



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL de LONDRINA

---

CAMILA HIROMI TAMURA

**RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES ADIMENSIONAIS DE  
GERAÇÃO DE MALHAS 2D COM MODELAGEM DE  
PARÂMETROS DE QUALIDADE**

CAMILA HIROMI TAMURA

**RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES ADIMENSIONAIS DE  
GERAÇÃO DE MALHAS 2D COM MODELAGEM DE  
PARÂMETROS DE QUALIDADE**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Eliandro Rodrigues Cirilo.

Londrina  
2017

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da  
Universidade Estadual de Londrina**

**Dados Internacionais de Catalogação -na-Publicação (CIP)**

T159r Tamura, Camila Hiromi.  
Resolução das Equações Adimensionais de Geração de Malhas 2D com  
Modelagem de Parâmetros de Qualidade/  
Camila Hiromi Tamura. – Londrina, 2017.  
103 f. : il.

Orientador: Eliandro Rodrigues Cirilo.  
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) Universidade  
Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em  
Matemática Aplicada e Computacional, 2017.

Inclui Bibliografia.

1. Geração de malhas - Tese. 2. Adimensionalização - Tese. 3. Coordenadas  
generalizadas - Tese. 4. Qualidade de malha -Tese. 5. Jacobiano - Teses. I. Cirilo,  
Eliandro Rodrigues. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências  
Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III.  
Título.

517.9

CAMILA HIROMI TAMURA

**RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES ADIMENSIONAIS DE GERAÇÃO DE  
MALHAS 2D COM MODELAGEM DE PARÂMETROS DE  
QUALIDADE**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Orientador: Prof. Dr. Eliandro Rodrigues Cirilo  
Universidade Estadual de Londrina – UEL

---

Prof. Dr. Paulo Laerte Natti  
Universidade Estadual de Londrina – UEL

---

Prof. Dr. Jacques Duílio Brancher  
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Londrina, 23 de fevereiro de 2017.

*Dedico este trabalho ao meu filho e aos meus pais.*

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus pelas inúmeras proteções e bênçãos.

Ao meu filho que é a pessoa mais importante na minha vida e minha inspiração nos momentos de dificuldade.

Aos meus pais que sempre me incentivaram a estudar e são o maior exemplo de pessoas na minha vida.

Aos meus irmãos que sempre me apoiaram, e em especial a minha irmã e meu cunhado que me ofereceram sua casa para que eu pudesse repousar nesses dias em Londrina.

À minha prima Márcia que sempre me ouviu e motivou nos momentos difíceis e me acolheu também na sua casa juntamente com minha avó.

Às tias Jane, Edna, Saiuri, e a minha avó Sonia por todo incentivo, força, ajuda nessa fase da minha vida.

Ao meu namorado Ronaldo por estar ao meu lado me apoiando, me incentivando, acreditando no meu potencial e sempre me motivando a acreditar que posso conquistar tudo o que desejar.

Ao meu orientador professor Dr. Eliandro, pelo apoio, dedicação, amizade, incentivo e inúmeras coisas a mais, sem o seu auxílio a conclusão desse trabalho de dissertação não seria possível.

Aos meus professores da UEM onde concluí minha graduação, que sempre me motivaram a fazer o mestrado e continuar os meus estudos.

Aos professores da UEL por terem me repassado todo seu conhecimento.

Aos meus amigos da UEM, em especial a Jusley que se tornou uma irmã, ao Fernando que sempre esteve a postos para me ajudar em tudo, ao Juniormar e a Estela pelo companheirismo, enfim a todos meus amigos.

Aos amigos da UEL, em especial a Tati, o Tadasi, Alex e o Julio que começaram essa jornada comigo. Não poderia deixar de citar o Gustavo que me ajudou muita nessa reta final.

À CAPES pela ajuda financeira para a realização desse trabalho.

Enfim, gostaria de agradecer a todos que direta ou indiretamente estiveram presentes no decorrer desse trabalho de dissertação.

Meus sinceros agradecimentos a todos.

TAMURA, Camila Hiromi. **Resolução das equações adimensionais de geração de malhas 2D com modelagem de parâmetros de qualidade.** 2017. 103 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

## RESUMO

As malhas são utilizadas por aplicações de diversas áreas do conhecimento. Nas diversas engenharias, particularmente, a geração de malhas do domínio do problema a ser analisado é pré requisito para uso de métodos numéricos, e a geração de uma malha adequada e de qualidade é essencial para obter soluções numericas mais precisas. No presente trabalho, nosso objetivo é gerar e qualificar malhas bidimensionais, para esse propósito, apresentamos uma metodologia matemática para geração de malhas bidimensionais em coordenadas generalizadas na forma adimensional, e além disso, deduzimos dois parâmetros nomeados comprimento de forma e diferença de área, para mensurar a qualidade da malha gerada. Através destes parâmetros, estudamos um modelo de qualidade para identificarmos quais elementos da malha são considerados menos adequados, e que necessitam ser remodelados. Realizamos algumas simulações, com malhas variadas, onde os parâmetros apresentaram os elementos mais disformes de cada malha, e o modelo de qualidade apontou rapidamente esses elementos que necessitam ser remodelados.

**Palavras-chave:** Geração de malhas. Adimensionalização. Coordenadas generalizadas. Qualidade de malha. Jacobiano.

TAMURA, Camila Hiromi. **Resolution of the dimensionless equations of 2D mesh generation with modeling of quality parameters**. 2017. 103 p. Dissertation (Masters in Applied Mathematics and Computational) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

### ABSTRACT

The meshes are used by applications in several areas of knowledge. In various engineering, particularly the mesh generation of the problem domain to be analyzed is a prerequisite to use numerical methods, and generating a suitable and quality mesh is essential to obtain more precise numerical solutions. In the present work, our goal is to generate and qualify two-dimensional meshes. For this purpose, we present a mathematical methodology to generate two-dimensional meshes in curvilinear coordinates in dimensionless form. In addition, we deduce two parameters named shape length and area difference, to measure the quality of the mesh generated. Through these parameters, we study a quality model to identify which mesh elements are considered less suitable, and which need to be refurbished. We performed some simulations, with varied meshes, where the parameters presented the most distorted elements of each mesh, and the quality model quickly pointed out these elements that need to be remodeled.

**Keywords:** Mesh generation. Adimensionalization. Curvilinear coordinates. Mesh quality. Jacobian.



## LISTA DE FIGURAS

2.1	Contorno obtido por spline cúbica parametrizado [14] .....	23
2.2	Representação dos elementos de uma malha .....	25
2.3	Classificação das malhas .....	25
2.4	Mapeamento do domínio físico para o domínio computacional.....	26
2.5	Sistema de coordenadas curvilíneas $\xi, \eta$ .....	28
2.6	Malha discretizada no ponto $(x, y)$ .....	29
2.7	Sistema coordenado obtido com superposição .....	31
3.1	Elemento de uma malha para discretização no ponto P .....	42
3.2	Baricentro do triângulo .....	43
3.3	Baricentro dos triângulos relacionados às diagonais do quadrilátero $ABCD$ .....	43
3.4	O baricentro do quadrilátero corresponde a intersecção das retas $B_1B_2$ e $B^1B^2$ .....	44
3.5	Ilustração do exemplo 1, (a) representa o quadrilátero $OPQR$ , (b) representa o quadrilátero com a circunferência que melhor se aproxima dos vértices do quadrilátero, obtido via mínimos quadrados.....	47
3.6	Ilustração do exemplo 2, (a) representa o quadrado $OPQR$ , (b) representa o quadrado com a circunferência circunscrita .....	48
3.7	Malha semi-trapezoidal com 15 elementos gerada em coordenadas generaliza- das na forma adimensional.....	51
3.8	Malha onde $B_i$ representa o baricentro de cada elemento $i$ .....	53
3.9	Malha com a circunferência que melhor se aproxima dos nós de cada elemento.....	54
3.10	Distância entre o baricentro e o centro da circunferência .....	54
4.1	Malha gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área. ....	60
4.2	Malha quadrada gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área .....	60
4.3	Malha retangular gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área .....	63
4.4	Malha de uma placa de orifício com a numeração dos elementos.....	63
4.5	Malha de uma placa de orifício gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.....	64
4.6	Malha da placa de orifício refinada gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área. ....	65
4.7	Malha de placas paralelas com círculo imerso com 1250 elementos gerada por dois blocos	

	com a numeração de alguns elementos.....	65
4.8	Malha de placas paralelas com círculo imerso gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.....	66
4.9	Malha de placas paralelas com quadrado imerso com a numeração de alguns elementos.....	67
4.10	Malha de placas paralelas com quadrado imerso gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.....	67
4.11	Malha de uma garrafa com a numeração de alguns elementos.....	68
4.12	Malha de uma garrafa gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.....	69
4.13	Malha quadricúspide com numeração de alguns de seus elementos.....	71
4.14	Malha quadricúspide gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.....	71
4.15	Malha do lago Luruaco gerada por multiblocos com a numeração de seus respectivos blocos.....	72
4.16	Malha do lago Luruaco gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.....	73
4.17	Malha do bloco 1 do lago Luruaco com a numeração de alguns elementos.....	73
4.18	Malha do bloco 1 do lago Luruaco gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.....	74
4.19	Malha do bloco 2 do lago Luruaco com a numeração de alguns elementos.....	74
4.20	Malha do bloco 2 do lago Luruaco gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.....	75
4.21	Malha do bloco 3 do lago Luruaco com a numeração de alguns elementos.....	76
4.22	Malha do bloco 3 do lago Luruaco gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.....	77
4.23	Malha do bloco 4 do lago Luruaco com a numeração de alguns elementos.....	78
4.24	Malha do bloco 4 do lago Luruaco gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.....	78
4.25	Malha do bloco 5 do lago Luruaco com a numeração de alguns elementos.....	79
4.26	Malha do bloco 5 do lago Luruaco gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.....	80
4.27	Malha do bloco 6 do lago Luruaco com a numeração de alguns elementos.....	81
4.28	Malha do bloco 6 do lago Luruaco gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.....	81

4.29	Malha do bloco 7 do lago Luruaco com a numeração de alguns elementos.....	82
4.30	Malha do bloco 7 do lago Luruaco gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área. ....	83
4.31	Malha do bloco 8 do lago Luruaco com a numeração de alguns elementos.....	84
4.32	Malha do bloco 8 do lago Luruaco gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área. ....	84
4.33	Malha do bloco 9 do lago Luruaco, e a numeração de alguns elementos.....	85
4.34	Malha do bloco 9 do lago Luruaco gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área. ....	85
4.35	Malha do bloco 10 do lago Luruaco com a numeração de alguns elementos.....	86
4.36	Malha do bloco 10 do lago Luruaco gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área. ....	86
4.37	Malha do bloco 11 do lago Luruaco com a numeração de alguns elementos.....	87
4.38	Malha do bloco 11 do lago Luruaco gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área. ....	87
4.39	Malha do bloco 12 do lago Luruaco com a numeração de alguns elementos.....	89
4.40	Malha do bloco 12 do lago Luruaco gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área. ....	90
4.41	Malha do bloco 13 do lago Luruaco com a numeração de alguns elementos.....	90
4.42	Malha do bloco 13 do lago Luruaco gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área. ....	91
4.43	Malha da parte interna de um NACA 64A 010.....	92
4.44	Malha da parte interna de um NACA 64A 010 gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.....	93
4.45	Esboço do domínio de uma região anelar utilizando malha cartesiana. [11].....	94
4.46	Malha de um anel gerada em coordenadas generalizadas. [11] .....	94
4.47	Malha de um anel gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área. ....	95
4.48	Malha polar ao redor de um cilindro circular, malha cartesiana, e uma malha sobreposta à outra. [38].....	95
4.49	Malha com dois cilindros lado a lado geradas pelo método overset grid. [38] .....	96
4.50	Malha com dois cilindros lado a lado gerada em coordenadas generalizadas. ....	96
4.51	Malha com dois cilindros lado a lado gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.....	97

## LISTA DE TABELAS

2.1	Coordenadas de um contorno qualquer parametrizado em $t$ .....	22
2.2	Coordenadas de um contorno qualquer na forma adimensional .....	24
2.3	Coordenadas conhecidas de $\partial\bar{R}$ .....	40
3.1	Coordenadas dos nós da malha representada pela Figura 3.7.....	51
3.2	Tabela da análise de qualidade dos elementos .....	57
4.1	Tabela do modelo de qualidade dos elementos da malha quadrada. ....	61
4.2	Tabela do modelo de qualidade dos elementos da malha retangular .....	62
4.3	Tabela do modelo de qualidade dos elementos da malha de uma placa de orifício. ....	64
4.4	Tabela do modelo de qualidade dos elementos da malha de placas paralelas com círculo imerso.....	66
4.5	Tabela do modelo de qualidade dos elementos da malha quadrada com um buraco. ....	68
4.6	Tabela do modelo de qualidade dos elementos da malha do primeiro desenho de uma garrafa de coca-cola. ....	69
4.7	Tabela do modelo de qualidade dos elementos de uma malha quadricúspide.....	72
4.8	Tabela da análise do modelo de qualidade dos elementos da malha do bloco 1 do lago Luruaco. ....	74
4.9	Tabela da análise do modelo de qualidade dos elementos da malha do bloco 2 do lago Luruaco. ....	75
4.10	Tabela da análise do modelo de qualidade dos elementos da malha do bloco 3 do lago Luruaco. ....	77
4.11	Tabela da análise do modelo de qualidade dos elementos da malha do bloco 4 do lago Luruaco. ....	79
4.12	Tabela da análise do modelo de qualidade dos elementos da malha do bloco 5 do lago Luruaco. ....	80
4.13	Tabela da análise do modelo de qualidade dos elementos da malha do bloco 6 do lago Luruaco. ....	82
4.14	Tabela da análise do modelo de qualidade dos elementos da malha do bloco 7 do lago Luruaco. ....	83
4.15	Tabela da análise do modelo de qualidade dos elementos da malha do bloco 11 do lago Luruaco. ....	88
4.16	Tabela da análise do modelo de qualidade dos elementos da malha do bloco 13 do lago Luruaco. ....	91

## LISTA DE SÍMBOLOS E NOTAÇÕES

$x, y$  - variáveis espaciais referente ao sistema de coordenadas cartesianas

$\bar{x}, \bar{y}$  - variáveis espaciais adimensionais referente ao sistema de coordenadas cartesianas

$\xi, \eta$  - variáveis espaciais referente ao sistema de coordenadas generalizadas

$\bar{\xi}, \bar{\eta}$  - variáveis espaciais adimensionais referente ao sistema de coordenadas generalizadas

$\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}$  - métricas de transformação

$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{y}}$  - métricas adimensionais de transformação

$J$  - jacobiano

$\bar{J}$  - jacobiano adimensional

$L$  - comprimento de referência

$\alpha, \beta, \gamma$  - métricas associadas à transformação de coordenadas

$\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$  - métricas adimensionais associadas à transformação de coordenadas

$\partial R$  - fronteira da região  $R$

$C_k$  - centro da circunferência do  $k$ -ésimo elemento

$B_k$  - baricentro do  $k$ -ésimo elemento

$d_k(C_k, B_k)$  - distância entre o centro da circunferência e o baricentro do  $k$ -ésimo elemento

$DA_k$  - diferença entre a área da circunferência e a área do  $k$ -ésimo elemento

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	16
<b>2</b>	<b>GERAÇÃO DE MALHAS 2D EM COORDENADAS GENERALIZADAS</b> .....	19
<b>2.1</b>	<b>CONSIDERAÇÕES INICIAIS</b> .....	19
<b>2.2</b>	<b>CONSTRUÇÃO DE BORDA</b> .....	21
<b>2.2.1</b>	<b>Spline cúbica parametrizado</b> .....	22
<b>2.2.2</b>	<b>Adimensionalização de equações de borda</b> .....	23
<b>2.3</b>	<b>EQUAÇÕES DE GERAÇÃO DE MALHAS</b> .....	24
<b>2.3.1</b>	<b>Sistema de coordenadas generalizadas</b> .....	24
<b>2.3.2</b>	<b>Equações governantes de geração de malhas</b> .....	30
<b>2.3.3</b>	<b>Adimensionalização das equações governantes de geração de malhas</b> .....	35
<b>3</b>	<b>ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE QUALIDADE PARA GERAÇÃO DE MALHAS</b> .....	41
<b>3.1</b>	<b>MÉTRICAS FUNDAMENTAIS</b> .....	41
<b>3.1.1</b>	<b>Jacobiano</b> .....	41
<b>3.1.2</b>	<b>Baricentro</b> .....	42
<b>3.1.3</b>	<b>Circunferência por mínimos quadrados</b> .....	44
<b>3.2</b>	<b>COMPRIMENTO DE FORMA</b> .....	49
<b>3.3</b>	<b>DIFERENÇA DE ÁREA</b> .....	49
<b>3.4</b>	<b>MODELO DE QUALIDADE PARA GERAÇÃO DE MALHAS</b> .....	50
<b>4</b>	<b>APLICAÇÕES</b> .....	58
<b>4.1</b>	<b>MODELO NUMÉRICO DA GERAÇÃO DE MALHAS 2D</b> .....	58
<b>4.2</b>	<b>MALHA SEMI-TRAPEZOIDAL</b> .....	59
<b>4.3</b>	<b>MALHAS QUADRADA E RETANGULAR</b> .....	60
<b>4.4</b>	<b>PLACA DE ORIFÍCIO</b> .....	63
<b>4.5</b>	<b>PLACAS PARALELAS COM CÍRCULO OU QUADRADO IMERSO</b> .....	65
<b>4.6</b>	<b>GARRAFA</b> .....	68
<b>4.7</b>	<b>GEOMETRIA CÚSPIDE</b> .....	70
<b>4.8</b>	<b>LAGO LURUACO</b> .....	72
<b>4.9</b>	<b>MALHA NACA 64A 010</b> .....	92
<b>4.10</b>	<b>MALHA DE UMA REGIÃO ANELAR</b> .....	93
<b>4.11</b>	<b>MALHA COM DOIS CILINDROS</b> .....	95

<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b> .....	<b>98</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>100</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Uma malha é uma subdivisão de um domínio geométrico em formas geométricas menores e mais simples, como triângulos, quadriláteros (2D), tetraedros, hexaedros (3D) [40], entre outras formas. Elas são utilizadas em aplicações de diversas áreas do conhecimento, tais como interpolar mapas de altura em terrenos, confecções de mapas, geração de curvas de nível, visualização topográfica (geografia e cartografia) [44, 45]. Objetos gráficos são convertidos para uma malha antes de serem submetidos às operações de “renderização<sup>1</sup>” e as malhas poligonais têm se tornado o padrão *de facto* na representação de objetos gráficos [9]. Nas engenharias, particularmente, a geração de uma malha do domínio do problema a ser analisado, é pré-requisito para uso de métodos numéricos, como por exemplo MEF (Método dos Elementos Finitos) [40].

Da natureza, pouquíssimos fenômenos modelados por equações diferenciais podem ser solucionados usando-se apenas métodos analíticos. Devido aos avanços contínuos da tecnologia computacional desde a metade do século passado, a abordagem numérica se instaurou no meio científico como uma alternativa na resolução de problemas complexos [3]. Assim, métodos numéricos podem ser empregados para obter uma aproximação da solução da equação que governa esses fenômenos.

No contexto da resolução computacional, o primeiro passo é discretizar a região onde se quer encontrar a solução numérica. Cria-se um conjunto finito de pontos para a região, onde procura-se a solução do problema discretizado. Esse conjunto finito de pontos é nomeado como malha computacional [19] cuja unidade fundamental é a célula, limitada por faces, e vértices chamados de nós, representando os pontos considerados na discretização do domínio físico [6]. As malhas podem ser classificadas como uniformes ou não uniformes de acordo com o espaçamento entre os pontos, e em estruturadas, quando apresentam uma lei de construção sempre com o mesmo número de vizinhos, e não estruturadas caso contrário.

Na geração de malhas, encontra-se por exemplo o trabalho de Thompson [43] que trata de malhas estruturadas não ortogonais; de Eppstein, Bern e Gilbert [18] que apresenta um método de construção de malhas não ortogonais geradas por triangulações de Delaunay; de Henry e Walters [23] que apresenta o pacote de geração de malha *TRIGRID*; de Rebay [34] que descreve um método de geração de malha não estruturada baseada na triangulação de Delaunay; de Yang e Chen [49] para a geração de malhas estruturadas usando curva/superfície beta-spline; de Choi [12] que desenvolveu o método chamado “Método de Centralização”, que centra um ponto no domínio e, em seguida divide-o em sub-domínios usando linhas de corte a partir do ponto central, entre outros.

A geração de uma malha adequada e de qualidade é essencial para obter so-

---

<sup>1</sup>é o processo pelo qual se obtém o produto final de um processamento digital qualquer



luções numéricas mais precisas, pois uma forma inapropriada resultará em soluções numéricas imprecisas, não confiáveis e pouco úteis, assim a fase da geração de malhas é caracterizada com uma etapa chave no contexto de simulações por métodos numéricos [27]. A acurácia e precisão de soluções numéricas de equações diferenciais, são altamente dependentes de parâmetros de qualidade da malha, tais como forma e quantidade de elementos [4, 29], além de regularidade e direcionalidade [40].

Malhas com elementos triangulares de regiões poligonais (convexas e não convexas), têm sido estudadas pelas comunidades científicas nos últimos 30 anos, e atualmente suas propriedades teóricas são bem compreendidas [16, 39]. Desses estudos resultou o desenvolvimento de algoritmos de geração de malhas com elementos triangulares capazes de gerar malhas com valores de parâmetros ótimos ou quase ótimos [5, 18, 8, 30, 50]. Em contraste, as propriedades teóricas de malhas formada por elementos quadriláteros, não são bem compreendidas atualmente [40]. Existem algoritmos de geração de malhas com elementos quadriláteros que otimizam alguns parâmetros de malha [17, 32, 26, 31, 2, 47, 15], porém não se conhece um algoritmo para gerar malhas que otimize vários parâmetros de malha simultaneamente [40].

Uma característica comum na construção de malhas é que a maioria das regiões de interesse são geometrias complexas, e para que seja possível a simulação sobre estas regiões é necessária a sua simplificação em formas geométricas elementares, quando o espaço euclidiano é considerado. O sistema de coordenadas cartesianas leva a uma má adequação da fronteira da região quando a malha é construída, já que o domínio físico não coincide com o domínio da malha [28]. Para amenizar a má adequação da fronteira foi desenvolvido o sistema de coordenadas generalizadas. Este sistema nos permite mapear um domínio com geometria irregular ou regular, escrito no sistema cartesiano  $(x, y)$ , para uma geometria regular escrita no sistema de coordenadas generalizadas  $(\xi, \eta)$  [28].

O emprego do sistema de coordenadas generalizadas teve início por volta dos anos 70, principalmente pelos pesquisadores do método de diferenças finitas [28]. Winslow [48] e Chu [13] foram os pioneiros nos estudos para estender o uso de mapeamentos para situações mais gerais. Também contribuíram na mesma direção Barfield [7], Amsden e Hirt [1], Godunov e Prokopov [22], mas todos esse trabalhos não tiveram muita repercussão no meio científico da época. Nos trabalhos de Thompson e seus colaboradores [41, 42] está o marco inicial do desenvolvimento experimentado pelos métodos numéricos usando coordenadas generalizadas. Após estes trabalhos, o uso de coordenadas generalizadas difundiu-se de forma rápida.

O segundo passo é tratar e resolver numericamente as equações na malha obtida. Essas equações também podem ser representadas no sistema de coordenadas generalizadas, o que é fundamental para a resolução numérica dos problemas. Para que seja possível encontrar uma solução numérica para uma equação diferencial, é necessário disreazar por meio de uma metodologia matemática que possa ser operacionalizada por computadores [6]. Alguns métodos usados são volumes finitos, elementos finitos, diferenças finitas e outros. Nos últimos anos, novos métodos numéricos conhecidos como métodos de partículas vêm sendo estudados

por pesquisadores, esse método pode ser definido de maneira geral, como métodos numéricos de soluções de um problema físico que não necessitam de malhas no domínio a ser simulado (*meshfree*). Dentre eles, destacam-se o *SPH* (*Smoothed Particles Hydrodynamics*) e o *MPS* (*Moving Particle Semi-implicit Method*) [46].

Quando as equações diferenciais são resolvidas a partir da forma adimensional, pois o transporte por fator de escala é simplificado e os problemas e conversões de unidades são reduzidos, então é natural, vantajoso e consistente em se trabalhar com malhas na forma adimensional. Muitas são as aplicações dos grupos adimensionais nos estudos de modelos e aplicações de semelhança dinâmica, assim com o passar dos anos centenas de grupos adimensionais importantes na engenharia foram identificados, tais como número de Reynolds, número de Euler, número de Froude, número de Weber, número de Mach, número de Prandtl entre outros.

Diante desse cenário, neste trabalho de dissertação apresentamos uma metodologia matemática para a geração de malhas bidimensionais em coordenadas generalizadas na forma adimensional. Além disto, deduzimos dois parâmetros para mensurar a qualidade da malha ora gerada. Nosso principal objetivo é gerar e qualificar malhas 2D, ou seja, localizar e classificar quais são os elementos numa malha computacional, que não são adequados. Sabemos que gerar malhas com qualidade é primordial, e este trabalho vai nesta direção.

Para cumprir esses propósitos, no capítulo 2 apresentamos uma breve discussão sobre a importância da adimensionalização, sobre uma metodologia de construção de borda através do método de interpolação polinomial spline cúbica parametrizada, e as equações governantes de geração de malha e sua adimensionalização. No capítulo 3 apresentamos dois parâmetros de qualidade, denominadas comprimento de forma que envolve o baricentro do elemento da malha e o centro da circunferência que melhor se aproxima dos vértices (nós) de cada elemento, e diferença de área, que consiste no cálculo do módulo da diferença entre as áreas da circunferência e do elemento da malha. E também um modelo de qualidade que relaciona os dois parâmetros citados acima. No capítulo 4 apresentamos o modelo numérico da geração de malha, algumas simulações e seus resultados. No capítulo 5 apresentamos as conclusões dessa dissertação.

## 2 GERAÇÃO DE MALHAS 2D EM COORDENADAS GENERALIZADAS

### 2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Muitos fenômenos reais não podem ser solucionados usando apenas métodos analíticos, dependem também de resultados experimentais, ou seja, a solução de problemas reais envolve uma combinação de análise e informação experimental [20]. Primeiramente, a situação do escoamento real é aproximada por meio de um modelo matemático simples o suficiente para fornecer uma solução. Em seguida são feitas medições experimentais para verificar os resultados analíticos, e com base nessas medições refina-se a análise. Porém, o trabalho experimental é demorado e geralmente gera custos elevados e o objetivo é obter o máximo de informações do mínimo de experiências [20]. A análise dimensional é uma ferramenta muito importante para obtermos esses objetivos.

A maioria dos fenômenos da mecânica dos fluidos dependem de uma maneira complexa de parâmetros de geometria e de escoamento. Por exemplo, considerando a força de arrasto sobre uma esfera lisa estacionária imersa numa corrente uniforme, muitos são os parâmetros que são importantes na determinação da força de arrasto  $F$ , como o tamanho da esfera (considere o diâmetro  $D$ ), a velocidade  $V$  do fluido, a sua viscosidade  $\mu$ , massa específica  $\rho$ , etc. Uma série de experiências precisam ser feitas para determinar a dependência entre  $F$  em relação às variáveis  $D$ ,  $V$ ,  $\mu$  e  $\rho$ . Supondo que para obter resultados de  $F$  versus  $V$ , para valores fixos de  $D$ ,  $\mu$  e  $\rho$ , precisaríamos de testes para vários valores de  $V$ . Para explorar o efeito do diâmetro  $D$ , cada teste seria repetido para esferas de vários diâmetros diferentes. Se o procedimento fosse repetido para vários valores de  $\mu$  e  $\rho$ , por sua vez, seriam necessários uma quantidade muito grande de testes individuais, o que custaria muito tempo e esforço computacional. Para contornar esse problema, a análise dimensional pode ser empregada, e assim podemos obter resultados com um esforço muito menor, onde todos os parâmetros podem ser traçados como uma relação funcional entre parâmetros adimensionais. Para o exemplo anterior temos  $\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f_1\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)$ . A forma da função ainda deve ser determinada experimentalmente, porém, seriam necessários apenas um conjunto de testes, diminuindo significativamente o número de experiências necessárias [20].

O teorema Pi de Buckingham consiste em, dado um problema físico, onde o parâmetro dependente é uma função de  $n - 1$  parâmetros independentes, poderemos expressar a relação entre as variáveis como

$$q_1 = f(q_2, q_3, \dots, q_n) \quad (2.1)$$

onde  $q_1$  é o parâmetro dependente e  $q_2, q_3, \dots, q_n$  são os  $n - 1$  parâmetros independentes. Mate-

maticamente a expressão (2.1) é equivalente a

$$g(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$$

onde  $g$  é uma função diferente de  $f$ .

O teorema Pi de Buckingham diz que, dada uma relação entre  $n$  parâmetros de forma  $g(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$ , então os  $n$  parâmetros podem ser agrupados em  $n - m$  razões independentes adimensionais, ou parâmetros  $\Pi$ , que podem ser expressos como

$$G(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-m}) = 0 \quad \text{ou} \quad \Pi_1 = G_1(\Pi_2, \dots, \Pi_{n-m}). \quad (2.2)$$

O número  $m$  geralmente é igual ao número mínimo de dimensões independentes necessárias para especificar as dimensões de todos os parâmetros  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . A relação funcional entre os parâmetros independentes adimensionais  $\Pi$  deve ser determinada experimentalmente.

Vários métodos são usados para se determinar os parâmetros adimensionais  $\Pi$ , um deles consiste em: (1) começar listando todos os parâmetros envolvidos, (2) selecionar um conjunto de dimensões fundamentais, (3) listar as dimensões de todos os parâmetros em termos das dimensões primárias, (4) selecionar da lista um número  $r$  de parâmetros que, em conjunto, incluam todas as dimensões primárias, (5) estabelecer equações dimensionais combinando os parâmetros selecionados no passo 4 com cada um dos parâmetros para formar grupos dimensionais e (6) verificar se cada grupo obtido é adimensional. Mais detalhes e exemplos podem ser encontrados em [20].

Centenas de grupos adimensionais importantes na engenharia foram identificados, onde cada um desses grupos recebeu o nome de um cientista ou engenheiro proeminente. Na mecânica dos fluidos alguns grupos adimensionais são muito utilizados, tais como o número de Reynolds,  $Re = \frac{\rho V L}{\mu}$ , que é a razão entre as forças de inércia e as forças viscosas, o número de Euler também conhecido como coeficiente de pressão,  $Eu = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2}$ , que é a razão entre as forças de pressão e as forças de inércia, o número de Froude,  $Fr^2 = \frac{V^2}{gL}$  que é a razão entre as forças de inércia e as forças de gravidade, o número de Weber  $We = \frac{\rho V^2 L}{\sigma}$ , que é a razão entre as forças de inércia e as forças de tensão superficial e também o número de Mach,  $M = \frac{V}{c}$  que é a razão entre as forças de inércia e as forças devidas à compressibilidade [20].

Na mecânica dos fluidos muitos testes experimentais com um protótipo de tamanho real é impossível ou de custo muito elevado. A maneira de contornar esse problema é realizar os testes de modelos em laboratórios. Algumas condições devem ser atendidas para assegurar a semelhança entre os escoamentos de modelo e protótipo, tais como serem geometricamente semelhantes (modelo e protótipo precisam ter formas iguais, todas as dimensões lineares do modelo sejam relacionadas às correspondentes dimensões do protótipo por um fator

de escala constante), cinematicamente semelhantes (as velocidades em pontos correspondentes são no mesmo sentido e relacionam-se em magnitude por meio de um fator de escala constante), dinamicamente semelhantes (quando dois escoamentos têm distribuição de força tais que tipos idênticos de forças são paralelas e relacionam-se em magnitude por um fator de escala constante em todos os pontos correspondentes). Os requisitos para semelhança dinâmica são os mais restritivos, todas as forças que são importantes no escoamento devem ser consideradas e relacionadas pelo mesmo fator de escala entre escoamento de modelo e protótipo.

O teorema dos PI de Buckingham pode ser usado na obtenção dos grupos adimensionais que governam um fenômeno de escoamento. Para obter a semelhança dinâmica entre escoamentos geometricamente semelhantes devemos duplicar os grupos adimensionais independentes, assim, o parâmetro dependente será também duplicado. Como no exemplo da força de arrasto sobre uma esfera, temos a relação funcional  $\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f_1\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)$ , considerando um escoamento de modelo e um escoamento de protótipo em torno de uma esfera, os escoamentos serão dinamicamente semelhantes se o parâmetro independente  $\frac{\rho V D}{\mu}$  for duplicado entre modelo e protótipo, isto é,  $\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)_{\text{modelo}} = \left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)_{\text{protótipo}}$ , além disso, se  $Re_{\text{modelo}} = Re_{\text{protótipo}}$ , então o parâmetro dependente é duplicado entre modelo e protótipo, ou seja,  $\left(\frac{F}{\rho V^2 D^2}\right)_{\text{modelo}} = \left(\frac{F}{\rho V^2 D^2}\right)_{\text{protótipo}}$  e os resultados do modelo podem ser utilizados na predição do arrasto no protótipo em tamanho real. A força real decorrente do fluido sobre o objeto não é a mesma em ambos os casos, mas o valor do seu grupo adimensional sim. Os dois testes podem ser realizados usando-se fluidos diferentes, desde que os números de Reynolds sejam iguais.

Uma perspectiva para a determinação das condições sob as quais dois escoamentos são semelhantes, é utilizar as equações diferenciais que os governam e suas respectivas condições de contorno. A semelhança pode ser obtida quando dois fenômenos físicos são governados por equações diferenciais e condições de contorno que têm as mesmas formas adimensionais. A semelhança dinâmica é garantida pela reprodução dos coeficientes adimensionais das equações e das condições de contorno entre protótipo e modelo [20].

As equações diferenciais governantes são escritas com frequência na forma adimensional para a solução numérica. Quando se empregam formas adimensionais das equações, o transporte por fator de escala é simplificado e os problemas e conversão de unidade são reduzidos, além de muitas vezes permitir a apresentação das soluções em forma generalizada. Nesse contexto, devido as vantagens da adimensionalização, faremos a dedução matemática das equações de geração de malhas 2D na forma adimensional.

## 2.2 CONSTRUÇÃO DE BORDA

Existem muitos métodos de construção de bordas de malhas. Um método muito utilizado é o método de interpolação polinomial de Lagrange, cuja a implementação e a

matemática envolvida são relativamente simples, porém esse método não é muito eficaz quando há um aumento da quantidade de pontos a serem interpolados, pois podem surgir oscilações que afetam o contorno a ser modelado. Uma forma de se contornar esse problema é a utilização da interpolação polinomial spline cúbica parametrizada, pois a mesma minimiza as oscilações por meio da imposição de condições sobre o polinômio interpolador, além disso, sua implementação não é complicada e do ponto de vista matemático também é relativamente simples, capaz de representar adequadamente o contorno da geometria a ser modelada [14]. Portanto nesse trabalho utilizaremos esse método para construção de borda.

### 2.2.1 Spline cúbica parametrizado

Para o método de interpolação spline cúbica parametrizada, considere que conheçamos as coordenadas de  $n + 1$  pontos do contorno  $\partial R^1$  por meio de pares ordenados  $(x_t, y_t)$ , onde  $t = 1, 2, \dots, n, n + 1$ . A partir destes pontos, podemos construir a Tabela 2.1

$t$	1	2	3	...	$n$	$n + 1$
$x$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$	$x_{n+1}$
$y$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	...	$y_n$	$y_{n+1}$

Tabela 2.1: Coordenadas de um contorno qualquer parametrizado em  $t$ .

Como as coordenadas  $x_t$  dos pontos que compõem o contorno são obtidas utilizando apenas valores conhecidos  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ , e o mesmo ocorre com as coordenadas  $y_t$ , obtidas com base apenas nos dados  $\{y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}\}$ , então o cálculo das coordenadas de um ponto de  $\partial R$  pode ser obtido de forma independente a partir dos seguintes polinômios cúbicos parametrizados em  $t$

$$x(h) = m_{3_t}(h - t)^3 + m_{2_t}(h - t)^2 + m_{1_t}(h - t) + m_{0_t} \quad (2.3)$$

$$y(h) = p_{3_t}(h - t)^3 + p_{2_t}(h - t)^2 + p_{1_t}(h - t) + p_{0_t} \quad (2.4)$$

onde a variável  $h$  é um número real, que pode ser ajustado de acordo com a necessidade de concentração de pontos nos intervalos  $[t, t + 1]$ , com  $t = 1, 2, 3, \dots, n$ , em torno de algum dos pontos utilizados como base, e  $m_{3_t}, \dots, m_{0_t}, p_{3_t}, \dots, p_{0_t}$  são coeficientes a serem determinados. Por exemplo, considerando a Figura 2.1 nos intervalos  $[3, 4]$  e  $[4, 5]$  foi aplicada a concentração de pontos na direção do ponto 20, porém para os outros intervalos não foi realizada a concentração.

---

<sup>1</sup>Definindo  $R$  como a região do domínio físico, de onde se obtém a malha computacional,  $\partial R$  é o conjunto de todos os pontos da borda de  $R$

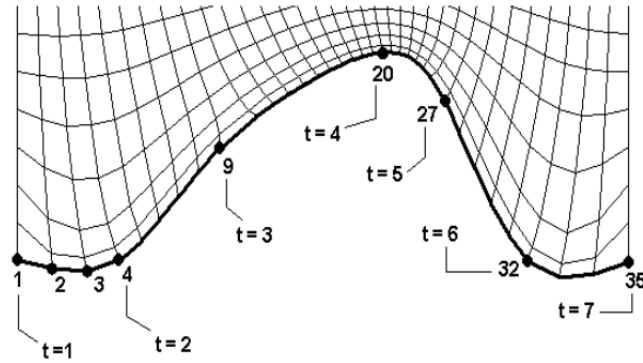


Figura 2.1: Contorno obtido por spline cúbica parametrizado [14]

De acordo com o método spline cúbico, para determinarmos os coeficientes presentes nas expressões (2.3) e (2.4) devemos resolver os seguintes sistemas lineares [36]

$$\begin{aligned} g_{k-1}^X + 4g_k^X + g_{k+1}^X &= 6(x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}), \\ g_{k-1}^Y + 4g_k^Y + g_{k+1}^Y &= 6(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}) \end{aligned}$$

para  $k = 2, \dots, n$ . Obtendo  $g_{k-1}^X, g_{k-1}^Y, g_k^X, g_k^Y$  e assim,

$$\begin{aligned} m_{0_k} &= x_k, & p_{0_k} &= y_k, \\ m_{1_k} &= x_k - x_{k-1} + \frac{1}{3}g_k^X + \frac{1}{6}g_{k-1}^X, & p_{1_k} &= y_k - y_{k-1} + \frac{1}{3}g_k^Y + \frac{1}{6}g_{k-1}^Y, \\ m_{2_k} &= \frac{1}{2}g_k^X, & p_{2_k} &= \frac{1}{2}g_k^Y, \\ m_{3_k} &= \frac{1}{6}(g_k^X - g_{k-1}^X), & p_{3_k} &= \frac{1}{6}(g_k^Y - g_{k-1}^Y), \end{aligned} \quad (2.5)$$

e então encontrar os polinômios cúbicos desejados.

### 2.2.2 Adimensionalização de equações de borda

Para adimensionalizar as equações de borda, equações (2.3) e (2.4), vamos dividir os valores das coordenadas dos  $n + 1$  pares ordenados conhecidos  $(x_t, y_t)$  por um comprimento de referência  $L$ . Supondo que  $x$  e  $y$  sejam dimensionais, o comprimento  $L$  também dimensional, assim as razões

$$\bar{x}_t = \frac{x_t}{L} \quad \text{e} \quad \bar{y}_t = \frac{y_t}{L} \quad (2.6)$$

são adimensionais. Para enfatizar que uma variável é adimensional fazemos uso de uma barra “—” sobre a variável em questão. Portanto,  $(\bar{x}_t, \bar{y}_t)$  serão os pares ordenados de um conjunto de pontos da borda  $\partial R$  na forma adimensional, obtendo a Tabela 2.2:

$t$	1	2	3	...	$n$	$n + 1$
$\bar{x}$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	...	$\bar{x}_n$	$\bar{x}_{n+1}$
$\bar{y}$	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3$	...	$\bar{y}_n$	$\bar{y}_{n+1}$

Tabela 2.2: Coordenadas de um contorno qualquer na forma adimensional

Agora resolvemos o sistema linear

$$\begin{aligned}\bar{g}_{k-1}^X + 4\bar{g}_k^X + \bar{g}_{k+1}^X &= 6(\bar{x}_{k+1} - 2\bar{x}_k + \bar{x}_{k-1}), \\ \bar{g}_{k-1}^Y + 4\bar{g}_k^Y + \bar{g}_{k+1}^Y &= 6(\bar{y}_{k+1} - 2\bar{y}_k + \bar{y}_{k-1})\end{aligned}$$

para  $k = 2, \dots, n$ . Assim, teremos:

$$\begin{aligned}\bar{m}_{0_k} &= \bar{x}_k, & \bar{p}_{0_k} &= \bar{y}_k, \\ \bar{m}_{1_k} &= \bar{x}_k - \bar{x}_{k-1} + \frac{1}{3}\bar{g}_k^X + \frac{1}{6}\bar{g}_{k-1}^X, & \bar{p}_{1_k} &= \bar{y}_k - \bar{y}_{k-1} + \frac{1}{3}\bar{g}_k^Y + \frac{1}{6}\bar{g}_{k-1}^Y, \\ \bar{m}_{2_k} &= \frac{1}{2}\bar{g}_k^X, & \bar{p}_{2_k} &= \frac{1}{2}\bar{g}_k^Y, \\ \bar{m}_{3_k} &= \frac{1}{6}(\bar{g}_k^X - \bar{g}_{k-1}^X), & \bar{p}_{3_k} &= \frac{1}{6}(\bar{g}_k^Y - \bar{g}_{k-1}^Y),\end{aligned}$$

obtendo polinômios cúbicos parametrizados na forma adimensional

$$\bar{x}(h) = \bar{m}_{3_t}(h-t)^3 + \bar{m}_{2_t}(h-t)^2 + \bar{m}_{1_t}(h-t) + \bar{m}_{0_t} \quad (2.7)$$

$$\bar{y}(h) = \bar{p}_{3_t}(h-t)^3 + \bar{p}_{2_t}(h-t)^2 + \bar{p}_{1_t}(h-t) + \bar{p}_{0_t}. \quad (2.8)$$

Uma vez obtido o design de  $\partial R$  segundo as equações (2.7) e (2.8), o passo seguinte é contruir a grade, ou conjunto finito de pontos de  $intR$ (interior de  $R$ ), como segue.

## 2.3 EQUAÇÕES DE GERAÇÃO DE MALHAS

### 2.3.1 Sistema de coordenadas generalizadas

Para obtermos uma solução numérica de um problema físico é necessário, inicialmente, a criação de um modelo matemático que represente a situação estudada. Para estudarmos o modelo por meio de métodos numéricos é fundamental expressarmos adequadamente as equações e o domínio físico. Devemos discretizar o domínio físico, pois tais métodos não permitem que encontremos soluções para todos os pontos do mesmo, mas apenas para um número finito de pontos discretos [28]. Ao conjunto desses pontos damos o nome de malha, cuja unidade fundamental é chamada de célula. Os limites de cada célula são denominada faces e os vértices chamados de nós, que são os pontos considerados na discretização do domínio físico, Figura 2.2.



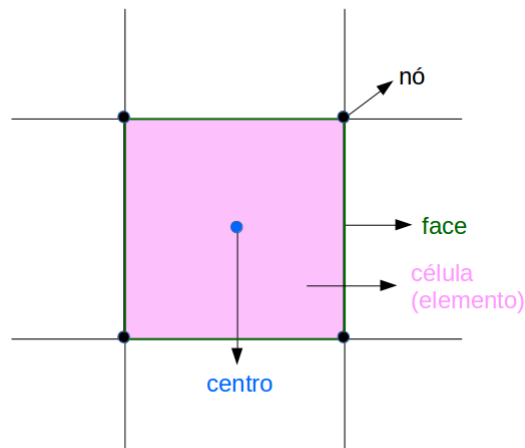
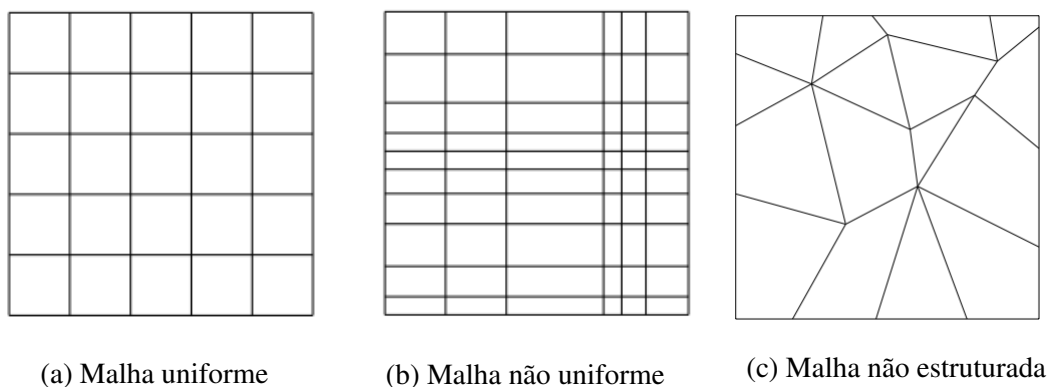


Figura 2.2: Representação dos elementos de uma malha

Vale ressaltar que outro aspecto importante é a quantidade de pontos utilizados para discretização do domínio. Quanto maior a quantidade de pontos, mais fina será a malha, ou seja, o resultado numérico será mais fiel ao problema real. Porém, o custo computacional será consideravelmente maior [19].

A construção de uma malha computacional adequada é importante para que seja possível estimar os gradientes de interesse do problema estudado. As malhas podem ser classificadas como uniformes, quando os pontos são uniformemente espaçados, Figura 2.3 (a), e não uniformes quando o espaçamento entre os pontos são variáveis, Figura 2.3 (b). Uma malha será dita estruturada quando houver uma lei de construção, Figuras 2.3 (a) e (b), sempre com o mesmo número de vizinhos e não estruturada caso contrário, Figura 2.3 (c).



(a) Malha uniforme

(b) Malha não uniforme

(c) Malha não estruturada

Figura 2.3: Classificação das malhas

Existem vantagens e desvantagens em cada uma das discretizações, e a escolha depende da natureza do problema e da formação acadêmica do analista numérico. Nessa dissertação consideraremos a situação em que todos os elementos estão dispostos de maneira estruturada.

Geralmente, os problemas de interesse são representados por geometrias irregulares, não nos permitindo que malhas retangulares sejam sempre empregadas. Nesses problemas o sistema de coordenadas cartesianas leva a uma má adequação da fronteira do problema, sendo que o domínio físico não coincide com o domínio da malha [43]. Devido a essa dificuldade foi deduzida uma técnica matemática, que nos permite mapear um domínio com geometria irregular ou regular escrito no sistema cartesiano  $(x, y)$  para uma geometria regular escrita no sistema de coordenadas generalizadas  $(\xi, \eta)$ . O sistema  $(x, y)$  é denominado domínio físico e o  $(\xi, \eta)$  é chamado de domínio transformado ou computacional, Figura 2.4

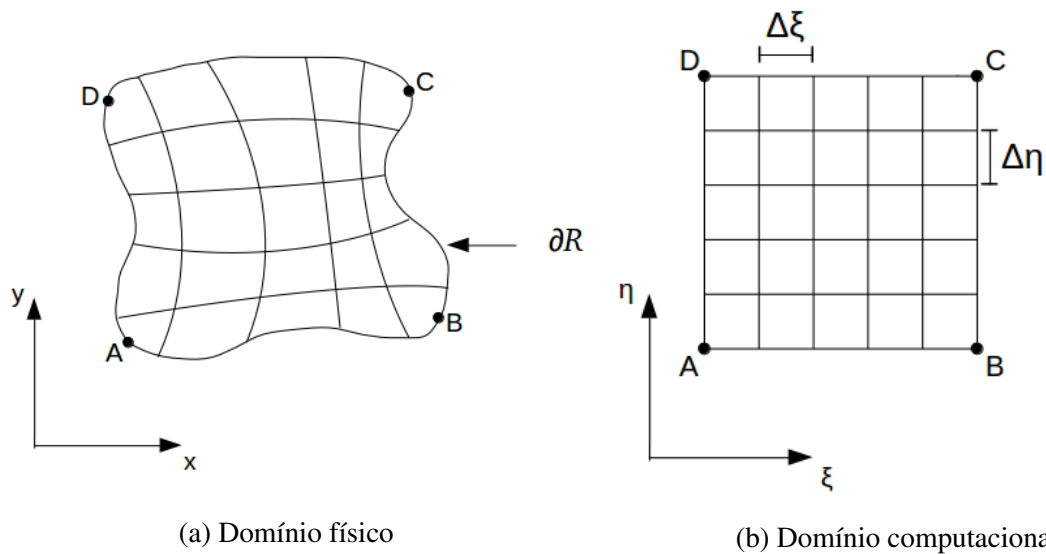


Figura 2.4: Mapeamento do domínio físico para o domínio computacional

A fronteira irregular do domínio físico é transformada de tal forma que no domínio computacional é regular. Uma vez discretizado o domínio, por conveniência adotamos dimensões unitárias ( $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ ), já que o valor de  $\Delta\xi$  e  $\Delta\eta$  podem ser arbitrários.

As coordenadas de um ponto qualquer no sistema de coordenadas generalizadas  $(\xi, \eta)$  estão relacionadas ao sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y)$  pelas seguintes equações de transformação

$$\xi = \xi(x, y) \quad (2.9)$$

$$\eta = \eta(x, y) \quad (2.10)$$

Os diferenciais em cada eixo coordenado no domínio transformado são calculados por

$$\begin{aligned} d\xi &= \xi_x dx + \xi_y dy \\ d\eta &= \eta_x dx + \eta_y dy \end{aligned} \quad ,$$

ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} ,$$

ou ainda

$$[d^T] = [A][d^F], \quad (2.11)$$

onde  $d^T$  e  $d^F$  são diferenciais no domínio transformado e no domínio físico, respectivamente. Por sua vez, os diferenciais no domínio físico são dados por

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

ou

$$[d^F] = [B][d^T]. \quad (2.13)$$

Substituindo a equação (2.11) em (2.13), obtemos

$$[d^F] = [B][A][d^F] \iff I = [B][A] \iff [A] = [B]^{-1} ,$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_\eta}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} & -\frac{x_\eta}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} \\ -\frac{y_\xi}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} & \frac{x_\xi}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} \end{bmatrix} . \quad (2.14)$$

Da igualdade matricial (2.14), são obtidas as métricas

$$\xi_x = Jy_\eta \quad , \quad \xi_y = -Jx_\eta \quad , \quad \eta_x = -Jy_\xi \quad e \quad \eta_y = Jx_\xi \quad (2.15)$$

onde

$$J = \det[A] = \frac{1}{\det[B]} = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^{-1} \quad (2.16)$$

é o jacobiano da transformação.

Admitindo-se a existência da inversa das equações (2.9) e (2.10), pelo teorema da função inversa, teremos também as equações de transformação da seguinte forma

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) \\ y &= y(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (2.17)$$

e as métricas da função inversa são dadas por

$$x_\xi = \frac{1}{J}\eta_y \quad , \quad x_\eta = -\frac{1}{J}\xi_y \quad , \quad y_\xi = -\frac{1}{J}\eta_x \quad e \quad y_\eta = \frac{1}{J}\xi_x \quad . \quad (2.18)$$

Considere a Figura 2.5, uma vez que, mediante (2.12)

$$dx = x_\xi d\xi + x_\eta d\eta \quad \text{e} \quad dy = y_\xi d\xi + y_\eta d\eta \quad ,$$

então da Figura 2.5 (b), os valores de a, b, c e d são

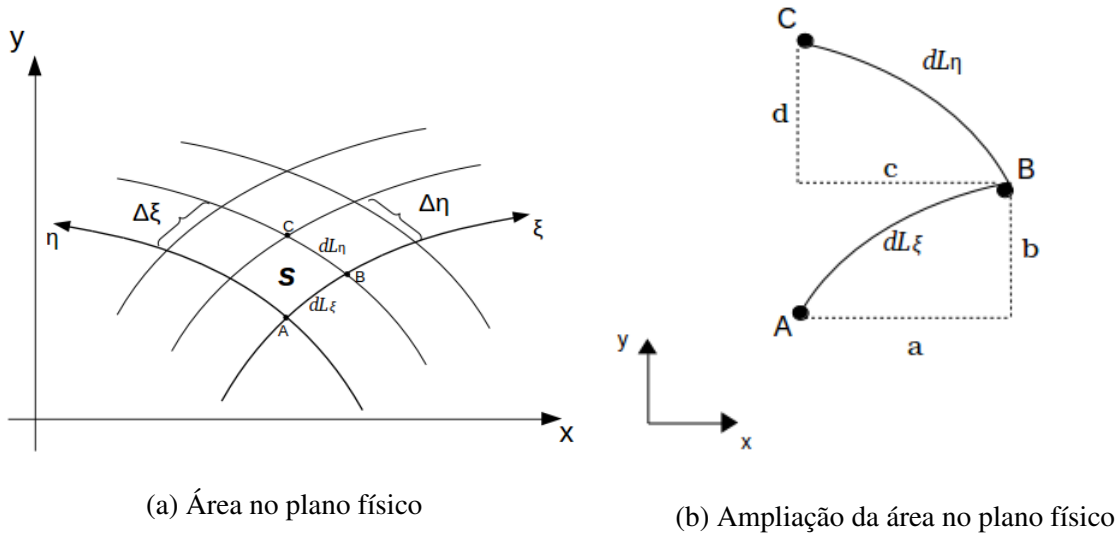


Figura 2.5: Sistema de coordenadas curvilíneas  $\xi, \eta$

$$a = x_\xi \Delta\xi \quad , \quad b = y_\xi \Delta\xi \quad , \quad c = x_\eta \Delta\eta \quad , \quad d = y_\eta \Delta\eta \quad .$$

Ao longo do segmento  $\overline{AB}$ ,  $d\eta = \Delta\eta = 0$  e ao longo do segmento  $\overline{BC}$ ,  $d\xi = \Delta\xi = 0$ . Logo, pelo teorema de pitágoras,

$$(dL_\xi)^2 = (x_\xi \Delta\xi)^2 + (y_\xi \Delta\xi)^2 \Rightarrow dL_\xi = \sqrt{(x_\xi)^2 + (y_\xi)^2} \Delta\xi \quad (2.19)$$

$$(dL_\eta)^2 = (x_\eta \Delta\eta)^2 + (y_\eta \Delta\eta)^2 \Rightarrow dL_\eta = \sqrt{(x_\eta)^2 + (y_\eta)^2} \Delta\eta \quad . \quad (2.20)$$

Vetorialmente podemos representar os comprimentos (2.19), (2.20) como

$$\begin{aligned} d\vec{L}_\xi &= x_\xi \Delta\xi \vec{i} + y_\xi \Delta\xi \vec{j} \\ d\vec{L}_\eta &= x_\eta \Delta\eta \vec{i} + y_\eta \Delta\eta \vec{j} \quad . \end{aligned}$$

Logo, a área formada pelos dois vetores é dada pelo módulo do vetor resultante do produto vetorial dos mesmo, ou seja,

$$d\vec{S} = d\vec{L}_\xi \times d\vec{L}_\eta \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_\xi \Delta\xi & y_\xi \Delta\xi & 0 \\ x_\eta \Delta\eta & y_\eta \Delta\eta & 0 \end{vmatrix} = (x_\xi \Delta\xi y_\eta \Delta\eta) \vec{k} - (x_\eta \Delta\eta y_\xi \Delta\xi) \vec{k} = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) (\Delta\xi \Delta\eta) \vec{k} \quad ,$$

assim,

$$dS = |d\vec{S}| = |d\vec{L}\xi \times d\vec{L}\eta| = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \Delta\xi \Delta\eta \quad ,$$

ou seja,

$$dS = J^{-1} \Delta\xi \Delta\eta \Rightarrow \frac{dS}{\Delta\xi \Delta\eta} = \frac{1}{J} \quad . \quad (2.21)$$

Como comentado anteriormente, o valor de  $\Delta\xi$  e  $\Delta\eta$  podem ser arbitrários. De fato, como vimos o Jacobiano é dado por  $J = \frac{1}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi}$ . Aproximando numericamente o Jacobiano por diferenças finitas centrais, observando a Figura 2.6 teremos:

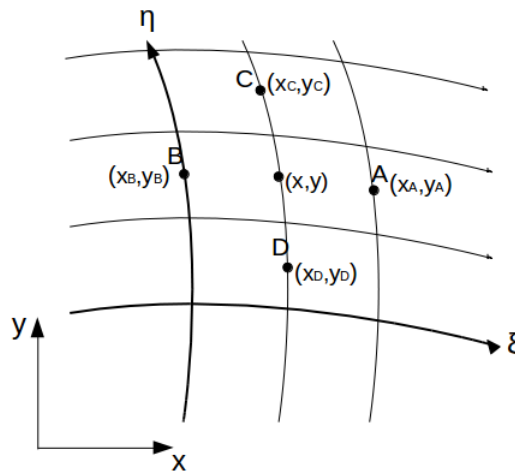


Figura 2.6: Malha discretizada no ponto  $(x, y)$

$$x_\xi \Big|_{(x,y)} \cong \frac{x_A - x_B}{2\Delta\xi}, \quad y_\xi \Big|_{(x,y)} \cong \frac{y_A - y_B}{2\Delta\xi}, \quad x_\eta \Big|_{(x,y)} \cong \frac{x_C - x_D}{2\Delta\eta}, \quad y_\eta \Big|_{(x,y)} \cong \frac{y_C - y_D}{2\Delta\eta} \quad .$$

Assim,

$$J \cong \frac{1}{\frac{(x_A - x_B)(y_C - y_D)}{2\Delta\xi} - \frac{(x_C - x_D)(y_A - y_B)}{2\Delta\xi}} \quad (2.22)$$

e substituindo (2.22) na equação (2.21) teremos

$$\frac{dS}{\Delta\xi \Delta\eta} \cong \frac{1}{\frac{1}{\frac{(x_A - x_B)(y_C - y_D)}{2\Delta\xi} - \frac{(x_C - x_D)(y_A - y_B)}{2\Delta\xi}}} \quad ,$$

ou seja,

$$\frac{dS}{\Delta\xi \Delta\eta} \cong \frac{1}{\frac{2\Delta\xi 2\Delta\eta}{(x_A - x_B)(y_C - y_D)} - \frac{2\Delta\xi 2\Delta\eta}{(x_C - x_D)(y_A - y_B)}}$$

que nos dá,

$$\frac{dS}{\Delta\xi \Delta\eta} \cong \frac{(x_A - x_B)(y_C - y_D)}{2\Delta\xi 2\Delta\eta} - \frac{(x_C - x_D)(y_A - y_B)}{2\Delta\xi 2\Delta\eta}$$

e finalmente,

$$dS = \frac{(x_A - x_B)(y_C - y_D)}{2} - \frac{(x_C - x_D)(y_A - y_B)}{2} .$$

Observe que o produto  $\Delta\xi\Delta\eta$  desaparece, sendo arbitrário o valor da área no plano transformado. Enfatizando que nessa dissertação adotamos  $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ . Assim (2.21) é dada por:

$$dS = \frac{1}{J} . \quad (2.23)$$

A relação (2.23) diz que a razão entre a área do domínio físico e transformado é igual  $\frac{1}{J}$ , ou seja, a área do elemento  $dS$  no plano físico é o inverso do jacobiano.

### 2.3.2 Equações governantes de geração de malhas

A geração de malha, ou seja, a discretização do domínio físico, é uma tarefa complexa no processo de simulação numérica. Mesmo sendo auxiliado por sistemas CAD (*Computer Aided Design*), que lêem a geometria e a preparam para receber a malha, a geração de uma boa malha depende também da habilidade mental de se visualizar a malha que se quer gerar [28].

Existem disponíveis na literatura muitos métodos para gerar malhas, tais como sistemas elípticos, parabólicos, hiperbólicos, métodos algébricos e métodos geométricos [28]. Nesse trabalho abordaremos a técnica de geração de malhas por equações diferenciais elípticas. A solução do conjunto de equações do sistema elíptico gera as linhas coordenadas da malha computacional. A escolha do uso de equações elípticas para a geração de malhas reside no fato do jacobiano da transformação não se anular no domínio. Do princípio do máximo há unicidade das funções  $\xi(x, y)$  e  $\eta(x, y)$ , isto é, duas linhas coordenadas nunca se interceptam.

As equações elípticas governantes para a geração da malha num domínio são

$$\nabla^2\xi = P(\xi, \eta) \quad (2.24)$$

$$\nabla^2\eta = Q(\xi, \eta) . \quad (2.25)$$

Com as condições de contorno de Dirichlet dadas por

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 \text{ em } \Gamma_1 \\ \xi &= \xi_N \text{ em } \Gamma_3 \\ \xi &\Rightarrow \text{distribuição atribuída em } \Gamma_2 \text{ e } \Gamma_4 \end{aligned} \quad (2.26)$$

e para  $\eta$

$$\begin{aligned}
 \eta &= \eta_1 \text{ em } \Gamma_4 \\
 \eta &= \eta_M \text{ em } \Gamma_2 \\
 \eta &\Rightarrow \text{ distribuição atribuída em } \Gamma_1 \text{ e } \Gamma_3.
 \end{aligned}
 \tag{2.27}$$

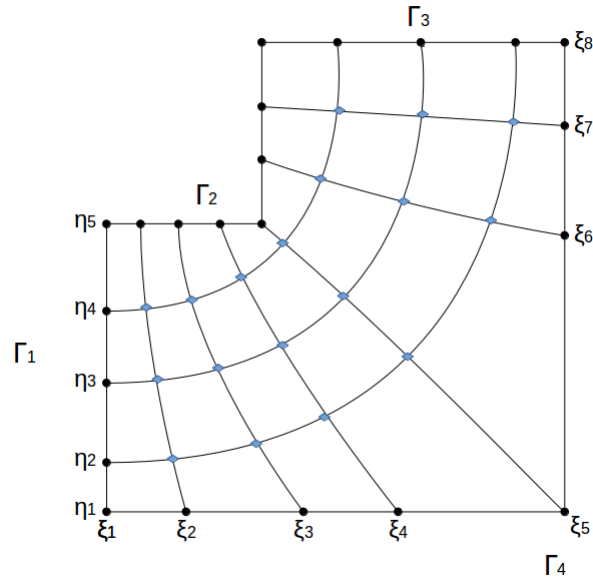


Figura 2.7: Sistema coordenado obtido com superposição

As soluções das equações (2.24) e (2.25) sujeitas as condições (2.26) e (2.27) superpostas umas sobre as outras nos dá os nós que fornecem uma malha não ortogonal, Figura 2.7 por exemplo. A solução analítica de (2.24) e (2.25) é possível para poucos casos submetidos a condições de contorno simples. Na maioria dos problemas a malha é obtida por resolução numérica. Os termos P e Q são termos fonte responsáveis por atração entre linhas ou entre linha e ponto, e existem diversas modelagens que podem ser usadas para definir esses termos.

As equações (2.24) e (2.25) de geração de malha obedecem a relação funcional  $\xi = \xi(x, y)$  e  $\eta = \eta(x, y)$  e a malha sai das soluções dessas equações, porém o sistema coordenado é fornecido pelas variáveis  $x$  e  $y$ . As equações (2.24) e (2.25) devem ser resolvidas no sistema  $(x, y)$ , mas carregando as métricas de transformação do sistema  $(\xi, \eta)$ .

Considere as equações de transformação,  $\xi = \xi(x, y)$  e  $\eta = \eta(x, y)$  e que uma função  $f$  seja tal que

$$f = f(\xi, \eta) = f(\xi(x, y), \eta(x, y)),$$

então da regra da cadeia temos:

$$f_x = f_\xi \xi_x + f_\eta \eta_x \quad (2.28)$$

$$f_y = f_\xi \xi_y + f_\eta \eta_y \quad , \quad (2.29)$$

logo, aplicando a regra da cadeia novamente em (2.28) teremos

$$\begin{aligned} f_{xx} &= (f_\xi \xi_x)_x + (f_\eta \eta_x)_x = (f_\xi)_x \xi_x + f_\xi \xi_{xx} + (f_\eta)_x \eta_x + f_\eta \eta_{xx} = \\ &= (f_x)_\xi \xi_x + f_\xi \xi_{xx} + (f_x)_\eta \eta_x + f_\eta \eta_{xx} = \\ &= [f_{\xi\xi} \xi_x + f_{\eta\xi} \eta_x] \xi_x + f_\xi \xi_{xx} + [f_{\xi\eta} \xi_x + f_{\eta\eta} \eta_x] \eta_x + f_\eta \eta_{xx} = \\ &= f_{\xi\xi} (\xi_x)^2 + f_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + f_\xi \xi_{xx} + f_{\eta\xi} \xi_x \eta_x + f_{\eta\eta} (\eta_x)^2 + f_\eta \eta_{xx} \quad , \end{aligned}$$

ou seja,

$$f_{xx} = f_\xi \xi_{xx} + f_\eta \eta_{xx} + f_{\xi\xi} (\xi_x)^2 + f_{\eta\eta} (\eta_x)^2 + 2f_{\xi\eta} \xi_x \eta_x \quad . \quad (2.30)$$

De modo análogo, aplicando a regra da cadeia em (2.29) encontramos

$$f_{yy} = f_\xi \xi_{yy} + f_\eta \eta_{yy} + f_{\xi\xi} (\xi_y)^2 + f_{\eta\eta} (\eta_y)^2 + 2f_{\xi\eta} \xi_y \eta_y \quad . \quad (2.31)$$

Fazendo  $f = x$  e depois  $f = y$  em (2.30) encontramos as equações

$$0 = x_\xi \xi_{xx} + x_\eta \eta_{xx} + E_1 \quad (2.32)$$

$$0 = y_\xi \xi_{xx} + y_\eta \eta_{xx} + F_1$$

onde

$$\begin{aligned} E_1 &= x_{\xi\xi} (\xi_x)^2 + x_{\eta\eta} (\eta_x)^2 + 2x_{\xi\eta} \xi_x \eta_x \\ F_1 &= y_{\xi\xi} (\xi_x)^2 + y_{\eta\eta} (\eta_x)^2 + 2y_{\xi\eta} \xi_x \eta_x \quad . \end{aligned}$$

Na forma matricial podemos escrever (2.32) como

$$\begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{xx} \\ \eta_{xx} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} E_1 \\ F_1 \end{bmatrix} \quad . \quad (2.33)$$

A solução do sistema dado em (2.33) é

$$\begin{aligned} \xi_{xx} &= \frac{-E_1 y_\eta + x_\eta F_1}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} \\ \eta_{xx} &= \frac{E_1 y_\xi - x_\xi F_1}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} \end{aligned}$$



mas por (2.16) e (2.18) teremos

$$\xi_{xx} = \frac{-E_1 \frac{1}{J} \xi_x - F_1 \frac{1}{J} \xi_y}{\frac{1}{J}}$$

$$\eta_{xx} = \frac{-E_1 \frac{1}{J} \eta_x - F_1 \frac{1}{J} \eta_y}{\frac{1}{J}}$$

e assim,

$$\begin{aligned} \xi_{xx} &= -(E_1 \xi_x + F_1 \xi_y) \\ \eta_{xx} &= -(E_1 \eta_x + F_1 \eta_y) \quad . \end{aligned} \quad (2.34)$$

De forma semelhante, tomando  $f = x$  e  $f = y$  em (2.31) obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= x_\xi \xi_{yy} + x_\eta \eta_{yy} + E_2 \\ 0 &= y_\xi \xi_{yy} + y_\eta \eta_{yy} + F_2 \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde

$$\begin{aligned} E_2 &= x_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + x_{\eta\eta}(\eta_y)^2 + 2x_{\xi\eta}\xi_y\eta_y \\ F_2 &= y_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + y_{\eta\eta}(\eta_y)^2 + 2y_{\xi\eta}\xi_y\eta_y \quad . \end{aligned}$$

As equações em (2.35) podem ser colocadas na forma

$$\begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{yy} \\ \eta_{yy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} E_2 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad , \quad (2.36)$$

cuja solução do sistema é

$$\begin{aligned} \xi_{yy} &= -(E_2 \xi_x + F_2 \xi_y) \\ \eta_{yy} &= -(E_2 \eta_x + F_2 \eta_y) \quad . \end{aligned} \quad (2.37)$$

Uma vez que as equações (2.24) e (2.25) podem ser escritas como

$$\begin{cases} \xi_{xx} + \xi_{yy} = P \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} = Q \end{cases} \quad . \quad (2.38)$$

Substituindo (2.34) e (2.37) em (2.38) teremos

$$\begin{cases} -(E_1\xi_x + F_1\xi_y) - (E_2\xi_x + F_2\xi_y) = P \\ -(E_1\eta_x + F_1\eta_y) - (E_2\eta_x + F_2\eta_y) = Q \end{cases} ,$$

ou seja,

$$\begin{cases} (E_1 + E_2)\xi_x + (F_1 + F_2)\xi_y = -P \\ (E_1 + E_2)\eta_x + (F_1 + F_2)\eta_y = -Q \end{cases} ,$$

ou ainda

$$\begin{cases} \xi_x E + \xi_y F = -P \\ \eta_x E + \eta_y F = -Q \end{cases} \quad (2.39)$$

onde  $E = E_1 + E_2$  e  $F = F_1 + F_2$ .

Resolvendo o sistema (2.39) e considerando (2.16) chegamos a

$$E = \frac{1}{J}(-P\eta_y + Q\xi_y) \quad \text{e} \quad F = \frac{1}{J}(P\eta_x - Q\xi_x) \quad . \quad (2.40)$$

De  $E = E_1 + E_2$  e  $F = F_1 + F_2$  temos ainda

$$\frac{1}{J}(-P\eta_y + Q\xi_y) = (\xi_x^2 + \xi_y^2)x_{\xi\xi} + (\eta_x^2 + \eta_y^2)x_{\eta\eta} + 2(\eta_x\xi_x + \eta_y\xi_y)x_{\xi\eta} \quad (2.41)$$

$$\frac{1}{J}(P\eta_x - Q\xi_x) = (\xi_x^2 + \xi_y^2)y_{\xi\xi} + (\eta_x^2 + \eta_y^2)y_{\eta\eta} + 2(\eta_x\xi_x + \eta_y\xi_y)y_{\xi\eta} \quad . \quad (2.42)$$

Por (2.15) teremos que (2.41) nos dá:

$$\frac{1}{J}(-PJx_\xi - QJx_\eta) = J^2(y_\eta^2 + x_\eta^2)x_{\xi\xi} + J^2(y_\xi^2 + x_\xi^2)x_{\eta\eta} - 2J^2(y_\eta y_\xi + x_\eta x_\xi)x_{\xi\eta}$$

ou

$$J^2(y_\eta^2 + x_\eta^2)x_{\xi\xi} + J^2(y_\xi^2 + x_\xi^2)x_{\eta\eta} - 2J^2(y_\eta y_\xi + x_\eta x_\xi)x_{\xi\eta} + Px_\xi + Qx_\eta = 0 ,$$

que dividido por  $J^2$  nos dá também

$$(y_\eta^2 + x_\eta^2)x_{\xi\xi} + (y_\xi^2 + x_\xi^2)x_{\eta\eta} - 2(y_\eta y_\xi + x_\eta x_\xi)x_{\xi\eta} + \frac{1}{J^2}(Px_\xi + Qx_\eta) = 0 ,$$

que finalmente pode ser escrita como

$$\alpha x_{\xi\xi} + \gamma x_{\eta\eta} - 2\beta x_{\xi\eta} + \frac{1}{J^2}(Px_\xi + Qx_\eta) = 0 \quad . \quad (2.43)$$

De forma análoga temos da equação (2.42) a seguinte equação

$$\alpha y_{\xi\xi} + \gamma y_{\eta\eta} - 2\beta y_{\xi\eta} + \frac{1}{J^2}(Py_\xi + Qy_\eta) = 0 \quad , \quad (2.44)$$

com  $\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2$ ,  $\gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2$ ,  $\beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta$  e  $J = \frac{1}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi}$  sendo as métricas associadas à transformação.

Os termos  $P(\xi, \eta)$  e  $Q(\xi, \eta)$  são responsáveis pela customização da concentração de linhas coordenadas em um determinado ponto da malha de acordo com a característica do problema estudado. Em nosso trabalho consideramos:

$$P(\xi, \eta) = - \sum_{j=1}^N a_j \text{sign}(\xi - \xi_j) e^{-c_j |\xi - \xi_j|} \quad (2.45)$$

$$Q(\xi, \eta) = - \sum_{j=1}^N a_j \text{sign}(\eta - \eta_j) e^{-c_j |\eta - \eta_j|}, \quad (2.46)$$

onde  $\xi_j$  e  $\eta_j$  são as linhas para as quais todas as outras linhas  $\xi$  e  $\eta$  respectivamente, serão atraídas. Os valores  $a_j, c_j$  são ajustados via experimento numérico com intenção de atrair essas linhas.

As equações (2.43) e (2.44) em conjunto com (2.45) e (2.46) são as equações de geração de malhas bidimensionais. Os termos  $x$  e  $y$  são as variáveis dependentes nas equação de geração, são para elas que são especificadas as condições de contorno. Os termos  $\xi$  e  $\eta$  são variáveis independentes, logo podemos arbitrar a eles valores convenientes. Podemos atribuir a  $\xi$  e  $\eta$  valores de 1 a  $N$  e 1 a  $M$ , sendo  $N$  o número de linhas  $\xi$  e  $M$  o número de linhas  $\eta$  do domínio. Com as condições de contorno especificadas, análogas àquelas em (2.26) e (2.27), as soluções das equações (2.43) e (2.44) nos fornecerá a malha desejada.

### 2.3.3 Adimensionalização das equações governantes de geração de malhas

Considerando os termos dimensionais  $x$  e  $y$ , o comprimento de referência  $L$ , os termos  $\xi$  e  $\eta$  (também dimensionais) e  $\Delta\xi$ ,  $\Delta\eta$  como parâmetros de referência, então obtemos os adimensionais seguintes:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{L}, \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{\Delta\xi} \quad \text{e} \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{\Delta\eta}. \quad (2.47)$$

É natural que o comprimento característico  $L$  normalizará os valores dos termos  $x$  e  $y$  para cada problema modelado. No entanto, como já vimos pouco importa os valores assumidos pelos parâmetros de referência  $\Delta\xi$  e  $\Delta\eta$ , pois os mesmos nunca afetarão os resultados obtidos para a malha gerada, assim de (2.47) resulta que as relações adimensionais ficam estabelecidos como:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{L}, \quad \bar{\xi} = \xi \quad \text{e} \quad \bar{\eta} = \eta$$

ou também,

$$x = \bar{x}L, \quad y = \bar{y}L, \quad \bar{\xi} = \xi \quad \text{e} \quad \bar{\eta} = \eta. \quad (2.48)$$

Substituindo (2.48) em (2.24) obteremos

$$\frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial (\bar{x}L)^2} + \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial (\bar{y}L)^2} = - \sum_{j=1}^N a_j \text{sign}(\bar{\xi} - \bar{\xi}_j) e^{-c_j |\bar{\xi} - \bar{\xi}_j|}.$$

Analogamente, substituindo (2.48) em (2.25) obteremos

$$\frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial (\bar{x}L)^2} + \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial (\bar{y}L)^2} = - \sum_{j=1}^N a_j \text{sign}(\bar{\eta} - \bar{\eta}_j) e^{-c_j |\bar{\eta} - \bar{\eta}_j|}$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \bar{y}^2} = -L^2 \sum_{j=1}^N a_j \text{sign}(\bar{\xi} - \bar{\xi}_j) e^{-c_j |\bar{\xi} - \bar{\xi}_j|} \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial \bar{y}^2} = -L^2 \sum_{j=1}^N a_j \text{sign}(\bar{\eta} - \bar{\eta}_j) e^{-c_j |\bar{\eta} - \bar{\eta}_j|}. \quad (2.50)$$

Então (2.49) e (2.50) são as equações governantes adimensionais de geração de malhas. Essas equações de geração de malha obedecem a relação funcional

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}(\bar{x}L, \bar{y}L) \quad \text{e} \quad \bar{\eta} = \bar{\eta}(\bar{x}L, \bar{y}L). \quad (2.51)$$

Considere a transformação (2.51) acima e que uma função  $\bar{f}$  seja tal que

$$\bar{f} = \bar{f}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \bar{f}(\bar{\xi}(\bar{x}L, \bar{y}L), \bar{\eta}(\bar{x}L, \bar{y}L)),$$

então da regra da cadeia, temos:

$$\bar{f}_{\bar{x}} = \bar{f}_{\bar{\xi}} \bar{\xi}_{\bar{x}} + \bar{f}_{\bar{\eta}} \bar{\eta}_{\bar{x}} \quad (2.52)$$

$$\bar{f}_{\bar{y}} = \bar{f}_{\bar{\xi}} \bar{\xi}_{\bar{y}} + \bar{f}_{\bar{\eta}} \bar{\eta}_{\bar{y}} \quad (2.53)$$

e aplicando a regra da cadeia novamente em (2.52), teremos

$$\begin{aligned} \bar{f}_{\bar{x}\bar{x}} &= (\bar{f}_{\bar{\xi}} \bar{\xi}_{\bar{x}})_{\bar{x}} + (\bar{f}_{\bar{\eta}} \bar{\eta}_{\bar{x}})_{\bar{x}} = (\bar{f}_{\bar{\xi}})_{\bar{x}} \bar{\xi}_{\bar{x}} + \bar{f}_{\bar{\xi}} \bar{\xi}_{\bar{x}\bar{x}} + (\bar{f}_{\bar{\eta}})_{\bar{x}} \bar{\eta}_{\bar{x}} + \bar{f}_{\bar{\eta}} \bar{\eta}_{\bar{x}\bar{x}} = \\ &= (\bar{f}_{\bar{x}})_{\bar{\xi}} \bar{\xi}_{\bar{x}} + \bar{f}_{\bar{\xi}} \bar{\xi}_{\bar{x}\bar{x}} + (\bar{f}_{\bar{x}})_{\bar{\eta}} \bar{\eta}_{\bar{x}} + \bar{f}_{\bar{\eta}} \bar{\eta}_{\bar{x}\bar{x}} = \\ &= [\bar{f}_{\bar{\xi}\bar{\xi}} \bar{\xi}_{\bar{x}} + \bar{f}_{\bar{\eta}\bar{\eta}} \bar{\eta}_{\bar{x}}] \bar{\xi}_{\bar{x}} + \bar{f}_{\bar{\xi}} \bar{\xi}_{\bar{x}\bar{x}} + [\bar{f}_{\bar{\xi}\bar{\eta}} \bar{\xi}_{\bar{x}} + \bar{f}_{\bar{\eta}\bar{\eta}} \bar{\eta}_{\bar{x}}] \bar{\eta}_{\bar{x}} + \bar{f}_{\bar{\eta}} \bar{\eta}_{\bar{x}\bar{x}} = \\ &= \bar{f}_{\bar{\xi}\bar{\xi}} (\bar{\xi}_{\bar{x}})^2 + \bar{f}_{\bar{\xi}\bar{\eta}} \bar{\xi}_{\bar{x}} \bar{\eta}_{\bar{x}} + \bar{f}_{\bar{\xi}} \bar{\xi}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{f}_{\bar{\eta}\bar{\xi}} \bar{\xi}_{\bar{x}} \bar{\eta}_{\bar{x}} + \bar{f}_{\bar{\eta}\bar{\eta}} (\bar{\eta}_{\bar{x}})^2 + \bar{f}_{\bar{\eta}} \bar{\eta}_{\bar{x}\bar{x}} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\bar{f}_{\bar{x}\bar{x}} = \bar{f}_{\bar{\xi}}\bar{\xi}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{f}_{\bar{\eta}}\bar{\eta}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{f}_{\bar{\xi}\bar{\xi}}(\bar{\xi}_{\bar{x}})^2 + \bar{f}_{\bar{\eta}\bar{\eta}}(\bar{\eta}_{\bar{x}})^2 + 2\bar{f}_{\bar{\xi}\bar{\eta}}\bar{\xi}_{\bar{x}}\bar{\eta}_{\bar{x}}. \quad (2.54)$$

De modo análogo, aplicando a regra da cadeia em (2.53) encontramos

$$\bar{f}_{\bar{y}\bar{y}} = \bar{f}_{\bar{\xi}}\bar{\xi}_{\bar{y}\bar{y}} + \bar{f}_{\bar{\eta}}\bar{\eta}_{\bar{y}\bar{y}} + \bar{f}_{\bar{\xi}\bar{\xi}}(\bar{\xi}_{\bar{y}})^2 + \bar{f}_{\bar{\eta}\bar{\eta}}(\bar{\eta}_{\bar{y}})^2 + 2\bar{f}_{\bar{\xi}\bar{\eta}}\bar{\xi}_{\bar{y}}\bar{\eta}_{\bar{y}}. \quad (2.55)$$

Fazendo  $\bar{f} = \bar{x}L$  e  $\bar{f} = \bar{y}L$  em (2.54) encontramos

$$\begin{aligned} 0 &= L\bar{x}_{\bar{\xi}}\bar{\xi}_{\bar{x}\bar{x}} + L\bar{x}_{\bar{\eta}}\bar{\eta}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{E}_1 \\ 0 &= L\bar{y}_{\bar{\xi}}\bar{\xi}_{\bar{x}\bar{x}} + L\bar{y}_{\bar{\eta}}\bar{\eta}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{F}_1 \end{aligned} \quad (2.56)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 &= L\bar{x}_{\bar{\xi}\bar{\xi}}(\bar{\xi}_{\bar{x}})^2 + L\bar{x}_{\bar{\eta}\bar{\eta}}(\bar{\eta}_{\bar{x}})^2 + 2L\bar{x}_{\bar{\xi}\bar{\eta}}\bar{\xi}_{\bar{x}}\bar{\eta}_{\bar{x}} \\ \bar{F}_1 &= L\bar{y}_{\bar{\xi}\bar{\xi}}(\bar{\xi}_{\bar{x}})^2 + L\bar{y}_{\bar{\eta}\bar{\eta}}(\bar{\eta}_{\bar{x}})^2 + 2L\bar{y}_{\bar{\xi}\bar{\eta}}\bar{\xi}_{\bar{x}}\bar{\eta}_{\bar{x}} \end{aligned}$$

Na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} L\bar{x}_{\bar{\xi}} & L\bar{x}_{\bar{\eta}} \\ L\bar{y}_{\bar{\xi}} & L\bar{y}_{\bar{\eta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\xi}_{\bar{x}\bar{x}} \\ \bar{\eta}_{\bar{x}\bar{x}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{F}_1 \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

A solução do sistema dado pela equação (2.57) será

$$\bar{\xi}_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{-\bar{E}_1 L\bar{y}_{\bar{\eta}} + L\bar{x}_{\bar{\eta}}\bar{F}_1}{L\bar{x}_{\bar{\xi}}L\bar{y}_{\bar{\eta}} - L\bar{x}_{\bar{\eta}}L\bar{y}_{\bar{\xi}}}, \quad \bar{\eta}_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{\bar{E}_1 L\bar{y}_{\bar{\xi}} - L\bar{x}_{\bar{\xi}}\bar{F}_1}{L\bar{x}_{\bar{\xi}}L\bar{y}_{\bar{\eta}} - L\bar{x}_{\bar{\eta}}L\bar{y}_{\bar{\xi}}}$$

ou seja,

$$\bar{\xi}_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{-\bar{E}_1 L\bar{y}_{\bar{\eta}} + L\bar{x}_{\bar{\eta}}\bar{F}_1}{L^2(\bar{x}_{\bar{\xi}}\bar{y}_{\bar{\eta}} - \bar{x}_{\bar{\eta}}\bar{y}_{\bar{\xi}})}, \quad \bar{\eta}_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{\bar{E}_1 L\bar{y}_{\bar{\xi}} - L\bar{x}_{\bar{\xi}}\bar{F}_1}{L^2(\bar{x}_{\bar{\xi}}\bar{y}_{\bar{\eta}} - \bar{x}_{\bar{\eta}}\bar{y}_{\bar{\xi}})}. \quad (2.58)$$

Por outro lado, considerando as métricas dadas pelas equações (2.18), e as relações adimensionais (2.48), as métricas na forma adimensional são:

$$\bar{x}_{\bar{\xi}} = \frac{1}{L^2} \frac{1}{\bar{J}} \bar{\eta}_{\bar{y}}, \quad \bar{x}_{\bar{\eta}} = -\frac{1}{L^2} \frac{1}{\bar{J}} \bar{\xi}_{\bar{y}}, \quad \bar{y}_{\bar{\xi}} = -\frac{1}{L^2} \frac{1}{\bar{J}} \bar{\eta}_{\bar{x}} \quad e \quad \bar{y}_{\bar{\eta}} = \frac{1}{L^2} \frac{1}{\bar{J}} \bar{\xi}_{\bar{x}} \quad (2.59)$$

onde

$$\bar{J} = \frac{1}{L^2} (\bar{\xi}_{\bar{x}}\bar{\eta}_{\bar{y}} - \bar{\xi}_{\bar{y}}\bar{\eta}_{\bar{x}}) = \frac{1}{L^2} (\bar{x}_{\bar{\xi}}\bar{y}_{\bar{\eta}} - \bar{x}_{\bar{\eta}}\bar{y}_{\bar{\xi}})^{-1}. \quad (2.60)$$

Dessa forma, substituindo (2.59) em (2.58), chegamos à igualdade,

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_{xx} &= \frac{-\bar{E}_1 L \frac{1}{L^2 \bar{J}} \bar{\xi}_x - \bar{F}_1 L \frac{1}{L^2 \bar{J}} \bar{\xi}_y}{\frac{1}{\bar{J}}} \\ \bar{\eta}_{xx} &= \frac{-\bar{E}_1 L \frac{1}{L^2 \bar{J}} \bar{\eta}_x - \bar{F}_1 L \frac{1}{L^2 \bar{J}} \bar{\eta}_y}{\frac{1}{\bar{J}}}\end{aligned}$$

e finalmente em

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_{xx} &= -\frac{1}{L} (\bar{E}_1 \bar{\xi}_x + \bar{F}_1 \bar{\xi}_y) \\ \bar{\eta}_{xx} &= -\frac{1}{L} (\bar{E}_1 \bar{\eta}_x + \bar{F}_1 \bar{\eta}_y) .\end{aligned}\tag{2.61}$$

De forma análoga, tomando  $\bar{f} = \bar{x}L$  e  $\bar{f} = \bar{y}L$  em (2.55) obtemos:

$$\begin{aligned}0 &= L\bar{x}_{\bar{\xi}} \bar{\xi}_{yy} + L\bar{x}_{\bar{\eta}} \bar{\eta}_{yy} + \bar{E}_2 \\ 0 &= L\bar{y}_{\bar{\xi}} \bar{\xi}_{yy} + L\bar{y}_{\bar{\eta}} \bar{\eta}_{yy} + \bar{F}_2\end{aligned}\tag{2.62}$$

onde

$$\begin{aligned}\bar{E}_2 &= L\bar{x}_{\bar{\xi}\bar{\xi}} (\bar{\xi}_y)^2 + L\bar{x}_{\bar{\eta}\bar{\eta}} (\bar{\eta}_y)^2 + 2L\bar{x}_{\bar{\xi}\bar{\eta}} \bar{\xi}_y \bar{\eta}_y \\ \bar{F}_2 &= L\bar{y}_{\bar{\xi}\bar{\xi}} (\bar{\xi}_y)^2 + L\bar{y}_{\bar{\eta}\bar{\eta}} (\bar{\eta}_y)^2 + 2L\bar{y}_{\bar{\xi}\bar{\eta}} \bar{\xi}_y \bar{\eta}_y\end{aligned}$$

Na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} L\bar{x}_{\bar{\xi}} & L\bar{x}_{\bar{\eta}} \\ L\bar{y}_{\bar{\xi}} & L\bar{y}_{\bar{\eta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\xi}_{yy} \\ \bar{\eta}_{yy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{E}_2 \\ \bar{F}_2 \end{bmatrix},\tag{2.63}$$

cuja solução do sistema (2.63), por (2.59), será

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_{yy} &= -\frac{1}{L} (\bar{E}_2 \bar{\xi}_x + \bar{F}_2 \bar{\xi}_y) \\ \bar{\eta}_{yy} &= -\frac{1}{L} (\bar{E}_2 \bar{\eta}_x + \bar{F}_2 \bar{\eta}_y) .\end{aligned}\tag{2.64}$$

Uma vez que as equações (2.49) e (2.50) são escritas como

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_{xx} + \bar{\xi}_{yy} &= L^2 \bar{P} \\ \bar{\eta}_{xx} + \bar{\eta}_{yy} &= L^2 \bar{Q}\end{aligned}\tag{2.65}$$

considerando

$$\begin{aligned}\bar{P} &= -\sum_{j=1}^N a_j \text{sign}(\bar{\xi} - \bar{\xi}_j) e^{-c_j |\bar{\xi} - \bar{\xi}_j|} \\ \bar{Q} &= -\sum_{j=1}^N a_j \text{sign}(\bar{\eta} - \bar{\eta}_j) e^{-c_j |\bar{\eta} - \bar{\eta}_j|}\end{aligned}$$

então substituindo (2.61) e (2.64) em (2.65) chegamos a

$$\begin{cases} -\frac{1}{L}(\bar{E}_1 \bar{\xi}_x + \bar{F}_1 \bar{\xi}_y) - \frac{1}{L}(\bar{E}_2 \bar{\xi}_x + \bar{F}_2 \bar{\xi}_y) = L^2 \bar{P} \\ -\frac{1}{L}(\bar{E}_1 \bar{\eta}_x + \bar{F}_1 \bar{\eta}_y) - \frac{1}{L}(\bar{E}_2 \bar{\eta}_x + \bar{F}_2 \bar{\eta}_y) = L^2 \bar{Q} \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{cases} (\bar{E}_1 + \bar{E}_2) \frac{1}{L} \bar{\xi}_x + (\bar{F}_1 + \bar{F}_2) \frac{1}{L} \bar{\xi}_y = -L^2 \bar{P} \\ (\bar{E}_1 + \bar{E}_2) \frac{1}{L} \bar{\eta}_x + (\bar{F}_1 + \bar{F}_2) \frac{1}{L} \bar{\eta}_y = -L^2 \bar{Q} \end{cases}. \quad (2.66)$$

Resolvendo o sistema (2.66), por (2.60), encontramos

$$\bar{E} = \frac{L}{J}(-\bar{P} \bar{\eta}_y + \bar{Q} \bar{\xi}_y) \quad \text{e} \quad \bar{F} = \frac{L}{J}(\bar{P} \bar{\eta}_x - \bar{Q} \bar{\xi}_x). \quad (2.67)$$

De  $\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2$  e  $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$  temos ainda

$$\frac{L}{J}(-\bar{P} \bar{\eta}_y + \bar{Q} \bar{\xi}_y) = (\bar{\xi}_x^2 + \bar{\xi}_y^2) L \bar{x}_{\bar{\xi}\bar{\xi}} + (\bar{\eta}_x^2 + \bar{\eta}_y^2) L \bar{x}_{\bar{\eta}\bar{\eta}} + 2L(\bar{\eta}_x \bar{\xi}_x + \bar{\eta}_y \bar{\xi}_y) \bar{x}_{\bar{\xi}\bar{\eta}} \quad (2.68)$$

$$\frac{L}{J}(\bar{P} \bar{\eta}_x - \bar{Q} \bar{\xi}_x) = (\bar{\xi}_x^2 + \bar{\xi}_y^2) L \bar{y}_{\bar{\xi}\bar{\xi}} + (\bar{\eta}_x^2 + \bar{\eta}_y^2) L \bar{y}_{\bar{\eta}\bar{\eta}} + 2L(\bar{\eta}_x \bar{\xi}_x + \bar{\eta}_y \bar{\xi}_y) \bar{y}_{\bar{\xi}\bar{\eta}} \quad (2.69)$$

e uma vez que as igualdades em (2.59) podem ser reescritas como

$$\bar{\xi}_x = L^2 \bar{J} \bar{y}_{\bar{\eta}} \quad , \quad \bar{\xi}_y = -L^2 \bar{J} \bar{x}_{\bar{\eta}} \quad , \quad \bar{\eta}_x = -L^2 \bar{J} \bar{y}_{\bar{\xi}} \quad \text{e} \quad \bar{\eta}_y = L^2 \bar{J} \bar{x}_{\bar{\xi}} \quad (2.70)$$

temos que (2.68) fica

$$\begin{aligned} \frac{L}{J}(-\bar{P} L^2 \bar{J} \bar{x}_{\bar{\xi}} - \bar{Q} L^2 \bar{J} \bar{x}_{\bar{\eta}}) &= ((L^2 \bar{J} \bar{y}_{\bar{\eta}})^2 + (-L^2 \bar{J} \bar{x}_{\bar{\eta}})^2) L \bar{x}_{\bar{\xi}\bar{\xi}} \\ &+ ((-L^2 \bar{J} \bar{y}_{\bar{\xi}})^2 + (L^2 \bar{J} \bar{x}_{\bar{\xi}})^2) L \bar{x}_{\bar{\eta}\bar{\eta}} + 2L(-L^2 \bar{J} \bar{y}_{\bar{\eta}} L^2 \bar{J} \bar{y}_{\bar{\xi}} - L^2 \bar{J} \bar{x}_{\bar{\eta}} L^2 \bar{J} \bar{x}_{\bar{\xi}}) \bar{x}_{\bar{\xi}\bar{\eta}} \end{aligned}$$

que finalmente é escrita como

$$\bar{\alpha} \bar{x}_{\bar{\xi}\bar{\xi}} + \bar{\gamma} \bar{x}_{\bar{\eta}\bar{\eta}} - 2\bar{\beta} \bar{x}_{\bar{\xi}\bar{\eta}} + \frac{1}{J^2}(\bar{P} \bar{x}_{\bar{\xi}} + \bar{Q} \bar{x}_{\bar{\eta}}) = 0. \quad (2.71)$$

De forma análoga temos que a equação (2.69) pode ser reescrita como

$$\overline{\alpha y_{\xi\xi}} + \overline{\gamma y_{\eta\eta}} - 2\overline{\beta y_{\xi\eta}} + \frac{1}{J^2}(\overline{P y_{\xi}} + \overline{Q y_{\eta}}) = 0 \quad (2.72)$$

com  $\overline{\alpha} = \frac{1}{L^2}(\overline{x_{\eta}}^2 + \overline{y_{\eta}}^2)$ ,  $\overline{\gamma} = \frac{1}{L^2}(\overline{x_{\xi}}^2 + \overline{y_{\xi}}^2)$ ,  $\overline{\beta} = \frac{1}{L^2}(\overline{x_{\xi}}\overline{x_{\eta}} + \overline{y_{\xi}}\overline{y_{\eta}})$  e  $\overline{J} = \frac{1}{L^2(\overline{x_{\xi}}\overline{y_{\eta}} - \overline{x_{\eta}}\overline{y_{\xi}})}$ , sendo as métricas associadas à transformação. Assim temos que (2.71) e (2.72) são as equações de geração de malhas na forma adimensional.

Portanto, considerando um conjunto de dados com respeito as coordenadas cartesianas da borda  $\partial R$  de uma geometria de interesse  $R$ , o modelo matemático da geração da malha dessa geometria, na forma adimensional, é dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\alpha x_{\xi\xi}} + \overline{\gamma x_{\eta\eta}} - 2\overline{\beta x_{\xi\eta}} + \frac{1}{J^2}(\overline{P x_{\xi}} + \overline{Q x_{\eta}}) = 0 \\ \overline{\alpha y_{\xi\xi}} + \overline{\gamma y_{\eta\eta}} - 2\overline{\beta y_{\xi\eta}} + \frac{1}{J^2}(\overline{P y_{\xi}} + \overline{Q y_{\eta}}) = 0, \\ \overline{x}(h) = \overline{m}_{3_t}(h-t)^3 + \overline{m}_{2_t}(h-t)^2 + \overline{m}_{1_t}(h-t) + \overline{m}_{0_t} \\ \overline{y}(h) = \overline{p}_{3_t}(h-t)^3 + \overline{p}_{2_t}(h-t)^2 + \overline{p}_{1_t}(h-t) + \overline{p}_{0_t} \end{array} \right.$$

onde

$t$	1	2	3	...	$n+1$
$\overline{x}$	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$	...	$\overline{x}_{n+1}$
$\overline{y}$	$\overline{y}_1$	$\overline{y}_2$	$\overline{y}_3$	...	$\overline{y}_{n+1}$

Tabela 2.3: Coordenadas conhecidas de  $\partial \overline{R}$

é uma tabela de coordenadas conhecidas de  $\partial \overline{R}$ .

Após obtermos o modelo matemático da geração de malha, nosso próximo passo é analisarmos a qualidade das malhas geradas. No capítulo seguinte apresentamos dois parâmetros de qualidade e através destes um modelo de qualidade.



### 3 ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE QUALIDADE PARA GERAÇÃO DE MALHAS

Há muitos fatores que influenciam a qualidade de um resultado de simulação, particularmente a malha computacional é um destes fatores. Sendo assim, considerando às coordenadas generalizadas, atentar para a forma dos elementos da malha ou o refinamento da mesma constitui-se em ações necessárias para o sucesso da simulação. Um fato fundamental nesse processo é a dependência do resultado numérico com a qualidade geométrica dos elementos da malha. Mas quais os parâmetros que podem dizer se um determinado elemento é considerado adequado ou não? Existe(m) algum(ns) parâmetro(s) ou regra(s) que defina(m) a qualidade de uma malha. É claro que nosso interesse é gerar malhas bidimensionais em coordenadas generalizadas, no contexto adimensional. Para não carregar em demasia a notação matemática, neste capítulo suprimiremos o uso da barra. Mas enfatizamos ao leitor que os resultados e deduções aqui obtidos são para variáveis adimensionais. Nesse trabalho apresentamos dois parâmetros, complementares entre si, que identificam os elementos inadequados em uma malha computacional segundo uma métrica que exprime qualidade.

Quando uma malha apresenta elementos quadrados, retângulos ou trapézios (formas fundamentais), essa malha se refinada, permitirá obter excelentes resultados numéricos quando as equações de Navier-Stokes são resolvidas. No entanto essa afirmação é válida para um grupo de problemas em particular, ou seja, para aqueles cuja geometria é favorecida pelo sistema cartesiano. Um clássico problema deste grupo é o escoamento em dutos ou o problema da cavidade quadrada. Existe uma farta quantidade de artigos científicos publicados que comprovam a afirmação acima dada.

Contudo, os problemas do mundo real possuem na maioria das vezes geometrias complexas. Assim, gerar malhas cartesianas não é recomendado, e gerar malhas puramente em coordenadas generalizadas não garante que seus elementos serão alguma forma fundamental. Portanto, ao nosso ver, é possível gerar malhas em coordenadas generalizadas e classificar quais elementos são muito disformes de uma forma fundamental e posteriormente melhorar esta disformidade. Neste capítulo classificaremos os elementos inadequados.

#### 3.1 MÉTRICAS FUNDAMENTAIS

##### 3.1.1 Jacobiano

Vimos no capítulo 2, que a área do elemento no domínio físico é o inverso do jacobiano, ou seja, pela equação (2.23) temos,  $dS = \frac{1}{J}$  onde  $J = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^{-1}$ . Como nos fenômenos do cotidiano, a maioria dos problemas são resolvidos de forma numérica, então é verdade que

$$dS \cong \frac{1}{J} \quad (3.1)$$

Aproximando as derivadas parciais presentes na equação do jacobiano por diferenças finitas no ponto P, mostrado na Figura 3.1, chegamos a:

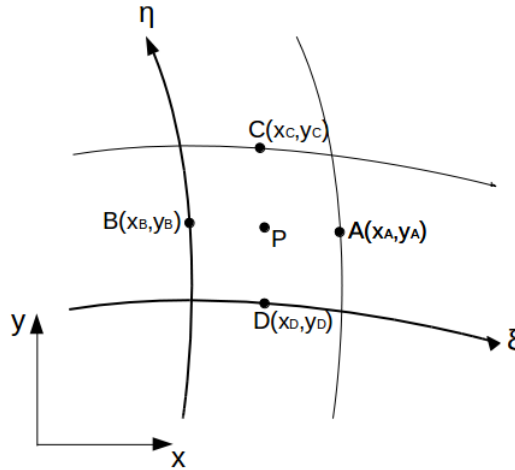


Figura 3.1: Elemento de uma malha para discretização no ponto P.

$$x_{\xi} \Big|_P \cong \frac{x_A - x_B}{\Delta \xi}, \quad y_{\eta} \Big|_P \cong \frac{y_C - y_D}{\Delta \eta}, \quad x_{\eta} \Big|_P \cong \frac{x_C - x_D}{\Delta \eta} \quad \text{e} \quad y_{\xi} \Big|_P \cong \frac{y_A - y_B}{\Delta \xi}. \quad (3.2)$$

Substituindo (3.2) em (2.16), obtemos

$$J \cong \frac{1}{(x_A - x_B)(y_C - y_D) - (x_C - x_D)(y_A - y_B)} \quad (3.3)$$

uma vez que  $\Delta \xi = \Delta \eta = 1$ . Temos que  $(x_A, y_A)$ ,  $(x_B, y_B)$ ,  $(x_C, y_C)$  e  $(x_D, y_D)$  são as coordenadas dos pontos médios das faces dos elementos.

Portanto

$$dS \cong \frac{1}{J} \cong (x_A - x_B)(y_C - y_D) - (x_C - x_D)(y_A - y_B) \quad (3.4)$$

é a área do elemento.

### 3.1.2 Baricentro

Os elementos da malha gerada em coordenadas cartesianas na forma adimensional são quadriláteros, e todo quadrilátero possui um baricentro. Para encontrarmos o baricentro, primeiramente precisamos saber encontrar o baricentro de triângulos.

O baricentro de um triângulo é o ponto de interseção das três medianas do triângulo, onde a mediana com relação a um vértice do triângulo é o segmento de extremos que vai

deste vértice ( $A, B, C$ ) ao ponto médio ( $M_{AC}, M_{AB}, M_{CB}$ ) do lado oposto, como exibido na Figura (3.2). A coordenada do baricentro do triângulo também pode ser encontrada da seguinte forma: Dadas as coordenadas dos vértices do triângulo, suponhamos  $(x_a, y_a)$ ,  $(x_b, y_b)$  e  $(x_c, y_c)$ , a coordenada do baricentro é dada por [51]

$$(x_B, y_B) = \left( \frac{x_a + x_b + x_c}{3}, \frac{y_a + y_b + y_c}{3} \right).$$

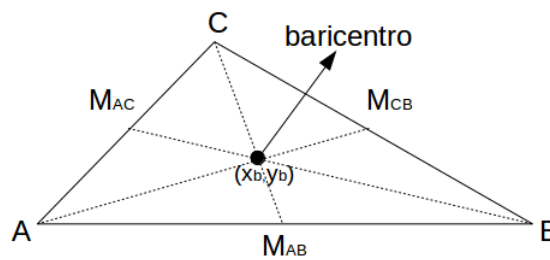
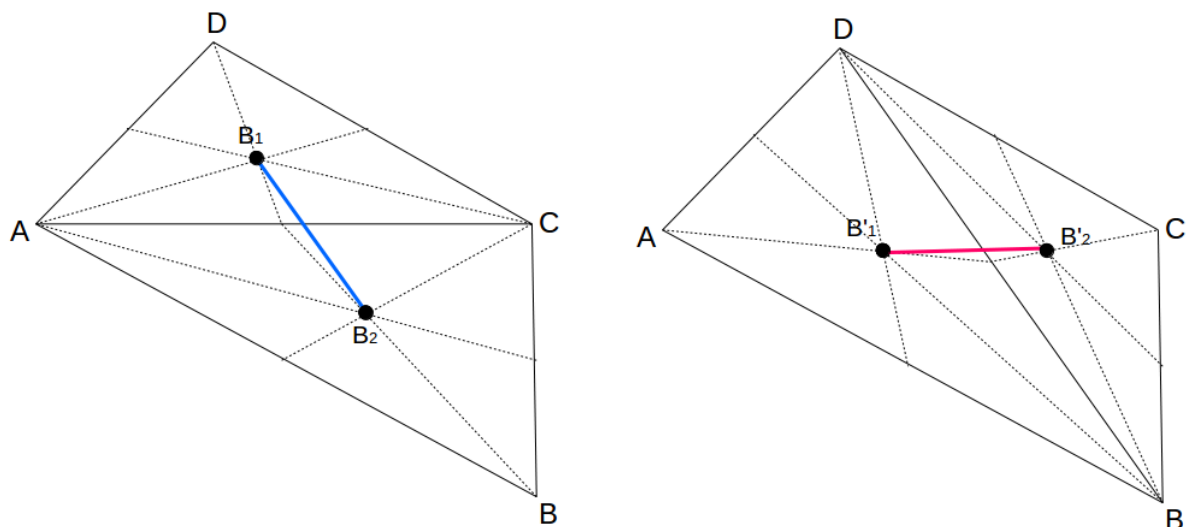


Figura 3.2: Baricentro do triângulo

Agora dado um quadrilátero  $ABCD$  qualquer, Figura 3.3, traçando uma das diagonais, digamos de  $A$  para  $C$ , obtemos dois triângulos. Sejam  $B_1$  e  $B_2$  o baricentro dos triângulos, traçando uma reta ligando os dois baricentros obtemos o segmento  $\overline{B_1B_2}$ , Figura 3.3 (a). Da outra diagonal do quadrilátero ( $B$  para  $D$ ), obtemos outros dois triângulos. Repetindo o mesmo processo, encontramos  $B'_1$  e  $B'_2$ , e assim o segmento  $\overline{B'_1B'_2}$ , Figura 3.3 (b).

O baricentro do quadrilátero ( $ABCD$ ) será a intersecção dos segmentos  $\overline{B_1B_2}$  e  $\overline{B'_1B'_2}$ , Figura 3.4 [33].



(a) Reta que liga os baricentros  $B_1$  e  $B_2$  dos triângulos  $ACB$  e  $ABC$   
 (b) Reta que liga os baricentros  $B'_1$  e  $B'_2$  dos triângulos  $ABD$  e  $BCD$

Figura 3.3: Baricentro dos triângulos relacionados às diagonais do quadrilátero  $ABCD$

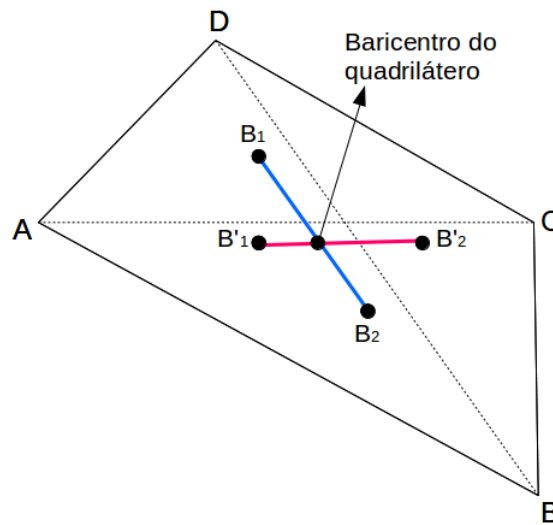


Figura 3.4: O baricentro do quadrilátero corresponde a intersecção das retas  $B_1B_2$  e  $B'_1B'_2$

Note que o baricentro do quadrilátero não coincide com a intersecção entre as diagonais do quadrilátero, a coincidência ocorre só nos casos do quadrado e do retângulo.

### 3.1.3 Circunferência por mínimos quadrados

Na geometria euclidiana nem todo quadrilátero pode ser inscrito em uma circunferência. Temos a condição de que um quadrilátero pode ser inscrito em uma circunferência se, e somente se, possui um par de ângulos opostos suplementares, ou seja, se a soma dos ângulos opostos é  $180^\circ$  [21]. As formas fundamentais quadrado-retângulo-trapézio tem essa propriedade. Como nem todo elemento quadrilátero de uma malha gerada em coordenadas generalizadas possui ângulos opostos suplementares, então procura-se a circunferência mais próxima dos vértices do quadrilátero.

A circunferência mais próxima dos vértices do quadrilátero é obtida por mínimos quadrados. O método dos mínimos quadrados nos dará a circunferência, de tal modo que a soma do quadrado das distâncias dos nós (vértices) até a circunferência seja mínima. O método dos mínimos quadrados pode ser encontrado de forma detalhada em [36].

Para o nosso propósito, dado um elemento da malha, queremos encontrar uma circunferência que melhor se aproxima dos nós desse elemento. Seja

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad (3.5)$$

a equação de uma circunferência, onde:

- $x_0$  e  $y_0$  correspondem ao centro
- $r$  o raio

- $x$  e  $y$  são as coordenadas de um ponto qualquer da circunferência.

Desenvolvendo a equação (3.5) obtemos

$$\begin{aligned} x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 &= r^2 \\ \iff -2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 &= -(x^2 + y^2) \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde dispomos dos valores de  $x$  e  $y$  e pretendemos estimar os valores de  $x_0$ ,  $y_0$  e  $r$ .

Denotando

$$\begin{aligned} u_1 = -2x_0, \quad u_2 = -2y_0, \quad u_3 = x_0^2 + y_0^2 - r^2, \\ g_1(x, y) = x, \quad g_2(x, y) = y, \quad g_3(x, y) = 1 \quad e \quad f(x, y) = -x^2 - y^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

a equação (3.6) será escrita como:

$$u_1g_1(x, y) + u_2g_2(x, y) + u_3g_3(x, y) = f(x, y) \quad (3.8)$$

onde nosso objetivo é encontrar os coeficientes  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  via mínimos quadrados.

Considere que um dado elemento da malha seja tal que seus nós  $O$ ,  $P$ ,  $Q$  e  $R$  sejam conhecidos, ou seja,

$$O = (x_1, y_1), \quad P = (x_2, y_2), \quad Q = (x_3, y_3) \quad e \quad R = (x_4, y_4).$$

Então

$$\begin{aligned} \langle \tilde{g}_1, \tilde{g}_1 \rangle &= \langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (x_1, x_2, x_3, x_4) \rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ \langle \tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \rangle &= \langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 \\ \langle \tilde{g}_1, \tilde{g}_3 \rangle &= \langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (1, 1, 1, 1) \rangle = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \langle \tilde{g}_2, \tilde{g}_1 \rangle &= \langle \tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 \\ \langle \tilde{g}_2, \tilde{g}_2 \rangle &= \langle (y_1, y_2, y_3, y_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \\ \langle \tilde{g}_2, \tilde{g}_3 \rangle &= \langle (y_1, y_2, y_3, y_4), (1, 1, 1, 1) \rangle = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ \langle \tilde{g}_3, \tilde{g}_1 \rangle &= \langle \tilde{g}_1, \tilde{g}_3 \rangle = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \langle \tilde{g}_3, \tilde{g}_2 \rangle &= \langle \tilde{g}_2, \tilde{g}_3 \rangle = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ \langle \tilde{g}_3, \tilde{g}_3 \rangle &= \langle (1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1) \rangle = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \end{aligned} \quad (3.9)$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{g}_1, \tilde{f} \rangle &= \langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (-x_1^2 - y_1^2, -x_2^2 - y_2^2, -x_3^2 - y_3^2, -x_4^2 - y_4^2) \rangle \\
&= x_1(-x_1^2 - y_1^2) + x_2(-x_2^2 - y_2^2) + x_3(-x_3^2 - y_3^2) + x_4(-x_4^2 - y_4^2) \\
\langle \tilde{g}_2, \tilde{f} \rangle &= \langle (y_1, y_2, y_3, y_4), (-x_1^2 - y_1^2, -x_2^2 - y_2^2, -x_3^2 - y_3^2, -x_4^2 - y_4^2) \rangle \\
&= y_1(-x_1^2 - y_1^2) + y_2(-x_2^2 - y_2^2) + y_3(-x_3^2 - y_3^2) + y_4(-x_4^2 - y_4^2) \quad (3.10) \\
\langle \tilde{g}_3, \tilde{f} \rangle &= \langle (1, 1, 1, 1), (-x_1^2 - y_1^2, -x_2^2 - y_2^2, -x_3^2 - y_3^2, -x_4^2 - y_4^2) \rangle \\
&= (-x_1^2 - y_1^2) + (-x_2^2 - y_2^2) + (-x_3^2 - y_3^2) + (-x_4^2 - y_4^2),
\end{aligned}$$

assim a equação matricial com os valores obtidos em (3.9) e (3.10) será:

$$\begin{bmatrix} \langle \tilde{g}_1, \tilde{g}_1 \rangle & \langle \tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \rangle & \langle \tilde{g}_1, \tilde{g}_3 \rangle \\ \langle \tilde{g}_2, \tilde{g}_1 \rangle & \langle \tilde{g}_2, \tilde{g}_2 \rangle & \langle \tilde{g}_2, \tilde{g}_3 \rangle \\ \langle \tilde{g}_3, \tilde{g}_1 \rangle & \langle \tilde{g}_3, \tilde{g}_2 \rangle & \langle \tilde{g}_3, \tilde{g}_3 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \tilde{g}_1, \tilde{f} \rangle \\ \langle \tilde{g}_2, \tilde{f} \rangle \\ \langle \tilde{g}_3, \tilde{f} \rangle \end{bmatrix},$$

que pode ser escrita como

$$Gu = F \quad (3.11)$$

onde

$$G = \begin{bmatrix} \langle \tilde{g}_1, \tilde{g}_1 \rangle & \langle \tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \rangle & \langle \tilde{g}_1, \tilde{g}_3 \rangle \\ \langle \tilde{g}_2, \tilde{g}_1 \rangle & \langle \tilde{g}_2, \tilde{g}_2 \rangle & \langle \tilde{g}_2, \tilde{g}_3 \rangle \\ \langle \tilde{g}_3, \tilde{g}_1 \rangle & \langle \tilde{g}_3, \tilde{g}_2 \rangle & \langle \tilde{g}_3, \tilde{g}_3 \rangle \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} \langle \tilde{g}_1, \tilde{f} \rangle \\ \langle \tilde{g}_2, \tilde{f} \rangle \\ \langle \tilde{g}_3, \tilde{f} \rangle \end{bmatrix}.$$

Multiplicando (3.11) por  $G^{-1}$  a esquerda, onde  $G^{-1}$  é a inversa de  $G$  e  $G^{-1} = \frac{1}{\det(G)} \text{adj}(G)$ , tem-se

$$\begin{aligned}
G^{-1}Gu &= G^{-1}F \\
Iu &= G^{-1}F \\
u &= G^{-1}F
\end{aligned}$$

ou seja, os valores de  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ , ou ainda os valores de  $x_0$ ,  $y_0$  e  $r$ . Assim a circunferência que melhor se aproxima dos nós do elemento da malha é obtida. Para efeito didático considere os exemplos a seguir.

- Exemplo 1

Seja o quadrilátero  $OPQR$  da Figura 3.5 (a), de coordenadas  $O = (1, 1)$ ,  $P = (3, 2)$ ,  $Q = (4, 8)$  e  $R = (2, 7)$ .

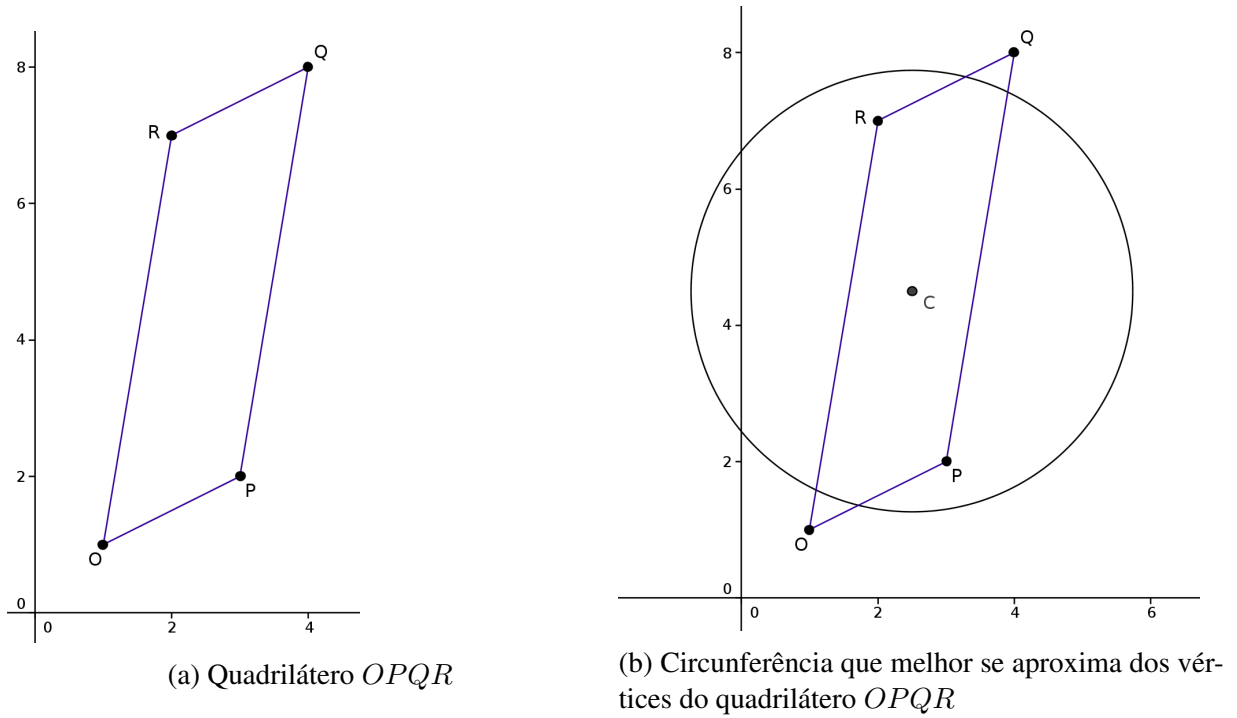


Figura 3.5: Ilustração do exemplo 1, (a) representa o quadrilátero  $OPQR$ , (b) representa o quadrilátero com a circunferência que melhor se aproxima dos vértices do quadrilátero, obtido via mínimos quadrados.

Temos por (3.9) e (3.10) que  $\tilde{g}_1 = (1, 3, 4, 2)$ ,  $\tilde{g}_2 = (1, 2, 8, 7)$ ,  $\tilde{g}_3 = (1, 1, 1, 1)$  e  $\tilde{f} = (-2, -13, -80, -53)$ , então:

$$\langle \tilde{g}_1, \tilde{g}_1 \rangle = \langle (1, 3, 4, 2)(1, 3, 4, 2) \rangle = 30$$

$$\langle \tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \rangle = \langle (1, 3, 4, 2)(1, 2, 8, 7) \rangle = 53$$

$$\langle \tilde{g}_1, \tilde{g}_3 \rangle = \langle (1, 3, 4, 2)(1, 1, 1, 1) \rangle = 10$$

$$\langle \tilde{g}_2, \tilde{g}_1 \rangle = \langle \tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \rangle = 53$$

$$\langle \tilde{g}_2, \tilde{g}_2 \rangle = \langle (1, 2, 8, 7)(1, 2, 8, 7) \rangle = 118$$

$$\langle \tilde{g}_2, \tilde{g}_3 \rangle = \langle (1, 2, 8, 7)(1, 1, 1, 1) \rangle = 18$$

$$\langle \tilde{g}_3, \tilde{g}_1 \rangle = \langle \tilde{g}_1, \tilde{g}_3 \rangle = 10$$

$$\langle \tilde{g}_3, \tilde{g}_2 \rangle = \langle \tilde{g}_2, \tilde{g}_3 \rangle = 18$$

$$\langle \tilde{g}_3, \tilde{g}_3 \rangle = \langle (1, 1, 1, 1)(1, 1, 1, 1) \rangle = 4$$

$$\langle \tilde{g}_1, \tilde{f} \rangle = \langle (1, 3, 4, 2)(-2, -13, -80, -53) \rangle = -467$$

$$\langle \tilde{g}_2, \tilde{f} \rangle = \langle (1, 2, 8, 7)(-2, -13, -80, -53) \rangle = -1039$$

$$\langle \tilde{g}_3, \tilde{f} \rangle = \langle (1, 1, 1, 1)(-2, -13, -80, -53) \rangle = -148$$

que na forma matricial fica:

$$\begin{bmatrix} 30 & 53 & 10 \\ 53 & 118 & 18 \\ 10 & 18 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -467 \\ -1039 \\ -148 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

que resulta em  $u_1 = -5$ ,  $u_2 = -9$  e  $u_3 = 16$  e por (3.7) temos que

$$\begin{aligned} -2x_0 &= -5 \Rightarrow x_0 = \frac{5}{2} \\ -2y_0 &= -9 \Rightarrow y_0 = \frac{9}{2} \\ x_0^2 + y_0^2 - r^2 &= 16 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{42}}{2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

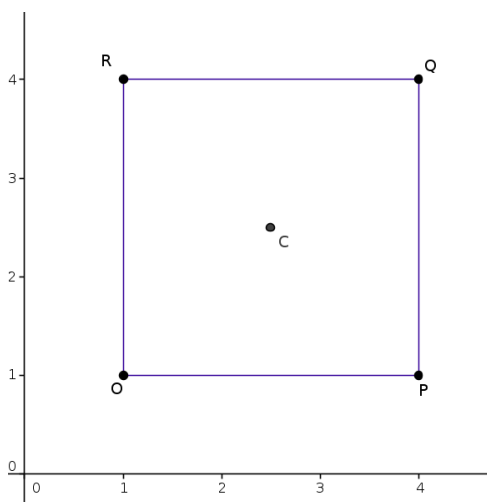
Substituindo os valores de (3.13) em (3.5) temos

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{42}{4}$$

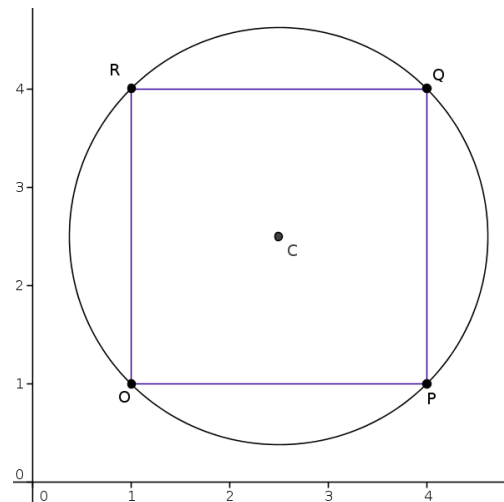
que é a equação da circunferência que melhor se aproxima dos vértices do quadrilátero  $OPQR$ , Figura 3.5 (b).

- Exemplo 2

Seja o quadrado  $OPQR$  como na Figura 3.6 (a) de coordenadas  $O = (1, 1)$ ,  $P = (4, 1)$ ,  $Q = (4, 4)$  e  $R = (1, 4)$



(a) Quadrado  $OPQR$



(b) Circunferência circunscrita ao quadrado  $OPQR$

Figura 3.6: Ilustração do exemplo 2, (a) representa o quadrado  $OPQR$ , (b) representa o quadrado com a circunferência circunscrita.



Resolvendo os passos de forma analoga ao exemplo 1, obteremos

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$$

que é a equação da circunferência circunscrita ao quadrado  $OPQR$ , Figura 3.6 (b). Como havíamos comentado, todo quadrilátero cuja soma dos ângulos apostos é  $180^\circ$  pode ser inscrito em uma circunferência, esse exemplo mostra um desses casos. Com as métricas definidas, introduziremos nossos parâmetros de qualidade de malhas.

### 3.2 COMPRIMENTO DE FORMA

Nessa seção introduziremos um parâmetro de qualidade de malha que envolve o baricentro  $B_k$  de um  $k$ -elemento da malha e o centro  $C_k$  da circunferência que melhor se aproxima dos nós desse  $k$ -elemento. Esse parâmetro será nomeado como comprimento de forma e denotado por  $d_k(B_k, C_k)$ . A ideia é calcularmos a distância entre esses dois pontos, e a partir desse resultado conceber um novo parâmetro de qualidade.

Na seção anterior mostramos como encontrar o baricentro e a circunferência que melhor se aproxima dos vértices do quadrilátero, o próximo passo é calcular o comprimento de forma, ou seja, a distância entre eles.

Dadas as coordenadas do centro da circunferência  $(x_C, y_C)$  e do baricentro do quadrilátero  $(x_B, y_B)$  a distância entre eles é dada por:

$$d(C, B) = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}. \quad (3.14)$$

Assim construímos o conjunto  $\mathbf{d}$ , ou seja, obtemos

$$\mathbf{d} = \{d_1(B_1, C_1), d_2(B_2, C_2), \dots, d_m(B_m, C_m)\} = \{d_k(B_k, C_k), k = 1, 2, \dots, m\},$$

o conjunto dos comprimentos de forma de uma malha com  $m$  elementos tal que  $d_k(B_k, C_k)$  denota a distância entre o baricentro e o centro da circunferência do  $k$ -ésimo elemento.

Esse parâmetro consiste em quanto maior a distância entre o baricentro e o centro da circunferência, ou seja, o comprimento de forma, menos adequado será o elemento da malha.

### 3.3 DIFERENÇA DE ÁREA

Nosso próximo parâmetro de qualidade de malha nomeado como diferença de área, envolve a área do elemento e a área da circunferência que melhor se aproxima dos nós desse elemento. Lembrando que a área de uma circunferência é dada por  $\pi r^2$ , onde  $r$  representa o raio da circunferência, e como mostrado anteriormente, a área do elemento é dada pelo inverso do jacobiano, equação (3.4)

Nosso parâmetro consiste em calcularmos o módulo da diferença entre essas áreas, ou seja,

$$DA = \left| \pi r^2 - \frac{1}{J} \right|, \quad (3.15)$$

de onde obtemos o conjunto,

$$DA = \{DA_1, DA_2, \dots, DA_m, \} = \left\{ \left| \pi r_k^2 - \frac{1}{J_k} \right|, k = 1, 2, \dots, m \right\},$$

o conjunto das diferenças de área dos  $m$  elementos, onde  $\left| \pi r_k^2 - \frac{1}{J_k} \right|$  denota a diferença entre a área da circunferência e a área do  $k$ -ésimo elemento.

O parâmetro diferença de área consiste em quanto maior a diferença das áreas, menos adequado será o elemento da malha.

### 3.4 MODELO DE QUALIDADE PARA GERAÇÃO DE MALHAS

Nessa seção introduziremos um modelo de qualidade de malhas que relaciona os dois parâmetros citados acima. Nas seções anteriores encontramos os conjuntos  $\mathbf{d}$  e  $\mathbf{DA}$ . Agora construímos outros dois conjuntos através destes, denotados por  $\mathbf{d}'$  e  $\mathbf{DA}'$ , onde  $\mathbf{d}'$  e  $\mathbf{DA}'$  são formados pelos elementos dos conjuntos  $\mathbf{d}$  e  $\mathbf{DA}$  respectivamente, na ordem decrescente.

Dos conjuntos  $\mathbf{d}'$  e  $\mathbf{DA}'$ , construímos as listas  $L_d$  e  $L_{DA}$ , onde  $L_d$  é formada pela numeração dos elementos do conjunto  $\mathbf{d}'$ , e  $L_{DA}$  é formada pela numeração dos elementos do conjunto  $\mathbf{DA}'$  ambos na forma ordenada.

Denotamos por  $l$  a quantidade de elementos das listas  $L_d$  e  $L_{DA}$  que serão analisados, como por exemplo, quando  $l = 1$  serão analisados 1 elemento da lista  $L_d$  e 1 elemento da lista  $L_{DA}$ , quando  $l = 2$  serão analisados dois elementos de cada lista, e assim por diante.

A partir dos dados obtidos, conjecturamos que:

*“A medida que em se avança, de forma crescente em  $l$ , existe o momento em que*

$$\#L_d(l) \cup \#L_{DA}(l) = \#L_d(l+1) \cup \#L_{DA}(l+1) \text{ para algum } l \neq 1” \quad (3.16)$$

Quando a igualdade (3.16) ocorre, ou seja, quando aumentamos um elemento de cada lista e o conjunto união permanece o mesmo, temos nosso padrão de qualidade, que identificam os elementos considerados menos adequados de uma malha, que necessitam ser remodelados. E essa união formará o conjunto  $\mathbf{MA}$  (menos adequado). Assim,  $\mathbf{MA} = L_d(l) \cup L_{DA}(l)$ , para algum  $l$ , e esse conjunto será o conjunto de elementos menos adequados da malha. Apresentamos agora um exemplo para melhor compreensão.

**I -** Dados os nós da borda de uma geometria 2D, geramos uma malha em coordenadas generalizadas na forma adimensional usando como comprimento de referência  $L = 1$ , com 15

elementos que estão enumerados como mostra a Figura 3.7.

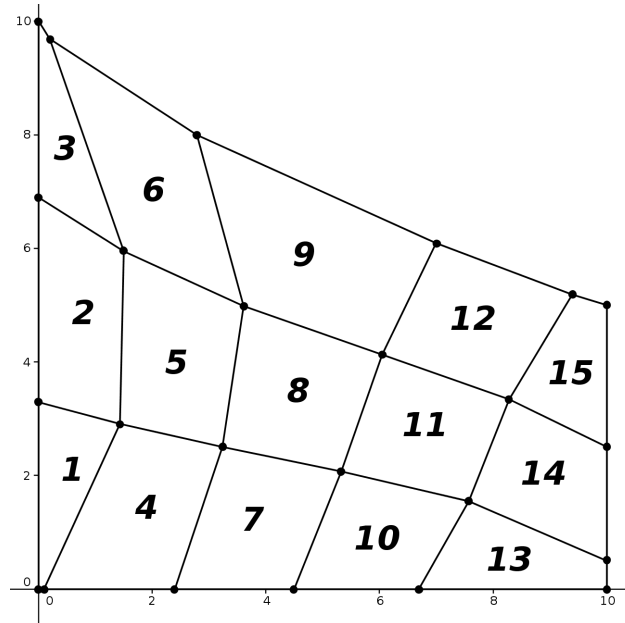


Figura 3.7: Malha semi-trapezoidal com 15 elementos gerada em coordenadas generalizadas na forma adimensional

Os nós dos elementos mostrados na Figura 3.7 com truncamento de quatro casas após a vírgula tem coordenadas dadas pela Tabela 3.1.

Elemento	nó1	nó2	nó3	nó4
1	(0.0000,0.0000)	(0.1000,0.0000)	(1.4359,2.9164)	(0.0000,3.2999)
2	(0.0000,3.2999)	(1.4359,2.9164)	(1.5184,5.9551)	(0.0000,6.9000)
3	(0.0000,6.9000)	(1.5184,5.9551)	(0.2000,9.6999)	(0.0000,10.0000)
4	(0.1000,0.0000)	(2.4000,0.0000)	(3.2422,2.5007)	(1.4359,2.9164)
5	(1.4359,2.9164)	(3.2422,2.5007)	(3.6106,4.9824)	(1.5184,5.9551)
6	(1.5184,5.9551)	(3.6106,4.9824)	(2.7999,8.0000)	(0.2000,9.6999)
7	(2.4000,0.0000)	(4.5000,0.0000)	(5.3370,2.0776)	(3.2422,2.5007)
8	(3.2422,2.5007)	(5.3370,2.0776)	(6.0566,4.1341)	(3.6106,4.9824)
9	(3.6106,4.9824)	(6.0566,4.1341)	(7.0000,6.0999)	(2.7999,8.0000)
10	(4.5000,0.0000)	(6.6999,0.0000)	(7.5773,1.5565)	(5.3370,2.0776)
11	(5.3370,2.0776)	(7.5773,1.5565)	(8.2839,3.3448)	(6.0566,4.1341)
12	(6.0566,4.1341)	(8.2839,3.3448)	(9.3999,5.1999)	(7.0000,6.0999)
13	(6.6999,0.0000)	(10.0000,0.0000)	(10.0000,0.5000)	(7.5773,1.5565)
14	(7.5773,1.5565)	(10.0000,0.5000)	(10.0000,2.5000)	(8.2839,3.3448)
15	(8.2839,3.3448)	(10.0000,2.5000)	(10.0000,5.0000)	(9.3999,5.1999)

Tabela 3.1: Coordenadas dos nós da malha representada pela Figura 3.7

**II -** Como as coordenadas do elemento 1 são  $nó1 = (0.0000, 0.0000)$ ,  $nó2 = (0.1000, 0.0000)$ ,  $nó3 = (1.4359, 2.9164)$  e  $nó4 = (0.0000, 3.2999)$ , o baricentro dos triângulos formados pelas diagonais do elemento são dados por:

$$\begin{aligned}
 B_{nó1nó2nó3} &= \left( \frac{0.0000 + 0.1000 + 1.4359}{3}, \frac{0.0000 + 0.0000 + 2.9164}{3} \right) = (0.5119, 0.9721) \\
 B_{nó1nó4nó3} &= \left( \frac{0.0000 + 0.0000 + 1.4359}{3}, \frac{0.0000 + 3.2999 + 2.9164}{3} \right) = (0.4786, 2.0721) \\
 B_{nó1nó2nó4} &= \left( \frac{0.0000 + 0.1000 + 0.0000}{3}, \frac{0.0000 + 0.0000 + 3.2999}{3} \right) = (0.0333, 1.0999) \\
 B_{nó2nó4nó3} &= \left( \frac{0.1000 + 0.0000 + 1.4359}{3}, \frac{0.0000 + 3.2999 + 2.9164}{3} \right) = (0.5119, 2.0721)
 \end{aligned}$$

Agora, a reta que passa por  $B_{nó1nó2nó3}$  e  $B_{nó1nó4nó3}$  é dada por

$$\begin{vmatrix} 0.5119 & 0.9721 & 1 \\ 0.4786 & 2.0721 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = -1.100x - 0.0333y + 0.5955$$

e a reta que passa por  $B_{nó1nó2nó4}$  e  $B_{nó2nó4nó3}$  é

$$\begin{vmatrix} 0.0333 & 1.0999 & 1 \\ 0.5119 & 2.0421 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = -0.9422x + 0.4786y - 0.4950,$$

cuja intersecção dessas retas nos dá

$$\begin{aligned}
 1.9686x + 1.0342 &= 17.8828 - 33.0330x \\
 \implies 35.0016x &= 16.8486 \\
 \implies x &= 0.4813
 \end{aligned}$$

e assim  $y = 1.9816$ . A coordenada do baricentro do elemento 1 é  $B_1 = (0.4813, 1.9816)$ . Procedendo de forma análoga para todos os elementos encontramos o baricentro de cada elemento, Figura 3.8, cujas coordenadas são:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= (0.4813, 1.9816) & B_2 &= (0.7194, 4.7932) & B_3 &= (0.5108, 7.6835) \\
 B_4 &= (1.7524, 1.3226) & B_5 &= (2.4288, 4.1359) & B_6 &= (1.9885, 7.2177) \\
 B_7 &= (3.8434, 1.1609) & B_8 &= (4.5445, 3.4662) & B_9 &= (4.8338, 5.9291) \\
 B_{10} &= (5.9875, 0.9329) & B_{11} &= (6.7920, 2.7908) & B_{12} &= (7.6883, 4.7095) \\
 B_{13} &= (8.3023, 0.5506) & B_{14} &= (8.9461, 1.9273) & B_{15} &= (9.3805, 3.8287).
 \end{aligned}$$

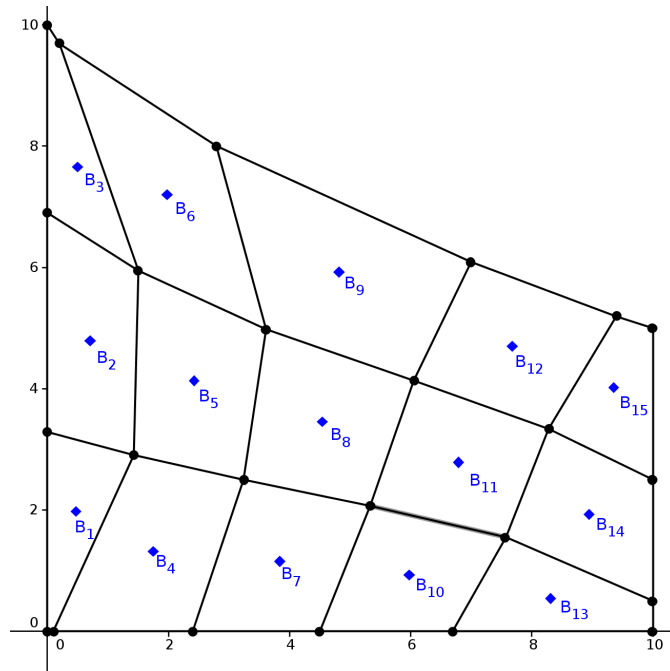


Figura 3.8: Malha onde  $B_i$  representa o baricentro de cada elemento  $i$

**III -** Agora, usando mínimos quadrados para os nós de cada elemento, encontramos as circunferências que melhor se aproximam dos nós, Figura 3.9. As coordenadas dos centros são dadas por:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= (0.3284, 1.6544) & C_2 &= (0.4321, 4.8335) & C_3 &= (1.8747, 8.3120) \\
 C_4 &= (1.5615, 1.3387) & C_5 &= (2.2766, 4.2082) & C_6 &= (1.6816, 7.2876) \\
 C_7 &= (3.7666, 1.1660) & C_8 &= (4.5106, 3.5555) & C_9 &= (4.8952, 6.5651) \\
 C_{10} &= (5.9475, 0.9244) & C_{11} &= (6.7655, 2.8096) & C_{12} &= (7.7069, 4.7453) \\
 C_{13} &= (8.3635, 0.1017) & C_{14} &= (8.9313, 1.7697) & C_{15} &= (9.5381, 3.7926).
 \end{aligned}$$

Encontrados os baricentros e os centros das circunferências, o próximo passo é calcular as distâncias entre eles usando (3.14). Na Figura 3.10, os segmentos vermelhos representam essas distâncias.

A distância entre o baricentro  $B_1$  e o centro da circunferência  $C_1$  do elemento 1, será:

$$d_1(C_1, B_1) = \sqrt{(0.3288 - 0.4813)^2 + (1.6544 - 1.9816)^2} = \sqrt{0.0232 + 0.1070} = 0.3608.$$

Procedendo de forma análoga para todos os elementos, obteremos o conjunto

$$\mathbf{d} = \{0.3608, 0, 2901, 1.5017, 0.1915, 0.1685, 0.3147, 0.0770, 0.0955, 0.6389, \\
 0.0408, 0.0325, 0.0404, 0.4531, 0.1582, 0.1617\}. \quad (3.17)$$

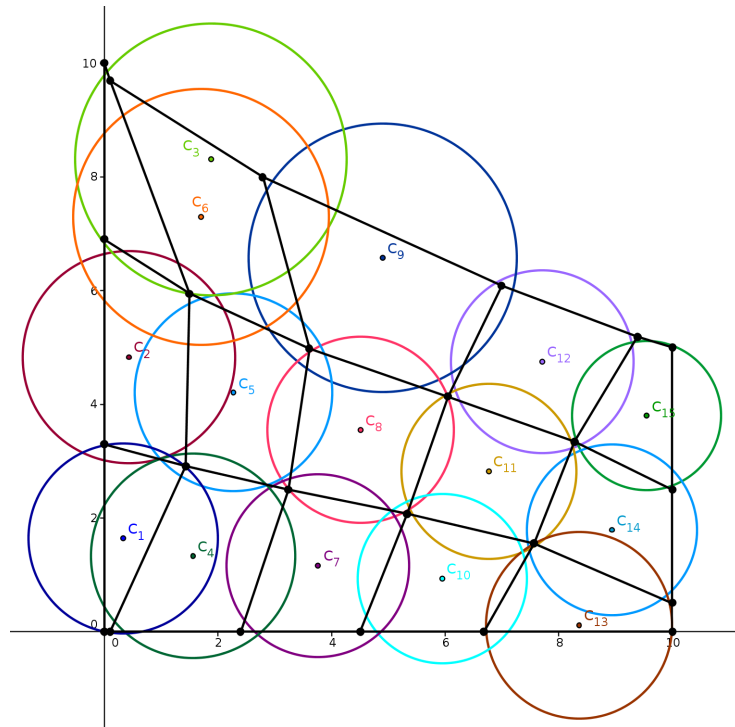


Figura 3.9: Malha com a circunferência que melhor se aproxima dos nós de cada elemento

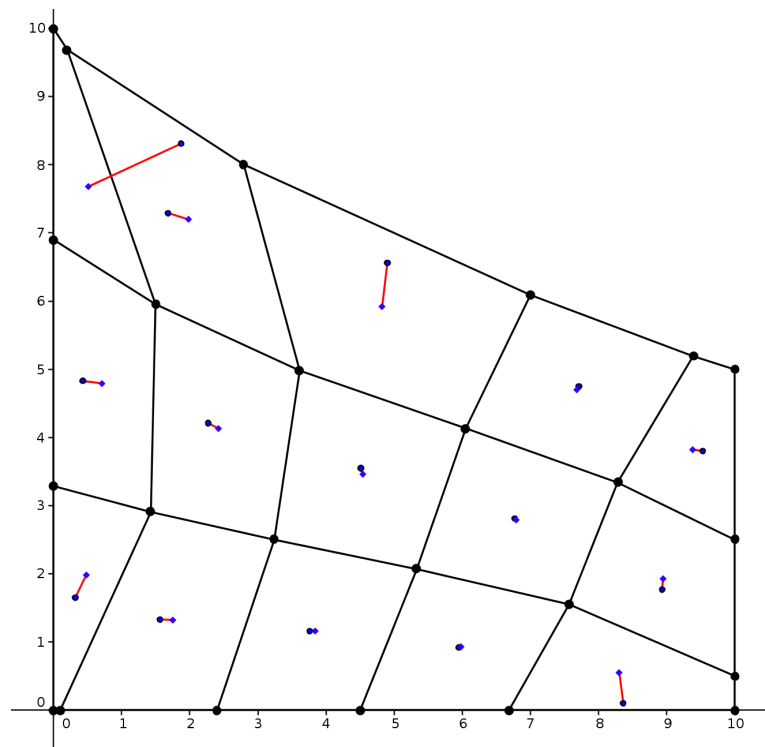


Figura 3.10: Distância entre o baricentro e o centro da circunferência

**IV** - O próximo passo consiste em encontrar as áreas das circunferências que melhor se aproximam dos nós. Pelo método dos mínimos quadrados temos os raios das circunferências,

que são dadas por:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= 1.6785 & r_2 &= 1.8786 & r_3 &= 2.3603 \\
 r_4 &= 1.8099 & r_5 &= 1.7485 & r_6 &= 2.2699 \\
 r_7 &= 1.6185 & r_8 &= 1.6703 & r_9 &= 2.3722 \\
 r_{10} &= 1.5107 & r_{11} &= 1.5536 & r_{12} &= 1.6431 \\
 r_{13} &= 1.6612 & r_{14} &= 1.5173 & r_{15} &= 1.3536.
 \end{aligned}$$

A área da circunferência do elemento 1 considerando  $\pi = 3.1415$  será:

$$a_{c_1} = \pi r_1^2 = 3.1415 \times 1.6785^2 = 8.8507.$$

Repetindo o processo para todas as circunferências temos:

$$\begin{aligned}
 a_{c_1} &= 8.8507 & a_{c_2} &= 11.0870 & a_{c_3} &= 17.5020 \\
 a_{c_4} &= 10.2910 & a_{c_5} &= 9.6046 & a_{c_6} &= 16.1870 \\
 a_{c_7} &= 8.2296 & a_{c_8} &= 8.7647 & a_{c_9} &= 17.6790 \\
 a_{c_{10}} &= 7.1697 & a_{c_{11}} &= 7.5827 & a_{c_{12}} &= 8.4815 \\
 a_{c_{13}} &= 8.6692 & a_{c_{14}} &= 7.2324 & a_{c_{15}} &= 5.7557,
 \end{aligned}$$

onde  $a_{c_k}$  representa a área da circunferência do  $k$ -ésimo elemento. Agora vamos calcular a área do elemento 1 através de (3.4),

$$a_{e_1} = (0.7697 - 0.0000)(3.1081 - 0.0000) - (0.7179 - 0.0500)(1.4582 - 1.6499) = 2.5203.$$

Calculando a área de todos os elementos teremos:

$$\begin{aligned}
 a_{e_1} &= 2.5203 & a_{e_2} &= 4.9306 & a_{e_3} &= 2.5302 \\
 a_{e_4} &= 5.7874 & a_{e_5} &= 5.5368 & a_{e_6} &= 6.5099 \\
 a_{e_7} &= 4.9789 & a_{e_8} &= 5.4976 & a_{e_9} &= 8.3712 \\
 a_{e_{10}} &= 4.2574 & a_{e_{11}} &= 4.7615 & a_{e_{12}} &= 5.2898 \\
 a_{e_{13}} &= 3.1740 & a_{e_{14}} &= 4.2556 & a_{e_{15}} &= 2.8133,
 \end{aligned}$$

onde,  $a_{e_k}$  representa a área do  $k$ -ésimo elemento. Encontramos as áreas das circunferências e dos elementos, o próximo passo é calcular as diferenças de áreas, como em (3.15), assim a diferença de área do elemento 1 será:

$$DA_1 = |8.8507 - 2.5203| = 6.3304.$$

Repetindo os mesmos cálculos para todos os elementos, obtemos o conjunto

$$DA = \{6.3304, 6.1564, 14.9718, 4.5036, 4.0678, 9.6771, 3.2507, 3.2671, 9.3078, \\ 2.9123, 2.8212, 3.1917, 5.4952, 2.9768, 2.9424\} . \quad (3.18)$$

**V** - Ordenando o conjunto (3.17) obtemos:

$$d' = \{1.5017, 0.6389, 0.4531, 0.3608, 0.3147, 0.2901, 0.1915, 0.1685, 0.1617, \\ 0.1582, 0.0955, 0.0770, 0.0408, 0.0404, 0.0325\} \quad (3.19)$$

e agora ordenando o conjunto (3.18), temos:

$$DA' = \{14.9718, 9.6771, 9.3078, 6.3304, 6.1564, 5.4952, 4.5036, 4.0678, 3.2671, \\ 3.2507, 3.1917, 2.9768, 2.9424, 2.9123, 2.8212\} . \quad (3.20)$$

Os elementos da malha da Figura 3.7 que originaram os conjuntos  $d'$  e  $DA'$  acima são respectivamente as listas 1 e 2 como segue

$$L_d = [3, 9, 13, 1, 6, 2, 4, 5, 15, 14, 7, 8, 10, 11, 12] \quad (3.21)$$

$$L_{DA} = [3, 6, 9, 1, 2, 13, 4, 5, 8, 7, 12, 14, 15, 10, 11] \quad (3.22)$$

**VI** - Com todos estes dados disponíveis, organizamos a Tabela 3.2. A primeira coluna refere-se ao  $l$ , a segunda e terceira colunas as listas ordenadas (3.21) e (3.22) e a quarta coluna o conjunto  $MA$ .



Tabela 3.2: Tabela da análise de qualidade dos elementos

$l$	$L_d$	$L_{DA}$	<b>MA</b>
1	3	3	3
2	3,9	3,6	3,6,9
3	3,9,13	3,6,9	3,6,9,13
4	3,9,13,1	3,6,9,1	1,3,6,9,13
5	3,9,13,1,6	3,6,9,1,2	1,2,3,6,9,13
6	3,9,13,1,6,2	3,6,9,1,2,13	1,2,3,6,9,13

Pela Tabela 3.2 observamos que quando  $l = 5$  e  $l = 6$  ocorre a igualdade da conjectura apresentada em (3.16), ou seja, o modelo de qualidade aponta que  $\mathbf{MA} = \{1, 2, 3, 6, 9, 13\}$ , são os elementos menos adequados da malha. Podemos observar pela Figura 3.7 que os elementos 1, 2, 3, 6, 9, 13 realmente são os mais disformes da malha semi-trapezoidal. Agora obtido o modelo de qualidade de malhas, no próximo capítulo apresentaremos o algoritmo básico de geração de malha com parâmetros de qualidade, algumas aplicações e os resultados obtidos.

## 4 APLICAÇÕES

Neste capítulo, apresentaremos o algoritmo básico que representa o método de geração de malha e também algumas aplicações e seus resultados

Com o intuito de validar o modelo teórico exposto nos capítulos 2 e 3, apresentaremos algumas simulações de geração de malha 2D em coordenadas generalizadas na forma adimensional com parâmetros de qualidade.

Para o estudo da validação, analisaremos se o modelo apresentará bons resultados comparados aos elementos de formas fundamentais (quadrado, retângulo).

As malhas foram geradas em coordenadas generalizadas, na forma adimensional com comprimento de referência 1. Utilizamos o software *Paraview* para visualização das malhas aqui geradas. As legendas estão representadas pela escala de cores nomeada pelo software por *Blue to red Rainbow*. A cor vermelha representa o elemento cujo comprimento de forma e a diferença de área são maiores, e conforme esses valores vão decrescendo, as cores vão se alterando para tons de amarelo, verde, até chegar a cor azul, onde os valores do comprimento de forma e diferença de área são menores, conforme a legenda. Para efeito didático e melhor compreensão as malhas foram geradas de forma pouco refinada e a numeração dos elementos segue conforme o exemplo (Figura 3.7), apresentado na seção 3.4, capítulo 3.

### 4.1 MODELO NUMÉRICO DA GERAÇÃO DE MALHAS 2D

O modelo numérico de geração de malhas foi implementado no FORTRAN 90. Como mencionado acima, para visualização das nossas malhas utilizamos o software *Paraview*, em ambiente linux. A seguir expõe-se o algoritmo representativo básico que caracteriza o método de geração de malhas com parâmetros de qualidade.

---

**Algorithm 1** Algoritmo de geração de malha computacional 2D adimensional
 

---

Tome o conjunto de coordenadas da borda (dimensional)  $(x_i, y_i)$  com  $i = 1, \dots, n + 1$

Tome o comprimento de referência  $L$

**procedure** ALOCAÇÃO DE MEMÓRIA

**end procedure**

**procedure** LEITURA DAS COORDENADAS DOS PONTOS DA BORDA =  $(x_i, y_i)$

*Tabela 2.1*

**end procedure**

**procedure** INTERPOLAÇÃO SPLINE CÚBICA PARAMETRIZADA ADIMENSIONAL

**end procedure**

**procedure** RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE GERAÇÃO DE MALHA ADIMENSIONAL

**end procedure**

**procedure** CÁLCULO DOS PARÂMETROS DE QUALIDADE COMPRIMENTO DE FORMA E DIFERENÇA DE ÁREAS

**end procedure**

**procedure** GRAVAÇÃO =  $(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$

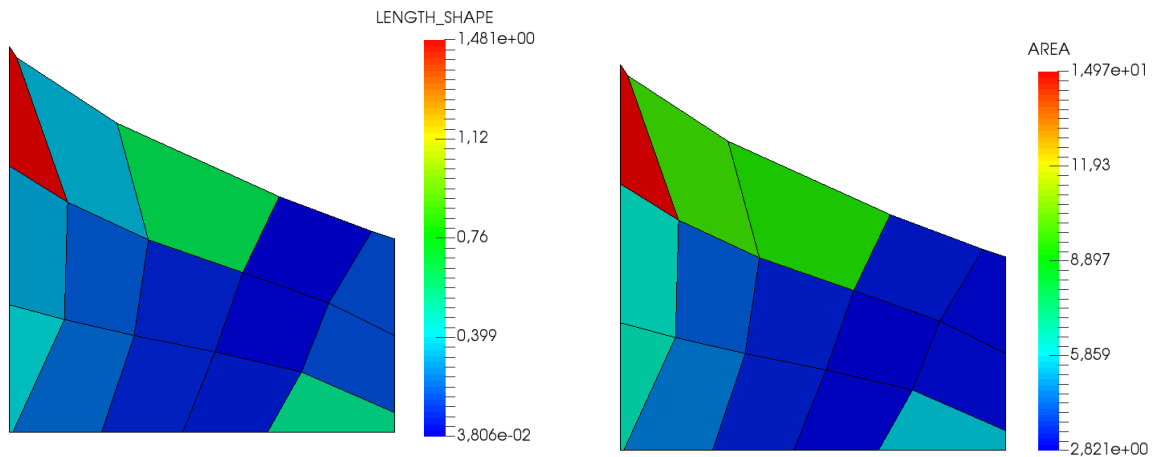
**end procedure**

---

## 4.2 MALHA SEMI-TRAPEZOIDAL

A primeira simulação, refere-se ao exemplo mostrado na seção 3.4, capítulo 3. Construímos uma malha com 6 linhas na direção  $\xi$  e 4 na direção  $\eta$ , sendo uma malha com o total de 15 elementos. Os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área, dessa malha pode ser visualizado na Figura 4.1.

Visualmente percebemos que o elemento 3 apresenta a cor vermelha segundo os dois parâmetros mencionados, ou seja, ele é considerado o elemento menos adequado dessa malha. Conforme apresentado na seção 3.4 do capítulo 3, a igualdade da conjectura (3.16) ocorre para  $l = 5$  e  $l = 6$  e o conjunto  $\mathbf{MA} = \{1, 2, 3, 6, 9, 13\}$ , com 6 elementos. Segundo nosso modelo de qualidade os elementos 1, 2, 3, 6, 9, 13 são os menos adequados da malha semi-trapezoidal e devem ser remodelados.



(a) Malha gerada com parâmetro comprimento de forma.

(b) Malha gerada com parâmetro diferença de área.

Figura 4.1: Malha gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.

### 4.3 MALHAS QUADRADA E RETANGULAR

Nessa seção apresentamos uma malha quadrada e uma retangular, a primeira malha quadrada foi discretizada com 8 linhas na direção  $\xi$  e 8 em  $\eta$ , com 49 elementos quadrados.

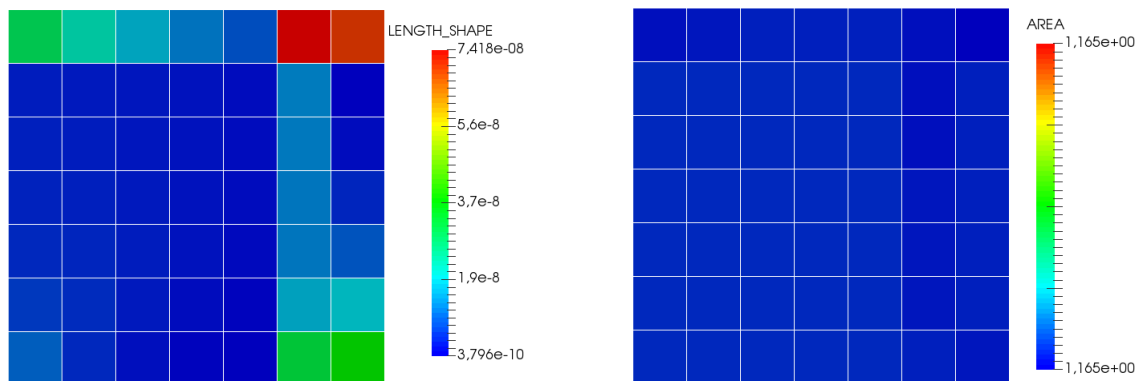


Figura 4.2: Malha quadrada gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.

Podemos observar na Tabela 4.1 a análise do modelo de qualidade apresentado pela conjectura (3.16).

Tabela 4.1: Tabela do modelo de qualidade dos elementos da malha quadrada.

$l$	$L_d$	$L_{DA}$	MA
1	42	6	6,42
2	42,49	6,5	5,6,42,49
3	42,49,43	6,5,4	4,5,6,42,43,49
4	42,49,43,36	6,5,4,3	3,4,5,6,36,42,43,49
5	42,49,43,36,7	6,5,4,3,2	2,3,4,5,6,7,36,42,43,49
6	42,49,43,36,7,14	6,5,4,3,2,13	2,3,4,5,6,7,13,14,36,42,43,49
7	42,49,43,36,7,14,44	6,5,4,3,2,13,1,	1,2,3,4,5,6,7,13,14,36,42,43,44,49
8	42,49,43,36,7,14,44,21	6,5,4,3,2,13,1,12	1,2,3,4,5,6,7,12,13,14,21,36,42,43,44,49
9	42,49,43,36,7,14,44,21,37	6,5,4,3,2,13,1,12,11	1,2,3,4,5,6,7,11,12,13,14,21,36,37,42,43,44,49
10	42,49,43,36,7,14,44,21,37, 41	6,5,4,3,2,13,1,12,11, 10	1,2,3,4,5,6,7,10,11,12,13,14,21,36,37,41,42,43, 44,49
11	42,49,43,36,7,14,44,21,37,41, 40	6,5,4,3,2,13,1,12,11,10 20	1,2,3,4,5,6,7,10,11,12,13,14,20,21,36,37,40,41, 42,43,44,49
12	42,49,43,36,7,14,44,21,37,41,40, 38	6,5,4,3,2,13,1,12,11,10,20, 19	1,2,3,4,5,6,7,10,11,12,13,14,19,20,21,36,37,38, 40,41,42,43,44,49
13	42,49,43,36,7,14,44,21,37,41,40, 38,39	6,5,4,3,2,13,1,12,11,10,20, 19,9	1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,14,19,20,21,36,37, 38,39,40,41,42,43,44,49
14	42,49,43,36,7,14,44,21,37,41,40, 38,39,28,	6,5,4,3,2,13,1,12,11,10,20, 19,9,18	1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,14,18,19,20,21,28,36, 37,38,39,40,41,42,43,44,49
15	42,49,43,36,7,14,44,21,37,41,40, 38,39,28,1	6,5,4,3,2,13,1,12,11,10,20, 19,9,18,27	1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,14,18,19,20,21,27,28, 36,37,38,39,40,41,42,43,44,49
16	42,49,43,36,7,14,44,21,37,41,40, 38,39,28,1,45	6,5,4,3,2,13,1,12,11,10,20, 19,9,18,27,17	1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,14,17,18,19,20,21,27, 28,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,49
17	42,49,43,36,7,14,44,21,37,41,40, 38,39,28,1,45,35	6,5,4,3,2,13,1,12,11,10,20, 19,9,18,27,17,26	1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,14,17,18,19,20,21,26, 27,28,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,49
18	42,49,43,36,7,14,44,21,37,41,40, 38,39,28,1,45,35,2	6,5,4,3,2,13,1,12,11,10,20, 19,9,18,27,17,26,25	1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,14,17,18,19,20,21,25, 26,27,28,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,49
19	42,49,43,36,7,14,44,21,37,41,40, 41,40,38,39,28,1,45,35,2, 9	6,5,4,3,2,13,1,12,11,10,20, 19,9,18,27,17,26,25, 8	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,17,18,19,20,21, 25,26,27,28,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45, 49
20	42,49,43,36,7,14,44,21,37,41,40, 38,39,28,1,45,35,2,9 3	6,5,4,3,2,13,1,12,11,10,20, 19,9,18,27,17,26,25,8 34	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,17,18,19,20,21, 25,26,27,28,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44, 45,49
21	42,49,43,36,7,14,44,21,37,41,40, 38,39,28,1,45,35,2,9,3, 8	6,5,4,3,2,13,1,12,11,10,20 19,9,18,27,17,26,25,8,34, 16	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,16,17,18,19,20, 21,25,26,27,28,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43, 44,45,49
22	42,49,43,36,7,14,44,21,37,41,40, 41,40,38,39,28,1,45,35,2,9,3,8, 46	6,5,4,3,2,13,1,12,11,10,20, 19,9,18,27,17,26,25,8,34,16, 33	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,16,17,18,19,20, 21,25,26,27,28,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42, 43,44,45,46,49
23	42,49,43,36,7,14,44,21,37,41,40, 38,39,28,1,45,35,2,9,3,8,46, 10	6,5,4,3,2,13,1,12,11,10,20, 19,9,18,27,17,26,25,8,34,16,33, 24	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,16,17,18,19,20, 21,24,25,26,27,28,33,34,35,36,37,38,39,40,41, 42,43,44,45,46,49
24	42,49,43,36,7,14,44,21,37,41,40, 38,39,28,1,45,35,2,9,3,8,46, 10,4	6,5,4,3,2,13,1,12,11,10,20, 19,9,18,27,17,26,25,8,34,16,33, 24,32	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,16,17,18,19,20, 21,24,25,26,27,28,32,33,34,35,36,37,38,39,40, 41,42,43,44,45,46,49
25	42,49,43,36,7,14,44,21,37,41,40, 38,39,28,1,45,35,2,9,3,8,46, 10,4,11	6,5,4,3,2,13,1,12,11,10,20, 19,9,18,27,17,26,25,8,34,16,33, 24,32,23	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,16,17,18,19,20, 21,23,24,25,26,27,28,32,33,34,35,36,37,38,39, 40,41,42,43,44,45,46,49
26	42,49,43,36,7,14,44,21,37,41,40, 38,39,28,1,45,35,2,9,3,8,46, 10,4,11,5	6,5,4,3,2,13,1,12,11,10,20, 19,9,18,27,17,26,25,8,34,16,33, 24,32,23,31	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,16,17,18,19,20, 21,23,24,25,26,27,28,31,32,33,34,35,36,37,38, 39,40,41,42,43,44,45,46,49

27	42,49,43,36,7,14,44,21,37,41,40, 38,39,28,1,45,35,2,9,3,8,46, 10,4,11,5,6	6,5,4,3,2,13,1,12,11,10,20, 19,9,18,27,17,26,25,8,34,16,33, 24,32,23,31,15	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19, 20,21,23,24,25,26,27,28,31,32,33,34,35,36,37, 38,39,40,41,42,43,44,45,46,49
28	42,49,43,36,7,14,44,21,37,41,40, 38,39,28,1,45,35,2,9,3,8,46, 10,4,11,5,6,17	6,5,4,3,2,13,1,12,11,10,20, 19,9,18,27,17,26,25,8,34,16,33, 24,32,23,31,15,30	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19, 20,21,23,24,25,26,27,28,30,31,32,33,34,35,36, 37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,49
29	42,49,43,36,7,14,44,21,37,41,40, 38,39,28,1,45,35,2,9,3,8,46, 10,4,11,5,6,17,12	6,5,4,3,2,13,1,12,11,10,20, 19,9,18,27,17,26,25,8,34,16,33, 24,32,23,31,15,30,22	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19, 20,21,22,23,24,25,26,27,28,30,31,32,33,34,35, 36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,49
30	42,49,43,36,7,14,44,21,37,41,40, 38,39,28,1,45,35,2,9,3,8,46, 10,4,11,5,6,17,12,18	6,5,4,3,2,13,1,12,11,10,20, 19,9,18,27,17,26,25,8,34,16,33, 24,32,23,31,15,30,22,29	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19, 20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34, 35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,49
31	42,49,43,36,7,14,44,21,37,41,40, 38,39,28,1,45,35,2,9,3,8,46, 10,4,11,5,6,17,12,18,16	6,5,4,3,2,13,1,12,11,10,20, 19,9,18,27,17,26,25,8,34,16,33, 24,32,23,31,15,30,22,29,48	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19, 20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34, 35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,48,49
32	42,49,43,36,7,14,44,21,37,41,40, 38,39,28,1,45,35,2,9,3,8,46, 10,4,11,5,6,17,12,18,16,13,	6,5,4,3,2,13,1,12,11,10,20, 19,9,18,27,17,26,25,8,34,16,33, 24,32,23,31,15,30,22,29,48,47	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19, 20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34, 35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49
33	42,49,43,36,7,14,44,21,37,41,40, 38,39,28,1,45,35,2,9,3,8,46, 10,4,11,5,6,17,12,18,16,13,19	6,5,4,3,2,13,1,12,11,10,20, 19,9,18,27,17,26,25,8,34,16,33, 24,32,23,31,15,30,22,29,48,47,46	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19, 20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34, 35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49

Nossa conjectura (3.16) acontece para  $l = 32$  e  $l = 33$ , onde **MA** é formado por todos os elementos da malha. Podemos observar que em relação ao comprimento de forma Figura 4.2 (a), existe uma variação na cor de alguns elementos, porém a legenda mostra que os valores máximo e mínimo são muito próximos de zero, ou seja, a diferença é insignificativa. No caso da diferença de área, Figura 4.2 (b), a legenda mostra que os valores máximo e mínimo são as mesmas, porém existe uma pequena diferença na cor em alguns elementos, isso ocorre devido ao software truncar os valores da legenda, pois são diferenças que podem ser desconsideradas.

A malha retangular Figura 4.3 é formada por 4 linhas na direção  $\xi$  e 5 em  $\eta$ , formadas por 12 elementos retangulares. Podemos observar que a análise dos parâmetros são análogas à malha quadrada anterior.

A conjectura (3.16) acontece para  $l = 4$  e  $l = 5$  onde **MA** = {5, 6, 7, 8, 9, 12}, com 6 elementos, Tabela 4.2, ou seja, obtemos todos os elementos.

Tabela 4.2: Tabela do modelo de qualidade dos elementos da malha retangular.

$l$	$L_d$	$L_{DA}$	<b>MA</b>
1	12	7	7,12
2	12,8	7,6	6,7,8,12
3	12,8,9	7,6,9	6,7,8,9,12
4	12,8,9,5	7,6,9,12	5,6,7,8,9,12
5	12,8,9,5,6	7,6,9,12,8	5,6,7,8,9,12

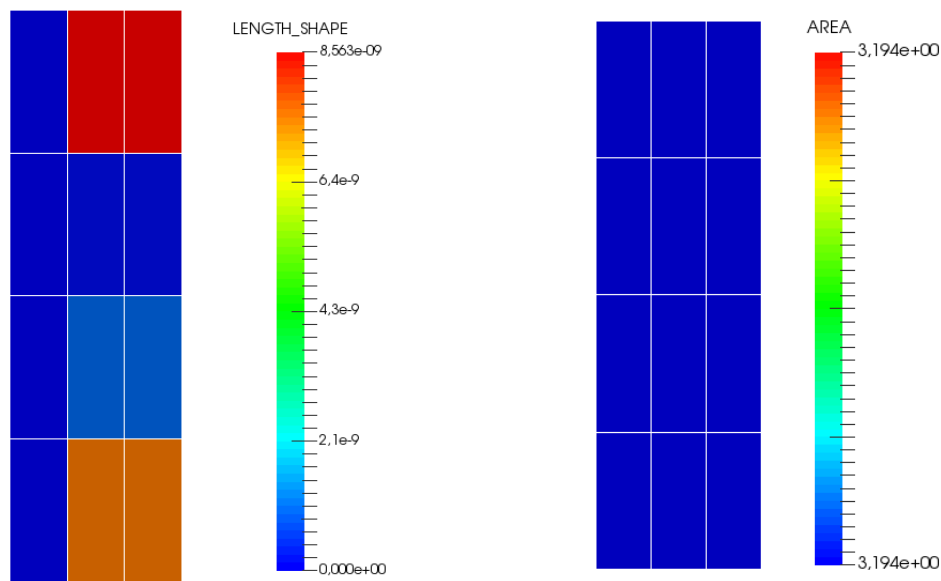


Figura 4.3: Malha retangular gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.

#### 4.4 PLACA DE ORIFÍCIO

As placas de orifício dentre as diversas ferramentas de medição de vazão, são as mais utilizadas [10]. Para o estudo dessa região, construímos uma malha com 21 linhas na direção de  $\xi$  e 3 na direção  $\eta$ , totalizando 40 elementos, Figura 4.4.

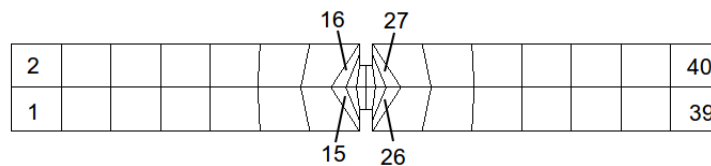


Figura 4.4: Malha de uma placa de orifício com a numeração dos elementos.

Na Figura 4.5 estão apresentadas as simulações dos parâmetros comprimento de forma e diferença de área.

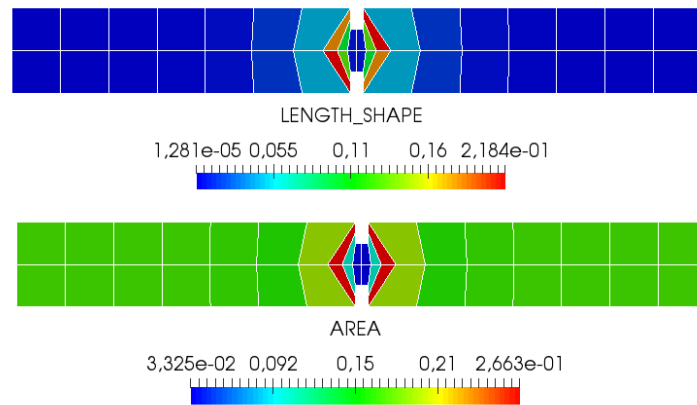


Figura 4.5: Malha de uma placa de orifício gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.

A análise dos parâmetros de qualidade da malha da placa de orifício são apresentadas na Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Tabela do modelo de qualidade dos elementos da malha de uma placa de orifício.

$l$	$L_d$	$L_{DA}$	MA
1	15	16	15,16
2	15,26	16,15	15,16,26
3	15,26,16	16,15,25	15,16,25,26
4	15,26,16,25	16,15,25,26	15,16,25,26

Nessa malha as cores avermelhadas estão na região do orifício, e a igualdade da conjectura ocorre para  $l = 3$  e  $l = 4$ , e o conjunto que contém os elementos menos adequados segundo o modelo de qualidade é dado por  $\mathbf{MA} = \{15, 16, 25, 26\}$ , com 4 elementos.

Sabemos que na prática a geração de uma malha não é realizada de forma tão pouco refinada como nos exemplos, porém como comentado anteriormente, geramos malhas pouco refinadas para fim didático. Na Figura 4.6 apresentamos a malha refinada da placa de orifício. Podemos observar que os elementos mais disformes apresentam-se próximos ao orifício como no caso da malha da Figura 4.5.



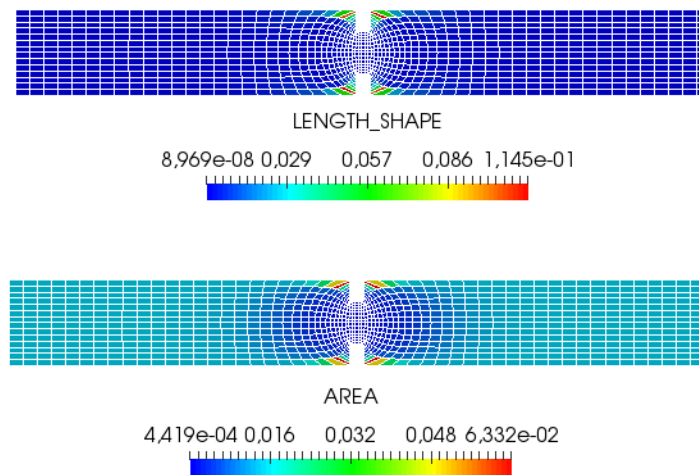


Figura 4.6: Malha da placa de orifício refinada gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.

#### 4.5 PLACAS PARALELAS COM CÍRCULO OU QUADRADO IMERSO

No primeiro exemplo, a região foi discretizada por multiblocos, contendo 2 blocos de 26 linhas na direção  $\xi$  e 26 na direção  $\eta$ . Porém a análise dos parâmetros de qualidade será realizada considerando a malha da região toda, que contém 1250 elementos, Figura 4.7.

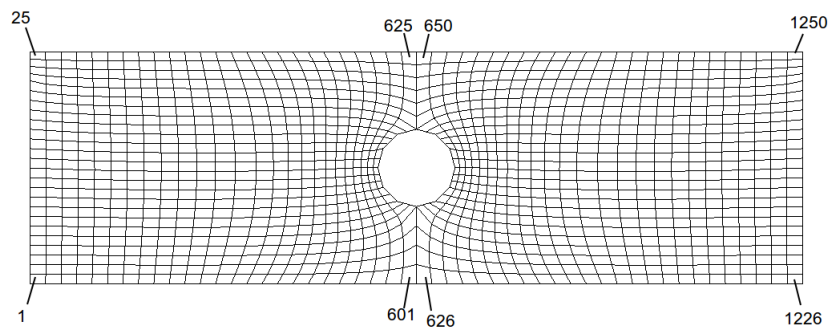


Figura 4.7: Malha de placas paralelas com círculo imerso com 1250 elementos gerada por dois blocos com a numeração de alguns elementos.

A região discretizada com os parâmetros de qualidade podem ser visualizadas na Figura 4.8.

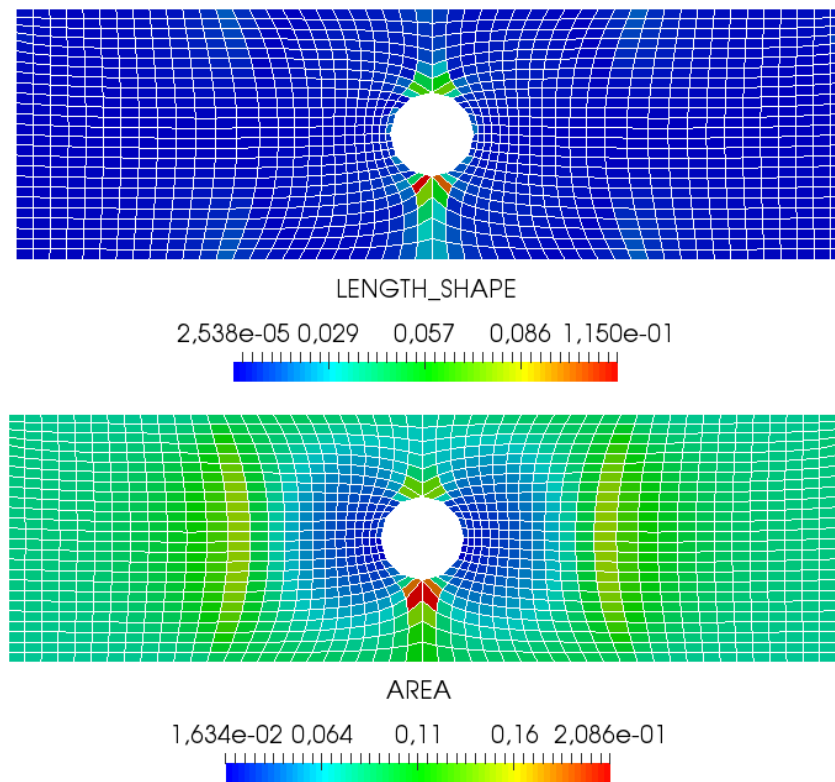


Figura 4.8: Malha de placas paralelas com círculo imerso gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.

Primeiramente observamos que essa malha não foi gerada de forma simétrica. Nessa malha, as cores próximas do vermelho estão na região próxima ao círculo, onde ocorre a deformação dos elementos. A Tabela 4.4 apresenta o modelo de qualidade dessa malha.

Tabela 4.4: Tabela do modelo de qualidade dos elementos da malha de placas paralelas com círculo imerso.

$l$	$L_d$	$L_{DA}$	$\mathbf{MA}$
1	605	604	604,605
2	605,630	604,629	604,605,629,630
3	605,630,604	604,629,605	604,605,629,630

A igualdade (3.16) ocorre para valores de  $l = 2$  e  $l = 3$ , e  $\mathbf{MA} = \{604, 605, 629, 630\}$ . Podemos observar que esses 4 elementos obtidos através do modelo de qualidade são mais distantes das formas fundamentais.

A próxima malha também foi discretizada pelo método de multiblocos. Cada um dos quatro blocos foram construídos com 11 linhas na direção  $\xi$  e 4 na direção  $\eta$ , totalizando 200 elementos, Figura 4.9.

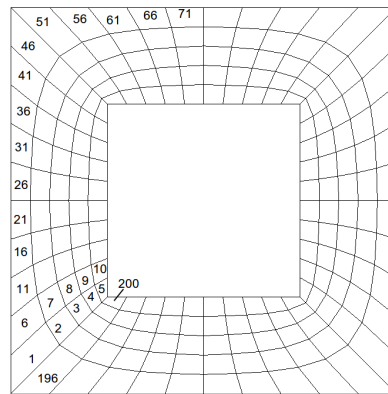


Figura 4.9: Malha de placas paralelas com quadrado imerso com a numeração de alguns elementos.

Na Figura 4.10 estão representados os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área dessa região.

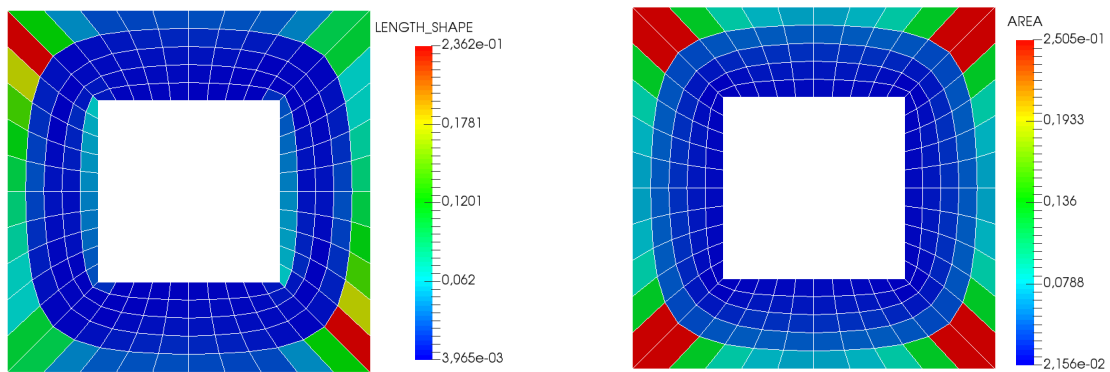


Figura 4.10: Malha de placas paralelas com quadrado imerso gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.

Os parâmetros de qualidade mostram que os elementos avermelhados estão nos quatro vértices da borda exterior, onde os elementos estão mais distantes das formas fundamentais. Na Tabela 4.5 encontramos a análise dos parâmetros de qualidade dessa malha.

Tabela 4.5: Tabela do modelo de qualidade dos elementos da malha quadrada com um buraco.

$l$	$L_d$	$L_{DA}$	MA
1	46	46	46
2	46,146	46,96	46,96,146
3	46,146,41	46,96,146	41,46,96,146
4	46,146,41,141	46,96,146,196	41,46,96,141,146,196
5	46,146,41,141,1	46,96,146,196,51	1,41,46,51,96,141,146,196
6	46,146,41,141,1,101	46,96,146,196,51,101	1,41,46,51,96,101,141,146,196
7	46,146,41,141,1,101,196	46,96,146,196,51,101,151	1,41,46,51,96,101,141,146,151,196
8	46,146,41,141,1,101,196,96	46,96,146,196,51,101,151,1	1,41,46,51,96,101,141,146,151,196

Nesse exemplo a igualdade (3.16) ocorre para valores  $l = 7$  e  $l = 8$ , e segundo nosso modelo de qualidade obtemos  $\mathbf{MA} = \{1, 41, 46, 51, 96, 101, 141, 146, 151, 196\}$ , com 10 elementos.

#### 4.6 GARRAFA

Agora discretizamos uma garrafa de coca-cola em uma geometria 2D em seu primeiro desenho, concebido em 1915 por Earl R. Dean. A garrafa foi construída com 5 linhas na direção  $\xi$  e 25 na direção  $\eta$ , totalizando 96 elementos, Figura 4.11.

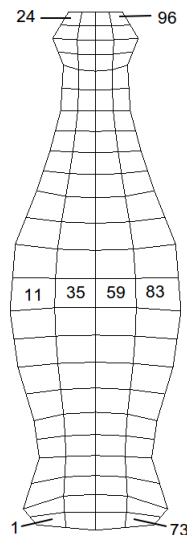


Figura 4.11: Malha de uma garrafa com a numeração de alguns elementos.

Os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área são apresentados na Figura 4.12.

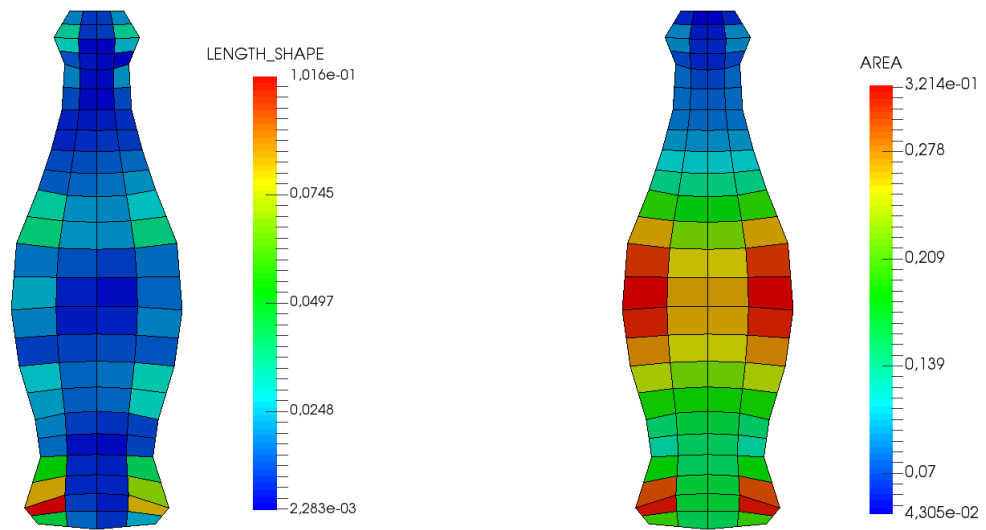


Figura 4.12: Malha de uma garrafa gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.

Pode-se observar que de maneira geral, as cores avermelhadas estão no bordo.

O modelo de qualidade está apresentada na Tabela 4.6.

Tabela 4.6: Tabela do modelo de qualidade dos elementos da malha do primeiro desenho de uma garrafa de coca-cola.

$l$	$L_d$	$L_{DA}$	MA
1	2	83	2,83
2	2,3	83,11	2,3,11,83
3	2,3,74	83,11,74	2,3,11,74,83
4	2,3,74,75	83,11,74,2	2,3,11,74,75,83
5	2,3,74,75,4	83,11,74,2,82	2,3,4,11,74,75,82,83
6	2,3,74,75,4,1	83,11,74,2,82,10	1,2,3,4,10,11,74,75,82,83
7	2,3,74,75,4,1,76	83,11,74,2,82,10,12,	1,2,3,4,10,11,12,74,75,76,82,83
8	2,3,74,75,4,1,76,13,	83,11,74,2,82,10,12,84,	1,2,3,4,10,11,12,13,74,75,76,82,83,84,
9	2,3,74,75,4,1,76,13,85	83,11,74,2,82,10,12,84,75	1,2,3,4,10,11,12,13,74,75,76,82,83,84,85
10	2,3,74,75,4,1,76,13,85,95	83,11,74,2,82,10,12,84,75,3	1,2,3,4,10,11,12,13,74,75,76,82,83,84,85,95
11	2,3,74,75,4,1,76,13,85,95,23	83,11,74,2,82,10,12,84,75,3,81	1,2,3,4,10,11,12,13,23,74,75,76,81,82,83,84,85,95
12	2,3,74,75,4,1,76,13,85,95,23, 14	83,11,74,2,82,10,12,84,75,3,81, 9	1,2,3,4,9,10,11,12,13,14,23,74,75,76,81,82,83,84, 85,95
13	2,3,74,75,4,1,76,13,85,95,23, 14,80	83,11,74,2,82,10,12,84,75,3,81, 9,35	1,2,3,4,9,10,11,12,13,14,23,35,74,75,76,80,81,82, 83,84,85,95
14	2,3,74,75,4,1,76,13,85,95,23, 14,80,22	83,11,74,2,82,10,12,84,75,3,81, 9,35,59	1,2,3,4,9,10,11,12,13,14,22,23,35,59,74,75,76,80, 81,82,83,84,85,95
15	2,3,74,75,4,1,76,13, 85,95,23, 14,80,22,79	83,11,74,2,82,10,12,84,75,3,81, 9,35,59,34	1,2,3,4,9,10,11,12,13,14,22,23,34,35,59,74,75,76, 79,80,81,82,83,84,85,95
16	2,3,74,75,4,1,76,13,85,95,23, 14,80,22,79,86	83,11,74,2,82,10,12,84,75,3,81, 9,35,59,34,58	1,2,3,4,9,10,11,12,13,14,22,23,34,35,58,59,74,75,76, 79,80,81,82,83,84,85,86,95
17	2,3,74,75,4,1,76,13,85,95,23, 14,80,22,79,86,8	83,11,74,2,82,10,12,84,75,3,81, 9,35,59,34,58,85	1,2,3,4,8,9,10,11,12,13,14,22,23,34,35,58,59,74,75, 76,79,80,81,82,83,84,85,86,95
18	2,3,74,75,4,1,76,13,85,95,23, 14,80,22,79,86,8,94	83,11,74,2,82,10,12,84,75,3,81, 9,35,59,34,58,85,13	1,2,3,4,8,9,10,11,12,13,14,22,23,34,35,58,59,74,75, 76,79,80,81,82,83,84,85,86,94,95

19	2,3,74,75,4,1,76,13,85,95,23, 14,80,22,79,86,8,94,11	83,11,74,2,82,10,12,84,75,3,81, 9,35,59,34,58,85,13,36	1,2,3,4,8,9,10,11,12,13,14,22,23,34,35,36,58,59,74,75, 76,79,80,81,82,83,84,85,86,94,95
20	2,3,74,75,4,1,76,13,85,95,23, 14,80,22,79,86,8,94,11,73	83,11,74,2,82,10,12,84,75,3,81, 9,35,59,34,58,85,13,36,60	1,2,3,4,8,9,10,11,12,13,14,22,23,34,35,36,58,59,60,73, 74,75,76,79,80,81,82,83,84,85,86,94,95
21	2,3,74,75,4,1,76,13,85,95,23, 14,80,22,79,86,8,94,11,73,7	83,11,74,2,82,10,12,84,75,3,81, 9,35,59,34,58,85,13,36,60,33	1,2,3,4,7,8,9,10,11,12,13,14,22,23,33,34,35,36,58,59, 60,73,74,75,76,79,80,81,82,83,84,85,86,94,95
22	2,3,74,75,4,1,76,13,85,95,23, 14,80,22,79,86,8,94,11,73,7,37	83,11,74,2,82,10,12,84,75,3,81, 9,35,59,34,58,85,13,36,60,33,57	1,2,3,4,7,8,9,10,11,12,13,14,22,23,33,34,35,36,37,57, 58,59,60,73,74,75,76,79,80,81,82,83,84,85,86,94,95
23	2,3,74,75,4,1,76,13,85,95,23, 14,80,22,79,86,8,94,11,73,7,37, 87	83,11,74,2,82,10,12,84,75,3,81, 9,35,59,34,58,85,13,36,60,33,57, 80	1,2,3,4,7,8,9,10,11,12,13,14,22,23,33,34,35,36,37,57, 58,59,60,73,74,75,76,79,80,81,82,83,84,85,86,87,94,95
24	2,3,74,75,4,1,76,13,85,95,23, 14,80,22,79,86,8,94,11,73,7,37, 87,38	83,11,74,2,82,10,12,84,75,3,81, 9,35,59,34,58,85,13,36,60,33,57, 80,8	1,2,3,4,7,8,9,10,11,12,13,14,22,23,33,34,35,36,37, 38,57,58,59,60,73,74,75,76,79,80,81,82,83,84,85, 86,87,94,95
25	2,3,74,75,4,1,76,13,85,95,23, 14,80,22,79,86,8,94,11,73,7,37, 87,38,92	83,11,74,2,82,10,12,84,75,3,81, 9,35,59,34,58,85,13,36,60,33,57, 80,8,37	1,2,3,4,7,8,9,10,11,12,13,14,22,23,33,34,35,36,37, 38,57,58,59,60,73,74,75,76,79,80,81,82,83,84,85, 86,87,92,94,95
26	2,3,74,75,4,1,76,13,85,95,23, 14,80,22,79,86,8,94,11,73,7,37, 87,38,92,96	83,11,74,2,82,10,12,84,75,3,81, 9,35,59,34,58,85,13,36,60,33,57, 80,8,37,61	1,2,3,4,7,8,9,10,11,12,13,14,22,23,33,34,35,36,37, 38,57,58,59,60,61,73,74,75,76,79,80,81,82,83,84,85, 86,87,92,94,95,96
27	2,3,74,75,4,1,76,13,85,95,23, 14,80,22,79,86,8,94,11,73,7,37, 87,38,92,96,61	83,11,74,2,82,10,12,84,75,3,81, 9,35,59,34,58,85,13,36,60,33,57, 80,8,37,61,32	1,2,3,4,7,8,9,10,11,12,13,14,22,23,32,33,34,35,36, 37,38,57,58,59,60,61,73,74,75,76,79,80,81,82,83,84, 85,86,87,92,94,95,96
28	2,3,74,75,4,1,76,13,85,95,23, 14,80,22,79,86,8,94,11,73,7,37, 87,38,92,96,61,62	83,11,74,2,82,10,12,84,75,3,81, 9,35,59,34,58,85,13,36,60,33,57, 80,8,37,61,32,56	1,2,3,4,7,8,9,10,11,12,13,14,22,23,32,33,34,35,36, 37,38,56,57,58,59,60,61,62,73,74,75,76,79,80,81,82, 83,84,85,86,87,92,94,95,96
29	2,3,74,75,4,1,76,13,85,95,23, 14,80,22,79,86,8,94,11,73,7,37, 87,38,92,96,61,62,24	83,11,74,2,82,10,12,84,75,3,81, 9,35,59,34,58,85,13,36,60,33,57, 80,8,37,61,32,56,73	1,2,3,4,7,8,9,10,11,12,13,14,22,23,24,32,33,34,35, 36,37,38,56,57,58,59,60,61,62,73,74,75,76,79,80,81, 82,83,84,85,86,87,92,94,95,96
30	2,3,74,75,4,1,76,13,85,95,23, 14,80,22,79,86,8,94,11,73,7,37, 87,38,92,96,61,62,24,20	83,11,74,2,82,10,12,84,75,3,81, 9,35,59,34,58,85,13,36,60,33,57, 80,8,37,61,32,56,73,1	1,2,3,4,7,8,9,10,11,12,13,14,20,22,23,24,32,33,34, 35,36,37,38,56,57,58,59,60,61,62,73,74,75,76,79,80, 81,82,83,84,85,86,87,92,94,95,96
31	2,3,74,75,4,1,76,13,85,95,23, 14,80,22,79,86,8,94,11,73,7,37, 87,38,92,96,61,62,24,20,10	83,11,74,2,82,10,12,84,75,3,81, 9,35,59,34,58,85,13,36,60,33,57, 80,8,37,61,32,56,73,1,86	1,2,3,4,7,8,9,10,11,12,13,14,20,22,23,24,32,33,34, 35,36,37,38,56,57,58,59,60,61,62,73,74,75,76,79,80, 81,82,83,84,85,86,87,92,94,95,96

Nessa malha a conjectura (3.16) ocorre para  $l = 30$  e  $l = 31$ , e o conjunto  $\mathbf{MA} = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 20, 22, 23, 24, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 73, 74, 75, 76, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 92, 94, 95, 96\}$ , com 47 elementos. O número de elementos selecionados pelo modelo de qualidade foi significativamente maior que nos demais exemplos apresentados até o momento.

#### 4.7 GEOMETRIA CÚSPIDE

A geometria cuspide é formada quando 3 ou mais cilindros são colocados em contato, nosso exemplo é um quadricuspide. O escoamento nesses canais era muito estudado por pesquisadores no passado, pois a geometria representa a situação de mínima refrigeração em reatores nucleares [28].

Para a construção da malha, utilizamos 19 linhas na direção  $\xi$  e 19 na direção

$\eta$ . A malha contém 324 elementos, Figura 4.13.

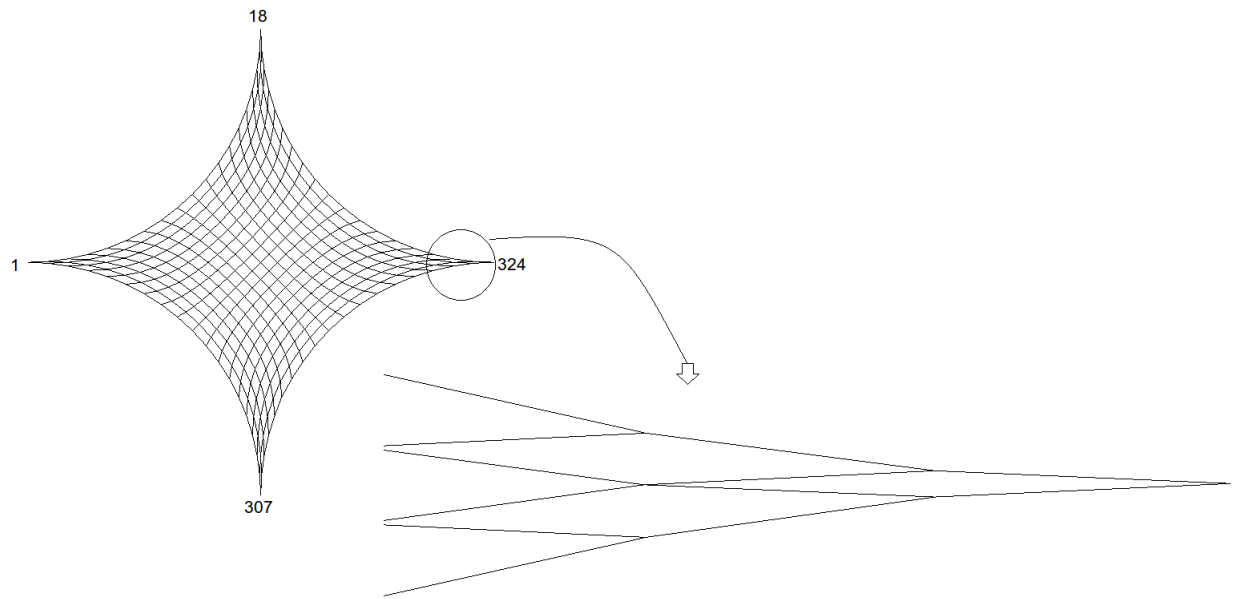


Figura 4.13: Malha quadricúspide com numeração de alguns de seus elementos.

Os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área podem ser visualizados pela Figura 4.14.

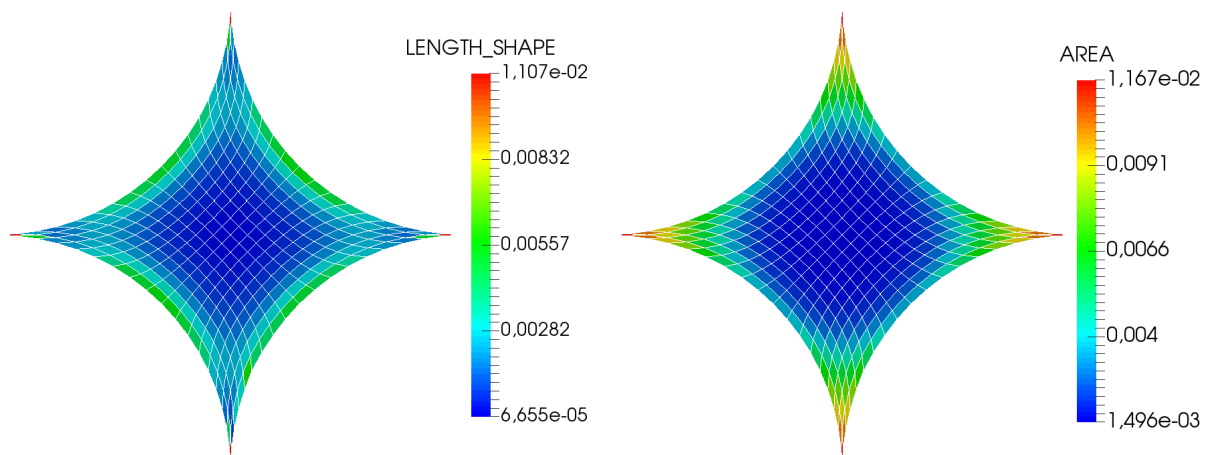


Figura 4.14: Malha quadricúspide gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.

Na malha quadricúspide observa-se que os elementos que se aproximam do vermelho estão próximos dos pontos que delimitam as fronteiras. Na Tabela 4.7 apresentamos o modelo de qualidade dessa malha.

Tabela 4.7: Tabela do modelo de qualidade dos elementos de uma malha quadricúspide.

$l$	$L_d$	$L_{DA}$	$\mathbf{MA}$
1	307	324	307,324
2	307,1	324,18	1,18,307,324
3	307,1,324	324,18,307	1,18,307,324

A igualdade (3.16) ocorre para  $l = 2$  e  $l = 3$ , e obtemos  $\mathbf{MA} = \{1, 18, 307, 324\}$ , com 4 elementos, que são exatamente os elementos que delimitam as fronteiras da quadricúspide.

#### 4.8 LAGO LURUACO

O lago Luruaco encontra-se no departamento de Atlântico-Colômbia, ocupa uma região de cerca de 420 hectares. Próximo às margens do rio está situada a cidade de Luruaco, com uma população de aproximadamente 28000, e essa população depende diretamente do lago, pois utilizam a água para atividades como agricultura, pecuária, pesca e consumo. Para a construção da malha, utiliza-se o método multibloco, a região foi dividida em 13 blocos, e no total possui 3112 elementos, Figura 4.15. As informações necessárias para a discretização do lago foram retiradas de [37].

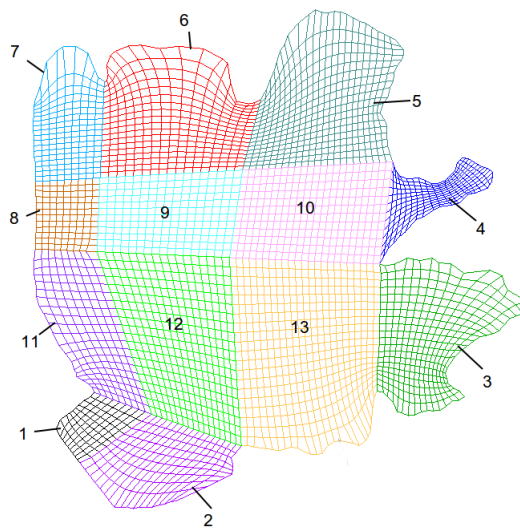


Figura 4.15: Malha do lago Luruaco gerada por multiblocos com a numeração de seus respectivos blocos.

A Figura 4.16 apresenta os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área do lago todo, porém a análise será realizada por blocos.



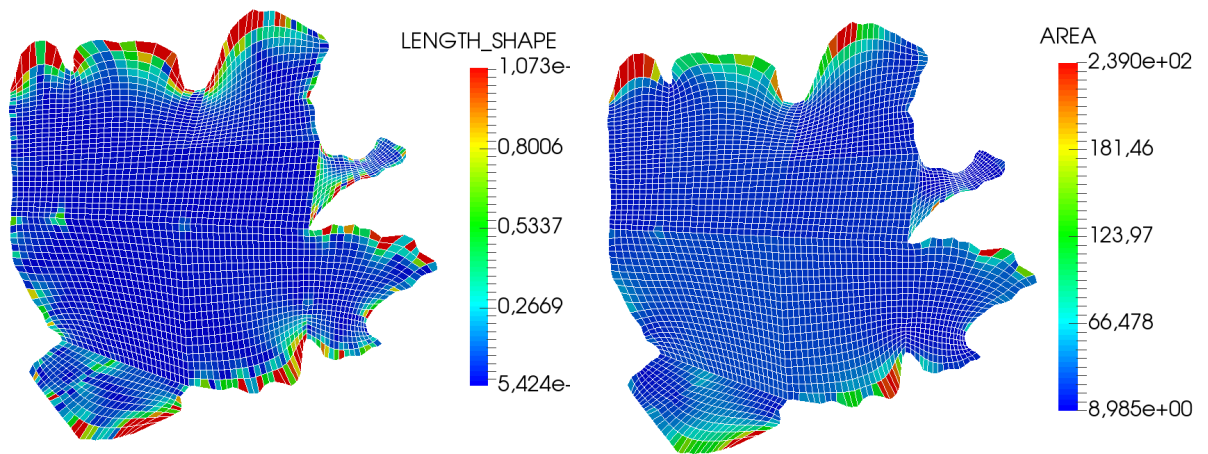


Figura 4.16: Malha do lago Luruaco gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.

No primeiro bloco temos 10 linhas na direção  $\xi$  e 10 na direção  $\eta$ , num total de 81 elementos, Figura 4.17.

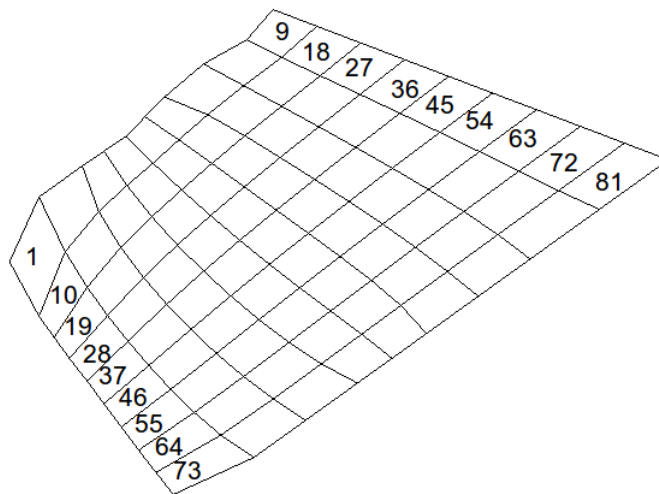


Figura 4.17: Malha do bloco 1 do lago Luruaco com a numeração de alguns elementos.

Os parâmetros comprimento de forma e diferença de área do bloco 1 estão apresentadas na Figura 4.18.

As cores que se aproximam do vermelho encontram-se próximo as bordas da malha. O modelo de qualidade do bloco 1 apresenta-se na Tabela 4.8.

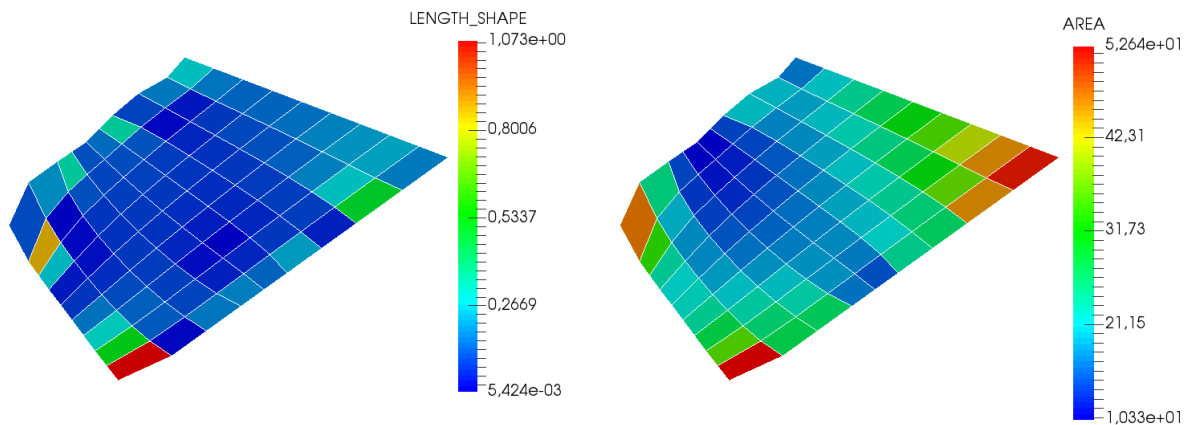


Figura 4.18: Malha do bloco 1 do lago Luruaco gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.

Tabela 4.8: Tabela da análise do modelo de qualidade dos elementos da malha do bloco 1 do lago Luruaco.

$l$	$L_d$	$L_{DA}$	$\mathbf{MA}$
1	73	73	73
2	73,10	73,81	10,73,81
3	73,10,64	73,81,1	1,10,64,73,81
4	73,10,64,80	73,81,1,72	1,10,64,72,73,80,81
5	73,10,64,80,6	73,81,1,72,80	1,6,10,64,72,73,80,81
6	73,10,64,80,6,3	73,81,1,72,80,63	1,3,6,10,63,64,72,73,80,81
7	73,10,64,80,6,3,55	73,81,1,72,80,63,71	1,3,6,10,55,63,64,71,72,73,80,81
8	73,10,64,80,6,3,55,71	73,81,1,72,80,63,71,64	1,3,6,10,55,63,64,71,72,73,80,81

A igualdade ocorre para  $l = 7$  e  $l = 8$  e  $\mathbf{MA} = \{1, 3, 6, 10, 55, 63, 64, 71, 72, 73, 80, 81\}$ , com 12 elementos.

No bloco 2 temos 18 linhas  $\xi$  e 10  $\eta$ , e 153 elementos, Figura 4.19.

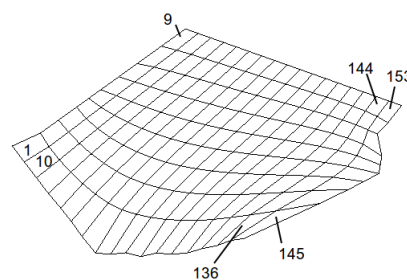


Figura 4.19: Malha do bloco 2 do lago Luruaco com a numeração de alguns elementos.

A representação dos parâmetros de qualidade encontram-se na Figura 4.20.

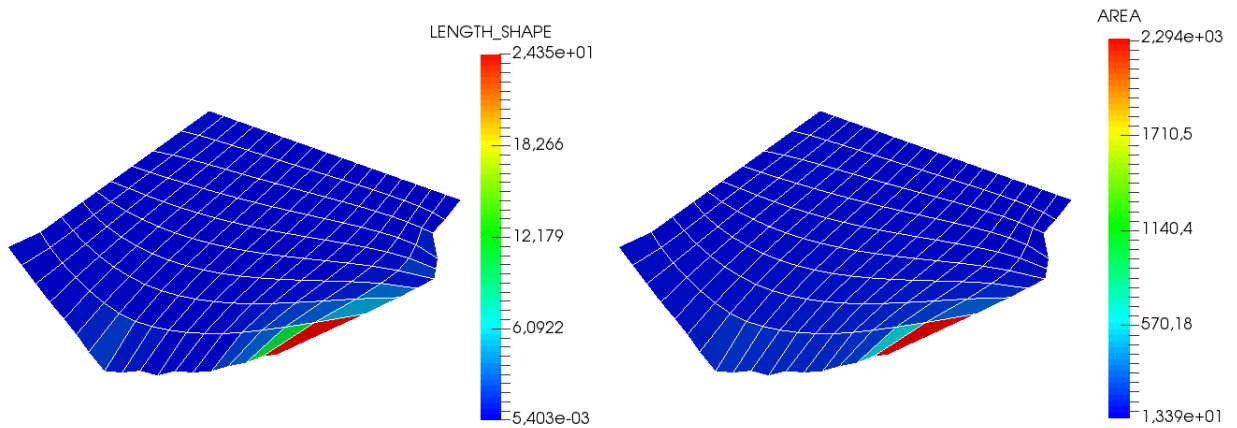


Figura 4.20: Malha do bloco 2 do lago Luruaco gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.

No bloco 2 observa-se que os elementos próximos da cor vermelha estão na vizinhança do bordo, onde a região apresenta uma geometria curva. A Tabela 4.9 apresenta o modelo de qualidade do bloco 2.

Tabela 4.9: Tabela da análise do modelo de qualidade dos elementos da malha do bloco 2 do lago Luruaco.

$l$	$L_d$	$L_{DA}$	MA
1	145	145	145
2	145,136	145,136	136,145
3	145,136,146	145,136,146	136,145,146
4	145,136,146,147	145,136,146,137	136,137,145,146,147
5	145,136,146,147,127	145,136,146,137,127	127,136,137,145,146,147
6	145,136,146,147,127,137	145,136,146,137,127,64	64,127,136,137,145,146,147
7	145,136,146,147,127,137,128	145,136,146,137,127,64,118	64,118,127,128,136,137,145,146,147
8	145,136,146,147,127,137,128,118	145,136,146,137,127,64,118,73	64,73,118,127,128,136,137,145,146,147
9	145,136,146,147,127,137,128,118, 55	145,136,146,137,127,64,118,73, 55	55,64,73,118,127,128,136,137,145,146, 147
10	145,136,146,147,127,137,128,118, 55,149	145,136,146,137,127,64,118,73, 55,128	55,64,73,91,118,127,128,136,137,145, 146,147,149
11	145,136,146,147,127,137,128,118, 55,149,119	145,136,146,137,127,64,118,73, 55,128,91	55,64,73,91,118,119,127,128,136,137, 145,146,147,149
12	145,136,146,147,127,137,128,118, 55,149,119,46	145,136,146,137,127,64,118,73, 55,128,91,147	46,55,64,73,91,118,119,127,128,136, 137,145,146,147,149

13	145,136,146,147,127,137,128,118,55,149,119,46,138	145,136,146,137,127,64,118,73,55,128,91,147,109	46,55,64,73,91,109,118,119,127,128,136,137,138,145,146,147,149
14	145,136,146,147,127,137,128,118,55,149,119,46,138,151	145,136,146,137,127,64,118,73,55,128,91,147,109,82	46,55,64,73,82,91,109,118,119,127,128,136,137,138,145,146,147,149,151
15	145,136,146,147,127,137,128,118,55,149,119,46,138,151,64	145,136,146,137,127,64,118,73,55,128,91,147,109,82,100	46,55,64,73,82,91,100,109,118,119,127,128,136,137,138,145,146,147,149,151
16	145,136,146,147,127,137,128,118,55,149,119,46,138,151,64,73	145,136,146,137,127,64,118,73,55,128,91,147,109,82,100,119	46,55,64,73,82,91,100,109,118,119,127,128,136,137,138,145,146,147,149,151

No bloco 2 a igualdade ocorre para  $l = 15$  e  $l = 16$ , e obtemos o conjunto  $\mathbf{MA} = \{46, 55, 64, 73, 82, 91, 100, 109, 118, 119, 127, 128, 136, 137, 138, 145, 146, 147, 149, 151\}$ , com 20 elementos.

O bloco 3 é formado por 16 linhas  $\xi$  e 21  $\eta$ , possui 300 elementos, Figura 4.21.

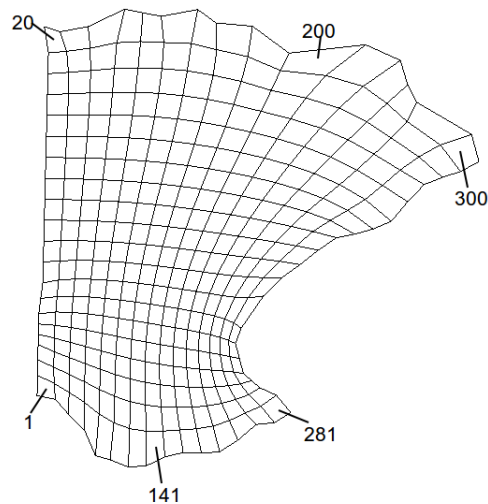


Figura 4.21: Malha do bloco 3 do lago Luruaco com a numeração de alguns elementos.

Na Figura 4.22 apresenta-se a representação dos parâmetros de qualidade de malha.

Nesse bloco pode-se observar que os elementos menos adequados também estão próximos ao bordo. A análise do modelo de qualidade do bloco 3 está apresentada na Tabela 4.10

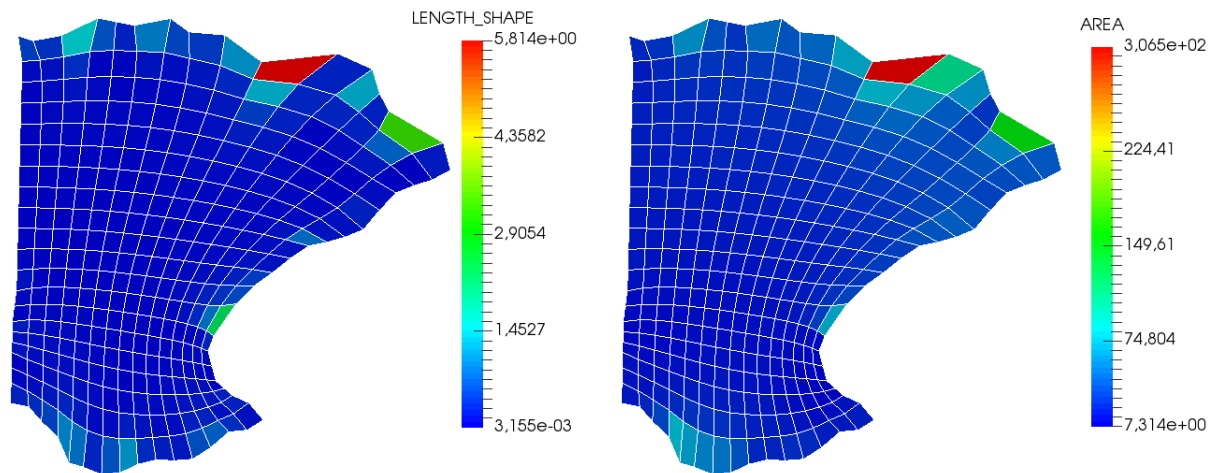


Figura 4.22: Malha do bloco 3 do lago Luruaco gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.

Tabela 4.10: Tabela da análise do modelo de qualidade dos elementos da malha do bloco 3 do lago Luruaco.

$l$	$L_d$	$L_{DA}$	$\mathbf{MA}$
1	200	200	200
2	200,280	200,280	200,280
3	200,280,288	200,280,220	200,220,280,288
4	200,280,288,60	200,280,220,199	60,199,200,220,280,288
5	200,280,288,60,199	200,280,220,199,61	60,61,199,200,220,280,288
6	200,280,288,60,199,240	200,280,220,199,61,288	60,61,199,200,220,240,280,288
7	200,280,288,60,199,240 141	200,280,220,199,61,288 180	60,61,141,180,199,200,220,240, 280,288
8	200,280,288,60,199,240 141,180	200,280,220,199,61,288 180,81	60,61,81,141,180,199,200,220, 240,280,288
9	200,280,288,60,199,240 141,180,61	200,280,220,199,61,288 180,81,219	60,61,81,141,180,199,200,219, 220,240,280,288
10	200,280,288,60,199,240 141,180,61,120	200,280,220,199,61,288 180,81,219,240	60,61,81,120,141,180,199,200, 219,220,240,280,288
11	200,280,288,60,199,240 141,180,61,120,81	200,280,220,199,61,288 180,81,219,240,60	60,61,81,120,141,180,199,200, 219,220,240,280,288

A igualdade ocorre para  $l = 10$  e  $l = 11$ , e o conjunto  $\mathbf{MA} = \{60, 61, 81, 120, 141, 180, 199, 200, 219, 220, 240, 280, 288\}$ , com 13 elementos sendo os menos adequados dessa

malha.

O bloco 4 é formado por 20 linhas  $\xi$  e 13  $\eta$ , possui 228 elementos, Figura 4.23.

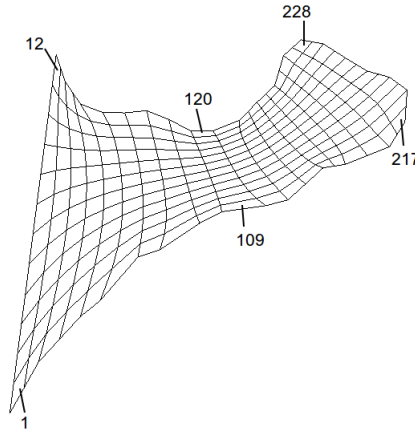


Figura 4.23: Malha do bloco 4 do lago Luruaco com a numeração de alguns elementos.

Os parâmetros de qualidade estão apresentadas na Figura 4.24.

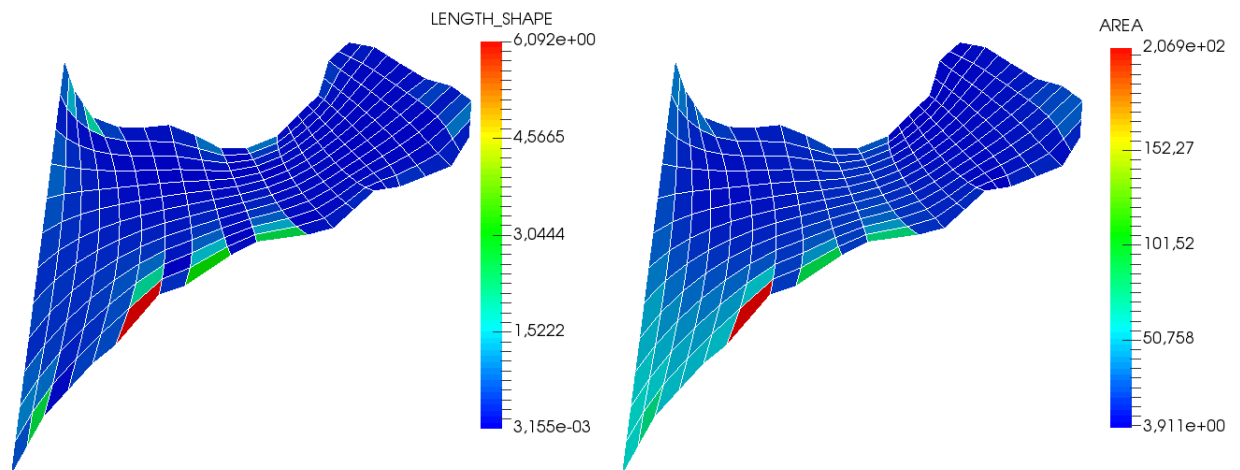


Figura 4.24: Malha do bloco 4 do lago Luruaco gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.

Pode-se observar que os elementos menos adequados encontram-se próximos do bordo. A análise do modelo de qualidade do bloco 4 está na Tabela 4.11.

Tabela 4.11: Tabela da análise do modelo de qualidade dos elementos da malha do bloco 4 do lago Luruaco.

$l$	$L_d$	$L_{DA}$	$\mathbf{MA}$
1	61	61	61
2	61,85	61,85	61,85
3	61,85,13	61,85,109	13,61,85,109
4	61,85,13,109	61,85,109,13	13,61,85,109

Nesse bloco ocorre a igualdade em  $l = 3$  e  $l = 4$  e  $\mathbf{MA} = \{13, 61, 85, 109\}$ , com 4 elementos.

O bloco 5 contém 24 linhas na direção  $\xi$  e 19 na direção  $\eta$ , contendo 414 elementos, Figura 4.25.

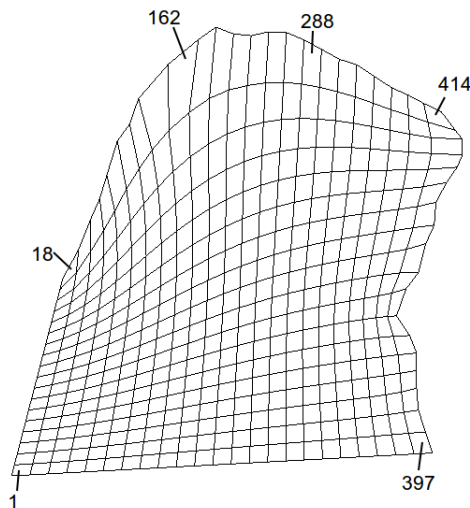


Figura 4.25: Malha do bloco 5 do lago Luruaco com a numeração de alguns elementos.

Na Figura 4.26 estão relacionados os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.

Observa-se que os elementos menos adequados encontram-se na vizinhança do bordo na região mais curva. O modelo de qualidade está na Tabela 4.12.

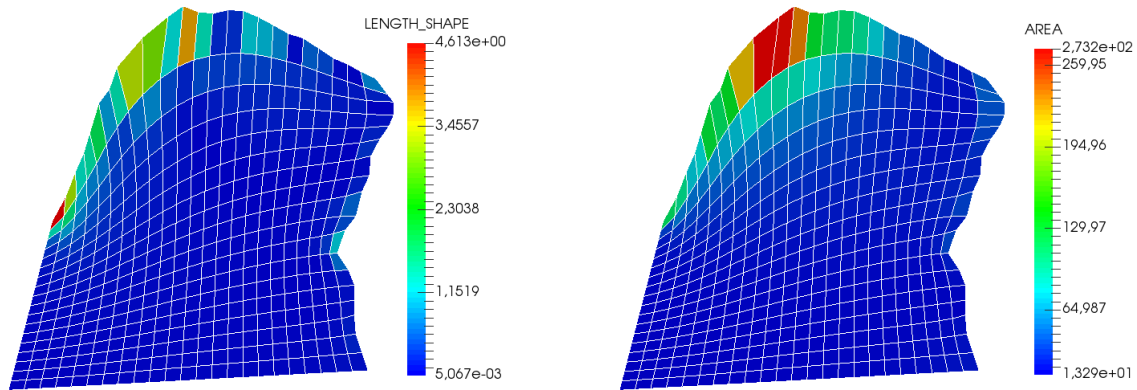


Figura 4.26: Malha do bloco 5 do lago Luruaco gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.

Tabela 4.12: Tabela da análise do modelo de qualidade dos elementos da malha do bloco 5 do lago Luruaco.

$l$	$L_d$	$L_{DA}$	MA
1	18	162	18,162
2	18,198	162,180	18,162,180,198
3	18,198,144	162,180,198	18,144,162,180,198
4	18,198,144,36	162,180,198,144	18,36,144,162,180,198
5	18,198,144,36,162	162,180,198,144,126	18,36,126,144,162,180,198
6	18,198,144,36,162,90	162,180,198,144,126,216	18,36,90,126,144,162,180,198,216
7	18,198,144,36,162,90,35	162,180,198,144,126,216,90	18,35,36,90,126,144,162,180,198,216
8	18,198,144,36,162,90,35,72	162,180,198,144,126,216,90,108	18,35,36,72,90,108,126,144,162,180,198,216
9	18,198,144,36,162,90,35,72,126	162,180,198,144,126,216,90,108,18	18,35,36,72,90,108,126,144,162,180,198,216

Obtemos o conjunto  $\mathbf{MA} = \{18, 35, 36, 72, 90, 108, 126, 144, 162, 180, 198, 216\}$  com 12 elementos, e a igualdade ocorre quando  $l = 8$  e  $l = 9$ .

O bloco 6 é formado por 18 linhas  $\xi$  e 18  $\eta$ , possui 306 elementos, Figura 4.27.

Os parâmetros comprimento de forma e diferença de área estão representados na Figura 4.28.



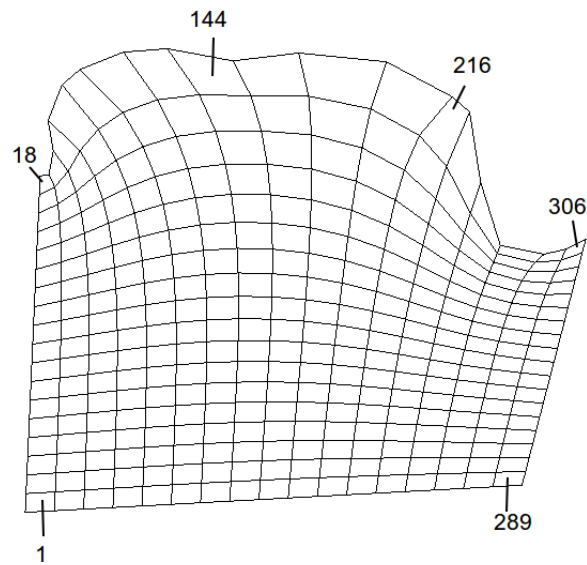


Figura 4.27: Malha do bloco 6 do lago Luruaco com a numeração de alguns elementos.

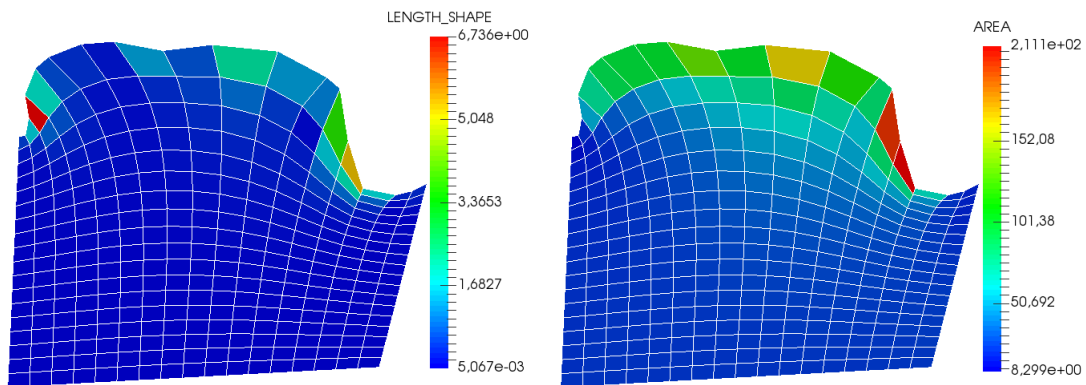


Figura 4.28: Malha do bloco 6 do lago Luruaco gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.

Nessa malha observa-se que os elementos menos adequados, como no bloco 5 encontram-se na vizinhança do bordo mais curvo. A Tabela 4.13 apresenta a análise dos parâmetros de qualidade do bloco 6

Tabela 4.13: Tabela da análise do modelo de qualidade dos elementos da malha do bloco 6 do lago Luruaco.

$l$	$L_d$	$L_{DA}$	MA
1	54	252	54,252
2	54,252	252,234	54,234,252
3	54,252,234	252,234,180	54,180,234,252
4	54,252,234,180	252,234,180,144	54,144,180,234,252
5	54,252,234,180,251	252,234,180,144,198	54,144,180,198,234,251,252
6	54,252,234,180,251,72	252,234,180,144,198,162	54,72,144,162,180,198,234,251,252
7	54,252,234,180,251,72 270	252,234,180,144,198,162 126	54,72,126,144,162,180,198,234,251, 252,270
8	54,252,234,180,251,72 270,36	252,234,180,144,198,162 126,108	36,54,72,108,126,144,162,180,198, 234,251,252,270
9	54,252,234,180,251,72 270,36,233	252,234,180,144,198,162 126,108,90	36,54,72,90,108,126,144,162,180, 198,233,234,251,252,270
10	54,252,234,180,251,72 270,36,233,144	252,234,180,144,198,162 126,108,90,179	36,54,72,90,108,126,144,162,179, 180,198,233,234,251,252,270
11	54,252,234,180,251,72 270,36,233,144,198	252,234,180,144,198,162 126,108,90,179,233	36,54,72,90,108,126,144,162,179, 180,198,233,234,251,252,270

No bloco 6 a igualdade ocorre quando  $l = 10$  e  $l = 11$ , e o conjunto  $\mathbf{MA} = \{36, 54, 72, 90, 108, 126, 144, 162, 179, 180, 198, 233, 234, 251, 252, 270\}$ , com 16 elementos.

O bloco 7 é formado por 10  $\xi$  e 19  $\eta$ , contendo 162 elementos, Figura 4.29.

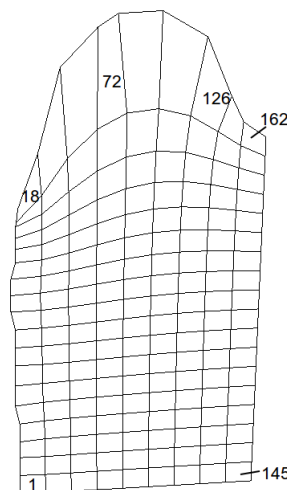


Figura 4.29: Malha do bloco 7 do lago Luruaco com a numeração de alguns elementos.

A Figura 4.30 representa os parâmetros de qualidade dessa malha.

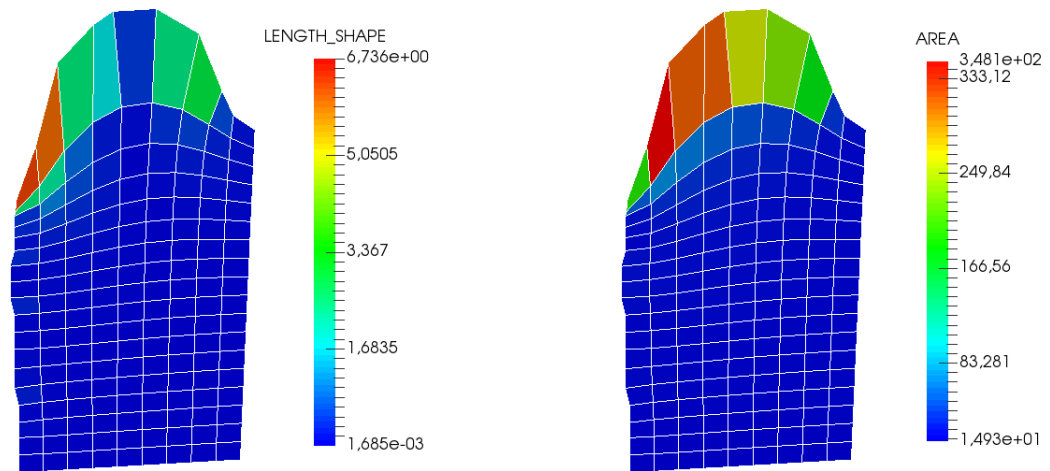


Figura 4.30: Malha do bloco 7 do lago Luruaco gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.

Nessa malha os elementos menos adequados como no bloco 5 e 6 encontram-se na vizinhança do bordo mais curvo. O modelo de qualidade da malha do bloco 7 está apresentada na Tabela 4.14

Tabela 4.14: Tabela da análise do modelo de qualidade dos elementos da malha do bloco 7 do lago Luruaco.

	$L_d$	$L_{DA}$	MA
1	18	36	18,36
2	18,36	36,72	18,36,72
3	18,36,126	36,72,54	18,36,54,72,126
4	18,36,126,54	36,72,54,90	18,36,54,72,90,126
5	18,36,126,54,17	36,72,54,90,108	17,18,36,54,72,90,108,126
6	18,36,126,54,17,108	36,72,54,90,108,18	17,18,36,54,72,90,108,126

A igualdade ocorre para  $l = 5$  e  $l = 6$ , assim  $\mathbf{MA} = \{17, 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126\}$ , com 8 elementos.

O bloco 8 é formado por 10 linhas  $\xi$  e 13  $\eta$ , possui 108 elementos, Figura 4.31.

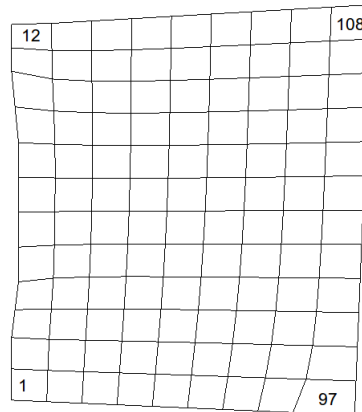


Figura 4.31: Malha do bloco 8 do lago Luruaco com a numeração de alguns elementos.

Os parâmetros de qualidade estão representados pela Figura 4.32.

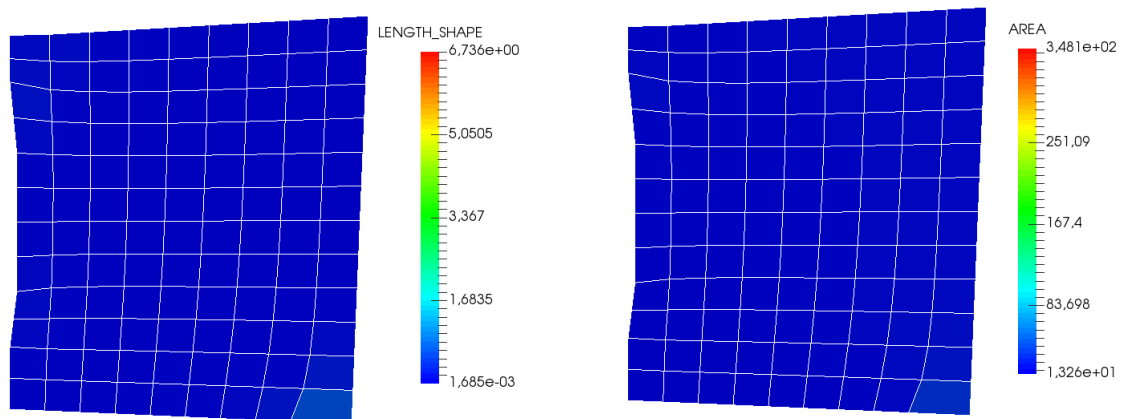


Figura 4.32: Malha do bloco 8 do lago Luruaco gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.

Nesse bloco podemos observar que os elementos apresentam uma forma muito próxima do quadrado, apresentando apenas elementos azuis. Realizando a análise do modelo de qualidade que não foi exposto devido a quantidade de elementos, obtemos a igualdade (3.16) para  $l = 51$  e  $l = 52$ , onde o conjunto  $\mathbf{MA} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 79, 78, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, \}$ , totalizando 86 elementos.

O bloco 9 contém 18  $\xi$  e 13  $\eta$ , totalizando 204 elementos, Figura 4.33.

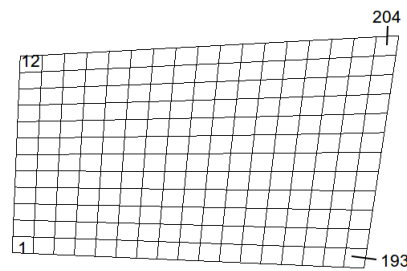


Figura 4.33: Malha do bloco 9 do lago Luruaco, e a numeração de alguns elementos.

Os parâmetros de qualidade estão representados pela Figura 4.34.

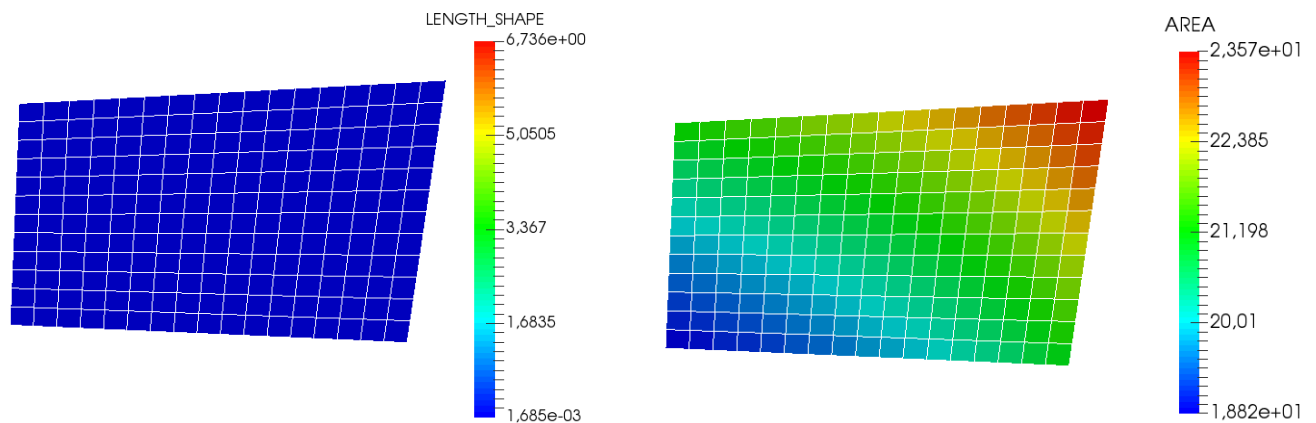


Figura 4.34: Malha do bloco 9 do lago Luruaco gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.

A análise do bloco 9 é análoga ao bloco 8, a conjectura (3.16) acontece para  $l = 58$  e  $l = 59$ , onde  $\mathbf{MA} = \{10, 11, 12, 21, 22, 23, 24, 33, 34, 35, 36, 45, 46, 47, 48, 57, 58, 59, 60, 69, 70, 71, 72, 81, 82, 83, 84, 93, 94, 95, 96, 105, 106, 107, 108, 117, 118, 119, 120, 129, 130, 131, 132, 140, 141, 142, 143, 144, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 158, 159, 160, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204\}$ , com 98 elementos.

O bloco 10 é formado por 24 linhas na direção  $\xi$  e 13 na direção  $\eta$ , contendo 276 elementos, Figura 4.35.

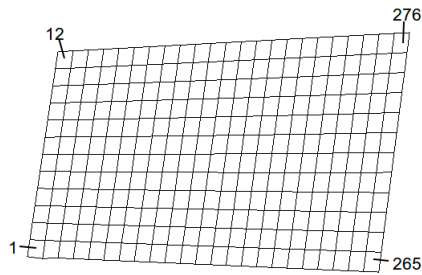


Figura 4.35: Malha do bloco 10 do lago Luruaco com a numeração de alguns elementos.

Na Figura 4.36 estão representados os parâmetros de qualidade dessa malha.

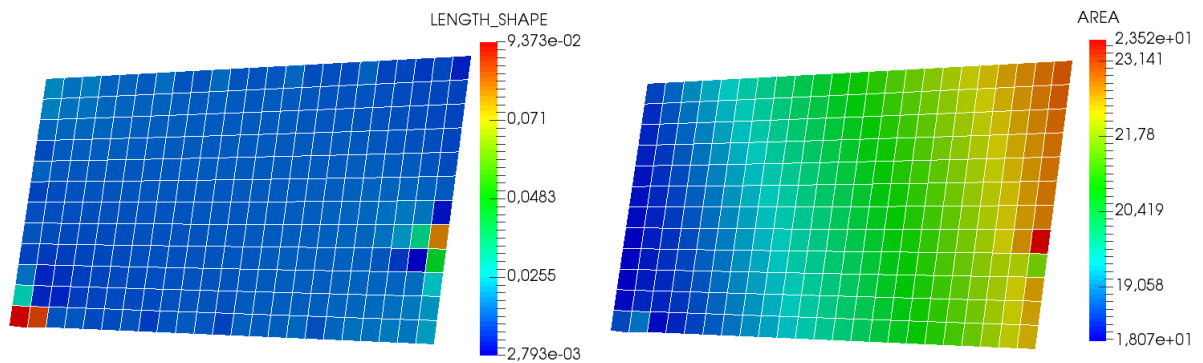


Figura 4.36: Malha do bloco 10 do lago Luruaco gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.

Analogas ao bloco 8 e 9, nessa malha, a igualdade (3.16) acontece para  $l = 42$  e  $l = 43$ , onde  $\mathbf{MA} = \{1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 22, 23, 24, 34, 35, 36, 47, 60, 84, 120, 168, 181, 205, 215, 216, 217, 218, 221, 222, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276\}$ , totalizando 73 elementos.

O bloco 11 contém 10  $\xi$  e 21  $\eta$ , e possui 180 elementos, Figura 4.37.

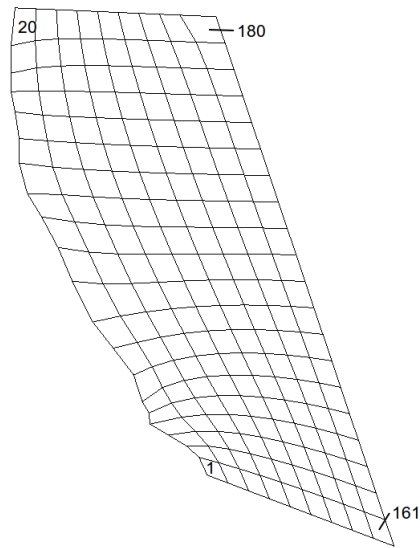


Figura 4.37: Malha do bloco 11 do lago Luruaco com a numeração de alguns elementos.

Os parâmetros de qualidade da malha estão representados na Figura 4.38.

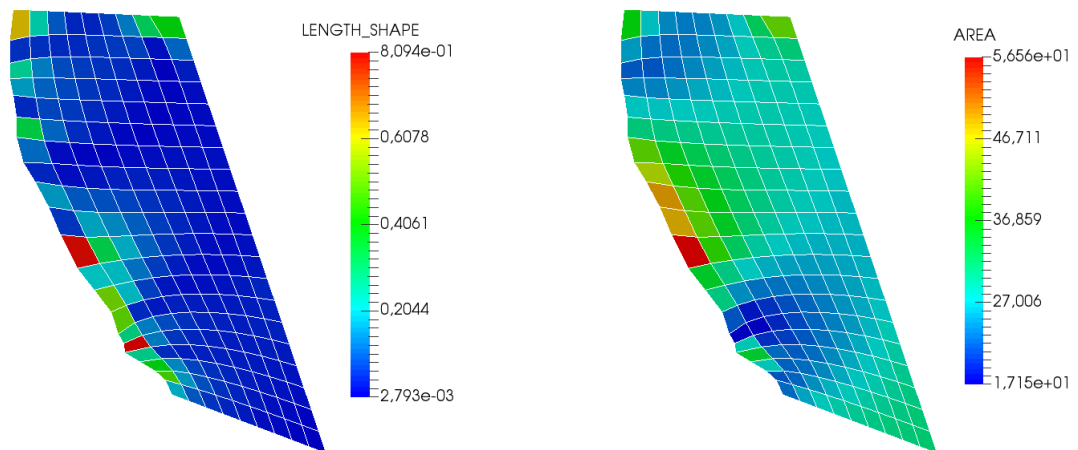


Figura 4.38: Malha do bloco 11 do lago Luruaco gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.

Pode-se observar que os elementos menos adequados estão próximos do bordo onde apresentam mais curvas. Na Tabela 4.15 encontra-se o modelo de qualidade do bloco 11.

Tabela 4.15: Tabela da análise do modelo de qualidade dos elementos da malha do bloco 11 do lago Luruaco.

$l$	$L_d$	$L_{DA}$	MA
1	5	10	5,10
2	5,10	10,12	5,10,12
3	5,10,20	10,12,11	5,10,11,12,20
4	5,10,20,8	10,12,11,13	5,8,10,11,12,13,20
5	5,10,20,8,7	10,12,11,13,180	5,7,8,10,11,12,13,20,180
6	5,10,20,8,7,2	10,12,11,13,180,14	2,5,7,8,10,11,12,13,14,20,180
7	5,10,20,8,7,2,180	10,12,11,13,180,14,31	2,5,7,8,10,11,12,13,14,20,31,180
8	5,10,20,8,7,2,180,3	10,12,11,13,180,14,31,32	2,5,7,8,10,11,12,13,14,20,31,32,180
9	5,10,20,8,7,2,180,3,15	10,12,11,13,180,14,31,32,30	2,5,7,8,10,11,12,13,14,15,20,30,31,32,180
10	5,10,20,8,7,2,180,3,15,30	10,12,11,13,180,14,31,32,30,33	2,5,7,8,10,11,12,13,14,15,20,30,31,32,33,180
11	5,10,20,8,7,2,180,3,15,30,160	10,12,11,13,180,14,31,32,30,33,20	2,5,7,8,10,11,12,13,14,15,20,30,31,32,33,160,180
12	5,10,20,8,7,2,180,3,15,30,160,6	10,12,11,13,180,14,31,32,30,33,20,52	2,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,20,30,31,32,33,52,160,180
13	5,10,20,8,7,2,180,3,15,30,160,6,4	10,12,11,13,180,14,31,32,30,33,20,52,34	2,4,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,20,30,31,32,33,34,52,160,180
14	5,10,20,8,7,2,180,3,15,30,160,6,4,18	10,12,11,13,180,14,31,32,30,33,20,52,34,51	2,4,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,18,20,30,31,32,33,34,51,52,160,180
15	5,10,20,8,7,2,180,3,15,30,160,6,4,18,40	10,12,11,13,180,14,31,32,30,33,20,52,34,51,9	2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,18,20,30,31,32,33,34,40,51,52,160,180
16	5,10,20,8,7,2,180,3,15,30,160,6,4,18,40,9	10,12,11,13,180,14,31,32,30,33,20,52,34,51,9,53	2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,18,20,30,31,32,33,34,40,51,52,53,160,180
17	5,10,20,8,7,2,180,3,15,30,160,6,4,18,40,9,29	10,12,11,13,180,14,31,32,30,33,20,52,34,51,9,53,4	2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,18,20,29,30,31,32,33,34,40,51,52,53,160,180
18	5,10,20,8,7,2,180,3,15,30,160,6,4,18,40,9,29,28	10,12,11,13,180,14,31,32,30,33,20,52,34,51,9,53,4,54	2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,18,20,28,29,30,31,32,33,34,40,51,52,53,54,160,180
19	5,10,20,8,7,2,180,3,15,30,160,6,4,18,40,9,29,28,1	10,12,11,13,180,14,31,32,30,33,20,52,34,51,9,53,4,54,72	1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,18,20,28,29,30,31,32,33,34,40,51,52,53,54,72,160,180
20	5,10,20,8,7,2,180,3,15,30,160,6,4,18,40,9,29,28,1,50	10,12,11,13,180,14,31,32,30,33,20,52,34,51,9,53,4,54,72,160	1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,18,20,28,29,30,31,32,33,34,40,50,51,52,53,54,72,160,180
21	5,10,20,8,7,2,180,3,15,30,160,6,4,18,40,9,29,28,1,50,31	10,12,11,13,180,14,31,32,30,33,20,52,34,51,9,53,4,54,72,160,73	1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,18,20,28,29,30,31,32,33,34,40,50,51,52,53,54,72,73,160,180
22	5,10,20,8,7,2,180,3,15,30,160,6,4,18,40,9,29,28,1,50,31,17	10,12,11,13,180,14,31,32,30,33,20,52,34,51,9,53,4,54,72,160,73,50	1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,17,18,20,28,29,30,31,32,33,34,40,50,51,52,53,54,72,73,160,180
23	5,10,20,8,7,2,180,3,15,30,160,6,4,18,40,9,29,28,1,50,31,17,12	10,12,11,13,180,14,31,32,30,33,20,52,34,51,9,53,4,54,72,160,73,50,74	1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,17,18,20,28,29,30,31,32,33,34,40,50,51,52,53,54,72,73,74,160,180
24	5,10,20,8,7,2,180,3,15,30,160,6,4,18,40,9,29,28,1,50,31,17,12,22	10,12,11,13,180,14,31,32,30,33,20,52,34,51,9,53,4,54,72,160,73,50,74,71	1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,17,18,20,22,28,29,30,31,32,33,34,40,50,51,52,53,54,71,72,73,74,160,180
25	5,10,20,8,7,2,180,3,15,30,160,6,4,18,40,9,29,28,1,50,31,17,12,22,51	10,12,11,13,180,14,31,32,30,33,20,52,34,51,9,53,4,54,72,160,73,50,74,71,161	1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,17,18,20,22,28,29,30,31,32,33,34,40,50,51,52,53,54,71,72,73,74,160,161,180
26	5,10,20,8,7,2,180,3,15,30,160,6,4,18,40,9,29,28,1,50,31,17,12,22,51,23	10,12,11,13,180,14,31,32,30,33,20,52,34,51,9,53,4,54,72,160,73,50,74,71,161,141	1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,17,18,20,22,23,28,29,30,31,32,33,34,40,50,51,52,53,54,71,72,73,74,141,160,161,180



27	5,10,20,8,7,2,180,3,15,30,160, 6,4,18,40,9,29,28,1,50,31,17,12, 22,51,23,26	10,12,11,13,180,14,31,32,30,33,20, 52,34,51,9,53,4,54,72,160,73,50,74, 71,161,141,162	1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,17,18,20,22,23, 26,28,29,30,31,32,33,34,40,50,51,52,53,54,71,72, 73,74,141,160,161,162,180
28	5,10,20,8,7,2,180,3,15,30,160, 6,4,18,40,9,29,28,1,50,31,17,12, 22,51,23,26,38	10,12,11,13,180,14,31,32,30,33,20, 52,34,51,9,53,4,54,72,160,73,50,74, 71,161,141,162,179	1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,17,18,20,22,23, 26,28,29,30,31,32,33,34,38,40,50,51,52,53,54,71, 72,73,74,141,179,160,161,162,180
29	5,10,20,8,7,2,180,3,15,30,160, 6,4,18,40,9,29,28,1,50,31,17,12, 22,51,23,26,38,25	10,12,11,13,180,14,31,32,30,33,20, 52,34,51,9,53,4,54,72,160,73,50,74, 71,161,141,162,179,15	1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,17,18,20,22,23, 25,26,28,29,30,31,32,33,34,38,40,50,51,52,53,54, 71,72,73,74,141,179,160,161,162,180
30	5,10,20,8,7,2,180,3,15,30,160, 6,4,18,40,9,29,28,1,50,31,17,12, 22,51,23,26,38,25,140	10,12,11,13,180,14,31,32,30,33,20, 52,34,51,9,53,4,54,72,160,73,50,74, 71,161,141,162,179,15,121	1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,17,18,20,22,23, 25,26,28,29,30,31,32,33,34,38,40,50,51,52,53,54, 71,72,73,74,121,140,141,179,160,161,162,180
31	5,10,20,8,7,2,180,3,15,30,160, 6,4,18,40,9,29,28,1,50,31,17,12, 22,51,23,26,38,25,140,49	10,12,11,13,180,14,31,32,30,33,20, 52,34,51,9,53,4,54,72,160,73,50,74, 71,161,141,162,179,15,121,93	1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,17,18,20,22,23, 25,26,28,29,30,31,32,33,34,38,40,49,50,51,52,53, 54,71,72,73,74,93,121,140,141,179,160,161,162,180
32	5,10,20,8,7,2,180,3,15,30,160, 6,4,18,40,9,29,28,1,50,31,17,12, 22,51,23,26,38,25,140,49,14	10,12,11,13,180,14,31,32,30,33,20, 52,34,51,9,53,4,54,72,160,73,50,74, 71,161,141,162,179,15,121,93,8	1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,17,18,20,22,23, 25,26,28,29,30,31,32,33,34,38,40,49,50,51,52,53, 54,71,72,73,74,93,121,140,141,179,160,161,162,180

A igualdade ocorre para  $l = 31$  e  $l = 32$ , onde  $\mathbf{MA} = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 20, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 38, 40, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 71, 72, 73, 74, 93, 121, 140, 141, 179, 160, 161, 162, 180\}$ , com 49 elementos.

O bloco 12 possui 18 linhas  $\xi$  e 21  $\eta$ , totalizando 340 elementos, Figura 4.39.

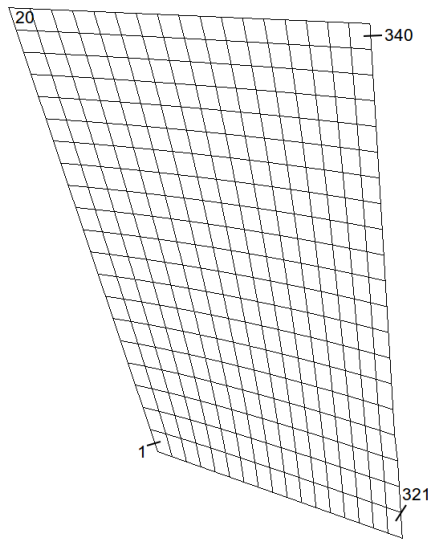


Figura 4.39: Malha do bloco 12 do lago Luruaco com a numeração de alguns elementos.

Os parâmetros de qualidade estão representados pela Figura 4.40.

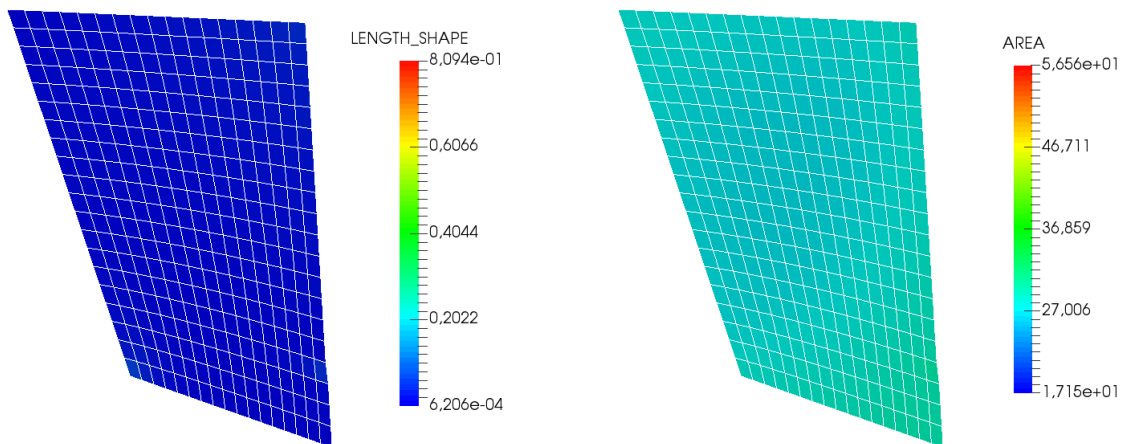


Figura 4.40: Malha do bloco 12 do lago Luruaco gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.

No bloco 12 a igualdade ocorre para  $l = 60$  e  $l = 61$ , onde  $\mathbf{MA} = \{1, 2, 3, 21, 22, 23, 41, 42, 61, 81, 101, 121, 122, 141, 142, 161, 162, 163, 180, 181, 182, 183, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340\}$  com 116 elementos.

Por fim o bloco 13 é formado por 24 linhas  $\xi$  e 21  $\eta$ , contendo 460 elementos, Figura 4.41.

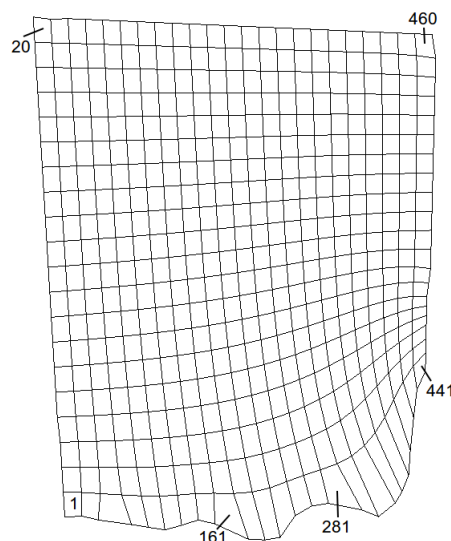


Figura 4.41: Malha do bloco 13 do lago Luruaco com a numeração de alguns elementos.

A Figura 4.42 representa os parâmetros de qualidade relacionados a essa ma-

lha.

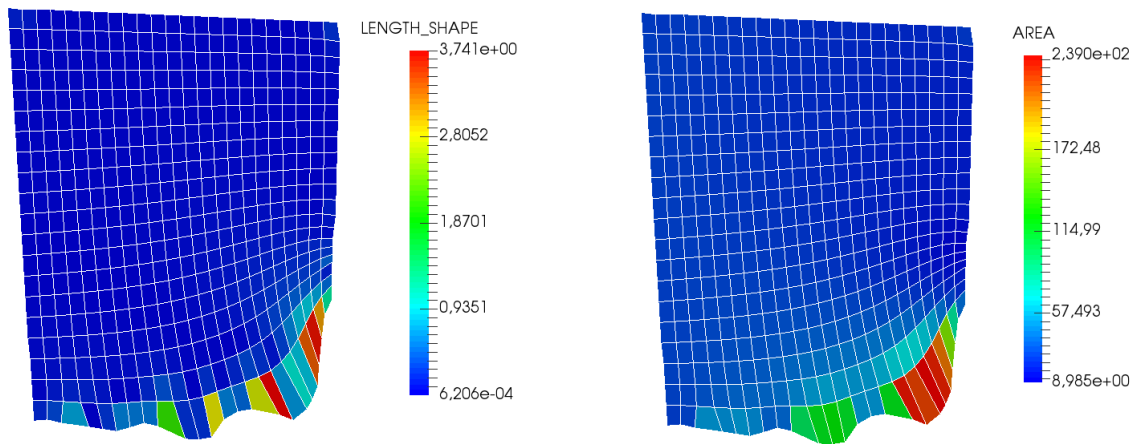


Figura 4.42: Malha do bloco 13 do lago Luruaco gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.

Observa-se que os elementos menos adequados encontram-se próximos do bordo. A Tabela 4.16 apresenta o modelo de qualidade do bloco 13.

Tabela 4.16: Tabela da análise do modelo de qualidade dos elementos da malha do bloco 13 do lago Luruaco.

$l$	$L_d$	$dL_{DA}$	MA
1	301	341	301,341
2	301,401	341,301	301,341,401
3	301,401,381	341,301,361	301,341,361,381,401
4	301,401,381,421	341,301,361,321	301,321,341,361,381,401,421
5	301,401,381,421,221	341,301,361,321,381	221,301,321,341,361,381,401,421
6	301,401,381,421,221,281	341,301,361,321,381,401	221,281,301,321,341,361,381,401,421
7	301,401,381,421,221,281, 161	341,301,361,321,381,401, 201	161,201,221,281,301,321,341,361,381, 401,421
8	301,401,381,421,221,281, 161,441	341,301,361,321,381,401, 201,281	161,201,221,281,301,321,341,361,381, 401,421,441
9	301,401,381,421,221,281, 161,441,341	341,301,361,321,381,401, 201,281,181	161,181,201,221,281,301,321,341,361, 381,401,421,441
10	301,401,381,421,221,281, 161,441,341,402	341,301,361,321,381,401, 201,281,181,221	161,181,201,221,281,301,321,341,361, 381,401,402,421,441
11	301,401,381,421,221,281, 161,441,341,402,361	341,301,361,321,381,401, 201,281,181,221,161	161,181,201,221,281,301,321,341,361, 381,401,402,421,441

Nessa malha igualdade ocorre para  $l = 10$  e  $l = 11$ , onde obtemos  $\mathbf{MA} = \{161, 181, 201, 221, 281, 301, 321, 341, 361, 381, 401, 402, 421, 441\}$ , com 14 elementos.

Após completa a análise dos blocos do lago Luruaco, observa-se que os elementos menos adequados encontram-se geralmente próximos dos bordos, onde as geometrias apresentam-se irregulares. Observamos nas simulações que os parâmetros apresentaram os elementos mais disformes, e o modelo de qualidade apresentado identificou quais elementos em cada malha necessitam ser remodelados.

#### 4.9 MALHA NACA 64A 010

Nessa seção apresentaremos uma malha inspirada em um artigo científico. O artigo [24], trata de resolver as equações de Navier-Stokes com precisão de tempo com custo computacional reduzido, em turbomáquinas, especificamente de uma turbina completa com 9 fileiras de pás.

Geramos uma malha da parte interna de um NACA 64A 010, utilizando o modelo apresentado nessa dissertação, ou seja em coordenadas generalizadas na forma adimensional em multiblocos, onde cada bloco 1, 2, 3 e 4 são formados por 17 linhas na direção  $\xi$  e 10 na direção  $\eta$ , no total de 144 elementos cada, conforme Figura 4.43.

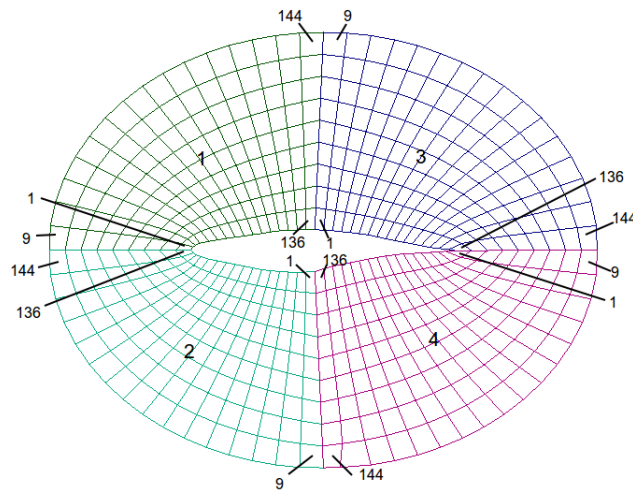


Figura 4.43: Malha da parte interna de um NACA 64A 010.

Geramos a malha com os parâmetros comprimento de forma e diferença de área, como mostrados na Figura 4.44 e realizamos a análise do modelo de qualidade por blocos. No bloco 1, a igualdade (3.16) ocorre para  $l = 27$  e  $l = 28$ , obtemos  $\mathbf{MA} = \{2, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15, 16, 17, 18, 24, 25, 26, 27, 28, 34, 35, 36, 37, 43, 44, 45, 53, 54, 62, 63, 71, 72, 80, 81, 89, 90, 98, 99, 107, 108, 116, 117, 125, 126, 134, 135, 136, 137, 143, 144\}$  com 47 elementos. No bloco 2 a conjectura (3.16) também acontece para  $l = 27$  e  $l = 28$  e  $\mathbf{MA} = \{1, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 17, 18, 26, 27, 35, 36, 37, 44, 45, 53, 54, 62, 63, 71, 72, 80, 81, 89, 90, 98, 99, 100, 107, 108, 117, 119, 120, 125, 126, 127, 128, 129, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 141, 142, 143, 144\}$  com 50 elementos. No bloco 3 a conjectura (3.16) ocorre para  $l = 18$  e  $l = 19$ , onde  $\mathbf{MA} = \{1, 9, 18, 27, 36, 44, 45, 53, 54, 62, 63, 71, 72, 80, 81, 89, 90, 99, 108, 117, 118, 119, 120, 126, 127, 128, 129, 134, 135, 136, 137, 138, 142,$

143, 144} com 35 elementos. E no Bloco 4 a igualdade (3.16) ocorre para  $l = 19$  e  $l = 20$ , obtendo  $\mathbf{MA} = \{1, 2, 7, 8, 9, 10, 11, 16, 17, 18, 19, 25, 26, 27, 35, 36, 45, 54, 62, 63, 71, 72, 80, 81, 89, 90, 98, 99, 107, 108, 117, 126, 135, 144\}$  com 34 elementos.

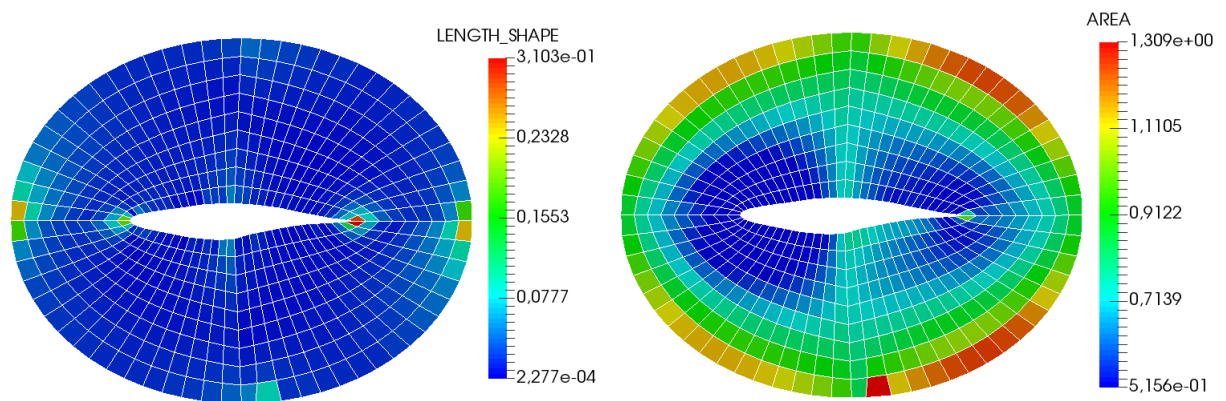


Figura 4.44: Malha da parte interna de um NACA 64A 010 gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.

#### 4.10 MALHA DE UMA REGIÃO ANELAR

Nossa próxima malha foi inspirada no artigo [11], que descreve um método para resolver as equações bidimensionais incompressíveis de Navier-Stokes em domínios físicos irregulares, usando malhas cartesianas uniformes. Seu método consiste em determinar uma distribuição de fontes necessárias para impor as condições de fluxo não-normal e não-tangencial ao longo da fronteira embutida. A medida em que são determinadas a correta distribuição das fontes necessárias para impor condições de contorno, são resolvidos um pequeno e denso sistema linear em cada passo de tempo. Na Figura 4.45 podemos observar a má adequação na fronteira do domínio no esboço do anel em malhas cartesianas uniformes obtidas do artigo [11].

Na Figura 4.46 apresentamos a malha de um anel utilizando o modelo numérico aqui apresentado, ou seja, geramos uma malha em coordenadas generalizadas na forma adimensional em multiblocos, onde problemas da má adequação da fronteira são minimizados.

Cada bloco 1,2,3 e 4 são formados por 17 linhas  $\xi$  e 10 linhas  $\eta$ , totalizando 144 elementos cada. As malhas com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área podem ser visualizados na Figura 4.47

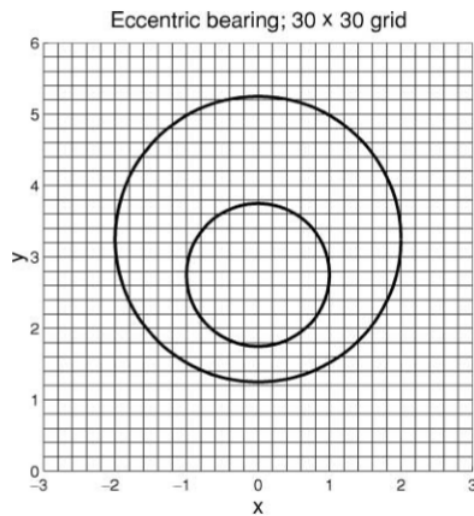


Figura 4.45: Esboço do domínio de uma região anelar utilizando malha cartesiana. [11]

O Modelo de qualidade apresentado pela conjectura (3.16) foi realizada a cada bloco. No bloco 1 a igualdade ocorreu para  $l = 31$  e  $l = 32$ , e obtemos  $\mathbf{MA} = \{1, 2, 7, 8, 9, 10, 11, 15, 16, 17, 18, 19, 24, 25, 26, 27, 34, 35, 36, 44, 45, 53, 54, 55, 62, 63, 71, 72, 80, 81, 89, 90, 97, 98, 99, 106, 107, 108, 116, 117, 118, 119, 125, 126, 127, 128, 134, 135, 136, 137, 143, 144\}$  com 52 elementos. No bloco 2 a igualdade (3.16) ocorre para  $l = 15$  e  $l = 16$  e  $\mathbf{MA} = \{7, 8, 9, 16, 17, 18, 25, 26, 27, 35, 36, 54, 72, 81, 90, 99, 108, 125, 126, 134, 135, 136, 141, 142, 143, 144\}$  com 26 elementos. No bloco 3 a conjectura (3.16) acontece para  $l = 23$  e  $l = 24$  obtendo  $\mathbf{MA} = \{1, 2, 8, 9, 10, 11, 18, 19, 26, 27, 35, 36, 44, 45, 53, 54, 62, 63, 71, 72, 80, 81, 89, 90, 98, 99, 108, 117, 124, 125, 126, 127, 133, 134, 135, 136, 142, 143, 144\}$  com 39 elementos. E finalmente no bloco 4 a conjectura (3.16) acontece para  $l = 21$  e  $l = 22$  onde  $\mathbf{MA} = \{1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 16, 17, 18, 26, 27, 44, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 98, 99, 108, 116, 117, 123, 124, 125, 126, 133, 134, 135, 141, 142, 143, 144\}$  com 35 elementos.

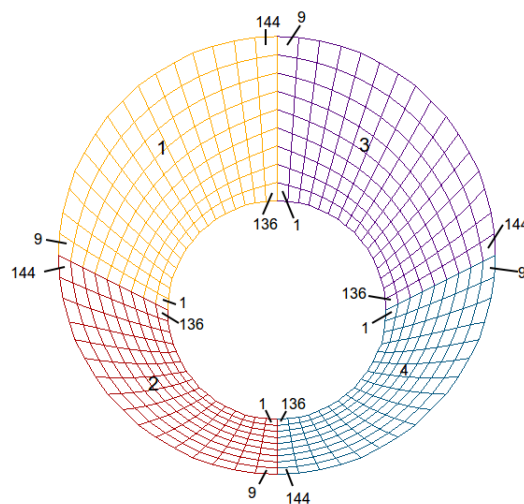


Figura 4.46: Malha de um anel gerada em coordenadas generalizadas. [11]

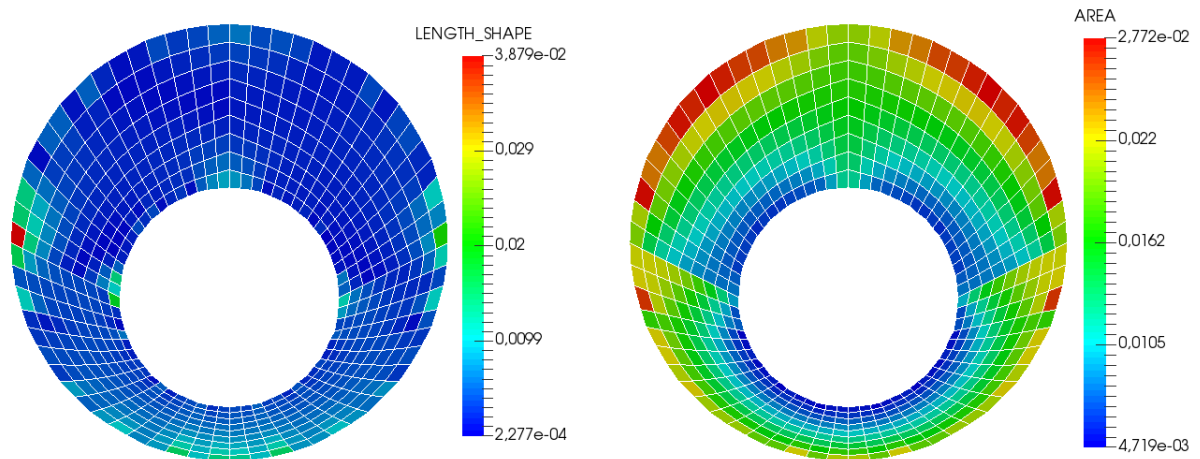


Figura 4.47: Malha de um anel gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.

#### 4.11 MALHA COM DOIS CILINDROS

A última malha foi inspirada no artigo [38], onde as equações de Navier-Stokes para cilindros do fluxo são resolvidas usando malhas estruturadas e malhas *overset*. Foi empregado a técnica *overset grid* utilizando malhas ortogonais diferentes em subdomínios diferentes. Na Figura 4.48 podemos observar um sistema *overset grid*, onde uma malha polar ao redor do cilindro circular é sobreposta em uma malha cartesiana de fundo. Na Figura 4.49 uma malha com dois cilindros numa disposição lado a lado utilizando o mesmo método *overset grid*.

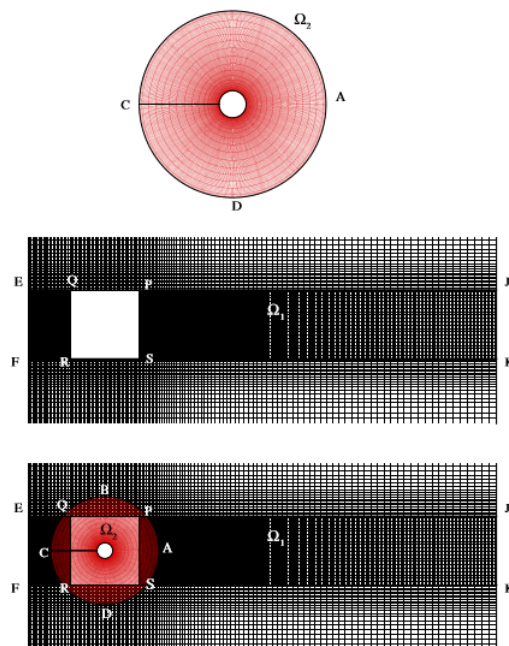


Figura 4.48: Malha polar ao redor de um cilindro circular, malha cartesiana, e uma malha sobreposta à outra. [38]

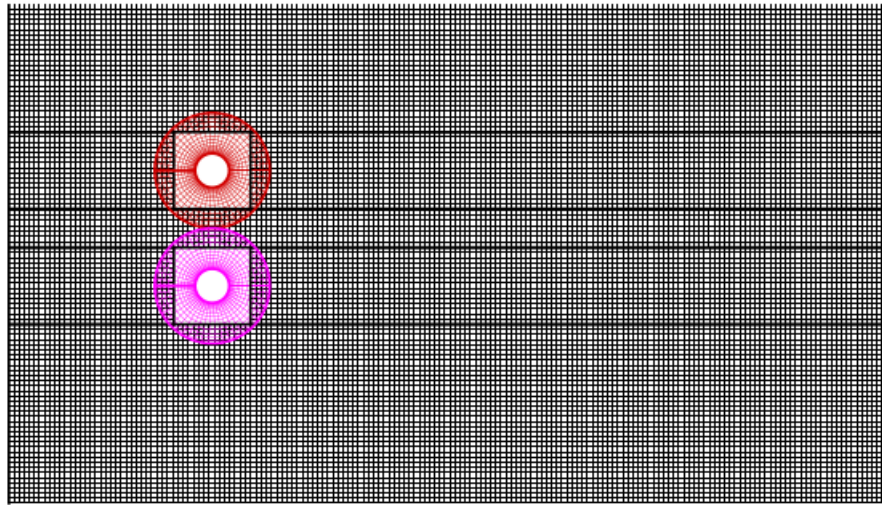


Figura 4.49: Malha com dois cilindros lado a lado geradas pelo método overset grid. [38]

No nosso trabalho, geramos a malha com dois cilindros lado a lado utilizando o modelo numérico apresentado nessa dissertação, ou seja, utilizando as equações em coordenadas generalizadas na forma adimensional em multiblocos, com 2 blocos, onde o primeiro bloco é formado por 25 linhas na direção  $\xi$  e 102 linhas na direção  $\eta$ , e o bloco 2 com 75 linhas na direção  $\xi$  e 102  $\eta$ , Figura 4.50.

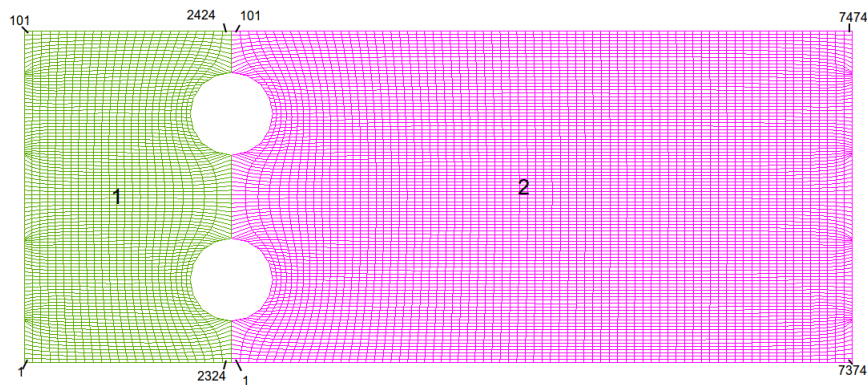


Figura 4.50: Malha com dois cilindros lado a lado gerada em coordenadas generalizadas.

A malha gerada com os parâmetros comprimento de forma e diferença de área podem ser vistas na Figura 4.51, a análise do modelo de qualidade foi realizada para cada bloco, onde no bloco 1 e no bloco 2 a igualdade (3.16) ocorre para  $l = 3$  e  $l = 4$  com  $\mathbf{MA} = \{2364, 2365, 2383, 2384\}$  do bloco 1 com 4 elementos, e  $\mathbf{MA} = \{41, 42, 60, 61, \}$  do bloco 2 com 4 elementos.



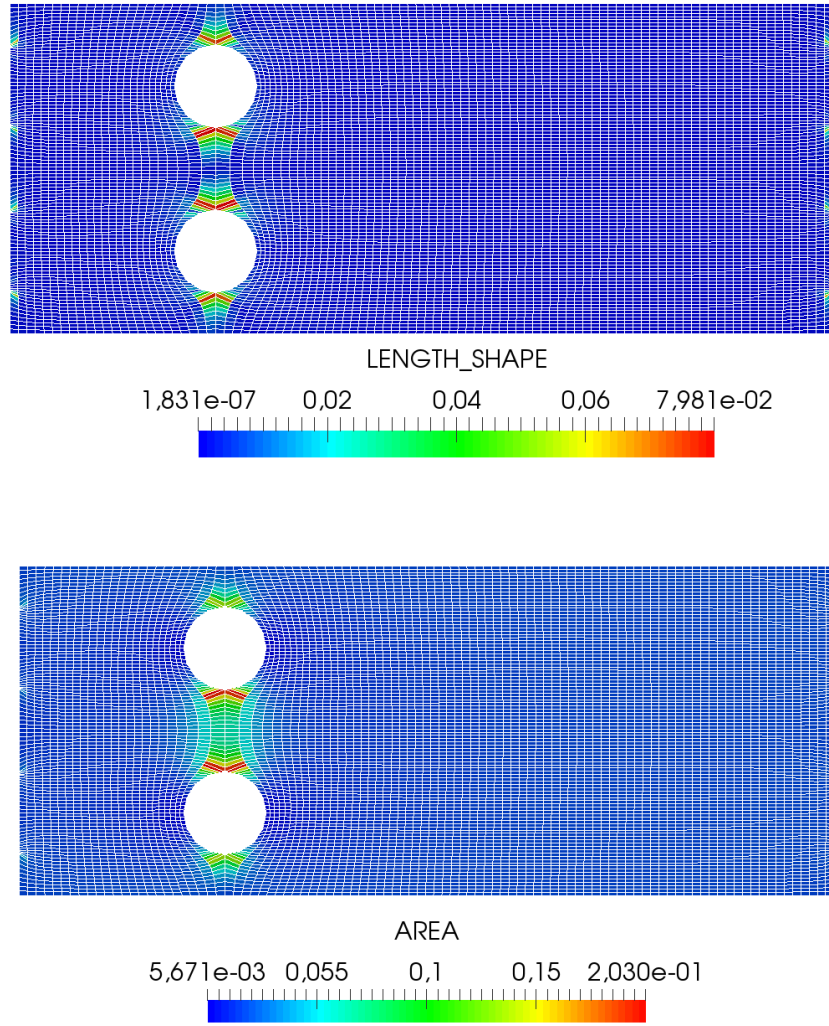


Figura 4.51: Malha com dois cilindros lado a lado gerada com os parâmetros de qualidade comprimento de forma e diferença de área.

## 5 CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi o desenvolvimento e a aplicação de um método numérico para a geração de malhas 2D em coordenadas generalizadas na forma adimensional, além da criação de um modelo para determinação de parâmetro de qualidade de malha.

Conforme apresentado no capítulo 2, estudamos a modelagem numérica para geração de malhas em coordenadas generalizadas na forma adimensional. Para esse fim, caracterizamos uma malha, e foram apresentados seus elementos. Quando problemas físicos são tratados, o emprego do sistema de coordenadas generalizadas é muito importante para a adequação da malha na fronteira da região a ser discretizada, assim descrevemos a transformação de coordenadas das equações governantes de geração de malha, entre o sistema cartesiano e o de coordenadas generalizadas. Para a construção da borda foi utilizado o método de interpolação polinomial, denominado spline cúbico parametrizado. Após desenvolver o modelo para geração de malhas que se encontra na forma dimensional, realizamos a transformação das equações para a forma adimensional.

A qualidade de uma malha é fundamental para se obter boas soluções. No capítulo 3 estudamos algumas métricas fundamentais para a construção de um modelo de parâmetro de qualidade para identificar os elementos menos adequados de uma malha. Utilizamos métricas como o jacobiano que está relacionado com a área do elemento no domínio físico, baricentro de quadriláteros (forma geométrica dos elementos), e método dos mínimos quadrados para encontrar uma circunferência que melhor se aproxima dos nós dos elementos. Primeiramente calculamos a distância entre o baricentro do elemento e o centro da circunferência que melhor se aproxima dos nós desse elemento, e a essa distância denominou-se comprimento de forma. Calculamos também o módulo da diferença entre a área da circunferência com a área do elemento, e a esse valor denominou-se diferença de área. O modelo do parâmetro de qualidade foi desenvolvido através desses dois resultados, comprimento de forma e diferença de área, como mostrado.

As simulações e os resultados obtidos foram exibidos no capítulo 5, onde algumas regiões foram discretizadas, ou seja, as malhas foram geradas. Paralelamente foi realizado a análise dos parâmetros de qualidade e o modelo de qualidade apresentados nessa dissertação.

Quando a geometria da região a ser discretizada é quadrada ou retângular, as malhas possuem elementos quadrados e ou retângulos, onde os elementos podem ser inscritos em uma circunferência e seu baricentro coincide com o centro dessa circunferência, nestes casos nosso modelo de qualidade apresentou resultados de maneira correta. Na placa de orifício observou-se que os elementos menos adequados aparecem próximos ao orifício. Na malha das placas paralelas os problemas apareceram próximos a circunferência imersa, onde os elementos apresentam formas mais distantes das formas fundamentais. Notou-se de maneira geral que os

elementos menos adequados apresentam-se próximos à borda, onde a geometria é irregular.

Nas simulações efetuadas foi possível observar que os parâmetros de comprimento de forma e diferença de área acusam os elementos mais disformes. Em algumas malhas como a placa de orifício, a quadricúspide, nos blocos 1,2,3,4,5,6,7 e 13 do lago Luruaco o modelo apontou perfeitamente os elementos menos adequados e de forma rápida e eficaz. Observou-se que para as malhas que apresentam praticamente todos os seus elementos semelhantes ao quadrado, ou seja, onde os elementos já são considerados adequados, como a malha quadrada, garrafa de coca-cola, os blocos 8, 9, 10, 11 e 12 do lago Luruaco, o modelo apresentou uma quantidade grande de elementos, ou seja, chegamos a conclusão de que quando a malha é formada por elementos considerados adequados (malha de qualidade), o valor de  $l$  é grande.

De maneira geral, pelas simulações, os dois parâmetros apresentaram resultados positivos que identificaram os elementos mais disformes da malha. E a conjectura para o modelo de qualidade de malhas também apresentou resultados muito satisfatórios, validando nosso modelo.

Para estudos futuros, nosso objetivo será criar um modelo para remodelar os elementos selecionados pelo modelo de qualidade dessa dissertação, afim de obtermos uma malha refinada que apresente soluções numéricas com precisão.

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- [1] AMSDEN, A. A., HIRT, C. W. “A simple scheme for generating general curvilinear grids”, *Journal of Computational Physics*, vol. 11, p. 348-359 (1973)
- [2] ATALAY, F. B., RAMASWAMI, S., XU, D. Quadrilateral meshes with provable angle bounds. *Engineering with Computers*, 28(1):31-56, 2012.
- [3] AZEVEDO, A. M. T. Um novo esquema UPWIND fundamentado na série de fourier para as equações de navier-stokes. Dissertação, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.
- [4] BABUSKA, I., AZIZ, A.K. On the angle condition in the finite element method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 13(2):214-226, 1976.
- [5] BAKER, B. S., GROSSE, E., RAFFERTY, C. S. Nonobtuse triangulation of polygons. *Discrete Computational Geometry*, 3(1):147-168, 1988.
- [6] BARBA, A. N. D. Estudo e implementação de esquema UPWIND na resolução de um modelo de dinâmica dos fluidos computacional em coordenadas generalizadas. Dissertação, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.
- [7] BARFIELD, W. D. “An optimal mesh generator for lagrangian hydrodynamics calculation in two space dimensions”, *Journal of Computational Physics*, vol. 6, p. 417-429 (1970).
- [8] BOIVIN, C., OLLIVER-GOOCH, C. Guaranteed-quality triangular mesh generation for domains with curved boundaries. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55(10):1185-1213, 2002.
- [9] BOTSCH, M., KOBELT, L., PAULY, M., ALLIEZ, P., LÉVY, B. Polygon mesh processing. A. K. Peters, Ltd., 2010.
- [10] BRUM, H. Dimensionamento de uma Placa de Orifício. Revista REBEQ, edição 27-1 p.14-15 (2011).
- [11] CALHOUN, D. A cartesian grid method for solving the two-dimensional streamfunction-vorticity equations in irregular regions. *Journal of Computational Physics*, 176, 231-274 (2002).
- [12] CHOI, J. Development of centering method for automatic generation of a quadrilateral mesh. *International Journal of CAD/CAM* vol.11  $N_0$ . 1 (2011).

- [13] CHU, W. H. “Development of a general finite difference approximation for a general domain - Part I: Machine Transformation”, *Journal of Computational Physics*, vol. 8 p. 382-408 (1971).
- [14] CIRILO, E. R., DE BORTOLI, A. L. Geração da malha da traquéia e dos tubos bronquiais por spline cúbico. *Semina: Ciências Exatas e Tecnológicas* 27, 2 (2006), 147– 155.
- [15] EPPSTEIN, D. Diamond-kite meshes: Adaptive quadrilateral meshing and orthogonal circle packing. In X. Jiao and J.-C. Weill, editors, *Proceeding of the 21th International Meshing Roundtable*, pages 261-277, Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [16] EPPSTEIN, D., BERN, M. Mesh generation and optimal triangulation. In D.-Z. Du and F.Hwang, editors, *Computing in Euclidean Geometry*, vol. 1 of *Lecture Notes Series in Computing*, pages 23-90. World Scientific, 1992.
- [17] EPPSTEIN, D., BERN, M. Quadrilateral meshing by circle packing. In *proceeding of the 6th International Meshing Roundtable*, pages 7-19, Park City, Utah, USA, 1997.
- [18] EPPSTEIN, D., BERN, M., GILBERT, J. Provably good mesh generation. *Journal of Computer and System Sciences* 48, 3 (1994), 384-1994.
- [19] FORTUNA, A. O. Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos básicos e aplicações, 2a. ed. EDUSP, São Paulo, 2012.
- [20] FOX, R. W., MC DONALD, A. T. Introdução à Mecânica dos Fluidos. Guanabara, Rio de Janeiro, 1985.
- [21] GERÔMIMO, J.R., FRANCO, V. S. Geometria Plana e Espacial: Um estudo axiomático, 2a. ed. EDUEM, Maringá, 2010.
- [22] GODUNOV, S. K., PROKOPOV, G. P. “The solution of differential equations by the use of curvilinear difference networks” *U. S. S. R. Computational Math. Phys.*, vol. 8 p. 1 (1968).
- [23] HENRY R. F., WALTERS, R. A. Geometrically based, automatic generator for irregular triangular Networks. *Communications in Numerical Methods in Enginnering* vol. 9 p. 555-566 (1993).
- [24] HSU, M. J., JAMESON, A. An Implicit-Explicit Hybrid Scheme for Calculating Complex Unsteady Flows. *40th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* January 14-17, 2002/Reno, Nevada.
- [25] JUNIOR, A. F. A. Estudo sobre geração de malhas de elementos finitos para a modelagem numérica do método MCSEM. Trabalho de conclusão de curso, Universidade Federal do Pará, 2008.

- [26] LIANG, X., EBEIDA, M. S., ZHANG, Y. Guaranteed-quality all-quadrilateral mesh generation with feature preservation. *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(29-32):2072-2083, 2010.
- [27] MACHADO, L. G. P. Malhas adaptativas em domínios definidos por fronteiras curvas. Dissertação, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP, São Carlos, 2008.
- [28] MALISKA, C. R. Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional, 2a. ed. LTC, Rio de Janeiro, 2013.
- [29] MAO, S., SHI, Z. Error estimates of triangular finite elements under a weak angle condition. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 230(1):329-331, 2009.
- [30] MILLER, G. L., PHILLIPS, T., SHEEHY, D. R. Linear-size meshes. In *Proceeding of the 20th Canadian Conference in Computational Geometry*, CCCG'08, pages 175-178, 2008.
- [31] PELLENARD, B., ALLIEZ, P., MORVAN, J. M. Isotropic 2D quadrangle meshing with size and orientation control. In W. R. Quadros, editor, *proceeding of the 20th International Meshing Roundtable*, pages 81-98. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [32] RAMASWAMI, S., SIQUEIRA, M., SUNDARAM, T., GALLIER, J., GEE, J. Constrained quadrilateral meshes of bounded size. *International Journal of Computational Geometry E Applications*, 15(1):55-98, 2005.
- [33] RAPHAEL, D. Revista do Professor de Matemática 63, IME - USP, 2007.
- [34] REBAY, S. Efficient unstructured mesh generation by means of Delaunay triangulation and Bowyer-Watson algorithm. *Journal of Computational Physics*, vol. 106, p.125-138 (1993).
- [35] ROSA, V. A. O., VALDÉS-ARENCIBIA, R. Métodos de Ajuste Utilizados nos Programas Computacionais Dedicados às MMC's. UFU, 2014.
- [36] RUGGIERO, M. A. G., LOPES, V. L. R. Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais, 2a. ed. Pearson Makron Books, São Paulo, 1996.
- [37] SAITA, T. M. Dinâmica de coliformes fecais no lago Luruaco - Atlântico, Colômbia. Dissertação, Universidade Estadual de Londrina, 2016.q
- [38] SENGUPTA, T. K., SUMAM, V. K., SINGH, N. Solving Navier-Stokes equation for flow past cylinders using single-block Structured and overset grids. *Journal of Computational Physics*, 229 178-199 (2010).
- [39] SHEWCHUK, J. R. unstructured mesh generation. In U-Naumann and O.Schenk, editors, *Combinatorial Scientific Computing*, chapter 10, pages 257-297. CRC Press, 2012.

- [40] SIQUEIRA, M., PAIVA, A., PAGLIOSA, P. Geração de Malhas por Refinamento de Delaunay. 30<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 2015.
- [41] THOMPSON, J. F., THAMES, F. C., MASTIN, C. W. “Boundary fitted curvilinear coordinate system for solution of partial differential equations on fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies”, *NASA Langley Research Centre CR-2729*, EUA (1976).
- [42] THOMPSON, J. F., THAMES, F. C., MASTIN, C. W. “TOMCAT - A code for numerical generation of boundary-fitted curvilinear coordinate system on fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies”, *Journal of Computational Physics* vol. 24, p. 274-302 (1977).
- [43] THOMPSON, J. F., WARSI, Z. U. A., MASTIN, C. W. Numerical Grid Generation: Foundations and Applications. North-Holland, 1985.
- [44] THURSTON, J. Looking back and again: The Triangulated Irregular Network (TIN). *GeoInformatics*, 6(7):32-35, 2003.
- [45] TSAI, V. J. D. Delaunay Triangulations in TIN Creation: An Overview and a Linear-Time Algorithm. *International Journal of Geographical Information Systems*, 7(6):505-524, 1993.
- [46] VASCO, J. R. G. Desenvolvimento de software utilizando a técnica SPH (Smoothed Particle hydrodynamics) na geração de ondas de submersão. Tese. Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2014.
- [47] VERMA, C. S., TAUTGES, T. Jaal: Engineering a high quality all-quadrilateral mesh generator. In W. R. Quadros, editor, *Proceedings of the 20 th International Meshing Roundtable*, pages 511-530. Springer, 2012.
- [48] WINSLOW, A. M. “Numerical solution of quasi-linear Poisson equation in a non-uniform triangle mesh”, *Journal of Computational Physics*, vol. 2, p. 149-172 (1967).
- [49] YANG, J. C., CHEN, T. C. The Structured grid Generation Using Beta-Spline Curve/Surface Modeling. *Applied Numerical Mathematics* vol. 32 p. 435-445 (2000).
- [50] YOKOSUKA, Y., IMAI, K. Guaranteed-quality anisotropic mesh generation for domains with curved boundaries. *Computer-Aided Design*, 41(5):385-393, 2009.
- [51] YOUSSEF, A. N., SOARES, E., FERNANDEZ, V.P. Matemática: ensino médio, volume único, 1a. ed. Scipione, São Paulo, 2009.