Universidade Estadual de Londrina

TAÍS DE OLIVEIRA SAITO

SISTEMA DE TIMOSHENKO COM AMORTECIMENTO INDEFINIDO NA OSCILAÇÃO TRANSVERSAL

Londrina
2016

TAÍS DE OLIVEIRA SAITO

SISTEMA DE TIMOSHENKO COM AMORTECIMENTO INDEFINIDO NA OSCILAÇÃO TRANSVERSAL

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Profa. Dra. Luci Harue Fatori

Londrina
2016

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação -na-Publicação (CIP)

Saito,Taís de Oliveira.
Sistema de Timoshenko com amortecimento indefinido na oscilação transversal
Taís de Oliveira Saito. – Londrina, 2016.
67 f.

Orientador: Luci Harue Fatori.
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2016.

Inclui Bibliografia.

1. Análise matemática - Teses. 2. Equações diferenciais parciais - Teses. 3. Equações de Evolução - Teses. 4. Estabilidade - Teses. I. Fatori, Luci Harue. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

TAÍS DE OLIVEIRA SAITO

SISTEMA DE TIMOSHENKO COM AMORTECIMENTO INDEFINIDO NA OSCILAÇÃO TRANSVERSAL

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Luci Harue Fatori
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino
Universidade Estadual de Maringá

Profa. Dra. Michele de Oliveira Alves
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 26 de fevereiro de 2016.

Dedico este trabalho a Sueli, Lauro e Lucas.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço aos meus pais Sueli de Oliveira Saito e Lauro Junji Saito pelo apoio e confiança mesmo nos momentos mais difíceis. Agradeço também ao meu noivo Lucas pela sua constante ajuda, pelo companheirismo e pelos momentos agradáveis que passamos juntos. Ao meu primo Kleber por ter sido como um irmão mais velho, sempre paciente e disposto a ajudar. Aos meus amigos Stéfany, Gabe e Eiji pela amizade e carinho. Aos meus companheiros de curso pelo convívio enriquecedor.

É claro que não poderia deixar de agradecer à professora Luci pelos valiosos ensinamentos que muito contribuíram para o meu crescimento, não apenas acadêmico, mas também como pessoa. Também agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

On ne voit bien qu'avec le coeur. L'essentiel est invisible pour les yeux. (Antoine de Saint-Exupéry)

SAITO, Taís de Oliveira. **Sistema de Timoshenko com amortecimento indefinido na oscilação transversal** . 2016. 67. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi estudar o sistema de Timoshenko com uma dissipação indefinida. A dissipação está presente na equação que modela a oscilação transversal. Usando a teoria de semigrupos mostraremos a existência e unicidade da solução. Através do método do Ponto Fixo de Banach investigaremos quais condições são suficientes para obter o decaimento exponencial da solução.

Palavras-chave: Sistema de Timoshenko. Dissipação friccional. Dissipação indefinida. Existência e unicidade. Decaimento exponencial.

SAITO, Taís de Oliveira. **Timoshenko system with indefinite damping in the transverse oscillation** . 2016. 67. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

ABSTRACT

The main goal of this work was to study the Timoshenko system with an indefinite damping. The damping is present in the equation that models the transversal oscillation. Using the semigroup theory we will show the existence and uniqueness of solution. Through the Banach's Fixed Point method, we will investigate what conditions are sufficient for the exponential decay of the solution.

Keywords: Timoshenko system. Frictional damping. Indefinite damping. Existence and uniqueness. Exponential decay.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em 1921 o engenheiro mecânico ucraniano Stephen Prokofievich Timoshenko desenvolveu em [28] um modelo para a vibrações transversais em vigas planas sem a presença de mecanismos dissipativos de acordo com o seguinte sistema

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \text{ em } (0,\infty)\times(0,L), \tag{1.1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0 \text{ em } (0,\infty)\times(0,L). \tag{1.2}$$

Para deduzir o modelo dado acima, Timoshenko relacionou o modelo para vibrações transversais dado por

$$\begin{aligned} \rho A\varphi_{tt}(x,t) &= S_x(x,t), \\ \rho l\psi_{tt}(x,t) &= M_x(x,t) - S(x,t), \end{aligned} \tag{1.3}$$

com o modelo para a relação tensão - deformação dado por

$$\begin{aligned} M(x,t) &= El\psi_x(x,t), \\ S(x,t) &= kAG(\varphi_x + \psi)(x,t). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Nos sistemas (1.3) e (1.4), temos que t denota a variável tempo, x a distância até linha central da viga em equilíbrio, a função φ denota o deslocamento vertical da viga em relação a linha central e a função ψ denota a rotação das fibras verticais da barra. Além disso, ρ é a densidade da massa do material, M é o momento fletor, S é a força de cisalhamento, A é a área da secção transversal, l o momento de inércia da secção transversal, E denota o modelo de Young, G o módulo de rigidez e k o fator cisalhamento.

Há muitos trabalhos publicados sobre o decaimento da energia do sistema de Timosheko e as principais dissipações consideradas são do tipo friccional, térmica, elástica e suas combinações. Para o sistema de Timoshenko unidimensional, foi mostrado em [14], [20] e [25] que quando há dissipatividade tanto na equação que modela o deslocamento vertical quanto na equação que modela o ângulo de rotação, a solução decai exponencialmente independentemente da relação entre os coeficientes do sistema. Todavia, Soufyane em [27] provou que quando há dissipação atuando somente na equação do ângulo de rotação, para a obtenção do decaimento exponencial é necessário e suficiente que aconteça a relação

$$\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}. \tag{1.5}$$

Baseados no trabalho de Soufyane, muitos outros trabalhos, por exemplo, [1], [2], [5], [4], [9], [11], [12], [13], [23] e [26] surgiram com várias extensões e generalizações para estabelecer condições de decaimento para o sistema de Timoshenko com dissipações viscoelástica, termoelástica e com coeficientes não homogêneos.

Em recente resultado, em [8] os autores estabeleceram a estabilidade exponencial do sistema para o caso de duas dissipações não lineares localizadas $\alpha_1(x)g_1(\varphi_t)$ na equação (1.1) e $\alpha_2 g_2(\psi_t)$ na equação (1.2). Como era de se esperar, o resultado foi estabelecido sem o uso da condição (1.5).

Em geral, os trabalhos anteriormente citados que consideraram uma única dissipação, sempre a consideraram na segunda equação, ou seja no angulo de rotação. O primeiro trabalho que considerou a dissipação no deslocamento vertical foi dado em [3]. Neste trabalho, foi estudado o sistema de Timoshenko com dissipação friccional constante, ou seja

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \bar{a}\varphi_t = 0 \text{ em } (0,\infty)\times(0,L), \tag{1.6}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0 \text{ em } (0,\infty)\times(0,L), \tag{1.7}$$

com condições de fronteira dadas por

$$\varphi_x(\cdot,0) = \varphi_x(\cdot,L) = \psi(\cdot,0) = \psi(\cdot,L) = 0,$$

onde $\bar{a}, \rho_1, \rho_2, b, k > 0$. Em [3], concluiu-se que (1.5) é uma condição necessária e suficiente para que o sistema (1.6)-(1.7) seja exponencialmente estável.

No que se refere a dissipação indefinida no sistema de Timoshenko, só temos o conhecimento do trabalho em [12], onde os autores consideraram uma dissipação indefinida atuando na equação que modela a rotação do ângulo, ou seja

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x &= 0 \text{ em } (0,\infty)\times(0,L), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + a(x)\psi_t &= 0 \text{ em } (0,\infty)\times(0,L), \end{aligned}$$

com condições de fronteira dadas por

$$\varphi(\cdot,0) = \varphi(\cdot,L) = \psi_x(\cdot,0) = \psi_x(\cdot,L) = 0,$$

onde essa função $a \in L^\infty(0,L)$ pode mudar de sinal, embora tenha média positiva.

O objetivo desse trabalho é mostrar que há decaimento exponencial quando houver uma dissipação indefinida do tipo friccional atuando no deslocamento vertical do sistema dado por

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + a(x)\varphi_t = 0 \text{ em } (0,\infty)\times(0,L), \tag{1.8}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0 \text{ em } (0,\infty)\times(0,L), \tag{1.9}$$

com condições de fronteira dadas por

$$\varphi(\cdot,0)=\varphi(\cdot,L)=\psi_x(\cdot,0)=\psi_x(\cdot,L)=0. \tag{1.10}$$

Esse trabalho foi dividido em dois capítulos, no primeiro estudaremos o sistema (1.6)-(1.7) com as condições de fronteiras dadas em (1.10). A metodologia utilizada para estabelecer o objetivo desta dissertação requer que saibamos o resultado de decaimento do caso com dissipação definida. Assim, à luz de [3] mostraremos no Capítulo 3 que se tivermos a condição (1.5), há decaimento exponencial. No ultimo capítulo, baseados no que foi estudado em [24], mostraremos que o sistema (1.8)-(1.9) tem estabilidade exponencial desde que valha a condição (1.5) e $\|\bar{a}-a\|<\epsilon$, para algum $\epsilon>0$.

ÍNDICE DE NOTAÇÕES

$L^p(\Omega)$	espaço das funções u mensuráveis definidas em Ω com valores em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tais que $\|u\|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω
$\|.\|_{L^p}$	norma em $L^p(\Omega)$
$H^m(\Omega)$	espaço das funções $u \in L^2(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$para todo $\|\alpha\| \leqslant m$
$\|.\|_{H^m}$	norma em $H^m(\Omega)$
$H_0^m(\Omega)$	fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$
$\|.\|_{H_0^m}$	norma em $H_0^m(\Omega)$
$\mathcal{L}(\mathrm{X})$	espaço dos operadores lineares contínuos em X
$\|.\|_{\mathcal{L}(\mathrm{X})}$	norma em $\mathcal{L}(\mathrm{X})$
$L^p(0,T;H)$	espaço das funções mensuráveis $u:[0,T] \to X$ tal que $\|u(t)\|_H \in L^p(0,T)$
$C^0([0,T];X)$	espaço das funções contínuas $u:[0,T] \to X$ tal que $\|u(t)\|_X \in C^0([0,T])$
$med(\Omega)$	medida n-dimensional de Lebesgue do conjunto Ω
$D(A)$ ou $\mathcal{D}(A)$	domínio do operador A
$\rho(A)$	conjunto resolvente do operador A
$R(\lambda, A)$	operador resolvente
$Im(A)$	conjunto imagem do operador A

2 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos as notações e resultados fundamentais utilizados no desenvolvimento deste trabalho. Introduzimos os conceitos de Distribuição e Espaços de Sobolev. Destacamos, também, resultados básicos de Análise Funcional e também as principais definições e teoremas da teoria de semigrupos.

2.1 DISTRIBUIÇÕES E ESPAÇOS FUNCIONAIS

Nesta seção apresentaremos os espaços funcionais e a noção de derivada no sentido das distribuições. Para isso, considere Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$.

2.1.1 Noção de derivada fraca

No estudo de problemas descritos pelas equações diferenciais parciais cujos dados iniciais não são regulares o suficiente para possuírem derivada no sentido clássico, faz-se necessária a introdução de um novo conceito de derivada.
Para entendermos tal conceito necessitamos de algumas definições:

Definição 2.1. *Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma aplicação. Denomina-se suporte de u em Ω o fecho do conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$ e representa-se por $supp(u)$, ou seja, $supp(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}$.*

Definição 2.2. *Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções definidas em Ω que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que possuem suporte compacto.*

Definição 2.3. *Dizemos que uma sequência de funções $\{u_\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para a função $u \in C_0^\infty(\Omega)$ se as seguintes condições são satisfeitas*

i) existe $K \subset \Omega$ compacto, tal que $supp(u_\mu - u) \subset K$, para todo μ;

ii) para cada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n,\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, a sequência $\{D^\alpha u_n\}_{u\in\mathbb{N}}$ converge para $D^\alpha u$ uniformemente em K, onde D^α representa o operador derivação de ordem α definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\ldots\partial_{x_n}^{\alpha_n}}, \quad com \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Definição 2.4. *O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência dada na definição 2.3 é denominado espaço das funções testes e será representado por $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Definição 2.5. *Define-se distribuição sobre Ω a toda forma linear T sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínua no sentido da convergência definida sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Definição 2.6. *Uma sucessão $(T_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, quando a sequência numérica $(\langle T_\mu, u\rangle)_{\mu\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T, u\rangle$ em $\mathbb{R}$, para toda $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, onde $\langle T_\mu, u\rangle = T_\mu(u)$ e $\langle T, u\rangle = T(u)$.*

Definição 2.7. *Considere uma distribuição T sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T, no sentido das distribuições, é a forma linear $D^\alpha T$ definida por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi\rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Quando $\alpha \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, denotaremos $D^\alpha T$ como $\dfrac{d^\alpha T}{dx^\alpha}$.

Observação 2.8. Verifica-se que $D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω, e que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) & \to & \mathcal{D}'(\Omega) \\ T & \mapsto & D^\alpha T \end{array}$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que se

$$\lim_{\mu\to\infty} T_\mu = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \text{ então } \lim_{\mu\to\infty} D^\alpha T_\mu = D^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

2.1.2 Os espaços $L^p(\Omega)$

Definição 2.9. *$L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, é o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$, tais que $|u|^p$ é integrável a Lebesgue sobre Ω.*

Definição 2.10. *$L^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que existe uma constante c com $|u(x)| \le c$ quase sempre em Ω.*

Observação 2.11. Os espaços $L^p(\Omega)$ e $L^\infty(\Omega)$ munidos da norma

$$\|u\|_{L^p} := \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \le p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty} := \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c : |u(x)| \le c \text{ quase sempre em } \Omega\},$$

respectivamente, são espaços de Banach. Em particular, o espaço $L^2(\Omega)$, cuja norma provém do produto interno

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)\, dx$$

é um espaço de Hilbert.

2.1.3 Espaços de Sobolev

Definição 2.12. *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$, $1 \le p \le \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\alpha| \le m$, $D^\alpha u$ pertence a*

$L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições.

Observação 2.13. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} := \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}} := \|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess} |D^\alpha u(x)|.$$

é um espaço de Banach e é denominado espaço de Sobolev. Para o caso particular $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, representado por $H^m(\Omega)$, com o produto interno dado por

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \ \forall \, u, \, v, \in H^m(\Omega),$$

e é denominado espaço de Sobolev de ordem m. Além disso, se $m = 0$, $H^m(\Omega)$ identifica-se com $L^2(\Omega)$.

Definição 2.14. *O espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ é o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Quando Ω é limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$, então a norma em $W_0^{m,p}(\Omega)$ dada por*

$$\|u\|_{W_0^{m,p}} := \|u\|_{W_0^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| = m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

é equivalente à norma induzida por $W^{m,p}(\Omega)$.

Lema 2.15. *Os espaços vetoriais*

$$H^1_*(0, L) = \left\{ u \in H^1(0, L); \ \int_0^L u(x) \ dx = 0 \right\}$$

e

$$L^2_*(0, L) = \left\{ u \in L^2(0, L); \ \int_0^L u(x) \, dx = 0 \right\}$$

são espaços de Hilbert.

Demonstração: Ver [17], Capítulo 2, Lema 2.1.

■

2.1.4 Espaços funcionais à valores vetoriais

Definição 2.16. *Considere X um espaço de Banach. Denotaremos por $\mathcal{D}(0, T; X)$ o espaço das funções vetoriais $\varphi : (0, T) \to X$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto contido no intervalo $(0, T)$.*

Definição 2.17. *Dizemos que* $\varphi_\nu \to \varphi$ *em* $\mathcal{D}(0,T;X)$ *se*

i) existe $K \subset (0,T)$ *compacto, tal que* $supp(\phi_\nu - \phi) \subset K$*, para todo* ν*,*

ii) para cada $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{d^k}{dt^k}\varphi_\nu(t) \to \dfrac{d^k}{dt^k}\varphi(t)$ *em* X *uniformemente em* $t \in (0,T)$*.*

Definição 2.18. *Denotaremos o espaço das aplicações lineares e contínuas de* $\mathcal{D}(0,T)$ *em* X *por* $\mathcal{D}'(0,T;X)$*. Neste espaço dizemos que uma sucessão* $(S_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ *converge para* $S \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ *quando* $\langle S_\nu, \varphi\rangle \to \langle S, \varphi\rangle$ *em* X*,* $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(0,T)$*.*

Definição 2.19. *Denotaremos por* $L^p(0,T;X)$*,* $1 \le p \le \infty$ *o espaço de Banach das funções* $u : (0,T) \to X$*, tais que* u *é mensurável e* $\|u(t)\|_X$ *pertença a* $L^p(0,T)$*.*

Observação 2.20. Em $L^p(0,T;X)$ defini-se a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \le p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \inf\{c\, ; \|u(t)\|_X \le c \text{ quase sempre em } \ (0,T)\}.$$

Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, então $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert munido com o produto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X \, dt.$$

Definição 2.21. *Representaremos por* $W^{m,p}(0,T;X)$*,* $1 \le p \le \infty$ *o espaço de Banach*

$$W^{m,p}(0,T;X) = \{u \in L^p(0,T;X)\, ; u^{(j)} \in L^p(0,T;X),\ 0 \le j \le m\},$$

onde $u^{(j)}$ *representa a* j*-ésima derivada no sentido das distribuições, com a norma*

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \left(\sum_{j=0}^m \|u^{(j)}\|_{L^p(0,T;X)}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observação 2.22. Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $W^{m,2}(0,T;X)$ é denotado por $H^m(0,T;X)$, que é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u,v)_{H^m(0,T;X)} = \sum_{j=0}^m (u^{(j)}, v^{(j)})_{L^2(0,T;X)}.$$

Definição 2.23. $C^0([0,T];X)$ *é o espaço das funções contínuas* $u : [0,T] \to X$*, tais que* $\|u(t)\|_X$ *pertença a* $C^0([0,T])$*, que juntamente com a norma*

$$\|u\|_{C^0([0,T];X)} = \max_{0\le t\le T} \|u(t)\|_X,$$

é um espaço de Banach.

Definição 2.24. *$C^m([0,T];X)$ é o espaço de Banach das funções $u : [0,T] \to X$, tais que $\left\| \dfrac{d^k u}{dt^k}(t) \right\|_X$ pertença a $C^0([0,T])$ para $0 \le k \le m$. Além disso, em $C^m([0,T];X)$ defini-se a norma*

$$\|u\|_{C^m([0,T];X)} = \|u\|_{C^0([0,T];X)} + \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{C^0([0,T];X)} + \ldots + \left\| \frac{d^m u}{dt^m} \right\|_{C^0([0,T];X)}.$$

2.2 RESULTADOS AUXILIARES

Nesta seção enunciaremos os resultados necessários para o nosso trabalho, cujas demonstrações podem ser encontradas nas referências citadas.

Proposição 2.25. *Sejam X, Y espaços de Banach e $B : X \to Y$ um operador linear limitado. Se B é bijetivo, então seu inverso $B^{-1} : Y \to X$ é um operador linear limitado.*

Demonstração: Ver Teorema 4.12-2 em [15]. ■

Proposição 2.26. *Sejam $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ e $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ espaços de Banach. Se existe uma constante C tal que $\|x\|_1 \le C\|x\|_2$ para todo $x \in X$, então as normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes.*

Demonstração: Ver Proposição 2.18 em [16]. ■

Proposição 2.27. *Seja $f \in L^\infty(\Omega)$ então $|f(x)| \le \|f\|_{L^\infty}$ para quase todo $x \in \Omega$.*

Demonstração: Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $c_n \ge 0$ quase sempre em Ω tal que $|f(x)| \le c_n$ e

$$c_n \le \|f\|_{L^\infty} + \frac{1}{n}.$$

Dessa forma, $|f(x)| \le \|f\|_{L^\infty} + \frac{1}{n}$ quase sempre em Ω.

Definindo $q_n = \|f\|_{L^\infty} + \frac{1}{n}$, temos que

$$E_n = \{x \in \Omega; \quad |f(x)| > q_n\}$$

tem medida nula. Além disso, o conjunto

$$E = \{x \in \Omega; \quad |f(x)| > \|f\|_{L^\infty}\}$$

pode ser escrito como

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

De fato, seja $x \in E$. Como $q_n \to \|f\|_{L^\infty}$, então para $\epsilon = |f(x)| - \|f\|_{L^\infty} > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} = q_n - \|f\|_{L^\infty} < |f(x)| - \|f\|_{L^\infty} \Rightarrow |f(x)| > q_n$$

para todo $n > n_0$.

Logo,

$$x \in \bigcup_{n>n_0}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Por outro lado, se $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x)| > q_{n_0} > \|f\|_{L^\infty}$.

Como

$$0 \leq |E| = \left| \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |E_n| = 0 \Rightarrow |E| = 0.$$

Portanto $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$.

■

Proposição 2.28 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Seja H um espaço vetorial munido do produto interno $(\cdot,\cdot)$. Então, dadas u, $v \in H$, temos que*

$$|(u,v)| \leq \|u\|_H \, \|v\|_H,$$

onde $\|\cdot\|_H^2 = (\cdot,\cdot)$.

Demonstração: Ver desigualdade (11) da Seção 1.2 em [15]. ■

Proposição 2.29 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam $1 < p, q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $a, b > 0$. Então,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Ver Teorema IV.6 de [7]. ■

Proposição 2.30 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Suponhamos que Ω seja um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Então para todo $1 \leq p < \infty$, existe uma constante c_p, tal que*

$$||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq c_p ||\nabla u||_{L^p(\Omega)}, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração: Ver Corolário IX.19 de [7]. ■

Observação: A Desigualdade de Poincaré também é válida para funções que se anulam em apenas uma parte da fronteira $\partial\Omega$ e também para as funções que tem média nula, isto é, $\frac{1}{med(\Omega)} \int_\Omega u\, dx = 0$. Ver Teorema 5.6.2 de [21].

Lema 2.31 (Lax-Milgram)**.** *Seja H um espaço de Hilbert complexo e $a : H \times H \to \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear, para a qual, existem constantes positivas c_1 e c_2, tais que*

$$|a[u,v]| \leq c_1\|u\|_H\|v\|_H \qquad e \qquad c_2\|u\|_H^2 \leq a[u,u], \quad u,v \in H.$$

Seja $L : H \to \mathbb{R}$, um funcional linear e limitado em H. Então, existe um único $w \in H$ tal que

$$a[w,v] = L(v), \quad \forall \quad v \in H.$$

Demonstração: Ver Corolário V8.16 em [7]. ■

2.3 Semigrupo de operadores

Nesta seção, apresentamos a definição de semigrupo de classe C_0, algumas propriedades, bem como a caracterização dos geradores infinitesimais de um semigrupo. Para isto, considere X um espaço de Banach real ou complexo e por

$$\mathcal{L}(\mathrm{X}) = \{\mathrm{S} : \mathrm{X} \to \mathrm{X} : \mathrm{S} \text{ é linear e contínuo}\}$$

denotaremos o espaço dos operadores lineares contínuos de X em X com a norma usual

$$\|S\|_{\mathcal{L}(\mathrm{X})} = \sup_{x\in X}\left\{\frac{\|Sx\|_X}{\|x\|_X} : x \neq 0\right\}.$$

Definição 2.32. *Seja X um espaço de Banach real. Uma família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares limitados de X em X é chamada de semigrupo se satisfazem as propriedades*

(i) $\quad S(0)w = w, \quad w \in X,$

(ii) $\quad S(t+s)w = S(t)S(s)w = S(s)S(t)w, \quad s,t \geq 0, \quad w \in X.$

Definição 2.33. *Um semigrupo de operadores lineares $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é dito ser de classe C_0, ou de fortemente contínuo, se para todo $x \in X$ a função $t \longmapsto S(t)x$ é contínua no ponto zero.*

Um exemplo de semigrupo de classe C_0 é a função exponencial $S(t) = e^{At}$ que pode ser definida quando A for um operador linear limitado em um espaço de Banach X. No caso em que A seja um operador linear não limitado, com certas propriedades, pode-se também definir e^{At}. Isto é feito pela teoria de semigrupos. Ver [18] e [21].

Definição 2.34. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 de operadores lineares em X. Dizemos $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de contrações se $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ para todo $t \geq 0$.*

Definição 2.35. *Considere o operador $A : D(A) \to X$, dado por*

$$Au = \lim_{t\to 0^+}\frac{S(t)u - u}{t}, \; u \in D(A),$$

onde

$$D(A) = \left\{ u \in X : \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \quad \textit{existe em } X \right\}.$$

Dizemos que A é o gerador infinitesimal do semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ e $D(A)$ é o domínio de A.

Teorema 2.36. *Sejam X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 sobre X. Se $U_0 \in D(A)$, então o problema*

$$\begin{cases} U_t = AU, \quad t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

possui uma única solução U satisfazendo

$$U \in C\big([0,\infty), D(A)\big) \cap C^1\big([0,\infty), X\big).$$

Além disso, esta solução é dada por $U(t) = \mathrm{e}^{tA}U_0$.

Demonstração: Ver Teorema 2.2.2 em [29]. ■

Teorema 2.37. *Seja X um espaço de Banach e A um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $T(t)$ em X, satisfazendo que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$. Se B é um operador linear limitado em X, então $A + B$ é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $S(t)$ em X, satisfazendo*

$$\|S(t)\| \leq Me^{(\omega + M\|B\|)t}.$$

Demonstração: Ver Teorema 1.1, Capítulo 3 de [18].

■

2.3.1 Caracterização dos geradores de semigrupos de classe C_0

Nesta seção, apresentamos os Teoremas de Hille-Yosida e Lummer-Phillips, os quais caracterizam geradores infinitesimais de semigrupos de classe C_0 e dos semigrupos de contrações.

Definição 2.38. *Se A é um operador linear em X, não necessariamente limitado, o conjunto resolvente $\rho(A)$ de A é o conjunto de todos os números complexos λ, tais que, o operador $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ existe e é limitado em X. O operador $R(\lambda, A)$ é chamado de operador resolvente.*

Teorema 2.39 (Hille-Yosida)**.** *Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações se, e somente se,*

(i) A é um operador fechado e $\overline{D(A)} = X$,

(ii) O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém o conjunto $\mathbb{R}^+$ e para todo $\lambda > 0$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração: Ver Teorema 3.1 em [18]. ■

Corolário 2.40. *Se $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações, então temos que*

$$\mathbb{C}_+ = \{\lambda \in \mathbb{C}; Re\lambda > 0\} \subset \rho(\mathcal{A})$$

e

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{Re\lambda},$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}_+$.

Demonstração: Ver Corolário 2.7.1 em [21]. ■

Teorema 2.41. *Um operador A é um gerador infinitesimal de um C_0- semigrupo $T(t)$, satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, se e somente se*

1. *A é fechado e $\mathcal{D}(A)$ é denso em X.*

2. *O conjunto resolvente $\rho(A)$ contem o raio (ω, ∞) e*

$$\|(\lambda I - A))^{-1}\| \leq \frac{M}{\lambda - \omega}, \quad \forall\, \lambda > \omega. \tag{2.1}$$

Demonstração: Ver Teorema 5.3 em [18]. ■

Observação 2.42. A condição que todo λ real, $\lambda > \omega$, está no conjunto resolvente de A junto com a estimativa dada em (2.1) implicam que todo complexo λ satisfazendo que $Re\lambda > \omega$ está no conjunto resolvente de A e

$$\|(\lambda I - A))^{-1}\| \leq \frac{M}{Re\lambda - \omega}, \quad \text{para} \quad Re\lambda > \omega.$$

Ver Observação 5.4 do Teorema 5.3 em [18].

Definição 2.43. *Seja H um espaço de Hilbert. Dizemos que um operador A é dissipativo se*

$$Re(Au, u)_H \leq 0, \forall\, u \in H.$$

Teorema 2.44 (Lummer-Phillips)**.** *Seja A um operador linear com domínio denso em um espaço de Hilbert H*

(i) Se A é dissipativo e existe λ tal que $Im(\lambda I - A) = H$, então A é o gerador

infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações.

(ii) Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações sobre o espaço H, então $Im(\lambda I - A) = H$ para todo $\lambda > 0$ e A é um operador dissipativo.

Demonstração: Ver Teorema 4.3 em [18]. ■

Agora, apresentamos um importante resultado que estabelece quais são as condições para que um operador linear seja o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações. Este resultado será usado na prova da existência e unicidade de soluções de todos os problemas deste trabalho.

Corolário 2.45. *Seja A um operador linear, dissipativo e com domínio denso. Se $0 \in \rho(A)$, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações.*

Demonstração: Ver Teorema 2.12.3 em [21]. ■

Lema 2.46. *Sejam $S : X \to X$ um operador linear limitado com operador inverso também limitado e $B : X \to X$ um operador linear, tal que, $\|B\|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{1}{\|S^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}}$. Então $S + B$ é limitado e invertível.*

Demonstração: Ver Lema 2.12.1 em [21]. ■

Teorema 2.47. *Considere A um operador dissipativo em X. Se para algum $\lambda_0 > 0$ tivermos $Im(\lambda_0 I - A) = X$, então $Im(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração: Teorema 4.5 em [18]. ■

Teorema 2.48. *Seja A um operador dissipativo com $Im(I - A) = X$. Se X é reflexivo então $\overline{D(A)} = X$.*

Demonstração: Ver Teorema 4.6 em [18]. ■

2.3.2 Comportamento assintótico de semigrupos

Nesta seção, apresentaremos os resultados que estabelecem condições necessárias e suficientes para que um semigrupo de classe C_0 seja exponencialmente estável.

Teorema 2.49 (Prüss)**.** *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 de contrações sobre um espaço de Hilbert H. Então $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é exponencialmente estável se, e somente, se*

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}$$

e

$$\overline{\lim_{|\beta|\to\infty}} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty.$$

Demonstração: Ver Teorema 3.5.5 em [21], ou [19]. ■

Teorema 2.50. *Seja $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ um C_0 semigrupo definido sobre um espaço de Hilbert. Então $S(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se,*

$$\rho(A) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > 0\}$$

e

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| < M$$

para todo $Re\lambda > 0$.

Demonstração: Ver Teorema 1.11 em [10]. ■

2.4 Resultados sobre o Problema de Dirichlet

2.4.1 Transformada de Laplace

Definição 2.51. *Uma função $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ é dita ser seccionalmente contínua em um intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ se esse intervalo puder ser particionado em um número finito de pontos, ou ainda, $\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_n = \beta$, de modo que*

1. *f é contínua em cada subintervalo aberto $t_{i-1} < t < t_i$.*

2. *f tende a um limite finito quando t tende, de dentro de um desses subintervalos, a um dos extremos.*

Teorema 2.52. *Suponha que f seja seccionalmente contínua no intervalo $0 \leq t \leq T$ para qualquer T e que existem K, a e M constantes positivas tal que $|f(t)| \leq Ke^{at}$ quando $t \geq M$. Então, a transformada de Laplace $\mathcal{L}(f)(t) = F(s)$, definida por*

$$\mathcal{L}(f)(t) = \int_0^\infty e^{st} f(s)\, ds,$$

existe para $s > a$.

Demonstração: Ver Teorema 6.1.2, Capítulo 6 em [6]. ■

Teorema 2.53. *Suponha que f seja uma função contínua e que f' seja uma função seccionalmente contínua em qualquer intervalo $0 \leq t \leq T$. Suponha, além disso, que existam constantes K, a e M tais que $|f(t)| \leq Ke^{at}$ para $t \geq M$. Então, $\mathcal{L}(f')(t)$ existe para $s > a$ e , além disso,*

$$\mathcal{L}(f')(t) = s\mathcal{L}(f)(t) - f(0).$$

Demonstração: Ver Teorema 6.2.1, Capítulo 6 em [6]. ■

Teorema 2.54. *Suponha que as funções $f, f', ..., f^{(n-1)}$ sejam contínuas e que $f^{(n)}$ seja seccionalmente contínua em qualquer intervalo $0 \leq t \leq A$. Suponha, além disso, que existam constantes K, a e M tais que $|f(t)| \leq Ke^{at}$, $|f'(t)| \leq Ke^{at}, ..., |f^{(n-1)}(t)| \leq Ke^{at}$ para $t \geq M$. Então, $\mathcal{L}(f^{(n)})(t)$ existe para $s > a$ e é dado por*

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(t) = t^n \mathcal{L}(f)(t) - \sum_{i=0}^{n-1} f^{(n-i)}(0)t^i.$$

Demonstração: Ver Corolário 6.2.2, Capítulo 6 em [6]. ∎

Teorema 2.55. *Suponha que f e g possuam transformadas de Laplace, então a função $h = f * g$ tem também transformada de Laplace e é dada por*

$$\mathcal{L}(f * g)(t) = \mathcal{L}(f)(t)\mathcal{L}(g)(t).$$

Demonstração: Ver Teorema 4.1, Capítulo 5 em [22]. ∎

Observação 2.56. Algumas fórmulas de Transformada de Laplace usadas neste trabalho

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(s)$
$\sinh(\alpha x)$	$\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$
$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau$	$F(s)G(s)$

2.4.2 Problema de Dirichlet

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados relacionados ao problema de Dirichlet e que serão utilizados posteriormente no Capítulo 4.

Lema 2.57. *Se $z \in \mathbb{C}$ e $\sinh(z) = 0$, então $z = k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração: Seja $z = A + iB$, então

$$\begin{aligned}\sinh(z) &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\ &= \cos(B)\sinh(A) + i\sin(B)\cosh(A) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Disso obtemos duas equações

$$\cos(B)\sinh(A) = 0, \tag{2.2}$$

$$\sin(B)\cosh(A) = 0. \tag{2.3}$$

De (2.3) temos que $B = k\pi$ e substituindo em (2.2) obtemos $\sinh(A) = 0$, ou seja, $A = 0$. Portanto $z = k\pi i$, $z \in \mathbb{Z}$. ∎

Lema 2.58. *Considere $\alpha^2 = \frac{\rho_1\lambda^2+\bar{a}\lambda}{k}$, onde $\lambda \in \mathbb{C}$, $\rho_1, \bar{a}$ e k são constantes positivas. Se $Re\lambda \geq 0$, então $\alpha^2 \neq \frac{-j^2\pi^2}{L^2}$ para todo $j \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Note que se

$$\alpha^2 = \frac{-j^2\pi^2}{L^2} = \frac{\rho_1\lambda^2 + \bar{a}\lambda}{k},$$

então

$$\lambda = \frac{-\bar{a} \pm \sqrt{\bar{a}^2 - 4\rho_1 k\left(\frac{j^2\pi^2}{L^2}\right)}}{2\rho_1} = \frac{-\bar{a} \pm \sqrt{\Delta_j}}{2\rho_1}$$

onde $\Delta_j = \bar{a}^2 - 4\rho_1 k\left(\frac{j^2\pi^2}{L^2}\right)$.

Como $\Delta_j \longrightarrow -\infty$ quando $j \longrightarrow \infty$,vemos que existe $j_0 \geq \sqrt{\dfrac{\bar{a}^2 L^2}{4\rho_1 k\pi^2}}$ tal que

$$\Delta_j = \bar{a}^2 - 4\rho_1 k\Big(\frac{j^2\pi^2}{L^2}\Big) \leq 0, \quad \text{para todo} \quad j \geq j_0,$$

ou seja, $Re\lambda = -\frac{\bar{a}}{2\rho_1} < 0$ para todo $j \geq j_0$, uma vez que $\bar{a}$ e ρ_1 são constantes positivas. Por outro lado, para $j \in \{1, 2, ..., j_0 - 1\}$, temos que

$$\Delta_j = \bar{a}^2 - 4\rho_1 k\left(\frac{j^2\pi^2}{L^2}\right) > 0,$$

ou seja

$$Re\lambda = \frac{-\bar{a} \pm \sqrt{\Delta_j}}{2\rho_1}.$$

Mas como $0 < \Delta_j < \bar{a}^2$ e sendo $\Delta_j > 0$,então $0 < \sqrt{\Delta_j} < \bar{a}$, para $1 \leq j \leq j_0 - 1$. Obtemos, então duas raízes

$$Re\lambda = \frac{-\bar{a} + \sqrt{\Delta_j}}{2\rho_1} < \frac{-\bar{a} + \bar{a}}{2\rho_1} = 0$$

e

$$Re\lambda = \frac{-\bar{a} - \sqrt{\Delta_j}}{2\rho_1} < \frac{-\bar{a}}{2\rho_1} < 0.$$

Portanto, se $\alpha^2 = -\frac{j^2\pi^2}{L^2}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, então $Re\lambda < 0$ o que é uma absurdo. ∎

Lema 2.59. *Considere o problema de Dirichlet dada por*

$$\begin{cases} u_{xx}(x) - \alpha^2 u(x) = g(x), \\ u(0) = u(L) = 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

com $u, g \in L^2(0, L)$. Se $\alpha^2 \neq \frac{-j^2\pi^2}{L^2}$, $j \in \mathbb{N}$, então a solução do problema de Dirichlet é dada por $u(x) = D_\alpha(g)$, onde

$$D_\alpha(g) = \frac{1}{\alpha}\int_0^x \sinh\big(\alpha(x-s)\big)g(s)\,ds - \frac{1}{\alpha}\frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\alpha L)}\int_0^L \sinh\big(\alpha(L-s)\big)g(s)\,ds.$$

Demonstração: De fato, aplicando a transformada de Laplace na primeira equação de (2.4), temos que

$$s^2U(s) - su(0) - u_x(0) - \alpha^2 U(s) = G(s),$$

onde $U(s) = \mathcal{L}\{u\}$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g\}$. Usando a condição inicial $u(0) = 0$, temos

$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}\right)\big[G(s) + u_x(0)\big] \\ &= \frac{1}{\alpha}F(s)G(s) + \frac{1}{\alpha}F(s)u_x(0), \end{aligned}$$

com $F(s) = \frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$. Utilizando a transformada inversa, temos que

$$u(x) = \frac{1}{\alpha}\int_0^x \sinh(\alpha(x-s))g(s)\,ds + \frac{1}{\alpha}u_x(0)\sinh(\alpha x).$$

Fazendo $x = L$ na ultima expressão e usando $u(L) = 0$ segue que

$$0 = \frac{1}{\alpha}\int_0^L \sinh(\alpha(L-s))g(s)\,ds + \frac{1}{\alpha}u_x(0)\sinh(\alpha x).$$

Como $\alpha^2 \neq -\frac{j^2\pi^2}{L^2}$ então pelo Lema 2.57 temos que $\sinh(\alpha L) \neq 0$. Assim,

$$u(x) = \frac{1}{\alpha}\int_0^x \sinh\big(\alpha(x-s)\big)g(s)\,ds - \frac{1}{\alpha}\frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\alpha L)}\int_0^L \sinh\big(\alpha(L-s)\big)g(s)\,ds.$$

■

Lema 2.60. *Sejam $\alpha^2 = (A+iB)^2 = \frac{\rho_1\lambda^2+\bar{a}\lambda}{k}$ e $\lambda = r + i\eta$ com $0 \leq r \leq d_1$, para algum $d_1 > 0$ fixado. Então existem constantes positivas C_1 e $C_2 = C_2(\eta)$ tais que*

$$|A| \leq C_1, \quad |B| \leq C_2(\eta), \quad \left|\frac{1}{\alpha}\right| \leq \sqrt{\frac{k}{\rho_1}}\left|\frac{1}{\lambda}\right|.$$

Além disso, $\forall\, x \in [0, L]$ *tem-se que existe uma constante positiva* C_3 *tal que*

$$|\sinh(\alpha x)| \leq C_3.$$

Demonstração: Sabemos que

$$\alpha^2 = \frac{\rho_1 \lambda^2 + \bar{a}\lambda}{k} = (A + iB)^2,$$

sendo assim, fazendo $\lambda = r + i\eta$ temos

$$A^2 - B^2 + 2ABi = \frac{(\rho_1 r^2 - \rho_1 \eta^2 + \bar{a}r) + i(2\rho_1 r\eta + \eta\bar{a})}{k},$$

o que nos dá o seguinte sistema

$$\begin{cases} A^2 - B^2 = \dfrac{\rho_1 r^2 - \rho_1 \eta^2 + \bar{a}r}{k} \\ \quad 2AB = \dfrac{2\rho_1 r\eta + \eta\bar{a}}{k}. \end{cases} \tag{2.5}$$

De (2.5), temos que

$$A^4 - \frac{(\rho_1 r^2 - \rho_1 \eta^2 + \bar{a}r)}{k} A^2 - \left(\frac{2\rho_1 r\eta + \bar{a}\eta}{2k}\right)^2 = 0, \tag{2.6}$$

logo

$$A_1^2 = \frac{(\rho_1 r^2 - \rho_1 \eta^2 + \bar{a}r)}{2k} + \frac{1}{2k}\sqrt{R},$$

$$A_2^2 = \frac{(\rho_1 r^2 - \rho_1 \eta^2 + \bar{a}r)}{2k} - \frac{1}{2k}\sqrt{R},$$

onde

$$R = (\rho_1 r^2 - \rho_1 \eta^2 + \bar{a}r)^2 + (2\rho_1 r\eta + \bar{a}\eta)^2.$$

Note que $R \geq 0$ e além disso, a raiz A_2 não ocorre. De fato, se $\rho_1 r^2 - \rho_1 \eta^2 + \bar{a}r < 0$, então

$$A_2^2 = \frac{(\rho_1 r^2 - \rho_1 \eta^2 + \bar{a}r)}{2k} - \frac{1}{2k}\sqrt{(\rho_1 r^2 - \rho_1 \eta^2 + \bar{a}r)^2 + (2\rho_1 r\eta + \bar{a}\eta)^2} \leq 0,$$

o que é um absurdo. Por outro lado, se $\rho_1 r^2 - \rho_1 \eta^2 + \bar{a}r \geq 0$, então

$$\frac{(\rho_1 r^2 - \rho_1 \eta^2 + \bar{a}r)}{2k} \leq \frac{1}{2k}\sqrt{(\rho_1 r^2 - \rho_1 \eta^2 + \bar{a}r)^2 + (2\rho_1 r\eta + \bar{a}\eta)^2},$$

logo

$$A_2^2 = \frac{(\rho_1 r^2 - \rho_1 \eta^2 + \bar{a}r)}{2k} - \frac{1}{2k}\sqrt{(\rho_1 r^2 - \rho_1 \eta^2 + \bar{a}r)^2 + 2\rho_1 r\eta + \bar{a}\eta)^2} \leq 0,$$

novamente, um absurdo. Portanto, a equação (2.6) admite somente a raiz

$$A^2 = \frac{(\rho_1 r^2 - \rho_1 \eta^2 + \bar{a}r)}{2k} + \frac{1}{2k}\sqrt{R}.$$

Agora, iremos estimar o valor de R. Por um lado, podemos majorar R da seguinte forma

$$\begin{aligned}
R &= (\rho_1 r^2 - \rho_1 \eta^2 + \bar{a}r)^2 + (4\rho_1^2 r^2 \eta^2 + \eta^2 \bar{a}^2 + 4\rho_1 r \bar{a} \eta^2) \\
&= \rho_1^2 \eta^4 + 2\rho_1 \eta^2 \left(\rho_1 r^2 + r\bar{a} + \frac{\bar{a}^2}{2\rho_1}\right) + \rho_1^2 r^4 + \bar{a}^2 r^2 + 2\bar{a} r^3 \rho_1 \\
&= \left(\rho_1 \eta^2 + \rho_1 r^2 + r\bar{a} + \frac{\bar{a}^2}{2\rho_1}\right)^2 + \rho_1^2 r^4 + \bar{a}^2 r^2 + 2\bar{a} r^3 \rho_1 - \left(\rho_1 r^2 + r\bar{a} + \frac{\bar{a}^2}{2\rho_1}\right)^2 \\
&\leq \left(\rho_1 \eta^2 + \rho_1 r^2 + r\bar{a} + \frac{\bar{a}^2}{2\rho_1}\right)^2 - \bar{a}^2 \left(\frac{\bar{a}^2}{2\rho_1} + r\right)^2 \\
&\leq \left(\rho_1 \eta^2 + \rho_1 r^2 + r\bar{a} + \frac{\bar{a}^2}{2\rho_1}\right)^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$R \leq \left(\rho_1 \eta^2 + \rho_1 r^2 + r\bar{a} + \frac{\bar{a}^2}{2\rho_1}\right)^2. \tag{2.7}$$

Por outro lado, podemos minorar o radicando R

$$\begin{aligned}
R &= (\rho_1 r^2 - \rho_1 \eta^2 + \bar{a}r)^2 + (4\rho_1^2 r^2 \eta^2 + \eta^2 \bar{a}^2 + 4\rho_1 r \bar{a} \eta^2) \\
&= \rho_1^2 \eta^4 + 2\rho_1 \eta^2 \left(\rho_1 r^2 + r\bar{a} + \frac{\bar{a}^2}{2\rho_1}\right) + \rho_1^2 r^4 + \bar{a}^2 r^2 + 2\bar{a} r^3 \rho_1 \\
&\geq \rho_1^2 \eta^4 + 2\rho_1 \eta^2 \left(\rho_1 r^2 + r\bar{a}\right) + \rho_1^2 r^4 + \bar{a}^2 r^2 + 2\bar{a} r^3 \rho_1 \\
&= \rho_1^2 \eta^4 + 2\rho_1 \eta^2 \left(\rho_1 r^2 + r\bar{a}\right) + \left(\rho_1 r^2 + r\bar{a}\right)^2 \\
&= \left(\rho_1 \eta^2 + \rho_1 r^2 + r\bar{a}\right)^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$R \geq \left(\rho_1 \eta^2 + \rho_1 r^2 + \bar{a}r\right)^2. \tag{2.8}$$

Logo de (2.7) e (2.8) temos

$$\left(\rho_1 \eta^2 + \rho_1 r^2 + \bar{a}r\right)^2 \leq R \leq \left(\rho_1 \eta^2 + \rho_1 r^2 + r\bar{a} + \frac{\bar{a}^2}{2\rho_1}\right)^2. \tag{2.9}$$

Da hipótese de que $r = Re\lambda \geq 0$ segue que

$$\rho_1\eta^2 + \rho_1 r + \bar{a}r > 0.$$

Disto e de (2.9) segue que

$$\rho_1\eta^2 + \rho_1 r^2 + \bar{a}r \leq \sqrt{R} \leq \rho_1\eta^2 + \rho_1 r^2 + r\bar{a} + \frac{\bar{a}^2}{2\rho_1}. \tag{2.10}$$

Sendo assim, de (2.10) e usando que $0 \leq r \leq d_1$ podemos estabelecer as seguintes condições

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{(\rho_1 r^2 - \rho_1\eta^2 + \bar{a}r)}{2k} + \frac{1}{2k}\sqrt{R} \\ &\leq \frac{1}{2k}\left(2\rho_1 r^2 + 2\bar{a}r + \frac{\bar{a}^2}{2\rho_1}\right) \\ &\leq \frac{1}{k}\left(\sqrt{\rho_1}d_1 + \frac{\bar{a}}{2\sqrt{\rho_1}}\right)^2 \end{aligned} \tag{2.11}$$

e ainda

$$\begin{aligned} A^2 &\geq \frac{1}{2k}\left(\rho_1 r^2 - \rho_1\eta^2 + \bar{a}r + \rho_1\eta^2 + \rho_1 r^2 + \bar{a}r\right) \\ &\geq \frac{\rho_1 r^2}{k} + \frac{\bar{a}r}{k}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

ou seja,

$$0 \leq \frac{\rho_1 r^2}{k} + \frac{\bar{a}r}{k} \leq A^2 \leq \frac{1}{k}\left(\sqrt{\rho_1}d_1 + \frac{\bar{a}}{2\sqrt{\rho_1}}\right)^2. \tag{2.13}$$

Assim, da primeira equação de (2.5) e de (2.13) concluímos que

$$0 < \frac{\rho_1\eta^2}{k} \leq B^2 \leq \frac{\rho_1\eta^2}{k} + \frac{\bar{a}^2}{4\rho_1}. \tag{2.14}$$

Logo,

$$|A| \leq C_1 \quad \text{e} \quad |B| \leq C_2(\eta),$$

com

$$C_1 = \frac{1}{k}\left(\sqrt{\rho_1}d_1 + \frac{\bar{a}}{2\sqrt{\rho_1}}\right) \quad \text{e} \quad C_2(\eta) = \sqrt{\frac{\rho_1\eta^2}{k} + \frac{\bar{a}^2}{4\rho_1}}.$$

Além disso, usando a hipótese que $r \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} |\alpha|^2 = A^2 + B^2 &\geq \frac{\rho_1 r^2}{k} + \frac{\bar{a}r}{k} + \frac{\rho_1\eta^2}{k} \\ &\geq \frac{\rho_1}{k}|\lambda|^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left|\frac{1}{\alpha}\right| \leq \sqrt{\frac{k}{\rho_1}}\left|\frac{1}{\lambda}\right|.$$

Empregando a identidade trigonométrica $\cosh^2(y) - \sinh^2(y) = 1$, temos

$$\begin{aligned}
|\sinh(\alpha x)|^2 &= cos^2(Bx)\sinh^2(Ax) + sen^2(Bx)\cosh^2(Ax)\\
&= \sinh^2(Ax) + sen^2(Bx)\\
&\leq C_3^2,
\end{aligned}$$

onde

$$C_3 = \sqrt{\sinh^2\left(\frac{1}{k}\left[\sqrt{\rho_1}d_1 + \frac{\bar{a}}{2\sqrt{\rho_1}}\right]L\right) + 1}$$

o que completa a prova do Lema. ■

Lema 2.61. *Utilizando as mesmas hipóteses do Lema 2.60 , então existe uma constante positiva $C_{\mathcal{D}}$ tal que*

$$|\mathcal{D}_\alpha(g)| \leq \frac{C_{\mathcal{D}}}{|\lambda|}\|g\|_{L^1}.$$

Demonstração: Pelo Lema 2.60 sabemos que $\left|\frac{1}{\alpha}\right| \leq \sqrt{\frac{k}{\rho_1}}\left|\frac{1}{\lambda}\right|$ e $|\sinh(\alpha x)| \leq C_3$, para $x \in [0, L]$. Logo,

$$|D_\alpha(g)| = \left|\frac{1}{\alpha}\int_0^x \sinh\big(\alpha(x-s)\big)g(s)ds - \frac{1}{\alpha}\frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\alpha L)}\int_0^L \sinh\big(\alpha(L-s)\big)g(s)\,ds\right|$$

$$\leq \left|\frac{1}{\alpha}\right|\int_0^x \left|\sinh\big(\alpha(x-s)\big)\right|\left|g(s)\right|ds + \left|\frac{1}{\alpha}\right|\left|\frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\alpha L)}\right|\int_0^L \left|\sinh\big(\alpha(L-s)\big)\right|\left|g(s)\right|ds$$

$$\leq \sqrt{\frac{k}{\rho_1}}\frac{1}{|\lambda|}\left(\int_0^x \left|\sinh\big(\alpha(x-s)\big)\right|\left|g(s)\right|ds + \int_0^L \left|\sinh\big(\alpha(L-s)\big)\right|\left|g(s)\right|ds\right).$$

Na primeira integral temos que $s \in [0, x]$, ou seja, $x - s \in [0, L]$. Na segunda integral temos que $s \in [0, L]$, ou seja, $L - s \in [0, L]$. Logo, pelo Lema 2.60, $\left|\sinh\big(\alpha(x-s)\big)\right|$ e $\left|\sinh\big(\alpha(L-s)\big)\right|$ são limitados por C_3, ou seja,

$$|D_\alpha(g)| \leq \frac{C_{\mathcal{D}}}{|\lambda|}\int_0^L \left|g(s)\right|ds = \frac{C_{\mathcal{D}}}{|\lambda|}\|g\|_{L^1}$$

onde $C_{\mathcal{D}} = 2\sqrt{\frac{k}{\rho_1}}C_3$. ■

3 SISTEMA DE TIMOSHENKO COM DISSIPAÇÃO FRICCIONAL CONSTANTE

Neste capítulo estudaremos a existência, unicidade e comportamento assintótico de solução para o problema de Timoshenko com um termo dissipativo constante atuando na primeira equação, ou seja, uma dissipação constante na oscilação transversal.

Considere o seguinte sistema

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \bar{a}\varphi_t = 0 \quad \text{em} \quad (0,\infty)\times(0,L), \tag{3.1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0 \quad \text{em} \quad (0,\infty)\times(0,L), \tag{3.2}$$

com condições de fronteira dadas por

$$\varphi(\cdot,0) = \varphi(\cdot,L) = \psi_x(\cdot,0) = \psi_x(\cdot,L) = 0, \tag{3.3}$$

e sujeito às condições iniciais

$$\varphi(0,\cdot) = \varphi_0(\cdot), \quad \varphi_t(0,\cdot) = \varphi_1(\cdot), \quad \psi(0,\cdot) = \psi_0(\cdot), \quad \psi_t(0,\cdot) = \psi_1(\cdot), \tag{3.4}$$

onde $\bar{a}, \rho_1, \rho_2, k, b$ são constantes reais e positivas e φ e ψ representam, respectivamente, a oscilação transversal e o ângulo de rotação da seção transversal.

3.1 FORMULAÇÃO SEMIGRUPO

Considere o seguinte espaço de fase

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,L)\times L^2(0,L)\times H_*^1(0,L)\times L_*^2(0,L),$$

onde $L_*^2(0,L) = \left\{u \in L^2(0,L);\ \int_0^L u(x)\,dx = 0\right\}$ e $H_*^1(0,L) = H^1(0,L)\cap L_*^2(0,L)$ são espaços de Hilbert pelo Lema 2.15 .

Lema 3.1. *O espaço $\mathcal{H} = H_0^1(0,L)\times L^2(0,L)\times H_*^1(0,L)\times L^2(0,L)$, com a norma*

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2 + k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2, \tag{3.5}$$

onde $\|\cdot\|_{L^2}$ denota a norma usual de $L^2(0,L)$ e $U = (\varphi,\Phi,\psi,\Psi)$, é um espaço de Hilbert.

Demonstração: Ver [17], Capítulo 2, Lema 2.2. ∎

A norma dada em (3.5) é proveniente do produto interno dado por

$$
\begin{aligned}
(U^1, U^2)_{\mathcal{H}} = & \rho_1 \int_0^L \Phi^1 \overline{\Phi^2}\, dx + b \int_0^L \psi_x^1 \overline{\psi_x^2}\, dx + k \int_0^L (\varphi_x^1 + \psi^1) \overline{(\varphi_x^2 + \psi^2)}\, dx \\
& + \rho_2 \int_0^L \Psi^1 \overline{\Psi^2}\, dx,
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

com $U^1 = (\varphi^1, \Phi^1, \psi^1, \Psi^1)$, $U^2 = (\varphi^2, \Phi^2, \psi^2, \Psi^2)$ em $\mathcal{H}$.

Primeiramente, escreveremos o sistema (3.1)-(3.4) na forma de um problema de Cauchy abstrato. Seja $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi)$, com $\Phi = \varphi_t$ e $\Psi = \psi_t$. Assim, o problema (3.1)-(3.4) pode ser escrito como

$$
\begin{cases}
U_t = \bar{\mathcal{A}} U & t > 0, \\
U(0) = U_0,
\end{cases}
\tag{3.7}
$$

onde $\bar{\mathcal{A}} : D(\bar{\mathcal{A}}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é um operador linear definido por

$$
\bar{\mathcal{A}} U = \begin{pmatrix} \Phi \\ \\ \frac{1}{\rho_1}\Big(k(\varphi_x + \psi)_x - \bar{a}\Phi\Big) \\ \\ \Psi \\ \\ \frac{1}{\rho_2}\Big(b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi)\Big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1}\partial_x^2 & -\frac{\bar{a}}{\rho_1} I & k\frac{\partial_x}{\rho_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{k}{\rho_2}\partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{k}{\rho_2} I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \Phi \\ \psi \\ \Psi \end{pmatrix}, \tag{3.8}
$$

com $U(0) = \Big(\varphi_0, \quad \varphi_1, \quad \psi_0, \quad \psi_1\Big)$ e o domínio do operador $\bar{\mathcal{A}}$ é dado por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}) = \{ & (\varphi, \Phi, \psi, \Psi) \in \mathcal{H} : \varphi \in H^2(0, L), \Phi \in H_0^1(0, L), \psi \in H^2(0, L), \\
& \psi_x \in H_0^1(0, L), \Psi \in H_*^1(0, L) \}.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

3.2 Existência e Unicidade

Nesta seção, mostraremos que o sistema (3.1)-(3.4) possui solução usando a teoria de semigrupos. Nosso próximo objetivo é mostrar que o operador$\bar{\mathcal{A}}$ é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações. Para tanto, apresentaremos um lema que será muito útil na sequência.

Lema 3.2. *Dadas* $m_1 \in L^2(0,L)$ *e* $m_2 \in L^2_*(0,L)$*, o sistema*

$$k(\varphi_x + \psi)_x = m_1, \tag{3.10}$$

$$b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) = m_2, \tag{3.11}$$

possui uma única solução $(\varphi,\psi) \in [H^2(0,L) \cap H^1_0(0,L)] \times [H^2(0,L) \cap H^1_*(0,L)]$*, com* $\psi_x \in H^1_*(0,L)$.

Demonstração: Uma versão mais geral desse resultado é dado no Lema 3.4 em [16], apresentaremos uma demonstração para o caso específico do sistema (3.10)-(3.11). Como $m_1 \in L^2(0,L)$, existe uma função $u \in H^1(0,L)$ tal que

$$ku_x = m_1. \tag{3.12}$$

Defina

$$\psi(x) = \frac{1}{b}\int_0^x \int_0^z (m_2(s) + ku(s))\, ds\, dz - \frac{1}{Lb}\int_0^L \int_0^r \int_0^z (m_2(s) + ku(s))\, ds\, dz\, dr.$$

Note que $\psi \in H^2(0,L) \cap H^1_*(0,L)$, com $\psi_x \in H^1_0(0,L)$. Além disso, existe uma função $\varphi \in H^1_0(0,L)$ tal que

$$\varphi_x = u - \psi, \tag{3.13}$$

ou seja, $\varphi \in H^2(0,L)$.

Usando (3.12) e (3.13) em (3.10)-(3.11), temos

$$\begin{aligned} k(\varphi_x + \psi)_x = {}& ku_x && = m_1, \\ b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) = {}& b\psi_{xx} - ku && = m_2. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Consequentemente, concluímos que o sistema dado em (3.10)-(3.11) possui uma solução $(\varphi,\psi) \in [H^2(0,L) \cap H^1_0(0,L)] \times [H^2(0,L) \cap H^1_*(0,L)]$.

Considere o espaço $W = H^1_0(0,L) \times H^1_*(0,L)$, munido das normas

$$\|(\varphi,\psi)\|^2_W = \|\varphi\|_{H^1} + \|\psi\|_{H^1},\ |(\varphi,\psi)|^2_W = |\varphi|_{H^1} + |\psi|_{H^1}.$$

Como $(H^1_0(0,L), \|\cdot\|_{H^1})$ e $(H^1_*(0,L), \|\cdot\|_{H^1})$ são completos, então $(W, \|\cdot\|_W)$ e $(W, |\cdot|_W)$ também o são. Logo, $(W, \|\cdot\|_W)$ é um espaço de Hilbert. Além disso, para todo $(\varphi,\psi) \in W$, tem-se

$$\|(\varphi,\psi)\|^2_W = (\|\varphi\|^1_H + \|\psi\|_{H^1})^2 \geq |\varphi|^2_{H^1} + |\psi|^2_{H^1} = |(\varphi,\psi)|^2_W.$$

Portanto, pela Proposição 2.26, as normas $|\cdot|_W$ e $\|\cdot\|_W$ são equivalentes.

Defina $a[\cdot,\cdot]: W \times W \to \mathbb{C}$, colocando

$$a[(\varphi,\psi),(\varphi^*,\psi^*)] = k\int_0^L (\varphi_x+\psi)\overline{(\varphi_x^*+\psi^*)}\,dx + b\int_0^L \psi_x\psi_x^*\,dx.$$

Segue da definição que $a[\cdot,\cdot]$ é sesquilinear. Note que a é contínua e coerciva. De fato, usando as desigualdades de Holder e Poincaré, temos

$$\begin{aligned}
\Big|a\big[(\varphi,\psi),(\varphi^*,\psi^*)\big]\Big| &\le k\int_0^L |(\varphi_x+\psi)||(\varphi_x^*+\psi^*)|\,dx + b\int_0^L |\psi_x|\,|\psi^*|_x\,dx\\
&\le k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}\|\varphi_x^*+\psi^*\|_{L^2} + b\|\psi_x\|_{L^2}\|\psi_x^*\|_{L^2}\\
&\le \|\varphi_x\|_{L^2}\|\varphi_x^*\|_{L^2} + c_p\|\varphi_x\|_{L^2}\|\psi_x^*\|_{L^2} + c_p\|\psi_x\|_{L^2}\|\varphi_x^*\|_{L^2}\\
&+ c_p^2\|\psi_x\|_{L^2}\|\psi_x^*\|_{L^2} + b\|\psi_x\|_{L^2}\|\psi_x^2\|_{L^2}\\
&\le c\Big(\|(\varphi,\psi)\|_W\|(\varphi^*,\psi^*)\|_W\Big),
\end{aligned}$$

com $c=\max\{k,c_p,c_p^2+b\}$, ou seja, a é contínua. Além disso,

$$\begin{aligned}
\|(\varphi,\psi)\|_W^2 &= (\|\varphi_x\|_{L^2}+\|\psi_x\|_{L^2})^2 \le (\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}+(c_p+1)\|\psi_x\|_{L^2})^2\\
&\le 2\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 + 2(c_p+1)^2\|\psi_x\|_{L^2}^2\\
&\le c\big(\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2+\|\psi_x\|_{L^2}^2\big),
\end{aligned}\tag{3.15}$$

onde $c=\max\left\{\frac{2}{k},\frac{2(c_p+1)^2}{b}\right\}$, ou seja, a é coerciva.

Agora, defina $\ell: W\to\mathbb{C}$, tal que

$$\ell(\varphi^*,\psi^*) = -\int_0^L m_1\overline{\varphi^*}\,dx - \int_0^L m_2\overline{\psi^*}\,dx.$$

A função ℓ é linear e limitada, de fato,

$$\begin{aligned}
\|\ell(\varphi^*,\psi^*)\|_W &\le \|m_1\|_{L^2}\|\varphi^*\|_{L^2}+\|m_2\|_{L^2}\|\psi^*\|_{L^2}\\
&\le c^*\big(\|\varphi_x^*\|_{L^2}+\|\psi_x^*\|_{L^2}\big),
\end{aligned}\tag{3.16}$$

onde $c^*=c_p\max\{\|m_1\|_{L^2},\|m_2\|_{L^2}\}$.

Aplicando o Lema de Lax-Milgram, temos que existe um único $(\hat{\varphi},\hat{\psi})\in W$, tal que

$$a\big[(\hat{\varphi},\hat{\psi}),(\varphi^*,\psi^*)\big] = \ell(\varphi^*,\psi^*),\quad \forall\,(\varphi^*,\psi^*)\in W.$$

Multiplicando (3.10) por φ^* e (3.11) por ψ^*, respectivamente, concluímos

$$a\big[(\varphi,\psi),(\varphi^*,\psi^*)\big] = \ell(\varphi^*,\psi^*),\quad \forall\,(\varphi^*,\psi^*)\in W.$$

Logo, $(\varphi, \psi) = (\hat{\varphi}, \hat{\psi})$, o que mostra que o sistema (3.10)-(3.11) possui uma única solução. ∎

Teorema 3.3. *O operador linear $\bar{\mathcal{A}}$ dado em (3.8) é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.*

Demonstração: Pelo Corolário 2.45, basta mostrarmos que $\bar{\mathcal{A}}$ é um operador linear dissipativo, $0 \in \rho(\bar{\mathcal{A}})$ e $\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}})$ é denso em $\mathcal{H}$.

(i) $\bar{\mathcal{A}}$ é dissipativo em $\mathcal{H}$.
Note que para todo $U \in \mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}})$ temos

$$\begin{aligned}\big(\bar{\mathcal{A}}U, U\big)_{\mathcal{H}} = & \int_0^L \big(k(\varphi_x + \psi)_x - \bar{a}\Phi\big)\overline{\Phi}\, dx + b\int_0^L \Psi_x \overline{\psi}_x\, dx + k\int_0^L \big(\Phi_x + \Psi\big)\overline{\big(\varphi_x + \psi\big)}\, dx \\ & + \int_0^L \big(b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi)\big)\overline{\Psi}\, dx.\end{aligned}$$

Integrando por partes e usando as condições de contorno (3.3) , temos que

$$\begin{aligned}\big(\bar{\mathcal{A}}U, U\big)_{\mathcal{H}} = & -k\int_0^L \big(\varphi_x + \psi\big)\overline{\Phi}_x\, dx - \bar{a}\int_0^L \Phi\overline{\Phi}\, dx + b\int_0^L \Psi_x\overline{\psi}_x\, dx \\ & + k\int_0^L \Phi_x\overline{\big(\varphi_x + \psi\big)}\, dx + k\int_0^L \Psi\overline{\big(\varphi_x + \psi\big)}\, dx - b\int_0^L \psi_x\overline{\Psi}_x\, dx \\ & - k\int_0^L \big(\varphi_x + \psi\big)\overline{\Psi}\, dx.\end{aligned}$$

Tomando a parte real em ambos os lados e usando fato que para todo $z \in \mathbb{C}$ vale que $Re\{z - \bar{z}\} = 0$, temos

$$Re\big(\bar{\mathcal{A}}U, U\big)_{\mathcal{H}} = -\bar{a}\int_0^L |\Phi|^2\, dx = -\bar{a}\|\Phi\|_{L^2}^2 \leq 0.$$

Portanto, o operador $\bar{\mathcal{A}}$ é dissipativo em $\mathcal{H}$.

(ii) $0 \in \rho(\bar{\mathcal{A}})$, ou seja, $\bar{\mathcal{A}}^{-1}$ existe e é limitado.
Seja $\mathcal{F} \in \mathcal{H}$, com $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, mostraremos que existe uma única solução $U \in \mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}})$ tal que $\bar{\mathcal{A}}U = \mathcal{F}$. Escrevendo esta equação em termos de suas componentes, temos

$$\begin{aligned}\Phi &= f_1 && (3.17)\\ \frac{1}{\rho_1}\big(k(\varphi_x + \psi)_x - \bar{a}\Phi\big) &= f_2 && (3.18)\\ \Psi &= f_3 && (3.19)\\ \frac{1}{\rho_2}\big(b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi)\big) &= f_4. && (3.20)\end{aligned}$$

Note que podemos reescrever o sistema (3.17)-(3.20) da seguinte forma

$$\begin{aligned} k(\varphi_x + \psi)_x &= g_1, & (3.21)\\ b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) &= g_2, & (3.22)\end{aligned}$$

onde $\quad g_1 = \rho_1 f_2 + \bar{a} f_1 \quad$ e $\quad g_2 = \rho_2 f_4$.

Usando o Lema 3.2, temos que o sistema (3.21)-(3.22) possui uma única solução $(\varphi, \psi) \in [H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)] \times [H^2(0,L) \cap H_*^1(0,L)]$, com $\psi_x \in H_0^1(0,L)$. Como $\Phi = f_1$ e $\Psi = f_3$, então, existe uma única $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi) \in \mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}})$ tal que $\bar{\mathcal{A}} U = \mathcal{F}$. Portanto existe $\bar{\mathcal{A}}^{-1}$.

Provaremos que $\bar{\mathcal{A}}^{-1}$ é limitado, ou seja, para todo $\mathcal{F} \in \mathcal{H}$ temos que existe $c > 0$ tal que

$$\|\bar{\mathcal{A}}^{-1}\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}} \leq c\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}.$$

Mas, como $\bar{\mathcal{A}}^{-1}$ está bem definido, temos que existe $U \in \mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}})$ tal que $\bar{\mathcal{A}}^{-1}\mathcal{F} = U$, ou seja, devemos mostrar que

$$\|\bar{\mathcal{A}}^{-1}\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}} = \|U\|_{\mathcal{H}} \leq c\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}.$$

Lembrando que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + k\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2,$$

faremos estimativas de cada parcela de $\|U\|_{\mathcal{H}}^2$. De (3.17) e (3.19) temos que $\Phi = f_1$ e $\Psi = f_3$. Multiplicando (3.21) por $\overline{\varphi}$ e (3.22) por $\overline{\psi}$, somando as equações, integrando por partes e usando as condições de contorno (3.3), obtemos

$$k\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2\,dx + b\int_0^L |\psi_x|^2\,dx = -\int_0^L g_1\overline{\varphi}\,dx - \int_0^L g_2\overline{\psi}\,dx. \tag{3.23}$$

Note que, usando a Desigualdade de Poincaré, temos

$$\begin{aligned} \|g_1\|_{L^2}^2 &= \|\rho_1 f_2 + \bar{a} f_1\|_{L^2}^2 \leq \big(\rho_1\|f_2\|_{L^2} + \bar{a}\|f_1\|_{L^2}\big)^2 \\ &\leq \big(\rho_1\|f_2\|_{L^2} + \bar{a}c_p\|f_{1x}\|_{L^2}\big)^2 \\ &\leq \big(\rho_1\|f_2\|_{L^2} + \bar{a}c_p\|f_{1x} + f_3\|_{L^2} + \bar{a}c_p\|f_3\|_{L^2}\big)^2 \\ &\leq \big(\rho_1\|f_2\|_{L^2} + \bar{a}c_p\|f_{1x} + f_3\|_{L^2} + \bar{a}c_p^2\|f_{3x}\|_{L^2}\big)^2 \\ &\leq 3\rho_1^2\|f_2\|_{L^2}^2 + \frac{3kc_p^2\bar{a}^2}{k}\|f_{1x} + f_3\|_{L^2}^2 + \frac{3bc_p^4\bar{a}^2}{b}\|f_{3x}\|_{L^2}^2 \\ &\leq c_1\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned} \tag{3.24}$$

onde $c_1 = \max\left\{3\rho_1, \dfrac{3c_p^2\bar{a}^2}{k}, \dfrac{3c_p^4\bar{a}^2}{b}\right\}$. Além disso,

$$\|g_2\|_{L^2}^2 = \|\rho_2 f_4\|_{L^2}^2 = \rho_2^2\|f_4\|_{L^2}^2 \leq \rho_2\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{3.25}$$

Empregando as desigualdades de Cauchy-Schwarz , Young e Poincaré em (3.23), obtemos

$$\begin{aligned}
\zeta = k\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2\,dx + b\int_0^L |\psi_x|^2\,dx &\leq \|g_1\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} + \|g_2\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2} \\
&\leq c_\epsilon\|g_1\|_{L^2}^2 + \epsilon c_p^2\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + c_\epsilon\|g_2\|_{L^2}^2 + \epsilon c_p^2\|\psi_x\|_{L^2}^2 \\
&\leq c_\epsilon\|g_1\|_{L^2}^2 + 2\epsilon c_p^2\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 + 2\epsilon c_p^2\|\psi\|_{L^2}^2 \\
&+ c_\epsilon\|g_2\|_{L^2}^2 + c_p^2\epsilon\|\psi_x\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Logo, temos

$$\zeta \leq c_\epsilon\|g_1\|_{L^2}^2 + 2\epsilon c_p^2\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 + 2\epsilon c_p^4\|\psi_x\|_{L^2}^2 + c_\epsilon\|g_2\|_{L^2}^2 + c_p^2\epsilon\|\psi_x\|_{L^2}^2. \tag{3.26}$$

Utilizando as estimativas (3.24) e (3.25) em (3.26), temos

$$\begin{aligned}
k\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2\,dx + b\int_0^L |\psi_x|^2\,dx &\leq c_1c_\epsilon\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{2k\epsilon c_p^2}{k}\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 + \rho_2c_\epsilon\|\mathcal{F}\|_{L^2}^2 \\
&+ \epsilon\frac{b(2c_p^4 + c_p^2)}{b}\|\psi_x\|_{L^2}^2 \\
&\leq \tilde{c}_\epsilon\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \tilde{c}\epsilon\big(k\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2\big) \\
&\leq \tilde{c}_\epsilon\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \epsilon_1\|U\|_{\mathcal{H}}^2,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

com $\tilde{c}_\epsilon = \max\{c_1c_\epsilon, \rho_2c_\epsilon\}$, $\tilde{c} = \max\{\frac{2c_p^2}{k}, \frac{(2c_p^4+c_p^2)}{b}\}$ e $\epsilon_1 = \tilde{c}\epsilon$. Logo, usando (3.17), (3.19) e (3.27) temos

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + k\|\varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2 \\
&\leq \rho_1\|f_1\|_{L^2}^2 + \rho_2\|f_3_L^2|^2 + \tilde{c}_\epsilon\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \epsilon_1\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq \rho_1\|f_1\|_{L^2}^2 + \frac{b\rho_2c_p^2}{b}\|f_{3x}\|_{L^2}^2 + \tilde{c}_\epsilon\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \epsilon_1\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq k\frac{\rho_1 2c_p^2}{k}\|f_{1x} + f_3\|_{L^2}^2 + b\frac{(\rho_2c_p^2 + 2c_p^4)}{b}\|f_{3x}\|_{L^2}^2 + \tilde{c}_\epsilon\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \epsilon_1\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq \frac{\rho_1 2c_p^2}{k}\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{(\rho_2c_p^2 + 2c_p^4)}{b}\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \tilde{c}_\epsilon\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \epsilon_1\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq c_2\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \epsilon_1\|U\|_{\mathcal{H}}^2,
\end{aligned} \tag{3.28}$$

com $c_2 = \max\{\frac{\rho_1 2c_p^2}{k}, \frac{(\rho_2c_p^2+2c_p^4)}{b}, \tilde{c}_\epsilon\}$. Tomando $\epsilon_1 = \frac{1}{2}$, temos

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq \sqrt{2c_2}\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}},$$

o que mostra a limitação do operador $\bar{\mathcal{A}}^{-1}$.
(iii) $\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}})$ é denso em $\mathcal{H}$.
Como $0 \in \rho(\bar{\mathcal{A}})$, temos que $\bar{\mathcal{A}}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Note que

$$\lambda_0 I - \bar{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{A}}(\lambda_0 \bar{\mathcal{A}}^{-1} - I). \tag{3.29}$$

Então, pelo Lema 2.46, para $B = \lambda_0 \bar{\mathcal{A}}^{-1}$ e $S = I$, com $|\lambda_0| < \frac{1}{\|\bar{\mathcal{A}}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}}$, temos que o operador $\lambda_0 \bar{\mathcal{A}}^{-1} - I$ é invertível. Como composição de operadores invertíveis é invertível, de (3.29) temos $Im(\lambda_0 I - \bar{\mathcal{A}}) = \mathcal{H}$. Logo, pelo Teorema 2.47, $Im(\lambda I - \bar{\mathcal{A}}) = \mathcal{H}$, $\forall\ \lambda > 0$. Em particular para $\lambda = 1$, o operador $I - \bar{\mathcal{A}}$ é sobrejetor, como $\bar{\mathcal{A}}$ é dissipativo segue do Teorema 2.48 que $\overline{D(\bar{\mathcal{A}})} = \mathcal{H}$.

Por **(i)**, **(ii)** e **(iii)** temos do Corolário 2.45 que o operador $\bar{\mathcal{A}}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações. ∎

Teorema 3.4. *Para cada vetor $U_0 \in \mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}})$, o problema (3.7) e consequentemente (3.1)-(3.4) possui uma única solução*

$$U \in C\big([0,\infty), \mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}})\big) \cap C^1\big([0,\infty), \mathcal{H}\big),$$

dada por $U(t) = \mathrm{e}^{t\bar{\mathcal{A}}}U_0$.

Demonstração: Segue do Teorema 3.3 e do Teorema 2.36. ∎

3.3 Decaimento Exponencial

Baseado em [3], utilizaremos o método da energia para mostrar que o sistema (3.1)-(3.4) é exponencialmente estável desde que

$$\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}.$$

No que segue, apresentaremos uma série de lemas que serão utilizados na formação do funcional de Liapunov conveniente. Consideremos a energia associada ao sistema (3.1)-(3.4) como sendo

$$E(t) := \rho_1 \int_0^L |\Phi|^2\, dx + \rho_2 \int_0^L |\Psi|^2\, dx + b \int_0^L |\psi_x|^2\, dx + k \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2\, dx, \tag{3.30}$$

onde $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi)$ é a solução de (3.1)-(3.4) dada pelo Teorema 3.4.

Lema 3.5. *A derivada da energia definida em (3.30) satisfaz*

$$\frac{d}{dt}E(t) = -2\bar{a}\int_0^L |\Phi|^2\,dx \le 0,$$

para todo $t \ge 0$.

Demonstração: Multiplicando por $\overline{\varphi}_t$ e $\overline{\psi}_t$ as equações (3.1) e (3.2) respectivamente, somando as expressões resultantes, integrando por partes e usando as condições de contorno (3.3), temos

$$\begin{aligned} &\rho_1\int_0^L \varphi_{tt}\bar{\varphi}_t\,dx + \rho_2\int_0^L \psi_{tt}\bar{\psi}_t\,dx + b\int_0^L \psi_x\bar{\psi}_{xt}\,dx + \bar{a}\int_0^L |\varphi_t|^2\,dx \\ &+ k\int_0^L (\varphi_x+\psi)\overline{(\varphi_x+\psi)}_t\,dx = 0. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Observe que para todo $\theta \in L^2((0,\infty);L^2)$ temos

$$\frac{d}{dt}\int_0^L |\theta|^2\,dx = \int_0^L (\theta\bar{\theta}_t + \theta_t\bar{\theta})\,dx = 2Re\left\{\int_0^L \theta\bar{\theta}_t\,dx\right\},$$

ou seja,

$$Re\left\{\int_0^L \theta\bar{\theta}_t\,dx\right\} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |\theta|^2\,dx, \tag{3.32}$$

com a derivada sendo considerada no sentido de distribuições.

Assim, tomando a parte real de (3.31) e usando (3.32) temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\rho_1\int_0^L |\Phi|^2\,dx+\rho_2\int_0^L |\Psi|^2\,dx+b\int_0^L |\psi_x|^2\,dx+k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx\right) = -\bar{a}\int_0^L |\Phi|^2\,dx, \tag{3.33}$$

ou ainda

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E(t) = -\bar{a}\int_0^L |\Phi|^2\,dx.$$

■

Considere o multiplicador

$$p := \varphi + \int_0^x \psi\,ds. \tag{3.34}$$

Note que das condições de contorno e como $\psi \in H^1_*(0,L)$ temos

$$p(0) = p(L) = 0. \tag{3.35}$$

Lema 3.6. *Considere o funcional dado por*

$$\mathcal{F}_1(t) := \rho_1 Re\left\{ \int_0^L \Phi\overline{p}\, dx \right\}.$$

Para todo $\delta > 0$ existe uma constante positiva $C_{1,\delta}$ tal que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}_1(t) \leq -\frac{k}{2}\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2\, dx + C_{1,\delta}\int_0^L |\Phi|^2\, dx + \rho_1\frac{\delta L^2}{2}\int_0^L |\Psi|^2\, dx.$$

Demonstração: Multiplicando a equação (3.1) por $\bar{p}$, integrando por partes, utilizando as condições de contorno e usando (3.35), temos

$$\rho_1\int_0^L \Phi_t\bar{p}\, dx + k\int_0^L (\varphi_x + \psi)\bar{p}_x\, dx + \bar{a}\int_0^L \Phi\bar{p}\, dx = 0.$$

Note que se derivarmos em relação a x o multiplicador p dado em (3.34), temos que
$\bar{p}_x = \overline{(\varphi_x + \psi)}$. Assim,

$$\rho_1\int_0^L \Phi_t\bar{p}\, dx + k\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2\, dx + \bar{a}\int_0^L \Phi\bar{p}\, dx = 0. \tag{3.36}$$

Como

$$\Phi_t\bar{p} = \frac{d}{dt}(\Phi\bar{p}) - \Phi\bar{p}_t$$

substituindo a igualdade anterior em (3.36) e em seguida tomando a parte real em ambos os lados, temos

$$Re\left\{\rho_1\frac{d}{dt}\int_0^L \Phi\bar{p}\, dx\right\} = \rho_1\int_0^L \Phi\bar{p}_t\, dx - k\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2\, dx - \bar{a}Re\left\{\int_0^L \Phi\bar{p}\, dx\right\}.$$

Usando as desigualdades de Poincaré, Holder, Young e lembrando que

$$\bar{p}_t = \overline{\Phi} + \overline{\int_0^x \Psi\, ds} \quad \text{e} \quad \bar{p}_x = \overline{(\varphi_x + \psi)},$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{F}_1(t) &\leq \rho_1\bigg|\int_0^L \Phi\bar{p}_t\,dx\bigg| - k\int_0^L|\varphi_x+\psi|^2\,dx + \bar{a}c_p\bigg(\int_0^L|\Phi|^2\,dx\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg(\int_0^L|p_x|^2\,dx\bigg)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \rho_1\int_0^L|\Phi|^2\,dx + \rho_1\int_0^L|\Phi|\bigg|\int_0^x\Psi ds\bigg|\,dx - k\int_0^L|\varphi_x+\psi|^2\,dx\\
&+\frac{\bar{a}^2c_p^2}{2k}\int_0^L|\Phi|^2\,dx + \frac{k}{2}\int_0^L|\varphi_x+\psi|^2\,dx\\
&= -\frac{k}{2}\int_0^L|\varphi_x+\psi|^2\,dx + \bigg(\rho_1+\frac{\bar{a}^2c_p^2}{2k}\bigg)\int_0^L|\Phi|^2\,dx + \rho_1\underbrace{\int_0^L|\Phi|\bigg|\int_0^x\Psi\,ds\bigg|\,dx}_{\mathcal{I}_1},
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

onde $c_p > 0$ é a constante de Poincaré.

Vamos estimar o termo $\mathcal{I}_1$. Assim, usando as desigualdades de Holder e Young, temos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_1(t) &\leq \bigg(\int_0^L|\Phi|^2dx\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg(\int_0^L\bigg|\int_0^x\Psi\,ds\bigg|\,dx\bigg)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C_\delta\int_0^L|\Phi|^2\,dx + \frac{\delta}{2}\int_0^L\bigg|\int_0^x\Psi\,ds\bigg|^2\,dx\\
&\leq C_\delta\int_0^L|\Phi|^2\,dx + \frac{\delta}{2}\int_0^L\bigg(\int_0^L|\Psi|\,ds\bigg)^2\,dx\\
&\leq C_\delta\int_0^L|\Phi|^2\,dx + \frac{\delta}{2}(\|\Psi\|_{L^2}\|1\|_{L^2})^2\int_0^L 1\,dx\\
&\leq C_\delta\int_0^L|\Phi|^2\,dx + \frac{\delta L^2}{2}\int_0^L|\Psi|^2\,ds.
\end{aligned}
$$

Portanto, usando as estimativas acima em (3.37) temos

$$
\frac{d}{dt}\mathcal{F}_1(t) \leq -\frac{k}{2}\int_0^L|\varphi_x+\psi|^2\,dx + C_{1,\delta}\int_0^L|\Phi|^2\,dx + \rho_1\frac{\delta L^2}{2}\int_0^L|\Psi|^2\,dx,
$$

com $C_{1,\delta} = \rho_1(1+C_\delta) + \frac{\bar{a}^2c_p^2}{2k}$, o que conclui a demonstração. ∎

Lema 3.7. *Considere o funcional dado por*

$$
\mathcal{F}_2(t) := -\rho_2 Re\bigg\{\int_0^L\Psi\overline{(\varphi_x+\psi)}\,dx\bigg\} - \frac{b\rho_1}{k}Re\bigg\{\int\psi_x\overline{\Phi}\,dx\bigg\}.
$$

Supondo que $\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$, *então a derivada de* $\mathcal{F}_2$ *é dada por*

$$
\frac{d}{dt}\mathcal{F}_2(t) = -\rho_2\int_0^L|\Psi|^2\,dx + k\int_0^L|\varphi_x+\psi|^2\,dx + \frac{b\bar{a}}{k}Re\bigg\{\int_0^L\overline{\Phi}\psi_x\,dx\bigg\}.
$$

Demonstração: Multiplicando a equação (3.2) por $\bar{p}_x = \overline{(\varphi_x + \psi)}$, integrando sobre $(0, L)$, temos

$$\rho_2 \int_0^L \Psi_t \overline{\varphi}_x \, dx + \rho_2 \int_0^L \Psi_t \overline{\psi} \, dx - b \int_0^L \psi_{xx} \overline{(\varphi_x + \psi)} \, dx + k \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \, dx = 0. \tag{3.38}$$

Usando que

$$\begin{aligned} \Psi_t \overline{\varphi}_x &= \frac{d}{dt}(\Psi \overline{\varphi}_x) - \Psi \overline{\Phi}_x \\ &= \frac{d}{dt}\big[\Psi \overline{(\varphi_x + \psi)}\big] - \frac{d}{dt}(\Psi \overline{\psi}) - \Psi \overline{\Phi}_x \\ &= \frac{d}{dt}\big[\Psi \overline{(\varphi_x + \psi)}\big] - \Psi_t \overline{\psi} - |\Psi|^2 - \Psi \overline{\Phi}_x, \end{aligned} \tag{3.39}$$

segue de (3.38) que

$$\begin{aligned} &\rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^L \Psi \overline{(\varphi_x + \psi)} \, dx - \rho_2 \int_0^L |\Psi|^2 \, dx - \rho_2 \int_0^L \Psi \overline{\Phi}_x \, dx + b \int_0^L \psi_x \overline{(\varphi_x + \psi)}_x \, dx \\ &+ k \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \, dx = 0. \end{aligned}$$

Da equação (3.1), temos $\overline{(\varphi_x + \psi)}_x = \frac{\rho_1}{k} \overline{\Phi}_t + \frac{\bar{a}}{k} \overline{\Phi}$. Assim,

$$\begin{aligned} \rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^L \Psi \overline{(\varphi_x + \psi)} \, dx &= \rho_2 \int_0^L \Psi \overline{\Phi}_x \, dx + \rho_2 \int_0^L |\Psi|^2 \, dx - k \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \, dx \\ &\quad - \frac{b\bar{a}}{k} \int_0^L \overline{\Phi} \psi_x \, dx - \underbrace{\frac{b\rho_1}{k} \int_0^L \overline{\Phi}_t \psi_x \, dx}_{\mathcal{I}_2(t)}. \end{aligned}$$

Usando que

$$\overline{\Phi}_t \psi_x = \frac{d}{dt}(\overline{\Phi} \psi_x) - \Psi_x \overline{\Phi},$$

temos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2(t) = \frac{b\rho_1}{k} \int_0^L \overline{\Phi}_t \psi_x \, dx &= \frac{b\rho_1}{k} \frac{d}{dt} \int_0^L \overline{\Phi} \psi_x \, dx - \frac{b\rho_1}{k} \int_0^L \Psi_x \overline{\Phi} \, dx \\ &= \frac{b\rho_1}{k} \frac{d}{dt} \int_0^L \overline{\Phi} \psi_x \, dx + \frac{b\rho_1}{k} \int_0^L \Psi \overline{\Phi}_x \, dx \end{aligned}$$

uma vez que $\Psi\Phi\Big|_0^L = 0$, pois $\Phi \in H_0^1(0,L)$. Logo,

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}\mathcal{F}_2(t) &= \rho_2\frac{d}{dt}\int_0^L \Psi\overline{(\varphi_x+\psi)}\,dx + \frac{b\rho_1}{k}\frac{d}{dt}\int_0^L \overline{\Phi}\psi_x\,dx\\
&= \rho_2\int_0^L \Psi\overline{\Phi}_x\,dx + \rho_2\int_0^L |\Psi|^2\,dx - k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx - \frac{b\bar{a}}{k}\int_0^L \overline{\Phi}\psi_x\,dx\\
&- \frac{b\rho_1}{k}\int_0^L \Psi\overline{\Phi}_x\,dx\\
&= \rho_1\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}-\frac{b}{k}\right)\int_0^L \Psi\overline{\Phi}_x\,dx + \rho_2\int_0^L |\Psi|^2\,dx - k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx\\
&- \frac{b\bar{a}}{k}\int_0^L \overline{\Phi}\psi_x\,dx.
\end{aligned}$$

Como $\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$ e $\Psi\overline{\Phi}_x$ é limitado, pois $\Psi\overline{\Phi}_x \in L^2(0,L)$, tomando a parte real da igualdade anterior temos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}_2(t) = -\rho_2\int_0^L |\Psi|^2\,dx + k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx + \frac{b\bar{a}}{k}\int_0^L \overline{\Phi}\psi_x\,dx.$$

■

Lema 3.8. *Considere o funcional*

$$\mathcal{F}_3(t) = \rho_2 Re\left\{\int_0^L \psi\overline{\Psi}\,dx\right\}.$$

Então, a derivada de $\mathcal{F}_3$ satisfaz

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}_3(t) \leq \rho_2\int_0^L |\Psi|^2\,dx - \frac{3b}{4}\int_0^L |\psi_x|^2\,dx + \frac{c_p^2k^2}{b}\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx.$$

Demonstração: Multiplicando (3.2) por $\overline{\psi}$, integrando por partes e usando (3.3), temos

$$\rho_2\int_0^L \Psi_t\overline{\psi}\,dx + b\int_0^L |\psi_x|^2\,dx + k\int_0^L (\varphi_x+\psi)\overline{\psi}\,dx = 0$$

Usando que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\psi\overline{\Psi}) &= \psi_t\overline{\Psi} + \psi\overline{\Psi}_t\\
&= |\Psi|^2 + \overline{\Psi}_t\psi,
\end{aligned}$$

segue que

$$\rho_2\frac{d}{dt}\int_0^L \psi\overline{\Psi}\,dx = \rho_2\int_0^L |\Psi|^2\,dx - b\int_0^L |\psi_x|^2\,dx - k\int_0^L \overline{\psi}(\varphi_x+\psi)\,dx.$$

Tomando a parte real na igualdade anterior e da definição de $\mathcal{F}_1$ temos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}_3(t) = \rho_2 \int_0^L |\Psi|^2\,dx - b\int_0^L |\psi_x|^2\,dx - kRe\left\{\int_0^L \overline{\psi}(\varphi_x + \psi)\,dx\right\}.$$

Aplicando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{F}_3(t) &\leq \rho_2 \int_0^L |\Psi|^2\,dx - b\int_0^L |\psi_x|^2\,dx + \frac{c_p^2k^2}{b}\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx + \frac{b}{4}\int_0^L |\psi_x|^2\,dx \\ &\leq \rho_2 \int_0^L |\Psi|^2\,dx - \frac{3b}{4}\int_0^L |\psi_x|^2\,dx + \frac{c_p^2k^2}{b}\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx.\end{aligned}$$

■

Defina o funcional de Liapunov

$$\mathcal{G}(t) := N_0E(t) + N_1\mathcal{F}_1(t) + N_2\mathcal{F}_2(t) + \mathcal{F}_3(t), \tag{3.40}$$

onde N_0, N_1 e N_2 são constantes positivas a serem determinadas.

Lema 3.9. *A energia dada em (3.30) é equivalente ao funcional definido em (3.40), ou seja, existem constantes posivitas C_1 e C_2 tais que*

$$C_1E(t) \leq \mathcal{G}(t) \leq C_2E(t), \quad \forall\, t > 0.$$

Demonstração: Primeiramente, mostraremos que cada termo do funcional dado em (3.40) é majorado pela energia. Das desigualdades de Cauchy-Schwarz, Poincaré e Young temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_3(t) &\leq \rho_2\int_0^L |\psi||\Psi|\,dx \leq \rho_2c_p\left(\int_0^L |\psi_x|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^L |\Psi|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq b\rho_2\frac{c_p^2}{2b}\int_0^L |\psi_x|^2\,dx + \frac{\rho_2}{2}\int_0^L |\Psi|^2\,dx \\ &\leq c_3E(t),\end{aligned} \tag{3.41}$$

onde c_p é a constante de Poincaré e $c_3 = \max\left\{\frac{\rho_2c_p^2}{2b}, \frac{1}{2}\right\}$. Da definição de p em (3.34), temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(t) &\leq \rho_1\int_0^L |\Phi||p|\,dx \leq \rho_1\int_0^L |\Phi|\left|\varphi + \int_0^x \psi\,ds\right|dx \\ &\leq \rho_1\int_0^L |\Phi||\varphi|\,dx + \rho_1\int_0^L |\Phi|\left|\int_0^x \psi\,ds\right|dx.\end{aligned} \tag{3.42}$$

Das desigualdades de Cauchy-Schwarz, Poincaré e de Young temos

$$
\begin{aligned}
\rho_1\int_0^L|\Phi||\varphi|\,dx &\le \rho_1\Big(\int_0^L|\Phi|^2\,dx\Big)^{\frac12}\Big(\int_0^L|\varphi|^2\,dx\Big)^{\frac12}\\
&\le \rho_1 c_p\|\Phi\|_{L^2}\|\varphi_x\|_{L^2}\\
&\le \rho_1 c_p\|\Phi\|_{L^2}\big(\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}+\|\psi\|_{L^2}\big)\\
&\le \rho_1 c_p\|\Phi\|_{L^2}\big(\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}+c_p\|\psi_x\|_{L^2}\big)\\
&\le \rho_1 c_p\Big[\|\Phi\|_{L^2}^2+\frac12\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2+\frac{c_p^2}{2}\|\psi_x\|_{L^2}^2\Big]
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\rho_1\int_0^L|\Phi|\Big|\int_0^x\psi\,ds\Big|\,dx &\le \rho_1\int_0^L|\Phi|\Big(\int_0^L|\psi|\,ds\Big)\,dx\\
&\le \rho_1 L^{\frac12}c_p\|\psi_x\|_{L^2}\int_0^L|\Phi|\,dx\\
&\le \rho_1 L c_p\|\psi_x\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2}\\
&\le \rho_1 c_p\Big[\frac{L^2}{2}\|\Phi\|_{L^2}^2+\frac12\|\psi_x\|_{L^2}^2\Big].
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

De (3.42)-(3.44) segue que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(t) &\le \rho_1 c_p\Big(1+\frac{L^2}{2}\Big)\|\Phi\|_{L^2}^2+\frac{\rho_1 c_p}{2}\Big(1+c_p^2\Big)\|\psi_x\|_{L^2}^2+\frac{\rho_1 c_p}{2}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2\\
&\le \rho_1 c_p\Big(1+\frac{L^2}{2}\Big)\|\Phi\|_{L^2}^2+b\frac{\rho_1 c_p}{2b}\Big(1+c_p^2\Big)\|\psi_x\|_{L^2}^2+k\frac{\rho_1 c_p}{2k}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2\\
&\le c_1E(t),
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

onde $c_1=\max\Big\{c_p(1+\frac{L^2}{2}),\frac{\rho_1 c_p}{2b}(1+\frac{c_p^2}{2}),\frac{\rho_1 c_p}{2k}\Big\}$.

Das desigualdades de Cauchy-Schwarz, Poincaré e Young, temos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_2(t) &\le \rho_2\int_0^L|\Psi||\varphi_x+\psi|\,dx+\frac{b\rho_1}{k}\int_0^L|\psi_x||\Phi|\,dx\\
&\le \rho_2\Big(\int_0^L|\Psi|^2\,dx\Big)^{\frac12}\Big(\int_0^L|\varphi_x+\psi|^2\,dx\Big)^{\frac12}+\frac{b\rho_1}{k}\Big(\int_0^L|\psi_x|^2\,dx\Big)^{\frac12}\Big(\int_0^L|\Phi|^2\,dx\Big)^{\frac12}\\
&\le \rho_2\frac{\rho_2}{2}\int_0^L|\Psi|^2\,dx+k\frac{1}{2k}\int_0^L|\varphi_x+\psi|^2\,dx+b\frac{\rho_1^2b}{2k^2}\int_0^L|\psi_x|^2\,dx+\rho_1\frac{1}{2\rho_1}\int_0^L|\Phi|^2\,dx\\
&\le c_2E(t),
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

onde $c_2 = \max\left\{\frac{\rho_2}{2}, \frac{1}{2k}, \frac{1}{2\rho_1}, \frac{\rho_1^2 b}{2k^2}\right\}$.

Por (3.41), (3.45) e (3.46) e temos que existe $C_2 = \max\{N_0, c_1N_1, c_2N_2, c_3\}$ tal que

$$\mathcal{G}(t) \leq C_2 E(t). \tag{3.47}$$

Por outro lado, usando a Desigualdade de Young temos

$$Re\{u.w\} \leq |u.w| \leq |u|^2 + \frac{|w|^2}{4},$$

o que implica em

$$-\left(|u|^2 + \frac{|w|^2}{4}\right) \leq uw \leq |u|^2 + \frac{|w|^2}{4}. \tag{3.48}$$

De (3.48) e da Desigualdade de Poincaré obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3(t) = \rho_2 Re\left\{\int_0^L \psi\overline{\Psi}\,dx\right\} &\geq -\rho_2^2\int_0^L |\Psi|^2\,dx - \frac{1}{4}\int_0^L |\psi|^2\,dx \\ &\geq -\rho_2^2\int_0^L |\Psi|^2\,dx - \frac{c_p^2}{4}\int_0^L |\psi_x|^2\,dx. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Agora, das desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young temos

$$\begin{aligned} N_2\mathcal{F}_2(t) &= -N_2\rho_2 Re\left\{\int_0^L \Psi\overline{(\varphi_x+\psi)}\,dx\right\} - N_2\frac{b\rho_1}{k}Re\left\{\int_0^L \psi_x\overline{\Phi}\,dx\right\} \\ &\geq -N_2\rho_2\|\Psi\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2} - N_2\frac{b\rho_1}{k}\|\psi_x\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2} \\ &\geq -\frac{N_2\rho_2}{2}(\|\Psi\|_{L^2}^2 + \|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2) - N_2\frac{b\rho_1}{2k}(\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \|\Phi\|_{L^2}^2) \\ &= -\rho_2\frac{N_2}{2}\|\Psi\|_{L^2}^2 - k\frac{N_2\rho_2}{2k}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 - bN_2\frac{\rho_1}{2k}\|\psi_x\|_{L^2}^2 - \rho_1 N_2\frac{b}{2k}\|\Phi\|_{L^2}^2 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Usando (3.48), temos

$$\begin{aligned} N_1\rho_1 Re\left\{\int_0^L \Phi\overline{\varphi}\,dx\right\} &\geq -N_1^2\rho_1^2\|\Phi\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4}\|\varphi\|_{L^2}^2 \\ &\geq -N_1^2\rho_1^2\|\Phi\|_{L^2}^2 - \frac{c_p^2}{2}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2 - \frac{c_p^4}{2}\|\psi_x\|_{L^2}^2 \end{aligned} \tag{3.51}$$

e

$$
\begin{aligned}
N_1\rho_1 Re\left\{\int_0^L \Phi\left(\overline{\int_0^x \psi\, ds}\right) dx\right\} &\geq -N_1^2\rho_1^2\|\Phi\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4}\int_0^L \left|\int_0^x \psi\, ds\right|^2 dx \\
&\geq -N_1^2\rho_1^2\|\Phi\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4}\int_0^L Lc_p^2\|\psi_x\|_{L^2}^2\, dx \qquad (3.52)\\
&= -N_1^2\rho_1^2\|\Phi\|_{L^2}^2 - \frac{L^2c_p^2}{4}\|\psi_x\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

De (3.51) e (3.52) concluímos

$$
N_1\mathcal{F}_1(t) \geq -2N_1^2\rho_1^2\|\Phi\|_{L^2}^2 - \frac{c_p^2}{2}\|\varphi_x+\psi\|_{L^2} - \frac{c_p^2}{2}\left(c_p^2 + \frac{L^2}{2}\right)\|\psi_x\|_{L^2}^2. \qquad (3.53)
$$

Usando (3.49), (3.50) e (3.53), temos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}(t) \geq &\left[N_0 - \left(\rho_1 N_2\frac{b}{2k} + 2N_1^2\rho_1^2\right)\right]\rho_1\int_0^L |\Phi|^2\, dx \\
&+ \left[N_0 - \left(\rho_2^2 + \rho_2\frac{N_2}{2}\right)\right]\rho_2\int_0^L |\Psi|^2\, dx \\
&+ \left[N_0 - \left(\frac{c_p^2}{4} + bN_2\frac{\rho_1}{2k} + \frac{c_p^2}{2}\left(c_p^2 + \frac{L^2}{2}\right)\right)\right]b\int_0^L |\psi_x|^2\, dx \\
&+ \left[N_0 - \left(\frac{N_2\rho_2}{2k} + \frac{c_p^2}{2}\right)\right]k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\, dx.
\end{aligned}
$$

Tomando N_1 e N_2 fixados devemos considerar $N_0 > \sigma$, onde

$$
\sigma = \max\left\{\rho_1 N_2\frac{b}{2k} + 2N_1^2\rho_1^2, \rho_2^2 + \rho_2\frac{N_2}{2}, \frac{c_p^2}{4} + bN_2\frac{\rho_1}{2k} + \frac{c_p^2}{2}\left(c_p^2 + \frac{L^2}{2}\right), \frac{N_2\rho_2}{2k} + \frac{c_p^2}{2}\right\}.
$$

Logo, existe $C_1 > 0$ tal que

$$
C_1 E(t) \leq \mathcal{G}(t), \qquad (3.54)
$$

onde

$$
\begin{aligned}
C_1 = min\Bigg\{&\left[N_0 - \left(\rho_1 N_2\frac{b}{2k} + 2N_1^2\rho_1^2\right)\right], \left[N_0 - \left(\rho_2^2 + \rho_2\frac{N_2}{2}\right)\right], \\
&\left[N_0 - \left(\frac{c_p^2}{4} + bN_2\frac{\rho_1}{2k} + \frac{c_p^2}{2}\left(c_p^2 + \frac{L^2}{2}\right)\right)\right], \left[N_0 - \left(\frac{N_2\rho_2}{2k} + \frac{c_p^2}{2}\right)\right]\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

De (3.47) e (3.54) segue o resultado. ∎

Teorema 3.10. *Suponhamos que*

$$
\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}.
$$

Então, existem constantes $M > 0$ e $\omega > 0$, independentes das condições iniciais, tais que

$$E(t) \leq ME(0)e^{-\omega t}. \tag{3.55}$$

Demonstração: Para estimar a derivada do funcional de Liapunov dado em (3.40), utilizaremos as estimativas feitas para as derivadas de $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ e $\mathcal{F}_3$ dadas nos lemas 3.6, 3.7 e 3.8.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{G}(t) \leq & -2\bar{a}N_0\int_0^L |\Phi|^2dx - N_1\frac{k}{2}\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx + N_1C_{1,\delta}\int_0^L |\Phi|^2\,dx \\
& + N_1\rho_1\frac{\delta L^2}{2}\int_0^L |\Psi|^2\,dx - N_2\rho_2\int_0^L |\Psi|^2\,dx + N_2k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx \\
& + N_2\frac{b\bar{a}}{k}Re\Big\{\int_0^L \overline{\Phi}\psi_x\,dx\Big\} + \rho_2\int_0^L |\Psi|^2\,dx - \frac{3b}{4}\int_0^L |\psi_x|^2\,dx \\
& + \frac{c_p^2k^2}{b}\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Holder e Young, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{G}(t) \leq & -2\bar{a}N_0\int_0^L |\Phi|^2dx - N_1\frac{k}{2}\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx + N_1C_{1,\delta}\int_0^L |\Phi|^2\,dx \\
& + N_1\rho_1\frac{\delta L^2}{2}\int_0^L |\Psi|^2\,dx - N_2\rho_2\int_0^L |\Psi|^2\,dx + N_2k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx \\
& + N_2^2\frac{b\bar{a}^2}{k^2}\int_0^L |\Phi|^2\,dx + \frac{b}{4}\int_0^L |\psi_x|^2\,dx + \rho_2\int_0^L |\Psi|^2\,dx - \frac{3b}{4}\int_0^L |\psi_x|^2\,dx \\
& + \frac{c_p^2k^2}{b}\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{G}(t) \leq & -\frac{1}{\rho_1}\bigg(2\bar{a}N_0 - N_1C_{1,\delta} - N_2^2\frac{b\bar{a}^2}{k^2}\bigg)\rho_1\int_0^L |\Phi|^2dx \\
& - \frac{1}{k}\bigg(N_1\frac{k}{2} - N_2k - \frac{c_p^2k^2}{b}\bigg)k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx \\
& - \frac{1}{\rho_2}\bigg(-N_1\rho_1\frac{\delta L^2}{2} + N_2\rho_2 - \rho_2\bigg)\rho_2\int_0^L |\Psi|^2\,dx \\
& - \frac{b}{2}\int_0^L |\psi_x|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Sendo assim, fixemos primeiramente $N_2 > 1$, em seguida fixemos $N_1 > \frac{2}{k}(N_2k + \frac{c_p^2k^2}{b})$. Como N_1 e N_2 estão fixados, podemos também tomar $\delta < \frac{2\rho_2(N_2-1)}{N_1\rho_1L^2}$ fixado. Finalmente, fixamos N_0 tal que

$$N_0 > \max\left\{ \frac{1}{2\bar{a}} \left(N_1 C_{1,\delta} + N_2^2 \frac{b\bar{a}^2}{k^2} \right), \sigma \right\}$$

Portanto, existe $k_0 > 0$, onde $k_0 = \max\left\{\frac{1}{2}, A, B, C\right\}$, com

$$A = \frac{1}{\rho_1} \left(2\bar{a}N_0 - N_1 C_{1,\delta} - N_2^2 \frac{b\bar{a}^2}{k^2} \right),$$

$$B = \frac{1}{k} \left(N_1 \frac{k}{2} - N_2 k - \frac{c_p^2 k^2}{b} \right),$$

$$C = \frac{1}{\rho_2} \left(- N_1 \rho_1 \frac{\delta L^2}{2} + N_2 \rho_2 - \rho_2 \right),$$

tal que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{G}(t) \leq -k_0 E(t).$$

Do Lema 3.9 sabemos que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{G}(t) \leq -\frac{k_0}{C_2}\mathcal{G}(t),$$

de onde obtemos que

$$\mathcal{G}(t) \leq \mathcal{G}(0) e^{-\frac{k_0}{C_2}t}.$$

Usando novamente o Lema 3.9, segue que

$$E(t) \leq \frac{C_2}{C_1} E(0) e^{-\frac{k_0}{C_2}t}.$$

Tomando $M = \frac{C_2}{C_1} > 0$ e $\omega = \frac{k_0}{C_2} > 0$ segue a desigualdade desejada em (3.55). Portanto, a prova do Teorema 3.10 está completa. ■

4 SISTEMA DE TIMOSHENKO COM DISSIPAÇÃO FRICCIONAL INDEFINIDA

O objetivo desse capítulo é mostrar a existência de solução, bem como o decaimento uniforme da solução do sistema de Timoshenko com um amortecimento do tipo friccional na primeira equação. Mais precisamente, consideremos o seguinte sistema

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + a(x)\varphi_t = 0 \quad \text{em} \quad (0,\infty)\times(0,L), \tag{4.1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0 \quad \text{em} \quad (0,\infty)\times(0,L), \tag{4.2}$$

com condições de fronteira dadas por

$$\varphi(\cdot,0) = \varphi(\cdot,L) = \psi_x(\cdot,0) = \psi_x(\cdot,L) = 0, \tag{4.3}$$

e sujeito às condições iniciais

$$\varphi(0,\cdot) = \varphi_0(\cdot), \quad \varphi_t(0,\cdot) = \varphi_1(\cdot), \quad \psi(0,\cdot) = \psi_0(\cdot), \quad \psi_t(0,\cdot) = \psi_1(\cdot), \tag{4.4}$$

com ρ_1, ρ_2, k, b constantes reais e positivas. Além disso, $a \in L^\infty(0,L)$ é uma função real podendo mudar de sinal, com $\bar{a} = \frac{1}{L}\int_0^L a(x)\,dx > 0$.

A energia associada ao sistema é dada por

$$E(t) := \rho_1 \int_0^L |\Phi|^2\,dx + \rho_2 \int_0^L |\Psi|^2\,dx + b\int_0^L |\psi_x|^2\,dx + k\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2\,dx,$$

e sua derivada

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\int_0^L a(x)|\Phi|^2\,dx, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Como a função a muda de sinal não é possível determinar o sinal da derivada da energia o que impossibilita afirmar se o sistema é ou não dissipativo.

4.1 Existência e Unicidade

Consideremos o espaço de fase $\mathcal{H}$ como no capítulo anterior, ou seja,

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H_*^1(0,L) \times L_*^2(0,L).$$

Primeiramente, escreveremos o problema (4.1)-(4.4) na forma de um problema de Cauchy abstrato. Tomando $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi)$, com $\Phi = \varphi_t$ e $\Psi = \psi_t$. Temos que o problema (4.1)-(4.4) pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}U \quad t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{4.5}$$

onde $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é um operador linear tal que

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{1}{\rho_1}\Big(k(\varphi_x + \psi)_x - a(x)\Phi\Big) \\ \Psi \\ \frac{1}{\rho_2}(b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1}\partial_x^2 & -\frac{a(x)}{\rho_1}I & k\frac{\partial_x}{\rho_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{k}{\rho_2}\partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{k}{\rho_2}I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \Phi \\ \psi \\ \Psi \end{pmatrix},$$

onde $U(0) = \Big(\varphi_0, \quad \varphi_1, \quad \psi_0, \quad \psi_1\Big)$.

Observe que $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\bar{A})$, dado em (3.9), ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{(\varphi, \Phi, \psi, \Psi) \in \mathcal{H}; &\varphi \in H^2(0, L), \Phi \in H_0^1(0, L), \psi \in H_*^1(0, L) \\ &\psi_x \in H_0^1(0, L), \Psi \in H_*^1(0, L)\}. \end{aligned}$$

A seguir, a estratégia é escrever o operador $\mathcal{A}$ como sendo a soma entre dois operadores, um deles sendo gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações e o outro contínuo. Assim, usaremos o Teorema 2.37 para mostrar que $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Finalmente, concluiremos através do Teorema 2.36 que existe uma única solução para o problema (4.1)-(4.4).

Considere o operador linear $\mathcal{B} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ cuja representação matricial é dada por

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Note que

$$\|\mathcal{B}U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 \leq \|U\|_{\mathcal{H}}^2, \tag{4.7}$$

ou seja, B é um operador linear contínuo.

Além disso, tome o operador A_∞ de tal forma que

$$A_\infty = \mathcal{A} - \frac{a_\infty}{\rho_1}\mathcal{B},$$

com $a_\infty = \|a\|_{L^\infty}$. Logo

$$A_\infty U = \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{1}{\rho_1}(k(\varphi_x+\psi)_x - (a(x)+a_\infty)\Phi) \\ \Psi \\ \frac{1}{\rho_2}\Big(b\psi_{xx} - k(\varphi_x+\psi)\Big) \end{pmatrix}.$$

Como $\mathcal{D}(A_\infty) = \mathcal{D}(\bar{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{A})$, pelo Teorema 2.37 se A_∞ for um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações, então $\mathcal{A} = A_\infty + \frac{a_\infty}{\rho_1}\mathcal{B}$ será gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Ademais, segue do item **(iii)** do Teorema 3.3 que $\mathcal{D}(A_\infty)$ é denso em $\mathcal{H}$.

Teorema 4.1. *O operador linear A_∞ é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.*

Demonstração: Pelo Corolário 2.45, já que $\mathcal{D}(A_\infty)$ é denso em $\mathcal{H}$, basta mostrarmos que o operador A_∞ é dissipativo e que $0 \in \rho(A_\infty)$.

(i) A_∞ é dissipativo

Para todo $U \in \mathcal{D}(A_\infty)$ temos

$$\begin{aligned}\big(A_\infty U, U\big)_{\mathcal{H}} &= \int_0^L \big(k(\varphi_x+\psi)_x - (a(x)+a_\infty)\Phi\big)\overline{\Phi}\,dx + b\int_0^L \Psi_x\overline{\psi}_x\,dx \\ &+ k\int_0^L \big(\Phi_x+\Psi\big)\overline{\big(\varphi_x+\psi\big)}\,dx + \int_0^L \big(b\psi_{xx} - k(\varphi_x+\psi)\big)\overline{\Psi}\,dx,\end{aligned}$$

integrando por partes e usando as condições de contorno, temos que

$$\begin{aligned}\big(A_\infty U, U\big)_{\mathcal{H}} = &-k\int_0^L \big(\varphi_x+\psi\big)\overline{\Phi}_x\,dx - \int_0^L (a(x)+a_\infty)|\Phi|^2\,dx + b\int_0^L \Psi_x\overline{\psi}_x\,dx \\ &+ k\int_0^L \overline{\big(\varphi_x+\psi\big)}\Phi_x\,dx + k\int_0^L \overline{\big(\varphi_x+\psi\big)}\Psi\,dx - b\int_0^L \psi_x\overline{\Psi}_x\,dx \\ &- k\int_0^L \big(\varphi_x+\psi\big)\overline{\Psi}\,dx.\end{aligned}$$

Da Proposição 2.27 podemos concluir que $a(x)+a_\infty \geq 0$, assim, tomando a parte real em ambos os lados na ultima igualdade, obtemos

$$Re\big(A_\infty U, U\big)_{\mathcal{H}} = -\int_0^L (a(x)+a_\infty)|\Phi|^2\,dx \leq 0, \quad \forall\, U \in \mathcal{D}(A_\infty).$$

Portanto, A_∞ é dissipativo.

(ii) $\mathbf{0} \in \rho(\mathbf{A}_\infty)$, ou seja, A_∞ é invertível e seu inverso A_∞^{-1} é limitado.

Seja $\mathcal{F} \in \mathcal{H}$ com $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, mostraremos que existe uma única solução $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi) \in \mathcal{D}(A_\infty)$ da qual $A_\infty U = \mathcal{F}$. Escrevendo esta equação em termo de suas componentes temos

$$\Phi = f_1 \tag{4.8}$$
$$\frac{1}{\rho_1}\big(k(\varphi_x + \psi)_x - (a(x) + a_\infty)\Phi\big) = f_2 \tag{4.9}$$
$$\Psi = f_3 \tag{4.10}$$
$$\frac{1}{\rho_2}\big(b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi)\big) = f_4. \tag{4.11}$$

Tomemos $\Phi = f_1$ e $\Psi = f_3$. Logo (4.8)-(4.11) se reduz ao seguinte sistema

$$k(\varphi_x + \psi)_x = h_1 \tag{4.12}$$
$$b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) = h_2, \tag{4.13}$$

onde $\quad h_1 = \rho_1 f_2 + \big(a(x) + a_\infty\big) f_1 \quad$ e $\quad h_2 = \rho_2 f_4$.

Usando o Lema 3.2, temos que o sistema (4.12)-(4.13) possui uma única solução $(\varphi, \psi) \in [H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)] \times [H^2(0,L) \cap H_*^1(0,L)]$, com $\psi_x \in H_0^1(0,L)$. Como $\Psi = f_1$ e $\Psi = f_3$, então existe uma única solução $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi) \in \mathcal{D}(A_\infty)$ tal que $A_\infty U = \mathcal{F}$. Portanto, $\mathcal{A}_\infty{}^{-1}$ existe.

Agora vamos mostrar que A_∞^{-1} é limitado. De (4.8) e de (4.10) temos que $\Phi = f_1$ e $\Psi = f_3$. Multiplicando (4.12) por $\overline{\varphi}$ e (4.13) por $\overline{\psi}$, somando as equações e em seguida integrando de 0 a L, obtemos

$$-k\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2\,dx - b\int_0^L |\psi_x|^2\,dx = \int_0^L h_1\overline{\varphi}\,dx + \int_0^L h_2\overline{\psi}\,dx. \tag{4.14}$$

Note que usando as desigualdade de Cauchy-Schwarz e Poincaré temos

$$\begin{aligned}
\|h_1\|_{L^2}^2 &= \|\rho_1 f_2 + (a(x) + a_\infty) f_1\|_{L^2}^2 \le \big(\rho_1\|f_2\|_{L^2} + 2a_\infty L^{\frac{1}{2}}\|f_1\|_{L^2}\big)^2 \\
&\le \big(\rho_1\|f_2\|_{L^2} + 2c_p a_\infty L^{\frac{1}{2}}\|f_{1x}\|_{L^2}\big)^2 \\
&\le \big(\rho_1\|f_2\|_{L^2} + 2c_p a_\infty L^{\frac{1}{2}}\|f_{1x} + f_3\|_{L^2} + 2c_p a_\infty L^{\frac{1}{2}}\|f_3\|_{L^2}\big)^2 \\
&\le \big(\rho_1\|f_2\|_{L^2} + 2c_p a_\infty L^{\frac{1}{2}}\|f_{1x} + f_3\|_{L^2} + 2c_p^2 a_\infty L^{\frac{1}{2}}\|f_{3x}\|_{L^2}\big)^2 \\
&\le 3\rho_1^2\|f_2\|_{L^2}^2 + \frac{6kc_p^2 a_\infty^2}{k}\|f_{1x} + f_3\|_{L^2}^2 + \frac{6bc_p^4 a_\infty^2}{b}\|f_{3x}\|_{L^2}^2 \\
&\le c'\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}^2,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

onde $c' = \max\left\{3, \dfrac{6c_p^2a_\infty^2}{k}, \dfrac{6c_p^4a_\infty^2}{b}\right\}$. Além disso,

$$\|h_2\|_{L^2}^2 = \|\rho_2 f_4\|_{L^2}^2 = \rho_2^2\|f_4\|_{L^2}^2 \le \rho_2\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{4.16}$$

Empregando as desigualdades de Cauchy-Schwarz , Young e Poincaré em (4.14) e em seguida usando as estimativas dadas (4.15) e (4.16), de forma análoga à já feita em (3.27) e (3.28) concluímos que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \le \sqrt{2c'}\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}.$$

Portanto, o operador A_∞^{-1} é limitado. ■

Teorema 4.2. *O operador linear $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.*

Demonstração: O Teorema 4.1 nos dá que $\mathcal{A}_\infty$ é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações. Além disso, por (4.7),temos que o operador $\mathcal{B}$ dado em (4.6) é contínuo, então pelo Teorema 2.37 concluímos que $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. ■

Teorema 4.3. *Para cada vetor $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, o problema (4.1)-(4.4) possui uma única solução*

$$U \in C\big([0,\infty), \mathcal{D}(\mathcal{A})\big) \cap C^1\big([0,\infty), \mathcal{H}\big),$$

dada por $U(t) = \mathrm{e}^{t\mathcal{A}}U_0$.

Demonstração: Decorre do Teorema 4.2 e do Teorema 2.36. ■

4.2 Decaimento Exponencial

O objetivo desta seção é mostrar que o sistema (4.1)-(4.4) é exponencialmente estável, desde que $\|a - \bar{a}\|_{L^2}$ seja suficientemente pequena e as velocidades das ondas sejam as mesmas, ou seja, vale $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b}$. Este resultado será obtido através do Teorema 2.50.

Lema 4.4. $0 \in \rho(\mathcal{A})$, *ou seja, $\mathcal{A}^{-1}$ existe e é limitado.*

Demonstração: Seja $\mathcal{F} \in \mathcal{H}$, com $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, vamos mostrar que existe uma única solução $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ a qual $\mathcal{A}U = \mathcal{F}$, para todo $\mathcal{F} \in \mathcal{H}$. Escrevendo esta equação em termo de suas componentes, temos

$$\Phi = f_1 \tag{4.17}$$

$$\frac{1}{\rho_1}\big(k(\varphi_x + \psi)_x - a(x)\Phi\big) = f_2 \tag{4.18}$$

$$\Psi = f_3 \tag{4.19}$$

$$\frac{1}{\rho_2}\big(b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi)\big) = f_4. \tag{4.20}$$

Tomemos $\Phi = f_1$ e $\Psi = f_3$. Logo (4.17)-(4.20) se reduz ao seguinte sistema

$$\begin{aligned} k(\varphi_x + \psi)_x &= h_1 \\ b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) &= h_2, \end{aligned}$$

onde $\quad h_1 = \rho_1 f_2 + a(x) f_1 \quad$ e $\quad h_2 = \rho_2 f_4$.

Note que se considerarmos $a_\infty = 0$ no Teorema 4.1 item **(ii)**, temos o presente caso. Logo, podemos concluir que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. ■

Considere $S(t)$ o semigrupo gerado por

$$\mathcal{A} = A_\infty + \tilde{\mathcal{B}},$$

onde $\tilde{\mathcal{B}} = \frac{a_\infty}{\rho_1}\mathcal{B}$, com $\mathcal{B}$ dado em (4.6). Temos que

$$S(t) = T(t) e^{\tilde{\mathcal{B}} t},$$

onde $T(t)$ é o C_0-semigrupo de contrações gerado por A_∞, ou seja, $\|T(t)\| \leq 1$. Assim, do Teorema 2.37 temos

$$\|S(t)\| \leq e^{\|\tilde{\mathcal{B}}\| t} = e^{\frac{a_\infty}{\rho_1} t}.$$

Logo, do Teorema 2.41 e Observação 2.42 tem-se que para todo $\lambda \in \mathbb{C},\ Re\lambda > \frac{a_\infty}{\rho_1} = \omega$,

$$\lambda \in \rho(\mathcal{A}) \quad \text{e ainda} \quad \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{Re\lambda - \omega}.$$

Desta forma, tomando em particular $d_1 \in \mathbb{R}_+$ tal que $d_1 > \omega + 1 = \frac{a_\infty}{\rho_1} + 1$, tem-se para todo $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\text{se} \quad Re\lambda > d_1, \quad \text{então} \quad \lambda \in \rho(\mathcal{A}) \quad \text{e} \quad \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < 1. \tag{4.21}$$

Assim, as hipóteses do Teorema 2.50 são satisfeitas para $Re\lambda > d_1$, assim, basta mostrarmos que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $0 < Re\lambda \leq d_1$ vale $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ e $\|(\lambda I - \mathcal{A})\|_{\mathcal{H}} \leq M$, para algum $M > 0$, para obtermos o decaimento exponencial.

Suponhamos $0 \leq Re\lambda \leq d_1$. Mostraremos inicialmente que o operador $(\lambda I - \mathcal{A})$ é invertível, ou seja, devemos mostrar que para todo $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{H}$ existe um único $W = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que $(\lambda I - \mathcal{A})W = \mathcal{F}$.

Note que

$$\mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}} + (\bar{a} - a(x))\mathcal{B}, \tag{4.22}$$

onde $\overline{\mathcal{A}}$ é o operador linear dado por (3.8) e $\mathcal{B}$ o operador linear dado em (4.6).

De (4.22) podemos escrever a equação $(\lambda I - \mathcal{A})W = \mathcal{F}$ da seguinte forma

$$\lambda W - \bar{\mathcal{A}}W = \mathcal{F} + \big(\bar{a} - a(x)\big)\mathcal{B}W. \tag{4.23}$$

Escrevendo (4.23) em função de suas componentes, temos

$$\begin{aligned}
\lambda\varphi - \Phi &= f_1 && (4.24)\\
\rho_1\lambda\Phi - \Bigg(k(\varphi_x + \psi)_x - \bar{a}\Phi\Bigg) &= \rho_1 f_2 + \rho_1\big(\bar{a} - a(x)\big)\Phi && (4.25)\\
\lambda\psi - \Psi &= f_3 && (4.26)\\
\lambda\rho_2\Psi - \Bigg(b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi)\Bigg) &= \rho_2 f_4. && (4.27)
\end{aligned}$$

Das equações (4.24) e (4.26) temos

$$\Phi = \lambda\varphi - f_1 \text{ e } \Psi = \lambda\psi - f_3.$$

Substituindo os valores de Φ e Ψ em (4.25) e (4.27), respectivamente, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned}
&\rho_1\lambda^2\varphi - k(\varphi_x + \psi)_x + \bar{a}\lambda\varphi = \rho_1\lambda\big(\bar{a} - a(x)\big)\varphi + F_1 && (4.28)\\
&\rho_2\lambda^2\psi - b\psi_{xx} + k\big(\varphi_x + \psi\big) = F_2, && (4.29)
\end{aligned}$$

onde $F_1 = \lambda\rho_1 f_1 + \rho_1 f_2 - (\bar{a} - a(x))f_1 + \bar{a}f_1$ e $F_2 = \rho_2 f_4 + \rho_2\lambda f_3$.

De (4.28), temos

$$\varphi_{xx} - \frac{(\rho_1\lambda^2 + \bar{a}\lambda)}{k}\varphi = \frac{\rho_1\lambda}{k}(a(x) - \bar{a})\varphi - \frac{F_1}{k} - \psi_x.$$

Denotamos por

$$\alpha^2 = \frac{(\rho_1\lambda^2 + \bar{a}\lambda)}{k}$$

e para cada $(v, w) \in H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L)$ definimos

$$g = \frac{\rho_1\lambda}{k}(a(x) - \bar{a})v - \frac{F_1}{k} - w_x.$$

Consideremos o seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} u_{xx}(x) - \alpha^2 u(x) = g(x), \\ u(0) = u(L) = 0. \end{cases} \tag{4.30}$$

Como $Re\lambda \geq 0$ e $g \in L^2(0, L)$, então dos lemas 2.58 e 2.59 o problema (4.30) possui solução dada por

$$u(x) = \mathcal{D}_\alpha(g) = \frac{\rho_1 \lambda}{k} \mathcal{D}_\alpha\big((a(x) - \bar{a})v\big) - \frac{1}{k} \mathcal{D}_\alpha(F_1) - \mathcal{D}_\alpha(w_x),$$

onde

$$D_\alpha(g) = \frac{1}{\alpha} \int_0^x \sinh\big(\alpha(x - s)\big) g(s)\, ds - \frac{1}{\alpha} \frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\alpha L)} \int_0^L \sinh\big(\alpha(L - s)\big) g(s)\, ds.$$

Para cada $(v, w) \in H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L)$ consideremos o sistema

$$\begin{cases} \rho_1 \lambda^2 \varphi - k(\varphi_x + \psi)_x + \bar{a}\lambda\varphi = \rho_1 \lambda\big(\bar{a} - a(x)\big)\mathcal{G}(v, w) + F_1 \\ \rho_2 \lambda^2 \psi - b\psi_{xx} + k\big(\varphi_x + \psi\big) = F_2 \\ \varphi(0) = \varphi(L) = \psi_x(0) = \psi_x(L) = 0, \end{cases} \tag{4.31}$$

onde

$$\mathcal{G}(v, w) := \frac{\rho_1 \lambda}{k} \mathcal{D}_\alpha\big((a(x) - \bar{a})v\big) - \frac{1}{k} \mathcal{D}_\alpha(F_1) - \mathcal{D}_\alpha(w_x).$$

Observe que (4.31) está relacionada com a equação espectral

$$(\lambda I - \bar{\mathcal{A}})W = \widetilde{\mathcal{F}}. \tag{4.32}$$

Como $\bar{\mathcal{A}}$ é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações então pelo Corolário 2.40 temos $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > 0\} \subset \rho(\mathcal{A})$ e $0 \in \rho(\bar{\mathcal{A}})$. Em particular para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ com $0 < Re\lambda \leq d_1$ temos que existe

$$(\varphi, \Phi, \psi, \Psi) \in H^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L) \times H_*^1(0, L), \text{ tal que } \psi_x \in H_0^1(0, L),$$

solução única de (4.32), porém, como $\lambda\varphi - f_1 = \Phi$ e $\lambda\psi - f_3 = \Psi$, podemos afirmar que para cada $(v, w) \in H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L)$ fixado, fica bem definida a aplicação

$$\begin{aligned} P : \big(H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L)\big) &\longrightarrow \big(H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L)\big) \\ \big(v, w\big) &\longmapsto P\big(v, w\big) = \big(\varphi, \psi\big), \end{aligned}$$

onde $\big(\varphi, \psi\big)$ é solução de (4.31). Consideremos $H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L)$ munido da norma

$$\|(v, w)\|_\lambda^2 := \int_0^L \left(\rho_1 |\lambda v|^2 + \rho_2 |\lambda w|^2 + b|w_x|^2 + k|v_x + w|^2\right) dx. \tag{4.33}$$

Observe que como $H_*^1(0, L)$ é um espaço de Hilbert pelo Lema 2.15, então $H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L)$ com a norma (4.33) é um espaço de Banach.

Proposição 4.5. *Se $\|a - \bar{a}\|_{L^2} < \epsilon$ para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, então P é uma contração.*

Demonstração: Sejam $(\varphi,\psi) := (\varphi^1-\varphi^2,\psi^1-\psi^2)$ e $(v,w) := (v^1-v^2,w^1-w^1)$, assim, a equação (4.31) nos dá

$$\rho_1\lambda^2\varphi - k(\varphi_x+\psi)_x + \bar{a}\lambda\varphi = \rho_1\lambda\big(\bar{a}-a(x)\big)\mathcal{G}(v,w), \tag{4.34}$$
$$\rho_2\lambda^2\psi - b\psi_{xx} + k\big(\varphi_x+\psi\big) = 0, \tag{4.35}$$
$$\varphi(0) = \varphi(L) = \psi_x(0) = \psi_x(L) = 0, \tag{4.36}$$

onde $\mathcal{G}(v,w) = \dfrac{\lambda}{k}\mathcal{D}_\alpha\big((a(x)-\bar{a})v\big) - \mathcal{D}_\alpha(w_x)$.

Multiplicando a equação (4.34) por $\overline{\lambda\varphi}$ e a equação (4.35) por $\overline{\lambda\psi}$, integrando por partes e usando (4.36) , temos

$$\rho_1\overline{\lambda}\int_0^L |\lambda\varphi|^2\,dx + k\overline{\lambda}\int_0^L (\varphi_x+\psi)\overline{\varphi}_x\,dx + \bar{a}\int_0^L |\lambda\varphi|^2\,dx = \rho_1\lambda\int_0^L \big(\bar{a}-a(x)\big)\mathcal{G}(v,w)\overline{\lambda\varphi}\,dx$$
$$\rho_2\overline{\lambda}\int_0^L |\lambda\psi|^2\,dx + b\overline{\lambda}\int_0^L |\psi_x|^2\,dx + k\int_0^L \big(\varphi_x+\psi\big)\overline{\lambda\psi}\,dx = 0.$$

Somando as duas equações anteriores, obtemos

$$\rho_1\overline{\lambda}\int_0^L |\lambda\varphi|^2\,dx + \rho_2\overline{\lambda}\int_0^L |\lambda\psi|^2\,dx + b\overline{\lambda}\int_0^L |\psi_x|^2\,dx + k\overline{\lambda}\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx$$
$$+\,\bar{a}\int_0^L |\lambda\varphi|^2\,dx = \rho_1\lambda\int_0^L \big(\bar{a}-a(x)\big)\mathcal{G}(v,w)\overline{\lambda\varphi}\,dx.$$

Tomando a parte real em ambos os lados da equação obtemos

$$Re\lambda\|(\varphi,\psi)\|_\lambda^2 + \bar{a}\int_0^L |\lambda\varphi|^2\,dx = Re\bigg\{\rho_1\lambda\int_0^L \big(a(x)-\bar{a}\big)\mathcal{G}(v,w)\overline{\lambda\varphi}\,dx\bigg\}. \tag{4.37}$$

Por outro lado, devido ao Lema 4.4 temos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Como $\rho(\mathcal{A})$ é um conjunto aberto, então existe r_1 tal que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| \le r_1$, tem-se que $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, ou seja, existe c_0 tal que $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \le c_0$.

Assim, suponha que $|\lambda| \ge r_1$,ou ainda,

$$\frac{1}{|\lambda|} \le \frac{1}{r_1}. \tag{4.38}$$

Multiplicando a equação (4.34) por $\overline{\varphi}$ e a equação (4.35) por $\overline{\psi}$ e integrando de 0 a L temos

$$\rho_1\int_0^L |\lambda\varphi|^2\,dx + \rho_2\int_0^L |\lambda\psi|^2\,dx + b\int_0^L |\psi_x|^2\,dx + k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2\,dx$$
$$= -\lambda\bar{a}\int_0^L |\varphi|^2\,dx + \rho_1\lambda\int_0^L \big(\bar{a}-a(x)\big)\mathcal{G}(v,w)\overline{\varphi}\,dx.$$

Das definições (4.38) e (4.33), segue

$$\begin{aligned}\|(\varphi,\psi)\|_\lambda^2 &\leq \frac{|\lambda|}{|\lambda|}\bar{a}|\lambda|\int_0^L |\varphi|^2\,dx + \rho_1|\lambda|\int_0^l |a(x)-\bar{a}||\mathcal{G}(v,w)\varphi|\,dx\\ &\leq \frac{\bar{a}}{r_1}\int_0^L |\lambda\varphi|^2\,dx + \rho_1|\lambda|\int_0^L |a(x)-\bar{a}||\mathcal{G}(v,w)\varphi|\,dx\\ &\leq c\bigg(\bar{a}\int_0^L |\lambda\varphi|^2\,dx + |\lambda|\int_0^L |a(x)-\bar{a}||\mathcal{G}(v,w)\varphi|\,dx\bigg),\end{aligned}$$

com $c = \max\left\{\frac{1}{r_1}, \rho_1\right\}$. Logo, para $\gamma_0 = \frac{1}{c} > 0$ tem-se

$$\gamma_0\|(\varphi,\psi)\|_\lambda^2 \leq \bar{a}\int_0^L |\lambda\varphi|^2\,dx + |\lambda|\int_0^L |a(x)-\bar{a}||\mathcal{G}(v,w)\varphi|\,dx, \tag{4.39}$$

somando (4.37) com (4.39)

$$\big(Re\lambda + \gamma_0\big)\|(\varphi,\psi)\|_\lambda^2 \leq \big(|\lambda| + |\lambda|^2\big)\bigg(\int_0^L |a(x)-\bar{a}||\mathcal{G}(v,w)\varphi|\,dx\bigg). \tag{4.40}$$

Do Lema 2.61, sabemos que

$$\begin{aligned}\big|\lambda\mathcal{G}(v,w)\big| &\leq \frac{|\lambda|^2}{k}\big|\mathcal{D}_\alpha\big((a(x)-\bar{a})v\big)\big| + |\lambda|\big|\mathcal{D}_\alpha(w_x)\big|\\ &\leq \sqrt{\rho_1}\frac{C_{\mathcal{D}}}{\sqrt{\rho_1}k}\|a-\bar{a}\|_{L^2}\|\lambda v\|_{L^2} + \sqrt{b}\frac{C_{\mathcal{D}}}{\sqrt{b}k}\|w_x\|_{L^2}\\ &\leq C(\sqrt{\rho_1}\|a-\bar{a}\|_{L^2}\|\lambda v\|_{L^2} + \sqrt{b}\|w_x\|_{L^2}),\end{aligned} \tag{4.41}$$

onde $C = C_{\mathcal{D}}\max\left\{\frac{1}{\sqrt{\rho_1}k}, \frac{1}{\sqrt{b}k}\right\}$. Se $\|a-\bar{a}\|_{L^2} \leq 1$, então

$$\big|\lambda\mathcal{G}(v,w)\big| \leq C\|(v,w)\|_\lambda.$$

Utilizando (4.40) e (4.41), obtemos

$$\begin{aligned}\gamma_0 &\leq \big(Re\lambda + \gamma_0\big)\|(\varphi,\psi)\|_\lambda^2 \leq \big(|\lambda| + |\lambda|^2\big)\bigg(\int_0^L |a(x)-\bar{a}||\mathcal{G}(v,w)\varphi|\,dx\bigg)\\ &\leq \int_0^L |a(x)-\bar{a}||\lambda\mathcal{G}(v,w)||\varphi|\,dx + \int_0^L |a(x)-\bar{a}||\lambda\mathcal{G}(v,w)||\lambda\varphi|\,dx\\ &\leq C\|(v,w)\|_\lambda\bigg(\int_0^L |a(x)-\bar{a}|(|\varphi| + |\lambda\varphi|)\,dx\bigg)\\ &\leq C\|(v,w)\|_\lambda\|a-\bar{a}\|_{L^2}(\|\varphi\|_{L^2} + \|\lambda\varphi\|_{L^2}).\end{aligned} \tag{4.42}$$

Por (4.38), temos que

$$
\begin{aligned}
\|\varphi\|_{L^2} &= \left(\int_0^L |\varphi|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\frac{1}{|\lambda|^2}\int_0^L |\lambda\varphi|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \frac{1}{r_1}\left(\int_0^L |\lambda\varphi|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{r_1}\|\lambda\varphi\|_{L^2}.
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

Sendo assim, podemos concluir de (4.42), (4.43) e de $0 \le Re\lambda \le d_1$ que

$$
\|(\varphi,\psi)\|_\lambda^2 \le \left[\frac{1}{\gamma_0\sqrt{\rho_1}}\left(\frac{1}{r_1}+1\right)C\right]\|a-\bar{a}\|_{L^2}\|(v,w)\|_\lambda\|(\varphi,\psi)\|_\lambda.
$$

Logo, se $\|a-\bar{a}\|_{L^2} < \min\left\{\dfrac{1}{\left[\frac{1}{\gamma_0\sqrt{\rho_1}}\left(\frac{1}{r_1}+1\right)C\right]}, \quad 1\right\}$, temos

$$
\|(\varphi,\psi)\|_\lambda \le d\|(v,w)\|_\lambda, \tag{4.44}
$$

onde

$$
d = \left[\frac{1}{\gamma_0\sqrt{\rho_1}}\left(\frac{1}{r_1}+1\right)C\right]\|a-\bar{a}\|_{L^2} < 1.
$$

Portanto, P é uma contração. ∎

Proposição 4.6. *Sob as mesmas hipóteses da Proposição 4.5 temos que se (φ,ψ) é ponto fixo de P, então (φ,ψ) é solução de (4.28)-(4.29).*

Demonstração: Considere

$$
\hat{\varphi} := \mathcal{G}(\varphi,\psi) = \frac{\lambda}{k}\mathcal{D}_\alpha\big((a(x)-\bar{a})\varphi\big) - \frac{1}{k}\mathcal{D}_\alpha(F_1) - \mathcal{D}_\alpha(\psi_x),
$$

como (φ,ψ) é ponto fixo de P, então é solução de (4.31), ou seja,

$$
\varphi_{xx} - \alpha^2\varphi = \frac{\lambda}{k}(a(x)-\bar{a})\hat{\varphi} - \frac{1}{k}F_1 - \psi_x. \tag{4.45}
$$

Além disso, tendo em vista o Lema 2.59 $\hat{\varphi}$ satisfaz

$$
\hat{\varphi}_{xx} - \alpha^2\hat{\varphi} = \frac{\lambda}{k}(a(x)-\bar{a})\varphi - \frac{1}{k}F_1 - \psi_x. \tag{4.46}
$$

Subtraindo (4.45) de (4.46), obtemos

$$
\begin{cases}
\widetilde{\Phi}_{xx} - \alpha^2\widetilde{\Phi} = \dfrac{\lambda}{k}\big(\bar{a}-a(x)\big)\widetilde{\Phi} \\
\widetilde{\Phi}(0) = \widetilde{\Phi}(L) = 0,
\end{cases}
\tag{4.47}
$$

com $\widetilde{\Phi} = \varphi - \hat{\varphi}$, e $\widetilde{\Phi} = \mathcal{D}_\alpha\bigg(\frac{\lambda}{k}\big(\bar{a} - a(x)\big)(\varphi - \hat{\varphi})\bigg)$. Pelo Lema 2.61 temos

$$|\widetilde{\Phi}| = \left|\mathcal{D}_\alpha\bigg(\frac{\lambda}{k}(a(x) - \bar{a})\varphi - \hat{\varphi}\bigg)\right| \leq \frac{C_4}{k}\|(a - \bar{a})\varphi - \hat{\varphi}\|_{L^1}.$$

Aplicando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, elevando ao quadrado ambos os lados e integrando de 0 a L, temos

$$\|\widetilde{\Phi}\|_{L^2} \leq \widetilde{C}\|a - \bar{a}\|_{L^2}\|\varphi - \hat{\varphi}\|_{L^2},$$

onde $\widetilde{C} = L\sqrt{L}C_4$.

Como $\widetilde{\Phi} = \varphi - \hat{\varphi}$ então $\|\widetilde{\Phi}\|_{L^2} = \|\varphi - \hat{\varphi}\|_{L^2}$, logo

$$\|\Phi\|_{L^2}(1 - \widetilde{C}\|a - \bar{a}\|_{L^2}) \leq 0.$$

Se $\|a - \bar{a}\|_{L^2} < \frac{1}{\widetilde{C}}$, então $\|\Phi\|_{L^2} = 0$, ou seja, $\varphi = \hat{\varphi}$. ■

Proposição 4.7. *Para todo* $\lambda \in \mathbb{C}$, *com* $0 \leq Re\lambda \leq d_1$, $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ *existe.*

Demonstração: Segue das proposições 4.5 e 3.2. ■

Resta mostrarmos que este operador é limitado, o que faremos a seguir.

Proposição 4.8. *O operador* $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ *é limitado para todo* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tal que* $0 \leq Re\lambda \leq d_1$.

Demonstração: Considere $W = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{F}$, onde $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{H}$. De (4.25) e (4.27) temos

$$W = (\varphi, \lambda\varphi - f_1, \psi, \lambda\psi - f_3) = (\varphi, \lambda\varphi, \psi, \lambda\psi) + (0, -f_1, 0, -f_3),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\|(\varphi, \lambda\varphi, \psi, \lambda\psi)\|_{\mathcal{H}} &= \|W - (0, -f_1, 0, -f_3)\|_{\mathcal{H}}\\ &\leq \|W\|_{\mathcal{H}} + \|(0, -f_1, 0, -f_3)\|_{\mathcal{H}}\\ &\leq \|W\|_{\mathcal{H}} + \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

No entanto,

$$\|(\varphi, \lambda\varphi, \psi, \lambda\psi)\|^2_{\mathcal{H}} = \rho_1\|\lambda\varphi\|^2_{L^2} + b\|\psi_x\|^2_{L^2} + k\|\varphi_x + \psi\|^2_{L^2} + \rho_2\|\lambda\psi\|^2_{L^2} = \|(\varphi, \psi)\|^2_\lambda.$$

Assim,

$$\|(\varphi, \psi)\|_\lambda \leq \|W\|_{\mathcal{H}} + \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}. \tag{4.48}$$

Por outro lado, seja $\widetilde{W}$ solução do problema $(\lambda I - \bar{\mathcal{A}})\widetilde{W} = \mathcal{F}$, ou seja, de

$$\widetilde{W} = (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Phi}, \widetilde{\psi}, \widetilde{\Psi}) = (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\lambda\varphi}, \widetilde{\psi}, \widetilde{\lambda\psi}) - (0, -f_1, 0 - f_3), \tag{4.49}$$

temos

$$
\begin{aligned}
\|W\|_{\mathcal{H}} - \|\widetilde{W}\|_{\mathcal{H}} &\leq \|W - \widetilde{W}\|_{\mathcal{H}} \\
&= \|(\varphi, \lambda\varphi, \psi, \lambda\psi) - (\widetilde{\varphi}, \lambda\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}, \lambda\psi)\|_{\mathcal{H}} \\
&= \|(\varphi, \psi) - (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})\|_{\lambda}.
\end{aligned}
$$

Como $P(0,0) = (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})$, $P(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi)$ e (4.44), então

$$
\begin{aligned}
\|W\|_{\mathcal{H}} - \|\widetilde{W}\|_{\mathcal{H}} &\leq \|P(\varphi, \psi) - P(0,0)\|_{\lambda} \\
&\leq d\|(\varphi, \psi)\|_{\lambda}.
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

Logo de (4.48) e (4.50) segue que

$$
\|W\|_{\mathcal{H}} - \|\widetilde{W}\|_{\mathcal{H}} \leq d\|W\|_{\mathcal{H}} + d\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}},
$$

ou seja,

$$
(1-d)\|W\|_{\mathcal{H}} \leq \|\widetilde{W}\|_{\mathcal{H}} + d\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}.
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\|W\|_{\mathcal{H}} &\leq \frac{c}{1-d}\|\widetilde{W}\|_{\mathcal{H}} + \frac{d}{1-d}\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq \bar{c}\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned}
\tag{4.51}
$$

onde $\bar{c} = \max\left\{\frac{c}{1-d}, \frac{d}{1-d}\right\}$. ■

Teorema 4.9. *Suponha que $\|a - \bar{a}\| < \epsilon$ para algum $\epsilon > 0$ e $\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$. Então sistema dado em (4.1)-(4.4) é exponencialmente estável.*

Demonstração: Segue de (4.21) e das Proposições 4.8 e 4.7 que

$$
\rho(\mathcal{A}) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda \geq 0\}
$$

e

$$
\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{H}} \leq M,
$$

onde $M = \max\{1, \bar{c}\}$. Portanto pelo Teorema 2.50, o problema (4.1)-(4.4) é exponencialmente estável. ■

5 CONCLUSÃO

Primeiramente, estudamos o sistema de Timoshenko com amortecimento constante na equação que modela a oscilação transversal. Obtivemos a existência e unicidade da solução através da teoria de semigrupos, em seguida usamos técnicas multiplicativas para mostrar que ocorre decaimento exponencial desde que se tenha a igualdade das velocidade das ondas. Porém, a maior contribuição desse trabalho está no último capítulo, pois não encontramos na literatura outro com a mesma proposta, embora seja uma complementação de [24]. Nele, estudamos o sistema de Timoshenko com um amortecimento indefinido atuado na equação que modela a oscilação transversal com condições de Dirichlet nulas para o deslocamento vertical e condições de Neumman nulas para o deslocamento angular. Como no primeiro caso, obtivemos a existência e unicidade da solução através da teoria de semigrupos e utilizamos o teorema do Ponto Fixo de Banach para mostrar que a solução decai exponencialmente, desde que $\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$ e exista $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\|a - \bar{a}\| < \epsilon$.

REFERÊNCIAS

[1] F. Alabau-Boussouira, *Asymptotic behavior for Timoshenko beams subject to a single non-linear feedback control*, NoDEA Nonlinear Diferential Equations Appl. 14 (2007), no. 5-6, 643-669.

[2] D. S. Almeida Júunior, J. E. Muñoz Rivera, M. L. Santos, *The stability number of the Timoshenko system with second sound*, J. Diferential Equations 253 (2012), no. 9, 2715-2733.

[3] Almeida Júnior D. S., Santos M. L. e Muñoz Rivera J. E., *Stability to weakly dissipative Timoshenko systems*, Mathematical Methods in the Applied Sciences (2013), 1965-1976.

[4] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, J. E. Muñoz Rivera, and R. Racke, *Energy decay for Timoshenko systems of memory type*, J. Diferential Equations 194 (2003), no. 1, 82-115.

[5] F. Ammar-Khodja, S. Kerbal, and A. Soufyane, *Stabilization of the nonuniform Timoshenko beam*, J. Math. Anal. Appl. 327 (2007), no. 1, 525-538.

[6] Boyce W. E. e DiPrima R.C., *Equações Diferenciais Elementares e problemas de Valores de Contorno*, John Wiley and Sons, Inc, 2001.

[7] Brézis H., *Análisis Funcional*, Teoría y Aplicaciones. Alianza Editorial,S.A., Madrid, 1984.

[8] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, F. A. Falcão Nascimento, I. Lasiecka, J. H. Rodrigues, *Uniform decay rates for the energy of Timoshenko system with the arbitrary speeds of propagation and localized nonlinear damping*, Z. Angew. Math. Phys. 65 (2014), 1189-1206.

[9] F. Dell'Oro and V. Pata, *On the stability of Timoshenko systems with Gurtin-Pipkin thermal law*, J. Diferential Equations 257 (2014), no. 2, 523-548.

[10] Engel K. e Nagel R., *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer, New York, NY, 2006.

[11] L. H. Fatori, R. N. Monteiro, J. E. Mu noz Rivera, *Energy decay to Timoshenko's system with thermoelasticity of type III*, Asymptot. Anal. 86 (2014), no. 3-4, 227-247.

[12] H. D. Fernandez Sare and R. Racke, *On the stability of damped Timoshenko systems: Cattaneo versus Fourier law*, Arch. Ration. Mech. Anal. 194 (2009), no. 1, 221-251.

[13] A. Guesmia and S. A. Messaoudi, *A general stability result in a Timoshenko system with infnite memory: a new approach*, Math. Methods Appl. Sci. 37 (2014), no. 3, 384-392.

[14] Kim JU, Renardy Y. *Boundary control of the Timoshenko beam*, SIAM Journal on Control and Optimization (1987), 25(6):1417-1429.

[15] Kreyszig E. , *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York, John Wiley, 1989.

[16] Lima P.R., *Sistema de Bresse Termoelástico Não-linear*, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015, Mestrado.

[17] Monteiro R. N., *Comportamento Assintótico para Sistemas de Bresse Dissipativos e Taxa Ótima*, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011, Mestrado.

[18] Pazy A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[19] Prüss J. , *On the spectrum of C_0-semigroups*. Trans. AMS **284** (1984), 847-857.

[20] Raposo CA, Ferreira J, Santos ML, Castro NNO, *Exponential stability for the Timoshenko beam with two weak dampings*, Applied Mathematics Letters(2005), 18:535-541.

[21] Rivera J. E. M., *Estabilização de Semigrupos e Aplicações*, Academia das Contas, 2008.

[22] Rivera J. E. M., *Introdução as Equações Diferenciais Parciais*, Laboratório Nacional de Computação Científica, 2004.

[23] J. E. Muñoz Rivera and R. Racke, *Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systemsglobal existence and exponential stability*, J. Math. Anal. Appl. 276 (2002), no. 1, 248-278.

[24] Rivera J. E. M., Racke R. *Timoshenko Systems with Indefinite Damping*, Journal of Mathematical Analysis and Applications (2008), 1068-1083.

[25] Shi D-H, Feng D-X, *Exponential decay of Timoshenko beam with locally distributed feedback*, Proceeding of the 99'IFACWorld Congress, Beijing. Vol F.

[26] A. Soufyane, *Exponential stability of the linearized nonuniform Timoshenko beam*, Nonlinear Anal. Real World Appl. 10 (2009), no. 2, 1016-1020.

[27] A. Soufyane, *Stabilisation de la poutre de Timoshenko*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 328 (1999), no. 8, 731-734.

[28] Timoshenko SP. *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*, Philosophical Magazine (1921), 41:744-746.

[29] Zheng S. *Nonlinear Evolutions Equations*, Chapman & Hall/CRC , 2004.