Universidade Estadual de Londrina

EIJI RENAN TAKAHASHI

SISTEMA DE BRESSE SEMILINEAR: EXISTÊNCIA GLOBAL E ESTABILIDADE

Londrina
2016

EIJI RENAN TAKAHASHI

SISTEMA DE BRESSE SEMILINEAR: EXISTÊNCIA GLOBAL E ESTABILIDADE

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Luci Harue Fatori

Londrina
2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Takahashi, Eiji Renan.
Sistema de Bresse semilinear: existência global e estabilidade /
Eiji Renan Takahashi. – Londrina, 2016.
72 f. : il.

Orientadora: Luci Harue Fatori.
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2016.

Inclui Bibliografia.

1. Análise matemática - Teses. 2. Equações diferenciais parciais - Teses. 3. Equações de evolução - Teses. 4. Estabilidade -Teses. I. Fatori, Luci Harue. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

EIJI RENAN TAKAHASHI

SISTEMA DE BRESSE SEMILINEAR: EXISTÊNCIA GLOBAL E ESTABILIDADE

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Prof[a]. Dr[a]. Luci Harue Fatori
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti
Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 17 de fevereiro de 2016.

Dedico este trabalho aos meus pais, Célia e Tamotsu, e a minha irmã Carolina.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me dar forças para a realização deste trabalho.

Aos meus pais, Célia Aparecida Takahashi e Tamotsu Takahashi, que nunca mediram esforços por mim. Minha irmã, Carolina Naemi Takahashi e a toda minha família, em especial aos meus tios Nelson, Edna e Reginaldo. Muito obrigado por me ajudarem nessa conquista.

A todos os meus amigos e colegas, que tanto me apoiaram e ajudaram nas difíceis etapas, em especial os de graduação Alisson, Dário, Sinop, Patrícia, Walmir e ao Filipe (in memorian). Os da pós-graduação Altair, Cleiton, Eduardo, Lucas, Pedro, Taís e ao Robson (in memorian).

Aos meus amigos e afilhados Fábio, Karen, Luis e Camila que, sem eles, certamente essa caminhada teria sido mais árdua.

A todos os meus professores da graduação e pós-graduação, em especial à minha orientadora e professora Luci Harue Fatori, pelo convívio, compreensão e sua orientação.

Aos membros da banca examinadora, professor Marcelo Moreira Cavalcanti e Marcio Antonio Jorge da Silva, pelas sugestões e tempo dedicados a este trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos que acreditaram e torceram por mim. Muito obrigado!

"Se enxerguei mais longe, foi porque me apoiei sobre os ombros de gigantes."
Isaac Newton

TAKAHASHI, Eiji Renan. **Sistema de Bresse semilinear:** existência global e estabilidade exponencial. 2016. 72 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

RESUMO

Neste trabalho consideramos um sistema de Bresse semilinear com dissipação do tipo friccional atuando em todas as três equações. Investigamos a existência de solução local e global. Na primeira parte obtemos o decaimento exponencial da solução. Na segunda parte obtemos dois tipos de decaimento uma polinomial e outra exponencial dependendo da não linearidade considerado no termo de dissipação.

Palavras-chave: Sistema de Bresse. Sistema semilinear. Existência e unicidade. Decaimento exponencial. Decaimento polinomial.

TAKAHASHI, Eiji Renan. **Semilinear Bresse system:** Global existence and exponential stability. 2016. 72 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

ABSTRACT

In this work, we consider a dissipative semilinear Bresse system with frictional damping acting on all three equations. We investigated the existence of local and global solution. In the first part, we obtain exponential decay of solution. In the second part, we obtain two types of decay rates, namely, polynomial and exponential stability, depending on the nonlinearity considered in the frictional damping term.

Keywords: Bresse System. Semi-linear system. Existence and uniqueness. Exponential decay. Polynomial decay.

SUMÁRIO

LISTA DAS PRINCIPAIS NOTAÇÕES

$D(A)$ domínio do operador A;

$\rho(A)$ conjunto resolvente do operador A;

$R(A)$ conjunto imagem do operador A.

$\hookrightarrow$ inclusão contínua;

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ dualidade;

$C(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ é contínua}\}$;

$C^1(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ é diferenciável e sua derivada é contínua}\}$;

$\mathcal{D}(\Omega) :=$ espaço das funções teste;

$L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ é mensurável e } \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\right\}$;

$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ é mensurável e } |u(x)| \leq K \text{ q.s. em } \Omega\}$;

$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}$;

$H_0^m(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^m(\Omega)}$;

$L^p(0,T;X) = \left\{u : (0,T) \to X \mid u \text{ é mensurável e } \int_0^T ||u(t)||_X^p dt < \infty\right\}$;

$L^\infty(0,T;X) = \{u : (0,T) \to X \mid u \text{ é mensurável e } ||u(t)||_X \leq K \text{ q.s. em } (0,T)\}$;

$C([0,T],X) = \{u : [0,T] \to X \mid u \text{ é contínua de } [0,T] \text{ em } X\}$;

$\mathcal{L}(X,Y) = \{T : X \to Y \mid T \text{ é linear e contínua }\}$;

$X' = \mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ dual de X;

$[L^p(\Omega)]' \cong L^q(\Omega),\ 1 \leq p < \infty,\ \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$;

$[H_0^m(\Omega)]' \cong H^{-m}(\Omega),\ m \in \mathbb{N}$;

$[L^p(0,T,X)]' \cong L^q(0,T,X'),\ 1 \leq p < \infty$;

$\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega),\mathbb{R})$;

$\mathcal{D}'(0,T;X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T),X)$;

$\to$ convergência forte;

$\rightharpoonup$ convergência fraca;

$\overset{*}{\rightharpoonup}$ convergência fraca estrela;

$||u||_{L^p}$ norma usual em $L^p(\Omega)$;

$W^{m,p}(\Omega)$ espaço Sobolev usual.

INTRODUÇÃO

O objeto de estudo neste trabalho é o sistema de Bresse, chamado assim devido ao engenheiro civil Jacques Antoine Charles Bresse (1822-1883), no qual consiste de um sistema de equações diferenciais parciais hiperbólicas que descreve as vibrações de uma viga arqueada fina. Mais especificamente, o sistema de Bresse linear é dada por três equações da forma

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) = 0 \quad &\text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) = 0 \quad &\text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = 0 \quad &\text{em } (0, L) \times (0, \infty), \end{aligned}$$

onde as funções φ, ψ e w descrevem, respectivamente, a oscilação vertical, o ângulo de cisalhamento e a oscilação longitudinal. Os coeficientes $\rho_1, \rho_2, k, k_0, b$ e l são constantes positivas relacionados com a composição do material, $k(\varphi_x + \psi + lw)$, $k_0(w_x - l\varphi)$ e $b\psi_x$ representam respectivamente a força de atrito, força axial e momento fletor.

O sistema de Bresse é conservativo, de modo que, para estudar questões relacionadas a estabilidade são necessários adicionar termos dissipativos. Existem vários trabalhos dedicados a análise matemática para o sistema de Bresse dissipativos. Destacamos, por exemplo, os seguintes termos dissipativos: dissipações friccionais, viscosas, viscoelásticas, térmicas e efeito de memória.

No contexto de termoelasticidade, podemos citar os trabalhos de Liu e Rao [13]; Fatori e Rivera [9] onde foram introduzidos duas e uma dissipação térmica, respectivamente, provando que o decaimento exponencial ocorre somente quando as velocidades de propagação das ondas são iguais, isto é

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b} \quad \text{e} \quad k = k_0.$$

Com relação dissipação friccional, podemos citar os trabalhos de [2], [8] e [17]. Em [22] os autores estudaram o sistema de Bresse com dissipação friccional indefinida. A hipótese de igualdade entre as velocidades de propagações das ondas foi utilizado para estabelecer a taxa de decaimento exponencial. Recentemente, em [1], os autores estabeleceram que $k = k_0$ é uma condição necessária e suficiente para estabelecer o decaimento exponencial para o caso em que ocorrem as dissipações friccionais na oscilação vertical e no ângulo de cisalhamento.

Todos os trabalhos acima mencionados são referentes a problemas lineares. No entanto, quando se trata de problema não lineares o cenário é diferente, ou seja, existe muita pouca referência. Dos trabalhos que temos conhecimento, podemos destacar os trabalho [6], [11] e [14].

Em [6] foi considerado o sistema de Bresse dado por

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + \alpha_1(x)g_1(\varphi_t) = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \tag{1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \alpha_2(x)g_2(\psi_t) = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \tag{2}$$

$$\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) + \alpha_3(x)g_3(w_t) = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \tag{3}$$

onde foram utilizados termos de amortecimento não lineares localizados, com as seguintes condições: g_i são contínuas, monótonas crescente e satisfazem

$$\alpha_i = \alpha_i(x) \in L^\infty(0, L)\ \alpha_i(x) \geq c > 0; g_i(s)s > 0 \text{ para } s \neq 0,$$

$$k_i s \leq g_i(s) \leq K_i s \text{ para } |s| > 1,$$

onde $K_i \geq k_i$ e c são constantes positivas. Neste caso, os autores obtiveram taxas de decaimento uniforme ótimas para a energia associada ao sistema sem que se imponha hipótese sobre o crescimento das não-linearidades na origem.

Já em [11] também utilizando termos dissipativos não lineares localizados porém com as g_i satisfazendo

$$g_i(s)s > 0\ (s \neq 0,)$$

$$K_1 \min\{|s|, |s|^p\} \leq g_i(s) \leq K_2 \max\left\{|s|, |s|^{1/p}\right\},\ p \geq 0.$$

Neste caso, os autores mostraram a estabilidade assintótica através do Método de Komornik.

Em [14] foram incorporados fontes externas e foi estudado a questão relacionada a existência de atrator global, ou seja, foi considerado o seguinte sistema dado em $(0, L) \times (0, \infty)$ por

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + f_1(\varphi, \psi, w) + \alpha_1(x)g_1(\varphi_t) = 0 \tag{4}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + f_2(\varphi, \psi, w) + \alpha_2(x)g_2(\psi_t) = 0 \tag{5}$$

$$\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) + f_3(\varphi, \psi, w) + \alpha_3(x)g_3(w_t) = 0 \tag{6}$$

Nesta dissertação, nosso foco será o comportamento assintótico da solução do sistema acima onde serão consideradas α_i constantes e com g_i satisfazendo hipóteses convenientes.

O conteúdo e a organização do presente trabalho está dividido da seguinte forma:

No Capítulo 1, serão apresentados algumas definições e resultados necessários para o desenvolvimento do trabalho. Neste capítulo, não faremos as demonstrações dos resultados enunciados porém deixaremos as referências indicadas.

No Capítulo 2, estudaremos a existência e estabilidade de solução global para o sistema de Bresse semilinear dados por (4)-(6). Mostraremos primeiramente que o problema possui uma solução local e posteriormente que esta solução pode ser estendida para uma solução global que decai exponencialmente.

No Capítulo 3, estudaremos o mesmo sistema porém desconsiderando os termos de forças externas, entretanto, com não linearidades dos termos dissipativos. Neste caso, mostraremos a existência de solução global e diferentes tipos de decaimento, mais precisamente, os decaimentos exponencial e o polinomial dependendo do caso considerado.

1 PRELIMINARES

Neste capítulo enunciaremos os resultados necessários para o nosso trabalho, cujas demonstrações podem ser encontradas nas referências citadas.

1.1 DISTRIBUIÇÕES

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência é denominado espaço das funções testes e será representado por $\mathcal{D}(\Omega)$.
Define-se distribuição sobre Ω a toda forma linear T sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínua no sentido da convergência definida sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial, o qual representa-se $\mathcal{D}'(\Omega)$. Neste espaço vetorial diz-se que uma sucessão $(T_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, quando a sequência numérica $(\langle T_\nu, \phi\rangle)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \phi\rangle$ em $\mathbb{R}$, para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
Considere uma distribuição T sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T, é a forma linear $D^\alpha T$ definida por

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi\rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Quando $\alpha \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, denotaremos $D^\alpha T$ como $\dfrac{d^\alpha T}{dx^\alpha}$. Verifica-se que $D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω, e que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) & \to & \mathcal{D}'(\Omega) \\ T & \mapsto & D^\alpha T \end{array}$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

1.2 OS ESPAÇOS $L^p(\Omega)$

Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$, tais que $|u|^p$ é integrável a Lebesgue sobre Ω, e por $L^\infty(\Omega)$ o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que existe uma constante c com $|u(x)| \le c$ quase sempre em Ω. Os espaços $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{L^p} := \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \le p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty} := \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c : |u(x)| \le c \text{ quase sempre em } \Omega\},$$

são espaços de Banach. Em particular, o espaço $L^2(\Omega)$, cuja norma provém do produto interno

$$(u, v) = \int_\Omega u(x) v(x)\, dx,$$

é um espaço de Hilbert.

1.3 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições.
O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} := \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}} := \|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} \text{ess} \, |D^\alpha u(x)|,$$

é um espaço de Banach e é denominado espaço de Sobolev. Para o caso particular $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, representado por $H^m(\Omega)$, com o produto interno dado por

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \ \forall \, u, \, v, \in H^m(\Omega),$$

e é denominado espaço de Sobolev de ordem m. Quando $m = 0$, $H^m(\Omega)$ identifica-se com $L^2(\Omega)$.

Define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Quando Ω é limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$, então a norma em $W_0^{m,p}(\Omega)$ dada por

$$\|u\|_{W_0^{m,p}} := \|u\|_{W_0^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

é equivalente à norma induzida por $W^{m,p}(\Omega)$.

1.4 Resultados auxiliares

Definição 1.1 (Imersão Contínua). *Sejam X e Y espaços de Hilbert, sendo X um subespaço de Y. Dizemos que X está continuamente imerso em Y, e denotaremos $X \hookrightarrow Y$, se existe uma constante positiva C tal que*

$$||u||_Y \leq ||u||_X, \quad \forall \, u \in X.$$

Além dos resultados acima, temos que

i) $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ e $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, para todo $1 \leq p < +\infty$;

ii) Se Ω é limitado e $1 \leq p < q \leq +\infty$, então $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$.

Proposição 1.2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Seja H um espaço vetorial munido do produto interno $(\cdot,\cdot)$. Então, dadas $u,\, v \in H$, temos que*

$$|(u,v)| \leq \|u\|_H \, \|v\|_H,$$

onde $\|\cdot\|_H^2 = (\cdot,\cdot)$.

Demonstração. Ver [10]. □

Proposição 1.3 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam $1 < p, q < \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e $a, b > 0$. Então,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Ver Teorema IV.6 de [3]. □

Proposição 1.4 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Suponhamos que Ω seja um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Então, para todo $1 \leq p < \infty$, existe uma constante c_p, tal que*

$$||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq c_p ||\nabla u||_{L^p(\Omega)}, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. Ver Corolário IX.19 de [3] □

Teorema 1.5. (Teorema da Representação de Riesz-Fréchet) *Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $(.,.)$ e norma $\|\cdot\|$. Dado $\varphi \in H'$, existe um único $f \in H$ tal que*

$$\langle \varphi, v\rangle_{H',H} = (f,v), \ \forall\, v \in H.$$

Além disso,

$$\|f\| = \|\varphi\|_{H'}.$$

Demonstração. Ver [5], Pág. 171, Teorema 4.10. □

Lema 1.6. (Lema de Gronwall) *Sejam $m \in L^1(a,b)$ tal que $m \geq 0$ q.s em (a,b) e seja $c \geq 0$. Consideremos $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua verificando*

$$\varphi(t) \leq c + \int_a^t m(\xi)\varphi(\xi)\, d\xi \quad \forall\, t \in [a,b].$$

Então

$$\varphi(t) \leq c e^{\int_a^t m(\xi)\, d\xi}, \quad \forall\, t \in [a,b].$$

Demonstração. Ver [21], Pág. 16, Corolário 1.5.1. □

Proposição 1.7 (Imersão de Sobolev)**.** *Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Então*

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\bar{\Omega}), \ se\ m > \frac{n}{2} + k.$$

Demonstração. Ver [15]. □

Proposição 1.8. *Seja* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, *tal que* $u_n \to u$ *em* $L^p_{loc}(\Omega)$, *então* $u_n \to u$ *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Demonstração. Ver [16]. □

1.5 Espaços Funcionais a Valores Vetoriais

Dados X um espaço de Banach, $T \in \mathbb{R}$ com $T > 0$. O espaço $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < +\infty$, consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[0,T]$ com imagem em X, ou seja as funções $u : (0,T) \to X$, tais que

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

O espaço $L^\infty(0,T;X)$ consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[0,T]$ com imagem em X, as funções $u : (a,b) \to X$ limitadas quase sempre em $(0,T)$. A norma neste espaço é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} := \sup\left\{c \geq 0; \|u(t)\|_X \leq c, q.s.\right\}.$$

O espaço $C^m([a,b];X)$, consiste de todas as funções contínuas $u : [a,b] \to X$ que possuem derivadas contínuas até a ordem m sobre $[0,T]$. A norma é dada por

$$\|u\|_{C^m([a,b],X)} := \sum_{i=0}^{m} \max_{t\in[a,b]} |u^{(i)}(t)|_X.$$

O espaço das distribuições sobre $(0,T)$ com imagem em X, será denotado por

$$\mathcal{D}'(0,T;X).$$

Logo, $\mathcal{D}'(0,T;X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T);X)$, ou seja, é o conjunto de todas as aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X.

Para $f \in \mathcal{D}'(0,T;X)$, sua derivada de ordem n no sentido das distribuições vetoriais é definida por

$$\left\langle \frac{d^n f}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1) \left\langle f, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(0,T). \tag{1.1}$$

Além disso, se f é derivável no sentido das distribuições vetoriais, então podemos enxergar $\frac{df}{dt}$ como um elemento de $\mathcal{D}'(0,T;X)$, valendo a relação (1.1).

Agora se $f \in L^p(0,T;X)$, então pode-se identificar f com uma distribuição vetorial (que aqui denotaremos por f), de modo que

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_0^T f(t)\varphi(t)\, dt, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Com isto, podemos dizer com um certo abuso de notação que

$$L^p(0,T;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T;X).$$

1.6 Topologia Fraca $\sigma(E, E')$ e Topologia Fraco Estrela $\sigma(E', E)$

Definição 1.9. *Seja E um espaço de Banach reflexivo e considere $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão sobre E. Dizemos que x_n converge fraco para x e denotamos $x_n \rightharpoonup x$ em E, quando $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, para todo $f \in E'$.*

Proposição 1.10. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E. Então se verifica:*

i) $x_n \rightharpoonup x$ em E, se, e somente se, $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall\, f \in E'$.

ii) Se $x_n \to x$ em E, então $x_n \rightharpoonup x$ em E.

iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E, então $||x_n||_E$ é limitada e $||x||_E \leq \liminf ||x_n||_E$.

iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E e $f_n \to f$ em E', então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração. Ver proposição III.5 em [3]. □

Definição 1.11. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência sobre E'. Dizemos que f_n converge fraco estrela para f e denotamos $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E', quando $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, para todo $x \in E$.*

Proposição 1.12. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E'. Então se verifica:*

i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E, se, e somente se, $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall\, x \in E$.

ii) Se $f_n \to f$ em E', então $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E'.

iii) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E', então $||f_n||_{E'}$ é limitada e $||f||_{E'} \leq \liminf ||f_n||_{E'}$.

iv) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E' e $x_n \to x$ em E, então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração. Ver proposição III.12 em [3]. □

Teorema 1.13. *Seja E um espaço de Banach reflexivo e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E. Então existem uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $x \in E$ tais que $x_{n_k} \rightharpoonup x$.*

Demonstração. Corolário III.27 em [3]. □

Teorema 1.14. *Seja E um espaço de Banach separável e seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E'. Então existem uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $f \in E'$ tais que $f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f$.*

Demonstração. Corolário III.26 em [3]. □

Lema 1.15 (Lax-Milgram)**.** *Seja H um espaço de Hilbert e $a : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear, para a qual, existem constantes positivas c_1 e c_2, tais que*

$$|a[u,v]| \leq c_1 \|u\|_H \|v\|_H \qquad e \qquad c_2 \|u\|_H^2 \leq a[u,u], \quad u,v \in H.$$

Seja $L : H \to \mathbb{R}$, um funcional linear e limitado em H. Então, existe um único $w \in H$ tal que

$$a[w,v] = L(v), \quad \forall\, v \in H.$$

Demonstração. Ver Corolário V8.16 de [3]. □

Dado um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$, no qual seus elementos são denotados por (t,x), $t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^N$, seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ uma função. Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

diremos que $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ satisfaz as condições de Carathéodory sobre Ω se:

(i) $f(t,x)$ é mensurável em t para cada x fixado;

(ii) $f(t,x)$ é contínua em x para quase todo t fixado;

(iii) para cada compacto $K \subset \Omega$, existe uma função real $m_K(t)$, integrável, tal que

$$\|f(t,x)\|_{\mathbb{R}^N} \leq m_K(t), \ \ \forall\, (t,x) \in K.$$

Teorema 1.16. (Teorema de Carathéodory) *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre Ω. Então existe uma solução $x = x(t)$ de (1.2) sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta,\ \beta > 0$.*

Demonstração. Ver [7], Pág. 43, Teorema 1.1. □

Teorema 1.17 (Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja $(u_v)_{v\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis a Lebesgue num aberto Ω, convergente quase sempre para uma função u. Se existir uma função $u_0 \in L^1(\Omega)$ tal que $|u_v| \leq u_0$ quase sempre em $\Omega, \forall\, v \in \mathbb{N}$ então u é integrável e tem-se*

$$\int_\Omega u = \lim_{v\to\infty} \int_\Omega u_v.$$

Demonstração. Ver [15]. □

Lema 1.18 (Regularidade Elítica)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de classe C^2 com fronteira Γ limitada. Seja $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Então, $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}$, onde c é uma constante que só depende de Ω. Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e $f \in H^m(\Omega)$ então

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \quad \textit{com} \quad \|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c\|f\|_{H^m(\Omega)}.$$

Em particular, se $m > \frac{n}{2}$ temos $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Se Ω é de classe C^∞ e $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, temos $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Ver [4]. □

Lema 1.19. *Seja $S : X \to X$ um operador linear e contínuo com inversa contínua. Seja $B \in \mathcal{L}(X)$ tal que*

$$\|B\| \leq \frac{1}{\|S^{-1}\|}$$

então $S + B$ é linear contínuo e inversível.

Demonstração. Ver Lema 2.12.1 de [20]. □

Teorema 1.20. *Seja X um espaço de Hilbert e $B : D(B) \subset X \to X$ um operador linear dissipativo.*
(a) Se $R(\lambda_0 I - B) = X$ para algum $\lambda_0 > 0$, então $R(\lambda I - B) = X$ para todo $\lambda > 0$;
(b) Se $R(I - B) = X$, então $\overline{D(B)} = X$.

Demonstração. Ver Teoremas 4.5 e 4.6 em [19]. □

Lema 1.21 (Lema de Nakao)**.** *Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função limitada e não negativa satisfazendo:*

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} [\phi(s)]^{1+\beta} \leq C_0[\phi(t) - \phi(t+1)]$$

para $t \geq 0$, onde $C_0 > 0$ e $\beta \geq 0$. Então:
(i) Se $\beta = 0$, existem $C_2, \delta > 0$ tais que $\phi(t) \leq C_2 e^{-\delta t}, \forall\, t \geq 0$.
(ii) Se $\beta > 0$, existe $C > 0$ tal que $\phi(t) \leq C(1+t)^{-1/\beta}, \forall\, t \geq 0$.

Demonstração. Ver apêndice de [18] □

1.7 SEMIGRUPO DE OPERADORES

Nesta seção, apresentamos a definição de semigrupo de classe C_0, algumas propriedades, bem como a caracterização dos geradores infinitesimais de um semigrupo. Para isto, considere X um espaço de Banach real ou complexo e por

$$\mathcal{L}(\mathrm{X}) = \{\mathrm{S} : \mathrm{X} \to \mathrm{X} : \mathrm{S} \text{ é linear e contínuo}\}$$

denotaremos o espaço dos operadores lineares contínuos de X em X com a norma usual

$$\|S\|_{\mathcal{L}(\mathrm{X})} = \sup_{x \in X} \left\{ \frac{\|Sx\|_X}{\|x\|_X} : x \neq 0 \right\}.$$

Definição 1.22. *Seja X um espaço de Banach real. Uma família $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados de X em X é chamada de semigrupo se satisfazem as propriedades*

(i) $S(0)w = w, \quad w \in X,$

(ii) $S(t+s)w = S(t)S(s)w = S(s)S(t)w, \quad s, t \geq 0, \quad w \in X.$

Definição 1.23. *Um semigrupo de operadores lineares $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é dito ser de classe C_0, ou de fortemente contínuo, se para todo $x \in X$ a função $t \longmapsto S(t)x$ é contínua.*

Definição 1.24. *Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 de operadores lineares em X. Dizemos $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo de contrações se $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ para todo $t \geq 0$.*

Definição 1.25. *Considere o operador $A : D(A) \to X$, dado por*

$$Au = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t}, \; u \in D(A),$$

onde

$$D(A) = \left\{ u \in X : \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \quad \text{existe em } X \right\}.$$

Dizemos que A é o gerador infinitesimal do semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ e $D(A)$ é o domínio de A.

Definição 1.26. *Seja A um operador linear definido em um espaço de Banach B, $A : D(A) \subset B \to B$. Se para todo $x, y \in D(A)$ e qualquer $\lambda > 0$,*

$$\|x - y\| \leq \|x - y + \lambda(Ax - Ay)\|,$$

então A é dito ser um operador acretivo.
Mais ainda, se A é um operador acretivo e densamente definito, e $I + A$ é sobrejetivo, isto é, $R(I + A) = B$, então A é dito ser operador acretivo maximal, em resumo, m-acretivo.

Lema 1.27. *Suponha que H é um espaço de Hilbert. Então, as condições necessárias e suficientes para A ser m-acretivo são:*
(i) $Re(Ax, x) \geq 0$ *para todo* $x \in D(A)$,
(ii) $R(I + A) = H$.

Demonstração. Ver Lema 2.2.3 de [23]. □

1.8 CARACTERIZAÇÃO DOS GERADORES DE SEMIGRUPOS DE CLASSE C_0

Nesta seção, apresentamos os teoremas de Hille-Yosida e Lummer-Phillips, os quais caracterizam geradores infinitesimais de semigrupos de classe C_0.

Definição 1.28. *Se A é um operador linear em X, não necessariamente limitado, o conjunto resolvente $\rho(A)$ de A é o conjunto de todos os números complexos λ, tais que, o operador $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ existe e é limitado em X. O operador $R(\lambda, A)$ é chamado de operador resolvente.*

Teorema 1.29 (Hille-Yosida)**.** *Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 se, e somente se*

(i) A é um operador fechado e $\overline{D(A)} = X$,

(ii) O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém o conjunto $\mathbb{R}^+$ e para todo $\lambda > 0$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração. Ver Teorema 3.1 em [19]. □

Definição 1.30. *Seja H um espaço de Hilbert. Dizemos que um operador $A : D(A) \subset H \to H$ é dissipativo se*

$$Re(Au, u)_H \leq 0, \forall\, u \in D(A).$$

Teorema 1.31 (Lummer-Phillips)**.** *Seja A um operador linear com domínio denso em um espaço de Hilbert H*

(i) Se A é dissipativo e existe λ tal que $Im(\lambda I - A) = H$, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0.

(ii) Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 sobre o espaço H, então $R(\lambda I - A) = H$ para todo $\lambda > 0$ e A é um operador dissipativo.

Demonstração. Ver Teorema 4.3 em [19]. □

Corolário 1.32. *Seja A um operador linear, dissipativo e com domínio denso. Se $0 \in \rho(A)$, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0.*

Demonstração. Ver Teorema 2.12.3 em [20]. □

1.9 PROBLEMAS SEMILINEARES

Dado o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u - Au = F(u), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.3}$$

onde A é um operador m-acretivo de um subconjunto $D(A)$ denso num espaço de Banach B em B e F é um operador não linear de B em B.

Definição 1.33 (solução forte). *A aplicação $u : [0,T] \to B$ é chamada solução forte (ou clássica) do problema (1.3) se u é contínua em $[0,T]$, continuamente diferenciável com $u(t) \in D(A)$ para $t \in (0,T)$ e (1.3) é satisfeita em $[0,T]$ quase sempre.*

Definição 1.34 (solução mild). *Uma aplicação $u \in C\left([0,T]\,,B\right)$ satisfazendo a equação integral*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau)F(\tau)d\tau,$$

é dita solução mild do problema de valor inicial (1.3) sobre $[0,T]$

Definição 1.35. *Suponha que F é um operador não linear de um espaço de Banach B em B. Dizemos que F satisfaz a condição de localmente Lipschitz se para toda constante positiva $M > 0$, existe uma constante positiva L_M dependendo de M tal que quando $u, v \in B$, $\|u\| \leq M$ e $\|v\| \leq M$ tivermos que*

$$\|F(u) - F(v)\| \leq L_M \|u - v\|.$$

Teorema 1.36. *Suponha que A é m-acretivo e F é um operador não linear de um espaço de Banach de B em B satisfazendo a condição de localmente Lipschitz. Então para todo $u_0 \in B$, existe uma constante positiva $T > 0$ dependendo de $\|u_0\|$ tal que o problema (1.3) em $[0,T]$ admite uma única solução mild local $u \in C\left([0,T], B\right)$ tal que*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau)F(u(\tau))d\tau, \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Além disso, se $u_0 \in D(A)$, então u é continuamente Lipschitz em $t \in [0,T]$. Se B é um espaço de Banach reflexivo, então u é uma solução forte.

Demonstração. Ver Teorema 2.5.4 de [23]. □

Teorema 1.37. *Assumindo as mesmas hipóteses do Teorema 1.36, a solução u pode ser estendida para uma solução mild maximal em $[0, T_{max})$ tal que uma das possibilidades ocorre:*
(i) $T_{max} = +\infty$, isto é, o problema admite uma solução mild global, ou
(ii) $T_{\max} < \infty$ e

$$\lim_{t \to T_{max}^-} \|U(t)\|_{\mathcal{H}} = +\infty, \tag{1.4}$$

isto é, a solução explode em um tempo finito T_{max}.

Demonstração. Ver Teorema 2.5.5 de [23]. □

2 SISTEMA DE BRESSE SEMILINEAR COM DISSIPAÇÃO FRICCIONAL

Neste capítulo, estudaremos a boa colocação e o comportamento assintótico de um modelo de Bresse semilinear com dissipação friccional dada pelo seguinte sistema de equações diferenciais

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + f_1(\varphi,\psi,w) + g_1(\varphi_t) = 0 \quad \text{em } (0,L)\times(0,\infty), \tag{2.1}$$
$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + f_2(\varphi,\psi,w) + g_2(\psi_t) = 0 \quad \text{em } (0,L)\times(0,\infty), \tag{2.2}$$
$$\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) + f_3(\varphi,\psi,w) + g_3(w_t) = 0 \quad \text{em } (0,L)\times(0,\infty), \tag{2.3}$$

com condições de fronteira

$$\varphi(0,t) = \varphi(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) = w(0,t) = w(L,t) = 0, \quad \forall\, t \geq 0 \tag{2.4}$$

e condições iniciais

$$\begin{aligned} \varphi(\cdot,0) &= \varphi_0(\cdot), \quad \varphi_t(\cdot,0) = \varphi_1(\cdot) \\ \psi(\cdot,0) &= \psi_0(\cdot), \quad \psi_t(\cdot,0) = \psi_1(\cdot) \\ w(\cdot,0) &= w_0(\cdot), \quad w_t(\cdot,0) = w_1(\cdot). \end{aligned} \tag{2.5}$$

As funções φ, ψ e w descrevem, respectivamente, a oscilação vertical, o ângulo de rotação da seção transversal e a oscilação longitudinal, os coeficientes $\rho_1, \rho_2, k, k_0, b$ e l são constantes positivas, as funções f_1, f_2 e f_3 representam os termos não lineares do sistema e g_1, g_2 e g_3 representam termos dissipativos não lineares satisfazendo com as seguintes hipóteses.

Hipótese 1
As funções f_i para $i = 1, 2$ e 3 são localmente Lipschitz em cada argumento, isto é, existe uma constante $\gamma_i \geq 1$ e funções contínuas $\sigma_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ tais que,

$$|f_i(s_1,r,t) - f_i(s_2,r,t)| \leq \sigma_i(|r|,|t|)(1 + |s_1|^{\gamma_i} + |s_2|^{\gamma_i})|s_1 - s_2|, \quad \forall\,(s_1,r,t),(s_2,r,t) \in \mathbb{R}^3,$$
$$|f_i(s,r_1,t) - f_i(s,r_2,t)| \leq \sigma_i(|s|,|t|)(1 + |r_1|^{\gamma_i} + |r_2|^{\gamma_i})|r_1 - r_2|, \quad \forall\,(s,r_1,t),(s,r_2,t) \in \mathbb{R}^3,$$
$$|f_i(s,r,t_1) - f_i(s,r,t_2)| \leq \sigma_i(|s|,|r|)(1 + |t_1|^{\gamma_i} + |t_2|^{\gamma_i})|t_1 - t_2|, \quad \forall\,(s,r,t_1),(s,r,t_2) \in \mathbb{R}^3.$$

Hipótese 2
As funções $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$; são funções contínuas, satisfazendo as seguintes condições:
(A_1) $\quad g_i(0) = 0$;
(A_2) $\quad |g_i(s) - g_i(r)| \leq \beta_i|s - r| \quad \forall\, s, r \in \mathbb{R}$, para alguma constate $\beta_i > 0$;
(A_3) Existe uma constante positiva α_i, tal que, $g_i(s)s \geq \alpha_i|s|^2$.

Hipótese 3
Existe uma aplicação $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s,\cdot,\cdot) = f_1(s,\cdot,\cdot), \quad \frac{\partial F}{\partial r}(\cdot,r,\cdot) = f_2(\cdot,r,\cdot), \quad \frac{\partial F}{\partial q}(\cdot,\cdot,q) = f_3(\cdot,\cdot,q), \tag{2.6}$$

e que para todo $(s, r, q) \in \mathbb{R}^3$ tem-se

$$0 \leq F(s,r,q) \leq f_1(s,r,q)s + f_2(s,r,q)r + f_3(s,r,q)q + \theta_1|s|^2 + \mu_1|r|^2 + \eta_1|q|^2, \tag{2.7}$$

onde θ_1, μ_1 e η_1 são constantes positivas tais que

$$\theta_1 + \mu_1 + \eta_1 < \frac{1}{4c_p^2 a_2},$$

onde a_2 será explicitado no Lema 2.1.

Este capítulo está dividido da seguinte forma. Na Seção 2.1, apresentaremos a formulação do semigrupo associado ao problema. Na Seção 2.2, mostraremos a existência e a unicidade de solução para o problema. Por fim na Seção 2.3, analisaremos a estabilidade exponencial do sistema.

2.1 Formulação do semigrupo

Nesta seção, iremos apresentar a formulação abstrata associada ao sistema de Bresse (2.1)-(2.5). Para isto, inicialmente consideremos o espaço de fase adequado.
Devido às condições de fronteira (2.4) consideremos o espaço de fase

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H_0^1(0,L) \times L^2(0,L),$$

munido do produto interno,

$$\begin{aligned} (U,U^*)_{\mathcal{H}} =& \rho_1(\Phi,\Phi^*) + \rho_2(\Psi,\Psi^*) + \rho_1(W,W^*) + b(\psi_x,\psi_x^*) \\ &+ k(\varphi_x + \psi + lw, \varphi_x^* + \psi^* + lw^*) + k_0(w_x - l\varphi, w_x^* - l\varphi^*), \end{aligned} \tag{2.8}$$

para todo

$$U = (\varphi,\Phi,\psi,\Psi,w,W), \quad U^* = (\varphi^*,\Phi^*,\psi^*,\Psi^*,w^*,W^*) \quad \text{em} \quad \mathcal{H}$$

e

$$(u,v) = \int_0^L u(x)v(x)dx,$$

representa o produto interno usual em $L^2(0,L)$.

Assumiremos, doravante, que $Ll \neq n\pi$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ de modo que (2.8)

seja de fato um produto interno. Maiores detalhes ver Observação 3.2 em [12].
A norma induzida pelo produto interno acima é dada por

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 =& \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_1\|W\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2 \\ &+ k\|\ \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2,\end{aligned} \tag{2.9}$$

onde $\|\cdot\|_{L^2}$ denota a norma usual em $L^2(0,L)$.

Agora, reescreveremos o sistema (2.1) - (2.5) como um problema de valor inicial. Denotemos por $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)^t$ onde $\Phi = \varphi_t, \Psi = \psi_t$ e $W = w_t$. Assim, podemos escrever o sistema (2.1) - (2.5) na seguinte forma matricial.

$$U_t = \begin{pmatrix} \varphi_t \\ \Phi_t \\ \psi_t \\ \Psi_t \\ w_t \\ W_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw)_x + \frac{k_0}{\rho_1}l(w_x - l\varphi) - \frac{1}{\rho_1}f_1(\varphi,\psi,w) - \frac{g_1(\Phi)}{\rho_1} \\ \Psi \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + lw) - \frac{1}{\rho_2}f_2(\varphi,\psi,w) - \frac{g_2(\Psi)}{\rho_2} \\ W \\ \frac{k_0}{\rho_1}(w_x - l\varphi)_x - \frac{k}{\rho_1}l(\varphi_x + \psi + lw) - \frac{1}{\rho_1}f_3(\varphi,\psi,w) - \frac{g_3(W)}{\rho_1} \end{pmatrix},$$

ou ainda,

$$U_t = AU + \mathcal{F}(U),$$

onde $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é o operador linear dado por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1}\partial_x^2 - \frac{k_0 l^2}{\rho_1}I & 0 & \frac{k}{\rho_1}\partial_x & 0 & \frac{(k+k_0)l}{\rho_1}\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ -\frac{k}{\rho_2}\partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{k}{\rho_2}I & 0 & -\frac{kl}{\rho_2}I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{(k+k_0)l}{\rho_1}\partial_x & 0 & -\frac{kl}{\rho_1}I & 0 & \frac{k_0}{\rho_1}\partial_x^2 - \frac{kl^2}{\rho_1}I & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

cujo domínio é dado por

$$D(A) = \left[(H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)) \times H_0^1(0,L)\right]^3,$$

e $\mathcal{F}:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ é a aplicação não linear definida por

$$\mathcal{F}(U)=\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\rho_1}\Big(f_1(\varphi,\psi,w)+g_1(\Phi)\Big) \\ 0 \\ -\frac{1}{\rho_2}\Big(f_2(\varphi,\psi,w)+g_2(\Psi)\Big) \\ 0 \\ -\frac{1}{\rho_1}\Big(f_3(\varphi,\psi,w)+g_3(W)\Big) \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

onde por P^t denotaremos o transposto da matriz P. Com estas notações, o problema (2.1) - (2.5) pode ser reescrito da forma

$$\begin{cases} U_t = AU+\mathcal{F}(U), \\ U(0)=U_0. \end{cases} \tag{2.12}$$

com $U_0=(\varphi_0,\varphi_1,\psi_0,\psi_1,w_0,w_1)^t$.

Observação. De acordo com a Seção 1.2, em $H_0^1(0,L)$ a norma é dada por

$$\|u\|_{H_0^1}=\|u_x\|_{L^2},$$

o qual é equivalente à norma induzida por $H^1(0,L)$.

Denotaremos por $|\cdot|$ a norma usual em $\mathcal{H}$, ou seja,

$$\begin{aligned} |U|_{\mathcal{H}}^2 &= \|\Phi\|_{L^2}^2+\|\Psi\|_{L^2}^2+\|W\|_{L^2}^2+\|\varphi\|_{H_0^1}^2+\|\psi\|_{H_0^1}^2+\|w\|_{H_0^1}^2 \\ &= \|\Phi\|_{L^2}^2+\|\Psi\|_{L^2}^2+\|W\|_{L^2}^2+\|\varphi_x\|_{L^2}^2+\|\psi_x\|_{L^2}^2+\|w_x\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Assim, temos:

Lema 2.1. *A norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ definida pelo produto interno (2.8) e a norma $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ usual são equivalentes, desde que $l<\frac{1}{2c_p}$, ou seja, existem constantes a_1,a_2 tais que,*

$$k\|\ \varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2+k_0\|w_x-l\varphi\|_{L^2}^2+b\|\psi_x\|_{L^2}^2\le a_1\left(\|\varphi\|_{H_0^1}^2+\|\psi\|_{H_0^1}^2+\|w\|_{H_0^1}^2\right) \tag{2.13}$$

e

$$\|\varphi_x\|_{L^2}^2+\|\psi_x\|_{L^2}^2+\|w_x\|_{L^2}^2\le a_2\Big(k\|\ \varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2+k_0\|w_x-l\varphi\|_{L^2}^2+b\|\psi_x\|_{L^2}^2\Big). \tag{2.14}$$

Demonstração: Note que, utilizando a Desigualdade Triangular obtemos

$$
\begin{aligned}
k\| \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 &\leq 2k\| \varphi_x + \psi\|_{L^2}^2 + 2kl^2\| w\|_{L^2}^2 \\
&\leq 2k\left(2\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + 2\|\psi\|_{L^2}^2\right) + 2kl^2\|w\|_{L^2}^2 \\
&= 4k\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + 4k\|\psi\|_{L^2}^2 + 2kl^2\|w\|_{L^2}^2
\end{aligned}
$$

e

$$
k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 \leq 2k_0\|w_x\|_{L^2}^2 + 2k_0l^2\|\varphi\|_{L^2}^2.
$$

Somando membro a membro as inequações acima e usando a Desigualdade de Poincaré, temos,

$$
\begin{aligned}
k\| \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 \quad &\leq \quad 4k\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + 4k\|\psi\|_{L^2}^2 + 2kl^2\|w\|_{L^2}^2 \\
&\quad\;\; +2k_0\|w_x\|_{L^2}^2 + 2k_0l^2\|\varphi\|_{L^2}^2 \\
&\leq \quad 4k\|\varphi\|_{H_0^1}^2 + 4kc_p^2\|\psi_x\|_{L^2}^2 + 2kl^2c_p^2\|w_x\|_{L^2}^2 \\
&\quad\;\; +2k_0\|w\|_{H_0^1}^2 + 2k_0l^2c_p^2\|\varphi_x\|_{L^2}^2,
\end{aligned}
$$

onde c_p representa a constante de Poincaré.
Somando o termo $b\|\psi_x\|_{L^2}^2$ em ambos os lados da desigualdade acima, temos

$$
\begin{aligned}
&k\| \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2 \\
&\qquad \leq \left(4k + 2k_0l^2c_p^2\right)\|\varphi\|_{H_0^1}^2 + \left(4kc_p^2 + b\right)\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \left(2kl^2c_p^2 + 2k_0\right)\|w\|_{H_0^1}^2 \\
&\qquad \leq a_1\left(\|\varphi\|_{H_0^1}^2 + \|\psi\|_{H_0^1}^2 + \|w\|_{H_0^1}^2\right),
\end{aligned}
$$

onde $a_1 = \max\left\{\left(4k + 2k_0l^2c_p^2\right), \left(4kc_p^2 + b\right), \left(2kl^2c_p^2 + 2k_0\right)\right\} > 0$. O que prova (2.13).

Resta mostrar a desigualdade (2.14). Observe que, usando as desigualdades Triangular e de Poincaré, temos

$$
\begin{aligned}
\|\varphi_x\|_{L^2}^2 &= \| \varphi_x + \psi + lw - (\psi + lw)\|_{L^2}^2 \\
&\leq 2\| \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + 2\|\psi + lw\|_{L^2}^2 \\
&\leq 2\| \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + 4\|\psi\|_{L^2}^2 + 4l^2\|w\|_{L^2}^2 \\
&\leq 2\| \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + 4c_p^2\|\psi_x\|_{L^2}^2 + 4l^2c_p^2\|w_x\|_{L^2}^2
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\|w_x\|_{L^2}^2 &= \|w_x - l\varphi + l\varphi\|_{L^2}^2 \\
&\leq 2\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + 2l^2\|\varphi\|_{L^2}^2 \\
&\leq 2\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + 2l^2c_p^2\|\varphi_x\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

Somando as duas desigualdades acima, membro a membro, obtemos,

$$\begin{aligned}\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|w_x\|_{L^2}^2 \leq 2\| \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + 4c_p^2\|\psi_x\|_{L^2}^2 + 4l^2c_p^2\|w_x\|_{L^2}^2 \\ +2\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + 2l^2c_p^2\|\varphi_x\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Além disso, somando o termo $\|\psi_x\|_{L^2}^2$ em ambos os lados da desigualdade acima, temos,

$$\begin{aligned}\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|w_x\|_{L^2}^2 + \|\psi_x\|_{L^2}^2 \leq 2\| \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + \left(4c_p^2 + 1\right)\|\psi_x\|_{L^2}^2 + 4l^2c_p^2\|w_x\|_{L^2}^2 \\ +2\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + 2l^2c_p^2\|\varphi_x\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

donde, temos que,

$$\begin{aligned}\left(1 - 2l^2c_p^2\right)\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \left(1 - 4l^2c_p^2\right)\|w_x\|_{L^2}^2 + \|\psi_x\|_{L^2}^2 \leq & 2\| \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + \left(4c_p^2 + 1\right)\|\psi_x\|_{L^2}^2 \\ & + 2\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Da hipótese, $l < \frac{1}{2c_p}$, segue que $1 - 4l^2c_p^2 > 0$ e como

$$0 < 1 - 4l^2c_p^2 < 1 - 2l^2c_p^2,$$

então tomando $m = 1 - 4l^2c_p^2$ segue de (2.15) que

$$\begin{aligned}m\Big(\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|w_x\|_{L^2}^2 + \|\psi_x\|_{L^2}^2\Big) \leq & \frac{2k}{k}\| \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + \frac{\left(4c_p^2 + 1\right)b}{b}\|\psi_x\|_{L^2}^2 \\ & + \frac{2k_0}{k_0}\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|w_x\|_{L^2}^2 + \|\psi_x\|_{L^2}^2 \leq & \frac{2k}{km}\| \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + \frac{\left(4c_p^2 + 1\right)b}{bm}\|\psi_x\|_{L^2}^2 \\ & + \frac{2k_0}{k_0 m}\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2, \\ \leq & a_2\left(k\| \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2\right),\end{aligned}$$

onde $a_2 = \max\left\{\frac{2}{km}, \frac{\left(4c_p^2+1\right)}{bm}, \frac{2}{k_0 m}\right\} > 0$, mostrando assim a desigualdade (2.14).
Portanto, as normas $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ e $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ são equivalentes. $\square$

2.2 Existência e Unicidade

Nesta seção, usando a teoria de semigrupos, mostraremos que o problema (2.12) admite uma única solução. Com isso, concluiremos o mesmo para o problema (2.1) - (2.5). Primeiramente, iremos mostrar que o operador A definido em (2.10) é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações em $\mathcal{H}$.

Teorema 2.2. *O operador A definido em (2.10), é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 $S(t)$ sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.*

Demonstração: Do Corolário 1.32, devemos mostrar que o operador A satisfaz as seguintes condições:
(i) A é dissipativo em $\mathcal{H}$,
(ii) $0 \in \rho(A)$, onde $\rho(A)$ é o conjunto resolvente de A,
(iii) $D(A)$ é denso em $\mathcal{H}$.

Prova de (i).
Note que para todo $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)^t \in D(A)$ temos

$$AU = \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw)_x + \frac{k_0}{\rho_1} l(w_x - l\varphi) \\ \Psi \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + lw) \\ W \\ \frac{k_0}{\rho_1}(w_x - l\varphi)_x - \frac{k}{\rho_1} l(\varphi_x + \psi + lw) \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}(AU, U)_{\mathcal{H}} = & \underbrace{k((\varphi_x + \psi + lw)_x, \Phi)} + k_0 l(w_x - l\varphi, \Phi) + \underbrace{b(\psi_{xx}, \Psi)} \\ & - k(\varphi_x + \psi + lw, \Psi) + \underbrace{k_0((w_x - l\varphi)_x, W)} - kl(\varphi_x + \psi + lw, W) \\ & + b(\Psi_x, \psi_x) + k(\Phi_x + \Psi + lW, \varphi_x + \psi + lw) + k_0(W_x - l\Phi, w_x - l\varphi).\end{aligned}$$

Fazendo integração por partes nos termos destacados e notando que os termos de fronteira se anulam, temos que

$$\begin{aligned}(AU, U)_{\mathcal{H}} = & - k(\varphi_x + \psi + lw, \Phi_x) + k_0 l(w_x - l\varphi, \Phi) - b(\psi_x, \Psi_x) \\ & - k(\varphi_x + \psi + lw, \Psi) - k_0(w_x - l\varphi, W_x) - kl(\varphi_x + \psi + lw, W) \\ & + b(\Psi_x, \psi_x) + k(\Phi_x + \Psi + lW, \varphi_x + \psi + lw) + k_0(W_x - l\Phi, w_x - l\varphi).\end{aligned}$$

Rearranjando os termos, tem-se

$$\begin{aligned}(AU, U)_{\mathcal{H}} = & - k(\varphi_x + \psi + lw, \Phi_x + \Psi + lW) - k_0(w_x - l\varphi, W_x - l\Phi) - b(\psi_x, \Psi_x) \\ & + k(\Phi_x + \Psi + lW, \varphi_x + \psi + lw) + k_0(W_x - l\Phi, w_x - l\varphi) + b(\Psi_x, \psi_x) = 0,\end{aligned}$$

ou seja,

$$Re(AU, U)_{\mathcal{H}} = (AU, U)_{\mathcal{H}} = 0. \tag{2.16}$$

Portanto, o operador A é dissipativo de acordo com a Definição 1.30.

Prova de (ii).
Devemos mostrar que A é invertível e que sua inversa $A^{-1}:\mathcal{H}\to D(A)$ é limitada.

• A é invertível.
De fato, dado $J=(j_1,j_2,j_3,j_4,j_5,j_6)\in\mathcal{H}$, queremos mostrar que existe um único $U=(\varphi,\Phi,\psi,\Psi,w,W)^t\in D(A)$ tal que $AU=J^t$, ou seja,

$$AU=\begin{pmatrix}\Phi\\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x+\psi+lw)_x+\frac{k_0}{\rho_1}l(w_x-l\varphi)\\ \Psi\\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}-\frac{k}{\rho_2}(\varphi_x+\psi+lw)\\ W\\ \frac{k_0}{\rho_1}(w_x-l\varphi)_x-\frac{k}{\rho_1}l(\varphi_x+\psi+lw)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}j_1\\ j_2\\ j_3\\ j_4\\ j_5\\ j_6\end{pmatrix}=J^t.$$

Desta forma, consideramos

$$\Phi=j_1\in H_0^1(0,L),\quad \Psi=j_3\in H_0^1(0,L)\ \text{ e }\ W=j_5\in H_0^1(0,L). \tag{2.17}$$

Resta mostrar que existem φ,ψ e w em $H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)$ satisfazendo,

$$k(\varphi_x+\psi+lw)_x+k_0l(w_x-l\varphi)=\rho_1j_2=-h_1, \tag{2.18}$$
$$b\psi_{xx}-k(\varphi_x+\psi+lw)=\rho_2j_4=-h_2, \tag{2.19}$$
$$k_0(w_x-l\varphi)_x-kl(\varphi_x+\psi+lw)=\rho_1j_6=-h_3. \tag{2.20}$$

Agora vamos analisar a equação variacional relacionada ao sistema (2.18)-(2.20).
Consideremos $\mathcal{V}=H_0^1(0,L)\times H_0^1(0,L)\times H_0^1(0,L)$ o espaço de Hilbert munido da norma

$$|(\varphi,\psi,w)|_{\mathcal{V}}=\|\varphi\|_{H_0^1}+\|\psi\|_{H_0^1}+\|w\|_{H_0^1}=\|\varphi_x\|_{L^2}+\|\psi_x\|_{L^2}+\|w_x\|_{L^2}. \tag{2.21}$$

Afirmamos que existe uma única terna $(\varphi,\psi,w)\in\mathcal{V}$ satisfazendo a equação variacional

$$\begin{aligned}k\int_0^L(\varphi_x+\psi+lw)(\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}+l\tilde{w})dx+b\int_0^L\psi_x\tilde{\psi}_xdx\ +\ k_0\int_0^L(w_x-l\varphi)(\tilde{w}_x-l\tilde{\varphi})dx\\ =\int_0^L(h_1\tilde{\varphi}+h_2\tilde{\psi}+h_3\tilde{w})dx,\end{aligned}$$

para toda $(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w})\in\mathcal{V}$.

De fato, considere agora a seguinte forma bilinear $a[\cdot,\cdot]:\mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{R}$ dada por,

$$
\begin{aligned}
a[(\varphi,\psi,w),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w})] &= k\int_0^L(\varphi_x+\psi+lw)(\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}+l\tilde{w})dx+\ b\int_0^L\psi_x\tilde{\psi}_x dx\\
&+\ k_0\int_0^L(w_x-l\varphi)(\tilde{w}_x-l\tilde{\varphi})dx\\
&=k((\varphi_x+\psi+lw),(\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}+l\tilde{w}))+b(\psi_x,\tilde{\psi}_x)\\
&+k_0((w_x-l\varphi),(\tilde{w}_x-l\tilde{\varphi}))
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

e seja $\Lambda:\mathcal{V}\to\mathbb{R}$ o funcional linear dado por,

$$
\Lambda((\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w}))=\int_0^L(h_1\tilde{\varphi}+h_2\tilde{\psi}+h_3\tilde{w})dx. \tag{2.23}
$$

Agora, iremos mostrar que a e Λ satisfazem as hipóteses do Lema de Lax-Milgram.

(a) **$a[\cdot,\cdot]$ é contínua**.
De fato, pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz e Triangular temos

$$
\begin{aligned}
&|a[(\varphi,\psi,w),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w})]|\\
&\quad\le k\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}\|\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}+l\tilde{w}\|_{L^2}+b\|\psi_x\|_{L^2}\|\tilde{\psi}_x\|_{L^2}\\
&\qquad+k_0\|w_x-l\varphi\|_{L^2}\|\tilde{w}_x-l\tilde{\varphi}\|_{L^2}\\
&\quad\le k(\|\varphi_x\|_{L^2}+\|\psi\|_{L^2}+\|lw\|_{L^2})(\|\tilde{\varphi}_x\|_{L^2}+\|\tilde{\psi}\|_{L^2}+\|l\tilde{w}\|_{L^2})\\
&\qquad+b\|\psi_x\|_{L^2}\|\tilde{\psi}_x\|_{L^2}+k_0(\|w_x\|_{L^2}+\|l\varphi\|_{L^2})(\|\tilde{w}_x\|_{L^2}+\|l\tilde{\varphi}\|_{L^2})\\
&\quad=k(\|\varphi_x\|_{L^2}\|\tilde{\varphi}_x\|_{L^2}+\|\varphi_x\|_{L^2}\|\tilde{\psi}\|_{L^2}+l\|\varphi_x\|_{L^2}\|\tilde{w}\|_{L^2}+\|\psi\|_{L^2}\|\tilde{\varphi}_x\|_{L^2}\\
&\qquad+\|\psi\|_{L^2}\|\tilde{\psi}\|_{L^2}+l\|\psi\|_{L^2}\|\tilde{w}\|_{L^2}+l\|w\|_{L^2}\|\tilde{\varphi}_x\|_{L^2}+l\|w\|_{L^2}\|\tilde{\psi}\|_{L^2}\\
&\qquad+l^2\|w\|_{L^2}\|\tilde{w}\|_{L^2})+b\|\psi_x\|_{L^2}\|\tilde{\psi}_x\|_{L^2}\\
&\qquad+k_0(\|w_x\|_{L^2}\|\tilde{w}_x\|_{L^2}+l\|w_x\|_{L^2}\|\tilde{\varphi}\|_{L^2}+l\|\varphi\|_{L^2}\|\tilde{w}_x\|_{L^2}+l^2\|\varphi\|_{L^2}\|\tilde{\varphi}\|_{L^2}).
\end{aligned}
$$

Usando a Desigualdade de Poincaré, temos que

$$
\begin{aligned}
&|a[(\varphi,\psi,w),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w})]|\\
&\le c(\|\varphi_x\|_{L^2}\|\tilde{\varphi}_x\|_{L^2}+\|\varphi_x\|_{L^2}\|\tilde{\psi}_x\|_{L^2}+\|\varphi_x\|_{L^2}\|\tilde{w}_x\|_{L^2}+\|\psi_x\|_{L^2}\|\tilde{\varphi}_x\|_{L^2}\\
&\quad+\|\psi_x\|_{L^2}\|\tilde{\psi}_x\|_{L^2}+\|\psi_x\|_{L^2}\|\tilde{w}_x\|_{L^2}+\|w_x\|_{L^2}\|\tilde{\varphi}_x\|_{L^2}+\|w_x\|_{L^2}\|\tilde{\psi}_x\|_{L^2}\\
&\quad+\|w_x\|_{L^2}\|\tilde{w}_x\|_{L^2})\\
&=c(\|\varphi_x\|_{L^2}+\|\psi_x\|_{L^2}+\|w_x\|_{L^2})(\|\tilde{\varphi}_x\|+_{L^2}\|\tilde{\psi}_x\|_{L^2}+\|\tilde{w}_x\|_{L^2})\\
&=c|(\varphi,\psi,w)|_{\mathcal{V}}|(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w})|_{\mathcal{V}},
\end{aligned}
$$

onde $c=c(l,c_p,k_0,k,b)>0$.

Logo,

$$|a[(\varphi,\psi,w),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w})]| \leq c|(\varphi,\psi,w)|_{\mathcal{V}}|(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w})|_{\mathcal{V}},$$

para todo $(\varphi,\psi,w),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w})$ em $\mathcal{V}$, ou seja, a é limitada.

(b) **$a[\cdot,\cdot]$ é coerciva**.

Observe que, da Desigualdade Triangular

$$\begin{aligned}|(\varphi,\psi,w)|_{\mathcal{V}} &= \|\varphi_x\|_{L^2} + \|\psi_x\|_{L^2} + \|w_x\|_{L^2}\\ &\leq \|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2} + \|\psi+lw\|_{L^2} + \|\psi_x\|_{L^2} + \|w_x - l\varphi\|_{L^2} + \|l\varphi\|_{L^2}\\ &\leq \|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2} + l\|w\|_{L^2} + \|\psi_x\|_{L^2} + \|w_x - l\varphi\|_{L^2} + l\|\varphi\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Poincaré segue que

$$\begin{aligned}&|(\varphi,\psi,w)|_{\mathcal{V}}\\ &\leq \|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2} + (c_p+1)\|\psi_x\|_{L^2} + lc_p\|w_x\|_{L^2} + \|w_x - l\varphi\|_{L^2} + lc_p\|\varphi_x\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}&(1-lc_p)\|\varphi_x\|_{L^2} + \|\psi_x\|_{L^2} + (1-lc_p)\|w_x\|_{L^2}\\ &\qquad\leq \|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2} + (c_p+1)\|\psi_x\|_{L^2} + \|w_x - l\varphi\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Tomando $c = 1 - lc_p > 0$, pois $l < \frac{1}{2c_{p.}}$

$$\begin{aligned}&c(\|\varphi_x\|_{L^2} + \|\psi_x\|_{L^2} + \|w_x\|_{L^2})\\ &\quad\leq \|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2} + (c_p+1)\|\psi_x\|_{L^2} + \|w_x - l\varphi\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}&\|\varphi_x\|_{L^2} + \|\psi_x\|_{L^2} + \|w_x\|_{L^2}\\ &\leq \frac{1}{c}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2} + \frac{(c_p+1)}{c}\|\psi_x\|_{L^2} + \frac{1}{c}\|w_x - l\varphi\|_{L^2}\\ &= \frac{1}{ck}k\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2} + \frac{(c_p+1)}{cb}b\|\psi_x\|_{L^2} + \frac{1}{ck_0}k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Considerando $\hat{c}_1 = \text{máx}\left\{\frac{1}{ck}, \frac{(c_p+1)}{cb}, \frac{1}{ck_0}\right\}$, obtemos

$$\|\varphi_x\|_{L^2} + \|\psi_x\|_{L^2} + \|w_x\|_{L^2} \leq \hat{c}_1\Big(k\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2} + b\|\psi_x\|_{L^2} + k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}\Big). \quad (2.24)$$

Elevando ao quadrado ambos os termos de (2.24), temos

$$
\begin{aligned}
|(\varphi,\psi,w)|_{\mathcal{V}}^2 &= (\|\varphi_x\|_{L^2}+\|\psi_x\|_{L^2}+\|w_x\|_{L^2})^2\\
&\leq \hat{c}_1^2(k\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}+b\|\psi_x\|_{L^2}+k_0\|w_x-l\varphi\|_{L^2})^2\\
&\leq \hat{c}_1^2(4k^2\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2+4b^2\|\psi_x\|_{L^2}^2+2k_0^2\|w_x-l\varphi\|_{L^2}^2)\\
&\leq \hat{c}_2(k\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2+b\|\psi_x\|_{L^2}^2+k_0\|w_x-l\varphi\|_{L^2}^2)\\
&\leq \hat{c}_2 a[(\varphi,\psi,w),(\varphi,\psi,w)],
\end{aligned}
$$

onde $\hat{c}_2=\hat{c}_1^2\text{máx}\,\{4k,4b,2k_0\}>0$. Logo,

$$
a[(\varphi,\psi,w),(\varphi,\psi,w)]\geq \frac{1}{\hat{c}_2}|(\varphi,\psi,w)|_{\mathcal{V}}^2,
$$

o que mostra que a é coercivo.

Note que Λ é limitado, pois usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Poincaré, temos que

$$
\begin{aligned}
\left|\Lambda((\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w}))\right| &\leq \left|\int_0^L h_1\tilde{\varphi}dx\right|+\left|\int_0^L h_2\tilde{\psi}dx\right|+\left|\int_0^L h_3\tilde{w}dx\right|\\
&\leq \|h_1\|_{L^2}\|\tilde{\varphi}\|_{L^2}+\|h_1\|_{L^2}\|\tilde{\psi}\|_{L^2}+\|h_3\|_{L^2}\|\tilde{w}\|_{L^2}\\
&\leq C\left(\|\tilde{\varphi}_x\|_{L^2}+\|\tilde{\psi}_x\|_{L^2}+\|\tilde{w}_x\|_{L^2}\right)\\
&\leq C\left|(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w})\right|_{\mathcal{V}},\quad \forall\,(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w})\in\mathcal{V},
\end{aligned}
$$

onde $C=\text{máx}\,\{\|h_1\|_{L^2},\|h_2\|_{L^2},\|h_3\|_{L^2}\}\,c_p$.
Portanto, pelo Lema de Lax-Milgran existe uma única terna, $(\varphi,\psi,w)\in\mathcal{V}$ tal que,

$$
a[(\varphi,\psi,w),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w})]=\Lambda(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w}),\quad \forall\,(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w})\in\mathcal{V}, \tag{2.25}
$$

onde a e Λ são dados em (2.22) e (2.23).
Agora mostraremos que de fato, $(\varphi,\psi,w)\in\left(H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)\right)^3$ e que satisfaz (2.18)-(2.20).

Tomando em particular $\tilde{\varphi}=0,\ \tilde{\psi}=0$ e $\tilde{w}=\xi\in C_0^\infty(0,L)$ em (2.25) temos

$$
\int_0^L k(\varphi_x+\psi+lw)(l\xi)dx\ +\ \int_0^L k_0(w_x-l\varphi)(\xi_x)dx=\int_0^L h_3\xi dx,\quad \forall\,\xi\in C_0^\infty(0,L),
$$

ou seja,

$$\int_0^L k_0(w_x - l\varphi)(\xi_x)dx = -\int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw)(l\xi)dx + \int_0^L h_3\xi dx$$
$$= -\int_0^L [kl(\varphi_x + \psi + lw) - h_3]\xi dx, \quad \forall\, \xi \in C_0^\infty(0, L).$$

Logo da definição de derivada fraca, temos

$$k_0(w_x - l\varphi)_x = kl(\varphi_x + \psi + lw) - h_3,$$

ou seja,

$$w_{xx} = \frac{1}{k_0}\left(k_0 l\varphi_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) - h_3\right) \in L^2(0, L).$$

Assim (2.20) é satisfeita e w também pertence a $H^2(0, L)$.
Portanto, $w \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)$.

Agora, para $\tilde{\varphi} = 0,\ \tilde{\psi} = \zeta \in C_0^\infty(0, L)$ e $\tilde{w} = 0$, em (2.25) temos,

$$\int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw)\zeta dx + \int_0^L b\psi_x\zeta_x dx = \int_0^L h_2\zeta dx, \quad \forall\, \zeta \in C_0^\infty(0, L),$$

ou seja,

$$\int_0^L b\psi_x\zeta_x dx = -\int_0^L (k(\varphi_x + \psi + lw) - h_2)\zeta dx, \quad \forall\, \zeta \in C_0^\infty(0, L).$$

Assim, da definição de derivada fraca, temos,

$$b\psi_{xx} = k(\varphi_x + \psi + lw) - h_2 \quad \text{em} \quad L^2(0, L),$$

isto é, (2.19) é satisfeita e além disso, ψ também pertence a $H^2(0, L)$. Portanto, $\psi \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)$.

Finalmente, fazendo $\tilde{\varphi} = \sigma \in C_0^\infty(0, L),\ \tilde{\psi} = 0$ e $\tilde{w} = 0$ em (2.25), temos

$$\int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw)\sigma_x dx \ - \int_0^L k_0(w_x - l\varphi)(l\sigma)dx = \int_0^L h_1\sigma dx, \quad \forall\, \sigma \in C_0^\infty(0, L),$$

ou seja,

$$\int_0^L k(\varphi_x + \psi + lw)\sigma_x dx \ = \int_0^L [k_0 l(w_x - l\varphi) + h_1]\,\sigma dx, \quad \forall\, \sigma \in C_0^\infty(0, L).$$

Assim,

$$k(\varphi_x + \psi + lw)_x = -k_0 l(w_x - l\varphi) - h_1, \quad \text{em} \quad L^2(0, L),$$

isto é, (2.18) é satisfeita. Além disso,

$$\varphi_{xx} = \frac{1}{k}(-k\psi_x - klw_x - k_0 l(w_x - l\varphi) - h_1) \in L^2(0, L).$$

Logo, φ também pertence a $H^2(0, L)$. Portanto $\varphi \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)$.
Assim, concluímos que existe uma única terna (φ, ψ, w) com $\varphi \in (H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L))$, $\psi \in (H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L))$ e $w \in (H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L))$, satisfazendo o sistema (2.18) - (2.20).
Portanto, existe uma única $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W) \in D(A)$ tal que $AU = J^t$, o que prova que o operador A^{-1} existe.

Agora, mostraremos que o operador A^{-1} é limitado, ou seja, para todo $J = (j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6)^t$, existe $c > 0$ tal que $\|A^{-1}J\|_{\mathcal{H}}^2 \leq c\|J\|_{\mathcal{H}}^2$.
Seja $J = (j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6) \in \mathcal{H}$. Então, pelo que mostramos anteriormente existe $U \in D(A)$ tal que $AU = J$, ou seja, em termos de suas componentes

$$\Phi = j_1 \tag{2.26}$$

$$k(\varphi_x + \psi + lw)_x + k_0 l(w_x - l\varphi) = \rho_1 j_2 \tag{2.27}$$

$$\Psi = j_3 \tag{2.28}$$

$$b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + lw) = \rho_2 j_4 \tag{2.29}$$

$$W = j_5 \tag{2.30}$$

$$k_0(w_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x + \psi + lw) = \rho_1 j_6. \tag{2.31}$$

Multiplicando (2.27) por φ, (2.29) por ψ, (2.31) por w, e integrando sobre o intervalo $[0, L]$, temos

$$\underbrace{k\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)_x \varphi dx} + k_0 l \int_0^L (w_x - l\varphi)\varphi dx = \rho_1 \int_0^L j_2 \varphi dx$$

$$\underbrace{b\int_0^L \psi_{xx}\psi dx} - k\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\psi dx = \rho_2 \int_0^L j_4 \psi dx$$

$$\underbrace{k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi)_x w dx} - kl \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) w dx = \rho_1 \int_0^L j_6 w dx.$$

Somando membro a membro, fazendo integração por partes nos termos destacados e notando que os termos de fronteira se anulam, temos

$$-k\|\ \varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2-k_0\|w_x-l\varphi\|_{L^2}^2-b\|\psi_x\|_{L^2}^2=\\ \int_0^L\rho_1 j_2\varphi dx+\int_0^L\rho_2 j_4\psi dx+\int_0^L\rho_1 j_6 w dx,$$

ou seja,

$$k\|\ \varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2+k_0\|w_x-l\varphi\|_{L^2}^2+b\|\psi_x\|_{L^2}^2=\\ -\int_0^L\rho_1 j_2\varphi dx-\int_0^L\rho_2 j_4\psi dx-\int_0^L\rho_1 j_6 w dx.$$

Da última igualdade e considerando $\Phi = j_1$, $\Psi = j_3$, $W = j_5$ na definição da norma em $\mathcal{H}$ (2.9),
obtemos

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{H}}^2=&\rho_1\|j_1\|_{L^2}^2+\rho_2\|j_3\|_{L^2}^2+\rho_1\|j_5\|_{L^2}^2-\int_0^L\rho_1 j_2\varphi dx\\ &-\int_0^L\rho_2 j_4\psi dx-\int_0^L\rho_1 j_6 w dx.\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{H}}^2\leq&\rho_1\|j_1\|_{L^2}^2+\rho_2\|j_3\|_{L^2}^2+\rho_1\|j_5\|_{L^2}^2+\rho_1\|j_2\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}\\ &+\rho_2\|j_4\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}+\rho_1\|j_6\|_{L^2}\|w\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Da Desigualdade de Poincaré segue que

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{H}}^2\leq&\rho_1\|j_{1,x}\|_{L^2}^2+\rho_2\|j_{3,x}\|_{L^2}^2+\rho_1\|j_{5,x}\|_{L^2}^2+\rho_1 c_p^2\|j_2\|_{L^2}\|\varphi_x\|_{L^2}\\ &+\rho_2 c_p^2\|j_4\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2}+\rho_1 c_p^2\|j_6\|_{L^2}\|w_x\|_{L^2}\end{aligned}$$

ou seja, existe $C = C(\rho_1, \rho_2, c_p) > 0$ tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2\leq C|J|_{\mathcal{H}}^2+C|U|_{\mathcal{H}}|J|_{\mathcal{H}}.$$

Mas como $|U|_{\mathcal{H}}$ e $\|U\|_{\mathcal{H}}$ são equivalentes, então

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2\leq C\|J\|_{\mathcal{H}}^2+C\|U\|_{\mathcal{H}}\|J\|_{\mathcal{H}}.$$

Pela Desigualdade de Young, temos

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2\leq C\|J\|_{\mathcal{H}}^2+C_\varepsilon\|J\|_{\mathcal{H}}^2+\varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Tomando ε suficientemente pequeno, temos que

$$\|A^{-1}J\|_{\mathcal{H}}^2 = \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \tilde{C}_\varepsilon \|J\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall\, J \in \mathcal{H}.$$

Portanto, concluímos que A^{-1} é limitado, o que conclui a prova de que $0 \in \rho(A)$.

Prova de (iii). Vamos mostrar que $D(A)$ é denso em $\mathcal{H}$.
De fato, da Teoria de espaços de Sobolev, sabemos que $H_0^1(0,L)$ é denso em $L^2(0,L)$ e que $H^2(0,L)$ é denso em $H_0^1(0,L)$, com isso, temos que $(H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L))$ é denso em $H_0^1(0,L)$. Portanto

$$D(A) = (H_0^1 \cap H^2) \times H_0^1 \times (H_0^1 \cap H^2) \times H_0^1 \times (H_0^1 \cap H^2) \times H_0^1,$$

é denso em

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H_0^1(0,L) \times L^2(0,L).$$

O que conclui a prova do Teorema 2.2. $\square$

No que segue, tendo em vista o Teorema 1.36 mostraremos agora que $\mathcal{F}$ definida em (2.11) é localmente lipschitziana em $\mathcal{H}$.

Lema 2.3. *A aplicação $\mathcal{F} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definida em (2.11) é localmente Lipschitziana.*

Demonstração: Sejam $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ e $\tilde{U} = (\tilde{\varphi}, \tilde{\Phi}, \tilde{\psi}, \tilde{\Psi}, \tilde{w}, \tilde{W})$ em $\mathcal{H}$. Consideremos $R > 0$ tais que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq R \quad \text{e} \quad \|\tilde{U}\|_{\mathcal{H}} \leq R.$$

Vamos mostrar que existe uma constante $C = C(R) > 0$ tal que

$$\|\mathcal{F}(U) - \mathcal{F}(\tilde{U})\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C\|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{2.32}$$

Da definição de $\mathcal{F}$ em (2.11) temos que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(U) - \mathcal{F}(\tilde{U})\|_{\mathcal{H}}^2 =& \rho_1 \left\| \frac{1}{\rho_1}(f_1(\varphi,\psi,w) - f_1(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w})) + \frac{1}{\rho_1}(g_1(\Phi) - g_1(\tilde{\Phi})) \right\|_{L^2}^2 \\
&+ \rho_2 \left\| \frac{1}{\rho_2}(f_2(\varphi,\psi,w) - f_2(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w})) + \frac{1}{\rho_2}(g_2(\Psi) - g_2(\tilde{\Psi})) \right\|_{L^2}^2 \\
&+ \rho_1 \left\| \frac{1}{\rho_1}(f_3(\varphi,\psi,w) - f_3(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w})) + \frac{1}{\rho_1}(g_3(W) - g_3(\tilde{W})) \right\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Denotando por $\Delta f_i = f_i(\varphi,\psi,w) - f_i(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w})$ para $i=1,2,3$ temos

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(U)-\mathcal{F}(\tilde{U})\|_{\mathcal{H}}^2 \leq & \frac{2}{\rho_1}\|\Delta f_1\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\rho_2}\|\Delta f_2\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\rho_1}\|\Delta f_3\|_{L^2}^2 \\ & + \frac{2}{\rho_1}\left\|(g_1(\Phi)-g_1(\tilde{\Phi}))\right\|_{L^2}^2 \\ & + \frac{2}{\rho_2}\left\|(g_2(\Psi)-g_2(\tilde{\Psi}))\right\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\rho_1}\left\|(g_3(W)-g_3(\tilde{W}))\right\|_{L^2}^2 .\end{aligned} \tag{2.33}$$

Agora, note que para cada $i=1,2,3$ podemos escrever

$$\Delta f_i = (f_i(\varphi,\psi,w)-f_i(\varphi,\psi,\tilde{w})) + (f_i(\varphi,\psi,\tilde{w})-f_i(\varphi,\tilde{\psi},\tilde{w})) + (f_i(\varphi,\tilde{\psi},\tilde{w})-f_i(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w}))$$

assim, da Desigualdade Triangular temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho_1}\int_0^L |\Delta f_1|^2 dx = & \frac{1}{\rho_1}\int_0^L |(f_1(\varphi,\psi,w)-f_1(\varphi,\psi,\tilde{w})) + (f_1(\varphi,\psi,\tilde{w}) \\ & - f_1(\varphi,\tilde{\psi},\tilde{w})) + (f_1(\varphi,\tilde{\psi},\tilde{w}) - f_1(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w})|^2 dx \\ \leq & \frac{4}{\rho_1}\int_0^L |f_1(\varphi,\psi,w)-f_1(\varphi,\psi,\tilde{w})|^2 dx \\ & + \frac{4}{\rho_1}\int_0^L |f_1(\varphi,\psi,\tilde{w})-f_1(\varphi,\tilde{\psi},\tilde{w})|^2 dx \\ & + \frac{4}{\rho_1}\int_0^L |f_1(\varphi,\tilde{\psi},\tilde{w})-f_1(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w})|^2 dx.\end{aligned}$$

Usando a Hipótese 1

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho_1}\int_0^L |\Delta f_1|^2 dx \leq & \frac{4}{\rho_1}\int_0^L \sigma_1^2(|\varphi|,|\psi|)(1+|w|^{\gamma_1}+|\tilde{w}|^{\gamma_1})^2|w-\tilde{w}|^2 dx \\ & + \frac{4}{\rho_1}\int_0^L \sigma_1^2(|\varphi|,|\tilde{w}|)(1+|\psi|^{\gamma_1}+|\tilde{\psi}|^{\gamma_1})^2|\psi-\tilde{\psi}|^2 dx \\ & + \frac{4}{\rho_1}\int_0^L \sigma_1^2(|\tilde{\psi}|,|\tilde{w}|)(1+|\varphi|^{\gamma_1}+|\tilde{\varphi}|^{\gamma_1})^2|\varphi-\tilde{\varphi}|^2 dx.\end{aligned}$$

De $H_0^1(0,L)\hookrightarrow L^\infty(0,L)$, $\|U\|_{\mathcal{H}}\leq R$ e $\|\tilde{U}\|_{\mathcal{H}}\leq R$ temos que existe $\tilde{c_\infty}>0$ tal que,

$$\|\varphi\|_\infty \leq \tilde{c}_\infty R, \quad \|\tilde{\varphi}\|_\infty \leq \tilde{c}_\infty R, \quad \|\psi\|_\infty \leq \tilde{c}_\infty R, \quad \|\tilde{\psi}\|_\infty \leq \tilde{c}_\infty R,$$

$$\|w\|_\infty \leq \tilde{c}_\infty R, \quad \|\tilde{w}\|_\infty \leq \tilde{c}_\infty R.$$

Assim, como σ_1 é contínua em $\mathbb{R}^2$, então existe uma constate $K_R^1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\sigma_1^2(|\varphi|,|\psi|) &\leq \max_{\tau,\lambda\in[0,\tilde{c}_\infty]}\sigma_1^2(|\tau|,|\lambda|) \leq K_R^1,\\ \sigma_1^2(|\varphi|,|\tilde{w}|) &\leq \max_{\tau,\lambda\in[0,\tilde{c}_\infty]}\sigma_1^2(|\tau|,|\lambda|) \leq K_R^1,\\ \sigma_1^2(|\tilde{\psi}|,|\tilde{w}|) &\leq \max_{\tau,\lambda\in[0,\tilde{c}_\infty]}\sigma_1^2(|\tau|,|\lambda|) \leq K_R^1.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho_1}\int_0^L |\Delta f_1|^2 dx \leq & \frac{4K_R^1}{\rho_1}\int_0^L \left(1+|w|^{\gamma_1}+|\tilde{w}|^{\gamma_1}\right)^2 |w-\tilde{w}|^2 dx\\ &+\frac{4K_R^1}{\rho_1}\int_0^L \left(1+|\psi|^{\gamma_1}+|\tilde{\psi}|^{\gamma_1}\right)^2 |\psi-\tilde{\psi}|^2 dx\\ &+\frac{4K_R^1}{\rho_1}\int_0^L \left(1+|\varphi|^{\gamma_1}+|\tilde{\varphi}|^{\gamma_1}\right)^2 |\varphi-\tilde{\varphi}|^2 dx.\end{aligned}$$

Da desigualdade

$$(1+|a|^p+|b|^p)^2 \leq 4\left(1+|a|^{2p}+|b|^{2p}\right) \quad \forall\, a,b,p\in\mathbb{R},$$

temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho_1}\int_0^L |\Delta f_1|^2 dx \leq & \frac{16K_R^1}{\rho_1}\int_0^L \left(1+|\varphi|^{2\gamma_1}+|\tilde{\varphi}|^{2\gamma_1}\right) |\varphi-\tilde{\varphi}|^2 dx\\ &+\frac{16K_R^1}{\rho_1}\int_0^L \left(1+|\psi|^{2\gamma_1}+|\tilde{\psi}|^{2\gamma_1}\right) |\psi-\tilde{\psi}|^2 dx\\ &+\frac{16K_R^1}{\rho_1}\int_0^L \left(1+|w|^{2\gamma_1}+|\tilde{w}|^{2\gamma_1}\right) |w-\tilde{w}|^2 dx,\end{aligned}$$

e de $H_0^1(0,L)\hookrightarrow L^\infty(0,L)$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho_1}\int_0^L |\Delta f_1|^2 dx \leq & \frac{16}{\rho_1}K_R^1\left(1+\|\varphi\|_\infty^{2\gamma_1}+\|\tilde{\varphi}\|_\infty^{2\gamma_1}\right)\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_{L^2}^2\\ &+\frac{16}{\rho_1}K_R^1\left(1+\|\psi\|_\infty^{2\gamma_1}+\|\tilde{\psi}\|_\infty^{2\gamma_1}\right)\|\psi-\tilde{\psi}\|_{L^2}^2\\ &+\frac{16}{\rho_1}K_R^1\left(1+\|w\|_\infty^{2\gamma_1}+\|\tilde{w}\|_\infty^{2\gamma_1}\right)\|w-\tilde{w}\|_{L^2}^2\\ \leq & K_R^2\left(\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_{L^2}^2+\|\psi-\tilde{\psi}\|_{L^2}^2+\|w-\tilde{w}\|_{L^2}^2\right),\end{aligned} \tag{2.34}$$

onde $K_R^2 = \frac{16}{\rho_1}K_R^1\left(1+3\left(\tilde{c_\infty}R\right)^{2\gamma_1}\right) > 0$.
Utilizando o mesmo raciocínio, temos que existem constantes $K_R^3, K_R^4 > 0$, tais que

$$\frac{1}{\rho_2}\int_0^L |\Delta f_2|^2 dx \leq K_R^3\left(\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_{L^2}^2+\|\psi-\tilde{\psi}\|_{L^2}^2+\|w-\tilde{w}\|_{L^2}^2\right), \tag{2.35}$$

$$\frac{1}{\rho_1}\int_0^L |\Delta f_3|^2 dx \leq K_R^4\left(\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_{L^2}^2+\|\psi-\tilde{\psi}\|_{L^2}^2+\|w-\tilde{w}\|_{L^2}^2\right). \tag{2.36}$$

De (2.34)-(2.36) e tomando $K_R^5 = 2\text{máx}\,\{K_R^2, K_R^3, K_R^4\}$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\rho_1}\|\Delta f_1\|^2 + \frac{2}{\rho_2}\|\Delta f_2\|^2 + \frac{2}{\rho_1}\|\Delta f_3\|^2 \;&\leq\; K_R^5\left(\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_{L^2}^2 + \|\psi-\tilde{\psi}\|_{L^2}^2 + \|w-\tilde{w}\|_{L^2}^2\right)\\
&\leq\; c_p^2K_R^5\left(\|\varphi_x-\tilde{\varphi}_x\|_{L^2}^2 + \|\psi_x-\tilde{\psi}_x\|_{L^2}^2 + \|w_x-\tilde{w}_x\|_{L^2}^2\right.\\
&\qquad\left.+\|\Phi-\tilde{\Phi}\|_{L^2}^2 + \|\Psi-\tilde{\Psi}\|_{L^2}^2 + \|W-\tilde{W}\|_{L^2}^2\right)\\
&\leq\; c_p^2K_R^5|U-\tilde{U}|_{\mathcal{H}}^2\\
&\leq\; c_p^2\hat{K}_R^5\|U-\tilde{U}\|_{\mathcal{H}}^2,
\end{aligned}$$

devido a equivalência das normas $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.
Substituindo em (2.33) a desigualdade acima, obtemos,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(U)-\mathcal{F}(\tilde{U})\|_{\mathcal{H}}^2 \leq& c_p^2\hat{K}_R^5 a_2\|U-\tilde{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{2}{\rho_1}\left\|(g_1(\Phi)-g_1(\tilde{\Phi}))\right\|_{L^2}^2\\
&+\frac{2}{\rho_2}\left\|(g_2(\Psi)-g_2(\tilde{\Psi}))\right\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\rho_1}\left\|(g_3(W)-g_3(\tilde{W}))\right\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Além disso, utilizando a Hipótese $2-(A_2)$ temos que,

$$\|\mathcal{F}(U)-\mathcal{F}(\tilde{U})\|_{\mathcal{H}}^2 \leq K_R\|U-\tilde{U}\|_{\mathcal{H}}^2,$$

onde $K_R = \text{máx}\left\{c_p^2\hat{K}_R^5, \frac{2\beta_1^2}{\rho_1^2}, \frac{2\beta_2^2}{\rho_2^2}, \frac{2\beta_3^2}{\rho_1^2}\right\} > 0$ é uma constante que depende de $R > 0$. Portanto $\mathcal{F}$ é uma função localmente Lipschitziana. □

Agora estamos em condições de obter o resultado de existência de solução local dado pelo seguinte teorema:

Teorema 2.4. *Suponhamos que as Hipóteses 1 e 2 sejam satisfeitas. Então, para todo $U_0 \in D(A)$, existe uma constante $T_{max} > 0$ tal que o problema (2.12) em $[0, T_{max})$ admite uma única solução forte local U da forma*

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)F(U(s))ds, \quad \forall\, t \in [0, T_{max}).$$

Demonstração: Do Teorema 2.2 segue que o operador A é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 $S(t)$. Assim, pelo Teorema 1.31 segue que $R(I+A) = \mathcal{H}$ e de (2.16) temos que $Re(AU, U) = 0$ para todo $U \in D(A)$.
Logo pelo Lema 1.27 segue que A é m-acretivo. Assim, usando o Lema 2.3, A m-acretivo e o Teorema 1.36 segue o resultado desejado. □

Agora mostraremos que podemos estender a solução local dada no Teorema 2.4 , para uma solução forte e global.

Teorema 2.5. *Suponhamos que as Hipóteses 1, 2 e 3 sejam válidas e seja U solução local em um intevalo $[0, T_{\max})$ do problema (2.12), então $T_{\max} = +\infty$, ou seja, dado $U_0 \in D(A)$ o problema (2.12) admite uma única solução global.*

Demonstração: Do Teorema 2.4, que dado $U_0 \in D(A)$ existe uma única solução local U em um intervalo $[0, T_{\max})$. Do Teorema 1.37 temos que se $T_{\max} < \infty$ então,

$$\lim_{t \to T_{max}^-} \|U(t)\|_{\mathcal{H}} = +\infty. \tag{2.37}$$

Assim, para mostrar que U é uma solução global, vamos mostrar que (2.37) não ocorre.
No que se segue $t \in [0, T_{\max})$ e o omitiremos para uma questão de simplificação de notação.

Multiplicando a equação (2.1) por φ_t e integrando de 0 a L em relação a x, obtemos

$$\rho_1 \int_0^L \varphi_{tt}\varphi_t dx \underbrace{-k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)_x \varphi_t dx} -k_0 l \int_0^L (w_x - l\varphi)\varphi_t dx$$
$$= -\int_0^L f_1(\varphi, \psi, w)\varphi_t dx - \int_0^L g_1(\varphi_t)\varphi_t dx.$$

Fazendo integração por partes no termo destacado, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi_t\|_{L^2}^2 + k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)(\varphi_x)_t dx - k_0 l \int_0^L (w_x - l\varphi)\varphi_t dx \\ = -\int_0^L f_1(\varphi, \psi, w)\varphi_t dx - \int_0^L g_1(\varphi_t)\varphi_t dx. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Agora, multiplicando a equação (2.2) por ψ_t e integrando de 0 a L em relação a x, obtemos

$$\rho_2 \int_0^L \psi_{tt}\psi_t dx \underbrace{-b \int_0^L \psi_{xx}\psi_t dx} +k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\psi_t dx$$
$$= -\int_0^L f_2(\varphi, \psi, w)\psi_t dx - \int_0^L g_2(\psi_t)\psi_t dx.$$

Fazendo integração por partes no termo destacado, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2}{2}\frac{d}{dt}\|\psi_t\|_{L^2}^2 + b \int_0^L \psi_x(\psi_x)_t dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\psi_t dx \\ = -\int_0^L f_2(\varphi, \psi, w)\psi_t dx - \int_0^L g_2(\psi_t)\psi_t dx. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Por último, multiplicando a equação (2.3) por w_t e integrando de 0 a L em relação a x, obtemos,

$$\rho_1 \int_0^L w_{tt} w_t dx - \underbrace{k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi)_x w_t dx}\, + kl \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) w_t dx$$
$$= - \int_0^L f_3(\varphi, \psi, w) w_t dx - \int_0^L g_3(w_t) w_t dx.$$

Fazendo integração por partes no termo destacado, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\|w_t\|_{L^2}^2 + k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi)(w_x)_t dx + kl \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) w_t dx \\ = - \int_0^L f_3(\varphi, \psi, w) w_t dx - \int_0^L g_3(w_t) w_t dx. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Somando (2.38), (2.39) e (2.40) membro a membro, temos,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^L F(\varphi, \psi, w) dx\right] = - \int_0^L (g_1(\varphi_t)\varphi_t + g_2(\psi_t)\psi_t + g_3(w_t) w_t) dx \tag{2.41}$$

Da Hipótese $2 - (A_3)$ segue que

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^L F(\varphi, \psi, w) dx\right] \leq 0,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^L F(\varphi, \psi, w) dx \leq \frac{1}{2}\|U_0\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^L F(\varphi_0, \psi_0, w_0) dx.$$

Mas como $F(s, r, q) \geq 0$, pelo lado direito da hipótese (2.7), da desigualdade de Hölder, da Hipótese 1 e considerando $f_i(0, 0, 0) = 0$ segue que

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \quad \forall\, t \in [0, T_{\max})$$

onde $C = \|U_0\|_{\mathcal{H}}^2 + 2\int_0^L F(\varphi_0, \psi_0, w_0) dx$.
Assim,

$$\lim_{t \to T_{max}^-} \|U(t)\|_{\mathcal{H}} < +\infty.$$

Portanto pelo Teorema 1.37 segue que $T_{\max} = +\infty$ o que completa a demonstração da existência da solução é global. $\square$

2.3 DECAIMENTO EXPONENCIAL

Nesta seção iremos mostrar que a solução do problema de Cauchy (2.12), ou equivalentemente, o sistema de Bresse (2.1) - (2.5) é exponencialmente estável.

Para isto, utilizaremos o método da energia perturbada, ou seja, mostrando que existe um funcional $\mathcal{L}$ (funcional de Lyapunov) equivalente a energia associada ao problema, o qual decai exponencialmente.
Inicialmente definimos a energia $E(t)$ associada ao sistema (2.1) - (2.5) por

$$\begin{aligned} E(t) = &\frac{\rho_1}{2}\|\varphi_t(t)\|^2_{L^2} + \frac{\rho_2}{2}\|\psi_t(t)\|^2_{L^2} + \frac{\rho_1}{2}\|w_t(t)\|^2_{L^2} + \frac{b}{2}\|\psi_x(t)\|^2_{L^2} \\ &+ \frac{k}{2}\| \varphi_x(t) + \psi(t) + lw(t)\|^2_{L^2} + \frac{k_0}{2}\|w_x(t) - l\varphi(t)\|^2_{L^2} \\ &+ \int_0^L F(\varphi(t), \psi(t), w(t))dx. \end{aligned}$$

Por simplificação, omitiremos do parâmetro t nas normas e integrais.
Note que da definição da energia temos a seguinte relação:

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}} \leq 2E(t). \tag{2.42}$$

Lema 2.6. *A derivada da energia satisfaz*

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\int_0^L (g_1(\varphi_t)\varphi_t + g_2(\psi_t)\psi_t + g_3(w_t)w_t)dx.$$

Demonstração: Multiplicando (2.1), (2.2), (2.3) por φ_t, ψ_t e w_t, respectivamente, segue a desigualdade desejada (vide (2.41)). □

Agora vamos determinar o funcional $\mathcal{L}$ (funcional de Lyapunov) que usaremos para demonstrar o decaimento exponencial de energia.

Lema 2.7. *Seja $R(t)$ o funcional definido por*

$$R(t) = \rho_1 \int_0^L \varphi_t(t)\varphi(t)dx.$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}R(t) = &\rho_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + k\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)_x \varphi dx + k_0 l\int_0^L (w_x - l\varphi)\varphi dx \\ &- \int_0^L f_1(\varphi, \psi, w)\varphi dx - \int_0^L g_1(\varphi_t)\varphi dx. \end{aligned}$$

Demonstração: Multiplicando a equação (2.1) por φ e integrando de 0 a L em relação a x, temos que

$$\begin{aligned}\rho_1 \int_0^L \varphi_{tt}\varphi dx =& k\int_0^L (\varphi_x+\psi+lw)_x\varphi dx + k_0 l\int_0^L (w_x - l\varphi)\varphi dx \\ &- \int_0^L f_1(\varphi,\psi,w)\varphi dx - \int_0^L g_1(\varphi_t)\varphi dx.\end{aligned} \tag{2.43}$$

Note que,

$$\frac{d}{dt}\left(\rho_1\int_0^L \varphi_t\varphi dx\right) = \rho_1\int_0^L \frac{d}{dt}(\varphi_t\varphi)\,dx = \rho_1\int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \rho_1\int_0^L \varphi_{tt}\varphi dx,$$

de (2.43), temos que,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\rho_1\int_0^L \varphi_t\varphi dx\right) =& \rho_1\int_0^L |\varphi_t|^2 dx + k\int_0^L (\varphi_x+\psi+lw)_x\varphi dx + k_0 l\int_0^L (w_x - l\varphi)\varphi dx \\ &- \int_0^L f_1(\varphi,\psi,w)\varphi dx - \int_0^L g_1(\varphi_t)\varphi dx,\end{aligned}$$

o que conclui a prova do Lema 2.7. □

Lema 2.8. *Seja $T(t)$ o funcional definido por*

$$T(t) = \rho_2\int_0^L \psi_t(t)\psi(t)dx.$$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}T(t) =& \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2 dx + b\int_0^L \psi_{xx}\psi dx - k\int_0^L (\varphi_x+\psi+lw)\psi dx \\ &- \int_0^L f_2(\varphi,\psi,w)\psi dx - \int_0^L g_2(\psi_t)\psi dx.\end{aligned}$$

Demonstração: Multiplicando equação (2.2) por ψ e integrando de 0 a L em relação a x, temos que

$$\begin{aligned}\rho_2\int_0^L \psi_{tt}\psi dx = & b\int_0^L \psi_{xx}\psi dx - k\int_0^L (\varphi_x+\psi+lw)\psi dx \\ &- \int_0^L f_2(\varphi,\psi,w)\psi dx - \int_0^L g_2(\psi_t)\psi dx.\end{aligned} \tag{2.44}$$

Note que,

$$\frac{d}{dt}\left(\rho_2\int_0^L \psi_t\psi dx\right) = \rho_2\int_0^L \frac{d}{dt}(\psi_t\psi)\,dx = \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2 dx + \rho_2\int_0^L \psi_{tt}\psi dx.$$

Utilizando a igualdade anterior em (2.44), temos que,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\rho_2\int_0^L \psi_t\psi dx\right) =&\rho_2\int_0^L |\psi_t|^2dx + b\int_0^L \psi_{xx}\psi dx - k\int_0^L (\varphi_x+\psi+lw)\psi dx\\ &-\int_0^L f_2(\varphi,\psi,w)\psi dx - \int_0^L g_2(\psi_t)\psi dx.\end{aligned}$$

Isto completa a prova do Lema. □

Lema 2.9. *Seja $Q(t)$ o funcional definido por,*

$$Q(t) = \rho_1\int_0^L w_t(t)w(t)dx.$$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Q(t) =&\rho_1\int_0^L |w_t|^2dx + k_0\int_0^L (w_x-l\varphi)_x w dx - kl\int_0^L (\varphi_x+\psi+lw)wdx\\ &-\int_0^L f_3(\varphi,\psi,w)wdx - \int_0^L g_3(w_t)wdx.\end{aligned}$$

Demonstração: Multiplicando a equação (2.3) por w e integrando de 0 a L em relação a x, temos que

$$\begin{aligned}\rho_1\int_0^L w_{tt}wdx =&k_0\int_0^L (w_x-l\varphi)_x w dx - kl\int_0^L (\varphi_x+\psi+lw)wdx\\ &-\int_0^L f_3(\varphi,\psi,w)w_t dx - \int_0^L g_3(w_t)wdx.\end{aligned} \tag{2.45}$$

Note que,

$$\frac{d}{dt}\left(\rho_1\int_0^L w_t w dx\right) = \rho_1\int_0^L \frac{d}{dt}\left(w_t w\right)dx = \rho_1\int_0^L |w_t|^2dx + \rho_1\int_0^L w_{tt}wdx.$$

De (2.45), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\rho_1\int_0^L w_t w dx\right) =&\rho_1\int_0^L |w_t|^2dx + k_0\int_0^L (w_x-l\varphi)_x w dx - kl\int_0^L (\varphi_x+\psi+lw)wdx\\ &-\int_0^L f_3(\varphi,\psi,w)wdx - \int_0^L g_3(w_t)wdx.\end{aligned}$$

O que mostra o resultado desejado. □

Consideremos o funcional $\mathcal{L}$ definido por,

$$\mathcal{L}(t) = R(t) + T(t) + Q(t) + NE(t) \tag{2.46}$$

onde N é uma constante, que será escolhida posteriormente.

Lema 2.10. *Existe uma constante positiva γ_0, tal que*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\gamma_0 E(t).$$

Demonstração: Dos Lemas 2.6, 2.7, 2.8 e 2.9 segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) =& \rho_1\int_0^L |\varphi_t|^2dx + \underbrace{k\int_0^L(\varphi_x+\psi+lw)_x\varphi dx} + k_0 l\int_0^L(w_x-l\varphi)\varphi dx - \int_0^L f_1(\varphi,\psi,w)\varphi dx\\
&+\rho_2\int_0^L|\psi_t|^2dx + \underbrace{b\int_0^L\psi_{xx}\psi dx} - k\int_0^L(\varphi_x+\psi+lw)\psi dx - \int_0^L f_2(\varphi,\psi,w)\psi dx\\
&+\rho_1\int_0^L|w_t|^2dx + \underbrace{k_0\int_0^L(w_x-l\varphi)_x w dx} - kl\int_0^L(\varphi_x+\psi+lw)w dx - \int_0^L f_3(\varphi,\psi,w)w dx\\
&+N\left(-\int_0^L g_1(\varphi_t)\varphi_t dx - \int_0^L g_2(\psi_t)\psi_t dx - \int_0^L g_3(w_t)w_t dx\right)\\
&-\int_0^L g_1(\varphi_t)\varphi dx - \int_0^L g_2(\psi_t)\psi dx - \int_0^L g_3(w_t)w dx.
\end{aligned}$$

Integrando por partes os termos destacados, usando as condições de fronteira (2.4) e utilizando as hipóteses (A_1) e (A_2) nos últimos termos, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq& \rho_1\|\varphi_t\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\psi_t\|_{L^2}^2 + \rho_1\|w_t\|_{L^2}^2 - k\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 - k_0\|w_x-l\varphi\|_{L^2}^2 - b\|\psi_x\|_{L^2}^2\\
&+\beta_1\int_0^L|\varphi_t||\varphi|dx + \beta_2\int_0^L|\psi_t||\psi|dx + \beta_3\int_0^L|w_t||w|dx\\
&-\int_0^L f_1(\varphi,\psi,w)\varphi dx - \int_0^L f_2(\varphi,\psi,w)\psi dx - \int_0^L f_3(\varphi,\psi,w)w dx\\
&+N\left(-\int_0^L g_1(\varphi_t)\varphi_t dx - \int_0^L g_2(\psi_t)\psi_t dx - \int_0^L g_3(w_t)w_t dx\right).
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Young e usando a hipótese (2.7), temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq& \rho_1\|\varphi_t\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\psi_t\|_{L^2}^2 + \rho_1\|w_t\|_{L^2}^2 - k\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 - k_0\|w_x-l\varphi\|_{L^2}^2 - b\|\psi_x\|_{L^2}^2\\
&+C_\varepsilon\beta_1^2\|\varphi_t\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|\varphi\|_{L^2}^2 + C_\varepsilon\beta_2^2\|\psi_t\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|\psi\|_{L^2}^2 + C_\varepsilon\beta_3^2\|w_t\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|w\|_{L^2}^2\\
&-\int_0^L F(\varphi,\psi,w)dx + \theta_1\|\varphi\|_{L^2}^2 + \mu_1\|\psi\|_{L^2}^2 + \eta_1\|w\|_{L^2}^2\\
&+N\left(-\int_0^L g_1(\varphi_t)\varphi_t dx - \int_0^L g_2(\psi_t)\psi_t dx - \int_0^L g_3(w_t)w_t dx\right).
\end{aligned}$$

Utilizando a Desigualdade de Poincaré e reagrupando os termos, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq & (\rho_1 + C_\varepsilon \beta_1^2)\|\varphi_t\|_{L^2}^2 + (\rho_2 + C_\varepsilon \beta_2^2)\|\psi_t\|_{L^2}^2 + (\rho_1 + C_\varepsilon \beta_3^2)\|w_t\|_{L^2}^2 \\
& - k\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 - k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 - b\|\psi_x\|_{L^2}^2 - \int_0^L F(\varphi,\psi,w)dx \\
& + (\theta_1 + \varepsilon)\, c_p^2\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + (\mu_1 + \varepsilon)\, c_p^2\|\psi_x\|_{L^2}^2 + (\eta_1 + \varepsilon)\, c_p^2\|w_x\|_{L^2}^2 \\
& + N\left(-\int_0^L g_1(\varphi_t)\varphi_t dx - \int_0^L g_2(\psi_t)\psi_t dx - \int_0^L g_3(w_t)w_t dx\right).
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

Aplicando a hipótese (A_3) temos que $g_1(\varphi_t)\varphi_t \geq \alpha_1|\varphi_t|^2$. Logo,

$$
\int_0^L g_1(\varphi_t)\varphi_t dx \geq \alpha_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 dx = \alpha_1\|\varphi_t\|_{L^2}^2,
$$

assim,

$$
-N\int_0^L g_1(\varphi_t)\varphi_t dx \leq -N\alpha_1\|\varphi_t\|_{L^2}^2. \tag{2.48}
$$

Analogamente, obtemos

$$
-N\int_0^L g_2(\psi_t)\psi_t dx \leq -N\alpha_2\|\psi_t\|_{L^2}^2, \tag{2.49}
$$

$$
-N\int_0^L g_3(w_t)w_t dx \leq -N\alpha_3\|w_t\|_{L^2}^2. \tag{2.50}
$$

Utilizando (2.48), (2.49) e (2.50) em (2.47), temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq & (\rho_1 + C_\varepsilon \beta_1^2 - N\alpha_1)\|\varphi_t\|_{L^2}^2 + (\rho_2 + C_\varepsilon \beta_2^2 - N\alpha_2)\|\psi_t\|_{L^2}^2 + (\rho_1 + C_\varepsilon \beta_3^2 - N\alpha_3)\|w_t\|_{L^2}^2 \\
& - k\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 - k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 - b\|\psi_x\|_{L^2}^2 - \int_0^L F(\varphi,\psi,w)dx \\
& + (\theta_1 + \varepsilon)\, c_p^2\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + (\mu_1 + \varepsilon)\, c_p^2\|\psi_x\|_{L^2}^2 + (\eta_1 + \varepsilon)\, c_p^2\|w_x\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

Agora, do Lema 2.1, temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq & (\rho_1 + C_\varepsilon \beta_1^2 - N\alpha_1)\|\varphi_t\|_{L^2}^2 + (\rho_2 + C_\varepsilon \beta_2^2 - N\alpha_2)\|\psi_t\|_{L^2}^2 + (\rho_1 + C_\varepsilon \beta_3^2 - N\alpha_3)\|w_t\|_{L^2}^2 \\
& - k\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 - k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 - b\|\psi_x\|_{L^2}^2 - \int_0^L F(\varphi,\psi,w)dx \\
& + (\mu_1 + \varepsilon)\, c_p^2 a_2 \left(k\|\ \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2\right) \\
& + (\theta_1 + \varepsilon)\, c_p^2 a_2 \left(k\|\ \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2\right) \\
& + (\eta_1 + \varepsilon)\, c_p^2 a_2 \left(k\|\ \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2\right).
\end{aligned}
$$

Reagrupando os termos,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq & (\rho_1 + C_\varepsilon \beta_1^2 - N\alpha_1)\|\varphi_t\|_{L^2}^2 + (\rho_2 + C_\varepsilon \beta_2^2 - N\alpha_2)\|\psi_t\|_{L^2}^2 + (\rho_1 + C_\varepsilon \beta_3^2 - N\alpha_3)\|w_t\|_{L^2}^2 \\
& - \int_0^L F(\varphi, \psi, w)dx \\
& + \big((\theta_1 + \varepsilon)\, c_p^2 a_2 + (\eta_1 + \varepsilon)\, c_p^2 a_2 + (\mu_1 + \varepsilon)\, c_p^2 a_2 - 1\big)\, k\|\, \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 \\
& + \big((\theta_1 + \varepsilon)\, c_p^2 a_2 + (\eta_1 + \varepsilon)\, c_p^2 a_2 + (\mu_1 + \varepsilon)\, c_p^2 a_2 - 1\big)\, b\|\psi_x\|_{L^2}^2 \\
& + \big((\theta_1 + \varepsilon)\, c_p^2 a_2 + (\eta_1 + \varepsilon)\, c_p^2 a_2 + (\mu_1 + \varepsilon)\, c_p^2 a_2 - 1\big)\, k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

ou melhor,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq & - \underbrace{(N\alpha_1 - \rho_1 - C_\varepsilon \beta_1^2)}_{(i_1)} \|\varphi_t\|_{L^2}^2 - \underbrace{(N\alpha_2 - \rho_2 - C_\varepsilon \beta_2^2)}_{(i_2)} \|\psi_t\|_{L^2}^2 \\
& - \underbrace{(N\alpha_3 - \rho_1 - C_\varepsilon \beta_3^2)}_{(i_3)} \|w_t\|_{L^2}^2 - \int_0^L F(\varphi, \psi, w)dx \\
& - \underbrace{\big(1 - (\theta_1 + \eta_1 + \mu_1 + 3\varepsilon)\, c_p^2 a_2\big)}_{(i_4)} k\|\, \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 \\
& - (i_4) b\|\psi_x\|_{L^2}^2 - (i_4) k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Tomando $0 \leq \varepsilon \leq \dfrac{1}{12c_p^2 a_2}$ e usando a hipótese (2.7) temos

$$(\theta_1 + \eta_1 + \mu_1) + 3\varepsilon < \frac{1}{2c_p^2 a_2}$$

e portanto

$$i_4 = 1 - (\theta_1 + \eta_1 + \mu_1 + 3\varepsilon)c_p^2 a_2 \geq \frac{1}{2}$$

como agora C_ε está fixado tomemos N suficientemente grande de modo que (i_1), (i_2) e (i_3) sejam positivos.
Logo, existe um $\gamma_0 = \min\{(i_k) : \ k = 1, 2, 3, 4\}$ tal que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\gamma_0 E(t).$$

o que conclui a demonstração do lema. $\square$

Lema 2.11. *O funcional $\mathcal{L}(t)$ defino em (2.46) é equivalente a energia $E(t)$, ou seja, existem constantes positivas $\tilde{c}$ e $\hat{c}$ tais que,*

$$\hat{c}E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \tilde{c}E(t). \tag{2.51}$$

Demonstração: De (2.46),

$$\mathcal{L}(t) = \rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t \psi dx + \rho_1 \int_0^L w_t w dx + NE(t).$$

Assim, utilizando as desigualdades de Cauchy Schwarz e Young, obtemos

$$\mathcal{L}(t) \leq \frac{\rho_1}{2}\|\varphi_t\|_{L^2}^2 + \frac{\rho_1}{2}\|\varphi\|_{L^2}^2 + \frac{\rho_2}{2}\|\psi_t\|_{L^2}^2 + \frac{\rho_2}{2}\|\psi\|_{L^2}^2 + \frac{\rho_1}{2}\|w_t\|_{L^2}^2 + \frac{\rho_1}{2}\|w\|_{L^2}^2 + NE(t).$$

Aplicando a Desigualdade de Poincaré e a definição da energia $E(t)$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) \leq & (1+N)\frac{\rho_1}{2}\|\varphi_t\|_{L^2}^2 + (1+N)\frac{\rho_2}{2}\|\psi_t\|_{L^2}^2 + (1+N)\frac{\rho_1}{2}\|w_t\|_{L^2}^2 + \frac{c_p^2\rho_1}{2}\|\varphi_x\|_{L^2}^2 \\ & + \frac{c_p^2\rho_2}{2}\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \frac{c_p^2\rho_1}{2}\|w_x\|_{L^2}^2 \\ & + N\left(\frac{k}{2}\| \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + \frac{b}{2}\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \frac{k_0}{2}\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + \int_0^L F(\varphi,\psi,w)dx\right).\end{aligned}$$

Novamente utilizando o Lema 2.1, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) \leq & (1+N)\frac{\rho_1}{2}\|\varphi_t\|_{L^2}^2 + (1+N)\frac{\rho_2}{2}\|\psi_t\|_{L^2}^2 + (1+N)\frac{\rho_1}{2}\|w_t\|_{L^2}^2 \\ & + \frac{c_p^2 a_2 \rho_1}{2}\left(k\| \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2\right) \\ & + \frac{c_p^2 a_2 \rho_2}{2}\left(k\| \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2\right) \\ & + \frac{c_p^2 a_2 \rho_1}{2}\left(k\| \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2\right) \\ & + N\left(\frac{k}{2}\| \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + \frac{b}{2}\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \frac{k_0}{2}\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + \int_0^L F(\varphi,\psi,w)dx\right).\end{aligned}$$

Organizando os termos, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) \leq & (1+N)\frac{\rho_1}{2}\|\varphi_t\|_{L^2}^2 + (1+N)\frac{\rho_2}{2}\|\psi_t\|_{L^2}^2 + (1+N)\frac{\rho_1}{2}\|w_t\|_{L^2}^2 \\ & + \left((2\rho_1+\rho_2)\, c_p^2 a_2 + N\right)\frac{k}{2}\| \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 \\ & + \left((2\rho_1+\rho_2)\, c_p^2 a_2 + N\right)\frac{b}{2}\|\psi_x\|_{L^2}^2 \\ & + \left((2\rho_1+\rho_2)\, c_p^2 a_2 + N\right)\frac{k_0}{2}\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 \\ & + N\int_0^L F(\varphi,\psi,w)dx.\end{aligned}$$

Tomando $\tilde{c} = \max\left\{(1+N), \left((2\rho_1+\rho_2)\, c_p^2 a_2 + N\right)\right\}$, segue que

$$\mathcal{L}(t) \leq \tilde{c}E(t). \tag{2.52}$$

Primeiramente, note que, pela Desigualdade de Young, temos que

$$|\rho u_t u| = 2|\rho u_t|\left|\frac{u}{2}\right| \leq \rho^2 u_t^2 + \frac{u^2}{4}.$$

Portanto,

$$-\left(\rho^2 u_t^2 + \frac{u^2}{4}\right) \leq \rho u_t u \leq \rho^2 u_t^2 + \frac{u^2}{4}. \tag{2.53}$$

Assim, de (2.53) e da Desigualdade de Poincaré temos

$$\int_0^L \rho_1 \varphi_t \varphi dx \geq -\rho_1^2 \|\varphi_t\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4}\|\varphi\|_{L^2}^2 \geq -\rho_1^2\|\varphi_t\|_{L^2}^2 - \frac{c_p^2}{4}\|\varphi_x\|_{L^2}^2, \tag{2.54}$$

$$\int_0^L \rho_2 \psi_t \psi dx \geq -\rho_2^2 \|\psi_t\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4}\|\psi\|_{L^2}^2 \geq -\rho_2^2\|\psi_t\|_{L^2}^2 - \frac{c_p^2}{4}\|\psi_x\|_{L^2}^2 \tag{2.55}$$

$$\int_0^L \rho_1 w_t w dx \geq -\rho_1^2 \|w_t\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4}\|w\|_{L^2}^2 \geq -\rho_1^2\|w_t\|_{L^2}^2 - \frac{c_p^2}{4}\|w_x\|_{L^2}^2. \tag{2.56}$$

Assim, de (2.54)-(2.56) concluímos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) \geq &-\rho_1^2\|\varphi_t\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4}c_p^2\|\varphi_x\|_{L^2}^2 - \rho_2^2\|\psi_t\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4}c_p^2\|\psi_x\|_{L^2}^2 - \rho_1^2\|w_t\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4}c_p^2\|w_x\|_{L^2}^2 \\ &+ N\left(\frac{\rho_1}{2}\|\varphi_t\|_{L^2}^2 + \frac{\rho_2}{2}\|\psi_t\|_{L^2}^2 + \frac{\rho_1}{2}\|w_t\|_{L^2}^2 + \frac{k}{2}\|\ \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + \frac{b}{2}\|\psi_x\|_{L^2}^2 \right.\\ &\left.+\frac{k_0}{2}\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + \int_0^L F(\varphi,\psi,w)dx\right).\end{aligned}$$

Novamente pelo Lema 2.1, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) \geq &(N-2\rho_1)\frac{\rho_1}{2}\|\varphi_t\|_{L^2}^2 + (N-2\rho_2)\frac{\rho_2}{2}\|\psi_t\|_{L^2}^2 + (N-2\rho_1)\frac{\rho_1}{2}\|w_t\|_{L^2}^2 \\ &- \frac{1}{4}c_p^2 a_2\left(k\|\ \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2\right) \\ &- \frac{1}{4}c_p^2 a_2\left(k\|\ \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2\right) \\ &- \frac{1}{4}c_p^2 a_2\left(k\|\ \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2\right) \\ &+ N\left(\frac{k}{2}\|\ \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + \frac{b}{2}\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \frac{k_0}{2}\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + \int_0^L F(\varphi,\psi,w)dx\right).\end{aligned}$$

Reagrupando os termos, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) \geq &(N-2\rho_1)\frac{\rho_1}{2}\|\varphi_t\|_{L^2}^2 + (N-2\rho_2)\frac{\rho_2}{2}\|\psi_t\|_{L^2}^2 + (N-2\rho_1)\frac{\rho_1}{2}\|w_t\|_{L^2}^2 \\ &+ \left(N - \frac{3}{2}c_p^2 a_2\right)\left(\frac{k}{2}\|\ \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + \frac{b}{2}\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \frac{k_0}{2}\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2\right) \\ &+ N\int_0^L F(\varphi,\psi,w)dx.\end{aligned}$$

Tomando N suficientemente grande e $\hat{c} = \min\left\{(N-2\rho_1), (N-2\rho_2), \left(N - \frac{3}{2}c_p^2 a_2\right)\right\}$, temos que

$$\hat{c}E(t) \leq \mathcal{L}(t). \tag{2.57}$$

Logo, de (2.52) e (2.57) a prova do Lema 2.11 está completa. □

Agora estamos em condições de enunciar o resultado de decaimento. Mais precisamente, provaremos o seguinte teorema.

Teorema 2.12. *Suponha que as Hipóteses 1, 2 e 3 sejam satisfeitas. Então, o sistema (2.1) - (2.5) é exponencialmente estável. Mais precisamente, se $U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t)$ é uma solução de (2.1) - (2.5), então existem constantes positivas C_0 e γ tais que*

$$E(t) \leq C_0 E(0) e^{-\gamma t}.$$

Demonstração: Dos Lemas 2.10 e 2.11 temos que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\gamma \mathcal{L}(t),$$

onde $\gamma = \frac{\gamma_0}{\tilde{c}}$. Multiplicando a desigualdade acima por $e^{\gamma t}$, e depois integrando, obtemos,

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0) e^{-\gamma t},$$

Novamente utilizando (2.51), concluímos que,

$$\hat{c}E(t) \leq \tilde{c}E(0) e^{-\gamma t}.$$

Portanto, tomando $C_0 = \frac{\tilde{c}}{\hat{c}}$, temos

$$E(t) \leq C_0 E(0) e^{-\gamma t},$$

como queríamos demonstrar. Com isso, da relação Energia Solução (2.42) segue que

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_0 E(0) e^{-\gamma t},$$

o que mostra que a solução de (2.1) - (2.5) é exponencialmente estável, ou seja o sistema (2.1) - (2.5) é exponencialmente estável. □

3 SISTEMA DE BRESSE COM DISSIPAÇÕES FRICCIONAIS NÃO LINEARES

Neste capítulo estudaremos o mesmo sistema do capítulo anterior considerando as f_i's nulas e com hipóteses não lineares para as funções g_i. Assim o sistema estudado será

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + g_1(\varphi_t) = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \tag{3.1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + g_2(\psi_t) = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \tag{3.2}$$

$$\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) + g_3(w_t) = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \tag{3.3}$$

com as mesmas condições iniciais e de fronteira utilizadas no capítulo anterior, ou seja, com condições de fronteira

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad \forall\, t \geq 0, \tag{3.4}$$

e condições iniciais

$$\begin{aligned} \varphi(\cdot, 0) &= \varphi_0(\cdot), \quad \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1(\cdot), \\ \psi(\cdot, 0) &= \psi_0(\cdot), \quad \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1(\cdot), \\ w(\cdot, 0) &= w_0(\cdot), \quad w_t(\cdot, 0) = w_1(\cdot). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Neste capítulo serão consideradas as seguintes hipóteses:

Hipótese 1

As funções $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, são funções de classe $C^1(\mathbb{R})$, satisfazendo as seguintes condições:

(A_4) $g_i(0) = 0$,

(A_5) existem constantes positivas m_i^1 e m_i^2 e $\gamma > 0$ tais que

$$m_i^1|s|^\gamma \leq g_i'(s) \leq m_i^2(1 + |s|^\gamma),\ \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Da hipótese (A_5) concluímos que as g_i satisfazem

$(A_5)'$ $|g_i(s)| \leq \beta_i\left(|s| + |s|^{\gamma+1}\right), \quad \forall\, s \in \mathbb{R}$ e para alguma constante $\beta_i > 0$, $i = 1, 2, 3$.

$(A_5)''$ Existe uma constante positiva α_i, tal que $g_i(s)s \geq \alpha_i|s|^{\gamma+2}$, $i = 1, 2, 3$.

3.1 Existência e unicidade de solução

Nesta seção utilizando o método de Faedo-Galerkin, mostraremos a existência e unicidade de solução para o sistema (3.1)-(3.5). Mais especificamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Sejam* $\varphi_0,\ \psi_0,\ w_0 \in H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)$ *e* $\varphi_1,\ \psi_1,\ w_1 \in H_0^1(0,L)$*, assumindo que a Hipótese 1 é satisfeita, então o sistema (3.1)-(3.5) admite uma única solução forte* (φ,ψ,w) *tal que*

$$\varphi,\ \psi,\ w \in L^\infty(0,T;H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L));\ \varphi_t,\ \psi_t,\ w_t \in L^\infty(0,T;H_0^1(0,L)\cap L^2(0,L));$$
$$\varphi_{tt},\ \psi_{tt},\ w_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2(0,L)).$$

A demonstração será dividida em várias etapas.

Observação. Por simplificação, omitiremos eventualmente o parâmetro t e utilizaremos a mesma constante $c>0$ para diferentes constantes.

O problema aproximado. Seja $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma base ortogonal de $H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)$ e ortonormal em $L^2(0,L)$ dada por autofunções do problema

$$\begin{cases} -v_{jxx} = \lambda_j v_j \ \text{ em } \ [0,L], \\ v_j(0)=v_j(L)=0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Para cada $m\in\mathbb{N}$, seja V_m o espaço vetorial de dimensão finita

$$V_m = [v_1, v_2, \ldots, v_m] \subset H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L).$$

Procuraremos por soluções da seguinte forma

$$\varphi^m(t) = \sum_{j=1}^m f_{jm}(t)v_j;\ \ \psi^m(t) = \sum_{j=1}^m h_{jm}(t)v_j;\ \ w^m(t) = \sum_{j=1}^m r_{jm}(t)v_j \tag{3.7}$$

do seguinte problema aproximado

$$\rho_1(\varphi_{tt}^m, v_j) + k(\varphi_x^m + \psi^m + lw^m, v_{jx}) - k_0 l(w_x^m - l\varphi^m, v_j) + (g_1(\varphi_t^m), v_j) = 0, \tag{3.8}$$
$$\rho_2(\psi_{tt}^m, v_j) + b(\psi_x^m, v_{jx}) + k(\varphi_x^m + \psi^m + lw^m, v_j) + (g_2(\psi_t^m), v_j) = 0, \tag{3.9}$$
$$\rho_1(w_{tt}^m, v_j) + k_0(w_x^m - l\varphi^m, v_{jx}) + kl(\varphi_x^m + \psi^m + lw^m, v_j) + (g_3(w_t^m), v_j) = 0, \tag{3.10}$$

$j=1,\ldots,m$, com condições iniciais

$$\varphi^m(0)=\varphi_0^m,\ \psi^m(0)=\psi_0^m,\ w^m(0)=w_0^m, \tag{3.11}$$
$$\varphi_t^m(0)=\varphi_1^m,\ \psi_t^m(0)=\psi_1^m,\ w_t^m(0)=w_1^m, \tag{3.12}$$

onde

$$\varphi_0^m \longrightarrow \varphi_0,\ \psi_0^m \longrightarrow \psi_0,\ w_0^m \longrightarrow w_0, \quad \text{(forte) em} \quad H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L), \tag{3.13}$$

$$\varphi_1^m \longrightarrow \varphi_1,\ \psi_1^m \longrightarrow \psi_1,\ w_1^m \longrightarrow w_1 \quad \text{(forte) em} \quad H_0^1(0,L), \tag{3.14}$$

quando $m \longrightarrow \infty$. Observe que, por (3.7), (3.11) e (3.12),

$$\varphi_0^m = \varphi^m(0) = \sum_{j=1}^m f_{jm}(0)v_j = \sum_{j=1}^m (\varphi_0^m, v_j)v_j \longrightarrow \varphi_0 \text{ em } H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L),$$

$$\varphi_1^m = \varphi_t^m(0) = \sum_{j=1}^m f'_{jm}(0)v_j = \sum_{j=1}^m (\varphi_1^m, v_j)v_j \longrightarrow \varphi_1 \text{ em } H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L),$$

$$\psi_0^m = \psi^m(0) = \sum_{j=1}^m h_{jm}(0)v_j = \sum_{j=1}^m (\psi_0^m, v_j)v_j \longrightarrow \psi_0 \text{ em } H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L),$$

$$\psi_1^m = \psi_t^m(0) = \sum_{j=1}^m h'_{jm}(0)v_j = \sum_{j=1}^m (\psi_1^m, v_j)v_j \longrightarrow \psi_1 \text{ em } H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L),$$

$$w_0^m = w^m(0) = \sum_{j=1}^m r_{jm}(0)v_j = \sum_{j=1}^m (w_0^m, v_j)v_j \longrightarrow w_0 \text{ em } H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L),$$

$$w_1^m = w_t^m(0) = \sum_{j=1}^m r'_{jm}(0)v_j = \sum_{j=1}^m (w_1^m, v_j)v_j \longrightarrow w_1 \text{ em } H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L).$$

Notemos que

$$(\varphi_{tt}^m(t), v_j) = \left(\sum_{i=1}^m f''_{im}(t)v_i, v_j\right) = \sum_{i=1}^m f''_{im}(t)(v_i, v_j) = f''_{jm}(t),$$

$$(\psi_{tt}^m(t), v_j) = \left(\sum_{i=1}^m h''_{im}(t)v_i, v_j\right) = \sum_{i=1}^m h''_{im}(t)(v_i, v_j) = h''_{jm}(t),$$

$$(w_{tt}^m(t), v_j) = \left(\sum_{i=1}^m r''_{im}(t)v_i, v_j\right) = \sum_{i=1}^m r''_{im}(t)(v_i, v_j) = r''_{jm}(t),$$

$$(\varphi_x^m(t), v_{jx}) = \left(\sum_{i=1}^m f_{im}(t)v_{ix}, v_{jx}\right) = \sum_{i=1}^m f_{im}(t)(v_{ix}, v_{jx}) = a_j f_{jm}(t),$$

$$(\psi_x^m(t), v_{jx}) = \left(\sum_{i=1}^m h_{im}(t)v_{ix}, v_{jx}\right) = \sum_{i=1}^m h_{im}(t)(v_{ix}, v_{jx}) = a_j h_{jm}(t),$$

$$(w_x^m(t), v_{jx}) = \left(\sum_{i=1}^m r_{im}(t)v_{ix}, v_{jx}\right) = \sum_{i=1}^m r_{im}(t)(v_{ix}, v_{jx}) = a_j r_{jm}(t),$$

onde $a_j = (v_{jx}, v_{jx})$.

Deste modo, podemos reescrever o sistema (3.8)-(3.12) no seguinte sistema de Equações Diferenciais Ordinárias de segunda ordem

$$f''_{jm}(t) + \frac{k_0 l^2}{\rho_1} f_{jm}(t) = \quad F_j(t), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{3.15}$$

$$h''_{jm}(t) + \frac{k}{\rho_2} h_{jm}(t) + \frac{kl}{\rho_2} r_{jm}(t) = \quad H_j(t), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{3.16}$$

$$r''_{jm}(t) + \frac{kl^2}{\rho_1} r_{jm}(t) + \frac{kl}{\rho_1} h_{jm}(t) = \quad R_j(t), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{3.17}$$

onde

$$\begin{aligned}
F_j(t) &= \frac{1}{\rho_1}\left[-ka_j f_j^m(t) + \sum_{i=1}^{m}(-kh_{im}(t) - klr_{im}(t) - k_0 l r_{im}(t))(v_i, v_{jx}) - \left(g_1\left(\sum_{i=1}^{m} f'_{im}(t)v_i\right), v_j\right)\right], \\
H_j(t) &= \frac{1}{\rho_2}\left[-ba_j h_j^m(t) + \sum_{i=1}^{m} k f_{im}(t)(v_i, v_{jx}) - \left(g_2\left(\sum_{i=1}^{m} h'_{im}(t)v_i\right), v_j\right)\right], \\
R_j(t) &= \frac{1}{\rho_1}\left[-k_0 a_j r_j^m(t) + \sum_{i=1}^{m}(k_0 l f_{im}(t) + kl f_{im}(t))(v_i, v_{jx}) - \left(g_3\left(\sum_{i=1}^{m} r'_{im}(t)v_i\right), v_j\right)\right],
\end{aligned}$$

Com condições iniciais

$$f_{jm}(0) = (\varphi_0^m, v_j),\ f'_{jm}(0) = (\varphi_1^m, v_j),\ h_{jm}(0) = (\psi_0^m, v_j),\ h'_{jm}(0) = (\psi_1^m, v_j),$$

Agora, vamos encontrar uma solução para o sistema de E.D.O's acima. Para isto, usaremos o Teorema de Carathéodory. Reescrevendo o sistema acima na forma matricial, temos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f''_{jm}(t) \\ h''_{jm}(t) \\ r''_{jm}(t) \end{bmatrix}}_{Z''(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{k_0 l^2}{\rho_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{\rho_2} & \frac{kl}{\rho_2} \\ 0 & \frac{kl}{\rho_1} & \frac{kl^2}{\rho_1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} f_{jm}(t) \\ h_{jm}(t) \\ r_{jm}(t) \end{bmatrix}}_{Z(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_j(t) \\ H_j(t) \\ R_j(t) \end{bmatrix}}_{W(Z(t))}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

$$Z(0) = \begin{bmatrix} (\varphi_0^m, v_j) \\ (\psi_0^m, v_j) \\ (w_0^m, v_j) \end{bmatrix} \text{ e } Z'(0) = \begin{bmatrix} \varphi_1^m, v_j) \\ (\psi_1^m, v_j) \\ (w_1^m, v_j) \end{bmatrix}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

ou seja,

$$\begin{cases} Z''(t) + \mathcal{A}Z(t) = W(Z(t)), \\ Z(0) = Z_0,\ Z'(0) = Z_1. \end{cases} \tag{3.18}$$

Definindo

$$Y_1(t) = Z(t),\ \ Y_2(t) = Z'(t) \text{ e } Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix},$$

tem-se

$$
\begin{aligned}
Y'(t) = \begin{bmatrix} Y_1'(t) \\ Y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z'(t) \\ Z''(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Y_2(t) \\ -\mathcal{A}Y_1(t) + W(Y_1(t)) \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ -\mathcal{A} & 0 \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ W(Y_1(t)) \end{bmatrix}}_{C(Y(t))}
\end{aligned}
$$

e

$$
Y(0) = \begin{bmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(0) \\ Z'(0) \end{bmatrix} := Y_0.
$$

Assim podemos reescrever o sistema acima como o seguinte Problema de Valor Inicial de primeira ordem

$$
\begin{cases} Y'(t) = BY(t) + C(Y(t)), \\ Y(0) = Y_0. \end{cases} \tag{3.19}
$$

No que segue, vamos mostrar que a função

$$
\begin{aligned}
D : [0,T] \times \mathbb{R}^{6m} &\longrightarrow \mathbb{R}^{6m} \\
(t, Y) &\longmapsto D(t,Y) = BY + C(Y),
\end{aligned}
$$

satisfaz as condições do Teorema de Carathéodory.

(i) D é mensurável em relação a variável t, para cada Y fixado.

De fato, observe que $D(t,Y) = BY + C(Y)$ não depende de t, logo D satisfaz a condição (i).

(ii) D é contínua em relação a Y, para cada t fixado.

De fato, basta observar que a continuidade de C é proveniente da continuidade das funções $g_i's$ e como BY é contínua segue que D é contínua.

(iii) Dado um compacto $K \subset [0,T] \times \mathbb{R}^{6m}$, existe uma função real m_k Lebesgue-integrável tal que

$$
\|D(t,Y)\|_{\mathbb{R}^{6m}} \leq m_k(t), \quad \forall\, (t,Y) \in K.
$$

De fato, como C e B são contínuas existem constantes C_{1k} e C_{2k}, tais que

$$
\begin{aligned}
\|D(t,Y)\|_{\mathbb{R}^{6m}} &\leq \|BY\|_{\mathbb{R}^{6m}} + \|C(Y)\|_{\mathbb{R}^{6m}} \\
&\leq \|B\|\|Y\|_{\mathbb{R}^{6m}} + \|C(Y)\|_{\mathbb{R}^{6m}} \\
&\leq C_{1k} + C_{2k} = C_k,
\end{aligned}
$$

para todo $(t, Y) \in k$. Pondo $m_k(t) = C_k$ a condição (iii) é satisfeita.
Assim, em virtude do Teorema de Carathéodory o sistema (3.8)-(3.14) possui uma solução local em algum intervalo $[0, t_m)$.

Serão realizadas três estimativas a priori.
Estimativa a priori 1. Multiplicando (3.8) por $f'_{jm}(t)$, (3.9) por $h'_{jm}(t)$, (3.10) por $r'_{jm}(t)$ e somando de $j = 1$ até m, obtemos

$$\rho_1(\varphi^m_{tt}, \varphi^m_t) + k(\varphi^m_x + \psi^m + lw^m, \varphi^m_{tx}) - k_0 l(w^m_x - l\varphi^m, \varphi^m_t) + (g_1(\varphi^m_t), \varphi^m_t) = 0, \tag{3.20}$$

$$\rho_2(\psi^m_{tt}, \psi^m_t) + b(\psi^m_x, \psi^m_{tx}) + k(\varphi^m_x + \psi^m + lw^m, \psi^m_t) + (g_2(\psi^m_t), \psi^m_t) = 0, \tag{3.21}$$

$$\rho_1(w^m_{tt}, w^m_t) + k_0(w^m_x - l\varphi^m, w^m_{tx}) + kl(\varphi^m_x + \psi^m + lw^m, w^m_t) + (g_3(w^m_t), w^m_t) = 0. \tag{3.22}$$

Somando membro a membro e reagrupando os termos obtemos

$$E_m(t) + \int_0^t \int_0^L (g_1(\varphi^m_t)\varphi^m_t + g_2(\psi^m_t)\psi^m_t + g_3(w^m_t)w^m_t) dx ds = E_m(0), \tag{3.23}$$

onde

$$
\begin{aligned}
E_m(t) = \; & \tfrac{\rho_1}{2}\|\varphi^m_t(t)\|^2_{L^2} + \tfrac{\rho_2}{2}\|\psi^m_t(t)\|^2_{L^2} + \tfrac{\rho_1}{2}\|w^m_t(t)\|^2_{L^2} + \tfrac{b}{2}\|\psi^m_x(t)\|^2_{L^2} \\
& + \tfrac{k}{2}\| \, \varphi^m_x(t) + \psi^m(t) + lw^m(t)\|^2_{L^2} + \tfrac{k_0}{2}\|w^m_x(t) - l\varphi^m(t)\|^2_{L^2}.
\end{aligned}
$$

De (3.23) e $(A_5)''$ temos que

$$
\begin{aligned}
E_m(t) \leq E_m(0) = \; & \tfrac{\rho_1}{2}\|\varphi^m_1\|^2_{L^2} + \tfrac{\rho_2}{2}\|\psi^m_1\|^2_{L^2} + \tfrac{\rho_1}{2}\|w^m_1\|^2_{L^2} + \tfrac{b}{2}\|\psi^m_{0x}\|^2_{L^2} \\
& + \tfrac{k}{2}\| \, \varphi^m_{0x} + \psi^m_0 + lw^m_0\|^2_{L^2} + \tfrac{k_0}{2}\|w^m_{0x} - l\varphi^m_0\|^2_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Das convergências (3.13) e (3.14), existe $c > 0$ tal que

$$E_m(t) \leq E_m(0) \leq c. \tag{3.24}$$

Do Lema 2.1 e da desigualdade acima segue que

$$\|\varphi^m_x(t)\|^2_{L^2} + \|\psi^m_x(t)\|^2_{L^2} + \|w^m_x(t)\|^2_{L^2} \leq C_0. \tag{3.25}$$

Assim, de (3.24) e (3.25) concluímos que

$$\begin{aligned} (\varphi^m),\ (\psi^m),\ (w^m) &\quad \text{são limitadas em} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(0,L)), && (3.26)\\ (\varphi_t^m),\ (\psi_t^m),\ (w_t^m) &\quad \text{são limitadas em} \quad L^\infty(0,T;L^2(0,L)), && (3.27)\\ (\varphi_x^m+\psi^m+lw^m) &\quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;L^2(0,L)), && (3.28)\\ (w_x^m-l\varphi^m) &\quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;L^2(0,L)). && (3.29) \end{aligned}$$

Para a segunda estimativa vamos estimar os seguintes termos $\varphi_{tt}^m(0),\ \psi_{tt}^m(0)$ e $w_{tt}^m(0)$. Multiplicando (3.8) por $f_{jm}''(t)$, (3.9) por $h_{jm}''(t)$, (3.10) por $r_{jm}''(t)$ e somando de $j=1$ até m, obtemos

$$\rho_1(\varphi_{tt}^m,\varphi_{tt}^m)+k(\varphi_x^m+\psi^m+lw^m,\varphi_{ttx}^m)-k_0l(w_x^m-l\varphi^m,\varphi_{tt}^m)+(g_1(\varphi_t^m),\varphi_{tt}^m)=0, \tag{3.30}$$

$$\rho_2(\psi_{tt}^m,\psi_{tt}^m)+b(\psi_x^m,\psi_{ttx}^m)+k(\varphi_x^m+\psi^m+lw^m,\psi_{tt}^m)+(g_2(\psi_t^m),\psi_{tt}^m)=0, \tag{3.31}$$

$$\rho_1(w_{tt}^m,w_{tt}^m)+k_0(w_x^m-l\varphi^m,w_{ttx}^m)+kl(\varphi_x^m+\psi^m+lw^m,w_{tt}^m)+(g_3(w_t^m),w_{tt}^m)=0. \tag{3.32}$$

Fazendo $t=0$ em (3.30) e aplicando integração por partes temos

$$\begin{aligned} &\rho_1\|\varphi_{tt}^m(0)\|_{L^2}^2-k\int_0^L(\varphi_{xx}^m(0)+\psi_x^m(0)+lw_x^m(0))\varphi_{tt}^m(0)dx\\ &-k_0l\int_0^L(w_x^m(0)-l\varphi^m(0))\varphi_{tt}^m(0)dx+\int_0^L g_1(\varphi_t^m(0))\varphi_{tt}^m(0)dx=0, \end{aligned}$$

Da Desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\begin{aligned} \rho_1\|\varphi_{tt}^m(0)\|_{L^2}^2 &\le k\|\varphi_{xx}^m(0)+\psi_x^m(0)+lw_x^m(0)\|_{L^2}\|\varphi_{tt}^m(0)\|_{L^2}\\ &\quad +k_0l\|w_x^m(0)-l\varphi^m(0)\|_{L^2}\|\varphi_{tt}^m(0)\|_{L^2}+\|g_1(\varphi_t^m(0))\|_{L^2}\|\varphi_{tt}^m(0)\|_{L^2}, \end{aligned}$$

e da Desigualdade de Young obtemos

$$\begin{aligned} \rho_1\|\varphi_{tt}^m(0)\|_{L^2}^2 &\le kc_\varepsilon\|\varphi_{xx}^m(0)+\psi_x^m(0)+lw_x^m(0)\|_{L^2}^2+\varepsilon\|\varphi_{tt}^m(0)\|_{L^2}^2+k_0lc_\varepsilon\|w_x^m(0)-l\varphi^m(0)\|_{L^2}^2\\ &\quad +\varepsilon\|\varphi_{tt}^m(0)\|_{L^2}^2+c_\varepsilon\|g_1(\varphi_t^m(0))\|_{L^2}^2+\varepsilon\|\varphi_{tt}^m(0)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} (\rho_1-3\varepsilon)\|\varphi_{tt}^m(0)\|_{L^2}^2 &\le kc_\varepsilon\|\varphi_{xx}^m(0)+\psi_x^m(0)+lw_x^m(0)\|_{L^2}^2+k_0lc_\varepsilon\|w_x^m(0)-l\varphi^m(0)\|_{L^2}^2\\ &\quad +c_\varepsilon\|g_1(\varphi_t^m(0))\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon=\frac{\rho_1}{6}$ e usando que g_1 satisfaz $(A_5)'$, $H_0^1\hookrightarrow L^q(0,L)\ \forall\ q\ge 1$, segue das convergências (3.13) e (3.14) que

$$\|\varphi_{tt}^m(0)\|_{L^2}^2\le c, \tag{3.33}$$

para alguma constante $c>0$.

De modo análogo, usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young em

$t = 0$ nas equações (3.31) e (3.32) obtemos,

$$\|\psi_{tt}^m(0)\|_{L^2}^2 \le c, \ \|w_{tt}^m(0)\|_{L^2}^2 \le c, \tag{3.34}$$

para alguma constante $c > 0$.

Estimativa a priori 2. Derivando o problema aproximado em relação a t, depois multiplicando a primeira equação obtida por $f''_{jm}(t)$, a segunda por $h''_{jm}(t)$, a terceira por $r''_{jm}(t)$ e somando de $j = 1$ até m, obtemos

$$\rho_1(\varphi_{ttt}^m, \varphi_{tt}^m) + k(\varphi_{tx}^m + \psi_t^m + lw_t^m, \varphi_{ttx}^m) - k_0 l(w_{tx}^m - l\varphi_t^m, \varphi_{tt}^m) + (g_1'(\varphi_t^m)\varphi_{tt}^m, \varphi_{tt}^m) = 0, \tag{3.35}$$

$$\rho_2(\psi_{ttt}^m, \psi_{tt}^m) + b(\psi_{tx}^m, \psi_{ttx}^m) + k(\varphi_{tx}^m + \psi_t^m + lw_t^m, \psi_{tt}^m) + (g_2'(\psi_t^m)\psi_{tt}^m, \psi_{tt}^m) = 0, \tag{3.36}$$

$$\rho_1(w_{ttt}^m, w_{tt}^m) + k_0(w_{tx}^m - l\varphi_t^m, w_{ttx}^m) + kl(\varphi_{tx}^m + \psi_t^m + lw_t^m, w_{tt}^m) + (g_3'(w_t^m)w_{tt}^m, w_{tt}^m) = 0. \tag{3.37}$$

Somando (3.35), (3.36), (3.37), reagrupando os termos e considerando

$$\begin{aligned} F(t) =& \rho_1\|\varphi_{tt}^m\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\psi_{tt}^m\|_{L^2}^2 + \rho_1\|w_{tt}^m\|_{L^2}^2 + b\|\psi_{tx}^m\|_{L^2}^2 \\ &+ k\| \ \varphi_{tx}^m + \psi_t^m + lw_t^m\|_{L^2}^2 + k_0\|w_{tx}^m - l\varphi_t^m\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}F(t) = -\int_0^L g_1'(\varphi_t^m)(\varphi_{tt}^m)^2 dx - \int_0^L g_2'(\psi_t^m)(\psi_{tt}^m)^2 dx - \int_0^L g_3'(w_t^m)(w_{tt}^m)^2 dx \le 0$$

Segue da Hipótese (A_5)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}F(t) \le 0.$$

Integrando de 0 à t a desigualdade anterior, obtemos

$$F(t) \le F(0). \tag{3.38}$$

Além disso, de (3.33), (3.34) e (3.14) segue que $F(0) \le c$.
Utilizando (3.38), segue que

$$\begin{aligned} &\rho_1\|\varphi_{tt}^m(t)\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\psi_{tt}^m(t)\|_{L^2}^2 + \rho_1\|w_{tt}^m(t)\|_{L^2}^2 + b\|\psi_{tx}^m(t)\|_{L^2}^2 \\ &+ k\| \ \varphi_{tx}^m(t) + \psi_t^m(t) + lw_t^m(t)\|_{L^2}^2 + k_0\|w_{tx}^m(t) - l\varphi_t^m(t)\|_{L^2}^2 \le c. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.1 temos

$$\rho_1\|\varphi_{tt}^m(t)\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\psi_{tt}^m(t)\|_{L^2}^2 + \rho_1\|w_{tt}^m(t)\|_{L^2}^2 + \|\varphi_{tx}^m(t)\|_{L^2}^2 + \|\psi_{tx}^m(t)\|_{L^2}^2 + \|w_{tx}^m(t)\|_{L^2}^2 \le C,$$

onde C depende dos dados iniciais. Com isso, concluímos que

$$\begin{aligned}&(\varphi_t^m),\ (\psi_t^m),\ (w_t^m) \text{ são limitadas em } L^\infty(0,T;H_0^1(0,L)),\\&(\varphi_{tt}^m),\ (\psi_{tt}^m),\ (w_{tt}^m) \text{ são limitadas em } L^\infty(0,T;L^2(0,L)).\end{aligned}\tag{3.39}$$

Estimativa a priori 3. Multiplicando (3.8) por $\lambda_j f'_{jm}(t)$, (3.9) por $\lambda_j h'_{jm}(t)$ e (3.10) por $\lambda_j r'_{jm}(t)$, usando (3.6) e aplicando a integração por partes temos

$$\begin{aligned}&\rho_1(\varphi_{ttx}^m, f'_{jm}v_{jx}) + k(\varphi_{xx}^m + \psi_x^m + lw_x^m, f'_{jm}v_{jxx}) - k_0 l(w_{xx}^m - l\varphi_x^m, f'_{jm}v_{jx})\\&+((g_1(\varphi_t^m))_x, f'_{jm}v_{jx}) = 0,\\&\rho_2(\psi_{ttx}^m, h'_{jm}v_{jx}) + b(\psi_{xx}^m, h'_{jm}v_{jxx}) + k(\varphi_{xx}^m + \psi_x^m + lw_x^m, h'_{jm}v_{jx})\\&+((g_2(\psi_t^m))_x, h'_{jm}v_{jx}) = 0,\\&\rho_1(w_{ttx}^m, r'_{jm}v_{jx}) + k_0(w_{xx}^m - l\varphi_x^m, r'_{jm}v_{jxx}) + kl(\varphi_{xx}^m + \psi_x^m + lw_x^m, r'_{jm}v_{jx})\\&+((g_3(w_t^m))_x, r'_{jm}v_{jx}) = 0.\end{aligned}$$

Somando de $j = 1$ até m, obtemos

$$\begin{aligned}&\rho_1(\varphi_{ttx}^m, \varphi_{tx}^m) + k(\varphi_{xx}^m + \psi_x^m + lw_x^m, \varphi_{txx}^m) - k_0 l(w_{xx}^m - l\varphi_x^m, \varphi_{tx}^m) + ((g_1(\varphi_t^m))_x, \varphi_{tx}^m) = 0,\\&\rho_2(\psi_{ttx}^m, \psi_{tx}^m) + b(\psi_{xx}^m, \psi_{txx}^m) + k(\varphi_{xx}^m + \psi_x^m + lw_x^m, \psi_{tx}^m) + ((g_2(\psi_t^m))_x, \psi_{tx}^m) = 0,\\&\rho_1(w_{ttx}^m, w_{tx}^m) + k_0(w_{xx}^m - l\varphi_x^m, w_{txx}^m) + kl(\varphi_{xx}^m + \psi_x^m + lw_x^m, w_{tx}^m) + ((g_3(w_t^m))_x, w_{tx}^m) = 0.\end{aligned}$$

Assim reagrupando os termos, segue que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\rho_1\|\varphi_{tx}^m\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\psi_{tx}^m\|_{L^2}^2 + \rho_1\|w_{tx}^m\|_{L^2}^2 + b\|\psi_{xx}^m\|_{L^2}^2 + k\|\ \varphi_{xx}^m + \psi_x^m + lw_x^m\|_{L^2}^2 + k_0\|w_{xx}^m - l\varphi_x^m\|_{L^2}^2}_{\mathcal{F}(t)}\right)\\&= -\int_0^L g_1'(\varphi_t^m)(\varphi_{tx}^m)^2dx - \int_0^L g_2'(\psi_t^m)(\psi_{tx}^m)^2dx - \int_0^L g_3'(w_t^m)(w_{tx}^m)^2dx \leq 0\end{aligned}$$

Novamente da Hipótese (A_5), temos que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t) \leq 0$$

Assim, integrando a desigualdade acima, obtemos que

$$\mathcal{F}(t) \leq \mathcal{F}(0).$$

De (3.13) e (3.14) segue que $\mathcal{F}(0) \leq c$. Assim

$$\mathcal{F}(t) \leq C < \infty,$$

onde C depende dos dados iniciais.

Da desigualdade acima e do Lema 2.1 segue que

$$\|\varphi_{xx}^m(t)\|_{L^2}^2 + \|\psi_{xx}^m(t)\|_{L^2}^2 + \|w_{xx}^m(t)\|_{L^2}^2 \leq C.$$

Portanto

$$\begin{array}{rll} (\varphi^m),\ (\psi^m),\ (w^m) & \text{são limitadas em} & L^\infty(0,T;H^2(0,L)\cap H_0^1(0,L)), \\ (\varphi_{xx}^m + \psi_x^m + lw_x^m) & \text{é limitada em} & L^\infty(0,T;L^2(0,L)), \\ (w_{xx}^m - l\varphi_x^m) & \text{é limitada em} & L^\infty(0,T;L^2(0,L)). \end{array} \tag{3.40}$$

Vamos mostrar que $(g_1(\varphi_t^m))$, $(g_2(\psi_t^m))$ e $(g_3(w_t^m))$ são limitados em $L^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}}(0,T;L^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}}(0,L))$. De fato, como $g_1(0)=0$, pelo Teorema do Valor Médio, temos que para algum $\theta\in(0,1)$

$$|g_1(\varphi_t^m)| = |g_1(\varphi_t^m) - g_1(0)| = |g_1'(\theta\varphi_t^m)||\varphi_t^m|.$$

Da hipótese $(A_5)''$ temos

$$|g_1(\varphi_t^m)| \leq m_1^2(1+|\varphi_t^m|^\gamma)|\varphi_t^m| = m_1^2(|\varphi_t^m| + |\varphi_t^m|^{\gamma+1}).$$

Como φ_t^m é limitado em $L^\infty(0,T;H_0^1(0,L))$ e além disso, vale as imersões

$$L^\infty(0,T;H_0^1(0,L)) \hookrightarrow L^{\gamma+2}(0,T;L^{\gamma+2}(0,L)), \tag{3.41}$$

segue que

$$\int_0^T\int_0^L |g_1(\varphi_t^m)|^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}}dxdt \leq c\int_0^T\left(\int_0^L|\varphi_t^m|^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}}dx + \int_0^L|\varphi_t^m|^{\gamma+2}dx\right)dt.$$

Aplicando a Desigualdade de Holder temos que

$$\int_0^T\int_0^L |g_1(\varphi_t^m)|^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}}dxdt \leq cL^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}\int_0^T\left(\int_0^L|\varphi_t^m|^{\gamma+2}dx\right)^{\frac{1}{\gamma+1}}dt + c\int_0^T\int_0^L|\varphi_t^m|^{\gamma+2}dxdt,$$

e de (3.41) concluímos que

$$\int_0^T\int_0^L |g_1(\varphi_t^m)|^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}}dxdt \leq C.$$

Analogamente obtemos que

$$\int_0^T\int_0^L |g_2(\psi_t^m)|^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}}dxdt \leq C \quad \text{e} \quad \int_0^T\int_0^L |g_3(w_t^m)|^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}}dxdt \leq C$$

Portanto

$$(g_1(\varphi_t^m)),(g_2(\psi_t^m)) \text{ e } (g_3(w_t^m)) \text{ são limitados em } L^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}}(0,T;L^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}}(0,L)). \tag{3.42}$$

Passagem ao limite. De (3.26), (3.39), (3.40) e do Teorema 1.14, existem subsequências que serão denotadas igualmente a sequência de tal forma que

$$\begin{array}{lll}
\varphi^m \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi,\ \psi^m \overset{*}{\rightharpoonup} \psi,\ w^m \overset{*}{\rightharpoonup} w & \text{em} & L^\infty(0,T;L^2(0,L)),\\
\varphi_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi_t,\ \psi_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} \psi_t,\ w_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} w_t & \text{em} & L^\infty(0,T;L^2(0,L)),\\
\varphi_{tt}^m \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi_{tt},\ \psi_{tt}^m \overset{*}{\rightharpoonup} \psi_{tt},\ w_{tt}^m \overset{*}{\rightharpoonup} w_{tt} & \text{em} & L^\infty(0,T;L^2(0,L)),\\
\varphi_x^m+\psi^m+lw^m \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi_x+\psi+lw & \text{em} & L^\infty(0,T;L^2(0,L)),\\
\varphi_{xx}^m+\psi_x^m+lw_x^m \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi_{xx}+\psi_x+lw_x & \text{em} & L^\infty(0,T;L^2(0,L)),\\
w_x^m-l\varphi^m \overset{*}{\rightharpoonup} w_x-l\varphi & \text{em} & L^\infty(0,T;L^2(0,L))\\
w_{xx}^m-l\varphi_x^m \overset{*}{\rightharpoonup} w_{xx}-l\varphi_x & \text{em} & L^\infty(0,T;L^2(0,L)),\\
\psi_{xx}^m \overset{*}{\rightharpoonup} \psi_{xx} & \text{em} & L^\infty(0,T;L^2(0,L)) = \left[L^1(0,T;L^2(0,L))\right]'.
\end{array} \tag{3.43}$$

Assim, qualquer que seja $\eta \in L^1(0,T;L^2(0,L))$,

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_0^L \varphi_{tt}^m\eta dxdt &\longrightarrow \int_0^T\int_0^L \varphi_{tt}\eta dxdt,\\
\int_0^T\int_0^L \psi_{tt}^m\eta dxdt &\longrightarrow \int_0^T\int_0^L \psi_{tt}\eta dxdt,\\
\int_0^T\int_0^L w_{tt}^m\eta dxdt &\longrightarrow \int_0^T\int_0^L w_{tt}\eta dxdt,\\
\int_0^T\int_0^L (\varphi_{xx}^m+\psi_x^m+lw_x^m)\eta dxdt &\longrightarrow \int_0^T\int_0^L (\varphi_{xx}^m+\psi_x^m+lw_x^m)\eta dxdt,\\
\int_0^T\int_0^L (\varphi_x^m+\psi^m+lw^m)\eta dxdt &\longrightarrow \int_0^T\int_0^L (\varphi_x+\psi+lw)\eta dxdt,\\
\int_0^T\int_0^L (w_{xx}^m-l\varphi_x^m)\eta dxdt &\longrightarrow \int_0^T\int_0^L (w_{xx}-l\varphi_x)\eta dxdt,\\
\int_0^T\int_0^L (w_x^m-l\varphi^m)\eta dxdt, &\longrightarrow \int_0^T\int_0^L (w_x-l\varphi)\eta dxdt.\\
\int_0^T\int_0^L \psi_{xx}^m\eta dxdt &\longrightarrow \int_0^T\int_0^L \psi_{xx}\eta dxdt,
\end{aligned}$$

De (3.42) temos que,

$$g_1(\varphi_t^m) \rightharpoonup g_1(\varphi_t),\ g_2(\psi_t^m) \rightharpoonup g_2(\psi_t),\ g_3(w_t^m) \rightharpoonup g_3(w_t),$$

em $L^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}}(0,T;L^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}}(0,L)) = (L^{\gamma+2}(0,T;L^{\gamma+2}(0,L))'$, isto é, para todo $\eta \in L^{\gamma+2}(0,TL^{\gamma+2}(0,L))$

tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_0^L g_1(\varphi_t^m)\eta dxdt &\longrightarrow \int_0^T\int_0^L g_1(\varphi_t)\eta dxdt,\\
\int_0^T\int_0^L g_2(\psi_t^m)\eta dxdt &\longrightarrow \int_0^T\int_0^L g_2(\psi_t)\eta dxdt,\\
\int_0^T\int_0^L g_3(w_t^m)\eta dxdt &\longrightarrow \int_0^T\int_0^L g_3(w_t)\eta dxdt.
\end{aligned}$$

Sejam $j, m \in \mathbb{N}$, com $j \leq m$ fixando j, tomando em particular $\eta = v_j\theta$, com $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Então,

$$\begin{aligned}
\int_0^T (\varphi_{tt}^m, v_j)\theta(t)dt &\longrightarrow \int_0^T (\varphi_{tt}, v_j)\theta(t)dt,\\
\int_0^T (\psi_{tt}^m, v_j)\theta(t)dt &\longrightarrow \int_0^T (\psi_{tt}, v_j)\theta(t)dt,\\
\int_0^T (w_{tt}^m, v_j)\theta(t)dt &\longrightarrow \int_0^T (w_{tt}, v_j)\theta(t)dt,\\
\int_0^T (\varphi_{xx}^m + \psi_x^m + lw_x^m, v_j)\theta(t)dt &\longrightarrow \int_0^T (\varphi_{xx} + \psi_x + lw_x, v_j)\theta(t)dt,\\
\int_0^T (\psi_{xx}^m, v_j)\theta(t)dt &\longrightarrow \int_0^T (\psi_{xx}, v_j)\theta(t)dt,\\
\int_0^T (\varphi_x^m + \psi^m + lw^m, v_j)\theta(t)dt &\longrightarrow \int_0^T (\varphi_x + \psi + lw, v_j)\theta(t)dt,\\
\int_0^T (w_{xx}^m - l\varphi_x^m, v_j)\theta(t)dt &\longrightarrow \int_0^T (w_{xx} - l\varphi_x, v_j)\theta(t)dt,\\
\int_0^T (w_x^m - l\varphi^m, v_j)\theta(t)dt &\longrightarrow \int_0^T (w_x - l\varphi, v_j)\theta(t)dt,\\
\int_0^T (g_1(\varphi_t^m), v_j)\theta(t)dt &\longrightarrow \int_0^T (g_1(\varphi_t), v_j)\theta(t)dt,\\
\int_0^T (g_2(\psi_t^m), v_j)\theta(t)dt &\longrightarrow \int_0^T (g_2(\psi_t), v_j)\theta(t)dt,\\
\int_0^T (g_3(w_t^m), v_j)\theta(t)dt &\longrightarrow \int_0^T (g_3(w_t), v_j)\theta(t)dt.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Da integração por partes temos que o problema aproximado é dado por

$$\rho_1(\varphi_{tt}^m, v_j) - k(\varphi_{xx}^m + \psi_x^m + lw_x^m, v_j) - k_0 l(w_x^m - l\varphi^m, v_j) + (g_1(\varphi_t^m), v_j) = 0, \tag{3.45}$$

$$\rho_2(\psi_{tt}^m, v_j) - b(\psi_{xx}^m, v_j) + k(\varphi_x^m + \psi^m + lw^m, v_j) + (g_2(\psi_t^m), v_j) = 0, \tag{3.46}$$

$$\rho_1(w_{tt}^m, v_j) - k_0(w_{xx}^m - l\varphi_x^m, v_j) + kl(\varphi_x^m + \psi^m + lw^m, v_j) + (g_3(w_t^m), v_j) = 0. \tag{3.47}$$

Agora multiplicando (3.45)-(3.47) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando de $[0,T]$, tem-se

$$
\begin{aligned}
&\rho_1 \int_0^T (\varphi_{tt}^m, v_j)\theta(t)dt - k\int_0^T (\varphi_{xx}^m + \psi_x^m + lw_x^m, v_j)\theta(t)dt - k_0 l\int_0^T (w_x^m - l\varphi^m, v_j)\theta(t)dt \\
&+ \int_0^T (g_1(\varphi_t^m), v_j)\theta(t)dt = 0, \\
&\rho_2 \int_0^T (\psi_{tt}^m, v_j)\theta(t)dt - b\int_0^T (\psi_{xx}^m, v_j)\theta(t)dt + k\int_0^T (\varphi_x^m + \psi^m + lw^m, v_j)\theta(t)dt \\
&+ \int_0^T (g_2(\psi_t^m), v_j)\theta(t)dt = 0, \\
&\rho_1 \int_0^T (w_{tt}^m, v_j)\theta(t)dt - k_0\int_0^T (w_{xx}^m - l\varphi_x^m, v_j)\theta(t)dt + kl\int_0^T (\varphi_x^m + \psi^m + lw^m, v_j)\theta(t)dt \\
&+ \int_0^T (g_3(w_t^m), v_j)\theta(t)dt = 0,
\end{aligned}
$$

fazendo $m \longrightarrow \infty$, das convergências (3.44), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\rho_1 \int_0^T (\varphi_{tt}, v_j)\theta(t)dt - k\int_0^T (\varphi_{xx} + \psi_x + lw_x, v_j)\theta(t)dt - k_0 l\int_0^T (w_x - l\varphi, v_j)\theta(t)dt \\
&+ \int_0^T (g_1(\varphi_t), v_j)\theta(t)dt = 0, \\
&\rho_2 \int_0^T (\psi_{tt}, v_j)\theta(t)dt - b\int_0^T (\psi_{xx}, v_j)\theta(t)dt + k\int_0^T (\varphi_x + \psi + lw, v_j)\theta(t)dt \\
&+ \int_0^T (g_2(\psi_t), v_j)\theta(t)dt = 0, \\
&\rho_1 \int_0^T (w_{tt}, v_j)\theta(t)dt - k_0\int_0^T (w_{xx} - l\varphi_x, v_j)\theta(t)dt + kl\int_0^T (\varphi_x + \psi + lw, v_j)\theta(t)dt \\
&+ \int_0^T (g_3(w_t), v_j)\theta(t)dt = 0,.
\end{aligned}
$$

Como $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é base de $H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)$, assim para todo $v \in H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)$ tem-se

$$
\begin{aligned}
&\rho_1 \int_0^T (\varphi_{tt}, v)\theta(t)dt - k\int_0^T (\varphi_{xx} + \psi_x + lw_x, v)\theta(t)dt - k_0 l\int_0^T (w_x - l\varphi, v)\theta(t)dt \\
&+ \int_0^T (g_1(\varphi_t), v)\theta(t)dt = 0, \\
&\rho_2 \int_0^T (\psi_{tt}, v)\theta(t)dt - b\int_0^T (\psi_{xx}, v)\theta(t)dt + k\int_0^T (\varphi_x + \psi + lw, v)\theta(t)dt \\
&+ \int_0^T (g_2(\psi_t), v)\theta(t)dt = 0, \\
&\rho_1 \int_0^T (w_{tt}, v)\theta(t)dt - k_0\int_0^T (w_{xx} - l\varphi_x, v)\theta(t)dt + kl\int_0^T (\varphi_x + \psi + lw, v)\theta(t)dt \\
&+ \int_0^T (g_3(w_t), v)\theta(t)dt = 0.
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

Podemos reescrever o sistema (3.48) da forma

$$\begin{aligned}\langle\langle \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_{xx} + \psi_x + lw_x) - k_0 l(w_x - l\varphi) + g_1(\varphi_t), \theta(t)\rangle v\rangle = 0,\\ \langle\langle \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + g_2(\psi_t), \theta(t)\rangle v\rangle = 0,\\ \langle\langle \rho_1 w_{tt} - k_0(w_{xx} - l\varphi_x) + kl(\varphi_x + \psi + lw) + g_3(w_t), \theta(t)\rangle v\rangle = 0,\\ \forall\, v \in H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L) \text{ e } \forall\, \theta \in \mathcal{D}(0,T).\end{aligned}$$

Isto significa que

$$\begin{aligned}\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + g_1(\varphi_t) = 0,\\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + g_2(\psi_t) = 0,\\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) + g_3(w_t) = 0,\end{aligned}$$

em $\mathcal{D}'(0,T,H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L))$. Como

$$\varphi_{tt},\ k(\varphi_x + \psi + lw)_x,\ k_0 l(w_x - l\varphi) \in L^\infty(0,T;L^2(0,L)),$$

segue que $g_1(\varphi_t) \in L^\infty(0,T;L^2(0,L))$.
De modo análogo temos que $g_2(\psi_t),\ g_3(w_t) \in L^\infty(0,T;L^2(0,L))$.
Com isso concluímos que

$$\begin{aligned}\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + g_1(\varphi_t) = 0,\\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + g_2(\psi_t) = 0,\\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) + g_3(w_t) = 0,\end{aligned}$$

em $L^\infty(0,T;L^2(0,L))$.

Condições Iniciais. Devemos mostrar as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}\varphi(0) = \varphi_0,\ \psi(0) = \psi_0,\ w(0) = w_0,\\ \varphi_t(0) = \varphi_1,\ \psi_t(0) = \psi_1,\ w_t(0) = w_1.\end{aligned}$$

Primeiramente mostraremos que $\varphi(0) = \varphi_0$. De fato, seja $\theta \in C^1([0,T])$, de modo que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Como $\varphi_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi_t$ em $L^\infty(0,T;H_0^1(0,L))$ e $v_j\theta \in L^1(0,T;H^{-1}(0,L))$, temos que

$$\int_0^T (\varphi_t^m, v_j)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (\varphi_t, v_j)\theta(t)dt \ \text{ quando } m \longrightarrow \infty.$$

Integrando por partes, segue que

$$-(\varphi^m(0), v_j) - \int_0^T (\varphi^m, v_j)\theta'(t)dt \longrightarrow -(\varphi(0), v_j) - \int_0^T (\varphi, v_j)\theta'(t)dt.$$

De maneira análoga, da convergência $\varphi^m \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ em $L^\infty(0,T;H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L))$ e como $v_j\theta' \in L^\infty(0,T;H^2(0,L)\cap H_0^1(0,L))$

$$\int_0^T (\varphi^m, v_j)\theta'(t)dt \longrightarrow \int_0^T (\varphi, v_j)\theta'(t)dt \text{ quando } m \longrightarrow \infty.$$

Deste modo,

$$-(\varphi^m(0), v_j) = \left(-(\varphi^m(0), v_j) - \int_0^T (\varphi^m, v_j)\theta'(t)dt\right) + \int_0^T (\varphi^m, v_j)\theta'(t)dt \longrightarrow -(\varphi(0), v_j),$$

quando $m \longrightarrow \infty$. Como $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma base de $H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)$, segue que

$$(\varphi^m(0), v) \longrightarrow (\varphi(0), v),\ \forall\, v \in H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L).$$

Logo, $\varphi^m(0) \rightharpoonup \varphi(0)$. De (3.13) sabemos que

$$\varphi^m(0) \longrightarrow \varphi_0 \text{ em } H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L),$$

assim, $\varphi^m(0) \rightharpoonup \varphi_0$ em $H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)$. Portanto, pela unicidade do limite fraco concluímos que $\varphi(0) = \varphi_0$. De maneira análoga temos que $\psi(0) = \psi_0$ e $(0) = w_0$. Agora vamos mostrar que $\varphi_t(0) = \varphi_1,\ \psi_t(0) = \psi_1,\ w_t(0) = w_1$. Novamente seja $\theta \in C^1([0,T])$, tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$ e sejam $j, m \in \mathbb{N}$ tais que $j \leq m$. Multiplicando (3.45) por θ e integrando sobre $[0,T]$, tem-se

$$\begin{aligned}&\rho_1 \int_0^T (\varphi_{tt}^m, v_j)\theta(t)dt - k\int_0^T (\varphi_{xx}^m + \psi_x^m + lw_x^m, v_j)\theta(t)dt - k_0 l \int_0^T (w_x^m - l\varphi^m, v_j)\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (g_1(\varphi_t^m), v_j)\theta(t)dt = 0.\end{aligned} \tag{3.49}$$

Da integração por partes, segue que

$$\int_0^T (\varphi_{tt}^m, v_j)\theta(t)dt = -(\varphi_t^m(0), v_j) - \int_0^T (\varphi_t^m, v_j)\theta'(t)dt,$$

substituindo em (3.49), tomando o limite $m \longrightarrow \infty$ e lembrando que $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é base de $H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)$, temos que

$$\begin{aligned}&-\rho_1(\varphi_1, v) - \rho_1 \int_0^T (\varphi_t, v)\theta'(t)dt - k\int_0^T (\varphi_{xx} + \psi_x + lw_x, v)\theta(t)dt \\ &- k_0 l \int_0^T (w_x - l\varphi, v)\theta(t)dt + \int_0^T (g_1(\varphi_t), v)\theta(t)dt = 0,\end{aligned}$$

para todo $v \in H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)$. Novamente da integração por partes, obtemos

$$\int_0^T (\varphi_t, v)\theta'(t)dt = -(\varphi_t(0), v) - \int_0^T (\varphi_{tt}, v)\theta(t)dt.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&-\rho_1(\varphi_1, v) + \rho_1(\varphi_t(0), v) + \rho_1 \int_0^T (\varphi_{tt}, v)\theta(t)dt - k\int_0^T (\varphi_{xx} + \psi_x + lw_x, v)\theta(t)dt \\
&- k_0 l \int_0^T (w_x - l\varphi, v)\theta(t)dt + \int_0^T (g_1(\varphi_t), v)\theta(t)dt = 0,
\end{aligned}$$

De $(3.48)_1$ e da equação acima segue que

$$(\varphi_1, v) = (\varphi_t(0), v), \ \ \forall\, v \in H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L).$$

Logo, $\varphi_t(0) = \varphi_1$.

Multiplicando (3.46) por θ e integrando sobre $[0,T]$, tem-se

$$\begin{aligned}
&\rho_2 \int_0^T (\psi_{tt}^m, v_j)\theta(t)dt - b\int_0^T (\psi_{xx}^m, v_j)\theta(t)dt + k\int_0^T (\varphi_x^m + \psi^m + lw^m, v_j)\theta(t)dt \\
&+ \int_0^T (g_2(\psi_t^m), v_j)\theta(t)dt = 0.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Da integração por partes, segue que

$$\int_0^T (\psi_{tt}^m, v_j)\theta(t)dt = -(\psi_t^m(0), v_j) - \int_0^T (\psi_t^m, v_j)\theta'(t)dt,$$

substituindo em (3.50), tomando o limite $m \longrightarrow \infty$ e lembrando que $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é base de $H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)$, temos que

$$\begin{aligned}
&-\rho_2(\psi_1, v) - \rho_2 \int_0^T (\psi_t, v)\theta'(t)dt - b\int_0^T (\psi_{xx}, v)\theta(t)dt \\
&+ k\int_0^T (\varphi_x + \psi + lw, v)\theta(t)dt + \int_0^T (g_2(\psi_t), v)\theta(t)dt = 0,
\end{aligned}$$

para todo $v \in H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)$. Novamente da integração por partes, obtemos

$$\int_0^T (\psi_t, v)\theta'(t)dt = -(\psi_t(0), v) - \int_0^T (\psi_{tt}, v)\theta(t)dt,$$

logo,

$$
\begin{aligned}
&-\rho_2(\psi_1, v) + \rho_2(\psi_t(0), v) + \rho_2 \int_0^T (\psi_{tt}, v)\theta(t)dt - b \int_0^T (\psi_{xx}, v)\theta(t)dt \\
&+ k \int_0^T (\varphi_x + \psi + lw, v)\theta(t)dt + \int_0^T (g_2(\psi_t), v)\theta(t)dt = 0
\end{aligned}
$$

De $(3.48)_2$ e da equação acima segue que

$$
(\psi_1, v) = (\psi_t(0), v) \;\; \forall\, v \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \hookrightarrow L^2(0, L).
$$

Logo, $\psi_t(0) = \psi_1$.
Finalmente, multiplicando (3.47) por θ e integrando sobre $[0, T]$, tem-se

$$
\begin{aligned}
&\rho_1 \int_0^T (w_{tt}^m, v_j)\theta(t)dt - k_0 \int_0^T (w_{xx}^m - l\varphi_x^m, v_j)\theta(t)dt + kl \int_0^T (\varphi_x^m + \psi^m + lw^m, v_j)\theta(t)dt \\
&+ \int_0^T (g_3(w_t^m), v_j)\theta(t)dt = 0.
\end{aligned} \tag{3.51}
$$

Da integração por partes, segue que

$$
\int_0^T (w_{tt}^m, v_j)\theta(t)dt = -(w_t^m(0), v_j) - \int_0^T (w_t^m, v_j)\theta'(t)dt,
$$

substituindo em (3.51), tomando o limite $m \longrightarrow \infty$ e lembrando que $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é base de $H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)$, temos que

$$
\begin{aligned}
&-\rho_1(w_t(0), v_j) - \rho_1 \int_0^T (w_t, v_j)\theta'(t)dt - k_0 \int_0^T (w_{xx} - l\varphi_x, v)\theta(t)dt \\
&+ kl \int_0^T (\varphi_x + \psi + lw, v)\theta(t)dt + \int_0^T (g_3(w_t), v)\theta(t)dt = 0,
\end{aligned}
$$

para todo $v \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)$. Novamente da integração por partes, obtemos

$$
\int_0^T (w_t, v)\theta'(t)dt = -(w_t(0), v) - \int_0^T (w_{tt}, v)\theta(t)dt;
$$

logo,

$$
\begin{aligned}
&-\rho_1(w_1, v) + \rho_1(w_t(0), v) + \rho_1 \int_0^T (w_{tt}, v)\theta(t)dt - k_0 \int_0^T (w_{xx} - l\varphi_x, v)\theta(t)dt \\
&+ kl \int_0^T (\varphi_x + \psi + lw, v)\theta(t)dt + \int_0^T (g_3(w_t), v)\theta(t)dt = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto $(3.48)_3$ e da equação acima

$$
(w_1, v) = (w_t(0), v) \;\; \forall\, v \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \hookrightarrow L^2(0, L).
$$

Logo, $w_t(0) = w_1$.
Isto conclui a prova de que (φ, ψ, w) é uma solução forte de (3.1)-(3.5).
Unicidade. Sejam (φ, ψ, w) e $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{w})$ soluções de (3.1)-(3.4) com as mesmas condições iniciais. Então (Φ, Ψ, W) dado por

$$\Phi = \varphi - \tilde{\varphi},\ \Psi = \psi - \tilde{\psi},\ W = w - \tilde{w} \in L^\infty(0, T; H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L))$$

é solução do seguinte problema

$$\rho_1 \Phi_{tt} - k(\Phi_x + \Psi + lW)_x - k_0 l(W_x - l\Phi) + g_1(\varphi_t) - g_1(\tilde{\varphi}_t) = 0, \tag{3.52}$$

$$\rho_2 \Psi_{tt} - b\Psi_{xx} + k(\Phi_x + \Psi + lW) + g_2(\psi_t) - g_2(\tilde{\psi}_t) = 0, \tag{3.53}$$

$$\rho_1 W_{tt} - k_0(W_x - l\Phi)_x + kl(\Phi_x + \Psi + lw) + g_3(w_t) - g_3(\tilde{w}_t) = 0, \tag{3.54}$$

com condições iniciais

$$\begin{aligned} \Phi(\cdot, 0) = 0, &\quad \Phi_t(\cdot, 0) = 0, \\ \Psi(\cdot, 0) = 0, &\quad \Psi_t(\cdot, 0) = 0, \\ W(\cdot, 0) = 0, &\quad W_t(\cdot, 0) = 0. \end{aligned} \tag{3.55}$$

e condições de fronteira

$$\Phi(0, t) = \Phi(L, t) = \Psi(0, t) = \Psi(L, t) = W(0, t) = W(L, t) = 0. \tag{3.56}$$

Multiplicando (3.52) por Φ_t, (3.53) por Ψ_t e (3.54) por W_t e integrando de 0 à L, temos

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^L \Phi_{tt}\Phi_t dx \underbrace{- k \int_0^L (\Phi_x + \Psi + lW)_x \Phi_t dx} - k_0 l \int_0^L (W_x - l\Phi)\Phi_t dx& \\ + \int_0^L \left(g_1(\varphi_t) - g_1(\tilde{\varphi}_t)\right) \Phi_t dx &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \int_0^L \Psi_{tt}\Psi_t dx \underbrace{- b \int_0^L \Psi_{xx}\Psi_t dx} + k \int_0^L (\Phi_x + \Psi + lW)\Psi_t dx& \\ + \int_0^L \left(g_2(\psi_t) - g_2(\tilde{\psi}_t)\right) \Psi_t dx &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^L W_{tt}W_t dx - \underbrace{k_0 \int_0^L (W_x - l\Phi)_x W_t dx} + kl \int_0^L (\Phi_x + \Psi + lW)W_t dx& \\ + \int_0^L \left(g_3(w_t) - g_2(\tilde{w}_t)\right) W_t dx &= 0. \end{aligned}$$

Integrando por partes os termos destacados, obtemos

$$\rho_1 \int_0^L \Phi_{tt}\Phi_t dx + k\int_0^L (\Phi_x + \Psi + lW)\Phi_{tx} dx - k_0 l \int_0^L (W_x - l\Phi)\Phi_t dx + \int_0^L (g_1(\varphi_t) - g_1(\tilde{\varphi}_t))\,\Phi_t dx = 0,$$

$$\rho_2 \int_0^L \Psi_{tt}\Psi_t dx + b\int_0^L \Psi_x\Psi_{tx} dx + k\int_0^L (\Phi_x + \Psi + lW)\Psi_t dx + \int_0^L \left(g_2(\psi_t) - g_2(\tilde{\psi}_t)\right)\Psi_t dx = 0,$$

$$\rho_1 \int_0^L W_{tt}W_t dx + k_0\int_0^L (W_x - l\Phi)W_{tx} dx + kl\int_0^L (\Phi_x + \Psi + lW)W_t dx + \int_0^L (g_3(w_t) - g_2(\tilde{w}_t))\,W_t dx = 0.$$

Somando as equações acima e reagrupando os termos, obtemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) + \int_0^L (g_1(\varphi_t) - g_1(\tilde{\varphi}_t))\Phi_t dx + \int_0^L (g_2(\psi_t) - g_2(\tilde{\psi}_t))\Psi_t dx + \int_0^L (g_3(w_t) - g_3(\tilde{w}_t))W_t dx = 0, \tag{3.57}$$

onde

$$\mathcal{E}(t) = (\rho_1\|\Phi_t\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\Psi_t\|_{L^2}^2 + \rho_1\|W_t\|_{L^2}^2 + b\|\Psi_x\|_{L^2}^2 + k\|\,\Phi_x + \Psi + lW\|_{L^2}^2 + k_0\|W_x - l\Phi\|_{L^2}^2).$$

Por outro lado, pelo Teorema do Valor Médio existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$[g_1(\varphi_t) - g_1(\tilde{\varphi}_t)]\Phi_t = \int_0^1 g_1'(\theta\varphi_t + (1-\theta)\tilde{\varphi}_t)d\theta\Phi_t^2.$$

Da hipótese da g_i (A_5) temos que

$$\int_0^1 g_1'(\theta\varphi_t + (1-\theta)\tilde{\varphi}_t)\Phi_t^2 d\theta \geq m_1^1 \int_0^1 |\theta\varphi_t + (1-\theta)\tilde{\varphi}_t|^\gamma \Phi_t^2 d\theta \geq 0,$$

assim,

$$\int_0^L g_1(\varphi_t) - g_1(\tilde{\varphi}_t)\Phi_t dx \geq m_1^1 \int_0^L\int_0^1 |\theta\varphi_t + (1-\theta)\tilde{\varphi}_t|^\gamma \Phi_t^2 d\theta dx \geq 0.$$

Analogamente,

$$\int_0^L \left(g_2(\psi_t) - g_2(\tilde{\psi}_t)\right)\Psi_t dx \geq m_2^1 \int_0^L\int_0^1 |\theta\psi_t + (1-\theta)\tilde{\psi}_t|^\gamma \Psi_t^2 d\theta dx \geq 0,$$

$$\int_0^L (g_3(w_t) - g_3(\tilde{w}_t))\, W_t dx \geq m_3^1 \int_0^L \int_0^1 |\theta w_t + (1-\theta)\tilde{w}_t|^\gamma W_t^2 d\theta dx \geq 0.$$

Substituindo os resultados acima em (3.57), temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) + C_{m_1^1,\gamma}\int_0^L (|\varphi_t|^\gamma + |\tilde{\varphi}_t|^\gamma)\Phi_t^2 dx + C_{m_2^1,\gamma}\int_0^L (|\psi_t|^\gamma + |\tilde{\psi}_t|^\gamma)\Psi_t^2 dx \\ + C_{m_3^1,\gamma}\int_0^L (|w_t|^\gamma + |\tilde{w}_t|^\gamma) W_t^2 dx \leq 0.\end{aligned} \tag{3.58}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) \leq 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}0 \leq \mathcal{E}(t) \leq \ \mathcal{E}(0) = &\frac{\rho_1}{2}\|\Phi_t(0)\|_{L^2}^2 + \frac{\rho_2}{2}\|\Psi_t(0)\|_{L^2}^2 + \frac{\rho_1}{2}\|W_t(0)\|_{L^2}^2 + \frac{b}{2}\|\Psi_x(0)\|_{L^2}^2 \\ &+ \frac{k}{2}\| \Phi_x(0) + \Psi(0) + lW(0)\|_{L^2}^2 + \frac{k_0}{2}\|W_x(0) - l\Phi(0)\|_{L^2}^2\end{aligned} \tag{3.59}$$

Das condições iniciais e da desigualdade acima, concluímos que

$$\mathcal{E}(t) = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}&\frac{\rho_1}{2}\|\Phi_t(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\rho_2}{2}\|\Psi_t(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\rho_1}{2}\|W_t(t)\|_{L^2}^2 + \frac{b}{2}\|\Psi_x(t)\|_{L^2}^2 \\ &\qquad + \frac{k}{2}\| \Phi_x(t) + \Psi(t) + lW(t)\|_{L^2}^2 + \frac{k_0}{2}\|W_x(t) - l\Phi(t)\|_{L^2}^2 = 0.\end{aligned}$$

Do Lema 2.1, tem-se que

$$\|\Phi_x(t)\|_{L^2}^2 + \|\Psi_x(t)\|_{L^2}^2 + \|W_x(t)\|_{L^2}^2 \leq 0.$$

Assim da Desigualdade de Poincaré, segue que

$$\|\Phi(t)\|_{L^2}^2 \leq c_p^2\|\Phi_x(t)\|_{L^2}^2 \leq 0$$

e portanto $\Phi = 0$. Analogamente temos que $\Psi = 0$ e $W = 0$. $(\varphi, \psi, w) = (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{w})$ o que finaliza a prova do teorema. □

3.2 Decaimento da Energia

Nesta seção estudaremos o decaimento da energia referente ao problema (3.1)-(3.5) definido por

$$\begin{aligned}E(t) =&\frac{\rho_1}{2}\|\varphi_t(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\rho_2}{2}\|\psi_t(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\rho_1}{2}\|w_t(t)\|_{L^2}^2 + \frac{b}{2}\|\psi_x(t)\|_{L^2}^2 \\ &+ \frac{k}{2}\| \varphi_x(t) + \psi(t) + lw(t)\|_{L^2}^2 + \frac{k_0}{2}\|w_x(t) - l\varphi(t)\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Utilizando o método de Nakao (ver Lema 1.21) temos o seguinte resultado.

Teorema 3.2. *Assumindo que a Hipótese 1 seja satisfeita, então a energia correspondente à solução do problema (3.1)-(3.5) satisfaz:*

- *Se $\gamma > 0$ em (A_5), então existe uma constante positiva C tal que*

$$E(t) \leq C\,(1+t)^{-\frac{2}{\gamma}}, \quad \forall\, t > 0. \tag{3.60}$$

- *Se $\gamma = 0$ em (A_5), então existem constantes positivas C e β tais que*

$$E(t) \leq Ce^{-\beta t}, \quad \forall\, t \geq 0. \tag{3.61}$$

Demonstração: Da mesma forma como provado no Lema 2.6, temos que

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\int_0^L (g_1(\varphi_t)\varphi_t + g_2(\psi_t)\psi_t + g_3(w_t)w_t)dx.$$

Utilizando $(A_5)''$, temos que

$$\frac{d}{dt}E(t) + \alpha_1\int_0^L |\varphi_t|^{\gamma+2}dx + \alpha_2\int_0^L |\psi_t|^{\gamma+2}dx + \alpha_3\int_0^L |w_t|^{\gamma+2}dx \leq 0. \tag{3.62}$$

Integrando (3.62) de t a $t+1$, segue-se

$$\begin{aligned}&\alpha_1\int_t^{t+1}\int_0^L |\varphi_t|^{\gamma+2}dxds + \alpha_2\int_t^{t+1}\int_0^L |\psi_t|^{\gamma+2}dxds + \alpha_3\int_t^{t+1}\int_0^L |w_t|^{\gamma+2}dxds \\ &\leq E(t) - E(t+1) := Z(t)^2.\end{aligned}$$

Tomando $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} > 0$, temos que

$$\begin{aligned}&\alpha\left(\int_t^{t+1}\int_0^L |\varphi_t|^{\gamma+2}dxds + \int_t^{t+1}\int_0^L |\psi_t|^{\gamma+2}dxds + \int_t^{t+1}\int_0^L |w_t|^{\gamma+2}dxds\right) \\ &\leq E(t) - E(t+1) := Z(t)^2.\end{aligned} \tag{3.63}$$

De (3.63), temos

$$\int_t^{t+1}\int_0^L |\varphi_t|^{\gamma+2}dxds \leq \frac{1}{\alpha}Z(t)^2, \tag{3.64}$$

$$\int_t^{t+1}\int_0^L |\psi_t|^{\gamma+2}dxds \leq \frac{1}{\alpha}Z(t)^2, \tag{3.65}$$

$$\int_t^{t+1}\int_0^L |w_t|^{\gamma+2}dxds \leq \frac{1}{\alpha}Z(t)^2. \tag{3.66}$$

De (3.64)-(3.66), utilizando a Desigualdade de Hölder, com $\frac{\gamma}{\gamma+2}+\frac{2}{\gamma+2}=1$, obtemos

$$\int_t^{t+1}\int_0^L |\varphi_t|^2dxds \leq L^{\frac{\gamma}{\gamma+2}}\left(\int_t^{t+1}\int_0^L |\varphi_t|^{\gamma+2}dxds\right)^{\frac{2}{\gamma+2}} \leq \frac{L^{\frac{\gamma}{\gamma+2}}}{\alpha^{\frac{2}{\gamma+2}}}Z(t)^{\frac{4}{\gamma+2}}; \tag{3.67}$$

$$\int_t^{t+1}\int_0^L |\psi_t|^2dxds \leq L^{\frac{\gamma}{\gamma+2}}\left(\int_t^{t+1}\int_0^L |\psi_t|^{\gamma+2}dxds\right)^{\frac{2}{\gamma+2}} \leq \frac{L^{\frac{\gamma}{\gamma+2}}}{\alpha^{\frac{2}{\gamma+2}}}Z(t)^{\frac{4}{\gamma+2}}; \tag{3.68}$$

$$\int_t^{t+1}\int_0^L |w_t|^2dxds \leq L^{\frac{\gamma}{\gamma+2}}\left(\int_t^{t+1}\int_0^L |w_t|^{\gamma+2}dxds\right)^{\frac{2}{\gamma+2}} \leq \frac{L^{\frac{\gamma}{\gamma+2}}}{\alpha^{\frac{2}{\gamma+2}}}Z(t)^{\frac{4}{\gamma+2}}. \tag{3.69}$$

Somando (3.67), (3.68) e (3.69) membro a membro segue que,

$$\int_t^{t+1}\left(\|\varphi_t(s)\|_{L^2}^2+\|\psi_t(s)\|_{L^2}^2+\|w_t(s)\|_{L^2}^2\right)ds \leq \frac{3L^{\frac{\gamma}{\gamma+2}}}{\alpha^{\frac{2}{\gamma+2}}}Z(t)^{\frac{4}{\gamma+2}}. \tag{3.70}$$

Defina $H(s)=\|\varphi_t(s)\|_{L^2}^2+\|\psi_t(s)\|_{L^2}^2+\|w_t(s)\|_{L^2}^2$.
Assim de (3.70) segue-se

$$\int_t^{t+1}H(s)ds \leq \frac{3L^{\frac{\gamma}{\gamma+2}}}{\alpha^{\frac{2}{\gamma+2}}}Z(t)^{\frac{4}{\gamma+2}}. \tag{3.71}$$

Pelo Teorema do Valor Médio para integrais, existem $t_1 \in [t, t+\frac{1}{4}]$ e
$t_2 \in [t+\frac{3}{4}, t+1]$, tais que

$$\int_t^{t+\frac{1}{4}} H(s)ds = H(t_1)\frac{1}{4}$$

e

$$\int_{t+\frac{3}{4}}^{t+1} H(s)ds = H(t_2)\frac{1}{4}.$$

Como $H(s)\geq 0$ e $t_1, t_2 \in [t, t+1]$ e usando (3.71) temos

$$\int_t^{t+\frac{1}{4}} H(s)ds = H(t_1)\frac{1}{4} \leq \int_t^{t+1} H(s)ds \leq \frac{3L^{\frac{\gamma}{\gamma+2}}}{\alpha^{\frac{2}{\gamma+2}}} Z(t)^{\frac{4}{\gamma+2}}$$

e

$$\int_{t+\frac{3}{4}}^{t+1} H(s)ds = H(t_2)\frac{1}{4} \leq \int_t^{t+1} H(s)ds \leq \frac{3L^{\frac{\gamma}{\gamma+2}}}{\alpha^{\frac{2}{\gamma+2}}} Z(t)^{\frac{4}{\gamma+2}},$$

ou seja,

$$\|\varphi_t(t_i)\|_{L^2}^2 + \|\psi_t(t_i)\|_{L^2}^2 + \|w_t(t_i)\|_{L^2}^2 \leq \frac{12L^{\frac{\gamma}{\gamma+2}}}{\alpha^{\frac{2}{\gamma+2}}} Z(t)^{\frac{4}{\gamma+2}}, \quad i = 1, 2. \tag{3.72}$$

Agora, multiplicando (3.1) por φ, (3.2) por ψ e (3.3) por w integrando de 0 à L e da integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi dx - \rho_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 dx = &- k\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\varphi_x dx + k_0 l \int_0^L (w_x - l\varphi)\varphi dx \\ &- \int_0^L g_1(\varphi_t)\varphi dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_2 \int_0^L \psi_t \psi dx - \rho_2 \int_0^L |\psi_t|^2 dx = &- b\int_0^L \psi_x \psi_x dx - k\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\psi dx \\ &- \int_0^L g_2(\psi_t)\psi dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_1 \int_0^L w_t w dx - \rho_1 \int_0^L |w_t|^2 dx = &- k_0\int_0^L (w_x - l\varphi)w_x dx - kl\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)w dx \\ &- \int_0^L g_3(w_t)w dx.\end{aligned}$$

Somando membro a membro e organizando os termos, obtemos,

$$\begin{aligned}&k\| \varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2 \\ =& -\frac{d}{dt}\left(\rho_1\int_0^L \varphi_t\varphi dx + \rho_2\int_0^L \psi_t\psi dx + \rho_1\int_0^L w_t w dx\right) - \int_0^L g_1(\varphi_t)\varphi dx \\ &- \int_0^L g_2(\psi_t)\psi dx - \int_0^L g_3(w_t)w dx + \rho_1\|\varphi_t\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\psi_t\|_{L^2}^2 + \rho_1\|w_t\|_{L^2}^2\end{aligned} \tag{3.73}$$

Somando $\left(\rho_1\|\varphi_t\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\psi_t\|_{L^2}^2 + \rho_1\|w_t\|_{L^2}^2\right)$ em ambos os lados de (3.73), temos

$$\begin{aligned}2E(t) = &-\frac{d}{dt}\left(\rho_1\int_0^L \varphi_t\varphi dx + \rho_2\int_0^L \psi_t\psi dx + \rho_1\int_0^L w_t w dx\right) + I_g \\ &+2\left(\rho_1\|\varphi_t\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\psi_t\|_{L^2}^2 + \rho_1\|w_t\|_{L^2}^2\right),\end{aligned}$$

onde $I_g = -\int_0^L (g_1(\varphi_t)\varphi dx - \int_0^L g_2(\psi_t)\psi dx - \int_0^L g_3(w_t) w dx.$

Integrando de t_1 a t_2 a desigualdade anterior, segue-se

$$2\int_{t_1}^{t_2} E(s)ds = I_1 + I_2 + I_3. \tag{3.74}$$

onde

$$\begin{aligned}
I_1 = &- \rho_1 \int_0^L \varphi_t(t_2)\varphi(t_2)dx + \rho_1 \int_0^L \varphi_t(t_1)\varphi(t_1)dx \\
&- \rho_2 \int_0^L \psi_t(t_2)\psi(t_2)dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t(t_1)\psi(t_1)dx \\
&- \rho_1 \int_0^L w_t(t_2)w(t_2)dx + \rho_1 \int_0^L w_t(t_1)w(t_1)dx,
\end{aligned}$$

$$I_2 = \int_{t_1}^{t_2} I_g ds = -\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L g_1(\varphi_t)\varphi dxds - \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L g_2(\psi_t)\psi dxds - \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L g_3(w_t)wdxds,$$

$$I_3 = 2\int_{t_1}^{t_2} \left(\rho_1\|\varphi_t\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\psi_t\|_{L^2}^2 + \rho_1\|w_t\|_{L^2}^2\right) ds.$$

Como a energia é decrescente e utilizando Lema 2.1 tem-se

$$\begin{aligned}
\|\varphi(t_i)\|_{L^2} &\le \sup_{t\le s\le t+1} \|\varphi(s)\|_{L^2} \le c_p \sup_{t\le s\le t+1} \|\varphi_x(s)\|_{L^2} \\
&\le c_p \sup_{t\le s\le t+1} \sqrt{a_2 E(s)} \le c_p\sqrt{a_2E(t)} \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Analogamente, temos que

$$\|\psi(t_i)\|_{L^2} \le c_p\sqrt{a_2E(t)} \quad \text{e} \quad \|w(t_i)\|_{L^2} \le c_p\sqrt{a_2E(t)} \quad i = 1, 2. \tag{3.76}$$

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\begin{aligned}
|I_1| \le \quad & \rho_1\|\varphi_t(t_2)\|_{L^2}\|\varphi(t_2)\|_{L^2} + \rho_1\|\varphi_t(t_1)\|_{L^2}\|\varphi(t_1)\|_{L^2} \\
&+ \rho_2\|\psi_t(t_2)\|_{L^2}\|\psi(t_2)\|_{L^2} + \rho_2\|\psi_t(t_1)\|_{L^2}\|\psi(t_1)\|_{L^2} \\
&+ \rho_1\|w_t(t_2)\|_{L^2}\|w(t_2)\|_{L^2} + \rho_1\|w_t(t_1)\|_{L^2}\|w(t_1)\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

De (3.72), (3.75) e (3.76) resulta que

$$|I_1| \le (4\rho_1 + 2\rho_2)\left(\frac{12^{\frac{1}{2}} L^{\frac{\gamma}{2(\gamma+2)}}}{\alpha^{\frac{1}{\gamma+2}}} Z(t)^{\frac{2}{\gamma+2}}\right)\left(c_p\sqrt{a_2E(t)}\right). \tag{3.77}$$

Aplicando a Desigualdade de Young em (3.77) tem-se para todo $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|I_1| \leq C_\varepsilon Z(t)^{\frac{4}{\gamma+2}} + \frac{\varepsilon}{2}E(t). \tag{3.78}$$

Agora, observe que,

$$|I_2| \leq \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L |g_1(\varphi_t)||\varphi|dxds + \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L |g_2(\psi_t)||\psi|dxds + \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L |g_3(w_t)||w|dxds.$$

Da condição $(A_5)'$ temos que

$$\begin{aligned}|I_2| \leq\ & \beta_1\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L |\varphi_t|^{\gamma+1}|\varphi|dxds + \beta_1\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L |\varphi_t||\varphi|dxds\\ &+\beta_2\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L |\psi_t|^{\gamma+1}|\psi|dxds + \beta_2\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L |\psi_t||\psi|dxds\\ &+\beta_3\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L |w_t|^{\gamma+1}|w|dxds + \beta_3\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L |w_t||w|dxds.\end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Holder, com $\frac{\gamma+1}{\gamma+2} + \frac{1}{\gamma+2} = 1$ e tomando $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, obtemos

$$\begin{aligned}|I_2| \leq\ & \beta\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L |\varphi_t|^{\gamma+2}dxds\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma+2}}\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L |\varphi|^{\gamma+2}dxds\right)^{\frac{1}{\gamma+2}}\\ &+\beta\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L |\varphi_t|^{2}dxds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L |\varphi|^{2}dxds\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\beta\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L |\psi_t|^{\gamma+2}dxds\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma+2}}\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L |\psi|^{\gamma+2}dxds\right)^{\frac{1}{\gamma+2}}\\ &+\beta\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L |\psi_t|^{2}dxds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L |\psi|^{2}dxds\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\beta\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L |w_t|^{\gamma+2}dxds\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma+2}}\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L |w|^{\gamma+2}dxds\right)^{\frac{1}{\gamma+2}}\\ &+\beta\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L |w_t|^{2}dxds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L |w|^{2}dxds\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Como $t_1, t_2 \in [t, t+1]$ temos que $\int_{t_1}^{t_2} uds \leq \int_t^{t+1} uds \quad \forall\ u > 0$ Assim, de (3.67), (3.68) e (3.69) existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$\begin{aligned}|I_2| \leq & C_1 Z(t)^{\frac{2(\gamma+1)}{\gamma+2}}\sup_{t\leq s\leq t+1}\|\varphi(s)\|_{L^{\gamma+2}} + C_2 Z(t)^{\frac{2}{\gamma+2}}\sup_{t\leq s\leq t+1}\|\varphi(s)\|_{L^2}\\ &+ C_1 Z(t)^{\frac{2(\gamma+1)}{\gamma+2}}\sup_{t\leq s\leq t+1}\|\psi(s)\|_{L^{\gamma+2}} + C_2 Z(t)^{\frac{2}{\gamma+2}}\sup_{t\leq s\leq t+1}\|\psi(s)\|_{L^2}\\ &+ C_1 Z(t)^{\frac{2(\gamma+1)}{\gamma+2}}\sup_{t\leq s\leq t+1}\|w(s)\|_{L^{\gamma+2}} + C_2 Z(t)^{\frac{2}{\gamma+2}}\sup_{t\leq s\leq t+1}\|w(s)\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Da imersão $H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^{\gamma+2}(0,L)$ e pela Desigualdade de Poincaré, segue-se que

$$\begin{aligned}|I_2| \leq & C_3 Z(t)^{\frac{2(\gamma+1)}{\gamma+2}} \sup_{t\leq s\leq t+1} \|\varphi_x(s)\|_{L^2} + C_4 Z(t)^{\frac{2}{\gamma+2}} \sup_{t\leq s\leq t+1} \|\varphi_x(s)\|_{L^2} \\ & + C_3 Z(t)^{\frac{2(\gamma+1)}{\gamma+2}} \sup_{t\leq s\leq t+1} \|\psi_x(s)\|_{L^2} + C_4 Z(t)^{\frac{2}{\gamma+2}} \sup_{t\leq s\leq t+1} \|\psi_x(s)\|_{L^2} \\ & + C_3 Z(t)^{\frac{2(\gamma+1)}{\gamma+2}} \sup_{t\leq s\leq t+1} \|w_x(s)\|_{L^2} + C_4 Z(t)^{\frac{2}{\gamma+2}} \sup_{t\leq s\leq t+1} \|w_x(s)\|_{L^2},\end{aligned}$$

onde C_3 e C_4 são constantes positivas.
Do Lema 2.1 segue que

$$\sup_{t\leq s\leq t+1} \|\varphi_x(s)\|_{L^2}, \sup_{t\leq s\leq t+1} \|\psi_x(s)\|_{L^2}, \sup_{t\leq s\leq t+1} \|w_x(s)\|_{L^2} \leq \sup_{t\leq s\leq t+1} \sqrt{a_2 E(s)} = \sqrt{a_2 E(t)}.$$

Assim,

$$|I_2| \leq 3C_3 Z(t)^{\frac{2(\gamma+1)}{\gamma+2}} \sqrt{a_2 E(t)} + 3C_4 Z(t)^{\frac{2}{\gamma+2}} \sqrt{a_2 E(t)}.$$

Logo, da Desigualdade de Young, para cada $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon = C(C_3, C_4, \varepsilon) > 0$ tal que

$$|I_2| \leq C_\varepsilon \left(Z(t)^{\frac{4(\gamma+1)}{\gamma+2}} + Z(t)^{\frac{4}{\gamma+2}} \right) + \varepsilon E(t). \tag{3.79}$$

Finalmente de (3.67)-(3.69), existe uma constante $c > 0$ onde

$$I_3 \leq c Z(t)^{\frac{4}{\gamma+2}}. \tag{3.80}$$

Para simplificar a notação, usaremos C_ε para diferentes constantes que dependem de ε.
Substituindo (3.78), (3.79) e (3.80) em (3.74), tem-se

$$2\int_{t_1}^{t_2} E(s)ds \leq C_\varepsilon \left(Z(t)^{\frac{4(\gamma+1)}{\gamma+2}} + Z(t)^{\frac{4}{\gamma+2}} \right) + \varepsilon E(t). \tag{3.81}$$

Novamente pelo Teorema do Valor Médio para integrais, existe $\tau \in [t_1, t_2]$ tal que

$$\int_{t_1}^{t_2} E(s)ds = E(\tau)(t_2 - t_1) \geq \frac{1}{2} E(t+1),$$

pois a energia é decrescente. Assim,

$$2\int_{t_1}^{t_2} E(s)ds \geq E(t+1).$$

Como $E(t)-E(t+1)=Z(t)^2$ então

$$2\int_{t_1}^{t_2} E(s)ds \geq E(t)-Z(t)^2,$$

ou seja,

$$E(t) \leq Z(t)^2 + 2\int_{t_1}^{t_2} E(s)ds.$$

De (3.81) a desigualdade acima fica

$$E(t) \leq Z(t)^2 + C_\varepsilon \left(Z(t)^{\frac{4(\gamma+1)}{\gamma+2}} + Z(t)^{\frac{4}{\gamma+2}}\right) + \varepsilon E(t),$$

ou seja,

$$(1-\varepsilon)\, E(t) \leq Z(t)^2 + C_\varepsilon \left(Z(t)^{\frac{4(\gamma+1)}{\gamma+2}} + Z(t)^{\frac{4}{\gamma+2}}\right).$$

Tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existe $\bar{C}_\varepsilon > 0$ tal que

$$E(t) \leq 2Z(t)^2 + 2\bar{C}_\varepsilon \left(Z(t)^{\frac{4(\gamma+1)}{\gamma+2}} + Z(t)^{\frac{4}{\gamma+2}}\right),$$

que é equivalente a

$$E(t) \leq Z(t)^{\frac{4}{\gamma+2}} \left(\underbrace{2\bar{C}_\varepsilon + 2\bar{C}_\varepsilon Z(t)^{\frac{4\gamma}{\gamma+2}} + 2Z(t)^{\frac{2\gamma}{\gamma+2}}}_{I_4}\right).$$

Note que

$$Z(t)^2 := E(t) - E(t+1) \leq E(t) \leq E(0),$$

donde segue que existe $K = c(\bar{C}_\varepsilon, \varphi_0, \psi_0, w_0, \varphi_1, \psi_1, w_1) > 0$ tal que

$$I_4 \leq 2\bar{C}_\varepsilon + 2\bar{C}_\varepsilon E(0)^{\frac{2\gamma}{\gamma+2}} + 2E(0)^{\frac{\gamma}{\gamma+2}} \leq K.$$

Logo,

$$E(t) \leq KZ(t)^{\frac{4}{\gamma+2}}.$$

Elevando ambos os lados da desigualdade acima por $\frac{\gamma+2}{2}$, concluimos que,

$$E(t)^{1+\frac{\gamma}{2}} \leq CZ(t)^2 = C\left(E(t) - E(t+1)\right).$$

Portanto, pelo Lema de Nakao, (ver Lema 1.21) obtemos (3.60) e (3.61). Isto completa a demonstração do teorema. $\square$

4 CONCLUSÃO

Neste trabalho estudamos um sistema de Bresse com condições de contorno do tipo Dirichlet. Foi considerado um sistema de Bresse semilinear com dissipação do tipo friccional e fonte externa atuando nas três equações com acoplamento do tipo gradiente. Estabelecemos a existência e unicidade de solução através da teoria de semigrupos. Com relação ao decaimento utilizamos técnicas multiplicativas e não foi necessário assumir condições em relação aos coeficientes do sistema. Como a ideia inicial era utilizar o termo dissipativo mais geral, do tipo não linear, foi estudado no último capítulo o sistema de Bresse porém sem forças externas, as f_i. Através do método de Faedo-Galerkin foram mostrados a existência e unicidade de solução e com respeito aos resultados de decaimento utilizamos o método de Nakao. Com este trabalho obtivemos os mesmos resultados que em [11] utilizando métodos distintos, ou seja, foram obtidos dois tipos de decaimento polinomial e o exponencial da energia associado ao sistema dependendo do caso considerado.

REFERÊNCIAS

[1] Alves, M. O.; Fatori, L. H.; Jorge Silva, M. A.; Monteiro, R. N. *Stability and optimality of decay rate for a weakly dissipative Bresse system*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, vol. 38, issue 5, 898-908, 2015

[2] Boussouira, F. A.; Rivera. J. E. M.; Almeida, D. S. J.; *Stability to weak dissipative Bresse system*, J. Math. Anal. Appl 1-18, 2011

[3] Brézis. H. *Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones*. Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1984.

[4] Brézis. H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.

[5] Cavalcanti. M. M.; Domingos Cavalcanti., V. N. e Komornik. V., *Introdução à Análise Funcional*. Eduem - UEM, Maringá, PR, 2011.

[6] Charles. W.; Soriano J. A.; Nascimento. F. A. Falcão. e Rodrigues. J. H., *Decay rates for Bresse system with arbitrary nonlinear localized damping*, J. Differential Equations 255 2267-2290, 2013

[7] Coddington, E. A.; Levinson. N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill Book Company, Massachusetts, 1955.

[8] Fatori, L. H.; Monteiro, R. N. *The optimal decay rate for a weak dissipative Bresse system*. Appl. Math. Lett., 25, nº 3, 600-604, 2011

[9] Fatori. L. H.; Rivera. J.E.M., *Rates of decay to weak thermoelastic Bresse system*, IMA J. Appl. Math. 1-24, 2010

[10] Kreyszig. E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York, John Wiley, 1989.

[11] Li, D.; Zhang, C.; Hu, Q.; Zhang, H. *Energy Decay Rate for Bresse System with Nonlinear Localized Damping*.British Journal of Mathematics & Computer Science 4(12): 1665-1677, 2014

[12] Lima. P. R. *Sistema de Bresse termoelástico não linear: existencia global e estabilidade exponencial*, Dissertação de Mestrado PGMAC-UEL, 2015.

[13] Liu. Z.; Rao. B., *Energy decay rate of the thermoelastic Bresse system*. Z. Angew. Math. Phys. **60**, 54?69, 2009

[14] Ma. To. Fu; Monteiro. R. N., *Singular limit and long-time dynamics of Bresse systems*, ICMC-USP, SP, 2015.

[15] Medeiros, L.A., Miranda, M.M. *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*. Textos de Métodos Matemáticos 25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.

[16] Medeiros, L.A., Rivera, P.H. Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais. Textos de Métodos Matemáticos 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1975.

[17] Monteiro. R. N., *Comportamento Assintótico Para Sistemas de Bresse Dissipativos e Taxa Ótima*, Dissertação de Mestrado PGMAC-UEL, 2011.

[18] Narciso Vando, *Sobre um sistema de equações do tipo Timoshenko, baseado na equação de Carrier*, Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UEM, 2003.

[19] Pazy. A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, NY, 1983.

[20] Rivera. J. E. M., *Estabilização de Semigrupos e Aplicações*. Academia das Contas, 2008.

[21] Rivera, J. E. M. *Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais*. LNCC, Petrópolis, RJ, 2004.

[22] Soriano, J.A.; Rivera, J. E. M; Fatori, L. H. *Bresse system with indefinite damping*. Journal of Math. Anal. Appl., 387, 284-290, 2012.

[23] Zheng. S. *Nonlinear Evolutions Equations*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.