podem ser confirmados na figura 5.7, onde ilustra comparações entre as soluções, na direção x com cortes para $y = 0.5$ e 0.9 , figura 5.7a-c e na direção y com cortes para $x = 0.5$ e 0.9 , figura 5.7b-d.

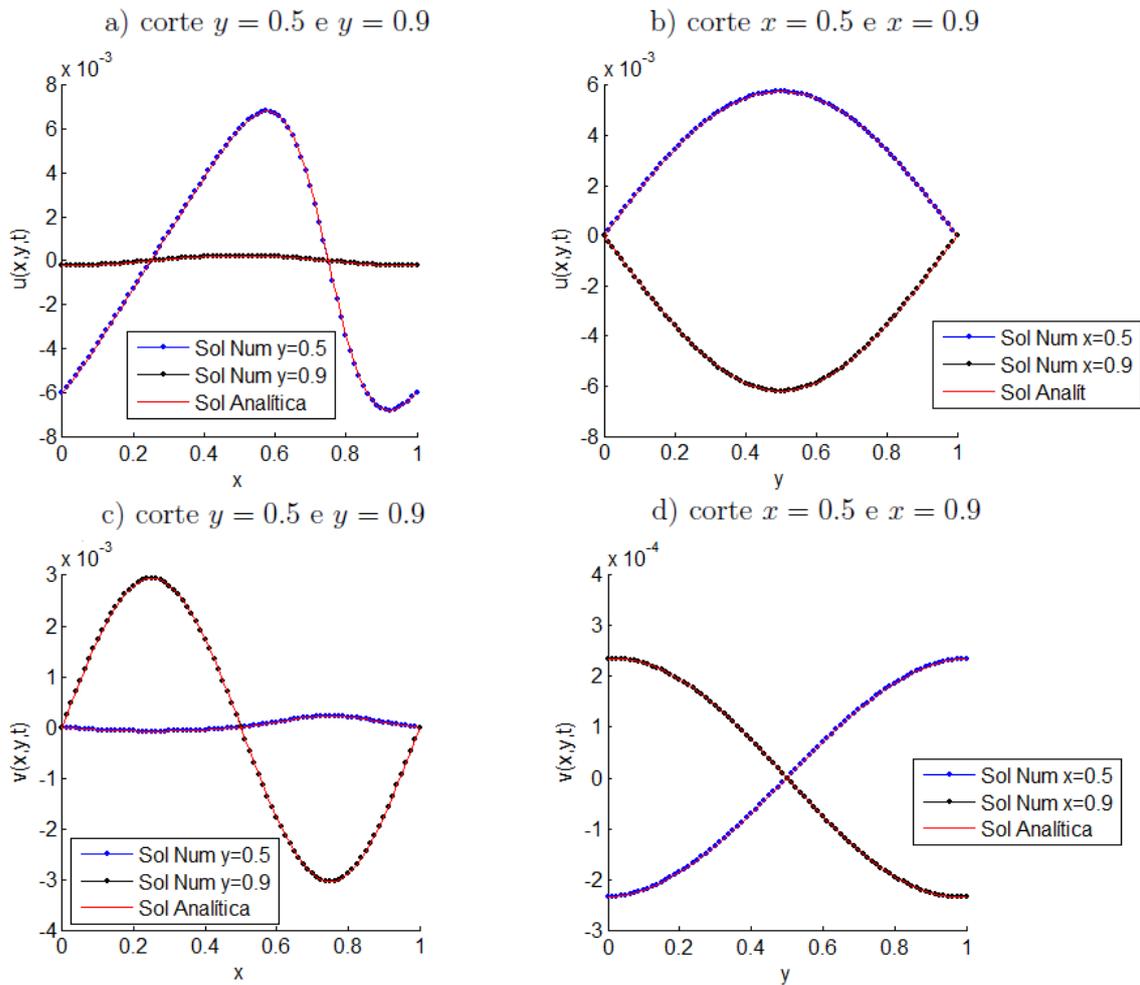


Figura 5.7: Soluções analítica e numérica de $u(x, y)$ para: (a) $y = 0.5$ e $y = 0.9$ e $t = 1$; (b) $x = 0.5$ e $x = 0.9$ e $t = 1$. Soluções analítica e numérica de $v(x, y)$ para: (c) $y = 0.5$ e $y = 0.9$ e $t = 1$; (d) $x = 0.5$ e $x = 0.9$ e $t = 1$.

Para o sistema em estudo, comparou-se as linhas de correntes dos resultados numérico e analítico, considerando os parâmetros $M_x = M_y = 80$, $M_t = 200$, $\nu = 0.001$ e $t = 1$, tais resultados encontram-se ilustrados na figura 5.8.

Pela comparação das figuras 5.8a e figura 5.8b percebe-se que as linhas de correntes são coerentes, no qual, pode-se esperar que o esquema implícito linearizado, resultante da discretização do sistema de equações de Burgers 2D, conseguiu reproduzir a solução analítica.

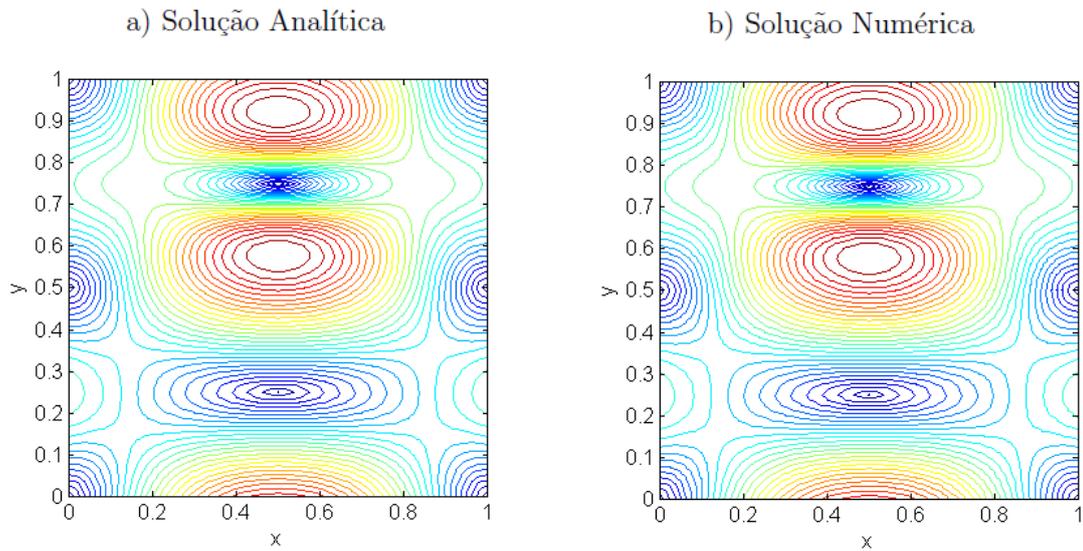


Figura 5.8: Linhas de correntes das soluções para $M_x = M_y = 80$ e $M_t = 200$: (a) Solução analítica; (b) Solução numérica.

Agora, na figura 5.9, pode-se analisar os valores dos erros nas normas L_1 e L_2 ocorridos para as soluções de u e de v , considerando malhas com $M_x = M_y = 20, 40, 80$ e 160 , $M_t = 200$, $\nu = 0.001$, $\theta = 0.5$ e $t = 1$,

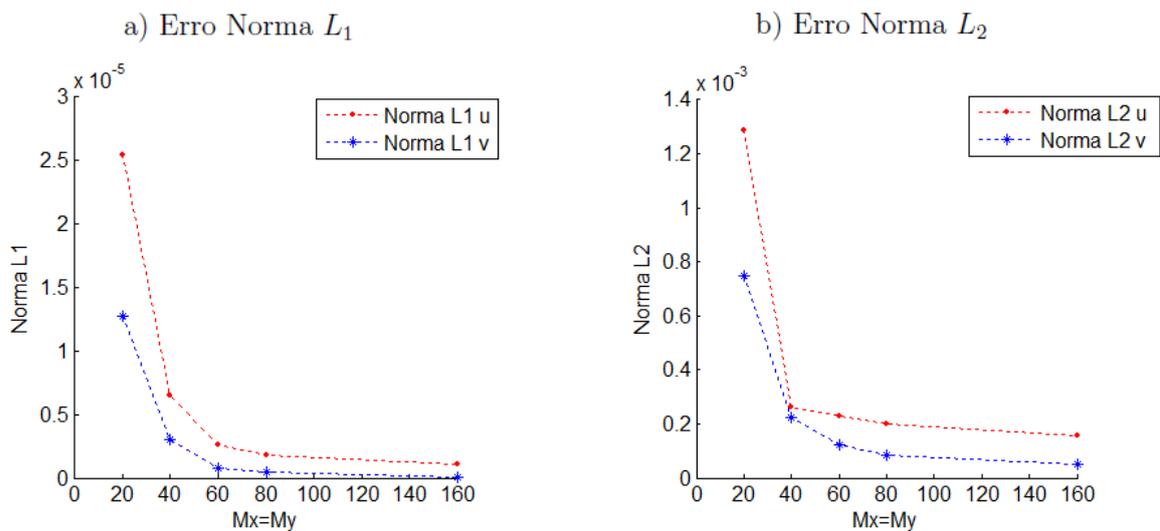


Figura 5.9: Gráficos dos erros para diferentes malhas: (a) erros na norma L_1 para u e v ; (b) erros na norma L_2 para u e v .

Como esperado, o erro diminuí conforme o refinamento da malha, resultando erros relativo da ordem 10^{-5} na norma L_1 e 10^{-3} na norma L_2 para u e v como observado na figura 5.9 e na Tabela 5.6.

Tabela 5.6: Normas do erro L_1 e L_2 para u e v para diferentes malhas e $\theta = 1.0$

$M_x = M_y$	Norma do erro $\ E\ _1$		Norma do erro $\ E\ _2$	
	$u(x, y)$	$v(x, y)$	$u(x, y)$	$v(x, y)$
20	2.5478e-005	1.2751e-005	0.00128630	0.00074684
40	6.5035e-006	2.9745e-006	0.00026134	0.00022428
80	1.7961e-006	4.2988e-007	0.00019967	8.2158e-005
160	1.1222e-006	8.3992e-008	0.00015774	5.2127e-005

5.1.3 Teste 3: Sistema de Equações de Navier-Stokes 2D

Nesta subseção, investiga-se as soluções numéricas para o sistema de equações de Navier-Stokes, a fim de compará-las com a solução analítica obtida na literatura [32].

Considere a equação de Navier-Stokes, definida em (2.7), em que a solução analítica é dada por [32],

$$u(x, y, t) = -\cos(\pi x) \operatorname{sen}(\pi y) e^{-2t} \quad (5.7)$$

$$v(x, y, t) = \operatorname{sen}(\pi x) \cos(\pi y) e^{-2t} \quad (5.8)$$

As condições iniciais e de contornos são obtidas a partir da solução analítica. O termo de pressão e os termos fontes são dados por,

$$p(x, y, t) = -\frac{1}{4} [\cos(2\pi x) + \cos(2\pi y)] e^{-4t} \quad (5.9)$$

$$f_1(x, y, t) = 2(1 - \nu\pi^2) \cos(\pi x) \operatorname{sen}(\pi y) e^{-2t} \quad (5.10)$$

$$f_2(x, y, t) = 2(-1 + \nu\pi^2) \operatorname{sen}(\pi x) \cos(\pi y) e^{-2t} \quad (5.11)$$

Para uma análise dos resultados do esquema implícito linearizado das equações de Navier-Stokes, apresentadas em (4.54) e (4.55) considerou-se o domínio em $0 \leq x, y \leq 1$, adotando $\delta_x = \delta_y = 0.0125$, equivalente à $M_x = M_y = 80$, $\nu = 0.0002$, $\delta_t = 0.0001$ ou $M_t = 10000$, um tempo final de simulação $t = 1$, e uma tolerância de 10^{-3} para resolver o sistema iterativo de Gauss Seidel.

Nas Tabelas 5.7 e 5.8 apresentam os resultados das soluções numéricas e analítica da equação (2.7), para $t = 1$, considerando diferentes valores para θ , para alguns valores de x e $y = 0.5$.

Tabela 5.7: Soluções numérica e analítica de $u(x, y, t)$, para $t = 1$.

x	Sol. Numérica de u					Sol. Analítica de u
	$\theta = 0.1$	$\theta = 0.3$	$\theta = 0.5$	$\theta = 0.8$	$\theta = 1.0$	
0.15	-0.12063	-0.12064	-0.12066	-0.12068	-0.12070	-0.12049
0.30	-0.07957	-0.07958	-0.07959	-0.07961	-0.07962	-0.07948
0.45	-0.02117	-0.02118	-0.02118	-0.02118	-0.02118	-0.02115
0.60	0.04183	0.04183	0.04184	0.04185	0.04185	0.04178
0.75	0.09573	0.09574	0.09575	0.09577	0.09578	0.09562
0.90	0.12875	0.12877	0.12878	0.12881	0.12882	0.12861

Tabela 5.8: Soluções numérica e analítica de $v(x, y, t)$, para $t = 1$.

x	Sol. Numérica de v					Sol. Analítica de v
	$\theta = 0.1$	$\theta = 0.3$	$\theta = 0.5$	$\theta = 0.8$	$\theta = 1.0$	
0.15	0.002285	0.0022819	0.0022747	0.002264	0.002259	0.0024122
0.30	0.004113	0.0041041	0.0040921	0.004074	0.004062	0.0042985
0.45	0.005034	0.0050167	0.0050019	0.004979	0.004965	0.0052478
0.60	0.004844	0.0048297	0.0048154	0.004794	0.004779	0.0050532
0.75	0.003593	0.0035817	0.0035701	0.003552	0.003540	0.0037570
0.90	0.001540	0.0015330	0.0015252	0.001512	0.001503	0.0016419

Observa-se nas Tabelas 5.7 e 5.8 que todas as soluções numéricas se aproximaram da solução analítica, independente do valor de θ . Assim tomando $\theta = 0.8$, $Mx = My = 80$, $M_t = 10000$ e $\nu = 0.0002$ encontra-se ilustrados na figura 5.10 as soluções numérica e analítica da equação (2.7).

Pelos resultados apresentados na figura 5.10 pode-se concluir que o método utilizado neste trabalho, onde aplicou-se linearização nos termos convectivos, gerou soluções numéricas similares as soluções analíticas, tais resultados podem ser confirmado na figura 5.11 em que ilustra comparações entre as soluções, na direção x com cortes para $y = 0.5$ e 0.9 , figura 5.11a-c e na direção y com cortes para $x = 0.5$ e 0.9 , figura 5.11b-d.

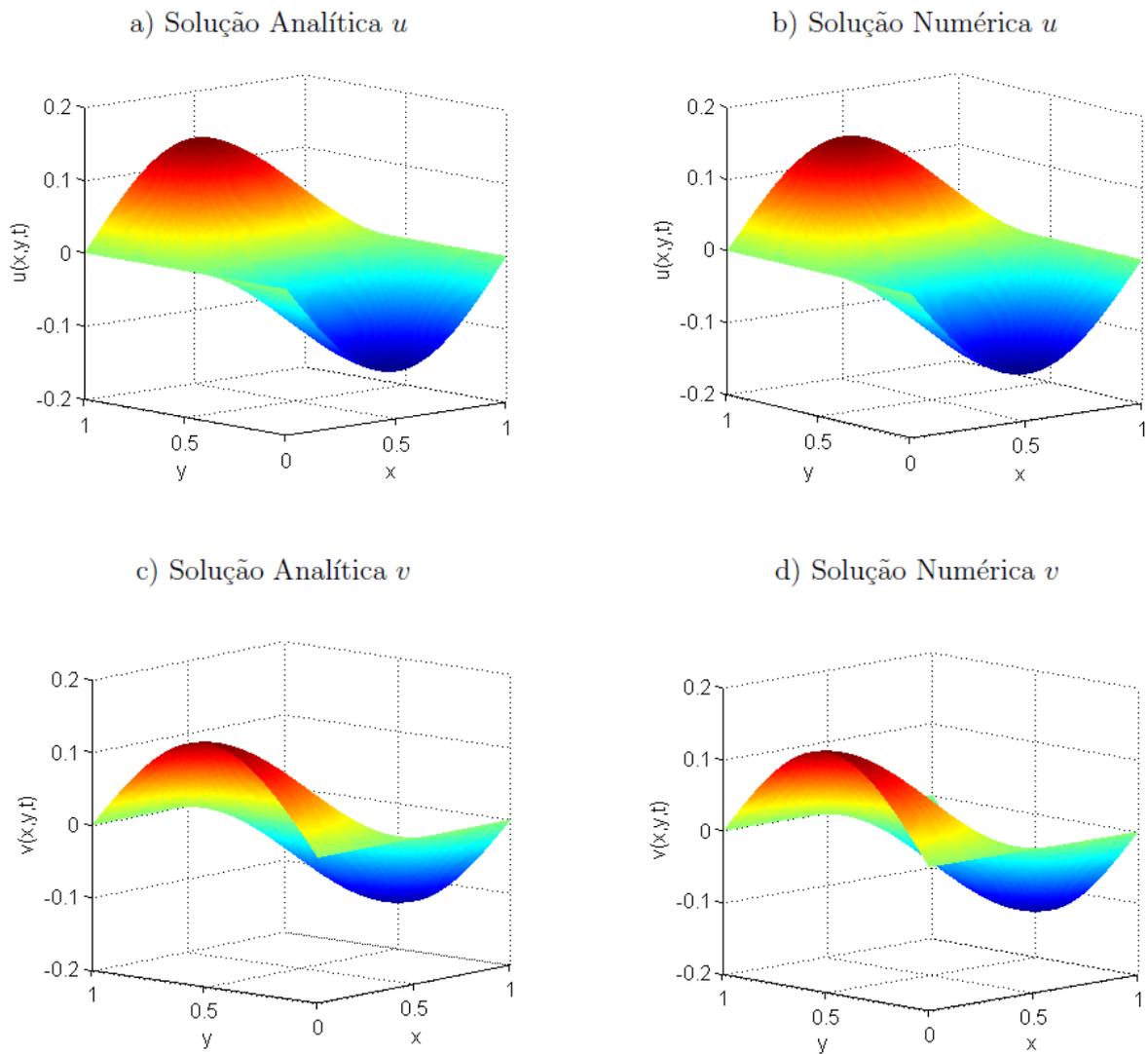


Figura 5.10: Superfície das soluções para equação (2.7) com $M_x = M_y = 80$, $M_t = 10000$, $\nu = 0.0002$ e $t = 1$: (a) Solução Analítica de u ; (b) Solução Numérica de u ; (c) Solução Analítica de v ; (d) Solução Numérica de v .

A fim de analisar os valores dos erros nas normas L_1 e L_2 , discretizou-se o domínio em $M_x = M_y = 20, 40, 80$ e 160 elementos com $M_t = 10000$, $\theta = 0.8$ e $t = 1$.

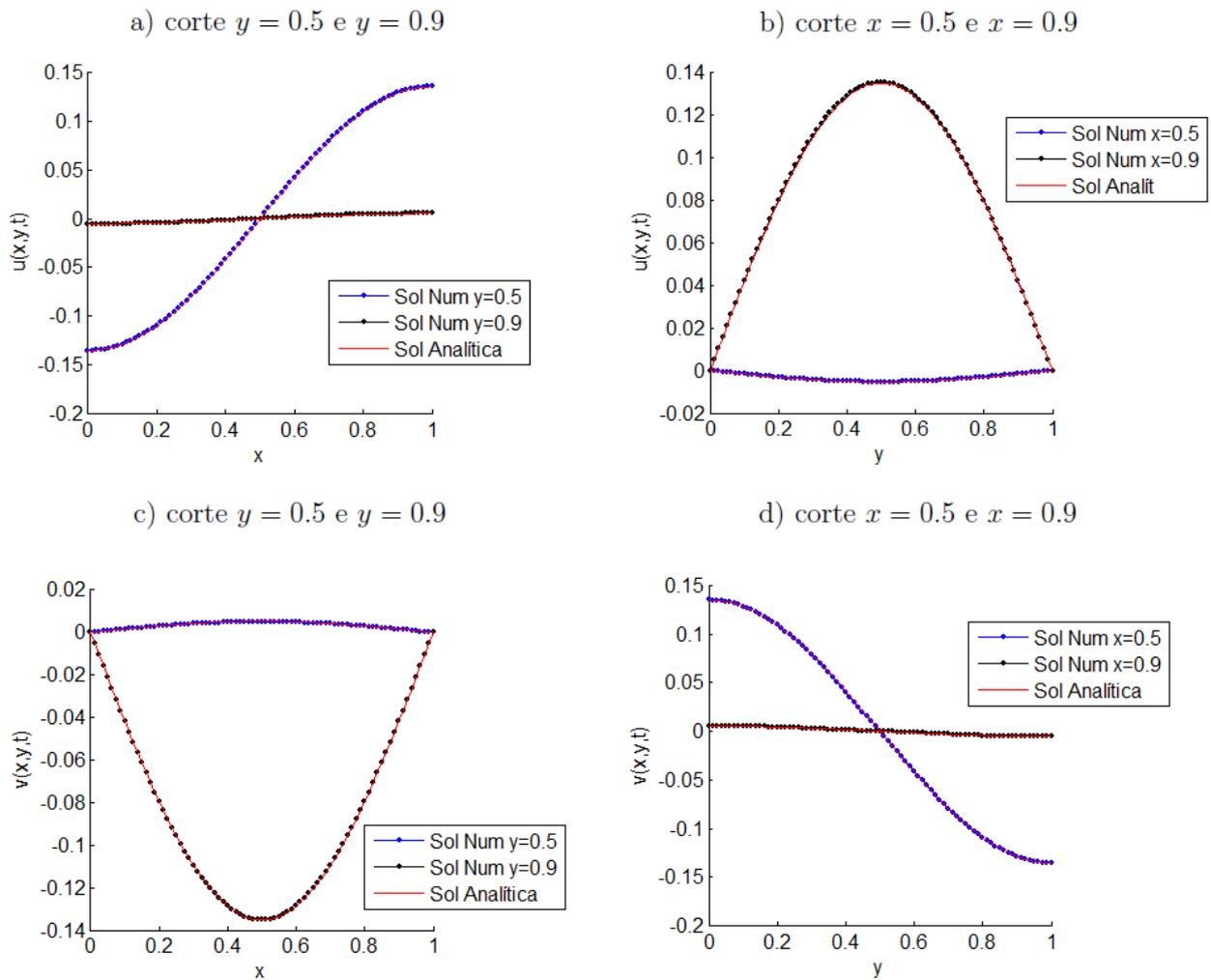


Figura 5.11: Soluções analítica e numérica de $u(x, y)$ para: (a) $y = 0.5$ e $y = 0.9$ e $t = 1$; (b) $x = 0.5$ e $x = 0.9$ e $t = 1$. Soluções analítica e numérica de $v(x, y)$ para: (c) $y = 0.5$ e $y = 0.9$ e $t = 1$; (d) $x = 0.5$ e $x = 0.9$ e $t = 1$.

Conforme esperado verifica-se diminuição do erro quando aumenta-se o número de elementos na malha, tal resultado pode ser confirmado na figura 5.12 e na Tabela 5.9.

Tabela 5.9: Normas do erro L_1 e L_2 para u e v para diferentes malhas.

$M_x = M_y$	Norma do erro $\ E\ _1$		Norma do erro $\ E\ _2$	
	$u(x, y)$	$v(x, y)$	$u(x, y)$	$v(x, y)$
20	0.00715580	0.00442290	0.1359600	0.084034
40	0.00075401	0.00046589	0.4002960	0.018170
80	6.4440e-005	3.9300e-005	0.0050909	0.003105
160	5.0190e-006	3.4500e-006	0.0007980	0.000548

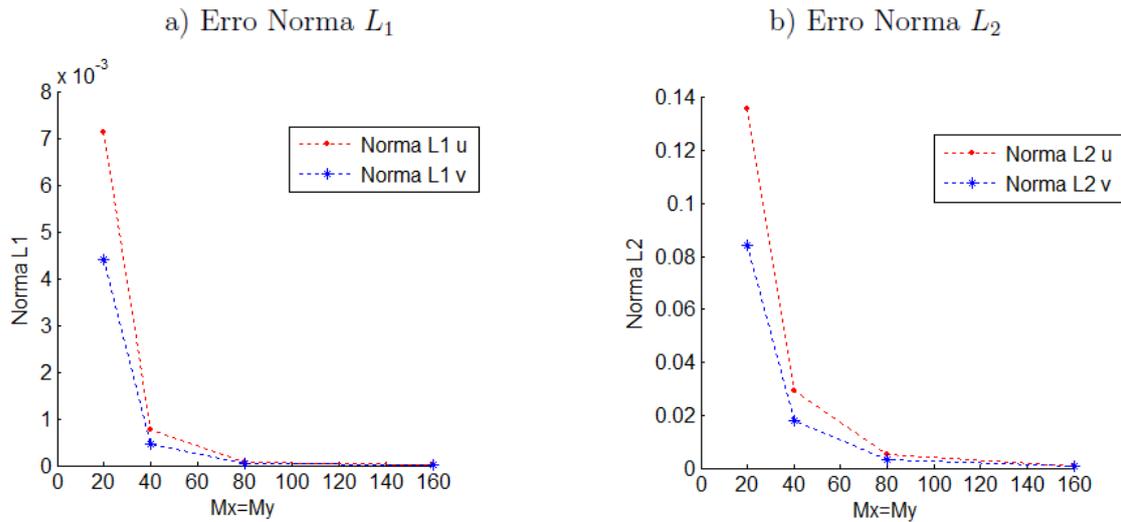


Figura 5.12: Gráficos dos erros: (a) erros na norma L_1 ao refinar a malha; (b) erros na norma L_2 ao refinar a malha.

Também comparou-se as linhas de correntes dos resultados numérico e analítico, considerando $M_x = M_y = 80$, figura 5.13.

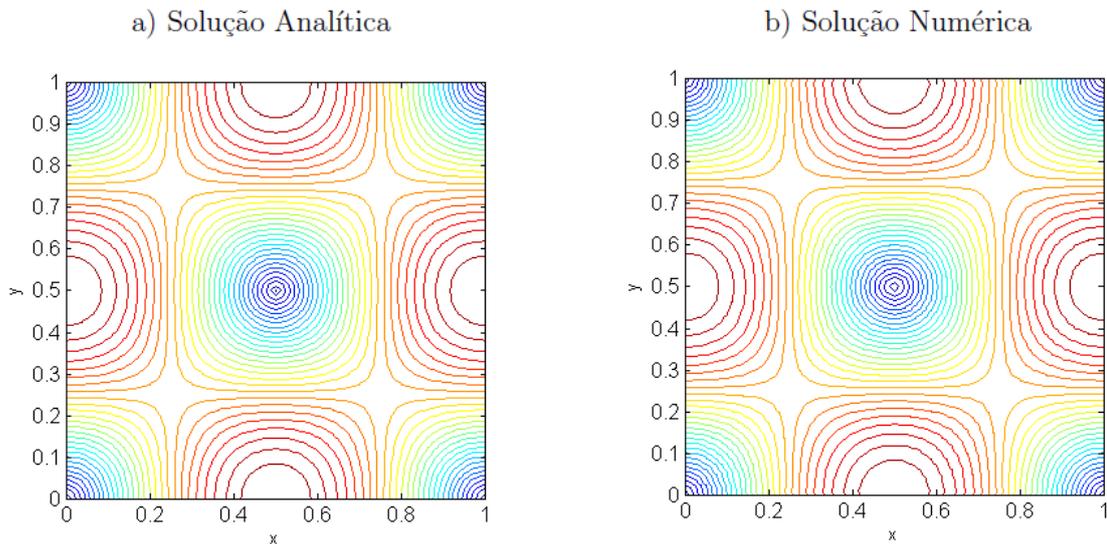


Figura 5.13: Linhas de correntes para $M_x = M_y = 80$: (a) Solução analítica; (b) Solução numérica.

Pela comparação das figuras 5.13a-b nota-se que as linhas de correntes são coerentes, de modo que o esquema implícito linearizado consiga reproduzir a solução analítica das equações de Navier-Stokes. Ainda analisou-se os erros das linhas de correntes nas normas L_1 e L_2 , considerando malhas com $M_x = M_y = 20, 40, 80$ e 160 , Tabela 5.10.

Tabela 5.10: Erro de aproximação

$M_x = M_y$	$\ E\ _1$	$\ E\ _2$
20	0.0058053	0.110300
40	0.0006103	0.023803
80	5.187e-005	0.004098
160	4.234e-006	0.000673

Verificou-se a diminuição do erro quando aumenta-se o número de partições, gerando erro de ordem 10^{-5} na norma L_1 e de ordem 10^{-4} na norma L_2 , resultado visto na figura 5.14 e Tabela 5.10.

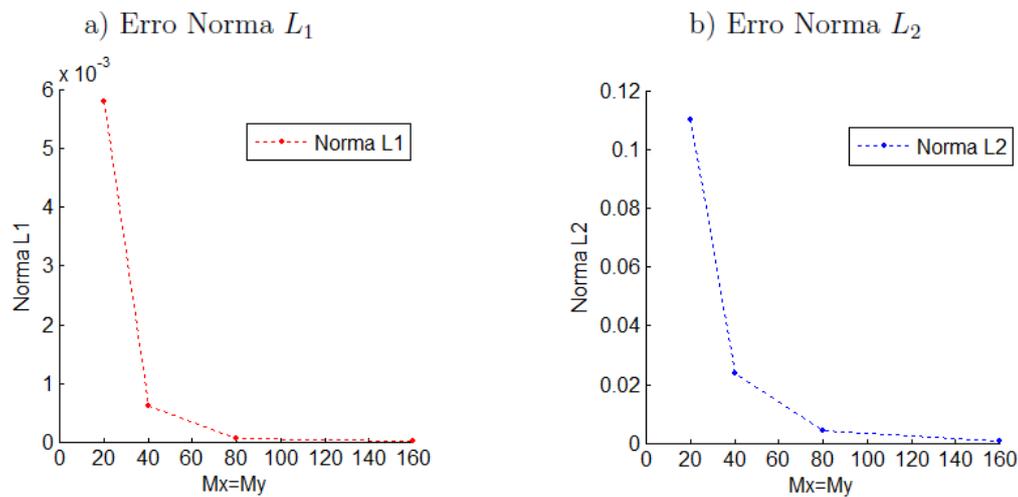


Figura 5.14: Gráficos dos erros das linhas de correntes: (a) erro na Norma L_1 ; (b) erro na Norma L_2 .

Dos resultados apresentados, verificou-se que o esquema implícito linearizado resultante das discretizações das equações em regime transiente reproduziu soluções numéricas similares às soluções analíticas. Para avaliar o procedimento de linearização com a média, será considerado a equação de convecção-difusão 2D e o sistema acoplado de Burgers 2D em regime permanente.

5.2 RESULTADOS NUMÉRICOS DAS EQUAÇÕES EM REGIME PERMANENTE

Esta seção é dedicada ao estudo da equação de convecção-difusão 2D e do sistema acoplado de Burgers 2D em regime permanente, comparando qualitativamente os resultados com soluções analíticas conhecidas na literatura.

5.2.1 Teste 4: Equação de Convecção-Difusão 2D

Para analisar os resultados do esquema implícito, descrito no Capítulo 4, apresentado em (4.68), será considerado a equação de convecção-difusão 2D, definida em (2.11), condições de fronteiras,

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0; \\ u(1, y) &= y; \\ u(x, 0) &= 0; \\ u(x, 1) &= x. \end{aligned} \tag{5.12}$$

cuja solução analítica é dada por,

$$u(x, y) = x^2 y^2, \tag{5.13}$$

sendo $K(x) = x^2$, $v(y) = y$ e $f(x, y) = 2x^3(y^4 - x)$ [33].

Considerando o domínio $0 \leq x, y \leq 1$, com $\delta_x = \delta_y = 0.025$, ou equivalente, $M_x = M_y = 40$, e uma tolerância $tol = 10^{-8}$ para resolver o sistema iterativo de Gauss Seidel, compara-se os resultados do esquema de linearização com média para a equação de convecção-difusão 2D, apresentado em (4.68), com a solução analítica. Na Tabela 5.11 apresenta as soluções numéricas e analítica, para alguns valores de x e $y = 0.5$, e diferentes valores para θ , sendo $\theta = 0.1, 0.3, 0.5, 0.8$ e 1.0 ,

Tabela 5.11: Soluções numérica e analítica de $u(x, y)$, para alguns valores de x e $y = 0.5$

x	Sol. Numérica					Sol. Analítica
	$\theta = 0.1$	$\theta = 0.3$	$\theta = 0.5$	$\theta = 0.8$	$\theta = 1.0$	
0.15	6.8974e-003	6.5151e-003	6.1526e-003	5.6430e-003	5.3245e-003	5.0766e-003
0.30	2.3373e-002	2.2783e-002	2.2208e-002	2.1372e-002	2.0830e-002	2.0306e-002
0.45	4.9373e-002	4.8692e-002	4.8023e-002	4.7038e-002	4.6394e-002	4.5689e-002
0.60	8.4878e-002	8.4221e-002	8.3572e-002	8.2611e-002	8.1980e-002	8.1225e-002
0.75	1.2987e-001	1.2935e-001	1.2883e-001	1.2807e-001	1.2756e-001	1.2691e-001
0.90	1.8424e-001	1.8398e-001	1.8373e-001	1.8335e-001	1.8310e-001	1.8276e-001

Verifica-se que os valores mais próximos da solução analítica $u(x, y)$, Tabela 5.11, são obtidos para $\theta = 1.0$, tais resultados podem ser confirmados utilizando as normas L_1 e L_2 , como apresentado na Tabela 5.12.

Tabela 5.12: Erro de aproximação

θ	$\ E\ _1$	$\ E\ _2$
0.1	2.5824e-004	2.8576e-004
0.3	2.0711e-004	2.2918e-004
0.5	1.5665e-004	1.7335e-004
0.8	8.2182e-005	9.0941e-005
1.0	3.3333e-005	3.6886e-005

Concordando com os resultados apresentados nas Tabelas 5.11 e 5.12, ilustra-se na figura 5.15 as soluções analítica e numérica, para $M_x = M_y = 40$ e $\theta = 1.0$, assim como comparações entre as soluções em $y = 0.5$ e $y = 0.9$.

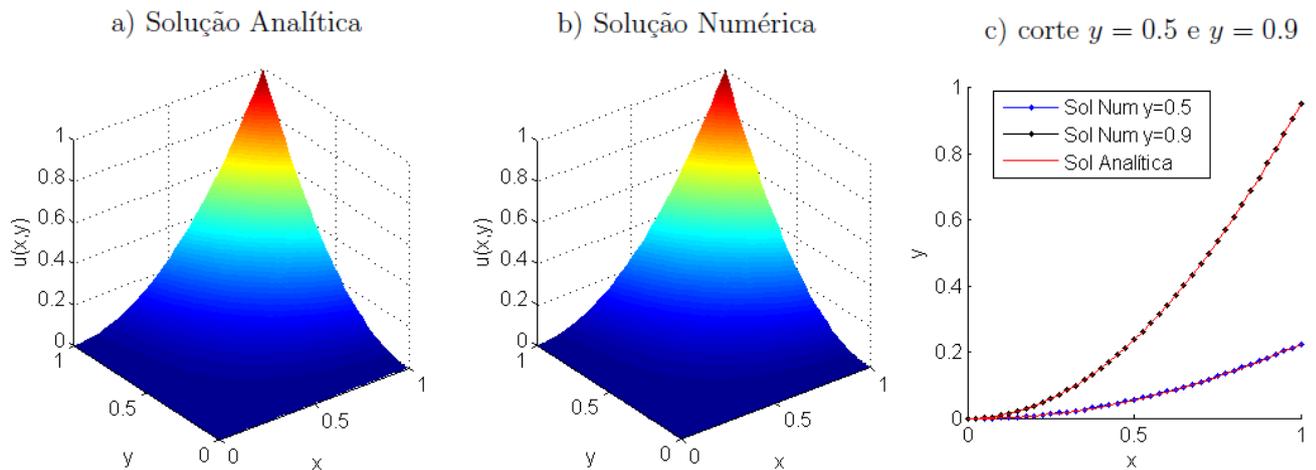


Figura 5.15: Solução da equação de convecção-difusão com $M_x = M_y = 40$ e $\theta = 1.0$: (a) Solução Analítica; (b) Solução Numérica; (c) corte em $y = 0.5$ e $y = 0.9$.

Para uma análise detalhada sobre o método utilizado, avalia-se na figura 5.16 as norma L_1 e L_2 , para $M_x = M_y = 10, 20, 40, 80$ e 160 e $\theta = 1.0$.

Pode-se verificar que as normas do erro torna-se menor com o refinamento da malha, resultando erro de ordem 10^{-4} a 10^{-9} para L_1 e de ordem 10^{-3} a 10^{-7} para L_2 , resultado confirmado na figura 5.16a-b e na Tabela 5.13

Tabela 5.13: Erro de aproximação nas normas L_1 e L_2 para diferentes malhas

$M_x = M_y$	$\ E\ _1$	$\ E\ _2$
10	0.00021352	0.0019217
20	1.389e-005	0.0002640
40	9.457e-007	3.688e-005
80	6.607e-008	5.219e-006
160	4.727e-009	7.517e-007

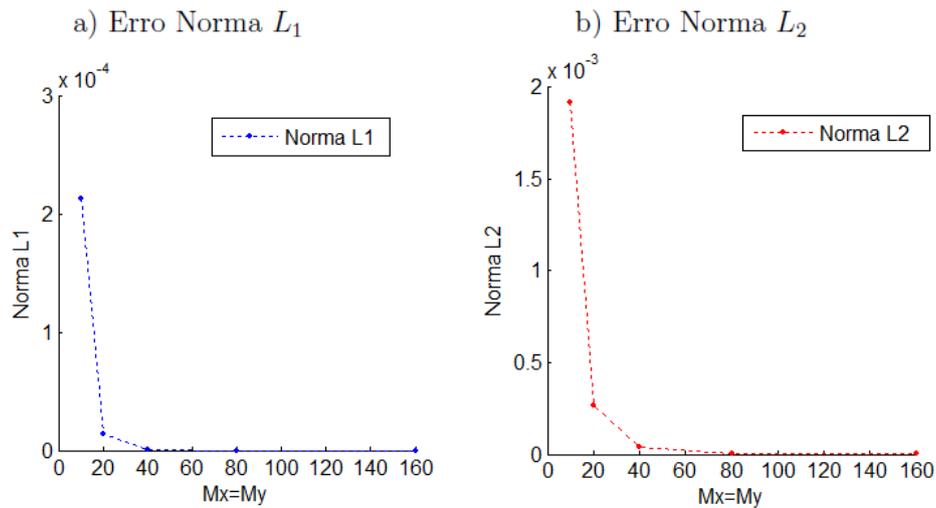


Figura 5.16: (a) erro na norma L_1 ao refinar a malha; (b) erro na norma L_2 ao refinar a malha.

5.2.2 Teste 5: Sistema Acoplado de Equações de Burgers 2D em Regime Permanente

Seja o sistema de equações de Burgers 2D no regime permanente definido em (2.13), com as condições de fronteiras

$$\begin{aligned}
 u(0, y) &= 0, \\
 u(1, y) &= 0, \\
 u(x, 0) &= 0, \\
 u(x, 1) &= 16(x^4 - 2x^3 + x^2), \\
 v(0, y) &= 0, \\
 v(1, y) &= 0, \\
 v(x, 0) &= 0, \\
 v(x, 1) &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

O sistema descrito em (2.13) com as condições (5.14) refere-se ao problema da cavidade quadrada, em que a tampa movimentada-se na direção x com velocidade conhecida e um termo fonte $B(x, y, Re)$, com Reynolds unitário, atuando sobre o escoamento [34].

Os termos p e B são definidos por

$$B(x, y, Re) = -\frac{8}{Re} [24F(x) + 2f''(x)g''(y) + f'''(x)g(y)] - 64[F_2(x)G_1(y) - g(y)g'(y)F_1(x)], \tag{5.15}$$

e

$$p(x, y, Re) = \frac{8}{Re} [F(x)g'''(y) + f'(x)g'(y)] + 64F_2(x)[g(y)g''(y) - (g'(y))^2] \tag{5.16}$$

onde,

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int f(x)dx; \\
 F_1(x) &= f(x)f''(x) - [f'(x)]^2; \\
 F_2(x) &= \int f(x)f'(x)dx; \\
 G_1(y) &= g(y)g'''(y) - g'(y)g''(y).
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

em que $f(x)$ e $g(y)$ são funções diferenciáveis nas variáveis x e y respectivamente [34, 35, 36]. Em particular para este problema as funções $f(x)$ e $g(y)$ são dadas por $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$ e $g(y) = y^4 - y^2$.

As soluções analíticas $u(x, y)$ e $v(x, y)$ do sistema (2.13) são dadas por

$$u(x, y) = 8(x^4 - 2x^3 + x^2)(4y^3 - 2y), \tag{5.18}$$

$$v(x, y) = -8(4x^3 - 6x^2 + 2x)(y^4 - y^2). \tag{5.19}$$

Para uma análise dos resultados das soluções discretizadas, apresentadas em (4.94) e (4.95), considerou o domínio em $0 \leq x, y \leq 1$, com $\delta_x = \delta_y = 0.025$, equivalente à $M_x = M_y = 40$, $\nu = 1$ e condições de fronteiras dadas em (5.14), e uma tolerância de $tol = 10^{-8}$ para a convergência de Gauss-Seidel.

Nas Tabelas 5.14 e 5.15 apresenta as soluções numéricas e analítica do sistema dado em (2.13), para alguns valores de x e $y = 0.5$, com $\theta = 0.1, 0.3, 0.5, 0.8$ e 1.0 .

Tabela 5.14: Soluções numérica e analítica de $u(x, y)$, para alguns valores de x e $y = 0.5$

x	Sol. Numérica de u					Sol. Analítica de u
	$\theta = 0.1$	$\theta = 0.3$	$\theta = 0.5$	$\theta = 0.8$	$\theta = 1.0$	
0.15	-6.7891e-002	-6.7871e-002	-6.7852e-002	-6.7823e-002	-6.7804e-002	-6.7797e-002
0.30	-1.8411e-001	-1.8403e-001	-1.8395e-001	-1.8383e-001	-1.8375e-001	-1.8392e-001
0.45	-2.5578e-001	-2.5572e-001	-2.5567e-001	-2.5558e-001	-2.5553e-001	-2.5547e-001
0.60	-2.4062e-001	-2.4064e-001	-2.4066e-001	-2.4069e-001	-2.4071e-001	-2.4022e-001
0.75	-1.4700e-001	-1.4703e-001	-1.4705e-001	-1.4710e-001	-1.4712e-001	-1.4662e-001
0.90	-3.3975e-002	-3.3964e-002	-3.3954e-002	-3.3938e-002	-3.3927e-002	-3.3781e-002

Tabela 5.15: Soluções numérica e analítica de $v(x, y)$, para alguns valores de x e $y = 0.5$

x	Sol. Numérica de v					Sol. Analítica de v
	$\theta = 0.1$	$\theta = 0.3$	$\theta = 0.5$	$\theta = 0.8$	$\theta = 1.0$	
0.15	2.4965e-001	2.4964e-001	2.4963e-001	2.4961e-001	2.4960e-001	2.4950e-001
0.30	2.3449e-001	2.3465e-001	2.3481e-001	2.3506e-001	2.3522e-001	2.3482e-001
0.45	6.8959e-002	6.9078e-002	6.9198e-002	6.9378e-002	6.9499e-002	6.9188e-002
0.60	-1.3395e-001	-1.3401e-001	-1.3407e-001	-1.3417e-001	-1.3423e-001	-1.3418e-001
0.75	-2.6192e-001	-2.6198e-001	-2.6203e-001	-2.6212e-001	-2.6218e-001	-2.6208e-001
0.90	-2.0151e-001	-2.0143e-001	-2.0135e-001	-2.0124e-001	-2.0116e-001	-2.0128e-001

Verifica-se nas Tabelas 5.14 e 5.15 que os valores das soluções numéricas, tanto de $u(x, y)$ quanto de $v(x, y)$ encontram-se próximos dos valores das soluções analíticas, independente dos valores de θ . Ainda, utilizando as normas de erros L_1 e L_2 , pode-se confirmar tais resultados, como ilustrados na Tabela 5.16.

Tabela 5.16: Norma do erro L_1 e L_2 para diferentes valores de θ , $\delta_x = \delta_y = 0.025$.

θ	Norma do erro $\ E\ _1$		Norma do erro $\ E\ _2$	
	$u(x, y)$	$v(x, y)$	$u(x, y)$	$v(x, y)$
0.1	0.00018128	7.0751e-005	0.012122	2.4303e-005
0.3	0.00013302	4.9099e-005	0.008895	1.6865e-005
0.5	8.4622e-005	2.7452e-005	0.005658	9.4297e-006
0.8	1.1748e-005	5.0065e-006	0.000785	1.7198e-006
1.0	3.7016e-005	2.6638e-005	0.002475	9.1499e-006

A partir dos resultados da Tabela 5.16, verifica-se que a ordem do erro para a as normas avaliadas são satisfatórias. Assim, em concordância com os resultados apresentados nas Tabelas 5.14-5.16, ilustra-se na figura 5.17 as soluções analíticas e numéricas do sistema (2.13), para $\theta = 0.5$ com $M_x = M_y = 40$.

Da figura 5.17 pode-se concluir que o método implícito utilizado neste trabalho, onde aplicou-se linearização com média nos termos convectivos, gerou soluções numéricas similares as soluções analíticas, tais resultados podem ser confirmados na figura 5.18, onde ilustra-se comparações entre as soluções, na direção x com cortes para $y = 0.5$ e 0.9 , figura 5.18a-c e na direção y com cortes para $x = 0.5$ e 0.9 , figura 5.18b-d.

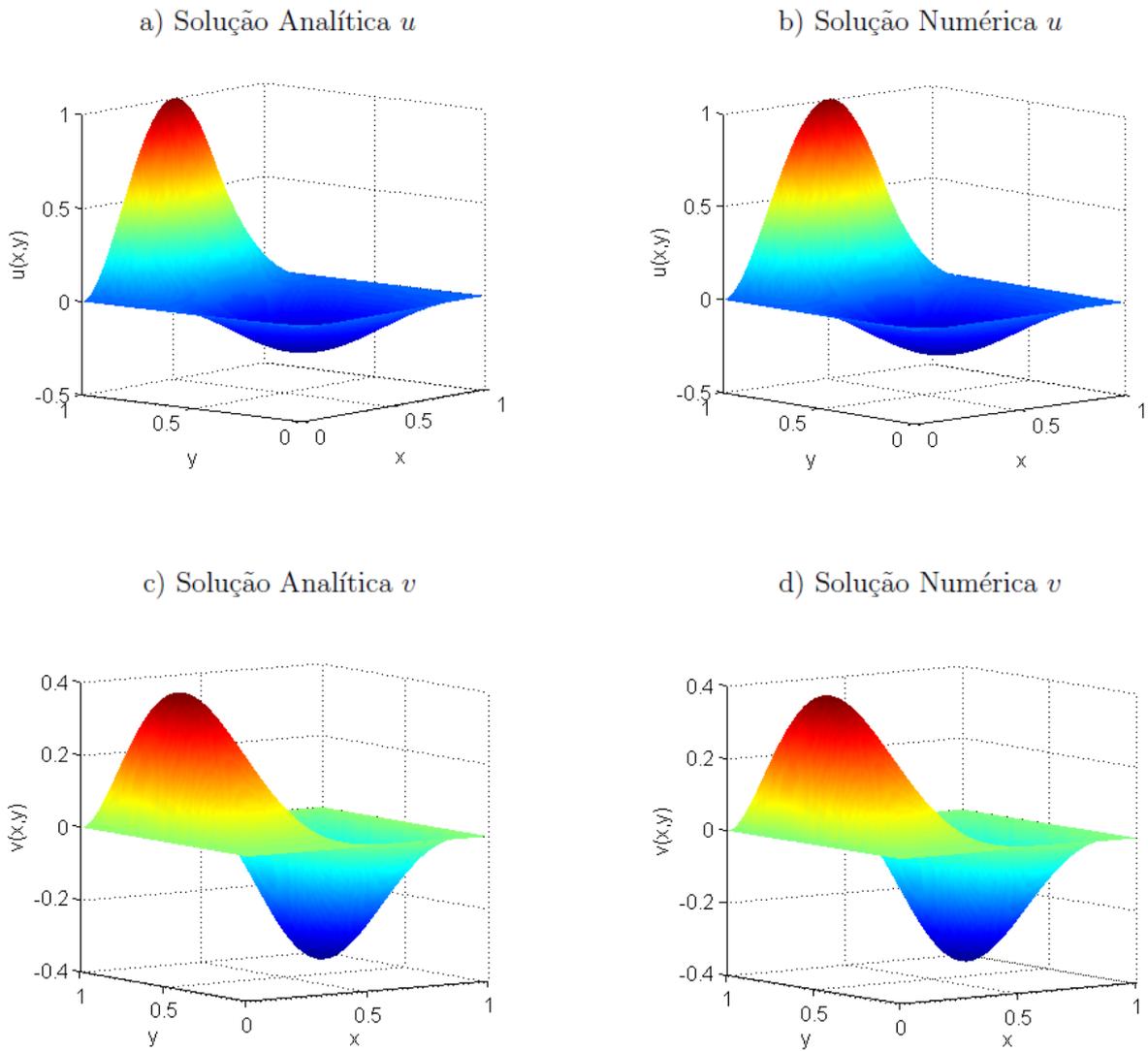


Figura 5.17: Superfícies das soluções para o sistema acoplado (2.13) com $M_x = M_y = 40$ e $\theta = 0.5$: (a) Solução Analítica de u ; (b) Solução Numérica de u ; (c) Solução Analítica de v ; (d) Solução Numérica de v .

Para uma análise mais detalhada sobre o método utilizado, avalia-se na figura 5.19 as norma L_1 e L_2 , para $M_x = M_y = 10, 20, 40, 80$ e 160 e $\theta = 0.5$.

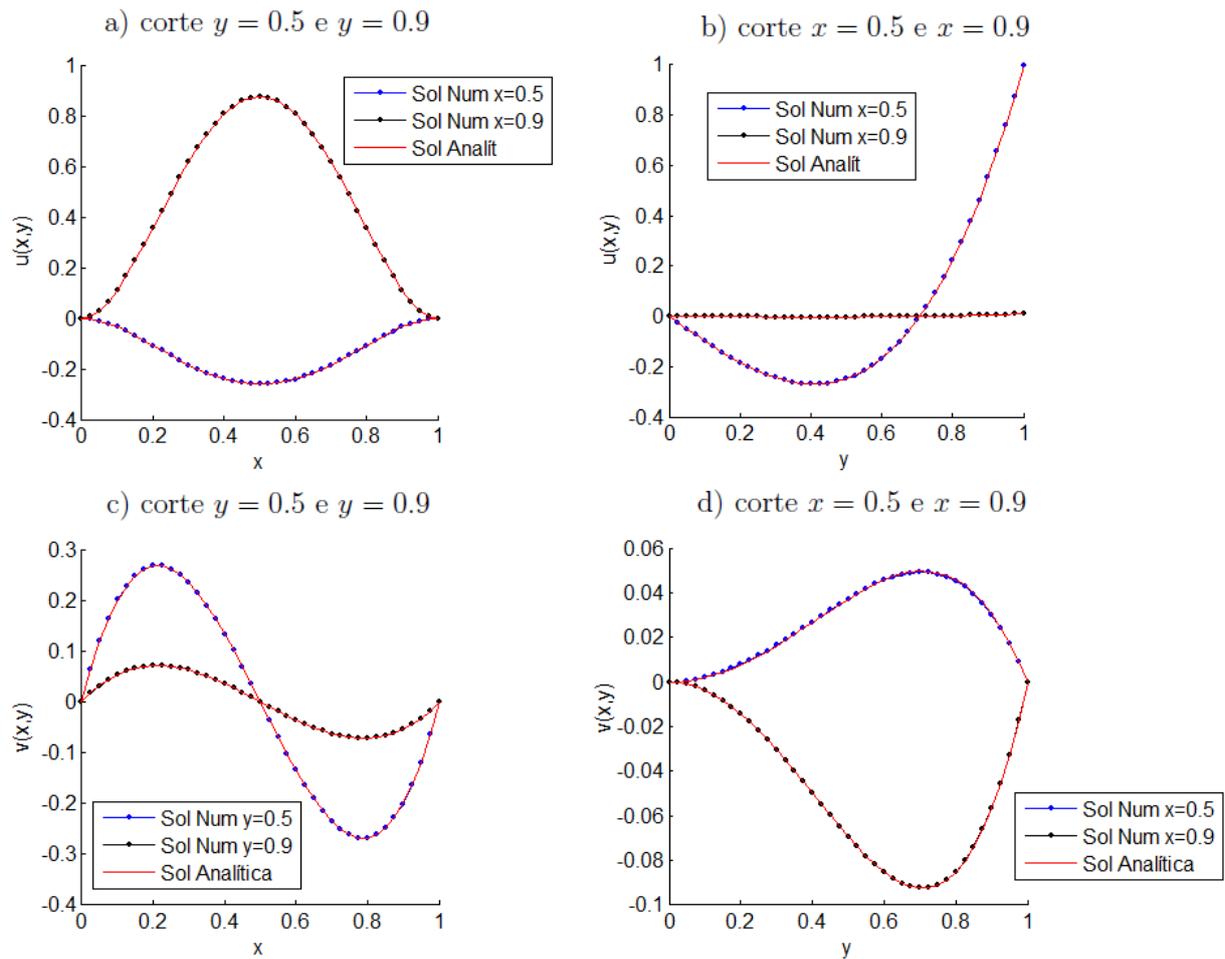


Figura 5.18: Soluções analítica e numérica de $u(x, y)$ para: (a) $y = 0.5$ e $y = 0.9$; (b) $x = 0.5$ e $x = 0.9$. Soluções analítica e numérica de $v(x, y)$ para: (c) $y = 0.5$ e $y = 0.9$; (d) $x = 0.5$ e $x = 0.9$.

Pode-se verificar nas figuras 5.19b-c e na Tabela 5.17, que as normas dos erros tornam-se menores com o refinamento da malha.

Tabela 5.17: Normas do erro L_1 e L_2 para u e v para diferentes malhas e com $\theta = 0.5$

$M_x = M_y$	Norma do erro $\ E\ _1$		Norma do erro $\ E\ _2$	
	$u(x, y)$	$v(x, y)$	$u(x, y)$	$v(x, y)$
10	0.00111760	0.00034084	0.01020	0.00035855
20	0.00031146	0.00010238	0.00862	6.4391e-005
40	8.4622e-005	2.7452e-005	0.00565	9.4297e-006
80	2.2398e-005	7.2498e-006	0.00328	1.3011e-006
160	5.7883e-006	1.8827e-006	0.00177	1.7333e-007

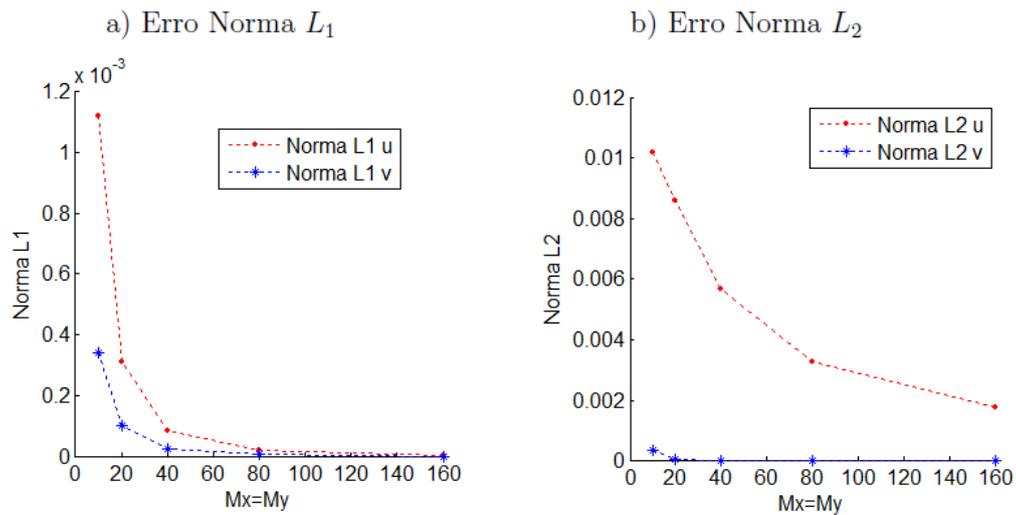


Figura 5.19: (a) erros de u e v na norma L_1 ao refinar a malha; (b) erros de u e v na norma L_2 ao refinar a malha.

Para o sistema em estudo, também comparou-se as linhas de correntes dos resultados numérico e analítico, tomando $M_x = M_y = 40$, tais resultado encontram-se na figura 5.20.

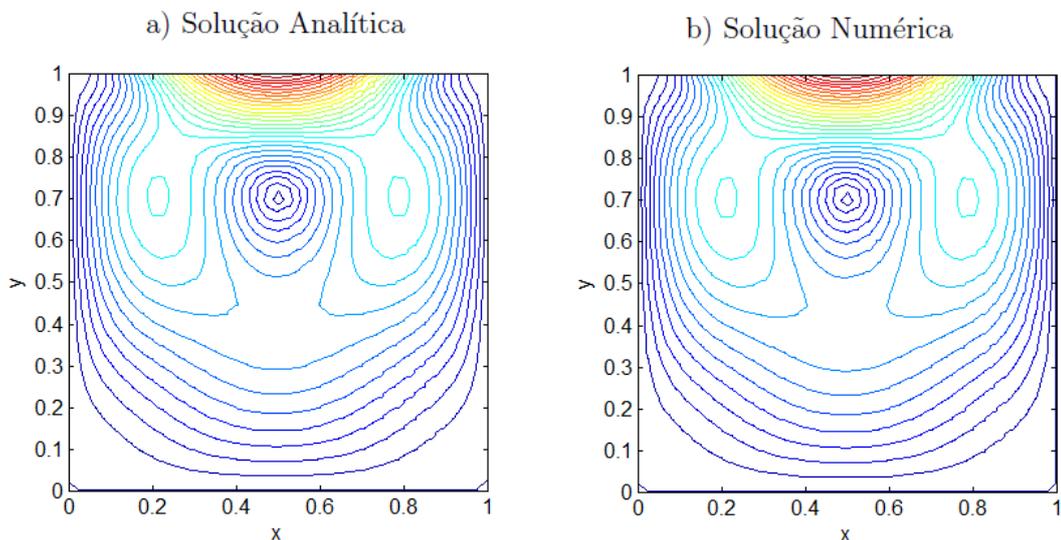


Figura 5.20: Linhas de correntes das soluções para $M_x = M_y = 40$: (a) Solução Analítica; (b) Solução Numérica.

Pela comparação das figuras 5.20a-b nota-se que as linhas de correntes são coerentes, no qual pode-se concluir que o esquema implícito linearizado com média, conseguiu reproduzir a solução analítica.

6 CONCLUSÃO

A proposta deste trabalho foi analisar o método de linearização aplicado nos termos convectivos em algumas EDP's bidimensionais muito estudadas pela comunidade científica especializada. A técnica de linearização foi primeiramente avaliada na solução das equações em regime transiente como a equação de Burgers 2D e nos sistemas acoplados de equações de Burgers 2D e de Navier-Stokes, com condições iniciais e de fronteiras específicas. Na sequência, aplicou-se a técnica nas equações em regime permanente, como a equação de convecção-difusão 2D e no sistema acoplado de equações de Burgers 2D.

Para a obtenção das soluções das equações estudadas, foi utilizado o método de diferenças finitas, onde usou diferença regressiva no termo temporal, para o caso transiente, diferença central nos termos difusivos e diferença central ponderada, método de relaxação padrão-*standard relaxation method*, nos termos convectivos. O esquema obtido, resultante das discretizações das equações em regime transiente, geraram sistemas semi-implícitos de equações não lineares. Aplicada a técnica numérica de linearização nos termos convectivos do sistema, o resultado foi um sistema implícito linearizado. Quanto ao esquema resultante das discretizações das equações em regime permanente, este resultou em um sistema implícito não linear. Similarmente, este esquema foi linearizado usando a expansão da série de Taylor, porém, foi observado que para alguns dos valores de θ , $0 \leq \theta \leq 1$, o método resultante era instável, assim para solucionar o problema de instabilidade, foi utilizada uma média nos termos de valores entre alguns dos estágios. Desta forma, constatou-se, em todos os testes realizados, que a discretização dos termos convectivos usando o método de relaxação padrão, não resultaram soluções com grandes alterações, ao variar os valores de θ , ou seja, que independente do valor de θ as soluções numéricas se aproximaram das soluções analíticas.

No capítulo 5, os primeiros testes analisados referem-se as equações em regime transiente, onde no teste 1, em que, aplica-se o método de linearização na equação de Burgers 2D, notou que a solução numérica apresentou pequenas oscilações, ao considerar uma malha com $M_x = M_y = 40$, para $\nu = 0.01$, porém, os resultados tornaram-se mais precisos com o refinamento da malha, diminuindo desta forma as oscilações. Ainda, foi possível realizar um acompanhamento rigoroso sobre o comportamento do esquema implícito linearizado, por meio da solução dada pelas linhas de contorno, devido ao fato da solução analítica ser conhecida, onde constatou-se, de forma mais evidente, que com o refinamento da malha os resultados tornaram-se mais precisos, diminuindo as oscilações na solução numérica. Para uma análise mais detalhada avaliou-se os erros nas normas L_1 e L_2 para diferentes tipos de malha, gerando erro de ordem 10^{-3} em ambas normas, para uma tolerância da 10^{-3} para resolver o sistema iterativo de Gauss-Seidel. Com isto, pode-se afirmar que o esquema implícito linearizado reproduziu solução numérica similar à solução analítica. Ainda, foi comparado qualitativamente os resultados dos erros na norma L_2 do esquema implícito linearizado com o esquema *upwind* de alta ordem explícito [28], verificou-se

que os erros apresentados são menores ao usar o esquema implícito linearizado, para valores baixos de coeficiente de viscosidade cinemática do fluido, ν .

No teste 2, o sistema acoplado de equações de Burgers 2D foi analisado quantitativamente, comparando os resultados numéricos e analíticos de $u(x, y, t)$ e $v(x, y, t)$, onde considerou $\nu = 0.001$. Verificou que o erro nas normas L_1 e L_2 foram da ordem de 10^{-5} e 10^{-3} , respectivamente. Constatou, ainda por meio das linhas de correntes que o esquema implícito linearizado conseguiu reproduzir as soluções analíticas de u e v , para valores baixos de coeficiente de viscosidade cinemática do fluido.

No teste 3, considerou o sistema de equações de Navier-Stokes, com termo de pressão e termos fontes conhecidos, avaliou o efeito da solução numérica para $\nu = 0.0002$, a fim de comparar os resultados com a solução analítica obtida em [32]. Foi constatado que o esquema implícito linearizado gerou soluções numéricas similares as soluções analíticas, com erros cada vez menores ao considerar malhas mais refinadas. Ainda, através de uma análise de erros relativos das linhas de correntes nas normas L_1 e L_2 , considerando malhas $M_x = M_y = 20, 40, 80$ e 160 , obteve-se erros da ordem 10^{-5} na norma L_1 e 10^{-4} na norma L_2 , o que garante a eficácia do método utilizado. Verificou-se também, que o resultado obtido neste teste reproduziu de maneira mais precisa, com menos oscilações, que os resultados apresentados em [32].

No teste 4, em que aplica-se o método de linearização com média nos termos convectivos da equação de convecção-difusão 2D em regime permanente, notou-se os valores das soluções numéricas ficaram mais próximos da solução analítica, para $\theta = 1.0$, porém para os demais valores de θ o erro nas normas L_1 e L_2 , ficam entre 10^{-4} e 10^{-3} , onde considerou com $M_x = M_y = 40$, concluindo que o esquema gerou solução numérica similar a solução analítica. Além disso, verificou-se que a norma do erro torna-se menor com o refinamento da malha.

Dentro deste contexto, no teste 5, avaliou-se o método de linearização com média para a solução do sistema de equações de Burgers 2D em regime permanente, considerando $\nu = 1$, pois para este valor foi possível avaliar os resultados, quantitativamente, quando comparados com a solução analítica de $u(x, y)$ e $v(x, y)$. Como nos demais testes avaliados, para o sistema, também foi confirmado que as normas dos erros tornaram menores com o refinamento da malha, gerando erro máximo de ordem 10^{-3} para as normas L_1 e L_2 . Também, as linhas de correntes obtidas numericamente são coerentes com as das soluções analítica.

Conclui-se, então, com os testes realizados, a eficiência do método de linearização dos termos convectivos das equações estudadas, para estimar as soluções numéricas, pois verificou-se que as soluções obtidas com a aplicação do mesmo são boas aproximações para as soluções analíticas e soluções encontrados na literatura. De modo o método de linearização torna-se uma importante ferramenta matemática para obtenção de soluções aproximadas de EDP's não lineares.

A pesquisa descrita neste trabalho pode ser incrementada de várias maneiras. Entre os temas que podem ser considerados para trabalhos futuros, elencamos os seguintes:

1. Aplicar o método de linearização descrito no trabalho para obtenção de soluções de equações

tridimensionais.

2. Simular os problemas em regiões não regulares, utilizando coordenadas generalizadas em sua discretização.

REFERÊNCIAS

- [1] KHAN, Majid. *A novel solution technique for two dimensional Burger's equation*. Alexandria Engineering Journal, v. 53, n. 2, p. 485-490, 2014.
- [2] EL-SAYED, A. M. A.; BEHIRY, S. H.; RASLAN, W. E. *Adomian's decomposition method for solving an intermediate fractional advection-dispersion equation*. Computers & Mathematics with Applications, v. 59, n. 5, p. 1759-1765, 2010.
- [3] ZHU, Hongqing; SHU, Huazhong; DING, Meiyu. *Numerical solutions of two-dimensional Burger's equations by discrete Adomian decomposition method*. Computers & Mathematics with Applications, v. 60, n. 3, p. 840-848, 2010.
- [4] KHATER, A. H.; TEMSAH, R. S.; HASSAN, M. M. *A Chebyshev spectral collocation method for solving Burgers'-type equations*. Journal of Computational and Applied Mathematics, v. 222, n. 2, p. 333-350, 2008.
- [5] COLE, Julian D. *On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics*. Quarterly of applied mathematics, v. 9, n. 3, p. 225-236, 1951.
- [6] DHAWAN, S., KAPOOR, S., KUMAR, S., RAWAT, S., *Contemporary review of techniques for the solution of nonlinear Burgers equation*. J. Comput. Science, 3(5), 405-419 (2012).
- [7] CENEDESE, Edlene. *Solução das Equações de Burgers e de Navier-Stokes Bidimensionais Utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada*. Tese de Doutorado. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". 2005
- [8] FORTUNA, A. O.; *Técnicas computacionais para dinâmicas dos fluidos: conceitos básicos e aplicações*. São Paulo. Ed. da USP, 2000.
- [9] GONÇALVES, Nelson Daniel Ferreira. *Métodos dos Volumes Finitos em Malhas Não-Estruturadas*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Matemática) - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2007.
- [10] SILVA JUNIOR, Amilton Ferreira. *Métodos dos volumes finitos para equações de convecção e difusão em uma dimensão espacial*, Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia) - Universidade Federal Fluminense, 2012.
- [11] SMITH, Gordon D. *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*. 3rd ed. Oxford Clarendon Press, 1998.

- [12] DE CAMPOS, Marcos Donisete. *Aplicações do método das diferenças finitas de alta ordem na solução de problemas de convecção-difusão*. Tese (doutorado em Engenharia) - Faculdade de Engenharia Mecânica - Universidade Estadual de Campinas, 2014.
- [13] LI, Jichun; CHEN, Yitung; LIU, Guoqing. *High-order compact ADI methods for parabolic equations*. Computers & Mathematics with Applications, v. 52, n. 8, p. 1343-1356, 2006.
- [14] YOU, Donghyun. *A high-order Padé ADI method for unsteady convection-diffusion equations*. Journal of Computational Physics, v. 214, n. 1, p. 1-11, 2006.
- [15] TIAN, Z. F.; GE, Y. B. *A fourth-order compact ADI method for solving two-dimensional unsteady convection-diffusion problems*. Journal of Computational and Applied Mathematics, v. 198, n. 1, p. 268-286, 2007.
- [16] YOUNG, D. L. et al. *The Eulerian - Lagrangian method of fundamental solutions for two-dimensional unsteady Burgers equations*. Engineering analysis with boundary elements, v. 32, n. 5, p. 395-412, 2008.
- [17] QIN, Jinggang. *The new alternating direction implicit difference methods for solving three-dimensional parabolic equations*. Applied Mathematical Modelling, v. 34, n. 4, p. 890-897, 2010.
- [18] LIAO, Wenyuan. *A fourth-order finite-difference method for solving the system of two-dimensional Burgers equations*. International journal for numerical methods in fluids, v. 64, n. 5, p. 565-590, 2010.
- [19] MA, Yuezhen; GE, Yongbin. *A high order finite difference method with Richardson extrapolation for 3D convection-diffusion equation*. Applied Mathematics and Computation, v. 215, n. 9, p. 3408-3417, 2010.
- [20] TIAN, Zhen F. *A rational high-order compact ADI method for unsteady convection-diffusion equations*. Computer Physics Communications, v. 182, n. 3, p. 649-662, 2011.
- [21] SRIVASTAVA, Vineet Kumar et al. *Crank-Nicolson scheme for numerical solutions of two dimensional coupled Burgers equations*. International Journal of Scientific & Engineering Research, v. 2, n. 5, p. 1-7, 2011.
- [22] FERNANDES, Ryan I.; FAIRWEATHER, Graeme. *An ADI extrapolated Crank-Nicolson orthogonal spline collocation method for nonlinear reaction-diffusion systems*. Journal of Computational Physics, v. 231, n. 19, p. 6248-6267, 2012.
- [23] LIAO, Wenyuan. *A compact high-order finite difference method for unsteady convection-diffusion equation*. International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics, v. 13, n. 3, p. 135-145, 2012.

- [24] LADEIA, C. A., Romeiro, N. M. L., Natti, P. L., Cirilo, E. R. *Formulações semi-discretas para a equação 1D de Burgers*. TEMA (São Carlos), 14(3), 319-331, 2013.
- [25] LADEIA, Cibele Aparecida. *Formulação Semi-discreta aplicada as equações 1D de Convecção-Difusão-Reação e de Burgers*. Dissertação (Mestrado de Matemática Aplicada e Computacional)- Universidade Estadual de Londrina, CCE, 2012.
- [26] DE SOUZA, Marcelo Maraschin. *Solução das Equações de Navier-Stokes para Fluidos Incompressíveis via Elementos Finitos*. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2013.
- [27] ROMÃO, Estaner Claro; MARTINS, Jairo Aparecido; DE MOURA, Luiz Felipe Mendes. *Solução numérica da equação de Burgers pelo método das diferenças centrais de sexta-ordem*. Revista iberoamericana de ingeniería mecánica, v. 17, n. 2, p. 117-124, 2013.
- [28] MEDEIROS, Cláudia Brunosi, *Soluções da Equação de Burgers 1D e 2D via upwind de alta ordem e Hopf-Cole*. Dissertação (Mestrado de Matemática Aplicada e Computacional)- Universidade Estadual de Londrina, CCE, 2013.
- [29] AZEVEDO, Adriano Matheus Targino de. *Um novo esquema upwind fundamentado na série de Fourier para as equações de Navier-Stokes*. Dissertação (Mestrado de Matemática Aplicada e Computacional)- Universidade Estadual de Londrina, CCE, 2016.
- [30] KUTLUAY, S.; ESEN, A. *A linearized numerical scheme for Burgers-like equations*. Applied mathematics and computation, v. 156, n. 2, p. 295-305, 2004.
- [31] BARBA, Alessandra Negrini Dalla. *Estudo e Implementação de Esquema upwind na Resolução de um Modelo de Dinâmica de Fluidos Computacional em Coordenadas Generalizadas*. Dissertação (Mestrado de Matemática Aplicada e Computacional)- Universidade Estadual de Londrina, CCE, 2015.
- [32] JOTSA, AC Kengni; PENNATI, V. A. *A cost-effective FE method for 2D Navier-Stokes equations*. Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics, v. 9, n. 1, p. 66-83, 2015.
- [33] SHEU, Tony WH; LIN, R. K. *Newton linearization of the incompressible Navier-Stokes equations*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, v. 44, n. 3, p. 297-312, 2004.
- [34] SANTIAGO, C. D.; MARCHI, C. H.; SOUZA, Leandro Franco de. *Performance of geometric multigrid method for coupled two-dimensional systems in CFD*. Applied Mathematical Modelling, v. 39, n. 9, p. 2602-2616, 2015.
- [35] SHIH, T. M.; TAN, C. H.; HWANG, B. C. *Effects of grid staggering on numerical schemes*. International Journal for numerical methods in fluids, v. 9, n. 2, p. 193-212, 1989.

- [36] PEREIRA, J. M. C.; KOBAYASHI, M. H.; PEREIRA, J. C. F. *A fourth-order-accurate finite volume compact method for the incompressible Navier-Stokes solutions*. Journal of Computational Physics, v. 167, n. 1, p. 217-243, 2001.
- [37] FERREIRA, Valdemir Garcia; DE LIMA, Giseli A. Braz; CORRÊA, Laís. *Simulação Computacional de Alguns Problemas em Dinâmica dos Fluidos*. In: Proceedings of the 9th Brazilian Conference on Dynamics Control and their Applications. p. x2. 2010.
- [38] CUMINATO, José Alberto; MENEGUETTE, M. *Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas*. SBM, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2013.
- [39] THOMAS, James William. *Numerical partial differential equations: finite difference methods*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [40] HOPF, Eberhard. *The partial differential equation $u_t + uu_x = mu_{xx}$* . Communications on Pure and Applied Mathematics, v. 3, n.3, p.201-230, 1950.
- [41] ZHAO, Guozhong; YU, Xijun; ZHANG, Rongpei. *The new numerical method for solving the system of two-dimensional Burgers equations*. Computers & Mathematics with Applications, v.62, n.8, p. 279-3291, 2011.
- [42] BURGERS, J.M. *A mathematical model illustrating the theory of turbulence*. Adv. Appl. Mech. 1 (1948) 171-199.
- [43] CUI, Mingrong. *Convergence analysis of high-order compact alternating direction implicit schemes for the two-dimensional time fractional diffusion equation*. Numerical Algorithms, v. 62, n. 3, p. 383-409, 2013.
- [44] GE, Y., TIAN, Z. F., ZHANG, J., *An exponential high-order compact ADI method for 3D unsteady convection-diffusion problems*. Numer. Meth. Partial Differen. Eqns., v.29, n. 1, p. 186-205, 2013.
- [45] ZILL, Dennis e CULLEN, Michael R. *Equações Diferenciais*. 3.a edição, Makron Books, 2001.
- [46] KUTLUAY, S.; ESEN, A.; DAG, I. *Numerical solutions of the Burgers equation by the least-squares quadratic B-spline finite element method*. Journal of Computational and Applied Mathematics, v. 167, n. 1, p. 21-33, 2004.
- [47] BATEMAN, Harry. *Some recent researches on the motion of fluids*. Monthly Weather Review, v. 43, n. 4, p. 163-170, 1915.
- [48] LIMA, G. B. *Desenvolvimento de estratégias de captura de discontinuidades para leis de conservação e problemas relacionados em dinâmica dos fluidos*. MS thesis, Dissertação de mestrado, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, São Carlos, SP (2010).

- [49] MA, Mingshu; MA, Wenjuan; WANG, Xiaofeng. *A compact alternate direct implicit difference method for solving parabolic equation of multi-dimension*. Applied Mathematics and Computation, v. 212, n. 2, p. 281-286, 2009.
- [50] BIAZAR, Jafar; AMINIKHAH, Hossein. *Exact and numerical solutions for non-linear Burgers equation by VIM*. Mathematical and Computer Modelling, v. 49, n. 7, p. 1394-1400, 2009.
- [51] FERREIRA, Valdemir G.; QUEIROZ, Rafael AB de; MANCERA, Paulo FA. *Método das Diferenças Finitas Aplicado à Dinâmica dos Fluídos*. Departamento de Matemática Aplicada e Estatística, ICMC, USP.
- [52] MITTAL, R. C.; JIWARI, Ram. *Differential quadrature method for two-dimensional Burgers equations*. International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics, v. 10, n. 6, p. 450-459, 2009.
- [53] LIAO, Hong-Lin; SUN, Zhi-Zhong. *Maximum norm error bounds of ADI and compact ADI methods for solving parabolic equations*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, v. 26, n. 1, p. 37-60, 2010.
- [54] SPERANDIO, Décio; MENDES, João Teixeira; SILVA, Luis Hery Monkey e. *Cálculo Numérico: Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos*. Prentice Hall, 2003.
- [55] KWEYU, M. C. et al. *Numerical solutions of the Burgers system in two dimensions under varied initial and boundary conditions*. Appl. Math. Sci, v. 6, n. 113, p. 5603-5615, 2012.