Universidade Estadual de Londrina

EDUARDO HENRIQUE GOMES TAVARES

MODELOS DE VIGAS VISCOELÁSTICAS EXTENSÍVEIS: BOA COLOCAÇÃO E ESTABILIDADE

Londrina
2016

EDUARDO HENRIQUE GOMES TAVARES

MODELOS DE VIGAS VISCOELÁSTICAS EXTENSÍVEIS: BOA COLOCAÇÃO E ESTABILIDADE

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva

Londrina
2016

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

S232c Tavares, Eduardo Henrique Gomes.
Modelos de vigas viscoelásticas extensíveis: boa colocação e estabilidade / Eduardo Henrique Gomes Tavares. – Londrina, 2016.
160 f. : il.

Orientador: Marcio Antonio Jorge da Silva.
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2016.

Inclui Bibliografia.

1. Análise matemática - Teses. 2. Equações diferenciais parciais - Teses. 3. Equações de evolução - Teses. 4. Estabilidade - Teses. I. Silva, Marcio Antonio Jorge da. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

519.681-7

EDUARDO HENRIQUE GOMES TAVARES

MODELOS DE VIGAS VISCOELÁSTICAS EXTENSÍVEIS: BOA COLOCAÇÃO E ESTABILIDADE

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva
Universidade Estadual de Londrina

Profa. Dra. Valéria Neves Domingos Cavalcanti
Universidade Estadual de Maringá

Profa. Dra. Luci Harue Fatori
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 22 de FEVEREIRO de 2016.

Dedico este trabalho as mulheres mais importantes na minha vida: minha mãe Liliam, minha vó Teresa e minha noiva Tatiana.

AGRADECIMENTOS

- Primeiramente, agradeço a Deus pela ótima e maravilhosa vida que tenho.
- Agradeço à minha mãe Liliam por confiar e acreditar em mim até quando eu mesmo não confiei.
- Agradeço à minha vó Teresa por sacrificar a maior parte da sua vida para que eu me tornasse a pessoa que sou hoje.
- Agradeço à minha noiva Tatiana por ser meu ombro nas horas que mais precisei, a minha inspiração quando estava sem ideia e por ser o meu grande amor, que poucos homens tem a chance de encontrar.
- Agradeço à minha família pelo apoio fornecido durante esta trajetória da minha vida.
- Agradeço aos meus amigos de longa data: Marlon (Nariga), Jonathan (Aibo), Lucas (Natalzinho), Julio (Patóla), Julio (Gordinho), Jesiel e a minha prima Leticia. Vocês estavam nas melhores e piores fases que eu passei na minha vida e sempre permaneceram ao meu lado.
- Agradeço aos meus novos amigos: Adriano (Boi), Carlos Eduardo (Chicharito), Eiji (Danone) e Robson Gaebler (in memorian) pelo ótimo convívio durante nossa batalha no mestrado.
- Agradeço aos meus amigos da graduação, em particular, ao Will e a Talita pelos ótimos momentos vividos.
- Agradeço aos meus professores da graduação e do mestrado pelo conhecimento fornecido.
- Agradeço à professora Renata Cristina Evaristo por me incentivar e despertar meu interesse na matemática.
- Agradeço ao meu orientador Marcio Antonio Jorge da Silva pelo ótimo convívio, pelos incentivos e principalmente pela minha evolução acadêmica.
- Agradeço à Capes pelo total apoio financeiro.

GOMES TAVARES , Eduardo Henrique. **Modelos de vigas viscoelásticas extensíveis: boa colocação e estabilidade**. 2016. 160 páginas. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos resultados de existência, unicidade, dependência contínua e taxas de decaimento de energia correspondente a uma classe geral de modelos de vigas viscoelásticas extensíveis. Os principais resultados estão concentrados nos Capítulos 3 e 4. Inicialmente, no Capítulo 2 é fornecida uma breve revisão sobre resultados teóricos de análise funcional, espaços de Sobolev, distribuições e semigrupos lineares, para que este trabalho fique o mais autossuficiente possível. No Capítulo 3, é considerado o modelo com história nula. Neste caso, a existência e unicidade de solução são dadas pelos métodos de Faedo-Galerkin e Visik-Ladyzhenskaya, respectivamente. A estabilidade de energia é mostrada de duas maneiras, a saber, é obtido uma taxa de decaimento geral através do método da energia perturbada onde o núcleo de memória satisfaz uma desigualdade diferencial linear. Em seguida, assumindo que o núcleo de memória satisfaz uma desigualdade diferencial não linear, é estabelecida uma taxa de decaimento uniforme mostrando algumas estimativas integrais e comparando a energia com a solução de uma EDO não linear. No Capítulo 4, é estudado o modelo viscoelástico com história. Neste caso, é introduzido um sistema autônomo equivalente e sua boa colocação é obtida por meio da teoria de semigrupos. A estabilidade da energia associada a este sistema também é estabelecida fornecendo dois tipos de taxas de decaimento uniforme, assim como foi obtido no problema anterior. É importante ressaltar que em ambos os problemas o efeito de dissipação (agindo no sistema) é dado somente pelo termo de memória. Além disso, exemplos concretos de taxas de decaimento são apresentados para o núcleo da memória e, consequentemente, para a energia correspondente. Finalmente, mas não menos importante, apresentamos o Apêndice A com o objetivo de exibir alguns exemplos de funções reais satisfazendo as hipóteses clássicas convenientemente impostas para os termos não lineares.

Palavras-chave: Vigas extensíveis. Modelos viscoelásticos. Boa colocação. Taxas de decaimento de energia. Estabilidade geral.

GOMES TAVARES , Eduardo Henrique. **On the extensible viscoelastic beam models: Well-posedness and stability**. 2016. 160 pages. Master thesis (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – State University of Londrina, Londrina, 2016.

ABSTRACT

In this work it is presented results on existence, uniqueness, continuous dependence and energy decay rates corresponding to a general class of extensible viscoelastic beam models. The main results are concentrated in Chapters 3 and 4. Initially, in the preliminary Chapter 2, it is provided a brief review on theoretical results from functional analysis, Sobolev spaces, distributions and linear semigroups, in order to make this work more self-contained as possible. In Chapter 3 it is first considered the model with null past history. In such case, the existence and uniqueness of solution are given by Faedo-Galerkin and Visik-Ladyzhenskaya methods, respectively. The stability of the energy is shown in two ways, namely, it is obtained a general decay rate through perturbed energy method where the memory kernel satisfies a linear differential inequality. Then, assuming that the memory kernel fulfills a nonlinear differential inequality, it is established a uniform decay rate by showing some integral estimates and comparing the energy with a solution of a nonlinear ODE. In Chapter 4 it is studied the viscoelastic model with history. In this case, it is first introduced the autonomous equivalent system and its well-posedness is obtained through semigroup theory. The stability of its associated energy is also established by providing two types of uniform decay rates as obtained to the previous problem. It is worth pointing out that in both problems the damping effect (acting on the system) is only given by the memory term. In addition, concrete examples of decay rates are presented to the memory kernel and, consequently, to the corresponding energy solution. Last, but not at least, the Appendix A is presented in order to exhibit some examples of real functions satisfying the classical hypotheses properly chosen to the nonlinear source terms.

Keywords: Extensible beams. Viscoelastic models. Well-posedness. Energy decay rates. General stability.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Sejam $N \in \mathbb{N}$ e Ω um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave $\Gamma = \partial\Omega$ e $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Neste trabalho, vamos estudar a boa colocação e estabilidade de energia para um problema de valor inicial e de fronteira associado ao modelo de vigas extensíveis viscoelásticas. Mais precisamente, consideremos a equação

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^\infty g(s)\Delta^2 u(t-s)ds - M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u + f(u) = 0 \text{ em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \quad (1.1)$$

onde g, M e f são funções reais dadas e $\Delta^2 u := \Delta(\Delta u)$ é operador Biharmônico que, em conjunto com suas propriedades, será exibido na Definição 2.83 do Capítulo 2. Para simplificar a notação, sempre escreveremos u ou $u(t)$ ao invés de $u(x, t)$.

A equação (1.1) pode ser vista como generalização matemática do seguinte modelo introduzido por Giorgi, Pata e Vuk [12]

$$u_{tt} + \alpha u_{xxxx} + \int_0^\infty g(s)[u(t) - u(t-s)]_{xxxx} ds - \left(a + b\int_0^L |u_x|^2 dx\right) u_{xx} = f, \quad (1.2)$$

onde u representa a flexão transversal de uma viga viscoelástica extensível de comprimento L, com α, a, b sendo constantes físicas associadas ao material e f uma força externa. A modelagem física completa da equação (1.2) pode ser encontrada em [12, Apêndice A]. Neste trabalho, nosso principal objetivo é estudar questões matemáticas relativas a existência e unicidade de solução global para (1.1), bem como avaliar o decaimento de soluções ao longo do tempo. Isto será feito de duas maneira como explicaremos a seguir.

Usando mudança de variáveis, note que

$$\int_0^\infty g(s)\Delta^2 u(t-s)ds = \int_{-\infty}^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds.$$

Sendo assim, podemos reescrever a equação (1.1) como

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \int_{-\infty}^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds - M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u + f(u) = 0 \text{ em } \Omega \times \mathbb{R}^+. \quad (1.3)$$

No modelo (1.3) fica visível que a função u dever ser conhecida para valores negativos $s \in (-\infty, 0]$. Nesse caso, assumiremos que $u(\tau) = u_0(\tau)$ para todos $\tau \in (-\infty, 0]$, onde a função $u_0 : \Omega \times (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ deve ser previamente dada e é conhecida como *história* de u. Nos Capítulos 3 e 4 estudaremos dois casos, a saber, um com história nula ($u_0 \equiv 0$ em $(-\infty, 0)$) e outro com história não necessariamente nula. Como veremos nas seções subsequentes, obtemos dois modelos diferentes a partir de (1.3) (ou ainda de (1.1)).

1.1 O PROBLEMA COM MEMÓRIA E HISTÓRIA NULA

Neste caso, assumindo que $u(\tau) = u_0(\tau) \equiv 0$ para $\tau \leq 0$, então de (1.3) obtemos o seguinte modelo de vigas viscoelásticas extensíveis

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds - M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u + f(u) = 0 \text{ em } \Omega \times \mathbb{R}^+. \quad (1.4)$$

As condições de fronteira acopladas a (1.4) são as seguintes: condição de fronteira fixada

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times [0,T), \quad (1.5)$$

onde ν é o vetor normal unitário exterior, ou a condição de fronteira simplesmente apoiada

$$u = \Delta u = 0 \quad \text{sobre } \; \Gamma \times [0,T). \quad (1.6)$$

As condições iniciais correspondentes a (1.4) são

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.7)$$

Uma variação do modelo (1.4) foi estudado em [7]. Mais precisamente, os autores estabeleceram a existência e unicidade de solução global e estabilidade exponencial para o problema

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds + M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) u_t = 0 \text{ em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \quad (1.8)$$

assumindo que $M(s) > m_0 > 0$ e que

$$g'(t) \leq -cg(t), \quad t \geq 0, \quad (1.9)$$

para alguma constante $c > 0$. Note que o termo $M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) u_t$ fornece uma dissipação adicional para a equação (1.8), enquanto o termo $-M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u$ refere-se a extensibilidade do material na equação (1.4). O mesmo resultado de estabilidade exponencial, sob a condição (1.9), foi determinado por Rivera et al. [26] para a seguinte equação

$$u_{tt} - \gamma \Delta u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau = 0, \quad (1.10)$$

onde $\gamma > 0$. Messaoudi [22, 23] mostrou que se o núcleo de memória g satisfaz uma desigualdade diferencial linear, a saber,

$$g'(t) \leq -\xi(t)g(t), \quad t \geq 0, \quad (1.11)$$

então a energia $E_1(t)$ associada ao problema de onda viscoelástica

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau = f(u), \tag{1.12}$$

com $f(u) = 0$ ou $f(u) = u|u|^\gamma,\ \gamma > 0$, decai na seguinte taxa

$$E_1(t) \leq Ce^{-\gamma \int_0^t \xi(s)ds}, \quad t \geq 0, \tag{1.13}$$

para algumas constantes positivas C e γ. Nesses artigos, o autor considerou uma hipótese crucial para a função ξ, a qual é dada por

$$\left|\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\right| < k, \quad t \geq 0, \tag{1.14}$$

para alguma constante positiva k. Capobianco [4] mostrou a existência de soluções globais e o decaimento geral de energia para o problema (1.8) com $M \equiv 0$ e com condição de fronteira (1.6). Tosti [27] melhorou os resultados de Capobianco. Neste último, sob as hipóteses (1.11) e (1.14), assumindo que $M(s) > m_0 \geq 0$ e introduzindo um termo não linear $f(u)$, foi mostrado que o problema (1.8), com condições de fronteira (1.5) ou (1.6) é bem posto no sentido de Hadamard e que a energia decai na mesma taxa do núcleo g, ou seja, na taxa dada em (1.13). Em 2013, Lasiecka et al. [17] estabeleceram o decaimento uniforme de energia para o problema homogêneo abstrato associado a equação (1.12). Mais precisamente, assumindo que

$$g'(t) \leq -H(g(t)), \quad t \geq 0, \tag{1.15}$$

com H satisfazendo hipóteses apropriadas, então o decaimento de energia é governado pela solução de uma EDO não linear. No entanto, como observado pelos autores, tal decaimento não é capaz de recuperar a taxa de decaimento assumida para o núcleo de memória g em (1.15). Mais recentemente, Lasiecka e Wang [19] mostraram, sob uma hipótese adicional para a função H, que a energia associada a equação abstrata

$$u_{tt} + Au - \int_0^t g(t-\tau)Au(\tau)d\tau = f_s(u),$$

onde $A : D(A) \subset H \to H$ é um operador auto-adjunto positivo definido no espaço de Hilbert H, decai uniformemente para zero com a mesma taxa imposta ao núcleo da memória, o que os autores consideram como taxa ótima.

No Capítulo 3 mostraremos inicialmente a existência, unicidade e dependência contínua dos dados iniciais do problema (1.4)-(1.6). Usaremos como base os artigos [7, 8] e o livro [20] para mostrar a existência. Esta será feita via método de Faedo-Galerkin. A unicidade de solução fraca será feita utilizando o método de Visik-Ladyzhenskaya [28], a qual fizemos uma nova estimativa para um termo dependente do núcleo de memória g. Em seguida, motivados pelos trabalhos supracitados, estudaremos a estabilidade de energia de duas maneiras:

i) O primeiro decaimento de energia será provado utilizando argumentos de [14]. Mais especificamente, usaremos a hipótese (1.11) e algumas estimativas diferenciais para mostrar que o funcional de energia decai de forma geral assim como em [4, 22, 23, 27], ver Teorema 3.6 do Capítulo 3. Vale ressaltar que a hipótese (1.14) será excluída, uma vez que o método descrito em [14] é uma adaptação melhorada do método introduzido em [22].

ii) O segundo decaimento é baseado nos artigos [17, 19]. Assumiremos a hipótese (1.15) e mostraremos que o funcional de energia decai uniformemente para zero e que a taxa de decaimento está relacionada com a solução de uma EDO não linear, ver Teorema 3.7 do Capítulo 3. Neste caso, o resultado é obtido via estimativas integrais.

1.2 O PROBLEMA COM MEMÓRIA E HISTÓRIA NÃO NULA

Assumindo que a história não é identicamente nula, ou seja, que $u(\tau) = u_0(\tau) \not\equiv 0$ para $\tau \leq 0$, então retornamos ao modelo (1.1)

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^\infty g(s)\Delta^2 u(t-s)ds - M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u + f(u) = 0 \text{ em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \quad (1.16)$$

o qual associaremos a condição de fronteira fixada

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times \mathbb{R}, \quad (1.17)$$

e condições iniciais

$$u(x,t) = u_0(x,t), \quad u_t(x,0) = u_1(x) := \partial_t u_0|_{t=0}, \quad (x,t) \in \Omega \times (-\infty, 0], \quad (1.18)$$

onde a história $u_0 : \Omega \times (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ será uma função dada. Em Giorgi et al. [12] os autores modelaram e estudaram o comportamento assintótico de soluções para um problema abstrato que inclui a equação (1.16) com condição de fronteira (1.17) e outras condições de fronteira. A existência de solução para tal problema abstrato é assumida (sem prova) via método de Faedo-Galerkin ou via método do ponto fixo, ver [12, Observação 2.1]. O comportamento assintótico é estudado por meio do sistema dinâmico correspondente ao problema com núcleo g satisfazendo (1.9), ou seja, um decaimento exponencial. No presente trabalho, consideramos o caso homogêneo como em (1.16). A boa colocação é determinada via método de semigrupos lineares, a qual difere do método citado por [12]. Para isto, consideramos o sistema autônomo equivalente e abordamos a técnica descrita em Grasselli e Pata [13]. A estabilidade geral de energia é apresentada de duas maneiras, assim como feito no Capítulo 3, isto é, com g satisfazendo (1.11) e em seguida a condição (1.15). No primeiro, há uma variação da taxa de estabilidade como veremos a seguir. De fato, em Guesmia e Messaoudi [14] os autores estudaram o seguinte problema abstrato

$$u_{tt} + Au - \int_0^\infty g(\tau)Au(t-\tau)d\tau = 0, \tag{1.19}$$

onde $A : D(A) \subset H \to H$ é um operador auto-adjunto positivo definido no espaço de Hilbert H. Assumindo que g satisfaz (1.11), foi mostrado que a energia $E_2(t)$ associada a (1.19) satisfaz

$$E_2(t) \leq C\left(1 + \int_0^t (g(s))^{1-\gamma}ds\right)e^{-\gamma\int_0^t \xi(s)ds} + C\int_t^\infty g(s)ds, \quad \forall\ t \geq 0, \tag{1.20}$$

para algumas constantes $\gamma \in (0,1)$ e $C > 0$. Neste caso, o funcional de energia não satisfaz necessariamente a mesma taxa de estabilidade do núcleo de memória g, o que pode ser visto comparando as estimativas (1.13) e (1.20), conforme foi determinado no problema sem história. Aqui, adaptamos este método de estabilidade para o problema de vigas viscoelásticas extensíveis (1.16)-(1.18), o qual possui duas perturbações não lineares. O resultado de estabilidade foi análogo ao decaimento (1.20), como pode ser visto no Teorema 4.5 do Capítulo 4.

Finalmente, usando a hipótese (1.15), obtemos um resultado de estabilidade para o problema viscoelástico (1.16)-(1.18), conforme provado no Teorema 4.6 do Capítulo 4, o qual fornece o mesmo resultado previamente obtido no Teorema 3.7 do Capítulo 3. Notamos ainda que, para este resultado de estabilidade uniforme, não encontramos referências na literatura para equações viscoelásticas com história.

2 PRELIMINARES

O objetivo neste Capítulo preliminear é relembrar conceitos e resultados básicos de análise funcional, espaços de Sobolev, distribuições e semigrupos lineares, os quais serão fundamentais na compreensão dos resultados apresentados nos Capítulos 3 e 4.

2.1 CONCEITOS BÁSICOS DE ANÁLISE FUNCIONAL

Ao longo desta seção $\mathbb{K}$ denotará o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$.

2.1.1 Espaços de Banach

Definição 2.1. *Seja X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Uma **norma** em X é uma função $\|\cdot\|_X : X \to \mathbb{R}^+$ tal que:*

- $\|x\|_X = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $\|\alpha\, x\|_X = |\alpha| \|x\|_X, \quad \forall\, x \in X, \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$;
- $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X, \quad \forall\, x, y \in X.$

*O par $(X, \|\cdot\|_X)$ é chamado **espaço vetorial normado**. Quando não houver confusão, denotaremos por X um espaço vetorial normado e por $\|\cdot\|$ a norma em X.*

Definição 2.2. *Seja X um espaço vetorial normado e $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ duas normas em X. Dizemos que $\|\cdot\|_1$ é **equivalente** a $\|\cdot\|_2$ quando existem constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$ tais que*

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1, \quad \forall\, x \in X.$$

Definição 2.3. *Seja X um espaço vetorial normado. Uma **sequência** em X é uma função $x : \mathbb{N} \to X$. Denotaremos por $x(n) := x_n$ e $x(\mathbb{N}) := (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente por (x_n). Uma **subsequência** de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma restrição $x|_{\mathbb{N}'} : \mathbb{N}' \to X$ da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$.*

Definição 2.4. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em um espaço vetorial normado X. Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é:*

- ***convergente em** X quando existe $x \in X$ satisfazendo a seguinte condição: para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \varepsilon$, para todo $n > n_0$. Denotamos a convergência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para x por $x_n \to x$.*
- ***de Cauchy em** X se para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$, para todo $m, n > n_0$.*

Definição 2.5. *Um espaço vetorial normado* $(X, \|\cdot\|_X)$ *é chamado de* ***espaço de Banach*** *quando toda sequência de Cauchy em* X *é convergente em* X *com respeito a norma* $\|\cdot\|_X$.

Definição 2.6. *Um espaço vetorial normado* X *é chamado de* ***separável*** *quando existe um subconjunto* $Y \subset X$ *enumerável e denso em* X*, ou seja, as seguintes condições são satisfeitas:*

- *dado* $x \in X$ *e* $\varepsilon > 0$*, existe* $y \in Y$ *tal que* $\|x - y\|_X < \varepsilon$*,* (*densidade*)
- *existe uma função bijetora* $f : \mathbb{N} \to Y$. (*enumerabilidade*)

2.1.2 Opedarores Lineares

Definição 2.7. *Sejam* X *e* Y *dois* $\mathbb{K}$*-espaços vetoriais normados. Dizemos que um operador* $T : D(T) \subset X \to Y$ *é* ***linear*** *quando* $T(x+\alpha\, y) = T(x)+\alpha\, T(y)$*, para quaisquer* $x, y \in D(T)$ *e* $\alpha \in \mathbb{K}$*. O conjunto* $D(T)$ *é o* ***domínio*** *de* T*. No caso particular* $Y = \mathbb{K}$*, dizemos que* T *é um* ***funcional linear***.

Definição 2.8. *Um operador linear* $T : D(T) \subset X \to Y$ *definido entre dois espaços vetoriais normados* X *e* Y *é dito:*

- *um* ***isomorfismo*** *quando* T *é bijetor,*
- *um* ***isomorfismo isométrico*** *quando* T *é bijetor e* $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$*, para todo* $x \in D(T)$*,*
- ***limitado*** *em* X *quando existe uma constante* $C > 0$ *tal que* $\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X$*, para todo* $x \in D(T)$*,*
- ***não limitado*** *em* X *quando não é limitado,*
- ***contínuo*** *em* $a \in D(T)$ *se para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* $x \in D(T)$ *com* $\|x - a\|_X < \delta$*, então* $\|T(x) - T(a)\|_Y < \varepsilon$*,*
- ***contínuo*** *quando* T *é contínuo em todo* $x \in D(T)$*,*
- ***compacto*** *se para toda sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *limitada em* $D(T)$*, a sequência* $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *possui uma subsequência convergente em* Y.

O conjunto dos operadores lineares limitados, que denotaremos por $\mathcal{L}(X, Y)$*, é um espaço vetorial normado com a norma*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup_{\substack{x\in X,\\ \|x\|_X=1}} \|T(x)\|_Y.$$

No caso $Y = \mathbb{K}$*, denotamos* $\mathcal{L}(X, \mathbb{K}) := X'$*. O espaço* X' *é chamado de espaço* ***dual*** *do espaço* X*. Para todo* $f \in X'$ *denotamos* $f(x) := \langle f, x\rangle$*,* $x \in X$.

Teorema 2.9. *Seja $T : D(T) \subset X \to Y$ um operador linear definido entre dois espaços vetoriais normados X e Y. Então T é limitado se, e somente se, T é contínuo.*

Demonstração. Ver [16], página 97, Teorema 2.7-9. □

Definição 2.10. *Sejam X e Y dois espaços de Banach com $Y \subset X$. Dizemos que Y está **imerso continuamente** em X quando a aplicação inclusão $i : Y \to X$ é contínua em Y, ou seja, quando existe $C > 0$ tal que*

$$\|x\|_X \leq C\|x\|_Y, \quad \forall\, x \in Y.$$

Denotaremos a imersão contínua de Y em X por $Y \hookrightarrow X$.

Definição 2.11. *Sejam X e Y dois espaços de Banach com $Y \subset X$. Dizemos que Y está **imerso compactamente** em X quando a aplicação inclusão $i : Y \to X$ é compacta em Y. Denotaremos a imersão compacta de Y em X por $Y \overset{c}{\hookrightarrow} X$.*

Teorema 2.12. *Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados. Se Y é um espaço de Banach, então $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)})$ é um espaço de Banach. Em particular, X' e $X'' := (X')'$ são espaços de Banach.*

Demonstração. Ver [16], página 118, Teorema 2.10-2. □

Definição 2.13. *Um espaço vetorial normado X é chamado de **refexivo** quando o operador*

$$\begin{aligned} J : X &\to X'' \\ x &\mapsto J(x) \end{aligned}$$

definida por $J(x)(f) = \langle f, x\rangle$, é sobrejetor.

2.1.3 Convergência Fraca

Definição 2.14. *Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em um $\mathbb{K}$-espaço vetorial normado X **converge fracamente** para $x \in X$ quando $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$ em $\mathbb{K}$, para todo $f \in X'$. Denotamos a convergência fraca de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para x por $x_n \rightharpoonup x$.*

Teorema 2.15. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em um espaço de Banach reflexivo X. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em X, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência que converge fracamente em X.*

Demonstração. Ver [30], página 255, Teorema 21.D. □

Teorema 2.16. *Sejam $T : X \to Y$ um operador linear compacto definido entre dois espaços vetoriais normados X e Y, e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X tal que $x_n \rightharpoonup x$. Então, $T(x_n) \to T(x)$.*

Demonstração. Ver [16], página 410, Teorema 8.1-7. □

Teorema 2.17. *Seja X um espaço de Banach. Se $x_n \rightharpoonup x$ em X e $f_n \to f$ em X', então $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.*

Demonstração. Ver [30], página 258, Proposição 21.23 (k). □

2.1.4 Convergência Fraca*

Definição 2.18. *Seja X um espaço vetorial normado e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um sequência em X'. Dizemos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge fraco*** (fraco estrela) para um elemento $f \in X'$ quando $\langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle$, para todo $x \in X$. Denotamos a convergência fraco* de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para f por $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.*

Lema 2.19. *Seja X um espaço vetorial normado e $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em X'. Então, o funcional $f \in X'$ é unico.*

Demonstração. Se existisse $g \in X'$ tal que $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} g$, então para todo $x \in X$ temos

$$0 \leq |\langle f - g, x \rangle| \leq |\langle f_n - f, x \rangle| + |\langle f_n - g, x \rangle| \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Logo, $\langle f, x \rangle = \langle g, x \rangle$ para todo $x \in X$, o que prova o resultado. □

Teorema 2.20. *Sejam X um espaço de Banach separável e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em X'. Então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência que converge fraco* para um funcional linear $f \in X'$.*

Demonstração. Ver [6], página 152, Corolário 3.61. □

2.1.5 Espaços de Hilbert e o Teorema de Lax-Milgram

Definição 2.21. *Sejam X e Y dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Uma aplicação $a : X \times Y \to \mathbb{K}$ é chamada de **forma sesquilinear** em $X \times Y$ se satisfaz as seguintes condições:*

- $a(x + y, z) = a(x, z) + a(y, z), \quad \forall\, x, y \in X, \quad \forall\, z \in Y,$
- $a(x, y + z) = a(x, y) + a(x, z), \quad \forall\, x \in X, \quad \forall\, y, z \in Y,$
- $a(\alpha\, x, y) = \alpha\, a(x, y), \quad \forall\, x \in X, \quad \forall\, y \in Y, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K},$
- $a(x, \alpha\, y) = \overline{\alpha}\, a(x, y), \quad \forall\, x \in X, \quad \forall\, y \in Y, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K}.$

*No caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dizemos que a é uma **forma bilinear**.*

Definição 2.22. *Seja X um espaço vetorial normado e $a : X \times X \to \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear em X. Dizemos que a é **hermitiana** quando*

$$a(x, y) = \overline{a(y, x)}, \quad \forall\, x, y \in X.$$

Definição 2.23. *Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados e $a : X \times Y \to \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear. Dizemos que a é* ***contínua (limitada)*** *quando existe uma constante $C > 0$ tal que $|a(x,y)| \leq \|x\|_X \|y\|_Y$, para todo par $(x,y) \in X \times Y$.*

Definição 2.24. *Sejam X um espaço vetorial normado e $a : X \times X \to \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear. Dizemos que a é* ***coerciva*** *quando existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\textit{Re}(|a(x,y)|) \geq \|x\|_X^2,$$

para todo par $x \in X$.

Definição 2.25. *Sejam X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Uma forma sesquilinear hermitiana $a : X \times X \to \mathbb{K}$ é chamada de* ***produto interno*** *em X se satisfaz as seguintes condições:*

- *$a(x,x) \geq 0, \quad \forall\, x \in X$,*
- *$a(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.*

Denotaremos um produto interno em X por $(\cdot,\cdot)_X$.

Definição 2.26. *Sejam X um espaço vetorial e $(\cdot,\cdot)_X$ um produto interno em X. A função $\|\cdot\|_X = (\cdot,\cdot)_X^{1/2}$ define uma norma em X. Esta norma é chamada de* ***norma proveniente*** *do produto interno $(\cdot,\cdot)_X$.*

Definição 2.27. *Um espaço de Banach $(H, \|\cdot\|_H)$ é chamado de* ***espaço de Hilbert*** *quando a norma $\|\cdot\|_H$ é proveniente de um produto interno em H.*

Teorema 2.28. *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

Demonstração. Ver [16], página 242, Teorema 4.6-6. □

Teorema 2.29 (Lax-Milgram)**.** *Sejam H um espaço de Hilbert real e $a : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear contínua coerciva. Então, para todo $f \in H'$, existe um único $x \in H$ tal que*

$$a(x,y) = \langle f, y \rangle\,, \quad \forall\, y \in H.$$

Demonstração. Ver [30], páginas 68 e 69, Teorema 18.E. □

2.1.6 Operadores Definidos pela Terna $\{V, H; a\}$

Definição 2.30. *Sejam V e H espaços de Hilbert complexos tais que $\dim H = \infty$, $\overline{V} = H$ e $V \hookrightarrow H$. Considere ainda $a : V \times V \to \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear contínua. Dizemos que um operador T é* ***definido pela terna*** *$\{V, H; a\}$ quando $T : D(T) \subset V \to H$ é tal que*

$$D(T) = \{u \in V \mid \exists\, f \in H \text{ tal que } a(u,v) = (f,v)_H,\, \forall\, v \in V\}$$

onde $a(u,v) = (T(u), v)_H$, para todo $u \in D(T)$ e para $v \in V$.

Observação. Quando falarmos que T é um operado definido pela terna $\{V, H; a\}$, já está implícito que as hipóteses sobre V, H e a da Definição 2.30 são satisfeitas.

Teorema 2.31. *Seja T o operador definido pela terna $\{V, H; a\}$ e suponhamos ainda que a é uma forma sesquilinear coerciva. Então, para cada $f \in H$ existe um único $u \in D(T)$ tal que $T(u) = f$.*

Demonstração. Ver [6], páginas 323-326, Teorema 5.126. □

Proposição 2.32. *Seja T o operador definido pela terna $\{V, H; a\}$ e assumimos que a é uma forma sesquilinear coerciva. Então, $D(T)$ é denso em H e T é um operador fechado em H.*

Demonstração. Ver [6], páginas 327-329, Proposição 5.129. □

Definição 2.33. *Seja H um espaço de Hilbert e $T : D(T) \subset H \to H$ um operador linear. Diz-se que T é **auto-adjunto** quando $(T(x), y)_H = (x, T(y))_H$, para todo $x, y \in D(T)$.*

Proposição 2.34. *Seja T o operador definido pela terna $\{V, H; a\}$. Se a é uma forma sesquilinear hermitiana, então T é um operador auto-adjunto.*

Demonstração. Ver [6], páginas 329 e 330, Proposição 5.130 e Observação 5.131. □

Proposição 2.35. *Seja T o operador definido pela terna $\{V, H; a\}$. Se V está contido estritamente em H e a é uma forma sesquilinear hermitiana, então T é um operador não limitado em H.*

Demonstração. Ver [6], página 331, Proposição 5.132. □

Proposição 2.36. *Seja T o operador definido pela terna $\{V, H; a\}$ e assumimos que a é uma forma sesquilinear coerciva. Então:*

- *$D(T)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno*

$$(u, v)_{D(T)} = (u, v)_H + (T(u), T(v))_H.$$

- *As normas definidas por*

$$|||u|||_{D(T)} = (u, u)_{D(T)}^{1/2} \quad e \quad \|u\|_{D(T)} = \|T(u)\|_H$$

  são equivalentes.

- *Vale a seguinte cadeia de imersões contínuas e densas:*

$$D(T) \hookrightarrow V \hookrightarrow H \hookrightarrow V' \hookrightarrow [D(T)]'.$$

Demonstração. Ver [6], páginas 340, 341 e 342. □

Proposição 2.37. *Seja T o operador definido pela terna $\{V, H; a\}$ sendo a uma forma sesquilinear coerciva e hermitiana. Então, os operadores $\widehat{T} : V \to V'$ e $\overline{T} : H \to [D(T)]'$ definidos por*

$$\left\langle \widehat{T}(u), v \right\rangle = a(u, v), \quad \forall\, u, v \in V, \tag{2.1}$$

$$\left\langle \overline{T}(u), v \right\rangle = (u, T(v)), \quad \forall\, u \in H, \quad \forall\, v \in D(T), \tag{2.2}$$

são bijeções tais que

$$\|\widehat{T}(u)\|_{V'} = \|u\|_V, \quad \forall\, u \in V, \quad \|\overline{T}(u)\|_{[D(T)]'} = \|u\|_H, \quad \forall\, u \in H.$$

*Aqui estamos considerando $D(T)$ com a norma $\|u\|_{D(T)} = \|T(u)\|_H$. O operador $\widehat{T}$ é a **extensão de** T **a** V e o operador $\overline{T}$ é a **extensão de** T **a** H.*

Demonstração. Ver [6], páginas 339, 340 e 342. □

Observação. As extensões do operador T definidas em (2.1) e (2.2) serão denotadas por T.

2.1.7 O Teorema Espectral

Definição 2.38. *Seja H um espaço de Hilbert. Dizemos que uma sequência $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em H é um **sistema ortonormal completo** em H quando:*

- $\|w_n\| = 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$,
- $(w_n, w_m) = 0$ *para* $n \neq m$,
- $\overline{\text{Span}\{w_n \mid n \in \mathbb{N}\}} = H$.

Definição 2.39. *Seja X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $T : D(T) \subset X \to X$ um operador linear. Dizemos que $0 \neq u \in D(T)$ é **autovetor** de T quando existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $T(u) = \lambda u$. Dizemos ainda que λ é o **autovalor** de T associado a u.*

Teorema 2.40 (Teorema Espectral)**.** *Sejam V e H espaços de Hilbert tais que $\dim H = \infty$, $\overline{V} = H$ e $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$. Considere $a : V \times V \to \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear contínua e hermitiana em V tal que existem $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ e $\alpha_2 > 0$ satisfazendo*

$$Re[a(v, v) + \alpha_1 (v, v)_H] \geq \alpha_2 \|v\|_V^2, \quad \forall\, v \in V.$$

Seja T o operador definido pela terna $\{V, H; a\}$. Então:

- *Existe um sistema ortonormal completo $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H constituído de autovetores de T.*
- *Se $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são os autovalores de T associados a $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, então $\lambda_n \to \infty$ quando $n \to \infty$.*

Demonstração. Ver [6], páginas 368 e 369, Teorema 5.146. □

Proposição 2.41. *Sejam V e H espaços de Hilbert tais que $\dim H = \infty$, $\overline{V} = H$ e $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$. Considere $a : V \times V \to \mathbb{C}$ definida por $a(u, v) = (u, v)_V$. Seja T o operador definido pela terna $\{V, H; a\}$. Mais ainda, seja $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o sistema ortonormal completo de H constituído de autovetores de T. Então:*

- *$(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um sistema ortonogonal completo de V.*
- *$(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um sistema ortonogonal completo de $D(T)$.*

Demonstração. Ver [6], páginas 374-377, Observação 5.147, Proposição 5.148 e Observação 5.149. □

2.2 Os Espaços $L^p(\Omega)$

A partir de agora, Ω denotará um subconjunto aberto do espaço $\mathbb{R}^N$ com fronteira suficientemente regular $\partial\Omega$ e $|\Omega|$ sua medida de Lebesgue. O leitor não familiarizado com os conceitos da Teoria da Medida, especificamente, a medida de Lebesgue, pode consultar [1, 11].

2.2.1 Definições e Desigualdades

Definição 2.42. *Seja $1 \leq p < \infty$. Denotaremos por $L^p(\Omega)$ o conjunto de todas as classes de funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $|u|^p$ é integrável em Ω no sentido de Lebesgue.*

Definição 2.43. *Denotaremos por $L^\infty(\Omega)$ o conjunto de todas as classes de funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que são limitadas quase sempre em Ω.*

O conjunto $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, é um espaço vetorial normado com norma

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \qquad \|u\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} \text{ess}\, |u(x)|, \quad p = \infty,$$

onde $\sup\limits_{x\in\Omega} \text{ess}\, |u(x)| := \inf\{C > 0 \mid |u(x)| \leq C \,\text{quase sempre em}\, \Omega\}$.

Proposição 2.44 (Desigualdade de Jensen)**.** *Sejam $G : D(G) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa e $h_1, h_2 \in L^1(\Omega)$ com $h_2 > 0$. Definindo $C = \displaystyle\int_\Omega h_2(x)dx > 0$, temos*

$$C\, G\left(\frac{1}{C}\int_\Omega h_1(x)h_2(x)dx\right) \leq \int_\Omega G(h_1(x))h_2(x)dx.$$

Demonstração. Ver [25], páginas 9 e 10. □

Proposição 2.45 (Desigualdade de Young). *Sejam* $1 < p < \infty$ *e* $q \in \mathbb{R}$ *tais que* $1/p + 1/q = 1$. *Dados* $a, b \geq 0$, *então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Ver [15], página 28, Lema 2.2.1. □

Proposição 2.46 (Desigualdade de Young com ε). *Dados* $a, b \geq 0$ *e* $\varepsilon > 0$ *vale*

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

Demonstração. Basta notar que $(2\varepsilon a - b)^2 \geq 0$. □

Definição 2.47. *Seja* $1 \leq p \leq \infty$. *Dizemos que um número real* q *é* ***expoente conjugado*** *de* p *quando* $1/p + 1/q = 1$ *se* $p \in (1, \infty)$, $q = \infty$ *se* $p = 1$ *e* $q = 1$ *se* $p = \infty$.

Teorema 2.48 (Desigualdade de Hölder). *Seja* $1 \leq p \leq \infty$ *e* q *o expoente conjugado de* p. *Se* $u \in L^p(\Omega)$ *e* $v \in L^q(\Omega)$, *então* $uv \in L^1(\Omega)$ *e* $\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q$. *No caso particular* $p = q = 2$ *obtemos a* ***Desigualdade de Cauchy-Schwarz*** *para o espaço* $L^2(\Omega)$.

Demonstração. Ver [1], página 24, Teorema 2.4. □

Corolário 2.49. *Seja* $1 \leq p \leq q \leq \infty$. *Se* $u \in L^q(\Omega)$ *e* $|\Omega| < \infty$ *então* $u \in L^p(\Omega)$ *e*

$$\|u\|_p \leq |\Omega|^{(1/p)-(1/q)} \|u\|_q.$$

Em particular, tem-se que $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ *para todos* $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

Demonstração. Ver [1], página 28, Teorema 2.14. □

Corolário 2.50 (Desigualdade de Hölder Generalizada). *Sejam* $1 \leq p_i < \infty$, $i = 1, \ldots, m$ *tais que* $\sum_{i=1}^{m} 1/p_i = 1$. *Se* $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $i = 1, \ldots, m$, *então* $u := \prod_{i=1}^{m} u_i \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\|u\|_1 \leq \prod_{i=1}^{m} \|u_i\|_{p_i}.$$

Demonstração. Ver [1], página 25, Corolário 2.6. □

Proposição 2.51 (Lema de Gronwall). *Dado* $T > 0$, *sejam* $\phi \in C([0,T])$, $\psi \in L^1(0,T)$ *funções não negativas e* C *uma constante positiva. Se*

$$\phi(t) \leq C + \int_0^t \psi(s)\phi(s)ds, \quad \forall\, t \in [0,T],$$

então

$$\phi(t) \leq Ce^{\int_0^t \psi(s)ds}, \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Demonstração. Ver [25], página 16, Corolário 1.5.1. □

2.2.2 Propriedades dos Espaços $L^p(\Omega)$

Teorema 2.52. *Seja $1 \leq p < \infty$. Os espaços $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ e $(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ são espaços de Banach. Em particular, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno definido por*

$$(u, v)_2 = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx.$$

Demonstração. Ver [1], página 26, Teorema 2.16. □

Teorema 2.53. *Seja $1 < p < \infty$ e $q \in \mathbb{R}$ o expoente conjugado de p. Então, $[L^p(\Omega)]'$ é isometricamente isomorfo a $L^q(\Omega)$. Em particular, $L^p(\Omega)$ é reflexivo.*

Demonstração. Ver [15], página 169, Teorema 6.2.1. □

Teorema 2.54. *O espaço $[L^1(\Omega)]'$ é isometricamente isomorfo ao espaço $L^\infty(\Omega)$.*

Demonstração. Ver [15], página 174, Teorema 6.3.2. □

Por um abuso de notação, identifica-se os espaços isometricamente isomorfos acima descritos e, neste trabalho, indicaremos isso por

$$[L^p(\Omega)]' = L^q(\Omega) \quad \text{e} \quad [L^1(\Omega)]' = L^\infty(\Omega).$$

Definição 2.55. *Denotamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis que possuem suporte compacto. Em outras palavras, é o conjunto de todas funções $\phi \in C^\infty(\Omega)$ tais que o conjunto*

$$supp(\phi) := \overline{\{x \in \Omega \mid \phi(x) \neq 0\}}^{\Omega}$$

é compacto.

Proposição 2.56. *O conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ é denso no espaço $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Ver [1], página 38, Teorema 2.30. □

Teorema 2.57. *O espaço $L^p(\Omega)$ é separável para $p \in [1, \infty)$.*

Demonstração. Ver [1], página 32, Teorema 2.21. □

Definição 2.58. *Seja $1 \leq p < \infty$. Denotamos por $L^p_{loc}(\Omega)$ o conjunto das classes de funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $|u|^p$ é integrável, no sentido de Lebesgue, em todo subconjunto compacto $K \subset \Omega$.*

Proposição 2.59. *$L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração. Consequência direta da Definição 2.58 e do Corolário 2.49. □

Proposição 2.60 (Du Bois Raymond). *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Se*

$$\int_\Omega u(x)\phi(x)dx = 0, \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

então $u(x) = 0$ para quase todo $x \in \Omega$.

Demonstração. Ver [5], páginas 20 e 21, Proposição 4. □

2.3 Distribuições a Valores Reais

Definição 2.61. *Seja $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}_+^N$. O **operador derivação de ordem** α é dado por*

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}},$$

onde $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$. No caso $\alpha = 0 = (0, \ldots, 0)$ temos $D^0 = Id$.

Definição 2.62. *O **espaço das funções teste** é o conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ munido da seguinte noção de convergência: dizemos que uma sequência de funções $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pertencente a $C_0^\infty(\Omega)$ converge para uma função $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω tal que*

- $supp(\phi_n) \subset K, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$;
- $supp(\phi) \subset K$;
- $D^\alpha\phi_n \to D^\alpha\phi$ *uniformemente sobre K, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$.*

Denotaremos o espaço das funções teste por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 2.63. *Uma **distribuição** sobre Ω é um funcional linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ que é contínuo no sentido do espaço das funções teste, isto é, se $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a função nula em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $(\langle T, \phi_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero em $\mathbb{R}$. Denotaremos o espaço das distribuições por $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Definição 2.64. *Diremos que uma sequência de distribuições $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em Ω **converge** para uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ quando*

$$\langle T_n, \phi\rangle \to \langle T, \phi\rangle\,, \quad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Proposição 2.65. *Seja $1 \le p \le \infty$. O espaço $L^p(\Omega)$ é isomorfo a um subespaço vetorial de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Além disso, se $u \in L^p(\Omega)$ então*

$$\langle u, \phi\rangle = \int_\Omega u(x)\phi(x)dx, \quad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Demonstração. Ver [5], página 25 e Proposição 2.59 acima. □

Abusando novamente da notação, a Proposição 2.65 nos diz que $L^p(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$.

Definição 2.66. *Seja $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$. A **derivada distribucional de ordem** α de uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é a distribuição*

$$\begin{array}{rcl} D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ \phi & \mapsto & (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi \rangle . \end{array}$$

Observação. Vale a pena notar que se $u \in C^k(\Omega)$ então a derivada de ordem α no sentido da distribuições e no sentido clássico coincidem para $|\alpha| \leq k$.

Proposição 2.67. *Se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, então $D^\alpha T$ existe para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$. Mais ainda, o operador*

$$\begin{array}{rcl} D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) & \to & \mathcal{D}'(\Omega) \\ T & \mapsto & D^\alpha T \end{array}$$

é linear e contínuo no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Demonstração. Ver [5], página 29. □

2.4 Os Espaços de Sobolev

2.4.1 Definições e Propriedades

Definição 2.68. *Sejam $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ e $u, v \in L^p(\Omega)$. Dizemos que v é a **derivada fraca de ordem** α **de** u quando*

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v(x)\phi(x) dx, \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Proposição 2.69. *Seja $u \in L^p(\Omega)$. Se v e w são derivadas fracas de ordem $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ de u, então $v = w$ quase sempre em Ω.*

Demonstração. Basta usar a definição de derivada fraca de ordem α para v e w e aplicar a Proposição 2.60. □

Se $u \in L^p(\Omega)$, então a derivada fraca de ordem α (quando existe) coincide com as derivada de ordem α no sentido distribucional.

Definição 2.70. *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{Z}_+$. O **espaço de Sobolev** $W^{m,p}(\Omega)$ é o conjunto de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que as derivadas fracas de ordem α existem, $|\alpha| \leq m$. No caso $p = 2$ denotamos $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$. Note que se $m = 0$ e $p = 2$ então $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.*

Teorema 2.71. *Os espaços $W^{m,p}(\Omega)$ são espaços de Banach com as normas definidas por*

$$\|u\|_{m,p} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty;$$

$$\|u\|_{m,\infty} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty, \quad p = \infty.$$

Em particular, os espaço $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert com produto interno definido por

$$((u, v))_m := \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_2.$$

Demonstração. Ver [10], página 249, Teorema 2. □

Teorema 2.72 (Imersões de Sobolev). *Suponha que Ω seja limitado.*

- *Se $mp < N$, então*
$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}.$$

- *Se $mp < N$ e $1 \leq q' \leq q$, então*
$$W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}.$$

- *Se $mp = N$, $1 \leq p < \infty$, então*
$$W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega).$$

Demonstração. Ver [1], página 85, Proposição 4.12. □

Observação. De acordo com [1], o Teorema 2.72 também é válido se trocarmos os espaços $W^{m,p}(\Omega)$ pelos espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$, os quais veremos a seguir.

2.4.2 Os Espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $W^{-m,q}(\Omega)$

Definição 2.73. *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{Z}_+$. Denotaremos por $W_0^{m,p}(\Omega)$ o fecho de $C^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,*

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{C^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Além disso, no caso $p = 2$ temos $H_0^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$.

Segue da própria definição que $(W_0^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ é um espaço de Banach.

Definição 2.74. *Sejam $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e $\{e_1, \ldots, e_N\}$ a base canônica do espaço $\mathbb{R}^N$. Definimos*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} := D^{e_i} u \in L^p(\Omega), \quad i = 1, \ldots, N.$$

*O **gradiente** de u é o vetor*

$$\nabla u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) \in [L^p(\Omega)]^N = \underbrace{L^p(\Omega) \times \ldots \times L^p(\Omega)}_{N-\text{vezes}}.$$

Observação. Podemos reescrever a norma e o produto interno do espaço $H^1(\Omega)$ da seguinte maneira:

$$\|u\|_{1,2}^2 = \|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2, \quad ((u,v))_1 = (u,v)_2 + (\nabla u, \nabla v)_2, \quad \forall\, u, v \in H^1(\Omega),$$

onde

$$\|\nabla u\|_2^2 = \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2^2, \quad (\nabla u, \nabla v)_2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_2.$$

Teorema 2.75 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Se $|\Omega| < \infty$ então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_2 \leq C \|\nabla u\|_2, \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstração. Ver [3], página 290, Corolário 9.19. □

Observação. Uma aplicação direta da Desigualdade de Poincaré nos diz que no espaço $H_0^1(\Omega)$ as normas

$$\|u\|_{1,2} = \left(\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad |||u|||_{1,2} = \|\nabla u\|_2$$

são equivalentes.

Para enunciar o próximo resultado, precisamos definir os espaços $H^s(\partial\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$. Como esta definição envolve conceitos de espaço de Schwartz, transformada de Fourier e cartas locais, deixamos ao leitor uma referência para consulta, veja [5].

Teorema 2.76. *Se Ω é limitado, então existe uma única aplicação linear contínua e sobrejetiva*

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\partial\Omega)$$

tal que Ker$(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$, verificando

$$\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}, \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

Demonstração. Ver [5], página 336. Teorema 2. □

Teorema 2.77. *Se Ω é limitado, então existe uma única aplicação linear e contínua*

$$\gamma : H^m(\Omega) \to \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\partial\Omega)$$

tal que Ker$(\gamma) = H_0^m(\Omega)$, verificando

$$\gamma u = \left(u|_{\partial\Omega}, \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega}, \ldots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}\bigg|_{\partial\Omega} \right), \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}),$$

onde ν é o vetor normal unitário exterior a Ω e

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) := \nabla u(x) \cdot \nu.$$

Demonstração. Ver [5], página 391. □

Definição 2.78. *Seja $1 \leq p < \infty$ e $q \in \mathbb{R}$ seu expoente conjugado. Denotaremos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o espaço dual do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$, isto é,*

$$W^{-m,q}(\Omega) := [W_0^{m,p}(\Omega)]'.$$

Em particular, para $p = q = 2$ denotamos $H^{-m}(\Omega) := [H_0^m(\Omega)]'$.

Proposição 2.79. *Seja $1 \leq p < \infty$ e $q \in \mathbb{R}$ seu expoente conjugado. Então,*

$$W^{-m,q}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

Demonstração. Ver [5], página 87. □

2.4.3 Os Operadores $-\Delta$ e Δ^2

Definição 2.80. *Seja $e_i \in \mathbb{Z}_+^N$ o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^N$, $i = 1, \ldots, N$. O **Laplaciano** é o operador*

$$D(-\Delta) = H^2(\Omega), \quad -\Delta u := -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

onde $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} := D^{2e_i} u$.

Teorema 2.81 (Teorema de Green)**.** *Para todo $u \in D(-\Delta)$ e $v \in H^1(\Omega)$, vale*

$$(-\Delta u, v)_2 = (\nabla u, \nabla v)_2 - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\, v(x)\, d\partial\Omega.$$

Demonstração. Ver [5], página 413, Proposição 7. □

Teorema 2.82 (Regularidade Elíptica)**.** *Seja* $m \in \mathbb{N}$ *e* $f \in H^m(\Omega)$. *Se* $u \in H_0^1(\Omega)$ *satisfaz*

$$(\nabla u, \nabla v)_2 = (f, v)_2, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$

então, $u \in H^{m+2}(\Omega)$.

Demonstração. Ver [10], página 323, Teorema 5. □

Agora, vamos apresentar a resolução de um problema envolvendo o operador Laplaciano. Para mais detalhes, veja [5, 6].

Problema 0: Dado $f_0 \in L^2(\Omega)$, consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f_0 \text{ q.s. em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

Sejam

$$V = (H_0^1(\Omega), \|\nabla \cdot \|_2), \;\; H = (L^2(\Omega), \| \cdot \|_2), \;\; a(u,v) = (\nabla u, \nabla v)_2. \tag{2.4}$$

Assim,

- do Teorema 2.72 temos $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$,
- pelo Teorema 2.56 e da definição de V, segue que V é denso em H,
- a é uma forma sesquilinear contínua coerciva e hermitiana. Para ver isso, basta notar que a é um produto interno em V e usar a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Podemos então definir um operador T pela terna $\{V, H; a\}$ da forma

$$D(T) = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \exists\, f \in L^2(\Omega) \text{ tal que } (\nabla u, \nabla v)_2 = (f, v)_2, \,\forall\, v \in H_0^1(\Omega)\},$$

com $(T(u), v)_2 = (\nabla u, \nabla v)_2$ para todo $u \in D(T)$ e $v \in H_0^1(\Omega)$. Mais ainda, de acordo com [6], é possível mostrar que

$$D(T) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad T = -\Delta\big|_{D(T)}.$$

Com isso, o operador $-\Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é definido pela terna $\{V, H; a\}$ dada em (2.4). Então,

- pelo Teorema 2.31, o problema (2.3) admite uma única solução $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,
- pelas Proposições 2.32-2.36, concluímos que $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, $-\Delta$ é um operador fechado, auto-adjunto e não limitado em $L^2(\Omega)$, as normas

$$|||u|||^2_{H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)} = \|u\|_2^2 + \|\Delta u\|_2^2 \quad \text{e} \quad \|u\|_{H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)} = \|\Delta u\|_2$$

são equivalentes e vale a cadeia de imersões

$$H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]',$$

- podemos estender, via Proposição 2.37, o operador $-\Delta$ aos espaços $H_0^1(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$. Mais precisamente, podemos definir

$$-\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \quad \text{e} \quad -\Delta : L^2(\Omega) \to [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]'$$

por

$$\langle -\Delta u, v \rangle = (\nabla u, \nabla v)_2, \quad \forall\, u, v \in H_0^1(\Omega), \tag{2.5}$$

$$\langle -\Delta u, v \rangle = (u, -\Delta v)_2, \quad \forall\, u \in L^2(\Omega), \quad \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \tag{2.6}$$

respectivamente.

Definição 2.83. *O operador **Bilaplaciano (ou Biharmônico)** é dado por*

$$D(\Delta^2) = H^4(\Omega), \quad \Delta^2 u := \Delta(\Delta u).$$

Vejamos dois problemas relacionados ao operador Bilaplaciano.

Problema 1: Dado $f_0 \in L^2(\Omega)$, consideremos o problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f_0 \text{ q.s. em } \Omega, \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

Sejam

$$V = (H_0^2(\Omega), \|\Delta \cdot\|_2), \; H = (L^2(\Omega), \|\cdot\|_2), \; a(u,v) = (\Delta u, \Delta v)_2. \tag{2.8}$$

Observe que,

- do Teorema 2.72 temos $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$,
- pelo Teorema 2.56 e da definição de V, segue que V é denso em H,
- a é uma forma sesquilinear contínua coerciva e hermitiana. Para ver isso, basta notar que a é um produto interno em V e usar a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Com isso, podemos definir um operador T pela terna $\{V, H; a\}$ da forma

$$D(T) = \{u \in H_0^2(\Omega) \mid \exists\, f \in L^2(\Omega) \text{ tal que } (\Delta u, \Delta v)_2 = (f, v)_2, \forall\, v \in H_0^2(\Omega)\},$$

com $(T(u), v)_2 = (\Delta u, \Delta v)_2$ para todo $u \in D(T)$ e $v \in H_0^2(\Omega)$. Em verdade mostra-se que

$$D(T) = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \quad \text{e} \quad T = \Delta^2\big|_{D(T)}.$$

Assim, o operador $\Delta^2 : H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é definido pela terna $\{V, H; a\}$ dada em (2.8). Portanto,

- pelo Teorema 2.31, o problema (2.7) admite uma única solução $u \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$,
- pelas Proposições 2.32-2.36, concluímos que $H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, Δ^2 é um operador fechado, auto-adjunto e não limitado em $L^2(\Omega)$, as normas

$$|||u|||^2_{H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)} = \|u\|_2^2 + \|\Delta^2 u\|_2^2 \quad \text{e} \quad \|u\|_{H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)} = \|\Delta^2 u\|_2$$

  são equivalentes e vale a cadeia de imersões

$$H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-2}(\Omega) \hookrightarrow [H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)]',$$

- podemos estender, via Proposição 2.37, o operador Δ^2 aos espaços $H_0^2(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$. Mais precisamente, podemos definir

$$\Delta^2 : H_0^2(\Omega) \to H^{-2}(\Omega) \quad \text{e} \quad \Delta^2 : L^2(\Omega) \to [H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)]'$$

  por

$$\begin{aligned} \left\langle \Delta^2 u, v \right\rangle &= (\Delta u, \Delta v)_2, \quad \forall\, u, v \in H_0^2(\Omega), & (2.9)\\ \left\langle \Delta^2 u, v \right\rangle &= (u, \Delta^2 v)_2, \quad \forall\, u \in L^2(\Omega), \quad \forall\, v \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega), & (2.10) \end{aligned}$$

  respectivamente.

- do Teorema 2.40 e da Proposição 2.41, existe uma sequência $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$ constituído de autovetores de Δ^2 tal que
  - $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um sistema ortonormal completo em $L^2(\Omega)$.
  - $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um sistema ortogonal completo em $H_0^2(\Omega)$.
  - $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um sistema ortogonal completo em $H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$.
  - Se $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são os autovalores do operador Δ^2 associados a $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, então $\lambda_n \to \infty$ quando $n \to \infty$.

Problema 2: Dado $f_0 \in L^2(\Omega)$, consideremos o problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f_0 \text{ q.s. em } \Omega, \\ u = \Delta u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.11}$$

Seja

$$V = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \|\Delta \cdot\|_2),\ H = (L^2(\Omega), \|\cdot\|_2),\ a(u,v) = (\Delta u, \Delta v)_2. \tag{2.12}$$

Podemos decompor o problema (2.11) em dois problemas da forma (2.3). De fato, definindo $w = \Delta u$ temos

$$\begin{cases} \Delta w = f_0 \text{ q.s. em } \Omega, \\ w = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.13}$$

Uma vez encontrada a solução de (2.13), resolvemos o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta u = w \text{ q.s. em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.14}$$

Sabendo que (2.13) possui uma única solução em V e usando o Teorema 2.82 em (2.14), deduzimos que o problema (2.11) possui uma única solução $u \in H^4_*(\Omega)$, onde

$$H^4_*(\Omega) := \{u \in H^4(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \mid \Delta u \in H^1_0(\Omega)\}.$$

Além disso, mostra-se que $\Delta^2 : H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é definido pela terna $\{V, H; a\}$ dada em (2.12). Assim,

- pelas Proposições 2.32-2.36, concluímos que $H^4_*(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, Δ^2 é um operador fechado, auto-adjunto e não limitado em $L^2(\Omega)$, as normas

  $$|||u|||^2_{H^4_*(\Omega)} = \|u\|_2^2 + \|\Delta^2 u\|_2^2 \quad \text{e} \quad \|u\|_{H^4_*(\Omega)} = \|\Delta^2 u\|_2$$

  são equivalentes e vale a cadeia de imersões

  $$H^4_*(\Omega) \hookrightarrow H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow [H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)]' \hookrightarrow [H^4_*(\Omega)]',$$

- podemos estender, via Proposição 2.37, o operador Δ^2 aos espaços $H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$. Mais precisamente, podemos definir

  $$\Delta^2 : H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \to [H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)]' \quad \text{e} \quad \Delta^2 : L^2(\Omega) \to [H^4_*(\Omega)]'$$

  por

  $$\left\langle \Delta^2 u, v \right\rangle = (\Delta u, \Delta v)_2, \quad \forall\, u, v \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega), \tag{2.15}$$

  $$\left\langle \Delta^2 u, v \right\rangle = (u, \Delta^2 v)_2, \quad \forall\, u \in L^2(\Omega), \quad \forall\, v \in H^4_*(\Omega), \tag{2.16}$$

  respectivamente.

- do Teorema 2.40 e da Proposição 2.41, existe uma sequência $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$ constituído de autovetores operador Δ^2 tal que

  - $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um sistema ortonormal completo em $L^2(\Omega)$.

– $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um sistema ortogonal completo em $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$.

– $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um sistema ortogonal completo em $H_*^4(\Omega)$.

– Se $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são os autovalores do operador Δ^2 associados a $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, então $\lambda_n\to\infty$ quando $n\to\infty$.

2.5 Espaços a Valores Vetoriais

2.5.1 Definições e Propriedades

Definição 2.84. *Seja X um espaço de Banach e $0<T<\infty$.*

- *Para $k=0,1,\dots$ definimos $C^k([0,T],X)$ como o conjunto das funções $u:[0,T]\to X$ que possuem derivadas contínuas até ordem k. A função*

$$\|u\|_{C^k([0,T],X)}:=\sum_{i=0}^{k}\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{d^{(i)}u}{dt^{(i)}}(t)\right\|_X,$$

define uma norma em $C^k([0,T],X)$. Denotaremos $C^0([0,T],X)=C([0,T],X)$.

- *Para $1\le p<\infty$ consideremos o espaço $L^p(0,T;X)$ que consiste de todas funções mensuráveis $u:(0,T)\to X$ tais que*

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)}:=\left(\int_0^T\|u(t)\|_X^p dt\right)^{1/p}<\infty.$$

- *O espaço $L^\infty(0,T;X)$ é o conjunto de todas funções mensuráveis $u:(0,T)\to X$ essencialmente limitadas, isto é,*

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)}:=\sup_{t\in(0,T)} ess\|u(t)\|_X<\infty.$$

Proposição 2.85. *Seja $k=0,1\dots$ e $1\le p\le\infty$. Se X e Y são dois espaços de Banach sobre um mesmo corpo de escalares, então*

- *$(C^k([0,T],X),\|\cdot\|_{C^k([0,T],X)})$ é um espaço de Banach.*
- *$(L^p(0,T;X),\|\cdot\|_{L^p(0,T;X)})$ é um espaço de Banach.*
- *$C([0,T],X)$ é denso em $L^p(0,T;X)$ e $C([0,T],X)\hookrightarrow L^p(0,T;X)$.*
- *Se X é separável, então $L^p(0,T;X)$ é separável para $1\le p<\infty$.*
- *Se $X\hookrightarrow Y$, então $L^r(0,T;X)\hookrightarrow L^q(0,T;Y)$, para todo $1\le q\le r\le\infty$.*

- *Se X é um espaço de Hilbert, então $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert com produto interno*

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X dt, \quad u,v \in L^2(0,T;X).$$

Demonstração. Ver [30], páginas 407 e 448, Proposição 23.2. □

Proposição 2.86. *Seja $1 < p < \infty$ e $q \in \mathbb{R}$ o expoente conjugado de p. Se X é um espaço de Banach reflexivo , então o espaço $[L^p(0,T;X)]'$ é isometricamente isomorfo a $L^q(0,T;X')$. Em particular, $L^p(0,T;X)$ é reflexivo.*

Demonstração. Ver [30], páginas 411 e 412, Proposição 23.7. □

Proposição 2.87. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e separável. O espaço $[L^1(0,T;X)]'$ é isometricamente isomorfo ao espaço $L^\infty(0,T;X')$.*

Demonstração. Ver [2]. □

Proposição 2.88. *Seja X um espaço de Banach. Para todo $u \in L^1(0,T;X)$ vale*

$$\left\| \int_0^T u(t)dt \right\|_X \leq \int_0^T \|u(t)\|_X dt. \tag{2.17}$$

Demonstração. Ver [29], páginas 133 e 134, Corolário 1. □

Proposição 2.89. *Seja X um espaço de Banach e $1 < p < \infty$.*

- *Se $u \in L^p(0,T;X)$, então*

$$\left\langle v, \int_0^T u(t)dt \right\rangle = \int_0^T \langle v, u(t) \rangle \, dt, \quad \forall\, v \in X'.$$

- *Se $u \in L^p(0,T;X')$, então*

$$\left\langle \int_0^T u(t)dt, v \right\rangle = \int_0^T \langle u(t), v \rangle \, dt, \quad \forall\, v \in X.$$

Demonstração. Ver [30], página 412, Proposição 23.9. □

2.5.2 Algumas Operações Importantes

Seja X um espaço de Banach e $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Para $u : (0,T) \to X$ definimos

$$(g * u)(t) := \int_0^t g(t-s)u(s)ds, \tag{2.18}$$

$$(g \diamond u)(t) := \int_0^t g(t-s)(u(t)-u(s))ds, \tag{2.19}$$

$$(g \Box u)(t) := \int_0^t g(t-s)\|u(t)-u(s)\|_X^p ds, \quad p \geq 1, \tag{2.20}$$

para todo $t \in (0, T)$.

Proposição 2.90. *Seja X um espaço de Banach e $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$ uma função positiva.*

(i) Se $1 < p \leq \infty$, então a aplicação

$$\begin{aligned} \phi_g : L^p(0,T;X) &\rightarrow L^p(0,T;X) \\ u &\mapsto \phi_g u = g * u \end{aligned}$$

é linear e vale

$$\|\phi_g u\|_{L^p(0,T;X)} \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \|u\|_{L^p(0,T;X)}. \tag{2.21}$$

(ii) Se $u \in L^p(0,T;X)$ com $1 \leq p < \infty$ e $(g \Box u)(t) < \infty$, então

$$\|(g \diamond u)(t)\|_X^p \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{p-1} (g \Box u)(t), \quad \forall\, t \in (0,T). \tag{2.22}$$

Demonstração. Usando a Proposição 2.88 e a Desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} \|(g*u)(t)\|_X^p &\leq \left(\int_0^t g(t-s)\|u(s)\|_X ds \right)^p \\ &= \left(\int_0^t g^{(p-1)/p}(t-s) g^{1/p}(t-s) \|u(s)\|_X ds \right)^p \\ &\leq \left(\int_0^t g(t-s) ds \right)^{p-1} \int_0^t g(t-s)\|u(s)\|_X^p ds \\ &\leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{p-1} \int_0^t g(t-s)\|u(s)\|_X^p ds. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^t g(t-s)\|u(s)\|_X^p dsdt &= \int_0^T g(t-s) \int_0^t \|u(s)\|_X^p dsdt \\ &= \int_0^T \|u(s)\|_X^p \int_s^T g(t-s) dtds \\ &= \int_0^T \|u(s)\|_X^p \left(\int_0^{T-s} g(t)dt \right) ds \\ &\leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \|u\|_{L^p(0,T;X)}^p. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\phi_g u\|_{L^p(0,T;X)}^p = \int_0^T \|(g*u)(t)\|_X^p dt \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^p \|u\|_{L^p(0,T;X)}^p.$$

O caso $p = \infty$ é trivial. Isto prova (i).

Usando novamente a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\|(g \diamond u)(t)\|_X &\leq \int_0^t g(t-s)\|u(t)-u(s)\|_X ds \\
&= \int_0^t g^{(p-1)/p}(t-s) g^{1/p}(t-s)\|u(t)-u(s)\|_X ds \\
&\leq \left(\int_0^t g(t-s)ds\right)^{(p-1)/p} [(g\Box u)(t)]^{1/p} \\
&\leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{(p-1)/p} [(g\Box u)(t)]^{1/p}.
\end{aligned}$$

Elevando a potência p em ambos os lados da desigualdade, obtemos (ii). $\Box$

Observação. No Capítulo 3, usaremos frequentemente a desigualdade (2.22) com $p = 2$. Neste caso, tem-se

$$\|(g \diamond u)(t)\|_X^2 \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}(g\Box u)(t), \quad \forall\, t \in (0,T). \tag{2.23}$$

Proposição 2.91. *Seja X um espaço de Banach e $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$ uma função positiva. Se existem uma função $g_1 \in L^1(\mathbb{R}^+)$ e uma função decrescente $g_2 : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tais que*

$$g_1(t) \leq -g_2(t)g(t), \quad t > 0,$$

então, para todo $u \in L^p(0,T;X)$ com $1 \leq p < \infty$ vale

$$g_2(t)(g\Box u)(t) \leq (-g_1\Box u)(t), \quad t \in (0,T). \tag{2.24}$$

Demonstração. Como $g_2(t) \leq g_2(t-s)$ para todo $s \in (0,t)$ e $g_2(t)g(t) \leq -g_1(t)$ para todo $t > 0$, temos

$$\begin{aligned}
g_2(t)(g\Box u)(t) &= g_2(t)\int_0^t g(t-s)\|u(t)-u(s)\|_X^p ds \\
&= \int_0^t g_2(t)g(t-s)\|u(t)-u(s)\|_X^p ds \\
&\leq \int_0^t g_2(t-s)g(t-s)\|u(t)-u(s)\|_X^p ds \\
&\leq \int_0^t -g_1(t-s)\|u(t)-u(s)\|_X^p ds \\
&= (-g_1\Box u)(t),
\end{aligned}$$

O que prova o desejado $\Box$

2.5.3 Espaços com Peso

Seja $g \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+)$ uma função positiva com $g(0) > 0$.

Definição 2.92. *Seja X um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. Definimos o* **espaço com peso** *g por*

$$L^p_g(0,\infty;X) := \left\{ \eta : [0,\infty) \to X \mid \int_0^\infty g(s)\|\eta(s)\|^p_X ds < \infty \right\}. \tag{2.25}$$

Proposição 2.93. *Se $1 \leq p < \infty$, então o espaço $L^p_g(0,\infty;X)$ é um espaço de Banach com a norma*

$$\|\eta\|_{L^p_g(0,\infty;X)} := \left(\int_0^\infty g(s)\|\eta(s)\|^p_X ds \right)^{1/p}.$$

Em particular, se X é um espaço de Hilbert, então $L^2_g(0,\infty;X)$ é um espaço de Hilbert com produto interno definido por

$$(\eta,\zeta)_{L^2_g(0,\infty;X)} := \int_0^\infty g(s)(\eta(s),\zeta(s))_X ds.$$

Demonstração. A prova pode ser feita utilizando a mesma ideia para mostrar que os espaços $L^p(0,T;X)$ são espaços de Banach. □

Proposição 2.94. *Seja $1 \leq p < \infty$. A aplicação*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_g : L^p_g(0,\infty;X) &\to X \\ \eta &\mapsto \mathcal{I}_g\eta = \int_0^\infty g(s)\eta(s)ds \end{aligned}$$

é linear limitada com

$$\|\mathcal{I}_g\eta\|_X \leq \|g\|^{(p-1)/p}_{L^1(\mathbb{R}^+)}\|\eta\|_{L^p_g(0,\infty;X)}, \quad \forall\, \eta \in L^p_g(0,\infty;X). \tag{2.26}$$

Demonstração. Da Desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(s)\|\eta(s)\|_X ds &= \int_0^\infty g^{(p-1)/p}(s)g^{1/p}(s)\|\eta(s)\|_X ds \\ &\leq \left(\int_0^\infty g(s)ds \right)^{(p-1)/p} \|\eta\|_{L^p_g(0,\infty;X)} \\ &\leq \|g\|^{(p-1)/p}_{L^1(\mathbb{R}^+)}\|\eta\|_{L^p_g(0,\infty;X)}. \end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{I}_g$ está bem definida e vale

$$\|\mathcal{I}_g\eta\|_X \leq \int_0^\infty g(s)\|\eta(s)\|_X ds \leq \|g\|^{(p-1)/p}_{L^1(\mathbb{R}^+)}\|\eta\|_{L^p_g(0,\infty;X)}.$$

A linearidade de $\mathcal{I}_g$ é imediata. □

Observação. No Capítulo 4, a desigualdade (2.26) será usada frequentemente com $p = 2$. Ou seja, que

$$\|\mathcal{I}_g\eta\|_X \leq \|g\|^{1/2}_{L^1(\mathbb{R}^+)}\|\eta\|_{L^2_g(0,\infty;X)}, \quad \forall\, \eta \in L^2_g(0,\infty;X). \tag{2.27}$$

Proposição 2.95. *Sejam $1 \leq p < \infty$, X um espaço de Banach e $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$ uma função decrescente. Se $\eta \in L^p_g(0,\infty;X)$, então a função $\tilde{\eta} : [0,\infty) \to X$ definida por*

$$\tilde{\eta}(s) := \int_0^s e^{-(s-y)}\eta(y)dy,$$

pertence a $L^p_g(0,\infty;X)$.

Demonstração. Pela estimativa (2.17) e usando que g é decrescente temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty g(s)\|\tilde{\eta}(s)\|_X^p ds &\leq \int_0^\infty g(s)\left(\int_0^s e^{-(s-y)}\|\eta(y)\|_X dy\right)^p ds \\
&\leq \int_0^\infty \left(\int_0^s e^{-(s-y)}[g(y)]^{1/p}\|\eta(y)\|_X dy\right)^p ds.
\end{aligned}$$

Por outro lado, denotando por

$$\psi_1(s) := e^{-s} \quad \text{e} \quad \psi_2(s) := [g(s)]^{1/p}\|\eta(s)\|_X,$$

temos que $\psi_1 \in L^1(\mathbb{R}^+)$ e $\psi_2 \in L^p(\mathbb{R}^+)$. Fazendo uma estimativa análoga a (2.21), obtemos que a função

$$(\psi_1 * \psi_2)(s) := \int_0^s \psi_1(s-y)\psi_2(y)dy$$

pertence a $L^p(\mathbb{R}^+)$ com

$$\|\psi_1 * \psi_2\|_{L^p(\mathbb{R}^+)} \leq \|\psi_1\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}\|\psi_2\|_{L^p(\mathbb{R}^+)} = \|\eta\|_{L^p_g(0,\infty;X)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty g(s)\|\tilde{\eta}(s)\|_X^p ds &\leq \int_0^\infty \left(\int_0^s e^{-(s-y)}[g(y)]^{1/p}\|\eta(y)\|_X dy\right)^p ds \\
&= \|\psi_1 * \psi_2\|^p_{L^p(\mathbb{R}^+)} \\
&\leq \|\eta\|^p_{L^p_g(0,\infty;X)} < +\infty.
\end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{\eta} \in L^p_g(0,\infty;X)$, como queríamos. □

2.6 Distribuições a Valores Vetoriais

Definição 2.96. *Seja $T > 0$ e X um espaço de Banach. Uma* ***distribuição a valores em*** *X é uma aplicação linear $D : \mathcal{D}(0,T) \to X$ que é contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}(0,T)$. O conjunto de todas distribuições a valores em X será denotado por $\mathcal{D}'(0,T;X)$.*

Proposição 2.97. *Seja $1 \leq p \leq \infty$ e X um espaço de Banach. O espaço $L^p(0,T;X)$ é isomorfo* *a um subespaço vetorial de $\mathcal{D}'(0,T;X)$. Além disso, se $u \in L^p(0,T;X)$ então*

$$\langle u, \phi \rangle = \int_0^T u(s)\phi(s)ds, \quad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(0,T). \tag{2.28}$$

Demonstração. Basta seguir a mesma ideia da demonstração da Proposição 2.65 com as devidas adaptações. Ver também [21]. □

A Proposição 2.97 nos diz que $L^p(0,T;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T;X)$ para $1 \leq p \leq \infty$.

Definição 2.98. *Seja $D \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ e $n \in \mathbb{N}$. A **derivada de ordem** n **de** D é definida por*

$$\left\langle D_t^{(n)}, \phi \right\rangle := (-1)^n \left\langle D, \frac{d^n\phi}{dt^n} \right\rangle, \quad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Aqui $D_t^{(1)} = D_t$, $D_t^{(2)} = D_{tt}$ e assim por diante.

Teorema 2.99. *Seja X um espaço de Banach. Se $u, v \in L^1(0,T;X)$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Existe $w \in X$ tal que

$$u(t) = w + \int_0^t v(s)ds.$$

(ii) Para cada $\phi \in \mathcal{D}(0,T)$ temos

$$\int_0^T u(s)\phi'(s)ds = -\int_0^T v(s)\phi(s)ds.$$

Em outras palavras, $u_t = v$ no sentido das distribuições a valores em X.

Demonstração. Ver [21], página 8, Lema 3. □

Corolário 2.100. *Sejam X e Y dois espaços de Banach tais que $X \hookrightarrow Y$. Se $u \in L^1(0,T;X)$ e $u_t \in L^1(0,T;Y)$, então $u \in C([0,T],X)$.*

Demonstração. Ver [21], página 11, Corolário 1. □

Proposição 2.101. *Seja H um espaço de Hilbert separável. Se*

$$u^n \overset{*}{\rightharpoonup} u \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;H') \quad \text{e} \quad u_t^n \overset{*}{\rightharpoonup} v \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;H'),$$

então $u_t = v$ em $(0,T)$.

Demonstração. Ver [30], página 449, Exercício 23.12g. □

Teorema 2.102 (Aubin-Lions)**.** *Sejam X, Y e Z espaços de Banach tais que*

$$X \overset{c}{\hookrightarrow} Y \hookrightarrow Z.$$

Considere o espaço

$$\mathcal{W} = \{u \in L^p(0,T;X) \mid u_t \in L^q(0,T;Z)\}, \quad 1 < p, q < \infty.$$

Se X e Z são espaços reflexivos, então $\mathcal{W} \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(0,T;Y)$. Aqui $\mathcal{W}$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{\mathcal{W}} := \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \|u_t\|_{L^q(0,T;Z)}.$$

Demonstração. Ver [20], página 58, Teorema 5.1. □

2.7 Semigrupos de Operadores Lineares

2.7.1 Definições e Resultados

Definição 2.103. *Seja X um espaço de Banach. Uma família $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X,X)$ é dita um **semigrupo de operadores lineares** quando*

(i) $S(0) = Id$ *(operador identidade em X),*

(ii) $S(t+s) = S(t) \circ S(s), \quad \forall\, t, s \geq 0.$

Definição 2.104. *Seja X um espaço de Banach e $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X,X)$ um semigrupo de operadores lineares. Dizemos que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-**semigrupo** quando*

(iii) $\lim\limits_{t\to 0^+} S(t)x = x, \quad \forall\, x \in X.$

Definição 2.105. *Seja X um espaço de Banach. Um semigrupo de operadores lineares $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um **semigrupo de contrações** quando*

(iv) $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq 1, \quad t \geq 0.$

Definição 2.106. *Seja X um espaço de Banach. O **gerador infinitesimal** de um semigrupo de operadores lineares $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é o operador $A : D(A) \subset X \to X$ definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in X \mid \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\},$$

$$A(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}.$$

O semigrupo gerado por A será denotado por $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$.

Definição 2.107. *Seja H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear. Dizemos que A é **dissipativo** quando $Re(A(x), x) \leq 0$, para todo $x \in D(A)$.*

Proposição 2.108. *Seja H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador dissipativo tal que o operador $Id - A$ é sobrejetor. Então, $\overline{D(A)} = H$.*

Demonstração. Ver [24], página 16, Teorema 4.6. □

Teorema 2.109 (Lummer-Philips)**.** *Seja H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador com $\overline{D(A)} = H$. Então, A é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em H se, e somente se, A é dissipativo e o operador $\lambda Id - A$ é sobrejetor para algum $\lambda > 0$.*

Demonstração. Ver [24], página 14, Teorema 4.3. □

Teorema 2.110. *Sejam $\{S_1(t)\}_{t\geq 0}$ e $\{S_2(t)\}_{t\geq 0}$ dois C_0-semigrupos de contrações e sejam A_1 e A_2 seus respectivos geradores infinitesimais. Se $A_1 \equiv A_2$, então $S_1(t) = S_2(t)$ para todo $t \geq 0$.*

Demonstração. Ver [24], página 6, Teorema 2.6. □

2.7.2 O Problema de Cauchy Abstrato Não Homogêneo

Consideremos o problema de Cauchy não homogêneo:

$$\begin{cases} U_t = A(U) + F(U), \quad t > 0, \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{2.29}$$

Definição 2.111. *Seja X um espaço de Banach. Um operador $F : X \to X$ é dito **localmente Lipschitz** quando para toda constante $L > 0$, existe uma constante $M_L > 0$ tal que se $\|x\|_X \leq L$, $\|y\|_X \leq L$, então*

$$\|F(x) - F(y)\|_X \leq M_L \|x - y\|_X.$$

Teorema 2.112. *Seja H um espaço de Hilbert. Suponhamos que $A : D(A) \subset H \to H$ é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em H e que $F : H \to H$ é um operador localmente Lipschitz. Então, para todo $U_0 \in H$ existe $T_{max} > 0$ tal que o problema* (2.29) *admite uma única **solução generalizada** em $[0, T_{max})$, isto é, existe um único $U \in C([0, T_{max}), H)$ satisfazendo*

$$U(t) = e^{tA} U_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} F(U(\tau)) d\tau.$$

Além disso, se $U_0 \in D(A)$, então

$$U \in C^1([0, T_{max}), H) \cap C([0, T_{max}), D(A))$$

é solução clássica de (2.29)

Demonstração. Ver [31], página 53, Teorema 2.5.4. □

Teorema 2.113. *Suponhamos que as hipóteses do Teorema 2.112 sejam satisfeitas. Então*

(i) $T_{max} = \infty$ *ou*

(ii) $T_{max} < \infty$ *e*

$$\lim_{t \to T_{max}^-} \|U(t)\|_H = \infty. \tag{2.30}$$

Demonstração. Ver [31], página 54, Teorema 2.5.5. □

Lema 2.114. *Seja* p *uma função real positiva, crescente com* $p(0) = 0$. *Defina*

$$q := Id - (Id + p)^{-1}.$$

Considere uma sequência de números reais $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *tal que*

$$s_{n+1} + p(s_{n+1}) \leq s_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Então, $s_n \leq S(n)$, *onde* $S(t)$ *é solução da equação diferencial*

$$S_t(t) + q(S(t)) = 0, \qquad S(0) = s_0.$$

Mais ainda, se $p(s) > 0$ *para* $s > 0$, *então* $\lim\limits_{t \to \infty} S(t) = 0$.

Demonstração. Ver [18], página 531, Lema 3.3. □

Agora, consideremos outro problema de Cauchy abstrato:

$$\begin{cases} U_t = A(U) + h(t), \quad t > 0, \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{2.31}$$

Lema 2.115. *Se* $h \in L^1(0, T; X)$, *então para todo* $U_0 \in X$ *o problema* (2.31) *admite no máximo uma solução. Neste caso, a solução é da forma*

$$U(t) = e^{tA} U_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} h(\tau) d\tau. \tag{2.32}$$

Demonstração. Ver [24], página 106, Corolário 2.2. □

Lema 2.116. *Seja* A *o gerador infinitesimal de um* C_0*-semigrupo de contrações. Se* h *é diferenciável com* $h' \in L^1(0, T; X)$, *então para* $U_0 \in D(A)$, *o problema* (2.31) *admite uma única solução clássica. Além disso,* U *é dada em* (2.32).

Demonstração. Ver [24], página 110, Corolário 2.10. □

2.8 TEOREMA DE CARATHÉODORY

Teorema 2.117 (Teorema de Carathéodory)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ satisfazendo as seguintes condições:*

i) $f(t,x)$ é mensurável em t para cada x fixado;

ii) $f(t,x)$ é contínua em x para quase todo t fixado;

iii) Para todo subconjunto compacto $K \subset \Omega$, existe uma função real integrável $m_k(t)$ tal que

$$\|f(t,x)\|_{\mathbb{R}^N} \leq m_k(t), \quad \forall\, (t,x) \in K.$$

Então, existe $c > 0$ tal que o P.V.I.

$$\begin{cases} y'(t) &=& f(t,y), \\ y(t_0) &=& y_0, \end{cases} \tag{2.33}$$

possui uma solução absolutamente contínua sobre $[t_0 - c, t_0 + c]$.

Demonstração. Ver [9], página 43, Teorema 1.1. □

Teorema 2.118 (Teorema do Prolongamento)**.** *Seja $r > 0$ e $\Omega = [0,T) \times B_r(0) \subset \mathbb{R}^{N+1}$. Sob as hipóteses do Teorema 2.117, suponhamos que exista uma solução $y(t)$ do P.V.I.* (2.33) *tal que $x_0 \in B_r(0)$ e que para todo intervalo I onde y esteja bem definida, se tenha $y(t) \in B_{r_0}(0)$, para todo $t \in I$, com $r_0 < r$ independente de I. Então, y possui um prolongamento a todo intervalo $[0,T]$.*

Demonstração. Ver [9], página 45, Teorema 1.2. □

3 UM MODELO DE VIGAS VISCOELÁSTICAS EXTENSÍVEIS

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e limitado com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ bem regular, $T > 0$ um número real arbitrário e $Q_T = \Omega \times (0, T)$. No que segue, vamos estudar a boa colocação e o comportamento assintótico para a seguinte equação

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds - M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u + f(u) = 0 \text{ em } Q_T, \tag{3.1}$$

onde g, M, f são funções reais cujas hipóteses serão dadas posteriormente. As condições de fronteira acopladas a (3.1) é a condição de fronteira fixada

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times [0, T), \tag{3.2}$$

onde ν é o vetor normal unitário exterior, ou a condição de fronteira simplesmente apoiada

$$u = \Delta u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma \times [0, T). \tag{3.3}$$

Além disso, as condições iniciais para (3.1) são

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \tag{3.4}$$

Para contemplar as condições de fronteira, definimos os espaços $\mathcal{V}_0 = L^2(\Omega)$, $\mathcal{V}_1 = H_0^1(\Omega)$ e

$$\mathcal{V}_2 = \begin{cases} H_0^2(\Omega), & \text{para (3.2);} \\ H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), & \text{para (3.3);} \end{cases}$$

$$\mathcal{V}_4 = \begin{cases} H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega), & \text{para (3.2);} \\ \{u \in H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \mid \Delta u \in H_0^1(\Omega)\}, & \text{para (3.3);} \end{cases}$$

munidos dos respectivos produtos internos e normas

$$\begin{aligned} (u, v) := (u, v)_2 = \int_\Omega u(x)v(x)dx \quad &\text{e} \quad \|u\|_2 = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx\right)^{1/2}, \\ (u, v)_{\mathcal{V}_1} = (\nabla u, \nabla v) \quad &\text{e} \quad \|u\|_{\mathcal{V}_1} = \|\nabla u\|_2, \\ (u, v)_{\mathcal{V}_2} = (\Delta u, \Delta v) \quad &\text{e} \quad \|u\|_{\mathcal{V}_2} = \|\Delta u\|_2, \\ (u, v)_{\mathcal{V}_4} = (\Delta^2 u, \Delta^2 v) \quad &\text{e} \quad \|u\|_{\mathcal{V}_4} = \|\Delta^2 u\|_2. \end{aligned}$$

Consideremos ainda os espaços de fase com suas respectivas normas

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{V}_4 \times \mathcal{V}_2 \quad \text{com} \quad \|(u,v)\|^2_{\mathcal{H}_1} = \|\Delta^2 u\|_2^2 + \|\Delta v\|_2^2,$$
$$\mathcal{H} = \mathcal{V}_2 \times \mathcal{V}_0 \quad \text{com} \quad \|(u,v)\|^2_{\mathcal{H}} = \|\Delta u\|_2^2 + \|v\|_2^2.$$

As funções g, M e f devem satifazer as seguintes hipóteses:

(**H.1**) Assumimos que $g \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+)$ é uma função não negativa e não crescente tal que

$$1 - \int_0^\infty g(s)ds = l > 0 \quad \text{e} \quad g(0) > 0. \tag{3.5}$$

(**H.2**) $M \in C^1([0,\infty))$ satisfaz

$$\widehat{M}(s) := \int_0^s M(\tau)d\tau \geq -l\beta_1 s, \quad \forall\ s \geq 0. \tag{3.6}$$

onde $\beta_1 \in [0, \mu_1)$ e $\mu_1 > 0$ é tal que

$$\mu_1 \|\nabla u\|_2^2 \leq \|\Delta u\|_2^2, \quad \forall\ u \in \mathcal{V}_2.$$

(**H.3**) Assumimos que $f \in C^1(\mathbb{R})$ com $\widehat{f}(s) := \displaystyle\int_0^s f(\tau)d\tau$ satisfazendo

$$-\frac{l}{2}\beta_2|s|^2 \leq \widehat{f}(s) \leq f(s)s + \frac{l}{2}\beta_2|s|^2, \quad \forall\ s \in \mathbb{R}, \tag{3.7}$$

onde $\beta_2 \in [0, \mu_2)$ e $\mu_2 > 0$ é tal que

$$\mu_2 \|u\|_2^2 \leq \|\Delta u\|_2^2, \quad \forall\ u \in \mathcal{V}_2.$$

Além disso, suponhamos que $f(0) = 0$ e que exista uma constante $\mu_3 > 0$ tal que

$$|f'(s)| \leq \mu_3(1 + |s|^{\rho/2}), \quad \forall\ s \in \mathbb{R}, \tag{3.8}$$

onde $\rho > 0$ se $1 \leq N \leq 4$ e $0 < \rho < \frac{8}{N-4}$ se $N \geq 5$.

(**H.4**) As constantes β_1 e β_2 são escolhidas de forma que

$$\beta := l\left[1 - \left(\frac{\beta_1}{\mu_1} + \frac{\beta_2}{\mu_2}\right)\right] > 0. \tag{3.9}$$

Observação. De acordo com a escolha da constante ρ na hipótese (**H.3**) obtemos pelas imersões de Sobolev (ver Teorema 2.72) que $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$ para qualquer dimensão $N \geq 1$.

3.1 Existência, Unicidade e Dependência Contínua

Nesta seção estudaremos a boa colocação do problema (3.1)-(3.4). Como em Giorgi et al. [12] não foi estudado o caso viscoelástico considerando memória sem história, então usamos as ideias introduzidas por Cavalcanti et al. [8, 7] e Lions [20] para abordar o problema (3.1)-(3.4) no que se refere a existência e unicidade.

3.1.1 Solução Forte

Definição 3.1. *Uma **solução forte** do problema* (3.1)-(3.4) *é uma função u na classe*

$$u \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_4), \;\; u_t \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2), \;\; u_{tt} \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0), \tag{3.10}$$

satisfazendo (3.1) *quase sempre em Q_T e as condições iniciais* (3.4).

Teorema 3.2. *Suponhamos que as hipóteses* (**H.1**)-(**H.4**) *sejam satisfeitas.*

(i) Se $(u_0,u_1) \in \mathcal{H}_1$, então o problema (3.1)-(3.4) *possui uma única solução forte.*

(ii) Se $z^1 = (u,u_t)$ e $z^2 = (v,v_t)$ são duas soluções fortes do problema (3.1)-(3.4) *com dados iniciais $z_0^1 = (u_0,u_1)$, $z_0^2 = (v_0,v_1) \in \mathcal{H}_1$, respectivamente, então existe uma constante $C = C(|\Omega|,\rho,\|z_0^1\|_{\mathcal{H}},\|z_0^2\|_{\mathcal{H}},T) > 0$ tal que*

$$\|z^1(t) - z^2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq C\|z_0^1 - z_0^2\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall\; t \in [0,T].$$

Demonstração. A demonstração será feita em várias etapas como segue.

O Problema Aproximado: Considere $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma base de $\mathcal{V}_4$ formada por autofunções do problema $\Delta^2 w = \lambda w$ em Ω, a qual é ortogonal em $\mathcal{V}_2$, ortogonal em $\mathcal{V}_1$ e ortonormal em $\mathcal{V}_0$. Ao leitor interessado na existência de tal base, veja a revisão apresentada para os problemas elípticos (2.7) e (2.11) no Capítulo 2. De acordo com a regularidade dos problemas elípticos (ver Teorema 2.82) e das imersões de Sobolev, segue que

$$w_j \in \left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} H^m(\Omega)\right) \cap C^\infty(\overline{\Omega}), \quad \forall\; j \in \mathbb{N}.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja V_m o espaço vetorial

$$V_m = [w_1,\ldots,w_m] \subset \mathcal{V}_4.$$

Seja $m \in \mathbb{N}$ fixado. Determinaremos uma solução da forma

$$u^m(t) = \sum_{j=1}^m y_{jm}(t)w_j \text{ em } V_m, \quad t \in [0,T], \tag{3.11}$$

para o seguinte problema aproximado:

$$\begin{cases} (u_{tt}^m(t), w_j) + (\Delta u^m(t), \Delta w_j) - \displaystyle\int_0^t g(t-s)(\Delta u^m(s), \Delta w_j)ds \\ -M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\Delta u^m(t), w_j) + (f(u^m(t)), w_j) = 0, \\ u^m(0) = u_0^m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_0 \text{ em } \mathcal{V}_4, \\ u_t^m(0) = u_1^m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_1 \text{ em } \mathcal{V}_2, \end{cases} \tag{3.12}$$

onde, por (3.11), consideramos

$$u_0^m = u^m(0) = \sum_{j=1}^m y_{jm}(0)w_j = \sum_{j=1}^m \alpha_{jm}w_j, \quad \alpha_{jm} = (u_0^m, w_j),$$
$$u_1^m = u_t^m(0) = \sum_{j=1}^m y'_{jm}(0)w_j = \sum_{j=1}^m \beta_{jm}w_j, \quad \beta_{jm} = (u_1^m, w_j).$$

Notemos agora que

$$(u_{tt}^m(t), w_j) = \left(\sum_{i=1}^m y''_{im}(t)w_i, w_j\right) = \sum_{i=1}^m y''_{im}(t)(w_i, w_j) = y''_{jm}(t).$$

Pondo $\xi_j = \|\nabla w_j\|_2^2$ e $\gamma_j = \|\Delta w_j\|_2^2$, temos que

$$(\Delta u^m(t), w_j) = \left(\sum_{i=1}^m y_{im}(t)\Delta w_i, w_j\right) = -\sum_{i=1}^m y_{im}(t)(\nabla w_i, \nabla w_j) = -\xi_j y_{jm}(t)$$

e

$$(\Delta u^m(t), \Delta w_j) = \left(\sum_{i=1}^m y_{im}(t)\Delta w_i, \Delta w_j\right) = \sum_{i=1}^m y_{im}(t)(\Delta w_i, \Delta w_j) = \gamma_j y_{jm}(t).$$

Assim,

$$-M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\Delta u^m(t), w_j) = M\left(\sum_{i=1}^m \xi_i y_{im}^2(t)\right)\xi_j y_{jm}(t).$$

Com isto, podemos reescrever o problema aproximado (3.12) no seguinte sistema de E.D.O's de 2ª ordem

$$\begin{cases} y''_{jm}(t) + \gamma_j y_{jm}(t) - \gamma_j \displaystyle\int_0^t g(t-s)y_{jm}(s)ds = h_j(y_{jm}(t)), & j = 1, \ldots, m \\ y_{jm}(0) = \alpha_{jm}, \ y'_{jm}(0) = \beta_{jm}, & j = 1, \ldots, m \end{cases} \tag{3.13}$$

onde,

$$h_j(y_{jm}(t)) = -\left(f\left(\sum_{i=1}^m y_{im}(t)w_i\right), w_j\right) - M\left(\sum_{i=1}^m \xi_i y_{im}^2(t)\right)\xi_j y_{jm}(t),$$

com
$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{jm} w_j \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_0 \text{ em } \mathcal{V}_4 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{m} \beta_{jm} w_j \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_1 \text{ em } \mathcal{V}_2.$$

Agora, vamos encontrar uma solução para o sistema de E.D.O's (3.13). Para isto, usaremos o Teorema de Carathéodory (ver Teorema 2.117). Com efeito, reescrevendo o sistema (3.13) na forma matricial, temos

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y''_{1m}(t) \\ \vdots \\ y''_{mm}(t) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -\gamma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\gamma_m \end{bmatrix}}_{:=A} \underbrace{\begin{bmatrix} y_{1m}(t) \\ \vdots \\ y_{mm}(t) \end{bmatrix}}_{:=Z(t)} + \begin{bmatrix} \gamma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \gamma_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_0^t g(t-s) y_{1m}(s) ds \\ \vdots \\ \int_0^t g(t-s) y_{mm}(s) ds \end{bmatrix} \\
&\quad + \underbrace{\begin{bmatrix} h_1(y_{1m}(t)) \\ \vdots \\ h_m(y_{mm}(t)) \end{bmatrix}}_{:=H(Z(t))}; \\
&\quad \begin{bmatrix} y_{1m}(0) \\ \vdots \\ y_{mm}(0) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{1m} \\ \vdots \\ \alpha_{mm} \end{bmatrix}}_{:=Z_0}, \quad \begin{bmatrix} y'_{1m}(0) \\ \vdots \\ y'_{mm}(0) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_{1m} \\ \vdots \\ \beta_{mm} \end{bmatrix}}_{:=Z_1},
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} Z''(t) = AZ(t) - A \displaystyle\int_0^t g(t-s) Z(s) ds + H(Z(t)) \text{ em } (0,T], \\ Z(0) = Z_0, \; Z'(0) = Z_1. \end{cases} \tag{3.14}$$

Definindo
$$Y_1(t) = Z(t), \quad Y_2(t) = Z'(t) \quad \text{e} \quad Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix},$$

obtemos de (3.14) que

$$\begin{aligned}
Y'(t) &= \begin{bmatrix} Y_1'(t) \\ Y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z'(t) \\ Z''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_2(t) \\ AY_1(t) - A \displaystyle\int_0^t g(t-s) Y_1(s) ds + H(Y_1(t)) \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & Id_{m\times m} \\ A & 0 \end{bmatrix}}_{:=\mathcal{B}} \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \displaystyle\int_0^t g(t-s) A Y_1(s) ds \end{bmatrix}}_{:=\Psi(t,Y(t))} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ H(Y_1(t)) \end{bmatrix}}_{:=\Phi(Y(t))}, \\
Y(0) &= \begin{bmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(0) \\ Z'(0) \end{bmatrix} := Y_0.
\end{aligned}$$

Então, podemos converter o sistema (3.14) no seguinte P.V.I. de 1ª ordem

$$\begin{cases} Y'(t) = \mathcal{B}Y(t) - \Psi(t, Y(t)) + \Phi(Y(t)) \text{ em } (0, T], \\ Y(0) = Y_0. \end{cases} \tag{3.15}$$

No que segue, vamos mostrar que a função

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & [0,T] \times \mathbb{R}^{2m} & \rightarrow & \mathbb{R}^{2m} \\ & (t, Y) & \mapsto & \varphi(t,Y) = \mathcal{B}Y - \Psi(t,Y) + \Phi(Y) \end{array}$$

satisfaz as condições do Teorema de Carathéodory. De fato,

i) Para cada $Y \in \mathbb{R}^{2m}$ fixo a aplicação $\varphi(t, Y)$ é mensurável em t, pois a função g é contínua em t.

ii) Para cada t fixado a aplicação $\varphi(t, Y)$ é contínua em Y. Para ver isto, basta observar que a continuidade de Φ é proveniente da continuidade de M e da continuidade de f e que Ψ é contínua em Y.

iii) Seja $K \subset [0, T] \times \mathbb{R}^{2m}$ um compacto. Como as aplicações Ψ, Φ são continuas em $\mathbb{R}^{2m}$ e $\mathcal{B}$ é contínua em $[0, T] \times \mathbb{R}^{2m}$, temos que existem constantes $C_{1,K}$, $C_{2,K}$ e $C_{3,K}$ tais que

$$\begin{aligned} \|\varphi(t,Y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} &\leq \|\mathcal{B}Y\|_{\mathbb{R}^{2m}} + \|\Psi(t,Y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} + \|\Phi(Y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \\ &\leq \|\mathcal{B}\|_{\mathbb{R}^{m^2}} \|Y\|_{\mathbb{R}^{2m}} + \|\Psi(t,Y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} + \|\Phi(Y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \\ &\leq C_{1,K} + C_{2,K} + C_{3,K} = C_K, \end{aligned}$$

para todo $(t, Y) \in K$. Pondo $m_K(t) = C_K$, para todo $t \in [0, T]$, segue que

$$\|\varphi(t,Y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq m_K(t), \quad \forall\ (t,Y) \in K.$$

Assim, pelo Teorema de Carathéodory, o P.V.I. (3.15) possui uma solução absolutamente contínua $Y(t)$ em algum intervalo $[0, t_m]$, com $0 < t_m \leq T$. Logo, $Z(t)$ e $Z'(t)$ são absolutamente contínuas com $Z''(t)$ existindo q.s. em $(0, t_m) \subset [0, T]$ e satisfazendo (3.14). Consequentemente, as funções $y_{jm}(t)$, $j = 1, \ldots, m$, são soluções locais de (3.13) em $[0, t_m)$. Portanto, o problema aproximado (3.12) possui uma solução local $u^m(t)$, $m \in \mathbb{N}$, em $[0, t_m]$, da forma (3.11).

A partir de agora, denotaremos todas as constantes positivas por C.

Estimativa a Priori I: Multiplicando $(3.12)_1$ por $y'_{jm}(t)$ e somando de $j = 1$ até m, temos

$$\begin{gathered} (u^m_{tt}(t), u^m_t(t)) + (\Delta u^m(t), \Delta u^m_t(t)) - \int_0^t g(t-s)(\Delta u^m(s), \Delta u^m_t(t))ds \\ -M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\Delta u^m(t), u^m_t(t)) + (f(u^m(t)), u^m_t(t)) = 0, \end{gathered} \tag{3.16}$$

quase sempre em $(0,t_m]$, $t_m \le T$. No que segue vamos reescrever os termos de (3.16). Afirmamos que

$$(u_{tt}^m(t), u_t^m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t^m(t)\|_2^2$$

no sentido das distribuições. De fato, sejam

$$\phi(t) := (u_{tt}^m(t), u_t^m(t)) \quad \text{e} \quad \psi(t) := \|u_t^m(t)\|_2^2.$$

Para toda função teste $\varphi \in \mathcal{D}(0,t_m)$, note que

$$\begin{aligned}
\langle \psi, \varphi' \rangle &= \int_0^{t_m} \|u_t^m(t)\|_2^2 \varphi'(t)dt \\
&= \|u_t^m(t)\|_2^2 \varphi(t)\Big|_0^{t_m} - \int_0^{t_m} \frac{d}{dt}\|u_t^m(t)\|_2^2 \varphi(t)dt \\
&= -\int_0^{t_m}\int_\Omega \frac{d}{dt}|u_t^m(t)|^2 dx \varphi(t)dt \\
&= -2\int_0^{t_m}\int_\Omega u_{tt}^m(t)u_t^m(t)dx\varphi(t)dt \\
&= -2\int_0^{t_m} (u_{tt}^m(t), u_t^m(t))\varphi(t)dt \\
&= -\langle 2\phi, \varphi\rangle .
\end{aligned}$$

Logo, $\frac{d}{dt}\psi = 2\phi$ em $\mathcal{D}'(0,t_m)$, o que prova o desejado. Analogamente, prova-se que

$$(\Delta u^m(t), \Delta u_t^m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u^m(t)\|_2^2 \text{ em } \mathcal{D}'(0,t_m).$$

Também, derivando no sentido distribucional a função $g\Box\Delta u^m$ (ver definição de $g\Box u$ em (2.20)), obtemos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}
-\int_0^t g(t-s)(\Delta u^m(s), \Delta u_t^m(t))ds = &-\frac{1}{2}(g'\Box\Delta u^m)(t) + \frac{1}{2}g(t)\|\Delta u^m(t)\|_2^2 \\
&+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\Box\Delta u^m)(t) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\int_0^t g(s)ds\right)\|\Delta u^m(t)\|_2^2\right].
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Pelo Teorema de Green (ver Teorema 2.81),

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\widehat{M}(\|\nabla u^m(t)\|_2^2) &= \frac{1}{2}\widehat{M}'(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)\frac{d}{dt}\|\nabla u^m(t)\|_2^2 \\
&= M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\nabla u^m(t), \nabla u_t^m(t)) \\
&= -M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\Delta u^m(t), u_t^m(t)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \widehat{f}(u^m(x,t))dx\right) &= \int_\Omega \frac{d}{dt}\widehat{f}(u^m(t))dx \\ &= \int_\Omega f(u^m(t))u_t^m(t)dx \\ &= (f(u^m(t)), u_t^m(t)).\end{aligned}$$

Logo, podemos reescrever a equação (3.16) como

$$\frac{d}{dt}E^m(t) = -D^m(t), \tag{3.18}$$

onde

$$\begin{aligned}E^m(t) = \frac{1}{2}\|u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|\Delta u^m(t)\|_2^2 \\ +\frac{1}{2}(g\Box\Delta u^m)(t) + \frac{1}{2}\widehat{M}(\|\nabla u^m(t)\|_2^2) + \int_\Omega \widehat{f}(u^m(t))dx\end{aligned} \tag{3.19}$$

e

$$D^m(t) = -\frac{1}{2}(g'\Box\Delta u^m)(t) + \frac{1}{2}g(t)\|\Delta u^m(t)\|_2^2. \tag{3.20}$$

Da hipótese (**H.1**),

$$(g'\Box\Delta u^m)(t) \leq 0 \leq g(t)\|\Delta u^m(t)\|_2^2, \quad \forall\ t \in (0, t_m].$$

Assim, de (3.20), concluímos que $D^m(t) \geq 0$, para todo $t \in (0, t_m]$. Donde, por (3.18),

$$\frac{d}{dt}E^m(t) \leq 0, \quad \forall\ t \in (0, t_m]. \tag{3.21}$$

Integrando (3.21) de 0 até t, $t \in (0, t_m]$, obtemos

$$E^m(t) \leq E^m(0) = \frac{1}{2}\|u_1^m\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u_0^m\|_2^2 + \frac{1}{2}\widehat{M}(\|\nabla u_0^m\|_2^2) + \int_\Omega \widehat{f}(u_0^m(x))dx. \tag{3.22}$$

Das convergências $(3.12)_{2,3}$ e da imersão $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_1$, temos que $\|\nabla u_0^m\|_2^2 \leq C$, onde $C = C(\|\Delta u_0\|_2) > 0$. Então,

$$|\widehat{M}(\|\nabla u_0^m\|_2^2)| \leq \int_0^{\|\nabla u_0^m\|_2^2} |M(s)|ds \leq \int_0^C |M(s)|ds \leq C \max_{s\in[0,C]} |M(s)|. \tag{3.23}$$

Logo, por (3.23), existe uma constante $C = C(\|\Delta u_0\|_2) > 0$, tal que

$$\widehat{M}(\|\nabla u_0^m\|_2^2) \leq C. \tag{3.24}$$

Agora, afirmamos que existe uma constante $C = C(|\Omega|, \rho, \|\Delta u_0\|_2) > 0$ tal que

$$\int_\Omega \widehat{f}(u_0^m(x))dx \leq C. \tag{3.25}$$

De fato, sejam $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$f(s_1) - f(s_2) = f'(\theta s_1 + (1-\theta)s_2)(s_1 - s_2).$$

De (3.8), temos que

$$\begin{aligned} |f(s_1) - f(s_2)| &= |f'(\theta s_1 + (1-\theta)s_2)||s_1 - s_2| \\ &\leq \mu_3(1 + |\theta s_1 + (1-\theta)s_2|^{\rho/2})|s_1 - s_2| \\ &\leq \mu_3(1 + (\theta|s_1| + (1-\theta)|s_2|)^{\rho/2})|s_1 - s_2| \\ &\leq \mu_3(1 + (|s_1| + |s_2|)^{\rho/2})|s_1 - s_2| \\ &\leq \mu_4(1 + |s_1|^{\rho/2} + |s_2|^{\rho/2})|s_1 - s_2|, \end{aligned}$$

com $\mu_4 = \mu_3 2^{\rho/2}$. Assim,

$$|f(s_1) - f(s_2)| \leq \mu_4(1 + |s_1|^{\rho/2} + |s_2|^{\rho/2})|s_1 - s_2|. \tag{3.26}$$

Em particular, para $s_2 = 0$ e usando que $f(0) = 0$, segue de (3.26) que

$$|f(s_1)| \leq \mu_4(1 + |s_1|^{\rho/2})|s_1|, \quad \forall\ s_1 \in \mathbb{R}. \tag{3.27}$$

De (3.7), (3.27), da Desigualdade de Hölder generalizada (ver Corolário 2.50) com $\frac{\rho}{2(\rho+2)} + \frac{1}{\rho+2} + \frac{1}{2} = 1$ e das imersões

$$\mathcal{V}_2 \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{V}_0,$$

obtemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \widehat{f}(u_0^m(x))dx &\leq \int_\Omega |f(u_0^m(x))||u_0^m(x)|dx + \frac{l}{2}\beta_2 \int_\Omega |u_0^m(x)|^2 dx \\ &\leq \mu_4 \int_\Omega (1 + |u_0^m(x)|^{\rho/2})|u_0^m(x)||u_0^m(x)|dx + \frac{l}{2}\beta_2 \|u_0^m\|_2^2 \\ &\leq \mu_4(|\Omega|^{\rho/2(\rho+2)} + \|u_0^m\|_{\rho+2}^{\rho/2})\|u_0^m\|_{\rho+2}\|u_0^m\|_2 + \frac{l}{2}\beta_2 \|u_0^m\|_2^2 \\ &\leq C, \end{aligned}$$

com $C = C(|\Omega|, \rho, \|\Delta u_0\|_2) > 0$, como queríamos. Portanto, de $(3.12)_{2,3}$, (3.24) e (3.25), existe uma constante $C = C(|\Omega|, \rho, \|u_1\|_2, \|\Delta u_0\|_2) > 0$ tal que

$$E^m(0) \leq C. \tag{3.28}$$

Por outro lado, como

$$l \leq 1 - \int_0^t g(s)ds, \tag{3.29}$$

temos que

$$E^m(t) \geq \frac{1}{2}\|u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{l}{2}\|\Delta u^m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\widehat{M}(\|\nabla u^m(t)\|_2^2) + \int_\Omega \widehat{f}(u^m(t))dx. \tag{3.30}$$

Além disso, de (3.6), (3.7), (3.9) e (3.30), obtemos que

$$\begin{aligned} E^m(t) &\geq \frac{1}{2}\|u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{l}{2}\|\Delta u^m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\widehat{M}(\|\nabla u^m(t)\|_2^2) + \int_\Omega \widehat{f}(u^m(t))dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{l}{2}\|\Delta u^m(t)\|_2^2 - \frac{l}{2}\beta_1\|\nabla u^m(t)\|_2^2 - \frac{l}{2}\beta_2\|u^m(t)\|_2^2 \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{l}{2}\|\Delta u^m(t)\|_2^2 - \frac{l}{2}\frac{\beta_1}{\mu_1}\|\Delta u^m(t)\|_2^2 - \frac{l}{2}\frac{\beta_2}{\mu_2}\|\Delta u^m(t)\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2}\|u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{l}{2}\left[1 - \left(\frac{\beta_1}{\mu_1} + \frac{\beta_2}{\mu_2}\right)\right]\|\Delta u^m(t)\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2}\|u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{\beta}{2}\|\Delta u^m(t)\|_2^2. \end{aligned}$$

Isto implica que

$$\|u_t^m(t)\|_2^2 + \|\Delta u^m(t)\|_2^2 \leq CE^m(t), \tag{3.31}$$

para alguma constante $C > 0$. Logo, de (3.22), (3.28) e (3.31), temos que

$$\|u_t^m(t)\|_2^2 + \|\Delta u^m(t)\|_2^2 \leq C, \quad \forall\, t \in [0, t_m),\ \forall\, m \in \mathbb{N} \tag{3.32}$$

com $C = C(|\Omega|, \rho, \|u_1\|_2, \|\Delta u_0\|_2) > 0$. Da estimativa (3.32) concluímos que a solução $Y(t)$ do P.V.I (3.15) é limitada em $\mathbb{R}^{2m}$, ou seja,

$$\|Y(t)\|_{\mathbb{R}^{2m}}^2 \leq C,\ \forall\, t \in [0, t_m),\ \forall\, m \in \mathbb{N}, \tag{3.33}$$

onde $C = C(|\Omega|, \rho, \|u_1\|_2, \|\Delta u_0\|_2) > 0$. De fato, temos que

$$\begin{aligned} \|u_t^m(t)\|_2^2 &= (u_t^m(t), u_t^m(t)) = \left(\sum_{j=1}^m y'_{jm}(t)w_j, \sum_{i=1}^m y'_{im}(t)w_i\right) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m y'_{im}(t)y'_{jm}(t)(w_j, w_i) = \sum_{i=1}^m [y'_{im}(t)]^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|u^m(t)\|_2^2 &= (u^m(t),u^m(t)) = \left(\sum_{j=1}^m y_{jm}(t)w_j, \sum_{i=1}^m y_{im}(t)w_i\right)\\ &= \sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m y_{im}(t)y_{jm}(t)(w_j,w_i) = \sum_{i=1}^m [y_{im}(t)]^2.\end{aligned}$$

Da imersão $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_0$ e de (3.32), segue que $(u^m(t))$ é limitada em $\mathcal{V}_0$. Logo,

$$\|Y(t)\|_{\mathbb{R}^{2m}}^2 = \sum_{i=1}^m [y'_{im}(t)]^2 + \sum_{i=1}^m [y_{im}(t)]^2 = \|u_t^m(t)\|_2^2 + \|u^m(t)\|_2^2 \leq C, \ \forall\ t \in [0,t_m), \ \forall\ m \in \mathbb{N}.$$

Assim, pelo Teorema do Prolongamento (ver Teorema 2.118), podemos prolongar $Y(t)$ a todo intervalo $[0,T]$ com o mesmo ocorrendo com $y_{jm}(t)$ e $y'_{jm}(t)$, $j=1,\ldots,m$. E da relação (3.11), podemos estender $u^m(t)$ a todo intervalo $[0,T]$. Além disso, repetindo o mesmo processo de (3.16) a (3.33), segue que a desigualdade (3.32) permanece válida para todo $t \in [0,T]$ e todo $m \in \mathbb{N}$, isto é,

$$\|u_t^m(t)\|_2^2 + \|\Delta u^m(t)\|_2^2 \leq C, \ \forall\ t \in [0,T], \ \forall\ m \in \mathbb{N}, \tag{3.34}$$

onde $C = C(|\Omega|, \rho, \|u_1\|_2, \|\Delta u_0\|_2) > 0$. Da estimativa (3.34) obtemos ainda que

$$\begin{array}{lll}(u^m) & \text{é limitada em} & L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2),\\ (u_t^m) & \text{é limitada em} & L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0).\end{array} \tag{3.35}$$

<u>*Estimativa a Priori II*</u>: Usando o Teorema de Green, podemos reescrever $(3.12)_1$ como

$$\begin{aligned}(u_{tt}^m(t),w_j) + (\Delta^2 u^m(t),w_j) - \int_0^t g(t-s)(\Delta^2 u^m(s),w_j)ds\\ -M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\Delta u^m(t),w_j) + (f(u^m(t)),w_j) = 0,\end{aligned} \tag{3.36}$$

para $j=1,\ldots,m$. Multiplicando (3.36) por $y'_{jm}(t)\lambda_j$, somando de $j=1$ até m e notando que

$$\Delta^2 u_t^m(t) = \Delta^2\left(\sum_{j=1}^m y'_{jm}(t)w_j\right) = \sum_{j=1}^m y'_{jm}(t)\Delta^2 w_j = \sum_{j=1}^m y'_{jm}(t)\lambda_j w_j,$$

obtemos

$$\begin{aligned}(u_{tt}^m(t),\Delta^2 u_t^m(t)) + (\Delta^2 u^m(t),\Delta^2 u_t^m(t)) - \int_0^t g(t-s)(\Delta^2 u^m(s),\Delta^2 u_t^m(t))ds\\ -M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\Delta u^m(t),\Delta^2 u_t^m(t)) + (f(u^m(t)),\Delta^2 u_t^m(t)) = 0.\end{aligned} \tag{3.37}$$

Considere as funções $\varphi_1(t) = M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)$ e $\varphi_2(t) = (\Delta u^m(t),\Delta^2 u^m(t))$. Pelo Teorema de Green, segue que

$$
\begin{aligned}
\varphi_1'(t)\varphi_2(t) &= 2M'(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\nabla u^m(t), \nabla u_t^m(t))\varphi_2(t) \\
&= \underbrace{-2M'(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(u^m(t), \Delta u_t^m(t))\varphi_2(t)}_{:=-J_{M_1}}
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(t)\varphi_2'(t) &= \varphi_1(t)[(\Delta u_t^m(t), \Delta^2 u^m(t)) + (\Delta u^m(t), \Delta^2 u_t^m(t))] \\
&= \underbrace{\varphi_1(t)(\Delta u_t^m(t), \Delta^2 u^m(t))}_{:=-J_{M_2}} + \varphi_1(t)(\Delta u^m(t), \Delta^2 u_t^m(t)) \\
&= -J_{M_2} + M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\Delta u^m(t), \Delta^2 u_t^m(t)).
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

De (3.38) e (3.39) obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\Delta u^m(t), \Delta^2 u^m(t))\right] &= (\varphi_1\varphi_2)'(t) = \varphi_1'(t)\varphi_2(t) + \varphi_1(t)\varphi_2'(t) \\
&= -J_{M_1} - J_{M_2} + M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\Delta u^m(t), \Delta^2 u_t^m(t)).
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
&-M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\Delta u^m(t), \Delta^2 u_t^m(t)) \\
&\qquad = -J_{M_1} - J_{M_2} + \frac{d}{dt}\left[-M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\Delta u^m(t), \Delta^2 u^m(t))\right].
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

Além disso, temos

$$
\frac{d}{dt}(f(u^m(t)), \Delta^2 u^m(t)) = \underbrace{(f'(u^m(t))u_t^m(t), \Delta^2 u^m(t))}_{:=J_f} + (f(u^m(t)), \Delta^2 u_t^m(t)),
$$

isto é,

$$
(f(u^m(t)), \Delta^2 u_t^m(t)) = \frac{d}{dt}(f(u^m(t)), \Delta^2 u^m(t)) - J_f. \tag{3.41}
$$

Assim, usando (3.17) com Δ^2 no lugar de Δ e das igualdades (3.40) e (3.41), reescrevemos (3.37) como

$$
\frac{d}{dt}F^m(t) = J_g + J_{M_1} + J_{M_2} + J_f, \tag{3.42}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
F^m(t) := \frac{1}{2}\|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g\Box\Delta^2 u^m)(t) \\
-M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\Delta u^m(t), \Delta^2 u^m(t)) + (f(u^m(t)), \Delta^2 u^m(t))
\end{aligned}
$$

e

$$
J_g := \frac{1}{2}(g'\Box\Delta^2 u^m)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2.
$$

Como

$$
(g'\Box\Delta^2 u^m)(t) \le 0 \le g(t)\|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2, \quad \forall\ t \in (0, T],
$$

segue que

$$J_g \leq 0. \tag{3.43}$$

No que segue, estimaremos os termos J_{M_1}, J_{M_2} e J_f. Com efeito, por (3.34), pela imersão $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_1$ e como $M \in C^1([0,\infty))$, temos que existe uma constante $C = C(\|\Delta u_0\|_2) > 0$ tal que

$$\max\{|M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)|, |M'(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)|\} \leq C, \quad \forall\ t \in [0,T],\ \forall\ m \in \mathbb{N}. \tag{3.44}$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, pela imersão $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_0$, por (3.34) e por (3.44), existe uma constante $C = C(\|\Delta u_0\|_2, \|u_1\|_2) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |J_{M_1}| &= |2M'(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(u^m(t), \Delta u_t^m(t))(\Delta u^m(t), \Delta^2 u^m(t))| \\ &\leq 2|M'(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)|\|u^m(t)\|_2\|\Delta u_t^m(t)\|_2\|\Delta u^m(t)\|_2\|\Delta^2 u^m(t)\|_2 \\ &\leq C\|\Delta u_t^m(t)\|_2\|\Delta^2 u^m(t)\|_2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |J_{M_2}| &= |-M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\Delta u_t^m(t), \Delta^2 u^m(t))| \\ &\leq |M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)|\|\Delta u_t^m(t)\|_2\|\Delta^2 u^m(t))\|_2 \\ &\leq C\|\Delta u_t^m(t)\|_2\|\Delta^2 u^m(t)\|_2 \end{aligned}$$

Agora, por (3.8), pela Desigualdade de Hölder generalizada com $\frac{\rho}{2(\rho+2)} + \frac{1}{\rho+2} + \frac{1}{2} = 1$, pelas imersões

$$\mathcal{V}_2 \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{V}_0,$$

e de (3.34), segue que

$$\begin{aligned} |J_f| &= |(f'(u^m(t))u_t^m(t), \Delta^2 u^m(t))| \\ &\leq \int_\Omega |f'(u^m(t))||u_t^m(t)||\Delta^2 u^m(t)|dx \\ &\leq \mu_3 \int_\Omega (1 + |u^m(t)|^{\rho/2})|u_t^m(t)||\Delta^2 u^m(t)|dx \\ &\leq \mu_3(|\Omega|^{\rho/2(\rho+2)} + \|u^m(t)\|_{\rho+2}^{\rho/2})\|u_t^m(t)\|_{\rho+2}\|\Delta^2 u^m(t)\|_2 \\ &\leq C\|\Delta u_t^m(t)\|_2\|\Delta^2 u^m(t)\|_2, \end{aligned}$$

com $C = C(|\Omega|, \rho, \|\Delta u_0\|_2, \|u_1\|_2) > 0$. Substituindo as estimativas dos termos J_{M_1}, J_{M_2} e J_f

em (3.42) e usando (3.43) e a Desigualdade de Young (ver Proposição 2.45), temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F^m(t) &\leq |J_{M_1}|+|J_{M_2}|+|J_f|\\ &\leq C\|\Delta u_t^m(t)\|_2\|\Delta^2 u^m(t)\|_2\\ &\leq C(\|\Delta u_t^m(t)\|_2^2+\|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2),\end{aligned}$$

onde $C = C(|\Omega|, \rho, \|\Delta u_0\|_2, \|u_1\|_2) > 0$. Integrando sobre $[0, t]$, obtemos

$$F^m(t) \leq F^m(0) + C\int_0^t (\|\Delta u_t^m(s)\|_2^2 + \|\Delta^2 u^m(s)\|_2^2)ds, \quad \forall\ t \in [0,T],\ \forall\ m \in \mathbb{N}, \tag{3.45}$$

onde $C = C(|\Omega|, \rho, \|\Delta u_0\|_2, \|u_1\|_2) > 0$. Como $(g\Box\Delta^2 u^m)(0) = 0$, então

$$F^m(0) = \frac{1}{2}\|\Delta u_1^m\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta^2 u_0^m\|_2^2 - M(\|\nabla u_0^m\|_2^2)(\Delta u_0^m, \Delta^2 u_0^m) + (f(u_0^m), \Delta^2 u_0^m). \tag{3.46}$$

Da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, de (3.44) e da convergência $(3.12)_2$, temos que

$$|M(\|\nabla u_0^m\|_2^2)(\Delta u_0^m, \Delta^2 u_0^m)| \leq |M(\|\nabla u_0^m\|_2^2)|\|\Delta u_0^m\|_2\|\Delta^2 u_0^m\|_2 \leq C, \tag{3.47}$$

com $C = C(\|\Delta^2 u_0\|_2, \|u_1\|_2) > 0$. Além disso, usando (3.27) e aplicando a Desigualdade de Hölder generalizada com $\frac{\rho}{2(\rho+2)} + \frac{1}{\rho+2} + \frac{1}{2} = 1$, segue que

$$\begin{aligned}(f(u_0^m), \Delta^2 u_0^m) &\leq \int_\Omega |f(u_0^m(x))||\Delta^2 u_0^m(x)|dx\\ &\leq \mu_4\int_\Omega (1+|u_0^m(x)|^{\rho/2})|u_0^m(x)||\Delta^2 u_0^m(x)|dx\\ &\leq \mu_4(|\Omega|^{\rho/2(\rho+2)} + \|u_0^m\|_{\rho+2)}^{\rho/2})\|u_0^m\|_{\rho+2}\|\Delta^2 u_0^m\|_2.\end{aligned}$$

Assim, da imersão $\mathcal{V}_4 \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$ e da convergência $(3.12)_2$, obtemos uma constante $C = C(|\Omega|, \rho, \|\Delta^2 u_0\|_2) > 0$, tal que

$$(f(u_0^m), \Delta^2 u_0^m) \leq C. \tag{3.48}$$

Logo, de $(3.12)_{2,3}$, (3.46), (3.47) e (3.48), concluímos que

$$F^m(0) \leq C, \tag{3.49}$$

com $C = C(|\Omega|, \rho, \|\Delta^2 u_0\|_2, \|\Delta u_1\|_2) > 0$. Por outro lado, de (3.29) temos

$$F^m(t) \geq \frac{1}{2}\|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{l}{2}\|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2 + J_{M,f}, \tag{3.50}$$

onde

$$J_{M,f} = -M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\Delta u^m(t), \Delta^2 u^m(t)) + (f(u^m(t)), \Delta^2 u^m(t)).$$

Usando um processo análogo ao das estimativas (3.47) e (3.48), obtemos uma constante $C = C(|\Omega|, \rho, \|\Delta u_0\|_2, \|u_1\|_2) > 0$ tal que

$$|J_{M,f}| \leq C\|\Delta^2 u^m(t)\|_2. \tag{3.51}$$

Pela Desigualdade de Young, segue de (3.51)

$$|J_{M,f}| \leq C\|\Delta^2 u^m(t)\| \leq C + \frac{l}{4}\|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2,$$

donde

$$J_{M,f} \geq -C - \frac{l}{4}\|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2, \tag{3.52}$$

com $C = C(|\Omega|, \rho, \|\Delta u_0\|_2, \|u_1\|_2) > 0$. Logo, de (3.50) e (3.52) temos

$$F^m(t) \geq \frac{1}{2}\|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{l}{4}\|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2 - C. \tag{3.53}$$

onde $C = C(|\Omega|, \rho, \|\Delta u_0\|_2, \|u_1\|_2) > 0$. De (3.45), (3.49) e (3.53), concluímos que

$$\|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 + \|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2 \leq C + C\int_0^t (\|\Delta u_t^m(s)\|_2^2 + \|\Delta^2 u^m(s)\|_2^2) ds,$$

com $C = C(|\Omega|, \rho, \|\Delta^2 u_0\|_2, \|\Delta u_1\|_2) > 0$. Portanto, pelo Lema de Gronwall (ver Proposição 2.51),

$$\|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 + \|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2 \leq C, \quad \forall\ t \in [0,T],\ \forall\ m \in \mathbb{N}, \tag{3.54}$$

onde $C = C(|\Omega|, \rho, \|\Delta^2 u_0\|_2, \|\Delta u_1\|_2, T) > 0$. Consequentemente, de (3.54) obtemos que

$$\begin{array}{lll} (u^m) & \text{é limitada em} & L^\infty(0,T;\mathcal{V}_4), \\ (u_t^m) & \text{é limitada em} & L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2). \end{array} \tag{3.55}$$

<u>*Passagem ao Limite*</u>: Da Proposição 2.87, temos

$$\begin{array}{rcl} L^\infty(0,T;\mathcal{V}_4) & = & \left[L^1(0,T;\mathcal{V}_4')\right]', \\ L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2) & = & \left[L^1(0,T;\mathcal{V}_2')\right]', \\ L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0) & = & \left[L^1(0,T;\mathcal{V}_0')\right]'. \end{array}$$

De (3.35), (3.55), do Teorema 2.20 e da Proposição 2.101, existe uma subsequência de (u^m), denotada ainda por (u^m), tal que

$$\begin{aligned} u^m &\overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2),\\ u_t^m &\overset{*}{\rightharpoonup} u_t \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0),\\ u^m &\overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;\mathcal{V}_4),\\ u_t^m &\overset{*}{\rightharpoonup} u_t \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2). \end{aligned} \tag{3.56}$$

Das duas primeiras convergências em (3.56), segue que

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle u^m(t),\vartheta(t)\rangle dt &\overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \langle u(t),\vartheta(t)\rangle dt, \quad \forall\ \vartheta \in L^1(0,T;\mathcal{V}_2'),\\ \int_0^T \langle u_t^m(t),\zeta(t)\rangle dt &\overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \langle u_t(t),\zeta(t)\rangle dt, \quad \forall\ \zeta \in L^1(0,T;\mathcal{V}_0'). \end{aligned}$$

Sejam $j,m \in \mathbb{N}$, $j \leq m$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Fixando j e tomando em particular $\vartheta = \Delta^2 w_j\theta$ e $\zeta = w_j\theta'$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T (\Delta u^m(t),\Delta w_j)\theta(t)dt &\overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (\Delta u(t),\Delta w_j)\theta(t)dt,\\ \int_0^T (u_t^m(t),w_j)\theta'(t)dt &\overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (u_t(t),w_j)\theta'(t)dt. \end{aligned} \tag{3.57}$$

No que segue, vamos mostrar que existem subsequências de (u^m), que ainda denotaremos por (u^m), tais que

$$\int_0^T\int_0^t g(t-s)(\Delta u^m(s),\Delta w_j)\theta(t)dsdt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T\int_0^t g(t-s)(\Delta u(s),\Delta w_j)\theta(t)dsdt, \tag{3.58}$$

$$\int_0^T M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\Delta u^m(t),w_j)\theta(t)dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\Delta u(t),w_j)\theta(t)dt, \tag{3.59}$$

$$\int_0^T (f(u^m(t)),w_j)\theta(t)dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (f(u(t)),w_j)\theta(t)dt. \tag{3.60}$$

Com efeito, pela Proposição 2.88, temos

$$\begin{aligned} \|(g*u^m)(t)\|_2 &= \left\|\int_0^t g(t-s)u^m(s)ds\right\|_2\\ &\leq \int_0^t |g(t-s)|\|u^m(s)\|_2 ds\\ &\leq \|u^m\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0)}\int_0^t |g(t-s)|ds\\ &\leq \|u^m\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0)}, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T]$, onde usamos (3.5). Assim, por (3.34) obtemos que

$$\|(g * u^m)(t)\|_2 \leq C, \quad \forall\; t \in [0,T],$$

onde $C = C(\|\Delta u_0\|_2, \|u_1\|_2) > 0$. Ou seja,

$$(g * u^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0) = [L^1(0,T;\mathcal{V}_0')]'. \tag{3.61}$$

Por (3.61), existem uma subsequência de $(g * u^m)$, que ainda denotaremos por $(g * u^m)$, e uma função $v \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0)$, tais que

$$g * u^m \overset{*}{\rightharpoonup} v \text{ em } L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0). \tag{3.62}$$

Consideremos o espaço de Banach reflexivo

$$\mathcal{W} = \{u \in L^2(0,T;\mathcal{V}_2) \mid u_t \in L^2(0,T;\mathcal{V}_0)\} \tag{3.63}$$

com norma

$$\|u\|_{\mathcal{W}} = \|u\|_{L^2(0,T;\mathcal{V}_2)} + \|u_t\|_{L^2(0,T;\mathcal{V}_0)}. \tag{3.64}$$

De (3.34) temos que (u^m) é limitada em $\mathcal{W}$. Assim, pelo Teorema 2.15 existe uma subsequência de (u^m), que denotaremos ainda por (u^m), tal que

$$u^m \rightharpoonup u \text{ em } \mathcal{W}, \tag{3.65}$$

quando $m \longrightarrow \infty$. Como $\mathcal{V}_2 \overset{c}{\hookrightarrow} \mathcal{V}_0 \hookrightarrow \mathcal{V}_0$, segue do Teorema de Aubin-Lions (ver Teorema 2.102) que

$$\mathcal{W} \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(0,T;\mathcal{V}_0).$$

Então, de (3.65) e do Teorema 2.16 deduzimos que

$$u^m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \text{ em } L^2(0,T;\mathcal{V}_0). \tag{3.66}$$

Além disso, pelo item (i) da Proposição 2.90 temos

$$\|g * u^m - g * u\|^2_{L^2(0,T;\mathcal{V}_0)} \leq \|u^m - u\|^2_{L^2(0,T;\mathcal{V}_0)}. \tag{3.67}$$

Por (3.66) e (3.67), segue que

$$g * u^m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} g * u \text{ em } L^2(0,T;\mathcal{V}_0),$$

e consequentemente,

$$g * u^m \overset{*}{\rightharpoonup} g * u \text{ em } L^2(0,T;\mathcal{V}_0),$$

quando $m \longrightarrow \infty$. Por outro lado, de (3.62)

$$g * u^m \overset{*}{\rightharpoonup} v \text{ em } L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0) \hookrightarrow L^2(0,T;\mathcal{V}_0),$$

quando $m \longrightarrow \infty$. Da unicidade do limite fraco* (ver Lema 2.19), concluímos que $v = g * u$ em $L^2(0,T;\mathcal{V}_0)$ e, portanto, $v = g * u$ em $L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0)$. Donde segue que

$$g * u^m \overset{*}{\rightharpoonup} g * u \text{ em } L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0),$$

quando $m \longrightarrow \infty$. Assim,

$$\int_0^T \langle (g * u^m)(t), \eta(t) \rangle \, dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \langle (g * u)(t), \eta(t) \rangle \, dt, \quad \forall \; \eta \in L^1(0,T;\mathcal{V}_0).$$

Tomando em particular $\eta = \Delta^2 w_j \theta$, temos que

$$\int_0^T ((g * u^m)(t), \Delta^2 w_j)\theta(t) dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T ((g * u)(t), \Delta^2 w_j)\theta(t) dt,$$

ou ainda,

$$\int_0^T \int_0^t g(t-s)(u^m(s), \Delta^2 w_j)\theta(t) ds dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \int_0^t g(t-s)(u(s), \Delta^2 w_j)\theta(t) ds dt.$$

Usando o Teorema de Green duas vezes, obtemos que

$$\int_0^T \int_0^t g(t-s)(\Delta u^m(s), \Delta w_j)\theta(t) ds dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \int_0^t g(t-s)(\Delta u(s), \Delta w_j)\theta(t) ds dt,$$

o que prova (3.58).

Para mostrarmos a convergência (3.59), consideremos novamente o espaço de Banach $\mathcal{W}$ definido em (3.63) com a norma definida em (3.64). De (3.65), existe uma subsequência de (u^m), que denotaremos ainda por (u^m), tal que

$$u^m \rightharpoonup u \text{ em } \mathcal{W},$$

quando $m \longrightarrow \infty$. Como $\mathcal{V}_2 \overset{c}{\hookrightarrow} \mathcal{V}_1 \hookrightarrow \mathcal{V}_0$, segue do Teorema de Aubin-Lions que

$$\mathcal{W} \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(0,T;\mathcal{V}_1).$$

Assim, do Teorema 2.16 obtemos

$$u^m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \text{ em } L^2(0,T;\mathcal{V}_1) \quad \Rightarrow \quad \int_0^T \|\nabla u^m(t) - \nabla u(t)\|_2^2 dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.68}$$

Definindo

$$\phi_m(t) := M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2) \quad \text{e} \quad \phi(t) := M(\|\nabla u(t)\|_2^2),$$

afirmamos que

$$\phi_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \phi \text{ em } L^2(0,T). \tag{3.69}$$

Com efeito, de (3.44), temos

$$\begin{aligned} |M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2) - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)| &\leq \int_{\|\nabla u(t)\|_2^2}^{\|\nabla u^m(t)\|_2^2} |M'(s)|ds \\ &\leq C|\|\nabla u^m(t)\|_2^2 - \|\nabla u(t)\|_2^2|, \end{aligned} \tag{3.70}$$

com $C = C(\|\Delta u_0\|_2) > 0$. Logo, de (3.56) e (3.70) segue que

$$\begin{aligned} |M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2) - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)|^2 &\leq C|\|\nabla u^m(t)\|_2^2 - \|\nabla u(t)\|_2^2|^2 \\ &\leq C(\|\nabla u^m(t)\|_2 - \|\nabla u(t)\|_2)^2 \\ &\leq C\|\nabla u^m(t) - \nabla u(t)\|_2^2, \end{aligned} \tag{3.71}$$

com $C = C(\|\Delta u_0\|_2) > 0$. Integrando sobre $[0,T]$, temos

$$\int_0^T |M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2) - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)|^2 dt \leq C \int_0^T \|\nabla u^m(t) - \nabla u(t)\|_2^2 dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

o que prova a afirmação desejada. Por outro lado, de (3.68) existe uma subsequência (u^m), denotada ainda por (u^m), tal que

$$u^m \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0,T;\mathcal{V}_1),$$

quando $m \longrightarrow \infty$. Assim,

$$\langle \phi, u^m \rangle \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \langle \phi, u \rangle, \quad \forall\ \phi \in [L^2(0,T;\mathcal{V}_1)]' = L^2(0,T;\mathcal{V}_1').$$

Tomando em particular $\phi = \Delta w_j \theta$, temos

$$\int_0^T (u^m(t), \Delta w_j)\theta(t)dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (u(t), \Delta w_j)\theta(t)dt.$$

Usando o Teorema de Green, obtemos

$$\int_0^T (\Delta u^m(t), w_j)\theta(t)dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (\Delta u(t), w_j)\theta(t)dt. \tag{3.72}$$

Seja $\varphi \in [L^2(0,T)]' = L^2(0,T)$. Como $\mathcal{D}(0,T)$ é denso em $L^2(0,T)$, temos que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ tal que $\|\varphi - \theta\|_{L^2(0,T)} < \frac{\varepsilon}{2CT^{1/2}}$, onde $C = C(\|\Delta u_0\|_2) > 0$ é tal que $\|\Delta u^m(t) - \Delta u(t)\|_2 \leq C$. Da convergência (3.72), existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\int_0^T (\Delta u^m(t) - \Delta u(t), w_j)\theta(t)dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\ m > m_0.$$

Além disso, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T (\Delta u^m(t) - \Delta u(t), w_j)(\varphi(t) - \theta(t))dt\right| &\leq \int_0^T \|\Delta u^m(t) - \Delta u(t)\|_2 |\varphi(t) - \theta(t)|dt \\ &\leq \left(\int_0^T C^2 dt\right)^{1/2} \|\varphi - \theta\|_{L^2(0,T)} \\ &< CT^{1/2}\frac{\varepsilon}{2CT^{1/2}} = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Logo, se $m > m_0$, então

$$\left|\int_0^T (\Delta u^m(t) - \Delta u(t), w_j)\varphi(t)dt\right| < \varepsilon,$$

isto é,

$$\int_0^T (\Delta u^m(t), w_j)\varphi(t)dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (\Delta u(t), w_j)\varphi(t)dt, \quad \forall\ \varphi \in L^2(0,T).$$

Definindo

$$\psi_m(t) := (\Delta u^m(t), w_j), \qquad \psi(t) := (\Delta u(t), w_j)$$

obtemos a seguinte convergência

$$\psi_m \rightharpoonup \psi \text{ em } L^2(0,T), \tag{3.73}$$

quando $m \longrightarrow \infty$. Assim, de (3.69), (3.73) e do Teorema 2.17, deduzimos que, para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$,

$$\int_0^T M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\Delta u^m(t), w_j)\theta(t)dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\Delta u(t), w_j)\theta(t)dt,$$

o que prova (3.59).

Resta provar (3.60). De (3.66) existe uma subsequência de (u^m), a qual denotaremos por (u^m), tal que

$$u^m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \text{ em } L^2(0,T;\mathcal{V}_0).$$

Como $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$, segue de (3.26) e da Desigualdade de Hölder generalizada com

$\frac{\rho}{2(\rho+2)} + \frac{1}{\rho+2} + \frac{1}{2} = 1$ que

$$\begin{aligned}
&|(f(u^m(t)) - f(u(t)), w_j)| \\
&\qquad\qquad \leq \int_\Omega |f(u^m(t)) - f(u(t))||w_j(x)|dx \\
&\qquad\qquad \leq \mu_4 \int_\Omega (1 + |u^m(t)|^{\rho/2} + |u(t)|^{\rho/2})|u^m(t) - u(t)||w_j(x)|dx \\
&\qquad\qquad \leq \mu_4 (|\Omega|^{\rho/2(\rho+2)} + \|u^m(t)\|_{\rho+2}^{\rho/2} + \|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho/2})\|u^m(t) - u(t)\|_2 \|w_j\|_{\rho+2} \\
&\qquad\qquad \leq C\|u^m(t) - u(t)\|_2 \|\Delta w_j\|_2,
\end{aligned}$$

com $C = C(|\Omega|, \rho, \|\Delta u_0\|_2, \|u_1\|_2) > 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^T (f(u^m(t)) - f(u(t)), w_j)\theta(t)dt\right| &\leq \int_0^T |(f(u^m(t)) - f(u(t)), w_j)||\theta(t)|dt \\
&\leq C\|\Delta w_j\|_2 \max_{s\in[0,T]} |\theta(s)| \int_0^T \|u^m(t) - u(t)\|_2 dt \\
&\leq C \max_{s\in[0,T]} |\theta(s)| \|\Delta w_j\|_2 \int_0^T \|u^m(t) - u(t)\|_2 dt \\
&= C\|\Delta w_j\|_2 \max_{s\in[0,T]} |\theta(s)| \|u^m - u\|_{L^1(0,T;\mathcal{V}_0)}.
\end{aligned}$$

Pela imersão $L^2(0, T; \mathcal{V}_0) \hookrightarrow L^1(0, T; \mathcal{V}_0)$ e pela estimativa acima, existe uma constante $C = C(|\Omega|, \rho, \|\Delta u_0\|_2, \|u_1\|_2, \theta) > 0$ tal que

$$\left|\int_0^T (f(u^m(t)) - f(u(t)), w_j)\theta(t)dt\right| \leq C\|u^m(t) - u(t)\|_{L^2(0,T;\mathcal{V}_0)}.$$

Portanto, de (3.66)

$$\left|\int_0^T (f(u^m(t)) - f(u(t)), w_j)\theta(t)dt\right| \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

o que prova (3.60).

Com as convergências (3.57)-(3.60), podemos passar o limite no problema aproximado $(3.12)_1$. De fato, multiplicando $(3.12)_1$ por $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ e integrando sobre $[0, T]$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T (u_{tt}^m(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (\Delta u^m(t), \Delta w_j)\theta(t)dt - \int_0^T \int_0^t g(t-s)(\Delta u^m(s), \Delta w_j)\theta(t)dsdt \\
- \int_0^T M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\Delta u^m(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (f(u^m(t)), w_j)\theta(t)dt = 0,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\int_0^T (u_t^m(t), w_j)\theta'(t)dt - \int_0^T (\Delta u^m(t), \Delta w_j)\theta(t)dt + \int_0^T \int_0^t g(t-s)(\Delta u^m(s), \Delta w_j)\theta(t)dsdt \\ + \int_0^T M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\Delta u^m(t), w_j)\theta(t)dt - \int_0^T (f(u^m(t)), w_j)\theta(t)dt = 0.$$

Tomando o limite de quando $m \longrightarrow \infty$, segue de (3.57)-(3.60) que

$$-\int_0^T (u_t(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T (\Delta u(t), \Delta w_j)\theta(t)dt - \int_0^T \int_0^t g(t-s)(\Delta u(s), \Delta w_j)\theta(t)dsdt \\ - \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\Delta u(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (f(u(t)), w_j)\theta(t)dt = 0.$$

Assim,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u_t(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (\Delta u(t), \Delta w_j)\theta(t)dt - \int_0^T \int_0^t g(t-s)(\Delta u(s), \Delta w_j)\theta(t)dsdt \\ - \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\Delta u(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (f(u(t)), w_j)\theta(t)dt = 0. \tag{3.74}$$

Como $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma base de $\mathcal{V}_4$, então por (3.74) obtemos

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u_t(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T (\Delta u(t), \Delta v)\theta(t)dt - \int_0^T \int_0^t g(t-s)(\Delta u(s), \Delta v)\theta(t)dsdt \\ - \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\Delta u(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T (f(u(t)), v)\theta(t)dt = 0,$$

para todo $v \in \mathcal{V}_4$. Além disso, de (3.56) vem que $(u, u_t) \in L^\infty(0, T; \mathcal{V}_4) \times L^\infty(0, T; \mathcal{V}_2)$ e pelo Teorema de Green chegamos a

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u_t(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T (\Delta^2 u(t), v)\theta(t)dt - \int_0^T \int_0^t g(t-s)(\Delta^2 u(s), v)\theta(t)dsdt \\ - \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\Delta u(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T (f(u(t)), v)\theta(t)dt = 0, \tag{3.75}$$

para todo $v \in \mathcal{V}_4$ e $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$. Reescrevendo (3.75) temos que, para todo $v \in \mathcal{V}_4$ e todo $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$, vale a igualdade

$$\left\langle \frac{d}{dt}(u_t(t), v), \theta \right\rangle + \left\langle (\Delta^2 u(t), v), \theta \right\rangle - \left\langle \int_0^t g(t-s)(\Delta^2 u(s), v)ds, \theta \right\rangle \\ - \left\langle M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\Delta u(t), v), \theta \right\rangle + \langle (f(u(t)), v), \theta \rangle = 0.$$

Isto implica que, para todo $v \in \mathcal{V}_4$ a função u na classe

$$u \in L^\infty(0, T, \mathcal{V}_4), \quad u_t \in L^\infty(0, T, \mathcal{V}_2),$$

satisfaz a equação

$$\frac{d}{dt}(u_t(t),v)+(\Delta^2u(t)-\int_0^t g(t-s)\Delta^2u(s)ds-M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u(t)+f(u(t)),v)=0$$

em $\mathcal{D}'(0,T)$. Por outro lado, da cadeia de imersões

$$\mathcal{V}_4\hookrightarrow\mathcal{V}_2\hookrightarrow\mathcal{V}_1\hookrightarrow\mathcal{V}_0\hookrightarrow\mathcal{V}_1'\hookrightarrow\mathcal{V}_2'\hookrightarrow\mathcal{V}_4'$$

e usando (2.28), podemos reescrever cada termo de (3.75) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\int_0^T\frac{d}{dt}(u_t(t),v)\theta(t)dt &= -\int_0^T(u_t(t),v)\theta'(t)dt\\ &= \left\langle-\int_0^T u_t(t)\theta'(t)dt,v\right\rangle\\ &= \langle\langle u_{tt},\theta\rangle,v\rangle\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T(\Delta^2u(t),v)\theta(t)dt &= \int_0^T\langle\Delta^2u(t),v\rangle\theta(t)dt\\ &= \left\langle\int_0^T\Delta^2u(t)\theta(t)dt,v\right\rangle\\ &= \left\langle\langle\Delta^2u,\theta\rangle,v\right\rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^t g(t-s)(\Delta^2u(s),v)\theta(t)dsdt &= \int_0^T\left(\int_0^t g(t-s)\Delta^2u(s)\theta(t)ds,v\right)dt\\ &= \left\langle\int_0^T\left(\int_0^t g(t-s)\Delta^2u(s)ds\right)\theta(t)dt,v\right\rangle\\ &= \left\langle\left\langle\int_0^t g(t-s)\Delta^2u(s)ds,\theta\right\rangle,v\right\rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\Delta u(t),v)\theta(t)dt &= \int_0^T(M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u(t),v)\theta(t)dt\\ &= \left\langle\int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u(t)\theta(t)dt,v\right\rangle\\ &= \left\langle\langle M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u,\theta\rangle,v\right\rangle,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^T (f(u(t)),v)\theta(t)dt &= \int_0^T (f(u(t))\theta(t),v)dt \\
&= \left\langle \int_0^T f(u(t))\theta(t)dt, v\right\rangle \\
&= \langle\langle f(u),\theta\rangle, v\rangle .
\end{aligned}
$$

Logo, substituindo em (3.75) obtemos que

$$
\begin{gathered}
\langle\langle u_{tt},\theta\rangle,v\rangle + \langle\langle\Delta^2 u,\theta\rangle,v\rangle - \left\langle\left\langle\int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds,\theta\right\rangle,v\right\rangle \\
-\left\langle\langle M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u,\theta\rangle,v\right\rangle + \langle\langle f(u),\theta\rangle,v\rangle = 0,
\end{gathered}
$$

ou ainda,

$$
\left\langle\left\langle u_{tt}+\Delta^2 u - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u + f(u),\theta\right\rangle,v\right\rangle = 0,
$$

para todo $v \in \mathcal{V}_4$ e todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Portanto,

$$
u_{tt}+\Delta^2 u - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u + f(u) = 0 \tag{3.76}
$$

em $\mathcal{D}'(0,T;\mathcal{V}_4')$. Além disso, temos que

$$
\Delta^2 u, M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u, g*\Delta^2 u, f(u) \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0),
$$

Com efeito, de (3.27), da Desigualdade de Hölder com $\frac{2}{\rho+2}+\frac{\rho}{\rho+2}=1$ e da desigualdade

$$
(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2), \quad \forall\ a,b\ge 0,
$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
\|f(u(t))\|_2^2 &= \int_\Omega |f(u(t))|^2 dx \\
&\le \mu_4^2\int_\Omega (1+|u(t)|^{\rho/2})^2|u(t)|^2dx \\
&\le 2\mu_4^2\int_\Omega (1+|u(t)|^{\rho})|u(t)|^2dx \\
&\le 2\mu_4^2(|\Omega|^{\rho/\rho+2}+\|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho})\|u(t)\|_{\rho+2}^2 \\
&\le 2\mu_4^2 C(|\Omega|^{\rho/\rho+2}+\|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho})\|\Delta u(t)\|_2^2.
\end{aligned}
$$

Da imersão $L^{\rho+2}(\Omega)\hookrightarrow \mathcal{V}_2$ e da limitação (3.35), obtemos que $f\in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0)$. Assim,

$$
u_{tt} = -\Delta^2 u + g*\Delta^2 u + M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u - f(u) \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0).
$$

De (3.76) concluímos que

$$u_{tt} + \Delta^2 u - g * \Delta^2 u - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u + f(u) = 0 \text{ em } L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0), \tag{3.77}$$

com

$$u \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_4),\ \ u_t \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2),\ \ u_{tt} \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0).$$

Consequentemente, do Corolário 2.100, segue que

$$u \in C^1([0,T],\mathcal{V}_0) \cap C([0,T],\mathcal{V}_2) \cap L^\infty(0,T;\mathcal{V}_4). \tag{3.78}$$

<u>*Dados Iniciais*</u>: Vamos mostrar que $u(0) = u_0$ em $\mathcal{V}_4$ e que $u_t(0) = u_1$ em $\mathcal{V}_2$. De fato, seja $\theta \in C^1([0,T])$ com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. De $(3.56)_4$ e como $\psi_j := w_j\theta \in L^1(0,T;\mathcal{V}_2')$, temos que

$$\langle \psi_j, u_t^m(t)\rangle \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \langle \psi_j, u_t(t)\rangle,$$

isto é,

$$\int_0^T (u_t^m(t), w_j)\theta(t)dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (u_t^m(t), w_j)\theta(t)dt.$$

Usando integração por partes, obtemos

$$(u^m(0), w_j) - \int_0^T (u^m(t), w_j)\theta'(t)dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} (u(0), w_j) - \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)dt.$$

Analogamente, da convergência $(3.56)_3$ e pelo fato de que $\vartheta_j := w_j\theta' \in L^1(0,T;\mathcal{V}_4')$, segue que

$$\int_0^T (u^m(t), w_j)\theta'(t)dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)dt.$$

Logo,

$$(u^m(0), w_j) = \left((u^m(0), w_j) - \int_0^T (u^m(t), w_j)\theta'(t)dt\right) + \int_0^T (u^m(t), w_j)\theta'(t)dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} (u(0), w_j).$$

Como $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é base de $\mathcal{V}_4$, temos que

$$(u^m(0), v) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} (u(0), v), \quad \forall\ v \in \mathcal{V}_4.$$

Assim, $u^m(0) \rightharpoonup u(0)$ em $\mathcal{V}_4$. Por outro lado, da convergência dos dados iniciais $(3.12)_2$, temos que $u^m(0) \rightharpoonup u_0$ em $\mathcal{V}_4$. Pela unicidade do limite fraco, segue que $u(0) = u_0$ em $\mathcal{V}_4$.

Mostremos agora que $u_t(0) = u_1$ em $\mathcal{V}_2$. Com efeito, sejam $j, m \in \mathbb{N}$, j fixado com $j \leq m$ e $\theta \in C^1([0,T])$ com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Multiplicando $(3.12)_1$ por θ e integrando sobre $[0,T]$, temos

$$\begin{aligned}\int_0^T (u_{tt}^m(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (\Delta u^m(t), \Delta w_j)\theta(t)dt - \int_0^T\int_0^t g(t-s)(\Delta u^m(s), \Delta w_j)\theta(t)dsdt \\ - \int_0^T M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\Delta u^m(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (f(u^m(t)), w_j)\theta(t)dt = 0.\end{aligned} \tag{3.79}$$

Integrando por partes o primeiro termo de (3.79), obtemos que

$$\int_0^T (u_{tt}^m(t), w_j)\theta(t)dt = -(u_t^m(0), w_j) - \int_0^T (u_t^m(t), w_j)\theta'(t)dt. \tag{3.80}$$

Substituindo (3.80) na equação (3.79), tomando limite quando $m \longrightarrow \infty$, usando $(3.12)_3$, (3.57)-(3.60) e notando que $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é base de $\mathcal{V}_4$, segue que

$$\begin{aligned}-\int_0^T (u_t(t), v)\theta'(t)dt + \int_0^T (\Delta u(t), \Delta v)\theta(t)dt - \int_0^T\int_0^t g(t-s)(\Delta u(s), \Delta v)\theta(t)dsdt \\ - \int_0^T M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\Delta u(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T (f(u(t)), v)\theta(t)dt = (u_1, v),\end{aligned}$$

para todo $v \in \mathcal{V}_4$. Integrando novamente por partes, obtemos que

$$\int_0^T (u_t(t), v)\theta'(t)dt = -(u_t(0), v) - \int_0^T \frac{d}{dt}(u_t(t), v)\theta(t)dt, \quad \forall\ v \in \mathcal{V}_4.$$

Disso e do Teorema de Green, concluímos que

$$\begin{aligned}\int_0^T \frac{d}{dt}(u_t(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T (\Delta^2 u(t), v)\theta(t)dt - \int_0^T\int_0^t g(t-s)(\Delta^2 u(s), v)\theta(t)dsdt \\ - \int_0^T M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\Delta u(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T (f(u(t)), v)\theta(t)dt = (u_1, v) - (u_t(0), v).\end{aligned}$$

Logo, por (3.75), temos que $(u_1, v) = (u_t(0), v)$, para todo $v \in \mathcal{V}_4$. Como $\mathcal{V}_4$ é denso em $\mathcal{V}_2$, segue da continuidade do produto interno que

$$(u_1, v) = (u_t(0), v), \quad \forall\ v \in \mathcal{V}_2.$$

Portanto, $u_t(0) = u_1$ em $\mathcal{V}_2$.

Dependência Contínua e Unicidade: Sejam $z^1 = (u, u_t)$ e $z^2 = (v, v_t)$ duas soluções fortes do problema (3.1) com dados iniciais $z_0^1 = (u_0, u_1)$ e $z_0^2 = (v_0, v_1)$ em $\mathcal{H}_1$. Pondo $w = u - v$, segue que a função $z = z^1 - z^2 = (w, w_t)$ é uma solução forte do seguinte problema:

$$\begin{aligned}w_{tt} + \Delta^2 w - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 w(s)ds \\ -M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u + M(\|\nabla v(t)\|_2^2)\Delta v + f(u) - f(v) = 0,\end{aligned} \tag{3.81}$$

com dados iniciais

$$z(0) = (w(0), w_t(0)) = z_0^1 - z_0^2.$$

Multiplicando a equação (3.81) por w_t e integrando sobre Ω, obtemos

$$\begin{aligned}&(w_{tt}(t), w_t(t)) + (\Delta w(t), \Delta w_t(t)) - \int_0^t g(t-s)(\Delta w(s), \Delta w_t(t))ds \\ &= M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\Delta u(t), w_t(t)) - M(\|\nabla v(t)\|_2^2)(\Delta v, w_t(t)) - (f(u(t)) - f(v(t)), w_t(t)).\end{aligned}$$

Somando e subtraindo o termo $M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\Delta v, w_t(t))$ e usando (3.17) com w no lugar de u^m, temos que

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\|w_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(t-s)ds\right)\|\Delta w(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g\Box\Delta w)(t)\right\} \\ &\quad = M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\Delta w(t), w_t(t)) - [M(\|\nabla v(t)\|_2^2) - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)](\Delta v, w_t(t)) \\ &\qquad + \frac{1}{2}(g'\Box\Delta w)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\Delta w(t)\|_2^2 - (f(u(t)) - f(v(t)), w_t(t)).\end{aligned} \tag{3.82}$$

Usando a mesma ideia de (3.70) com v no lugar de u^m, obtemos

$$|M(\|\nabla u(t)\|_2^2) - M(\|\nabla v(t)\|_2^2)| \leq C|\|\nabla u(t)\|_2^2 - \|\nabla v(t)\|_2^2|, \tag{3.83}$$

com $C = C(\|\Delta u_0\|_2, \|\Delta v_0\|_2) > 0$. Note que

$$\begin{aligned}|\|\nabla u(t)\|_2^2 - \|\nabla v(t)\|_2^2| &= |(\Delta u(t), u(t)) - (\Delta v(t), v(t))| \\ &= |(\Delta u(t), u(t)) - (\Delta u(t), v(t)) + (\Delta u(t), v(t)) - (\Delta v(t), v(t))| \\ &= |(\Delta u(t), w(t)) + (w(t), \Delta v(t))| \\ &\leq \|w(t)\|_2(\|\Delta u(t)\|_2 + \|\Delta v(t)\|_2) \\ &\leq C\|w(t)\|_2.\end{aligned}$$

onde $C = C(\|\Delta u_0\|_2, \|\Delta v_0\|_2) > 0$. Substituindo em (3.83) e usando a imersão $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_0$, segue que

$$|M(\|\nabla u(t)\|_2^2) - M(\|\nabla v(t)\|_2^2)| \leq C\|\Delta w(t)\|_2, \tag{3.84}$$

com $C = C(\|\Delta u_0\|_2, \|\Delta v_0\|_2) > 0$. Além disso, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos que

$$|(\Delta v(t), w_t(t))| \leq \|\Delta v(t)\|_2\|w_t(t)\|_2 \leq C\|w_t(t)\|_2, \tag{3.85}$$

com $C = C(\|\Delta v_0\|_2) > 0$. De (3.84) e (3.85), concluímos que

$$-[M(\|\nabla v(t)\|_2^2) - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)](\Delta v, w_t(t)) \leq C\|\Delta w(t)\|_2\|w_t(t)\|_2, \tag{3.86}$$

onde, $C = C(\|\Delta u_0\|_2, \|\Delta v_0\|_2) > 0$. Por outro lado, como $M \in C([0, \infty))$, segue da Desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\Delta w(t), w_t(t)) \leq C\|\Delta w(t)\|_2\|w_t(t)\|_2, \tag{3.87}$$

com $C = C(\|\Delta u_0\|_2) > 0$.

De (3.26) e da Desigualdade de Hölder generalizada com $\frac{\rho}{2(\rho+2)} + \frac{1}{\rho+2} + \frac{1}{2} = 1$, temos

$$\begin{aligned}
&|(f(u(t)) - f(v(t)), w_t(t))| \\
&\quad \leq \int_\Omega |f(u(t)) - f(v(t))||w_t(t)|dx \\
&\quad \leq \mu_4 \int_\Omega (1 + |u(t)|^{\rho/2} + |v(t)|^{\rho/2})|w(t)||w_t(t)|dx \\
&\quad \leq \mu_4(|\Omega|^{\rho/2(\rho+2)} + \|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho/2} + \|v(t)\|_{\rho+2}^{\rho/2})\|w(t)\|_{\rho+2}\|w_t(t)\|_2 \\
&\quad \leq C\|\Delta w(t)\|_2\|w_t(t)\|_2,
\end{aligned}$$

onde $C = C(|\Omega|, \rho, \|\Delta u_0\|_2, \|\Delta v_0\|_2) > 0$. Assim,

$$-(f(u(t)) - f(v(t)), w_t(t)) \leq C\|\Delta w(t)\|_2\|w_t(t)\|_2. \tag{3.88}$$

com $C = C(|\Omega|, \rho, \|\Delta u_0\|_2, \|\Delta v_0\|_2) > 0$. Sabendo que

$$(g'\Box\Delta u)(t) \leq 0 \leq g(t)\|\Delta u(t)\|_2^2, \quad \forall\ t \in (0, T],$$

então, por (3.82) e (3.86)-(3.88), segue que

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\|w_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|\Delta w(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g\Box\Delta w)(t)\right\} \leq C\|\Delta w(t)\|_2\|w_t(t)\|_2,$$

onde $C = C(|\Omega|, \rho, \|\Delta u_0\|_2, \|\Delta v_0\|_2) > 0$. Integrando de 0 até t, $t \in [0, T]$, usando a Desigualdade de Young e (3.29), obtemos

$$\|w_t(t)\|_2^2 + l\|\Delta w(t)\|_2^2 \leq \|\Delta w(0)\|_2^2 + \|w_t(0)\|_2^2 + C\int_0^t (\|\Delta w(s)\|_2^2 + \|w_t(s)\|_2^2)ds,$$

com $C = C(|\Omega|, \rho, \|\Delta u_0\|_2, \|\Delta v_0\|_2) > 0$. Pelo Lema de Gronwall,

$$\|w_t(t)\|_2^2 + \|\Delta w(t)\|_2^2 \leq C(\|\Delta w(0)\|_2^2 + \|w_t(0)\|_2^2), \tag{3.89}$$

ou ainda,

$$\|z^1(t) - z^2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq C\|z_0^1 - z_0^2\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall\ t \in [0, T], \tag{3.90}$$

onde $C = C(|\Omega|, \rho, \|\Delta u_0\|_2, \|\Delta v_0\|_2, T) > 0$. Isto mostra a dependência contínua de soluções fortes em $\mathcal{H}$. Em particular, considerando $z^1 = (u, u_t)$ e $z^2 = (v, v_t)$ duas soluções fortes do problema (3.1) com dados iniciais $z_0^1 = z_0^2$ em $\mathcal{H}_1$, então por (3.90) e da imersão $\mathcal{H}_1 \hookrightarrow \mathcal{H}$ concluímos que

$$\|z^1(t) - z^2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq 0, \quad \forall\, t \in [0,T],$$

donde $z^1(t) = z^2(t)$ em $\mathcal{H}$, para todo $t \in [0,T]$ e, em particular, $u = v$, o que prova a unicidade de solução forte. Isto completa a prova do Teorema 3.2. □

3.1.2 Solução Fraca

Definição 3.3. *Uma **solução fraca** do problema (3.1)-(3.4) é uma função u na classe*

$$u \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2), \;\; u_t \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0), \tag{3.91}$$

satisfazendo, para todo $v \in \mathcal{V}_2$, a equação

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(u_t,v) + (\Delta u, \Delta v) - \int_0^t g(t-s)(\Delta u(s), \Delta v)ds \\ -M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\Delta u, v) + (f(u(t)), v) = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(0,T)\end{aligned} \tag{3.92}$$

e as condições iniciais (3.4).

Teorema 3.4. *Suponhamos que as hipóteses* **(H.1)**-**(H.4)** *sejam satisfeitas.*

(i) Se $(u_0,u_1) \in \mathcal{H}$, então o problema (3.1)-(3.4) *possui uma única solução fraca.*

(ii) Se $z = (u,u_t)$ e $w = (v,v_t)$ são duas soluções fracas do problema (3.1)-(3.4) *com dados iniciais $z_0 = (u_0,u_1)$, $w_0 = (u_0,u_1) \in \mathcal{H}$, respectivamente, então existe uma constante $C = C(|\Omega|, \rho, \|z_0\|_{\mathcal{H}}, \|w_0\|_{\mathcal{H}}, T) > 0$ tal que*

$$\|z(t) - w(t)\|_{\mathcal{H}} \leq C\|z_0 - w_0\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Demonstração. Sejam $(u_0,u_1) \in \mathcal{H}$. Como $\mathcal{H}_1$ é denso em $\mathcal{H}$, existe $(u_0^n, u_1^n) \in \mathcal{H}_1$ tal que

$$(u_0^n, u_1^n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (u_0,u_1) \text{ em } \mathcal{H}. \tag{3.93}$$

Agora note que, para cada $n \in \mathbb{N}$, o Teorema 3.2 (ver (3.78)) nos garante que existe uma única função u^n na classe

$$u^n \in C^1([0,T],\mathcal{V}_0) \cap C([0,T],\mathcal{V}_2) \cap L^\infty(0,T;\mathcal{V}_4). \tag{3.94}$$

satisfazendo o problema

$$u_{tt}^n + \Delta^2 u^n - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u^n(s)ds - M(\|\nabla u^n(t)\|_2^2)\Delta u^n + f(u^n) = 0 \text{ em } Q_T, \tag{3.95}$$

as condições de fronteira (3.2) ou (3.3) e as condições iniciais

$$u^n(0) = u_0^n, \quad u_t^n(0) = u_1^n \text{ em } \Omega. \tag{3.96}$$

Multiplicando (3.95) por w_j, $j \in \mathbb{N}$, e integrando sobre Ω, obtemos o seguinte problema aproximado:

$$\begin{aligned} &(u_{tt}^n(t), w_j) + (\Delta u^n(t), \Delta w_j) - \int_0^t g(t-s)(\Delta u^n(s), \Delta w_j)ds \\ &-M(\|\nabla u^n(t)\|_2^2)(\Delta u^n(t), w_j) + (f(u^n(t)), w_j) = 0. \end{aligned} \tag{3.97}$$

Estimativa a Priori I: Pelo mesmo argumento usado para obter (3.34), temos que

$$\|\Delta u^n(t)\|_2^2 + \|u_t^n(t)\|_2^2 \leq C, \quad \forall\, t \in [0,T],\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{3.98}$$

onde $C = C(\|\Delta u_0\|_2, \|u_1\|_2) > 0$.

Estimativa a Priori II: Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e considere duas soluções $z^m = (u^m, u_t^m)$ e $z^n = (u^n, u_t^n)$ de (3.95) com dados iniciais correspondentes $z_0^m = (u_0^m, u_1^m)$ e $z_0^n = (u_0^n, u_1^n)$ em $\mathcal{H}_1$, respectivamente. Pondo $w = u^m - u^n$ e repetindo o mesmo procedimento para obter (3.81)-(3.89), obtemos que

$$\|w_t(t)\|_2^2 + \|\Delta w(t)\|_2^2 \leq C(\|\Delta w(0)\|_2^2 + \|w_t(0)\|_2^2), \quad \forall\, t \in [0,T],$$

com $C = C(|\Omega|, \rho, \|\Delta u_0\|_2, \|u_1\|_2, T) > 0$. Ou ainda,

$$\|z^m(t) - z^n(t)\|_{\mathcal{H}} \leq C\|z_0^m - z_0^n\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall\, t \in [0,T], \tag{3.99}$$

onde $C = C(|\Omega|, \rho, \|\Delta u_0\|_2, \|u_1\|_2, T) > 0$. Tomando o supremo sobre $t \in [0,T]$ em (3.99), temos

$$\|z^m - z^n\|_{C([0,T];\mathcal{H})} \leq C\|z_0^m - z_0^n\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.100}$$

Da convergência (3.93), temos que a sequência (z_0^n) é de Cauchy em $\mathcal{H}$. Então, por (3.100), a sequência (z^n) é de Cauchy em $C([0,T];\mathcal{H})$ e portanto convergente em $C([0,T];\mathcal{H})$. Logo, existe $z = (u,v) \in C([0,T];\mathcal{H})$ tal que

$$z^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z \text{ em } C([0,T];\mathcal{H}). \tag{3.101}$$

Da unicidade do limite e da definição de derivada distribucional, obtemos que $v = u_t$. Então,

$$(u^n, u_t^n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (u, u_t) \text{ em } C([0,T];\mathcal{H}). \tag{3.102}$$

Passagem ao Limite e Existência de Solução Fraca: De (3.98), (3.102), do Teorema 2.20 e da

Proposição 2.101, existe uma subsequência de (u^n), denotada ainda por (u^n), tal que

$$\begin{aligned} u^n &\overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2),\\ u_t^n &\overset{*}{\rightharpoonup} u_t \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0),\\ u^n &\to u \quad \text{em} \quad C([0,T];\mathcal{V}_2),\\ u_t^n &\to u_t \quad \text{em} \quad C([0,T];\mathcal{V}_0). \end{aligned} \tag{3.103}$$

As convergências em (3.103) são suficientes para passar o limite no problema aproximado (3.97). Com efeito, usando um processo análogo ao das etapas $(3.56)_{1,2}$-(3.74), então vale que

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{d}{dt}(u_t(t),w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (\Delta u(t),\Delta w_j)\theta(t)dt - \int_0^T\int_0^t g(t-s)(\Delta u(s),\Delta w_j)\theta(t)dsdt\\ - \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\Delta u(t),w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (f(u(t)),w_j)\theta(t)dt = 0, \end{aligned} \tag{3.104}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Como $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma base de $\mathcal{V}_2$, então

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{d}{dt}(u_t(t),v)\theta(t)dt + \int_0^T (\Delta u(t),\Delta v)\theta(t)dt - \int_0^T\int_0^t g(t-s)(\Delta u(s),\Delta v)\theta(t)dsdt\\ - \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\Delta u(t),v)\theta(t)dt + \int_0^T (f(u(t)),v)\theta(t)dt = 0, \end{aligned} \tag{3.105}$$

para todo $v \in \mathcal{V}_2$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Reescrevendo (3.105) obtemos que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt}(u_t(t),v),\theta \right\rangle + \langle (\Delta u(t),\Delta v),\theta\rangle - \left\langle \int_0^t g(t-s)(\Delta u(s),\Delta v)ds,\theta \right\rangle\\ - \left\langle M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\Delta u(t),v),\theta\right\rangle + \langle (f(u(t)),v),\theta\rangle = 0, \end{aligned}$$

para todo $v \in \mathcal{V}_2$ e todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Isto implica que, para todo $v \in \mathcal{V}_2$ a função u na classe

$$u \in L^\infty(0,T,\mathcal{V}_2), \quad u_t \in L^\infty(0,T,\mathcal{V}_0),$$

satisfaz a equação

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u_t(t),v) + (\Delta u(t),\Delta v) - \int_0^t g(t-s)(\Delta u(s),\Delta v)ds\\ - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\Delta u(t),v) + (f(u(t)),v) = 0 \end{aligned}$$

em $\mathcal{D}'(0,T)$, o que mostra a existência de solução fraca u na classe

$$u \in C([0,T],\mathcal{V}_2) \cap C^1([0,T],\mathcal{V}_0).$$

No que segue vamos localizar a segunda derivada u_{tt}. Com efeito, como

$$\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_1 \hookrightarrow \mathcal{V}_0 \hookrightarrow \mathcal{V}_1' \hookrightarrow \mathcal{V}_2',$$

podemos reescrever cada termo de (3.105) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\int_0^T \frac{d}{dt}(u_t(t), v)\theta(t)dt &= -\int_0^T (u_t(t), v)\theta'(t)dt \\ &= \left\langle -\int_0^T u_t(t)\theta'(t)dt, v \right\rangle \\ &= \langle\langle u_{tt}, \theta\rangle, v\rangle\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T (\Delta u(t), \Delta v)\theta(t)dt &= \int_0^T \langle \Delta^2 u(t), v\rangle\theta(t)dt \\ &= \left\langle \int_0^T \Delta^2 u(t)\theta(t)dt, v \right\rangle \\ &= \left\langle \langle \Delta^2 u, \theta\rangle, v \right\rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_0^t g(t-s)(\Delta u(s), \Delta v)\theta(t)dsdt &= \int_0^T \left\langle \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)\theta(t)ds, v \right\rangle dt \\ &= \left\langle \int_0^T \left(\int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds \right) \theta(t)dt, v \right\rangle \\ &= \left\langle \left\langle \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds, \theta \right\rangle, v \right\rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\Delta u(t), v)\theta(t)dt &= \int_0^T (M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u(t), v)\theta(t)dt \\ &= \left\langle \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u(t)\theta(t)dt, v \right\rangle \\ &= \left\langle \langle M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u, \theta\rangle, v \right\rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T (f(u(t)), v)\theta(t)dt &= \int_0^T (f(u(t))\theta(t), v)dt \\ &= \left\langle \int_0^T f(u(t))\theta(t)dt, v \right\rangle \\ &= \langle\langle f(u), \theta\rangle\,, v\rangle\,.\end{aligned}$$

Logo, substituindo as igualdades anteriores em (3.105) obtemos que

$$\langle\langle u_{tt},\theta\rangle,v\rangle+\langle\langle\Delta^2u,\theta\rangle,v\rangle-\left\langle\left\langle\int_0^t g(t-s)\Delta^2u(s)ds,\theta\right\rangle,v\right\rangle$$
$$-\left\langle\langle M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u,\theta\rangle,v\right\rangle+\langle\langle f(u),\theta\rangle\,,v\rangle=0,$$

ou ainda,

$$\left\langle\left\langle u_{tt}+\Delta^2u-\int_0^t g(t-s)\Delta^2u(s)ds-M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u+f(u),\theta\right\rangle,v\right\rangle=0,$$

para todo $v\in\mathcal{V}_2$ e todo $\theta\in\mathcal{D}(0,T)$. Portanto,

$$u_{tt}+\Delta^2u-\int_0^t g(t-s)\Delta^2u(s)ds-M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u+f(u)=0 \tag{3.106}$$

em $\mathcal{D}'(0,T;\mathcal{V}_2')$. Agora, note que

$$\Delta^2u, M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u, g*\Delta^2u, f(u)\in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2').$$

De fato, seja $\varphi\in\mathcal{V}_2$. Então, da definição da extensão do operador Δ^2 para o espaço $\mathcal{V}_2$, segue que

$$\langle\Delta^2u(t),\varphi\rangle=(\Delta u(t),\Delta\varphi)\leq\|\Delta u(t)\|_2\|\Delta\varphi\|_2\leq\|u\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2)}\|\Delta\varphi\|_2.$$

Além disso, de (2.21) temos

$$\begin{aligned}\langle(g*\Delta^2u)(t),\varphi\rangle &= ((g*\Delta u)(t),\Delta\varphi)\\ &\leq \|(g*\Delta u)(t)\|_2\|\Delta\varphi\|_2\\ &\leq \|u\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2)}\|\Delta\varphi\|_2.\end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre $\varphi\in\mathcal{V}_2$ com $\|\Delta\varphi\|_2\leq 1$, segue que

$$\|\Delta^2u(t)\|_{\mathcal{V}_2'}\leq\|u\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2)}<\infty$$

e

$$\|(g*\Delta^2u)(t)\|_{\mathcal{V}_2'}\leq\|u\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2)}<\infty,$$

para todo $t\in[0,T]$. Ou seja, $\Delta^2u, g*\Delta^2u\in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2')$. Além disso,

$$M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u\in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0)\hookrightarrow L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2'),$$
$$f(u)\in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0)\hookrightarrow L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2'),$$

o que prova o desejado. Assim, por (3.106),

$$u_{tt} = -\Delta^2 u + g * \Delta^2 u + M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u - f(u) \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2').$$

Portanto,

$$u_{tt} + \Delta^2 u - g * \Delta^2 u - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u + f(u) = 0 \text{ em } L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2'), \tag{3.107}$$

com

$$u \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2),\ u_t \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0),\ u_{tt} \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2'). \tag{3.108}$$

Dados Iniciais: A demonstração dos dados iniciais é análoga ao Teorema 3.2.

Unicidade: Sejam u e v soluções fracas de (3.1) e considere $w = u - v$. De (3.107) e (3.108), temos que

$$w \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2), \quad w_t \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0), \quad w_{tt} \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2') \tag{3.109}$$

e que w satisfaz o problema

$$\begin{aligned} & w_{tt} + \Delta^2 w - \int_0^t g(t-\tau)\Delta^2 w(\tau)d\tau \\ & \quad = M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u - M(\|\nabla v(t)\|_2^2)\Delta v - (f(u) - f(v)) \text{ em } L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2'), \end{aligned} \tag{3.110}$$

com condições iniciais

$$w(0) = w_t(0) = 0. \tag{3.111}$$

Para mostrarmos a unicidade de solução fraca do problema (3.1), vamos usar o método de Visik-Ladyzhenskaya[28]. Com efeito, para cada $s \in (0,T]$ considere a função

$$\psi(t) := \begin{cases} -\displaystyle\int_t^s w(\tau)d\tau & \text{se} \quad 0 \le t \le s, \\ \qquad 0 & \text{se} \quad s < t \le T. \end{cases} \tag{3.112}$$

Note que a derivada de ψ no sentido das distribuições a valores vetoriais é dada por

$$\psi_t(t) = \begin{cases} w(t) & \text{se} \quad 0 \le t \le s, \\ \ \ 0 & \text{se} \quad s < t \le T. \end{cases} \tag{3.113}$$

Além disso, $\psi \in L^\infty(0,T,\mathcal{V}_2)$. De fato,

$$\|\Delta\psi(t)\|_2 \le \int_t^s \|\Delta w(\tau)\|_2 d\tau \le \|w\|_{L^\infty(0,T,\mathcal{V}_2)}(s-t) \le T\|w\|_{L^\infty(0,T,\mathcal{V}_2)} < +\infty,$$

para todo $t \in [0,T]$, como queríamos. Como $\psi, \psi_t \in L^\infty(0,T,\mathcal{V}_2)$, pelo Corolário 2.100, temos que $\psi \in C([0,T],\mathcal{V}_2)$. Compondo (3.110) com ψ na dualidade $L^2(0,T,\mathcal{V}_2) \times L^2(0,T,\mathcal{V}_2')$ e notando que $\psi \equiv 0$ em $[s, T]$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^s \langle w_{tt}(t), \psi(t)\rangle \, dt + \int_0^s \left\langle \Delta^2 w(t), \psi(t)\right\rangle dt \\
&= \int_0^s \left\langle \int_0^t g(t-\tau)\Delta^2 w(\tau)d\tau, \psi(t)\right\rangle dt - \int_0^s \langle f(u(t)) - f(v(t)), \psi(t)\rangle \, dt \\
&\qquad + \int_0^s \left\langle M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u(t) - M(\|\nabla v(t)\|_2^2)\Delta v(t), \psi(t)\right\rangle dt.
\end{aligned} \tag{3.114}$$

Integrando por partes o primeiro termo de (3.114), temos que

$$\int_0^s \langle w_{tt}(t), \psi(t)\rangle dt = \langle w_t(s), \psi(s)\rangle - \langle w_t(0), \psi(0)\rangle - \int_0^s (w_t(t), \psi_t(t))dt.$$

Usando (3.111), (3.112) e (3.113), então

$$\begin{aligned}
\int_0^s \langle w_{tt}(t), \psi(t)\rangle dt &= -\int_0^s (w_t(t), w(t))dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}\|w(t)\|_2^2 dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\|w(0)\|_2^2 - \|w(s)\|_2^2\right) = -\frac{1}{2}\|w(s)\|_2^2.
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando a extensão do operador Δ^2 no espaço $\mathcal{V}_2$ (ver (2.9) e (2.15)), segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^s \langle \Delta^2 w(t), \psi(t)\rangle dt &= \int_0^s (\Delta\psi_t(t), \Delta\psi(t))dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}\|\Delta\psi(t)\|_2^2 dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\|\Delta\psi(s)\|_2^2 - \|\Delta\psi(0)\|_2^2\right) = -\frac{1}{2}\|\Delta\psi(0)\|_2^2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left\langle \int_0^t g(t-\tau)\Delta^2 w(\tau)d\tau, \psi(t)\right\rangle &= \left\langle \Delta^2\left(\int_0^t g(t-\tau)w(\tau)d\tau\right), \psi(t)\right\rangle \\
&= \left(\Delta\left(\int_0^t g(t-\tau)w(\tau)d\tau\right), \Delta\psi(t)\right) \\
&= \int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta w(\tau), \Delta\psi(t)\right) d\tau.
\end{aligned}$$

Substituindo em (3.114), obtemos que

$$\frac{1}{2}\|w(s)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta\psi(0)\|_2^2 = I_g + I_M + I_f, \tag{3.115}$$

onde

$$\begin{aligned}
I_g &:= -\int_0^s \int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta w(\tau), \Delta\psi(t)\right) d\tau dt,\\
I_M &:= -\int_0^s \left(M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u(t) - M(\|\nabla v(t)\|_2^2)\Delta v(t), \psi(t)\right) dt,\\
I_f &:= \int_0^s (f(u(t)) - f(v(t)), \psi(t))dt.
\end{aligned}$$

No que segue, vamos estimar os termos I_g, I_M e I_f. Com efeito, derivando o termo

$$(g\Box\Delta\psi)(t) = \int_0^t g(t-\tau)\|\Delta\psi(t) - \Delta\psi(\tau)\|_2^2 d\tau, \tag{3.116}$$

temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(g\Box\Delta\psi)(t) &= \frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-\tau)\|\Delta\psi(t) - \Delta\psi(\tau)\|_2^2 d\tau\right)\\
&= \int_0^t \frac{d}{dt}\left(g(t-\tau)\|\Delta\psi(t) - \Delta\psi(\tau)\|_2^2\right) d\tau\\
&= (g'\Box\Delta\psi)(t) + 2\int_0^t g(t-\tau)(\Delta\psi_t(t), \Delta\psi(t) - \Delta\psi(\tau))d\tau \qquad (3.117)\\
&= (g'\Box\Delta\psi)(t) + \left(\int_0^t g(\tau)d\tau\right)\frac{d}{dt}\|\Delta\psi(t)\|_2^2\\
&\quad -2\int_0^t g(t-\tau)(\Delta\psi_t(t), \Delta\psi(\tau))d\tau.
\end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo $r = t - \tau$, segue de (3.116) que

$$(g\Box\Delta\psi)(t) = \int_0^t g(r)\|\Delta\psi(t) - \Delta\psi(t-r)\|_2^2 dr.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(g\Box\Delta\psi)(t) &= \frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(\tau)\|\Delta\psi(t) - \Delta\psi(t-\tau)\|_2^2 d\tau\right)\\
&= \int_0^t g(\tau)\frac{d}{dt}(\|\Delta\psi(t) - \Delta\psi(t-\tau)\|_2^2)d\tau + g(t)\|\Delta\psi(t) - \Delta\psi(0)\|_2^2\\
&= 2\int_0^t g(\tau)(\Delta\psi_t(t) - \Delta\psi_t(t-\tau), \Delta\psi(t) - \Delta\psi(t-\tau))d\tau\\
&\quad + g(t)\|\Delta\psi(t) - \Delta\psi(0)\|_2^2 \qquad (3.118)\\
&= \left(\int_0^t g(\tau)d\tau\right)\frac{d}{dt}\|\Delta\psi(t)\|_2^2 - 2\int_0^t g(t-\tau)(\Delta\psi_t(t), \Delta\psi(\tau))d\tau\\
&\quad - 2\int_0^t g(\tau)(\Delta\psi_t(t-\tau), \Delta\psi(t))d\tau + \int_0^t \frac{d}{dt}\left[g(\tau)\|\Delta\psi(t-\tau)\|_2^2\right] d\tau\\
&\quad + g(t)\|\Delta\psi(t) - \Delta\psi(0)\|_2^2.
\end{aligned}$$

Igualando (3.117) e (3.118) e cancelando os termos idênticos, obtemos

$$
\begin{aligned}
&-2\int_0^t g(\tau)(\Delta\psi_t(t-\tau),\Delta\psi(t))d\tau \\
&\quad = -\int_0^t \frac{d}{dt}g(\tau)\|\Delta\psi(t-\tau)\|_2^2 d\tau - g(t)\|\Delta\psi(t)-\Delta\psi(0)\|_2^2 + (g'\Box\Delta\psi)(t).
\end{aligned}
\tag{3.119}
$$

Note que

$$
\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(\tau)\|\Delta\psi(t-\tau)\|_2^2 d\tau\right) = \int_0^t \frac{d}{dt}g(\tau)\|\Delta\psi(t-\tau)\|_2^2 d\tau + g(t)\|\Delta\psi(0)\|_2^2.
$$

Ou seja,

$$
-\int_0^t \frac{d}{dt}g(\tau)\|\Delta\psi(t-\tau)\|_2^2 d\tau = g(t)\|\Delta\psi(0)\|_2^2 - \frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(\tau)\|\Delta\psi(t-\tau)\|_2^2 d\tau\right).
$$

Logo, de (3.119),

$$
\begin{aligned}
-2\int_0^t g(\tau)(\Delta\psi_t(t-\tau),\Delta\psi(t))d\tau \;&=\; g(t)\|\Delta\psi(0)\|_2^2 - \frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(\tau)\|\Delta\psi(t-\tau)\|_2^2 d\tau\right) \\
&\quad - g(t)\|\Delta\psi(t)-\Delta\psi(0)\|_2^2 + (g'\Box\Delta\psi)(t).
\end{aligned}
$$

Integrando de 0 até s, segue que

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^s\int_0^t g(\tau)(\Delta\psi_t(t-\tau),\Delta\psi(t))d\tau dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^s g(t)dt\right)\|\Delta\psi(0)\|_2^2 \\
&\underbrace{-\frac{1}{2}\int_0^s g(\tau)\|\Delta\psi(s-\tau)\|_2^2 d\tau - \frac{1}{2}\int_0^s g(t)\|\Delta\psi(t)-\Delta\psi(0)\|_2^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^s (g'\Box\Delta\psi)(t)dt}_{\leq 0}.
\end{aligned}
$$

Fazendo $r = t-\tau$ e lembrando que $w = \psi_t$, concluímos

$$
I_g \leq \frac{1}{2}\left(\int_0^s g(t)dt\right)\|\Delta\psi(0)\|_2^2. \tag{3.120}
$$

Para estimarmos o termo I_M, escrevemos $I_M = I_{M,1} + I_{M,2}$ com

$$
\begin{aligned}
I_{M,1} &:= -\int_0^s \left[M(\|\nabla u(t)\|_2^2) - M(\|\nabla v(t)\|_2^2\right](\Delta v(t),\psi(t))dt, \\
I_{M,2} &:= -\int_0^s M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\Delta w(t),\psi(t))dt.
\end{aligned}
$$

Usando a mesma ideia de (3.83), temos que existe uma constante $C = C(\|\Delta u_0\|_2, \|\Delta v_0\|_2) > 0$ tal que

$$
|M(\|\nabla u(t)\|_2^2) - M(\|\nabla v(t)\|_2^2)| \leq C|\|\nabla u(t)\|_2^2 - \|\nabla v(t)\|_2^2|. \tag{3.121}
$$

Além disso, usando o Teorema de Green e (3.109), temos

$$\begin{aligned}
|\|\nabla u(t)\|_2^2 - \|\nabla v(t)\|_2^2| &= |(\Delta u(t), u(t)) - (\Delta v(t), v(t))| \\
&= |(\Delta u(t), u(t)) - (\Delta u(t), v(t)) + (\Delta u(t), v(t)) - (\Delta v(t), v(t))| \\
&= |(\Delta u(t), w(t)) + (\Delta w(t), v(t))| \\
&= |(\Delta u(t), w(t)) + (w(t), \Delta v(t))| \\
&\leq |(\Delta u(t), w(t))| + |(w(t), \Delta v(t))| \\
&\leq \|w(t)\|_2(\|\Delta u(t)\|_2 + \|\Delta v(t)\|_2) \\
&\leq C\|w(t)\|_2,
\end{aligned}$$

com $C = C(\|\Delta u_0\|_2, \|\Delta v_0\|_2) > 0$. Substituindo em (3.121), segue que

$$|M(\|\nabla u(t)\|_2^2) - M(\|\nabla v(t)\|_2^2)| \leq C\|w(t)\|_2, \tag{3.122}$$

onde $C = C(\|\Delta u_0\|_2, \|\Delta v_0\|_2) > 0$. Além disso, pelo Teorema de Green, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz e pela imersão $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_0$, existe uma constante com $C = C(\|\Delta v_0\|_2) > 0$ tal que

$$|(\Delta v(t), \psi(t))| = |(v(t), \Delta\psi(t))| \leq \|v(t)\|_2\|\Delta\psi(t)\|_2 \leq C\|\Delta\psi(t)\|_2 \tag{3.123}$$

De (3.122) e (3.123), segue que

$$|I_{M,1}| \leq C\int_0^s \|w(t)\|_2\|\Delta\psi(t)\|_2 dt, \tag{3.124}$$

com $C = C(\|\Delta u_0\|_2, \|\Delta v_0\|_2) > 0$. Utilizando novamente o Teorema de Green e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\begin{aligned}
|I_{M,2}| &\leq \int_0^s |M(\|\nabla u(t)\|_2^2)||(\Delta w(t), \psi(t))| dt \\
&\leq C\int_0^s |(w(t), \Delta\psi(t))| dt \\
&\leq C\int_0^s \|w(t)\|_2\|\Delta\psi(t)\|_2 dt,
\end{aligned} \tag{3.125}$$

onde $C = C(\|\Delta u_0\|_2) > 0$. Assim, por (3.124) e (3.125)

$$|I_M| \leq C\int_0^s \|w(t)\|_2\|\Delta\psi(t)\|_2 dt, \tag{3.126}$$

com $C = C(\|\Delta u_0\|_2, \|\Delta v_0\|_2) > 0$.

Agora, usando a condição (3.26), a Desigualdade de Hölder generalizada com

$\frac{\rho}{2(\rho+2)} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho+2} = 1$ e a imersão $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned}
|(f(u(t)) - f(v(t)), \psi(t))| &\leq \int_\Omega |f(u(t)) - f(v(t))||\psi(t)|dx \\
&\leq \mu_4 \int_\Omega (1 + |u(t)|^{\rho/2} + |v(t)|^{\rho/2})|w(t)||\psi(t)|dx \\
&\leq \mu_4(|\Omega|^{\rho/2(\rho+2)} + \|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho/2} + \|v(t)\|_{\rho+2}^{\rho/2})\|w(t)\|_2\|\psi(t)\|_{\rho+2} \\
&\leq C\|w(t)\|_2\|\Delta\psi(t)\|_2,
\end{aligned}$$

onde $C = C(|\Omega|, \rho, \|\Delta u_0\|_2, \|\Delta v_0\|_2) > 0$. Então,

$$|I_f| \leq C \int_0^s \|w(t)\|_2\|\Delta\psi(t)\|_2 dt, \tag{3.127}$$

com $C = C(|\Omega|, \rho, \|\Delta u_0\|_2, \|\Delta v_0\|_2) > 0$. Logo, substituindo (3.120), (3.126) e (3.127) em (3.115), existe uma constante $C = C(|\Omega|, \rho, \|\Delta u_0\|_2, \|\Delta v_0\|_2) > 0$ tal que

$$\frac{1}{2}\|w(s)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^s g(t)dt\right)\|\Delta\psi(0)\|_2^2 \leq C\int_0^s \|w(t)\|_2\|\Delta\psi(t)\|_2 dt.$$

Como $l \leq 1 - \int_0^s g(t)dt \leq 1$, para todo $s \in [0, T]$, segue que

$$\frac{1}{2}\|w(s)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta\psi(0)\|_2^2 \leq C\int_0^s \|w(t)\|_2\|\Delta\psi(t)\|_2 dt, \tag{3.128}$$

para alguma constante $C = C(|\Omega|, \rho, \|\Delta u_0\|_2, \|\Delta v_0\|_2) > 0$. Definindo $\Phi(t) = \int_0^t w(\tau)d\tau$, notamos que

$$\psi(t) = -\int_t^s w(\tau)d\tau = \int_0^t w(\tau)d\tau - \int_0^s w(\tau)d\tau = \Phi(t) - \Phi(s), \quad \forall\ t \in [0, s].$$

Em particular, $\psi(0) = -\Phi(s)$ e podemos reescrever (3.128) como

$$\frac{1}{2}\|w(s)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta\Phi(s)\|_2^2 \leq C\left\{\int_0^s \|w(t)\|_2\|\Delta\Phi(t)\|_2 dt + \int_0^s \|w(t)\|_2\|\Delta\Phi(s)\|_2 dt\right\}. \tag{3.129}$$

Seja $\varepsilon = (2Cs)^{1/2} > 0$. Segue da Desigualdade de Young que

$$\int_0^s \|w(t)\|_2\|\Delta\Phi(t)\|_2 dt \leq \frac{1}{2}\int_0^s \|w(t)\|_2^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^s \|\Delta\Phi(t)\|_2^2 dt \tag{3.130}$$

e

$$
\begin{aligned}
\int_0^s \|w(t)\|_2\|\Delta\Phi(s)\|_2 dt &= \int_0^s \varepsilon\|w(t)\|_2\frac{1}{\varepsilon}\|\Delta\Phi(s)\|_2 dt \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^s \varepsilon^2\|w(t)\|_2^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^s \frac{1}{\varepsilon^2}\|\Delta\Phi(s)\|_2^2 dt \\
&= Cs\int_0^s \|w(t)\|_2^2 dt + \frac{1}{4C}\|\Delta\Phi(s)\|_2^2 \\
&\leq CT\int_0^s \|w(t)\|_2^2 dt + \frac{1}{4C}\|\Delta\Phi(s)\|_2^2.
\end{aligned} \tag{3.131}
$$

De (3.129), (3.130) e (3.131) concluímos que

$$\frac{1}{4}\|w(s)\|_2^2 + \frac{1}{4}\|\Delta\Phi(s)\|_2^2 \leq C_T\int_0^s (\|w(t)\|_2^2 + \|\Delta\Phi(t)\|_2^2)dt, \quad \forall\ s \in (0,T],$$

onde $C_T = C(|\Omega|, \rho, \|\Delta u_0\|_2, \|\Delta v_0\|_2, T) > 0$. Pelo Lema de Gronwall, temos que

$$\|w(s)\|_2^2 + \|\Delta\Phi(s)\|_2^2 \leq 0, \quad \forall\ s \in (0,T].$$

Donde $\|w(s)\|_2^2 = 0$, para cada $s \in (0,T]$. Do fato de que $w(0) = 0$, obtemos que

$$w(s) = 0 \text{ em } \mathcal{V}_0, \quad \forall\ s \in [0,T].$$

Portanto, $u = v$ em $L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0)$ e consequentemente, $u = v$ em $L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2)$. Isto conclui a unicidade de solução fraca e a prova do item (i) do Teorema 3.4.

Dependência Contínua: Sejam $z = (u, u_t)$ e $w = (v, v_t)$ duas soluções fracas do problema (3.1) com dados iniciais $z_0 = (u_0, u_1)$ e $w_0 = (v_0, v_1)$ em $\mathcal{H}$, respectivamente. Por outro lado, como $\mathcal{H}_1$ é denso em $\mathcal{H}$, existem sequências $(z_0^n) = ((u_0^n, u_1^n)), (w_0^n) = ((v_0^n, v_1^n))$ em $\mathcal{H}_1$ tais que

$$z_0^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0 \text{ em } \mathcal{H}, \tag{3.132}$$

$$w_0^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} w_0 \text{ em } \mathcal{H}. \tag{3.133}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam u^n e v^n as soluções fortes do problema (3.1) associadas aos dados iniciais z_0^n e w_0^n, respectivamente, satisfazendo (3.102), isto é,

$$(u^n, u_t^n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\tilde{u}, \tilde{u}_t) \text{ em } C(0,T;\mathcal{H}),$$

$$(v^n, v_t^n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\tilde{v}, \tilde{v}_t) \text{ em } C(0,T;\mathcal{H}),$$

com $\tilde{u}, \tilde{v}$ soluções fracas do problema (3.1)-(3.4) com dados iniciais $z_0, w_0 \in \mathcal{H}$, respectivamente. Oras, da unicidade de solução fraca, segue que $\tilde{u} = u$ em $C([0,T],\mathcal{H})$ e $\tilde{v} = v$ em $C([0,T],\mathcal{H})$. Definindo $z^n = (u^n, u_t^n)$ e $w^n = (v^n, v_t^n)$, então

$$z^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z \text{ em } C([0,T],\mathcal{H}), \tag{3.134}$$

$$w^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} w \text{ em } C([0,T],\mathcal{H}). \tag{3.135}$$

Além disso, utilizando o mesmo argumento usado para obter (3.100) com w^n no lugar de z^m, obtemos

$$\|z^n(t) - w^n(t)\|_{\mathcal{H}} \leq C\|z_0^n - w_0^n\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall\ t \in [0,T], \tag{3.136}$$

onde $C = C(|\Omega|, \rho, \|z_0\|_{\mathcal{H}}, \|w_0\|_{\mathcal{H}}, T) > 0$. Por outro lado, temos que

$$|\|z_0^n - w_0^n\|_{\mathcal{H}} - \|z_0 - w_0\|_{\mathcal{H}}| \leq \|z_0^n - z_0 - w_0^n + w_0\|_{\mathcal{H}} \leq \|z_0^n - z_0\|_{\mathcal{H}} + \|w_0^n - w_0\|_{\mathcal{H}}.$$

Das convergências (3.132)-(3.133), concluímos que

$$|\|z_0^n - w_0^n\|_{\mathcal{H}} - \|z_0 - w_0\|_{\mathcal{H}}| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ou seja,

$$\|z_0^n - w_0^n\|_{\mathcal{H}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|z_0 - w_0\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.137}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
|\|z^n(t) - w^n(t)\|_{\mathcal{H}} - \|z(t) - w(t)\|_{\mathcal{H}}| &\leq \|z^n(t) - z(t) - w^n(t) + w(t)\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq \|z^n(t) - z(t)\|_{\mathcal{H}} + \|w^n(t) - w(t)\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq \|z^n - z\|_{C([0,T];\mathcal{H})} + \|w^n - w\|_{C([0,T];\mathcal{H})},
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T]$. Assim, pelas convergências (3.134) e (3.135), segue que

$$\|z^n(t) - w^n(t)\|_{\mathcal{H}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|z(t) - w(t)\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall\ t \in [0,T]. \tag{3.138}$$

Aplicando o limite de quando $n \longrightarrow \infty$ em (3.136) e usando as convergências (3.137) e (3.138), obtemos que

$$\|z(t) - w(t)\|_{\mathcal{H}} \leq C\|z_0 - w_0\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall\ t \in [0,T],$$

com $C = C(|\Omega|, \rho, \|z_0\|_{\mathcal{H}}, \|w_0\|_{\mathcal{H}}, T) > 0$. Donde segue a dependência contínua de soluções fracas em $\mathcal{H}$. □

3.2 Decaimento Geral de Energia - Caso 1

Nesta seção estudaremos o comportamento assintótico de soluções via método de energia perturbada. Mais especificamente, apresentaremos um decaimento geral de energia usando uma adaptação das técnicas introduzidas por Messaoudi [22, 23] e mais recentemente por Guesmia e Messaoudi [14], os quais obtêm decaimento de energia conforme a taxa de decaimento do núcleo de memória g.

Dado $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}_1$, seja u a solução forte do problema (3.1)-(3.4) dada pelo Teorema 3.2. Multiplicando a equação (3.1) por u_t, integrando sobre Ω e usando um processo análogo para obtermos (3.18), temos

$$\frac{d}{dt}E(t) = -D(t), \quad t > 0, \tag{3.139}$$

onde $E(t) = E(u(t), u_t(t))$ é a energia associada a (3.1)-(3.4) dada por

$$\begin{aligned} E(t) := \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|\Delta u(t)\|_2^2 \\ + \frac{1}{2}(g\Box\Delta u)(t) + \frac{1}{2}\widehat{M}(\|\nabla u(t)\|_2^2) + \int_\Omega \widehat{f}(u(t))dx \end{aligned} \tag{3.140}$$

e

$$D(t) = -\frac{1}{2}(g'\Box\Delta u)(t) + \frac{1}{2}g(t)\|\Delta u(t)\|_2^2. \tag{3.141}$$

Lema 3.5. *A energia $E(t)$ dada em* (3.140) *satisfaz*

$$E(t) \geq \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\beta}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g\Box\Delta u)(t), \quad \forall\ t \geq 0, \tag{3.142}$$

onde β é dado em (3.9).

Demonstração. Usando (3.29), temos

$$E(t) \geq \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{l}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g\Box\Delta u)(t) + \frac{1}{2}\widehat{M}(\|\nabla u(t)\|_2^2) + \int_\Omega \widehat{f}(u(t))dx.$$

Das hipóteses (**H.2**), (**H.3**) e (**H.4**), obtemos que

$$\begin{aligned} E(t) &\geq \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{l}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g\Box\Delta u)(t) + \frac{1}{2}\widehat{M}(\|\nabla u(t)\|_2^2) + \int_\Omega \widehat{f}(u(t))dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{l}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g\Box\Delta u)(t) - \frac{l}{2}\beta_1\|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{l}{2}\beta_2\|u(t)\|_2^2 \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{l}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g\Box\Delta u)(t) - \frac{l}{2}\frac{\beta_1}{\mu_1}\|\Delta u(t)\|_2^2 - \frac{l}{2}\frac{\beta_2}{\mu_2}\|\Delta u(t)\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{l}{2}\left[1 - \left(\frac{\beta_1}{\mu_1} + \frac{\beta_2}{\mu_2}\right)\right]\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g\Box\Delta u)(t) \\ &= \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\beta}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g\Box\Delta u)(t), \end{aligned}$$

como queríamos. □

De (3.139) vê-se que $E(t)$ é decrescente. Porém, para estudarmos o decaimento geral de energia, necessitamos de algumas hipóteses adicionais.

(**H.5**) Assumimos que existe uma função $\xi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\xi(t) \geq 0, \quad \xi'(t) \leq 0, \quad \forall\ t \geq 0, \tag{3.143}$$

e

$$g'(t) \leq -\xi(t)g(t), \quad \forall\ t \geq 0. \tag{3.144}$$

(**H.6**) Suponhamos que as funções M e $\widehat{M}$ satisfazem a desigualdade

$$\widehat{M}(s) \leq 2M(s)s + l\beta_1 s, \quad \forall\ s \geq 0. \tag{3.145}$$

Observação. A hipótese (**H.5**) nos diz que a função g é decrescente e que g é solução de uma desigualdade diferencial linear. Além disso, (3.144) implica que

$$g(t) \leq g(0)e^{-\int_0^t \xi(s)ds}, \quad \forall\, t \geq 0. \tag{3.146}$$

Isto nos fornece que a taxa de decaimento do núcleo g depende da função ξ. Exemplos concretos serão exibidos na Subseção 3.2.1.

No que segue, mostraremos que a energia associada ao problema (3.1)-(3.4) decai na mesma taxa que a função g, a menos de um fator positivo, para dados iniciais tomados bolas de raio qualquer em $\mathcal{H}$, . Mais precisamente temos o:

Teorema 3.6. *Suponhamos que as hipóteses* (**H.1**)-(**H.6**) *sejam satisfeitas. Então, para todo* $R > 0$*, existem constantes* $K_R, \gamma_R > 0$ *dependendo de* R *tais que a energia em* (3.140) *satisfaz*

$$E(t) \leq K_R e^{-\gamma_R \int_0^t \xi(s)ds}, \quad \forall\ t > 0, \tag{3.147}$$

para toda solução (forte ou fraca) com dados iniciais $(u_0, u_1) \in \{z \in \mathcal{H} \mid \|z\|_{\mathcal{H}} \leq R\}$.

Demonstração. A prova será feita em algumas etapas como segue.
Estimativa Auxiliar: Existe uma constante $C = C(|\Omega|, \rho) > 0$ tal que

$$\|f(u(t))\|_2^2 \leq C(1 + [E(0)]^{\rho/2})\|\Delta u(t)\|_2^2, \quad \forall\ t \geq 0. \tag{3.148}$$

Com efeito, de (3.27), da Desigualdade de Hölder com $\frac{2}{\rho+2} + \frac{\rho}{\rho+2} = 1$ e da desigualdade

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2), \quad \forall\ a, b \geq 0,$$

obtemos

$$\|f(u(t))\|_2^2 \leq \mu_4^2 C(|\Omega|^{\rho/\rho+2} + \|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho})\|\Delta u(t)\|_2^2.$$

Além disso, de (3.142) e como $E(t) \leq E(0)$ para todo $t > 0$, obtemos

$$\|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho} = \left(\|u(t)\|_{\rho+2}^2\right)^{\rho/2} \leq C^{\rho/2}\left(\|\Delta u(t)\|_2^2\right)^{\rho/2} \leq \left(\frac{2C}{\beta}\right)^{\rho/2} [E(0)]^{\rho/2},$$

de onde vem que

$$\|f(u(t))\|_2^2 \leq 2\mu_4^2 C \left(|\Omega|^{\rho/\rho+2} + \left(\frac{2C}{\beta}\right)^{\rho/2} [E(0)]^{\rho/2} \right) \|\Delta u(t)\|_2^2 \leq C(1+[E(0)]^{\rho/2}) \|\Delta u(t)\|_2^2, \tag{3.149}$$

onde $C = C(|\Omega|, \rho) > 0$.

<u>*Energia Perturbada*</u>: Agora, definamos os funcionais

$$\begin{aligned} F_0(t) &:= E(t) + \varepsilon_1 \Phi_1(t) + \varepsilon_2 \Phi_2(t), &(3.150)\\ F(t) &:= \xi(t) F_0(t) + E(t), &(3.151) \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &:= (u_t(t), u(t)), &(3.152)\\ \Phi_2(t) &:= -(u_t(t), (g \diamond u)(t)), &(3.153) \end{aligned}$$

onde $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ são constantes positivas a serem determinadas posteriormente e $g \diamond u$ é definido em (2.19). Afirmamos que:

$$\frac{1}{2}E(t) \leq F_0(t) \leq \frac{3}{2}E(t), \quad \forall\ t \geq 0, \tag{3.154}$$

para $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ suficientemente pequenos. De fato, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz e pela Desigualdade de Young, temos que

$$\begin{aligned} |\Phi_1(t)| &\leq \frac{1}{\mu_2^{1/2}} \left(\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 \right)\\ &\leq \frac{1}{\beta\mu_2^{1/2}} \left(\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\beta}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 \right)\\ &\leq \frac{1}{\beta\mu_2^{1/2}} \left(\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\beta}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g\Box\Delta u)(t) \right). \end{aligned}$$

Pondo $C = \dfrac{1}{\beta\mu_2^{1/2}} > 0$, concluímos pelo Lema 3.5 que

$$|\Phi_1(t)| \leq C \left(\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\beta}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g\Box\Delta u)(t) \right) \leq CE(t).$$

Usando novamente a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, a Desigualdade de Young e também

(2.23) obtemos

$$
\begin{aligned}
|\Phi_2(t)| &\leq \|u_t(t)\|_2 \|(g \diamond u)(t)\|_2 \\
&\leq \|u_t(t)\|_2 \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{1/2} [(g\Box u)(t)]^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{\mu_2^{1/2}} \left(\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g\Box\Delta u)(t) \right) \\
&\leq \frac{1}{\beta\mu_2^{1/2}} \left(\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\beta}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g\Box\Delta u)(t) \right).
\end{aligned}
$$

Segue do Lema 3.5 que

$$
|\Phi_2(t)| \leq C \left(\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\beta}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g\Box\Delta u)(t) \right) \leq CE(t).
$$

Então,

$$
|F_0(t) - E(t)| \leq \varepsilon_1 |\Phi_1(t)| + \varepsilon_2 |\Phi_2(t)| \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) CE(t).
$$

Assim,

$$
(1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)C)E(t) \leq F_0(t) \leq (1 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)C)E(t).
$$

Logo, para $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq \dfrac{1}{4C}$, concluímos que vale (3.154). Além disso, como ξ é uma função não crescente e não negativa e de (3.154), temos que

$$
E(t) \leq F(t) \leq \left(\frac{3}{2}\xi(0) + 1 \right) E(t), \quad \forall\ t \geq 0. \tag{3.155}
$$

Derivada de Φ_1: O funcional Φ_1 definido em (3.152) satisfaz a desigualdade

$$
\frac{d}{dt}\Phi_1(t) \leq \frac{3}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta} \right) (g\Box\Delta u)(t) - E(t) - \frac{\beta}{4}\|\Delta u(t)\|_2^2, \quad \forall\ t > 0. \tag{3.156}
$$

Com efeito,

$$
\frac{d}{dt}\Phi_1(t) = (u_{tt}(t), u(t)) + \|u_t(t)\|_2^2. \tag{3.157}
$$

Como

$$
u_{tt}(t) = -\Delta^2 u(t) + \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds + M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u(t) - f(u(t)), \quad \forall\ t > 0, \tag{3.158}
$$

segue de (3.157), (3.158) e do Teorema do Green que

$$
\frac{d}{dt}\Phi_1(t) = -\left(1 - \int_0^t g(s)ds \right) \|\Delta u(t)\|_2^2 + \|u_t(t)\|_2^2 + I_1 + I_2, \tag{3.159}
$$

onde

$$\begin{aligned} I_1 &:= -((g \diamond \Delta u)(t), \Delta u(t)), \\ I_2 &:= -M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\|\nabla u(t)\|_2^2 - \int_\Omega f(u(t))u(t)dx. \end{aligned}$$

Seja η um número real positivo dado. Da Desigualdade de Young com $\varepsilon = \eta$ (ver Proposição 2.46) e de (2.23), segue que

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \|(g \diamond \Delta u)(t)\|_2 \|\Delta u(t)\|_2 \\ &\leq \frac{1}{4\eta}\|(g \diamond \Delta u)(t)\|_2^2 + \eta\|\Delta u(t)\|_2^2 \\ &\leq \frac{1}{4\eta}(g\Box\Delta u)(t) + \eta\|\Delta u(t)\|_2^2. \end{aligned}$$

Agora, somando e subtraindo a energia $E(t)$ em I_2, usando (3.7) e (3.145), obtemos

$$\begin{aligned} I_2 &= -E(t) + \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g\Box\Delta u)(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}\widehat{M}(\|\nabla u(t)\|_2^2) - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\|\nabla u(t)\|_2^2 + \int_\Omega [\widehat{f}(u(t)) - f(u(t))u(t)]dx \\ &\leq -E(t) + \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g\Box\Delta u)(t) \\ &\quad + \frac{l}{2}\left(\frac{\beta_1}{\mu_1} + \frac{\beta_2}{\mu_2}\right)\|\Delta u(t)\|_2^2. \end{aligned}$$

Substituindo as estimativas feitas para os termos I_1 e I_2 em (3.159), segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi_1(t) &\leq \frac{3}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\eta}\right)(g\Box\Delta u)(t) - E(t) \\ &\quad + \left[\eta - \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right) + \frac{l}{2}\left(\frac{\beta_1}{\mu_1} + \frac{\beta_2}{\mu_2}\right)\right]\|\Delta u(t)\|_2^2 \\ &\leq \frac{3}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\eta}\right)(g\Box\Delta u)(t) - E(t) + \left(\eta - \frac{\beta}{2}\right)\|\Delta u(t)\|_2^2. \end{aligned}$$

Tomando $\eta = \dfrac{\beta}{4} > 0$ concluímos que

$$\frac{d}{dt}\Phi_1(t) \leq \frac{3}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta}\right)(g\Box\Delta u)(t) - E(t) - \frac{\beta}{4}\|\Delta u(t)\|_2^2, \quad \forall\, t > 0,$$

como queríamos.

Derivada de Φ_2: Existem constantes $C_R > 0$, dependendo de R e $C > 0$, tais que

$$\frac{d}{dt}\Phi_2(t) \leq -\frac{g_0}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{g_0\beta}{24}\|\Delta u(t)\|_2^2 + C_R(g\Box\Delta u)(t) - C\frac{d}{dt}E(t), \quad \forall\, t \geq t_0, \quad (3.160)$$

para qualquer $t_0 > 0$ fixado, onde

$$g_0 := \int_0^{t_0} g(s)ds > 0.$$

De fato, derivando Φ_2 definido em (3.153) temos

$$\frac{d}{dt}\Phi_2(t) = -(u_{tt}(t), (g \diamond u)(t)) + (u_t(t), (-g' \diamond u)(t)) - \left(\int_0^t g(s)ds\right) \|u(t)\|_2^2.$$

Usando a igualdade (3.158) e o Teorema de Green, obtemos

$$\frac{d}{dt}\Phi_2(t) = -\left(\int_0^t g(s)ds\right) \|u_t(t)\|_2^2 + \sum_{j=1}^{5} J_j, \tag{3.161}$$

onde,

$$\begin{aligned}
J_1 &:= (\Delta u(t), (g \diamond \Delta u)(t)),\\
J_2 &:= \|(g \diamond \Delta u)(t)\|_2^2 - \left(\int_0^t g(s)ds\right) (\Delta u(t), (g \diamond \Delta u)(t)),\\
J_3 &:= -M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\Delta u(t), (g \diamond u)(t)),\\
J_4 &:= (f(u(t)), (g \diamond u)(t)),\\
J_5 &:= (u_t(t), (-g' \diamond u)(t)).
\end{aligned}$$

No que segue, vamos estimar os termos J_j, $j = 1, \ldots, 5$. Para todos os termos, vamos usar a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, a estimativa (2.23), que $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$ com $\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} < 1$ e a Desigualdade de Young com $\delta > 0$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
|J_1| &\leq \|\Delta u(t)\|_2 \|(g \diamond \Delta u)(t)\|_2\\
&\leq \|\Delta u(t)\|_2 \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{1/2} [(g \Box \Delta u)(t)]^{1/2}\\
&\leq \delta \|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\delta}(g \Box \Delta u)(t).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
|J_2| &\leq \|(g \diamond \Delta u)(t)\|_2^2 + \left(\int_0^t g(s)ds\right) \|\Delta u(t)\|_2 \|(g \diamond \Delta u)(t)\|_2\\
&\leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} (g \Box \Delta u)(t) + \|\Delta u(t)\|_2 \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{1/2} [(g \Box \Delta u)(t)]^{1/2}\\
&\leq \delta \|\Delta u(t)\|_2^2 + \left(1 + \frac{1}{4\delta}\right) (g \Box \Delta u)(t).
\end{aligned}$$

Como $\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{H}} \leq R$, existe uma constante $M_R > 0$ tal que

$$|M(\|\nabla u(t)\|_2^2)| \leq M_R, \quad \forall\ t \geq 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}|J_3| &\leq M_R\|\Delta u(t)\|_2\|(g\diamond u)(t)\|_2\\ &\leq M_R\|\Delta u(t)\|_2\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{1/2}[(g\Box u)(t)]^{1/2}\\ &\leq \delta\|\Delta u(t)\|_2^2+\frac{M_R^2}{4\mu_2\delta}(g\Box\Delta u)(t).\end{aligned}$$

Por (3.148) e tomando $N_R>0$ tal que $E(0)\leq N_R$, segue que

$$\begin{aligned}|J_4| &\leq \|f(u(t))\|_2\|(g\diamond u)(t)\|_2\\ &\leq \left[C(1+N_R^{\rho/2})\right]^{1/2}\|\Delta u(t)\|_2\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{1/2}[(g\Box u)(t)]^{1/2}\\ &\leq \delta\|\Delta u(t)\|_2^2+\frac{C(1+N_R^{\rho/2})}{4\mu_2\delta}(g\Box\Delta u)(t).\end{aligned}$$

Finalmente, de (3.139) e (3.141) temos $(-g'\Box\Delta u)(t)\leq -2\dfrac{d}{dt}E(t)$, para todo $t\geq 0$, e usando uma estimativa análoga a (2.23) com $-g'$ no lugar de g, temos

$$\begin{aligned}|J_5| &\leq \|u_t(t)\|_2\|(-g'\diamond u)(t)\|_2\\ &\leq \|u_t(t)\|_2\|-g'\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{1/2}[(-g'\Box u)(t)]^{1/2}\\ &\leq \delta\|u_t(t)\|_2+\frac{g(0)}{4\mu_2\delta}(-g'\Box u)(t)\\ &\leq \delta\|u_t(t)\|_2^2-\frac{g(0)}{2\delta\mu_2}\frac{d}{dt}E(t).\end{aligned}$$

Logo, substituindo as estimativas feitas para os termos J_j, $j=1,\ldots,5$, em (3.161), obtemos

$$\frac{d}{dt}\Phi_2(t)\leq\left(\delta-\int_0^t g(s)ds\right)\|u_t(t)\|_2^2+4\delta\|\Delta u(t)\|_2^2+C_{\delta,R}(g\Box\Delta u)(t)-\frac{g(0)}{2\delta\mu_2}\frac{d}{dt}E(t),$$

onde

$$C_{\delta,R}:=1+\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{4\delta\mu_2}\left[M_R^2+C(1+N_R^{\rho/2})\right]>0.$$

Agora note que para qualquer $t_0>0$ temos

$$\int_0^t g(s)ds\geq\int_0^{t_0}g(s)ds:=g_0>0,\quad \forall\ t\geq t_0.$$

Tomando $\delta=\dfrac{g_0\beta}{96}>0$, temos que $\delta<\dfrac{g_0}{2}$, donde

$$\frac{d}{dt}\Phi_2(t)\leq-\frac{g_0}{2}\|u_t(t)\|_2^2+\frac{g_0\beta}{24}\|\Delta u(t)\|_2^2+C_R(g\Box\Delta u)(t)-C\frac{d}{dt}E(t),\quad \forall\ t\geq t_0,$$

com $C=\frac{48g(0)}{g_0\beta\mu_2}>0$ independente de R, como queríamos.

Derivada de F_0: O funcional F_0 definido em (3.150), satisfaz

$$\xi(t)\frac{d}{dt}F_0(t) \le -\varepsilon_1\xi(t)E(t) - \left[\varepsilon_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta}\right)+\varepsilon_2 C_R\right](g'\Box\Delta u)(t), \quad \forall\ t \ge t_0, \qquad (3.162)$$

para $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ suficientemente pequenos. Com efeito, derivando o funcional F_0 e usando as estimativas em (3.156) e (3.160), temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_0(t) &= \frac{d}{dt}E(t) + \varepsilon_1\frac{d}{dt}\Phi_1(t) + \varepsilon_2\frac{d}{dt}\Phi_2(t)\\ &\le [1-\varepsilon_2 C]\frac{d}{dt}E(t) - \left[\varepsilon_2\frac{g_0}{2} - \varepsilon_1\frac{3}{2}\right]\|u_t(t)\|_2^2 - \left[\varepsilon_1\frac{\beta}{4} - \varepsilon_2\frac{g_0\beta}{24}\right]\|\Delta u(t)\|_2^2\\ &\quad + \left[\varepsilon_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta}\right)+\varepsilon_2 C_R\right](g\Box\Delta u)(t) - \varepsilon_1 E(t).\end{aligned}$$

Escolhemos $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ suficientemente pequenos tais que

$$\frac{1}{2}\varepsilon_2 < \frac{3}{g_0}\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2C}. \qquad (3.163)$$

Logo, de (3.163) concluímos que

$$\frac{d}{dt}F_0(t) \le -\varepsilon_1 E(t) + \left[\varepsilon_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta}\right)+\varepsilon_2 C_R\right](g\Box\Delta u)(t), \quad \forall\ t \ge t_0.$$

Multiplicando ambos os lado da desigualdade por $\xi(t)$, $t \ge t_0$, e notando que da hipótese (3.144), obtemos

$$\xi(t)(g\Box\Delta u)(t) \le (-g'\Box\Delta u)(t), \quad \forall\ t \ge t_0,$$

segue que

$$\xi(t)\frac{d}{dt}F_0(t) \le -\varepsilon_1\xi(t)E(t) - \left[\varepsilon_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta}\right)+\varepsilon_2 C_R\right](g'\Box\Delta u)(t), \quad \forall\ t \ge t_0,$$

como queríamos.

Derivada de F: Para $\varepsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno e dependendo de R, o funcional F definido em (3.151) satifaz a seguinte desigualdade

$$\frac{d}{dt}F(t) \le -\varepsilon_1\xi(t)E(t), \quad \forall\ t \ge t_0. \qquad (3.164)$$

De fato, derivando F, usando que ξ é uma função não crescente, usando (3.162) e notando que

$\frac{d}{dt}E(t) \leq \frac{1}{2}(g'\Box\Delta u)(t)$, para todo $t \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(t) &= \xi'(t)F_0(t) + \xi(t)\frac{d}{dt}F_0(t) + \frac{d}{dt}E(t) \\ &\leq -\varepsilon_1\xi(t)E(t) + \left[\frac{1}{2} - \varepsilon_1\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta}\right) - \varepsilon_2 C_R\right](g'\Box\Delta u)(t), \end{aligned}$$

para todo $t \geq t_0$. Tomando $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ satisfazendo (3.163) e também

$$\varepsilon_2 < \min\left\{\frac{3}{2}\frac{\beta}{(2+\beta)g_0}, \frac{1}{4C_R}\right\}, \tag{3.165}$$

obtemos

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq -\varepsilon_1\xi(t)E(t), \quad \forall\ t \geq t_0,$$

o que prova o desejado, onde notamos que $\varepsilon_1 \sim \dfrac{1}{C_R}$.

<u>*Conclusão*</u>: Considere $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ satisfazendo as condições (3.163) e (3.165). Então, por (3.155) e (3.164), obtemos

$$\frac{d}{dt}F(t)(t) \leq -\varepsilon_1\xi(t)E(t) \leq -\varepsilon_1\xi_0\xi(t)F(t), \quad \forall\ t \geq t_0, \tag{3.166}$$

com $\xi_0 := \dfrac{2}{3\xi(0)+2} > 0$. Multiplicando (3.166) por $e^{\varepsilon_1\xi_0\int_{t_0}^t \xi(s)ds} > 0$, segue que

$$\frac{d}{dt}F(t)e^{\varepsilon_1\xi_0\int_{t_0}^t \xi(s)ds} + \varepsilon_1\xi_0\xi(t)F(t)e^{\varepsilon_1\xi_0\int_{t_0}^t \xi(s)ds} \leq 0.$$

De onde vem que

$$F(t) \leq F(t_0)e^{-\varepsilon_1\xi_0\int_{t_0}^t \xi(s)ds}, \quad \forall\ t \geq t_0.$$

Usando novamente (3.155) e sabendo que a energia E é decrescente, temos

$$E(t) \leq F(t) \leq F(t_0)e^{-\varepsilon_1\xi_0\int_{t_0}^t \xi(s)ds} \leq \frac{1}{\xi_0}E(t_0)e^{-\varepsilon_1\xi_0\int_{t_0}^t \xi(s)ds} \leq \frac{1}{\xi_0}E(0)e^{-\varepsilon_1\xi_0\int_{t_0}^t \xi(s)ds}.$$

Logo,

$$E(t) \leq K_{1,R}e^{-\gamma_R\int_0^t \xi(s)ds}, \quad \forall\ t \geq t_0, \tag{3.167}$$

onde $\gamma_R := \varepsilon_1\xi_0 \sim \frac{1}{C_R} > 0$ e $K_{1,R} := \frac{N_R}{\xi_0}e^{\gamma_R\int_0^{t_0}\xi(s)ds} > 0$. Por outro lado,

$$1 \leq e^{\gamma_R\int_t^{t_0}\xi(s)ds} = \left(e^{\gamma_R\int_0^{t_0}\xi(s)ds}\right)e^{-\gamma_R\int_0^t \xi(s)ds} < e^{\gamma_R\xi_0 t_0}, \quad \forall\ t \in [0, t_0].$$

Assim, pondo $\zeta = e^{\gamma_R\int_0^{t_0}\xi(s)ds} > 0$, temos que

$$E(t) \leq E(0) \leq \zeta E(0)e^{-\gamma_R\int_0^t \xi(s)ds} \leq K_{2,R}e^{-\gamma_R\int_0^t \xi(s)ds}, \quad \forall\ t \in [0, t_0], \tag{3.168}$$

onde $K_{2,R} := \zeta N_R > 0$. Portanto, tomando $K_R = \max\{K_{1,R}, K_{2,R}\} > 0$, segue de (3.167) e (3.168) que

$$E(t) \leq K_R e^{-\gamma_R \int_0^t \xi(s)ds}, \quad \forall\ t \geq 0,$$

o que completa a prova do Teorema 3.6 para soluções fortes. A mesma conclusão também é válida se $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$. De fato, seja $z = (u, u_t)$ uma solução fraca do problema (3.1)-(3.4) correspondente aos dados iniciais $z_0 = (u_0, u_1) \in B_R(0)$ em $\mathcal{H}$, onde $R > 0$ é um número arbitrário. Como $\mathcal{H}_1$ é denso em $\mathcal{H}$, existe uma sequência $z_0^n = (u_0^n, u_1^n) \in \mathcal{H}_1$ tal que

$$z_0^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0 \text{ em } \mathcal{H}. \tag{3.169}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $z^n = (u^n, u_t^n)$ a única solução forte do problema (3.95)-(3.96) e $E^n(t)$ o funcional de energia associado ao problema (3.95)-(3.96) definido por

$$\begin{aligned} E^n(t) = \frac{1}{2}\|u_t^n(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|\Delta u^n(t)\|_2^2 \\ + \frac{1}{2}(g\Box\Delta u^n)(t) + \frac{1}{2}\widehat{M}(\|\nabla u^n(t)\|_2^2) + \int_\Omega \widehat{f}(u^n(t))dx. \end{aligned}$$

De (3.169), (z_0^n) é limitada. Então, existe uma constante $C_R > 0$, que dependendo de R, tal que

$$E^n(t) \leq E^n(0) \leq C_R, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}, \quad \forall\ t \geq 0. \tag{3.170}$$

Assim, pelo Teorema 3.6, existem constantes K_R, $\gamma_R > 0$ tais que

$$E^n(t) \leq K_R e^{-\gamma_R \int_0^t \xi(s)ds}, \quad \forall\ t \geq 0 \tag{3.171}$$

Afirmamos que $E^n(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} E(t)$, para todo $t \geq 0$, onde E é dada por (3.140). Com efeito, usando um processo análogo para obtermos a convergência (3.101), temos que

$$z^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z \text{ em } C([0,T], \mathcal{H}). \tag{3.172}$$

Além disso, de (3.170), segue que

$$\begin{aligned} |(g\Box\Delta u^n)(t) - (g\Box\Delta u)(t)| &\leq C_R\left(\int_0^t g(t-s)ds\right)\|\Delta u^n(t) - \Delta u(t)\|_2 ds \\ &\quad + C_R\int_0^t g(t-s)\|\Delta u^n(s) - \Delta u(s)\|_2 ds \\ &\leq 2C_R\|u^n - u\|_{C([0,T],\mathcal{V}_2)}, \end{aligned}$$

com $C_R > 0$ dependendo de R. Mais ainda, como $M \in C(\mathbb{R})$ e pela imersão $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_1$,

obtemos

$$
\begin{aligned}
|\widehat{M}(\|\nabla u^n(t)\|_2^2) - \widehat{M}(\|\nabla u(t)\|_2^2)| &\leq \int_{\|\nabla u(t)\|_2^2}^{\|\nabla u^n(t)\|_2^2} |M(s)|ds \\
&\leq C_R|\|\nabla u^n(t)\|_2^2 - \|\nabla u(t)\|_2^2| \\
&\leq C_R(\|\nabla u^n(t)\|_2 - \|\nabla u(t)\|_2) \\
&\leq C_R\|\nabla u^n(t) - \nabla u(t)\|_2 \\
&\leq C_R\|u^n - u\|_{C([0,T],\mathcal{V}_2)},
\end{aligned}
$$

onde $C_R > 0$ depende de R. Agora, sejam $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. Como $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R})$, segue do Teorema do Valor Médio que existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$
|\widehat{f}(s_1) - \widehat{f}(s_2)| \leq |f(\theta s_1 + (1-\theta)s_2)||s_1 - s_2|. \tag{3.173}
$$

Por outro lado, de (3.27) temos

$$
|f(\theta s_1 + (1-\theta)s_2)| \leq \mu_4(1 + |\theta s_1 + (1-\theta)s_2|^{\rho/2})|\theta s_1 + (1-\theta)s_2|. \tag{3.174}
$$

Como $0 < \theta < 1$, segue de (3.174) que

$$
|f(\theta s_1 + (1-\theta)s_2)| \leq \mu_5(1 + |s_1|^{\rho/2} + |s_2|^{\rho/2})|s_1 + s_2|, \tag{3.175}
$$

com $\mu_5 = \mu_4 2^{\rho/2} > 0$. Então, de (3.173) e (3.175), obtemos

$$
|\widehat{f}(s_1) - \widehat{f}(s_2)| \leq \mu_5(1 + |s_1|^{\rho/2} + |s_2|^{\rho/2})|s_1 + s_2||s_1 - s_2|, \quad \forall\ s_1, s_2 \in \mathbb{R}. \tag{3.176}
$$

Assim, por (3.176), pela Desigualdade de Hölder generalizada com $\frac{\rho}{2(\rho+2)} + \frac{1}{\rho+2} + \frac{1}{2} = 1$, e pelas imersões

$$
L^{\rho+2} \hookrightarrow \mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_0,
$$

temos

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega \widehat{f}(u^n(t))dx - \int_\Omega \widehat{f}(u(t))dx \right| \\
&\qquad \leq \int_\Omega |\widehat{f}(u^n(t)) - \widehat{f}(u(t))|dx \\
&\qquad \leq \mu_5 \int_\Omega (1 + |u^n(t)|^{\rho/2} + |u(t)|^{\rho/2})|u^n(t) + u(t)||u^n(t) - u(t)|dx \\
&\qquad \leq \mu_5(|\Omega|^{\rho/2(\rho+2)} + \|u^n(t)\|_{\rho+2}^{\rho/2} + \|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho/2})\|u^n(t) + u(t)\|_{\rho+2}\|u^n(t) - u(t)\|_2 \\
&\qquad \leq C_R\|u^n - u\|_{C([0,T],\mathcal{V}_2)},
\end{aligned}
$$

onde $C_R > 0$ depende de ρ, $|\Omega|$ e de R. Logo, usando a convergência (3.172), obtemos

$$|E^n(t) - E(t)| \leq C_R(\|u_t^n - u_t\|_{C([0,T],\mathcal{V}_0)} + \|u^n - u\|_{C([0,T],\mathcal{V}_2)}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall\ t \geq 0,$$

o que prova a afirmação. Portanto, tomando o limite de quando $n \to \infty$ em (3.171), concluímos que

$$E(t) \leq K_R e^{-\gamma_R \int_0^t \xi(s)ds}, \quad \forall\ t \geq 0,$$

o que completa a prova do Teorema 3.6 para soluções fracas. □

3.2.1 Exemplos de Taxas de Decaimento

Nesta seção vamos exibir exemplos de funções ξ que satisfazem a hipótese (**H.5**) e veremos as taxas de decaimento obtidas pela relação (3.147). Antes, vejamos uma observação.

Observação. Dada $\xi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que

$$0 < c_\xi := \int_0^\infty e^{-\int_0^t \xi(s)ds} dt < \infty, \tag{3.177}$$

existe uma função g satisfazendo a hipótese (**H.1**) e a desigualdade (3.144). De fato, a solução do problema de valor inicial

$$g'(t) + \xi(t)g(t) = 0, \qquad g(0) = \frac{1}{2c_\xi},$$

satisfaz o desejado (para ver que $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$, basta integrar a igualdade em (3.146) sobre $[0,\infty)$ e usar (3.177)).

Exemplo 3.2.1. Seja

$$\xi(t) = k\ \ln(a+1), \quad k > 0, \quad a > 0.$$

Temos que $\xi > 0$, $\xi' \equiv 0$ e $c_\xi = [k\ \ln(a+1)]^{-1}$. Aplicando a relação (3.147), obtemos

$$E(t) \leq K_R(a+1)^{-\gamma_R k t}, \quad \forall\ t \geq 0.$$

Em particular, para $a = e - 1 > 0$ temos o decaimento exponencial.

Exemplo 3.2.2. Considere

$$\xi(t) = \frac{k}{t+1}, \quad k > 1.$$

Note que $\xi > 0$, $\xi' < 0$ e $c_\xi = (k-1)^{-1}$. Assim, de (3.147) vem que

$$E(t) \leq \frac{K_R}{(t+1)^{\gamma_R k}}, \quad \forall\ t \geq 0.$$

Exemplo 3.2.3. Seja
$$\xi(t) = \frac{k + \ln(t+2)}{(t+2)\ln(t+2)}, \quad k > 1.$$

Observe que $\xi > 0$ e $\xi' \leq 0$. Além disso, $c_\xi = \frac{2\ln(2)}{k-1} > 0$. Logo, de (3.147) segue que

$$E(t) \leq \frac{K_R}{(t+2)^{\gamma_R}(\ln(t+2))^{\gamma_R k}}, \quad \forall\ t \geq 0.$$

3.3 Decaimento Geral de Energia - Caso 2

Nesta seção apresentaremos outro tipo de decaimento geral uniforme para o funcional de energia $E(t)$ definido em (3.140), a saber, que o decaimento de $E(t)$ é estabelecido por meio da solução de uma E.D.O. não linear. Os argumentos usados ao longo desta seção são uma adaptação das técnicas encontradas em Lasiecka et al. [17, 19]. Para tanto, vamos impor a seguinte hipótese sobre o núcleo de memória g ao invés de (**H.5**).

(**H.7**) Suponhamos que exista uma função crescente e convexa $H \in C^1([0,\infty))$ com $H(0) = 0$ tal que
$$g'(t) \leq -H(g(t)), \quad \forall\ t > 0, \tag{3.178}$$
e que existe $\alpha_0 \in (0,1)$ tal que
$$\int_0^\infty g^{1-\alpha_0}(s)ds < \infty. \tag{3.179}$$

Observação. (i) Considere uma função H satisfazendo a hipótese (**H.7**). Note que H possui inversa $H^{-1} \in C^1([0,\infty))$ crescente. Assim, de (3.178)

$$g(t) \leq H^{-1}(-g'(t)), \quad \forall\ t > 0. \tag{3.180}$$

(ii) Seja H satisfazendo a hipótese (**H.7**) e considere uma constante $\beta_0 \geq 1$. A função

$$F(s) := C_1 H(C_2 s^{\beta_0}) \tag{3.181}$$

também é crescente, convexa com $F \in C^1([0,\infty))$ e $F(0) = 0$, para quaisquer constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$. Com efeito, como $H(0) = 0$, segue que $F(0) = 0$. Além disso, sabendo que a função $h(s) := C_2 s^{\beta_0}$ é crescente, convexa e de classe C^1 em $[0,\infty)$ e notando que $F = C_1 H \circ h$, então:

- Para $s_1, s_2 \geq 0$ com $s_1 < s_2$, vem que

  $$h(s_1) < h(s_2) \Rightarrow H(h(s_1)) < H(h(s_2)) \Rightarrow F(s_1) < F(s_2).$$

  Ou seja, F é crescente;

- Para $t \in [0,1]$ e $s_1, s_2 \geq 0$, temos

$$h(ts_1 + (1-t)s_2) \leq th(s_1) + (1-t)h(s_2).$$

Assim, como H é crescente, obtemos

$$H(h(ts_1 + (1-t)s_2)) \leq H(th(s_1) + (1-t)h(s_2)) \leq tH(h(s_1)) + (1-t)H(h(s_2)). \tag{3.182}$$

Multiplicando (3.182) por C_1, segue que

$$F(ts_1 + (1-t)s_2) \leq C_1[tH(h(s_1)) + (1-t)H(h(s_2))] = tF(s_1) + (1-t)F(s_2).$$

Logo, F é convexa;

- $F \in C^1([0,\infty))$, pois F é uma composição de funções de classe C^1 em $[0,\infty)$, como queríamos.

A condição (3.178) da hipótese (**H.7**) nos diz que a função g satisfaz uma desigualdade diferencial não linear. Quando $H(s) = Cs$, $C > 0$, verifica-se facilmente que o decaimento da função g é do tipo exponencial. Em geral, se H é uma função arbitrária satisfazendo a hipótese (**H.7**), não podemos concluir algo específico sobre a taxa ou o tipo de decaimento da função g. No entanto, podemos determinar o decaimento uniforme do funcional de energia $E(t)$ associado ao problema (3.1)-(3.4), como veremos no próximo resultado.

Teorema 3.7. *Suponhamos que as hipóteses* (**H.1**)-(**H.4**), (**H.6**) *e* (**H.7**) *sejam satisfeitas e consideramos* $(u_0, u_1) \in \{z \in \mathcal{H} \mid \|z\|_{\mathcal{H}} \leq R\}$, *para qualquer* $R > 0$. *Então, o funcional de energia* $E(t)$ *definido em* (3.140) *decai uniformemente para zero. Mais especificamente, para algum* $T_1 > 0$,

$$E(t) \leq S\left(\frac{t}{T_1} - 1\right), \quad \forall\, t > T_1, \tag{3.183}$$

onde $S(t)$ *é solução da equação diferencial*

$$\frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0, \qquad S(0) = E(0),$$

com

$$q(s) = s - (Id + \tilde{H}_{\alpha_0}^{-1})^{-1}(s), \quad \tilde{H}_{\alpha_0}(s) = \left[c_1 H^{-1}(c_2 s)\right]^{\alpha_0} + c_3 s, \quad \lim_{t\to\infty} S(t) = 0,$$

para algumas constantes positivas c_1, c_2, c_3 *sendo* c_1, c_3 *dependentes de* R.

Demonstração. A demonstração é feita em algumas etapas como segue.

<u>*Identidade Inicial*</u>: Integrando a igualdade (3.139) sobre $(nT,(n+1)T)$, $n \in \mathbb{N}$, $T > 0$, temos

$$E(nT) = E((n+1)T) + \int_{nT}^{(n+1)T} D(t)dt. \tag{3.184}$$

<u>*Estimativa I*</u>: Multiplicando a equação (3.1) por $u(t)$, integrando sobre $\Omega \times (nT,(n+1)T)$ e usando o Teorema de Green duas vezes segue que

$$\begin{aligned}
&\int_{nT}^{(n+1)T} (u_{tt}(t),u(t))dt + \int_{nT}^{(n+1)T} \left(1 - \int_0^t g(s)ds\right) \|\Delta u(t)\|_2^2 dt \\
&= -\int_{nT}^{(n+1)T} ((g \diamond \Delta u)(t), \Delta u(t))\, dt - \int_{nT}^{(n+1)T} M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\|\nabla u(t)\|_2^2 dt \\
&\quad - \int_{nT}^{(n+1)T} (f(u(t)),u(t))dt.
\end{aligned} \tag{3.185}$$

Integrando por partes o primeiro termo de (3.185), obtemos

$$\int_{nT}^{(n+1)T} (u_{tt}(t),u(t))dt = (u_t(t),u(t))\Big|_{nT}^{(n+1)T} - \int_{nT}^{(n+1)T} \|u_t(t)\|_2^2 dt. \tag{3.186}$$

Assim, substituindo (3.186) em (3.185) e somando $\int_{nT}^{(n+1)T} E(t)dt$ em ambos os lados da igualdade resultante, chegamos a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{nT}^{(n+1)T} \left(1 - \int_0^t g(s)ds\right) \|\Delta u(t)\|_2^2 dt - \frac{3}{2}\int_{nT}^{(n+1)T} \|u_t(t)\|_2^2 dt + \int_{nT}^{(n+1)T} E(t)dt \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{4} K_i + \frac{1}{2}\int_{nT}^{(n+1)T} (g\square\Delta u)(t)dt,
\end{aligned} \tag{3.187}$$

onde

$$\begin{aligned}
K_1 &:= -(u_t(t),u(t))\Big|_{nT}^{(n+1)T} \\
K_2 &:= -\int_{nT}^{(n+1)T} ((g \diamond \Delta u)(t), \Delta u(t))\, dt \\
K_3 &:= -\int_{nT}^{(n+1)T} M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\|\nabla u(t)\|_2^2 dt + \frac{1}{2}\int_{nT}^{(n+1)T} \widehat{M}(\|\nabla u(t)\|_2^2)dt \\
K_4 &:= -\int_{nT}^{(n+1)T} (f(u(t)),u(t))dt + \int_{nT}^{(n+1)T}\int_\Omega \widehat{f}(u(t))dxdt.
\end{aligned}$$

Agora, vamos estimar os termos K_i, $i = 1, \ldots, 4$. De fato, seja $k \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 3.5, temos

$$E(kT) \geq \frac{1}{2}\|u_t(kT)\|_2^2 + \frac{\beta}{2}\|\Delta u(kT)\|_2^2.$$

Assim, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz e pela Desigualdade de Young,

$$\begin{aligned} |(u_t(kT), u(kT))| &\leq \frac{1}{\mu_2^{1/2}} \|u_t(kT)\|_2 \|\Delta u(kT)\|_2 \\ &\leq \frac{1}{\beta\mu_2^{1/2}} \left(\frac{1}{2}\|u_t(kT)\|_2^2 + \frac{\beta}{2}\|\Delta u(kT)\|_2^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{\beta\mu_2^{1/2}} E(kT). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} |K_1| &\leq |(u_t((n+1)T), u((n+1)T))| + |(u_t(nT), u(nT))| \\ &\leq \frac{1}{\beta\mu_2^{1/2}}[E((n+1)T) + E(nT)]. \end{aligned}$$

Além disso, usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, a Desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$ e a estimativa (2.23), obtemos

$$\begin{aligned} |K_2| &\leq \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2 \|(g \diamond \Delta u)(t)\|_2 dt \\ &\leq \varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2^2 dt + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{nT}^{(n+1)T} \|(g \diamond \Delta u)(t)\|_2^2 dt \\ &\leq \varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2^2 dt + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{nT}^{(n+1)T} (g\Box\Delta u)(t) dt. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando (3.145) e (3.7) respectivamente, obtemos

$$K_3 + K_4 \leq \frac{l}{2} \left(\frac{\beta_1}{\mu_1} + \frac{\beta_2}{\mu_2} \right) \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2^2 dt.$$

Substituindo as estimativas feitas para os termos K_i, $i = 1, \ldots, 4$ e usando (3.29), deduzimos que

$$\begin{aligned} &\frac{l}{2} \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2^2 dt - \frac{3}{2} \int_{nT}^{(n+1)T} \|u_t(t)\|_2^2 dt + \int_{nT}^{(n+1)T} E(t) dt \\ &\quad \leq C[E((n+1)T) + E(nT)] + \frac{l}{2} \left(\frac{\beta_1}{\mu_1} + \frac{\beta_2}{\mu_2} \right) \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2^2 dt \\ &\quad + \left(\frac{1}{4\varepsilon} + \frac{1}{2} \right) \int_{nT}^{(n+1)T} (g\Box\Delta u)(t) dt + \varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2^2 dt. \end{aligned} \tag{3.188}$$

Usando (3.9) em (3.188), então

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\beta}{2}-\varepsilon\right)\int_{nT}^{(n+1)T}\|\Delta u(t)\|_2^2dt-\frac{3}{2}\int_{nT}^{(n+1)T}\|u_t(t)\|_2^2dt+\int_{nT}^{(n+1)T}E(t)dt\\&\qquad\leq C[E((n+1)T)+E(nT)]+\left(\frac{1}{4\varepsilon}+\frac{1}{2}\right)\int_{nT}^{(n+1)T}(g\Box\Delta u)(t)dt.\end{aligned}\tag{3.189}$$

Tomando $\varepsilon=\dfrac{\beta}{4}>0$ em (3.189), concluímos que

$$\begin{aligned}&\frac{\beta}{4}\int_{nT}^{(n+1)T}\|\Delta u(t)\|_2^2dt-\frac{3}{2}\int_{nT}^{(n+1)T}\|u_t(t)\|_2^2dt+\int_{nT}^{(n+1)T}E(t)dt\\&\qquad\leq C[E((n+1)T)+E(nT)]+\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{2}\right)\int_{nT}^{(n+1)T}(g\Box\Delta u)(t)dt.\end{aligned}\tag{3.190}$$

__Estimativa II__: Multiplicando a equação (3.1) por $(g\diamond u)(t)$, integrando sobre $\Omega\times(nT,(n+1)T)$ e usando o Teorema de Green, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_{nT}^{(n+1)T}(u_{tt}(t),(g\diamond u)(t))dt+\int_{nT}^{(n+1)T}(\Delta u(t),(g\diamond\Delta u)(t))dt\\&+\int_{nT}^{(n+1)T}\|(g\diamond\Delta u)(t)\|_2^2dt-\int_{nT}^{(n+1)T}\left(\int_0^t g(s)ds\right)(\Delta u(t),(g\diamond\Delta u)(t))\,dt\\&=\int_{nT}^{(n+1)T}M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\,(\Delta u(t),(g\diamond u)(t))\,dt-\int_{nT}^{(n+1)T}(f(u(t)),(g\diamond u)(t))dt.\end{aligned}\tag{3.191}$$

Integração por partes o primeiro termo de (3.191), temos

$$\begin{aligned}\int_{nT}^{(n+1)T}(u_{tt}(t),(g\diamond u)(t))dt &= (u_t(t),(g\diamond u)(t))\Big|_{nT}^{(n+1)T}-\int_{nT}^{(n+1)T}(u_t(t),(g'\diamond u)(t))\,dt\\&\quad-\int_{nT}^{(n+1)T}\left(\int_0^t g(s)ds\right)\|u_t(t)\|_2^2dt.\end{aligned}\tag{3.192}$$

Assim, substituindo (3.192) em (3.191) obtemos

$$\int_{nT}^{(n+1)T}\left(\int_0^t g(s)ds\right)\|u_t(t)\|_2^2dt=\sum_{i=1}^{7}L_i,\tag{3.193}$$

com

$$
\begin{aligned}
L_1 &:= (u_t(t), (g \diamond u)(t)) \Big|_{nT}^{(n+1)T}, \\
L_2 &:= \int_{nT}^{(n+1)T} (u_t(t), (-g' \diamond u)(t))\, dt, \\
L_3 &:= \int_{nT}^{(n+1)T} (\Delta u(t), (g \diamond \Delta u)(t)) dt, \\
L_4 &:= \int_{nT}^{(n+1)T} \|(g \diamond \Delta u)(t)\|_2^2 dt, \\
L_5 &:= -\int_{nT}^{(n+1)T} \left(\int_0^t g(s) ds \right) (\Delta u(t), (g \diamond \Delta u)(t))\, dt, \\
L_6 &:= -\int_{nT}^{(n+1)T} M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\, (\Delta u(t), (g \diamond u)(t))\, dt, \\
L_7 &:= \int_{nT}^{(n+1)T} (f(u(t)), (g \diamond u)(t)) dt.
\end{aligned}
$$

Agora, vamos estimar os termos L_i, $i = 1, \ldots, 7$. Em todas as estimativas usaremos a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, a Desigualdade de Young e (2.23). Com efeito, seja $k \in \mathbb{N}$. Do Lema 3.5, temos

$$
\begin{aligned}
|\, (u_t(kT), (g \diamond u)(kT))\, | &\leq \|u_t(kT)\|_2 \|(g \diamond u)(kT)\|_2 \\
&\leq \|u_t(kT)\|_2 \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{1/2} [(g \Box u)(kT)]^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{\mu_2^{1/2}} \|u_t(kT)\|_2 [(g \Box \Delta u)(kT)]^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{\mu_2^{1/2}} \left(\frac{1}{2} \|u_t(kT)\|_2^2 + \frac{1}{2} (g \Box \Delta u)(kT) \right) \\
&\leq \frac{1}{\mu_2^{1/2}} E(kT).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
|L_1| &\leq |\, (u_t((n+1)T), (g \diamond u)((n+1)T))\, | + |\, (u_t(nT), (g \diamond u)(nT))\, | \\
&\leq C[E((n+1)T + E(nT)].
\end{aligned}
$$

Seja $\delta > 0$ dado. Usando (2.23) com $-g'$ no lugar de g e notando que $(-g' \Box \Delta u)(t) \leq 2D(t)$

para todo $t \geq 0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
|L_2| &\leq \int_{nT}^{(n+1)T} \|u_t(t)\|_2 \|(-g' \diamond u)(t)\|_2 dt \\
&\leq \int_{nT}^{(n+1)T} \|u_t(t)\|_2 \| - g'\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{1/2} [(-g' \Box u)(t)]^{1/2} dt \\
&\leq \delta \int_{nT}^{(n+1)T} \|u_t(t)\|_2^2 dt + \frac{g(0)}{4\delta\mu_2} \int_{nT}^{(n+1)T} (-g' \Box \Delta u)(t) dt \\
&\leq \delta \int_{nT}^{(n+1)T} \|u_t(t)\|_2^2 dt + \frac{g(0)}{2\delta\mu_2} \int_{nT}^{(n+1)T} D(t) dt.
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
|L_3| &\leq \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2 \|(g \diamond \Delta u)(t)\|_2 dt \\
&\leq \delta \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2^2 dt + \frac{1}{4\delta} \int_{nT}^{(n+1)T} \|(g \diamond \Delta u)(t)\|_2^2 dt \\
&\leq \delta \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2^2 dt + \frac{1}{4\delta} \int_{nT}^{(n+1)T} (g \Box \Delta u)(t) dt.
\end{aligned}
$$

Além disso,

$$
|L_4| = \int_{nT}^{(n+1)T} \|(g \diamond \Delta u)(t)\|_2^2 dt \leq \int_{nT}^{(n+1)T} (g \Box \Delta u)(t) dt.
$$

Mais ainda,

$$
\begin{aligned}
|L_5| &\leq \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2 \|(g \diamond \Delta u)(t)\|_2 dt \\
&\leq \delta \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2^2 dt + \frac{1}{4\delta} \int_{nT}^{(n+1)T} \|(g \diamond \Delta u)(t)\|_2^2 dt \\
&\leq \delta \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2^2 dt + \frac{1}{4\delta} \int_{nT}^{(n+1)T} (g \Box \Delta u)(t) dt.
\end{aligned}
$$

Seja $M_R > 0$ tal que $|M(\|\nabla u(t)\|_2^2)| \leq M_R$, para todo $t \geq 0$. Então,

$$
\begin{aligned}
|L_6| &\leq M_R \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2 \|(g \diamond u)(t)\|_2 dt \\
&\leq M_R \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2 \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{1/2} [(g \Box u)(t)]^{1/2} dt \\
&\leq \delta \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2^2 dt + \frac{M_R^2}{4\mu_2\delta} \int_{nT}^{(n+1)T} (g \Box \Delta u)(t) dt.
\end{aligned}
$$

Por (3.148) e tomando $N_R > 0$ tal que $E(0) \leq N_R$, segue que

$$
\begin{aligned}
|L_7| &\leq \int_{nT}^{(n+1)T} \|f(u(t))\|_2 \|(g \diamond u)(t)\|_2 dt \\
&\leq \left[C(1 + N_R^{\rho/2})\right]^{1/2} \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2 \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{1/2} [(g \Box u)(t)]^{1/2} dt \\
&\leq \delta \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2^2 dt + \frac{C(1 + N_R^{\rho/2})}{4\mu_2 \delta} \int_{nT}^{(n+1)T} (g \Box \Delta u)(t) dt.
\end{aligned}
$$

Substituindo as estimativas feitas para os termos L_i, $i = 1, \ldots, 7$, em (3.193) concluímos que

$$
\begin{aligned}
&\int_{nT}^{(n+1)T} \left[\left(\int_0^t g(s)ds\right) - \delta\right] \|u_t(t)\|_2^2 dt - 4\delta \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2^2 dt \\
&\leq C[E((n+1)T + E(nT)] + C_{\delta,R} \int_{nT}^{(n+1)T} (g \Box \Delta u)(t) dt + C_\delta \int_{nT}^{(n+1)T} D(t) dt,
\end{aligned}
\tag{3.194}
$$

com

$$
C_{\delta,R} := 1 + \frac{1}{2\delta} + \frac{1}{4\mu_2 \delta}\left[M_R^2 + C(1 + N_R^{\rho/2})\right] > 0, \qquad C_\delta := \frac{g(0)}{4\delta\mu_2} > 0.
$$

Agora note que para qualquer $T_0 > 0$ temos

$$
\int_0^t g(s)ds \geq \int_0^{T_0} g(s)ds := g_0 > 0, \quad \forall\ t > T_0
$$

Fixando $T_0 > 0$, tomemos $\delta = \dfrac{\beta g_0}{48} > 0$ e $T > 0$ suficientemente grande tal que $T > T_0$. Assim, $\delta < \dfrac{g_0}{2}$ e por (3.194), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{g_0}{2} \int_{nT}^{(n+1)T} \|u_t(t)\|_2^2 dt - \frac{\beta g_0}{12} \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2^2 dt \\
&\leq C[E((n+1)T + E(nT)] + C_R \int_{nT}^{(n+1)T} (g \Box \Delta u)(t) dt + C \int_{nT}^{(n+1)T} D(t) dt,
\end{aligned}
\tag{3.195}
$$

onde $C > 0$ e $C_R > 0$ são constantes independentes de n e de T.

Desigualdade de Observabilidade: Multiplicando (3.195) por $\dfrac{3}{g_0} > 0$ e somando com a desigualdade (3.190), obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{nT}^{(n+1)T} E(t) dt \leq C[E((n+1)T) + E(nT)] &+ C_R \int_{nT}^{(n+1)T} (g \Box \Delta u)(t) dt \\
&+ C \int_{nT}^{(n+1)T} D(t) dt,
\end{aligned}
\tag{3.196}
$$

para todo $T > T_0$, com $C > 0$ e $C_R > 0$ independentes de n e de T. Combinando (3.184) e

(3.196), vem que

$$\int_{nT}^{(n+1)T} E(t)dt \leq CE((n+1)T) + C_R \int_{nT}^{(n+1)T} (g\Box\Delta u)(t)dt + C \int_{nT}^{(n+1)T} D(t)dt, \quad (3.197)$$

para todo $T > T_0$, onde $C > 0$ e $C_R > 0$ são independentes de n e de T. Finalmente, como E é decrescente, temos

$$TE((n+1)T) = \int_{nT}^{(n+1)T} E((n+1)T)dt \leq \int_{nT}^{(n+1)T} E(t)dt$$

e portanto de (3.197) obtemos

$$(T - C)E((n+1)T) \leq C_R \int_{nT}^{(n+1)T} (g\Box\Delta u)(t)dt + C \int_{nT}^{(n+1)T} D(t)dt, \quad \forall\ T > T_0.$$

Logo, tomando $\tilde{T_0} \geq 2C$ e $T_1 > \max\{\tilde{T_0}, T_0\}$, então

$$E((n+1)T) \leq C_R \int_{nT}^{(n+1)T} (g\Box\Delta u)(t)dt + C \int_{nT}^{(n+1)T} D(t)dt, \quad \forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ T > T_1, \quad (3.198)$$

onde $C > 0$ e $C_R > 0$ independem de n.

Estimativa para $\int_{nT}^{(n+1)T}(g\Box\Delta u)(t)dt$: Agora, de posse das hipóteses (3.178) e (3.179), vamos mostrar que existe uma função crescente $\widehat{H}_{\alpha_0} \in C^1([0,\infty))$ com $\widehat{H}_{\alpha_0}(0) = 0$ tal que

$$\int_{nT}^{(n+1)T} (g\Box\Delta u)(t)dt \leq \widehat{H}_{\alpha_0}^{-1}\left(\int_{nT}^{(n+1)T} D(t)dt\right).$$

De fato, de (3.180) temos

$$g(t) \leq H^{-1}(-g'(t)), \quad \forall\ t > 0.$$

Além disso, por (3.179) obtemos

$$\left|\int_0^t g^{1-\alpha_0}(s)\|\Delta u(t) - \Delta u(t-s)\|_2^2 ds\right| \leq C_R \int_0^\infty g^{1-\alpha_0}(s)ds < \infty, \quad \forall\ t > 0.$$

Com isso definimos

$$C_{\alpha_0}(t) := \int_0^t g^{1-\alpha_0}(s)\|\Delta u(t) - \Delta u(t-s)\|_2^2 ds, \quad t > 0,$$

e

$$C_{1,\alpha_0} := \inf_{t>0} C_{\alpha_0}(t), \quad C_{2,\alpha_0} := \sup_{t>0} C_{\alpha_0}(t).$$

Sem perda de generalidade podemos assumir que $C_{1,\alpha_0} > 0$. Como $\dfrac{1}{\alpha_0} > 1$, segue da Observação 3.3 item (ii) que a função $F_{\alpha_0}(s) := H(s^{1/\alpha_0})$ é convexa e crescente. Assim, pela Desigualdade de Jensen (ver Proposição 2.44) com

$$G = -F_{\alpha_0}^{-1}, \quad h_1 = -g', \quad h_2^t(s) = g^{1-\alpha_0}(s)\|\Delta u(t) - \Delta u(t-s)\|_2^2,$$

temos

$$\begin{aligned}
(g\Box\Delta u)(t) &= \int_0^t g(t-s)\|\Delta u(t) - \Delta u(s)\|_2^2 ds \\
&= \int_0^t g(s)\|\Delta u(t) - \Delta u(t-s)\|_2^2 ds \\
&= \int_0^t g^{\alpha_0}(s) g^{1-\alpha_0}(s)\|\Delta u(t) - \Delta u(t-s)\|_2^2 ds \\
&\leq \int_0^t [H^{-1}(-g'(s))]^{\alpha_0} g^{1-\alpha_0}(s)\|\Delta u(t) - \Delta u(t-s)\|_2^2 ds \\
&\leq C_{\alpha_0}(t)\left[H^{-1}\left(\frac{1}{C_{\alpha_0}(t)}\int_0^t (-g'(s)) g^{1-\alpha_0}(s)\|\Delta u(t) - \Delta u(t-s)\|_2^2 ds\right)\right]^{\alpha_0}.
\end{aligned}$$

Da Observação 3.3 item (i), a função H^{-1} é crescente. Então,

$$\begin{aligned}
(g\Box\Delta u)(t) &\leq C_{\alpha_0}(t)\left[H^{-1}\left(\frac{1}{C_{\alpha_0}(t)}\int_0^t (-g'(s)) g^{1-\alpha_0}(s)\|\Delta u(t) - \Delta u(t-s)\|_2^2 ds\right)\right]^{\alpha_0} \\
&\leq C_{2,\alpha_0}\left[H^{-1}\left(\frac{g^{1-\alpha_0}(0)}{C_{1,\alpha_0}}\int_0^t (-g'(s))\|\Delta u(t) - \Delta u(t-s)\|_2^2 ds\right)\right]^{\alpha_0} \\
&= C_{2,\alpha_0}\left[H^{-1}\left(\frac{g^{1-\alpha_0}(0)}{C_{1,\alpha_0}}((-g')\Box\Delta u)(t)\right)\right]^{\alpha_0} \\
&= C_{2,\alpha_0}\left[H^{-1}\left(\frac{2g^{1-\alpha_0}(0)}{C_{1,\alpha_0}} D(t)\right)\right]^{\alpha_0}.
\end{aligned}$$

Pondo

$$C_1 = \frac{C_{1,\alpha_0}}{2g^{1-\alpha_0}(0)} > 0, \qquad C_2 = C_{2,\alpha_0}^{-\frac{1}{\alpha_0}} > 0,$$

definimos a função $H_{\alpha_0} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ por $H_{\alpha_0}(s) = C_1 H(C_2 s^{1/\alpha_0})$. Note que H_{α_0} é da forma (3.181). Assim, da Observação 3.3, item (ii), a função H_{α_0} é crescente, convexa e de classe C^1 em $[0,\infty)$ com $H_{\alpha_0}(0) = 0$. Do item (i) da Observação 3.3, vem que, H_{α_0} possui inversa crescente

$$H_{\alpha_0}^{-1}(s) = \frac{1}{C_2^{\alpha_0}}\left[H^{-1}\left(\frac{1}{C_1}s\right)\right]^{\alpha_0}.$$

Consequentemente,

$$(g\Box\Delta u)(t) \leq H_{\alpha_0}^{-1}(D(t)), \quad \forall\ t > 0. \tag{3.199}$$

Integrando (3.199) sobre $(nT,(n+1)T)$, temos

$$\int_{nT}^{(n+1)T}(g\Box\Delta u)(t)dt \leq \int_{nT}^{(n+1)T} H_{\alpha_0}^{-1}(D(t))dt. \tag{3.200}$$

Como H_{α_0} é convexa e crescente, então, usando novamente a Desigualdade de Jensen, agora com

$$G=-H_{\alpha_0}^{-1}, \quad h_1=D, \quad h_2\equiv 1,$$

obtemos

$$\int_{nT}^{(n+1)T} H_{\alpha_0}^{-1}(D(t))dt \leq TH_{\alpha_0}^{-1}\left(\frac{1}{T}\int_{nT}^{(n+1)T} D(t)dt\right). \tag{3.201}$$

Logo, de (3.200) e (3.201), segue que

$$\int_{nT}^{(n+1)T}(g\Box\Delta u)(t)dt \leq TH_{\alpha_0}^{-1}\left(\frac{1}{T}\int_{nT}^{(n+1)T} D(t)dt\right). \tag{3.202}$$

Definindo $\widehat{H}_{\alpha_0}:[0,\infty)\to[0,\infty)$ por

$$\widehat{H}_{\alpha_0}(s)=TH_{\alpha_0}\left(\frac{1}{T}s\right)=TC_1H\left(C_2T^{-1/\alpha_0}s^{1/\alpha_0}\right),$$

temos que $\widehat{H}_{\alpha_0}$ é da forma (3.181) e, consequentemente, da Observação 3.3, $\widehat{H}_{\alpha_0}$ é crescente, convexa e de classe C^1 em $[0,\infty)$ com $\widehat{H}_{\alpha_0}(0)=0$ e possui inversa crescente

$$\widehat{H}_{\alpha_0}^{-1}(s)=TH_{\alpha_0}^{-1}\left(\frac{1}{T}s\right)=\frac{T}{C_2^{\alpha_0}}\left[H^{-1}\left(\frac{1}{TC_1}s\right)\right]^{\alpha_0}. \tag{3.203}$$

Portanto, de (3.202) e (3.203), vem que

$$\int_{nT}^{(n+1)T}(g\Box\Delta u)(t)dt \leq \widehat{H}_{\alpha_0}^{-1}\left(\int_{nT}^{(n+1)T} D(t)dt\right), \tag{3.204}$$

como queríamos.

<u>*Conclusão*</u>: De (3.198) e (3.204), temos que

$$\begin{aligned} E((n+1)T) &\leq C_R\widehat{H}_{\alpha_0}^{-1}\left(\int_{nT}^{(n+1)T} D(t)dt\right)+C\int_{nT}^{(n+1)T} D(t)dt \\ &\leq C_R(\widehat{H}_{\alpha_0}^{-1}+Id)\left(\int_{nT}^{(n+1)T} D(t)dt\right), \end{aligned} \tag{3.205}$$

para todo $T>T_1$ com $C_R>0$ independente de n. Considere a função $\tilde{H}_{\alpha_0}:[0,\infty)\to[0,\infty)$ dada por

$$\tilde{H}_{\alpha_0}(s)=C_R(\widehat{H}_{\alpha_0}^{-1}+Id)(s)=\left[c_1H^{-1}(c_2s)\right]^{\alpha_0}+c_3s,$$

onde

$$c_1 = \frac{(C_R T)^{1/\alpha_0}}{C_2} > 0, \quad c_2 = \frac{1}{TC_1} > 0, \quad c_3 = C_R > 0.$$

Note que $\tilde{H}_{\alpha_0}$ é crescente e positiva, pois a soma de duas funções crescentes e positivas é ainda uma função crescente e positiva. Pela Observação 3.3, item (i), a função

$$\tilde{H}_{\alpha_0}^{-1}(s) = (\widehat{H}_{\alpha_0}^{-1} + Id)^{-1}\left(\frac{1}{C_R}s\right)$$

é crescente. Mais ainda , $\tilde{H}_{\alpha_0}^{-1}$ é positiva e de (3.205), temos

$$E((n+1)T) \leq \tilde{H}_{\alpha_0}\left(\int_{nT}^{(n+1)T} D(t)dt\right), \quad \forall\ T > T_1. \tag{3.206}$$

Logo, de (3.184) e (3.206) vem que

$$E((n+1)T) + \tilde{H}_{\alpha_0}^{-1}(E((n+1)T)) \leq E(nT), \quad \forall\ T > T_1. \tag{3.207}$$

Agora, vamos mostrar que $\tilde{H}_{\alpha_0}^{-1}(0) = 0$. De fato, suponhamos que $\tilde{H}_{\alpha_0}^{-1}(0) > 0$. Como $\tilde{H}_{\alpha_0}$ é crescente, temos $0 > \tilde{H}_{\alpha_0}(0)$, o que contraria o fato de $\tilde{H}_{\alpha_0}$ ser positiva. Assim, fixando $T > T_1$ e pondo

$$s_n = E(nT), \qquad S(0) = E(0), \qquad p = \tilde{H}_{\alpha_0}^{-1},$$

obtemos do Lema 2.114 que

$$E(nT) \leq S(n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

onde $S(t)$ é solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0, \qquad S(0) = E(0),$$

onde $q(s) = s - (Id + \tilde{H}_{\alpha_0}^{-1})^{-1}(s)$. Além disso, $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$. Para todo $t > T > T_1$, existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $0 < r < T_1$ tais que $t = n_0 T_1 + r$. Portanto, como S é decrescente (ver [18]), concluímos que

$$E(t) = E(n_0T_1 + r) \leq E(n_0T_1) \leq S(n_0) = S\left(\frac{t-r}{T_1}\right) \leq S\left(\frac{t}{T_1} - 1\right), \quad \forall\ t > T_1,$$

e a prova do Teorema 3.7 está completa. $\square$

Observação. As funções $H(s) = s$ e $H(s) = |s|^p,\ p > 1$, satisfazem as hipóteses requeridas em (**H.7**). Além disso, de (3.178) pode-se obter explicitamente que g possui decaimento exponencial e polinomial, respectivamente. No entanto, devido a construção da função q na demonstração do Teorema 3.7 depender de um parâmetro $\alpha_0 < 1$, então parece complicado computar uma taxa explícita de decaimento do funcional de energia $E(t)$. Em outras palavras, a taxa de decaimento de energia depende da solução S de uma EDO não linear, que por sua vez depende da expressão para a função q dada em termos de $\tilde{H}_{\alpha_0}$, com fator $\alpha_0 < 1$. De acordo com Lasiecka [17, 19] isto gera um decaimento sub-ótimo para o funcional energia. Porém, considerando hipóteses adicionais sobre g e H (ver [19, **Assumption (B)**]), é possível obter a taxa ótima de decaimento para $E(t)$ no sentido de recuperar o mesmo decaimento assumido para o núcleo da memória g. Isto se deve ao fato de tais hipóteses adicionais permitirem obter o mesmo resultado do Teorema 3.7 com a construção de uma função $\tilde{H}_{\alpha_0}$ no caso limite $\alpha_0 = 1$, ver [19, Teorema 14.2].

4 UM MODELO DE VIGAS VISCOELÁSTICAS EXTENSÍVEIS COM HISTÓRIA

Sejam $N \in \mathbb{N}$ e Ω um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave $\Gamma = \partial\Omega$. Neste capítulo, estudaremos a boa colocação e a estabilidade assintótica para o seguinte problema de vigas extensíveis viscoelásticas

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^\infty g(s)\Delta^2 u(t-s)ds - M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u + f(u) = 0 \text{ em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \quad (4.1)$$

com condição de fronteira

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times \mathbb{R}, \quad (4.2)$$

e condições iniciais

$$u(x,t) = u_0(x,t), \quad u_t(x,0) = u_1(x) := \partial_t u_0|_{t=0}, \quad (x,t) \in \Omega \times (-\infty, 0], \quad (4.3)$$

onde ν é o vetor normal unitário exterior e $u_0 : \Omega \times (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ é conhecida como *história* de u, a qual será conhecida. As funções g, M e f serão dadas com mesmas hipóteses como no Capítulo 3.

O sistema (4.1)-(4.3) foi introduzido por Giorgi et al. [12] no caso unidimensional para uma versão abstrata mais geral e o resultado de existência foi assumido (sem prova), ver [12, Observação 2.1]. Neste trabalho, com objetivo de mostrar a boa colocação de (4.1)-(4.3) via método de semigrupos lineares, vamos proceder como em Grasselli e Pata [13] e obter inicialmente um sistema autônomo equivalente a (4.1)-(4.3).

4.1 O Sistema Equivalente

Definamos uma nova variável $\eta = \eta^t(x,s)$ como

$$\eta^t(x,s) := u(x,t) - u(x,t-s), \quad (x,t,s) \in \Omega \times [0,\infty) \times \mathbb{R}^+. \quad (4.4)$$

Por comodidade, denotaremos η apenas por $\eta^t(s)$. Derivando formalmente, note que

$$\eta^t_t(s) = u_t(t) - u_t(t-s) \quad \text{e} \quad \eta^t_s(s) = u_t(t-s).$$

Então, η satisfaz a equação

$$\eta^t_t(s) + \eta^t_s(s) = u_t(t), \quad t \in [0,\infty), \ s \in \mathbb{R}^+. \quad (4.5)$$

Logo, se u é uma função satisfazendo as condições (4.1)-(4.3), então concluímos que o par (u, η), η definido em (4.4), satisfaz formalmente o sistema

$$\begin{aligned} & u_{tt} + \omega\Delta^2 u + \int_0^\infty g(s)\Delta^2\eta(s)ds - M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u + f(u) = 0 \text{ em } \Omega\times\mathbb{R}^+, \\ & \eta_t + \eta_s = u_t \text{ em } \Omega\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+, \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde somamos e subtraímos termo $\left(\int_0^\infty g(s)ds\right)\Delta^2 u(t)$ em (4.1) e denotamos

$$\omega := 1 - \int_0^\infty g(s)ds.$$

As condições iniciais para o sistema (4.6) ficam sob a forma

$$\begin{aligned} u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x\in\Omega, \\ \eta^0(x,s) = u_0(x) - u_0(x,-s) := \eta_0(x,s), \quad (x,s)\in\Omega\times\mathbb{R}^+, \end{aligned} \tag{4.7}$$

e as condições de fronteira para o sistema (4.6) são

$$u = \frac{\partial u}{\partial\nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma\times[0,\infty), \quad \eta = \frac{\partial\eta}{\partial\nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma\times[0,\infty)\times\mathbb{R}^+. \tag{4.8}$$

Mais ainda, por (4.4), assumimos que

$$\eta^t(0) := \lim_{s\to 0^+}\eta^t(s) = 0, \quad \forall\ t\geq 0. \tag{4.9}$$

No que segue, vamos mostrar que se o par (u, η) satisfaz o sistema (4.6)-(4.9), então a função u é solução do problema (4.1)-(4.3). Para isto, necessitamos de uma análise mais refinada da equação (4.5).

4.1.1 A Equação Complementar

Considere o espaço de Hilbert com peso $\mathcal{M}_2 := L^2_g(0,\infty; H^2_0(\Omega))$ (ver (2.25) com $X = H^2_0(\Omega)$) munido do produto interno e norma

$$(\zeta,\eta)_{\mathcal{M}_2} = \int_0^\infty g(s)(\Delta\zeta(s),\Delta\eta(s))\,ds \quad \text{e} \quad \|\zeta\|_{\mathcal{M}_2} = \left(\int_0^\infty g(s)\|\Delta\zeta(s)\|_2^2\,ds\right)^{1/2},$$

onde assumimos que g satisfaz a seguinte hipótese:

(H.1) $g\in C^1(\mathbb{R}^+)\cap L^1(\mathbb{R}^+)$ é uma função não negativa e não crescente.

Dados $T > 0$ e $w \in L^1(0,T; H^2_0(\Omega))$, vamos estudar a seguinte equação diferencial

$$\eta^t_t(s) + \eta^t_s(s) = w(t) \text{ em } (0,T)\times\mathbb{R}^+, \tag{4.10}$$

com condição inicial

$$\eta^0 = \eta_0 \in \mathcal{M}_2 \tag{4.11}$$

e com condição de fronteira

$$\eta^t(0) = 0, \quad \forall\ t \in [0,T]. \tag{4.12}$$

No que segue, vamos mostrar a existência de uma função $\eta \in C([0,T],\mathcal{M}_2)$ que satisfaz (4.10)-(4.12). Para tanto, vamos reescrever (4.10) como

$$\frac{d}{dt}\eta^t(s) = -\eta^t_s(s) + w(t). \tag{4.13}$$

Além disso, definindo o operador $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2$ por

$$\mathcal{L}\eta = -\eta_s, \tag{4.14}$$

com

$$D(\mathcal{L}) = \{\eta \in \mathcal{M}_2 \mid \eta_s \in \mathcal{M}_2,\ \eta(0) = 0\},$$

então podemos reescrever a equação (4.13) com condições inicial e de fronteira (4.11)-(4.12) como o problema de Cauchy abstrato

$$\frac{d}{dt}\eta^t = \mathcal{L}\eta^t + w(t),\ \ t > 0, \quad \eta^0 = \eta_0. \tag{4.15}$$

Proposição 4.1. *Suponhamos que a hipótese* (**H.1**) *seja satisfeita. Então o operador $\mathcal{L}$ definido em* (4.14) *é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ em $\mathcal{M}_2$.*

Demonstração. Em virtude da Proposição 2.108 e do Teorema 2.109 basta provarmos que:

(a) $\mathcal{L}$ é dissipativo em $\mathcal{M}_2$,

(b) $Id - \mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2$ é um operador sobrejetivo.

Prova de (a). Seja $\eta \in D(\mathcal{L})$. Temos que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}\eta,\eta)_{\mathcal{M}_2} &= -\int_0^\infty g(s)(\Delta\eta_s(s),\Delta\eta(s))ds \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\frac{d}{ds}\|\Delta\eta(s)\|_2^2 ds \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{z\to\infty}\lim_{y\to 0}\int_y^z g(s)\frac{d}{ds}\|\Delta\eta(s)\|_2^2 ds.
\end{aligned}$$

Integrando por partes obtemos que

$$(\mathcal{L}\eta,\eta)_{\mathcal{M}_2} = \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\lim_{z\to\infty}\left(g(y)\|\Delta\eta(y)\|_2^2 - g(z)\|\Delta\eta(z)\|_2^2 + \int_y^z g'(s)\|\Delta\eta(s)\|_2^2 ds\right). \tag{4.16}$$

Como $\eta \in \mathcal{M}_2$, segue que $g\|\Delta\eta\|_2^2 \in L^1(\mathbb{R}^+)$ e, consequentemente,

$$\lim_{z\to\infty} g(z)\|\Delta\eta(z)\|_2^2 = 0. \tag{4.17}$$

Além disso, da hipótese (**H.1**) e da desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
0 \le g(y)\|\Delta\eta(y)\|_2^2 &= g(y)\left\|\int_0^y \Delta\eta_s(s)ds\right\|_2^2 \\
&\le g(y)\left(\int_0^y \|\Delta\eta_s(s)\|_2 ds\right)^2 \\
&\le \left(\int_0^y [g(s)]^{1/2}\|\Delta\eta_s(s)\|_2 ds\right)^2 \\
&\le y\int_0^y g(s)\|\Delta\eta_s(s)\|_2^2 ds \\
&\le y\|\eta_s\|_{\mathcal{M}_2}^2, \quad \forall\ y \in \mathbb{R}^+.
\end{aligned}$$

Então,

$$\lim_{y\to 0} g(y)\|\Delta\eta(y)\|_2^2 = 0. \tag{4.18}$$

Logo, de (4.16)-(4.18) e da hipótese (**H.1**) segue que

$$(\mathcal{L}\eta,\eta)_{\mathcal{M}_2} = \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\lim_{z\to\infty}\int_y^z g'(s)\|\Delta\eta(s)\|_2^2 ds = \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\Delta\eta(s)\|_2^2 ds \le 0. \tag{4.19}$$

Portanto, $\mathcal{L}$ é dissipativo.

Prova de (b). Seja $\zeta \in \mathcal{M}_2$ dado. Vamos mostrar que existe $\eta \in D(\mathcal{L})$ tal que

$$(Id - \mathcal{L})\eta = \zeta.$$

Em outras palavras, vamos provar que existe $\eta \in D(\mathcal{L})$ tal que

$$\eta + \eta_s = \zeta. \tag{4.20}$$

De fato, seja $s > 0$ dado. Multiplicando a equação (4.20) por e^s e integrando sobre $[0, s]$, chegamos a

$$\eta(s) = \int_0^s e^{-(s-y)}\zeta(y)dy + \vartheta e^{-s}, \quad 0 \le y \le s, \tag{4.21}$$

onde $\vartheta := \eta(0) \in H_0^2(\Omega)$. A expressão para η em (4.21) é uma possível candidata a ser solução da equação (4.20) em $D(\mathcal{L})$. Para isto, devemos impor que $\eta(0) = 0$. Logo, de (4.21) temos

$$0 = \eta(0) = \vartheta. \tag{4.22}$$

Por (4.21) e (4.22), obtemos

$$\eta(s) = \int_0^s e^{-(s-y)}\zeta(y)dy. \tag{4.23}$$

Agora, afirmamos que η definida em (4.23) pertence a $D(\mathcal{L})$ e satisfaz a equação (4.20). De fato, note que $\eta(0) = 0$ e da Proposição 2.95 segue que $\eta \in \mathcal{M}_2$. Além disso,

$$\eta_s(s) = \frac{d}{ds}\left(e^{-s}\int_0^s e^y\zeta(y)dy\right) = -e^{-s}\int_0^s e^y\zeta(y)dy + e^{-s}e^s\zeta(s) = -\eta(s) + \zeta(s),$$

para todo $s \in \mathbb{R}^+$, ou seja, vale (4.20). Consequentemente, $\eta_s = -\eta + \zeta \in \mathcal{M}_2$, o que prova que η dada em (4.23) pertence a $D(\mathcal{L})$ e satisfaz (4.20). $\square$

No que segue, vamos explicitar o C_0-semigrupo de contrações $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ gerado pelo operador $\mathcal{L}$, a fim de obter uma solução explícita para (4.15) e, consequentemente, para (4.10)-(4.12).

4.1.2 Identificação do Semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$

Seja $t \geq 0$. Note que, para todo $\eta \in \mathcal{M}_2$,

$$\begin{aligned}
\int_t^\infty g(s)\|\Delta\eta(s-t)\|_2^2 ds &\leq \int_t^\infty g(s-t)\|\Delta\eta(s-t)\|_2^2 ds \\
&= \int_0^\infty g(s)\|\Delta\eta(s)\|_2^2 ds \\
&= \|\eta\|_{\mathcal{M}_2}^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Ou seja, a aplicação

$$\begin{array}{rccccl}
S_0(t): & \mathcal{M}_2 & \to & \mathcal{M}_2 & & \\
 & \eta & \mapsto & S_0(t)\eta: & [0,\infty) & \to \ H_0^2(\Omega) \\
 & & & & s & \mapsto \ (S_0(t)\eta)(s)
\end{array}$$

onde

$$(S_0(t)\eta)(s) = \begin{cases} \eta(s-t), & s \geq t, \\ 0, & s < t. \end{cases} \tag{4.24}$$

está bem definida para todo $t \geq 0$ com

$$\|S_0(t)\eta\|_{\mathcal{M}_2} \leq \|\eta\|_{\mathcal{M}_2}, \quad \forall\ \eta \in \mathcal{M}_2. \tag{4.25}$$

Proposição 4.2. *Suponhamos que a hipótese* (**H.1**) *seja satisfeita. Então* $S(t) \equiv S_0(t)$ *para todo* $t \geq 0$.

Demonstração. Em virtude do Teorema 2.110, é suficiente mostrar que:

(a) a família $\{S_0(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo de contrações em $\mathcal{M}_2$;

(b) denotando por $\mathcal{L}_0$ o gerador infinitesimal de $\{S_0(t)\}_{t\geq 0}$, então $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_0|_{D(\mathcal{L})}$.

Prova de (a). Para todo $\eta, \zeta \in \mathcal{M}_2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
[S_0(t)(\eta + \alpha\zeta)](s) &= \begin{cases} (\eta + \alpha\zeta)(s-t), & s \geq t \\ 0, & s < t \end{cases} \\
&= \begin{cases} \eta(s-t), & s \geq t \\ 0, & s < t \end{cases} + \alpha \begin{cases} \zeta(s-t), & s \geq t \\ 0, & s < t \end{cases} \\
&= S_0(t)\eta(s) + \alpha S_0(t)\zeta(s) = [S_0(t)\eta + \alpha S_0(t)\zeta](s), \quad \forall\ s \in \mathbb{R}^+.
\end{aligned}$$

Isto implica que

$$S_0(t)(\eta + \alpha\zeta) = S_0(t)\eta + \alpha S_0(t)\zeta, \quad t \geq 0,$$

e assim, $\{S_0(t)\}_{t\geq 0}$ é uma família de operadores lineares definidos em $\mathcal{M}_2$. Agora, seja $\eta \in \mathcal{M}_2$. No que segue vamos mostrar que $\{S_0(t)\}_{t\geq 0}$ satisfaz as propriedades de um C_0-semigrupo de contrações. De fato:

- Note que

  $$(S_0(0)\eta)(s) = \begin{cases} \eta(s), & s \geq 0 \\ 0, & s < 0 \end{cases} = \eta(s), \quad \forall\ s \geq 0.$$

  Logo, $S_0(0)\eta = \eta$. Da arbitrariedade de $\eta \in \mathcal{M}_2$, obtemos que

  $$S_0(0) \equiv Id. \tag{4.26}$$

- Para $t_1 \geq 0$, seja $\eta_1 := S_0(t_1)\eta$. Então, aplicando $S_0(t_2)$, $t_2 \geq 0$, em η_1 temos

  $$(S_0(t_2)\eta_1)(s) = \begin{cases} \eta_1(s-t_2), & s \geq t_2 \\ 0, & s < t_2 \end{cases}. \tag{4.27}$$

  Pondo $r = s - t_2$, obtemos de (4.27) que

  $$(S_0(t_2)\eta_1)(s) = \begin{cases} \eta_1(r), & r \geq 0 \\ 0, & r < 0 \end{cases} = \eta_1(r) = \begin{cases} \eta(r-t_1), & r \geq t_1 \\ 0, & r < t_1 \end{cases}. \tag{4.28}$$

  De (4.28), segue que

  $$\begin{aligned}
  (S_0(t_2)S_0(t_1)\eta)(s) &= (S_0(t_2)\eta_1)(s) \\
  &= \begin{cases} \eta(r-t_1), & r \geq t_1 \\ 0, & r < t_1 \end{cases} \\
  &= \begin{cases} \eta(s-(t_2+t_1)), & s \geq t_2 + t_1 \\ 0, & s < t_2 + t_1 \end{cases} \\
  &= (S_0(t_2+t_1)\eta)(s), \quad \forall\ s \geq 0.
  \end{aligned}$$

Assim, $S_0(t_2)S_0(t_1)\eta = S_0(t_2+t_1)\eta$. Como $\eta \in \mathcal{M}_2$ é arbitrário, concluimos que

$$S_0(t_2)S_0(t_1) = S_0(t_2+t_1), \quad \forall\, t_1, t_2 \geq 0. \tag{4.29}$$

- De (4.25), $S_0(t)$ é um operador linear limitado com

$$\|S_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_2,\mathcal{M}_2)} \leq 1, \quad \forall\, t \geq 0. \tag{4.30}$$

- Seja $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais positivos tal que $t_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Assim,

$$\begin{aligned}\|S_0(t_n)\eta - \eta\|^2_{\mathcal{M}_2} &= \int_0^\infty g(s)\|\Delta[(S_0(t_n)\eta)(s) - \eta(s)]\|_2^2 ds \qquad (4.31)\\ &= \int_0^{t_n} g(s)\|\Delta\eta(s)\|_2^2 ds + \int_{t_n}^\infty g(s)\|\Delta[\eta(s-t_n) - \eta(s)]\|_2^2 ds.\end{aligned}$$

Como $\overline{D(\mathcal{L})} = \mathcal{M}_2$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\zeta \in D(\mathcal{L})$ tal que

$$\|\eta - \zeta\|^2_{\mathcal{M}_2} < \frac{\varepsilon}{9}. \tag{4.32}$$

Agora, note que

$$\int_{t_n}^\infty g(s)\|\Delta[\eta(s-t_n) - \eta(s)]\|_2^2 ds \leq 3(I_n + J_n + K_n), \tag{4.33}$$

onde

$$\begin{aligned} I_n &:= \int_{t_n}^\infty g(s)\|\Delta[\eta(s-t_n) - \zeta(s-t_n)]\|_2^2 ds,\\ J_n &:= \int_{t_n}^\infty g(s)\|\Delta[\zeta(s-t_n) - \zeta(s)]\|_2^2 ds,\\ K_n &:= \int_{t_n}^\infty g(s)\|\Delta[\zeta(s) - \eta(s)]\|_2^2 ds.\end{aligned}$$

Da hipótese (**H.1**) e de (4.32), segue que

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{t_n}^\infty g(s)\|\Delta[\eta(s-t_n) - \zeta(s-t_n)]\|_2^2 ds\\ &= \int_0^\infty g(s+t_n)\|\Delta[\eta(s) - \zeta(s)]\|_2^2 ds\\ &\leq \int_0^\infty g(s)\|\Delta[\eta(s) - \zeta(s)]\|_2^2 ds\\ &= \|\zeta - \eta\|^2_{\mathcal{M}_2} < \frac{\varepsilon}{9}\end{aligned}$$

e

$$K_n = \int_{t_n}^{\infty} g(s)\|\Delta[\zeta(s)-\eta(s)]\|_2^2 ds \leq \int_0^{\infty} g(s)\|\Delta[\zeta(s)-\eta(s)]\|_2^2 ds = \|\zeta-\eta\|_{\mathcal{M}_2}^2 < \frac{\varepsilon}{9}.$$

Por outro lado, temos

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\eta(\cdot - t) - \eta(\cdot)}{t} = \mathcal{L}\eta \quad \text{em} \quad \mathcal{M}_2. \tag{4.34}$$

De (4.34) e como $\zeta \in D(\mathcal{L})$, então existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\frac{J_n}{t_n^2} \leq \int_0^{\infty} g(s) \left\| \frac{\Delta[\zeta(s-t_n) - \zeta(s)]}{t_n} \right\|_2^2 ds \leq K. \tag{4.35}$$

Como $t_n^2 \to 0$ quando $n \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então

$$t_n^2 < \frac{\varepsilon}{9K}. \tag{4.36}$$

Logo, para $n > n_0$, segue de (4.35) e (4.36) que

$$J_n = \frac{J_n}{t_n^2} t_n^2 < K\frac{\varepsilon}{9K} = \frac{\varepsilon}{9}.$$

De (4.33) obtemos que se $n > n_0$, então

$$\int_{t_n}^{\infty} g(s)\|\Delta[\eta(s-t_n) - \eta(s)]\|_2^2 ds \leq 3(I_n + J_n + K_n) < 3\left(\frac{\varepsilon}{9} + \frac{\varepsilon}{9} + \frac{\varepsilon}{9}\right) = \varepsilon.$$

Retornando a (4.31), deduzimos

$$\lim_{n\to\infty} \|S_0(t_n)\eta - \eta\|_{\mathcal{M}_2}^2 = 0,$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty} S_0(t_n)\eta = \eta, \quad \forall\ \eta \in \mathcal{M}_2. \tag{4.37}$$

Portanto, de (4.26), (4.29), (4.30) e (4.37), concluímos que $\{S_0(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo de contrações.

Prova de (b). Seja $\mathcal{L}_0$ o gerador infinitesimal do semigrupo $\{S_0(t)\}_{t\geq 0}$. Para provarmos que $\mathcal{L}_0|_{D(\mathcal{L})} \equiv \mathcal{L}$, basta mostrarmos que $D(\mathcal{L}) \subset D(\mathcal{L}_0)$ e que $\mathcal{L}_0\eta = \mathcal{L}\eta$, para todo $\eta \in D(\mathcal{L})$. De fato, consideremos $\eta \in D(\mathcal{L})$. Assim,

$$\frac{(S_0(t)\eta)(s) - \eta(s)}{t} = \begin{cases} \dfrac{\eta(s-t) - \eta(s)}{t}, & s \geq t, \\ -\dfrac{\eta(s)}{t}, & s < t. \end{cases}$$

Agora, note que

$$
\begin{aligned}
&\left\| \frac{S_0(t)\eta - \eta}{t} - \mathcal{L}\eta \right\|_{\mathcal{M}_2}^2 \\
&\quad = \int_0^\infty g(s) \left\| \frac{\Delta[(S_0(t)\eta)(s) - \eta(s)]}{t} - \Delta(\mathcal{L}\eta)(s) \right\|_2^2 ds \\
&\quad = \int_t^\infty g(s) \left\| \frac{\Delta[\eta(s-t) - \eta(s)]}{t} - \Delta(\mathcal{L}\eta)(s) \right\|_2^2 ds + \int_0^t g(s) \left\| -\frac{\Delta\eta(s)}{t} + \Delta\eta_s(s) \right\|_2^2 ds \\
&\quad \leq \left\| \frac{\eta(\cdot - t) - \eta(\cdot)}{t} - \mathcal{L}\eta \right\|_{\mathcal{M}_2}^2 + 2\int_0^t g(s) \left\| \frac{\Delta\eta(s)}{t} \right\|_2^2 ds + 2\int_0^t g(s) \left\| \Delta\eta_s(s) \right\|_2^2 ds.
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

Afirmamos que

$$
\lim_{t\to 0^+} \int_0^t g(s) \left\| \frac{\Delta\eta(s)}{t} \right\|_2^2 ds = 0. \tag{4.39}
$$

Com efeito, usando que $\eta \in D(\mathcal{L})$, a Desigualdade de Hölder, mudando a região de integração (com valor absoluto do jacobiano igual a 1) e da hipótese (**H.1**), temos

$$
\begin{aligned}
0 \leq \int_0^t g(s) \left\| \frac{\Delta\eta(s)}{t} \right\|_2^2 ds &\leq \frac{1}{t^2}\int_0^t g(s) \left(\int_0^s \|\Delta\eta_s(y)\|_2 \, dy \right)^2 ds \\
&\leq \frac{1}{t^2}\int_0^t s g(s) \int_0^s \|\Delta\eta_s(y)\|_2^2 \, dyds \\
&\leq \frac{1}{t^2}\int_0^t \|\Delta\eta_s(y)\|_2^2 \int_y^t s g(s) ds dy \\
&\leq \frac{1}{t^2}\int_0^t g(y)\|\Delta\eta_s(y)\|_2^2 \int_y^t s ds dy \\
&= \frac{1}{t^2}\int_0^t \left(\frac{t^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right) g(y)\|\Delta\eta_s(y)\|_2^2 dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t g(y)\|\Delta\eta_s(y)\|_2^2 dy - \frac{y^2}{2t^2}\int_0^t g(y)\|\Delta\eta_s(y)\|_2^2 dy \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^t g(y)\|\Delta\eta_s(y)\|_2^2 dy.
\end{aligned}
$$

Fazendo t tender a 0 pela direita obtemos o desejado. Logo, de (4.34), (4.38) e (4.39), concluímos que

$$
\lim_{t\to 0^+} \left\| \frac{S_0(t)\eta - \eta}{t} - \mathcal{L}\eta \right\|_{\mathcal{M}_2}^2 = 0.
$$

Ou seja,

$$
\mathcal{L}_0\eta = \lim_{t\to 0^+} \frac{S_0(t)\eta - \eta}{t} = \mathcal{L}\eta \quad \text{em} \quad \mathcal{M}_2.
$$

Isto mostra que $\eta \in D(\mathcal{L}_0)$. Da arbitrariedade de $\eta \in \mathcal{M}_2$, temos que $D(\mathcal{L}) \subset D(\mathcal{L}_0)$ e que

$$
\mathcal{L}_0\eta = \mathcal{L}\eta, \quad \forall\ \eta \in D(\mathcal{L}),
$$

o que completa a prova do item (b) e a demonstração da Proposição 4.2. $\square$

4.1.3 Solução Explícita da Equação Complementar

Como $w \in L^1(0,T;H_0^2(\Omega))$, segue da Proposição 4.1 e do Lema 2.115 que e o PVI (4.15) (e portanto o problema (4.10)-(4.12)) possui uma única solução generalizada η dada por

$$\eta^t = S(t)\eta_0 + \int_0^t S(t-\tau)w_\tau d\tau, \tag{4.40}$$

onde $w_\tau(s) = w(\tau)$, para todo $s \geq 0$. Mais ainda, se $w_t \in L^1(0,T;H_0^2(\Omega))$ e $\eta_0 \in D(\mathcal{L})$, então pelo Lema 2.116, a função η é uma solução clássica do problema (4.15) com $\eta \in C([0,T],\mathcal{M}_2)$. Além disso, usando a Proposição 4.2 e de (4.24), temos

$$(S(t)\eta_0)(s) = (S_0(t)\eta_0)(s) = \begin{cases} \eta_0(s-t), & s \geq t, \\ 0, & s < t. \end{cases} \tag{4.41}$$

Vamos analisar o termo integral de (4.40) com S dado em (4.41).

Caso 1: $s \geq t$. Neste caso $s \geq t \geq t - \tau$. Logo, de (4.24), obtemos

$$\int_0^t (S(t-\tau)w_\tau)(s)d\tau = \int_0^t w_\tau(s-t+\tau)d\tau = \int_0^t w(\tau)d\tau. \tag{4.42}$$

Caso 2: $s < t$. Como $t - s > 0$, podemos escrever

$$\int_0^t (S(t-\tau)w_\tau)(s)d\tau = \int_0^{t-s} (S(t-\tau)w_\tau)(s)d\tau + \int_{t-s}^t (S(t-\tau)w_\tau)(s)d\tau.$$

Note que, se $0 \leq \tau < t - s$, então $s < t - \tau$. Usando novamente (4.24), obtemos

$$\int_0^{t-s} (S(t-\tau)w_\tau)(s)d\tau = 0.$$

Por outro lado, se $t - s \leq \tau < t$, então $0 < t - \tau \leq s$. De (4.24), segue que

$$\int_{t-s}^t (S(t-\tau)w_\tau)(s)d\tau = \int_{t-s}^t w_\tau(s-t+\tau)d\tau = \int_{t-s}^t w(\tau)d\tau.$$

Logo,

$$\int_0^t (S(t-\tau)w_\tau)(s)d\tau = \int_{t-s}^t w(\tau)d\tau. \tag{4.43}$$

Assim, de (4.42) e (4.43), obtemos

$$\int_0^t (S(t-\tau)w_\tau)(s)d\tau = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t w(\tau)d\tau, & s \geq t, \\ \displaystyle\int_{t-s}^t w(\tau)d\tau, & s < t. \end{cases} \tag{4.44}$$

Finalmente, de (4.40), (4.41) e (4.44), concluímos

$$\eta^t(s) = \begin{cases} \eta_0(s-t) + \displaystyle\int_0^t w(\tau)d\tau, & s \geq t \\ \displaystyle\int_{t-s}^t w(\tau)d\tau, & s < t. \end{cases} \tag{4.45}$$

4.1.4 Retornando ao Problema (4.1)-(4.3)

O próximo resultado nos diz que, formalmente, resolver o sistema (4.6)-(4.9) é equivalente a resolver o problema original (4.1)-(4.3).

Proposição 4.3. *O problema* (4.1)-(4.3) *é equivalente ao sistema* (4.6)-(4.9). *Mais precisamente, uma função* u *satisfaz* (4.1)-(4.3) *se, e somente se, o par* (u, η) *satisfaz* (4.6)-(4.9).

Demonstração. Como já descrito no início da Seção 4.1, se u satisfaz (4.1)-(4.3), então o par (u, η) satisfaz (4.6)-(4.9), onde η é dada por (4.4). Reciprocamente, suponhamos que o par (u, η) satisfaz o sistema (4.6)-(4.9). Em particular, u_t é dada e η satisfaz a equação

$$\eta_t^t + \eta_s^t = u_t \quad \text{em} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Usando a expressão para solução η em (4.45), a condição inicial (4.7) e o Teorema 2.99, temos

$$\eta^t(s) = \begin{cases} u_0 - u_0(t-s) + u(t) - u_0, & s \geq t, \\ u(t) - u(t-s), & s < t, \end{cases} = \begin{cases} u(t) - u_0(t-s), & s \geq t, \\ u(t) - u(t-s), & s < t. \end{cases} \tag{4.46}$$

As condições (4.7)-(4.9) implicam em (4.2)-(4.3). Além disso, de (4.46) obtemos

$$\begin{aligned} \omega\Delta^2 u(t) + \int_0^\infty g(s)\Delta^2\eta^t(s)ds &= \omega\Delta^2 u(t) + (1-\omega)\Delta^2 u(t) \\ &\quad - \int_0^t g(s)\Delta^2 u(t-s)ds - \int_t^\infty g(s)\Delta^2 u_0(t-s)ds \\ &= \Delta^2 u(t) - \int_0^\infty g(s)\Delta^2 u(t-s)ds, \end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$. Substituindo esta expressão em (4.6), vê-se que u satisfaz a equação (4.1). Portanto, u satisfaz o problema (4.1)-(4.3). $\square$

Observação. Pelo Proposição 4.3 fica estabelecida uma formulação equivalente do sistema

(4.1)-(4.3) por meio do problema (4.6)-(4.9). Deste modo, faremos a seguir a análise de existência e estabilidade de solução para o problema equivalente (4.6)-(4.9).

4.2 Existência, Unicidade e Dependência Contínua

Mostraremos, via teoria de semigrupos de operadores lineares, a existência e unicidade de solução global para o sistema (4.6)-(4.9). Para isso, consideramos os seguintes espaços de Hilbert: $L^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ e $H_0^2(\Omega)$, munidos dos respectivos produtos internos e normas

$$
\begin{aligned}
(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx \quad & \text{e} \quad \|u\|_2 = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx\right)^{1/2}, \\
(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v) \quad & \text{e} \quad \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_2, \\
(u,v)_{H_0^2(\Omega)} = (\Delta u, \Delta v) \quad & \text{e} \quad \|u\|_{H_0^2(\Omega)} = \|\Delta u\|_2.
\end{aligned}
$$

Definimos também o espaço de fase

$$\mathcal{H} := H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathcal{M}_2,$$

com produto interno e norma definidos por

$$
\begin{aligned}
(U_1, U_2)_{\mathcal{H}} &= \omega(\Delta u_1, \Delta u_2) + (v_1, v_2) + \int_0^\infty g(s)(\Delta\eta_1(s), \Delta\eta_2(s))ds, \\
\|U_1\|_{\mathcal{H}}^2 &= \omega\|\Delta u_1\|_2^2 + \|v_1\|_2^2 + \int_0^\infty g(s)\|\Delta\eta_1(s)\|_2^2 ds,
\end{aligned}
$$

para $U_i = (u_i, v_i, \eta_i)^\perp \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, onde assumimos que $\omega = 1 - \int_0^\infty g(s)ds > 0$. De agora em diante, o símbolo $U^\perp$ sempre denotará a transposta do vetor U. Das imersões de Sobolev $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ existem constantes positivas μ_1, μ_2 tais que

$$\mu_1\|\nabla \cdot\|_2^2 \le \|\Delta \cdot\|_2^2, \quad \mu_2\|\cdot\|_2^2 \le \|\Delta \cdot\|_2^2.$$

Denotemos por $v = u_t$ e $U = (u, v, \eta)^\perp$. Usando as notações da Proposição 2.94 e de (4.14), podemos reescrever o sistema (4.6)-(4.9) no seguinte problema de Cauchy abstrato

$$\frac{dU}{dt} = \mathcal{A}U + F(U), \;\; t > 0, \quad U(0) = (u_0, u_1, \eta_0)^\perp := U_0, \tag{4.47}$$

onde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & Id & 0 \\ -\omega\Delta^2 & 0 & -\mathcal{I}_g \circ \Delta^2 \\ 0 & Id & \mathcal{L} \end{bmatrix}, \tag{4.48}$$

com domínio

$$D(\mathcal{A}) = \left\{(u, v, \eta)^{\perp} \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \times D(\mathcal{L}) \mid \omega\Delta^2 u + \mathcal{I}_g(\Delta^2\eta) \in L^2(\Omega)\right\},$$

e

$$F(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u - f(u) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.49}$$

Para mostrarmos a boa colocação do PVI (4.47) e, consequentemente, do sistema (4.6)-(4.9), vamos impor as seguintes hipóteses sobre as funções M e f.

(**H.2**) $M : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 com

$$\widehat{M}(s) := \int_0^s M(\tau)d\tau \geq -\frac{\omega}{2}\beta_1 s, \quad \forall\ s \geq 0. \tag{4.50}$$

onde $\beta_1 \in [0, \mu_1)$.

(**H.3**) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função localmente Lipschitz tal que $f(0) = 0$ e

$$-\frac{\omega}{2}\beta_2|s|^2 \leq \widehat{f}(s) := \int_0^s f(\tau)d\tau \leq f(s)s + \frac{\omega}{2}\beta_2|s|^2, \quad \forall\ s \in \mathbb{R}, \tag{4.51}$$

com $\beta_2 \in [0, \mu_2)$. Mais especificamente, suponhamos que f satisfaça

$$|f(s_1) - f(s_2)| \leq k_0(1 + |s_1|^{\rho/2} + |s_2|^{\rho/2})|s_1 - s_2|, \quad \forall\ s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \tag{4.52}$$

para algum $k_0 > 0$, onde $\rho > 0$ se $1 \leq N \leq 4$ e $0 < \rho < \frac{8}{N-4}$ se $N \geq 5$.

(**H.4**) As constantes β_1 e β_2 são escolhidas de forma que

$$\beta := 1 - \left(\frac{\beta_1}{\mu_1} + \frac{\beta_2}{\mu_2}\right) > 0. \tag{4.53}$$

Observação. A escolha de ρ na hipótese (**H.3**) garante que $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$ em qualquer dimensão. Assim, denotando a norma do espaço $L^{\rho+2}(\Omega)$ por $\|\cdot\|_{\rho+2}$ temos

$$\|u\|_{\rho+2} \leq \mu_\rho\|\Delta u\|_2, \quad \forall\ u \in H_0^2(\Omega), \tag{4.54}$$

para alguma constante $\mu_\rho > 0$.

Teorema 4.4. *Suponhamos que as hipóteses* (**H.1**)-(**H.4**) *sejam satisfeitas.*

(i) Se $U_0 \in \mathcal{H}$, então o problema (4.47) *possui uma única solução generalizada*

$U \in C([0,\infty),\mathcal{H})$ satisfazendo

$$U(t) = e^{t\mathcal{A}}U_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)\mathcal{A}}F(U(\tau))d\tau, \quad t \geq 0, \tag{4.55}$$

onde $e^{t\mathcal{A}}$ denota o semigrupo gerado por $\mathcal{A}$.

(ii) Se $U_0 \in D(\mathcal{A})$, então o problema (4.47) *possui uma única solução forte U na classe*

$$U \in C([0,\infty), D(\mathcal{A})) \cap C^1([0,\infty),\mathcal{H}). \tag{4.56}$$

Além disso, U é dada por (4.55).

(iii) Sejam $U_1, U_2 \in C([0,T],\mathcal{H})$ duas soluções de (4.47) *com dados iniciais $U_0^1, U_0^2 \in \mathcal{H}$, respectivamente. Então existe uma constante $\gamma > 0$, dependendo dos dados iniciais, tal que*

$$\|U_1(t) - U_2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq e^{\gamma T}\|U_0^1 - U_0^2\|_{\mathcal{H}}, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{4.57}$$

para qualquer $T > 0$.

Demonstração. A demonstração será feita em várias etapas como segue.

<u>*$\mathcal{A}$ é dissipativo*</u>: Considere $U = (u,v,\eta)^\perp \in D(\mathcal{A})$. Assim, de (4.48), do produto interno em $\mathcal{H}$ e do Teorema de Green, temos

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}U,U)_{\mathcal{H}} &= \omega(\Delta v,\Delta u) - (\omega\Delta^2 u + \mathcal{I}_g(\Delta^2\eta), v) - \int_0^\infty g(s)(\Delta\eta_s(s) - \Delta v, \Delta\eta(s))ds \\
&= (\Delta v, \omega\Delta u + \mathcal{I}_g(\Delta\eta)) - (\omega\Delta u + \mathcal{I}_g(\Delta\eta), \Delta v) + (\mathcal{L}\eta,\eta)_{\mathcal{M}_2} \\
&= (\mathcal{L}\eta,\eta)_{\mathcal{M}_2}.
\end{aligned}$$

Logo, de (4.19) concluímos que $\mathcal{A}$ é dissipativo.

<u>*$Id - \mathcal{A}$ é sobrejetivo*</u>: Dada $G^\perp = (g_1,g_2,g_3)^\perp \in \mathcal{H}$, vamos mostrar que existe uma única função $U = (u,v,\eta)^\perp \in D(\mathcal{A})$ tal que $U - \mathcal{A}U = G^\perp$, ou seja, que o sistema de equações

$$u - v = g_1, \tag{4.58}$$

$$v + \omega\Delta^2 u + \mathcal{I}_g(\Delta^2\eta) = g_2, \tag{4.59}$$

$$\eta + \eta_s - v = g_3, \tag{4.60}$$

possui uma solução $(u,v,\eta)^\perp \in D(\mathcal{A})$. Com efeito, seja $s \geq 0$ dado. Multiplicando a equação (4.60) por e^y, $0 \leq y \leq s$, e integrando de 0 até s, obtemos

$$e^s\eta(s) = \left(\int_0^s e^y dy\right)v + \int_0^s e^y g_3(y)dy = (e^s - 1)v + \int_0^s e^y g_3(y)dy,$$

ou ainda,

$$\eta(s) = (1-e^{-s})v + \int_0^s e^{-(s-y)} g_3(y)dy. \tag{4.61}$$

Além disso, da equação (4.58), segue que

$$v = u - g_1. \tag{4.62}$$

Usando (4.61) e (4.62), temos

$$\eta(s) = (1-e^{-s})(u-g_1) + \int_0^s e^{-(s-y)} g_3(y)dy. \tag{4.63}$$

Assim, substituindo (4.62) e (4.63) em (4.59), obtemos

$$u + \omega\Delta^2 u + \left(\int_0^\infty g(s)(1-e^{-s})ds\right)\Delta^2 u = g_4, \tag{4.64}$$

onde

$$g_4 := g_1 + g_2 + \mathcal{I}_g\left((1-e^{-s})\Delta^2 g_1 - \left(\int_0^s e^{-(s-y)}\Delta^2 g_3(y)dy\right)ds\right).$$

Da Proposição 2.95 e da extensão do operador Δ^2 no espaço $H_0^2(\Omega)$, concuímos que g_4 está bem definida em $H^{-2}(\Omega)$. Pondo $C_g := \omega + \int_0^\infty g(s)(1-e^{-s})ds > 0$, podemos reescrever (4.64) da forma

$$(Id + C_g\Delta^2)u = g_4. \tag{4.65}$$

Para resolvermos a equação (4.65), vamos utilizar o Teorema de Lax-Milgram (ver Teorema 2.29). De fato, consideremos a forma bilinear

$$\begin{array}{rccl} a: & H_0^2(\Omega)\times H_0^2(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ & (u_1,u_2) & \mapsto & a(u_1,u_2) = (u_1,u_2) + C_g(\Delta u_1, \Delta u_2). \end{array}$$

Note que a é uma forma bilinear limitada e coerciva. Com efeito, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|a(u_1,u_2)| \leq \|u_1\|_2\|u_2\|_2 + C_g\|\Delta u_1\|_2\|\Delta u_2\|_2 \leq (\mu_2^{-1}+C_g)\|\Delta u_1\|_2\|\Delta u_2\|_2, \quad u_1,u_2 \in H_0^2(\Omega).$$

Ou seja, a é limitada. Agora, observe que

$$a(u,u) = \|u\|_2^2 + C_g\|\Delta u\|_2^2 \geq C_g\|\Delta u\|_2^2, \quad u \in H_0^2(\Omega),$$

isto é, a é coerciva. Pelo Teorema de Lax-Milgram, existe um único $u \in H_0^2(\Omega)$ tal que $a(u,w) = \langle g_4, w\rangle$, para todo $w \in H_0^2(\Omega)$. Logo, u satisfaz a seguinte equação:

$$\left\langle u + C_g\Delta^2 u, w\right\rangle = \langle g_4, w\rangle, \quad \forall\ w \in H_0^2(\Omega).$$

Portanto, $u \in H_0^2(\Omega)$ é a única solução de (4.65) em $H^{-2}(\Omega)$. Por outro lado, da equação (4.62), obtemos que $v = u - g_1 \in H_0^2(\Omega)$. Consequentemente, da equação (4.61) e da Proposição 2.95, temos que $\eta \in \mathcal{M}_2$. Além disso, $\eta(0) = 0$ e, para todo $s \geq 0$, segue que

$$\begin{aligned} \eta(s) + \eta_s(s) &= \left[(1 - e^{-s})v + \int_0^s e^{y-s} g_3(y)dy\right] + \left[e^{-s}v - \int_0^s e^{y-s} g_3(y)dy + g_3(s)\right] \\ &= v - e^{-s}v + \int_0^s e^{y-s} g_3(y)dy + e^{-s}v - \int_0^s e^{y-s} g_3(y)dy + g_3(s) \\ &= v + g_3(s). \end{aligned}$$

Assim, η satisfaz a equação (4.60) com $\eta_s = v + g_3 - \eta \in \mathcal{M}_2$. Mais ainda, de (4.61), (4.62) e (4.64), podemos concluir que

$$\omega \Delta^2 u + \mathcal{I}_g(\Delta^2 \eta) = g_2 - v \in L^2(\Omega).$$

Com isto, concluímos que o sistema (4.58)-(4.60) possui uma única solução $(u, v, \eta)^\perp \in D(\mathcal{A})$, o que prova a sobrejetividade do operador $(Id - \mathcal{A})$.

Da Proposição 2.108 e do Teorema 2.109, o operador $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em $\mathcal{H}$. Para garantir a existência de solução local (forte ou generalizada) para o problema (4.47) resta mostrar que o operador F é localmente Lipschitz em $\mathcal{H}$ e aplicar o Teorema 2.112.

F é localmente Lipschitz: Sejam $U_1 = (u_1, v_1, \eta_1)^\perp, U_2 = (u_2, v_2, \eta_2)^\perp \in \mathcal{H}$, tais que $\|U_1\|_{\mathcal{H}} \leq L$ e $\|U_2\|_{\mathcal{H}} \leq L$, para alguma constante $L > 0$. Da definição do operador F em (4.49),

$$\|F(U_1) - F(U_2)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 2(P_M + P_f), \tag{4.66}$$

onde

$$\begin{aligned} P_M &:= \|M(\|\nabla u_1\|_2^2)\Delta u_1 - M(\|\nabla u_2\|_2^2)\Delta u_2\|_2^2, \\ P_f &:= \|f(u_2) - f(u_1)\|_2^2. \end{aligned}$$

Agora, vamos estimar os termos P_M e P_f. De fato,

$$\begin{aligned} P_M &\leq 2|M(\|\nabla u_1\|_2^2)|^2 \|\Delta(u_1 - u_2)\|_2^2 + 2|M(\|\nabla u_2\|_2^2) - M(\|\nabla u_1\|_2^2)|^2 \|\Delta u_2\|_2^2 \\ &\leq \frac{2}{\omega}|M(\|\nabla u_1\|_2^2)|^2 \|U_1 - U_2\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{2L^2}{\omega}|M(\|\nabla u_2\|_2^2) - M(\|\nabla u_1\|_2^2)|^2. \end{aligned}$$

No que segue, todas constantes positivas que dependem de L serão denotadas por C_L.

Da continuidade de M e da imersão $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$, segue que existe uma constante $C_L > 0$ tal que $|M(\|\nabla u_1\|_2^2)|^2 \leq C_L$. Além disso, como M' é contínua, existe uma constante positiva C_L tal que $|M'(s)| \leq C_L$. Então,

$$\begin{aligned}
|M(\|\nabla u_2\|_2^2) - M(\|\nabla u_1\|_2^2)| &\leq \int_{\|\nabla u_2\|_2^2}^{\|\nabla u_1\|_2^2} |M'(s)|ds \\
&\leq C_L|\|\nabla u_2\|_2^2 - \|\nabla u_1\|_2^2| \\
&= C_L(\|\nabla u_2\|_2 + \|\nabla u_1\|_2)|\|\nabla u_2\|_2 - \|\nabla u_1\|_2| \\
&\leq C_L|\|\nabla u_2\|_2 - \|\nabla u_1\|_2| \\
&\leq C_L\|\nabla(u_2 - u_1)\|_2 \\
&\leq C_L\|U_1 - U_2\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

para alguma constante positiva C_L. Logo,

$$P_M \leq C_L\|U_1 - U_2\|_{\mathcal{H}}^2, \tag{4.67}$$

Por outro lado, usando (4.52), (4.54) e a Desigualdade de Hölder com $\frac{\rho}{\rho+2} + \frac{2}{\rho+2} = 1$,

$$\begin{aligned}
P_f &= \int_\Omega |f(u_2(x)) - f(u_1(x))|^2 dx \\
&\leq k_0 \int_\Omega (1 + |u_2(x)|^{\rho/2} + |u_1(x)|^{\rho/2})^2 |u_2(x) - u_1(x)|^2 dx \\
&\leq 3k_0 \int_\Omega (1 + |u_2(x)|^\rho + |u_1(x)|^\rho)|u_2(x) - u_1(x)|^2 dx \\
&\leq 3k_0(|\Omega|^{\rho/\rho+2} + \|u_2\|_{\rho+2}^\rho + \|u_1\|_{\rho+2}^\rho)\|u_2 - u_1\|_{\rho+2}^2 \\
&\leq C_L\|U_1 - U_2\|_{\mathcal{H}}^2,
\end{aligned}$$

para alguma constante $C_L > 0$. Ou seja,

$$P_f \leq C_L\|U_1 - U_2\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{4.68}$$

Substituindo (4.67) e (4.68) em (4.66), obtemos

$$\|F(U_1) - F(U_2)\|_{\mathcal{H}} \leq C_L\|U_1 - U_2\|_{\mathcal{H}},$$

para alguma constant $C_L > 0$. Portanto, F é localmente Lipschitz em $\mathcal{H}$.

Prova de (i) e (ii): Seja $U_0 \in \mathcal{H}$. Pelo Teorema 2.112, o problema de Cauchy (4.47) possui uma única solução generalizada local $U \in C([0, T_{max}), \mathcal{H})$ satisfazendo (4.55). Além disso, se $U_0 \in D(\mathcal{A})$, então U é solução forte de (4.47) na classe (4.56) e dada por (4.55).

Afirmamos que $T_{max} = \infty$. Com efeito, suponhamos que $T_{max} < \infty$. Pelo Teorema 2.113 temos

$$\lim_{t \to T_{max}^-} \|U(t)\|_{\mathcal{H}} = \infty. \tag{4.69}$$

Compondo a primeira equação de (4.6) com u_t na dualidade $H_0^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$ e usando as regras de derivação no sentido das distribuições, temos

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\omega}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\widehat{M}(\|\nabla u(t)\|_2^2) + \int_\Omega \widehat{f}(u(t))dx\right\} + \left\langle \mathcal{I}_g(\Delta^2\eta^t), u_t(t)\right\rangle = 0. \tag{4.70}$$

Por outro lado, compondo a segunda equação de (4.6) com $\mathcal{I}_g(\Delta^2\eta^t)$ na dualidade $H_0^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$ e usando novamente as regras de derivação no sentido distribucional, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2 - \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\Delta\eta^t(s)\|_2^2 ds = \left\langle \mathcal{I}_g(\Delta^2\eta^t), u_t(t)\right\rangle. \tag{4.71}$$

Assim, de (4.70) e (4.71) deduzimos que

$$\frac{d}{dt}\tilde{E}(t) = \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\Delta\eta^t(s)\|_2^2 ds, \tag{4.72}$$

onde $\tilde{E}$ é a energia associada ao sistema, sendo dada por

$$\tilde{E}(t) := \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\omega}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2 + \frac{1}{2}\widehat{M}(\|\nabla u(t)\|_2^2) + \int_\Omega \widehat{f}(u(t))dx. \tag{4.73}$$

Da hipótese (**H.1**) e de (4.72) concluimos que $\tilde{E}$ é decrescente com

$$\tilde{E}(t) \le \tilde{E}(0), \quad \forall\, t \in (0, T_{max}). \tag{4.74}$$

Por outro lado, de (4.50), (4.51) e (4.53), temos

$$\begin{aligned}
\tilde{E}(t) &= \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\omega}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2 + \frac{1}{2}\widehat{M}(\|\nabla u(t)\|_2^2) + \int_\Omega \widehat{f}(u(t))dx \\
&\ge \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\omega}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2 - \frac{\beta_1}{2}\omega\|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{\beta_2}{2}\omega\|u(t)\|_2^2 \\
&\ge \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\omega}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2 - \frac{\omega}{2}\left(\frac{\beta_1}{\mu_1} + \frac{\beta_2}{\mu_2}\right)\|\Delta u(t)\|_2^2 \\
&= \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\beta}{2}\omega\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2,
\end{aligned}$$

para todo $t \in (0, T_{max})$, ou seja,

$$\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\beta}{2}\omega\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2 \le \tilde{E}(t), \quad \forall\, t \in (0, T_{max}). \tag{4.75}$$

Usando a definição da norma no espaço $\mathcal{H}$ e que $\beta < 1$, obtemos

$$\frac{\beta}{2}\|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \le \tilde{E}(t), \quad \forall\, t \in (0, T_{max}). \tag{4.76}$$

Logo, de (4.74) e (4.76) concluímos que o limite em (4.69) é finito com

$$\lim_{t \to T_{max}^-} \|U(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \left(\frac{2}{\beta} \tilde{E}(0) \right)^{1/2} < \infty,$$

o que é um absurdo! Portanto, $T_{max} = \infty$ e a solução forte U é global. O mesmo se aplica para a solução generalizada usando argumentos de densidade. Isto conclui a prova dos itens *(i)* e *(ii)*.

Prova de (iii): Seja $T > 0$ fixado. Consideremos $U_1, U_2 \in C([0,T], \mathcal{H})$ duas soluções generalizadas do problema (4.47) com dados iniciais $U_0^1, U_0^2 \in \mathcal{H}$, respectivamente. Então, U_1, U_2 satisfazem (4.55). Assim, para cada $t \in [0,T]$, obtemos

$$\begin{aligned} \|U_1(t) - U_2(t)\|_{\mathcal{H}} &\leq \|e^{t\mathcal{A}}(U_0^1 - U_0^2)\|_{\mathcal{H}} + \int_0^t \|e^{(t-\tau)\mathcal{A}}[F(U_1(\tau)) - F(U_2(\tau))]\|_{\mathcal{H}} d\tau \\ &\leq \|U_0^1 - U_0^2\|_{\mathcal{H}} + \int_0^t \|F(U_1(\tau)) - F(U_2(\tau))\|_{\mathcal{H}} d\tau. \end{aligned}$$

De (4.74) e (4.76) e usando que F é localmente Lipschitz em $\mathcal{H}$, obtemos uma constante $\gamma > 0$, que depende dos dados iniciais, tal que

$$\|U_1(t) - U_2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \|U_0^1 - U_0^2\|_{\mathcal{H}} + \gamma \int_0^t \|U_1(\tau) - U_2(\tau)\|_{\mathcal{H}} d\tau.$$

Pelo Lema de Gronwall

$$\|U_1(t) - U_2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq e^{\gamma t}\|U_0^1 - U_0^2\|_{\mathcal{H}} \leq e^{\gamma T}\|U_0^1 - U_0^2\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall\ t \in [0,T],$$

o que prova *(iii)*.

Portanto, a prova do Teorema 4.4 está completa.

□

4.3 DECAIMENTO GERAL DE ENERGIA - CASO 1

Nesta seção, usando a técnica introduzida por Guesmia e Messaoudi [14] para um problema linear, mostraremos um decaimento geral para o funcional de energia $\tilde{E}(t)$ associado ao problema (4.6)-(4.9). Para tanto, assumiremos hipóteses adicionais para as funções g e M como segue.

(H.5) Existe uma função $\xi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ derivável e não crescente tal que

$$g'(s) \leq -\xi(s) g(s), \quad \forall\ s > 0. \tag{4.77}$$

(**H.6**) M e sua primitiva $\widehat{M}$ satisfazem a seguinte desigualdade

$$\frac{1}{2}\widehat{M}(s) \leq M(s)s + \frac{\omega}{2}\beta_1 s, \quad \forall\ s \geq 0. \tag{4.78}$$

Observação. (i) A hipótese (**H.5**) implica que

$$e^{\int_0^t \xi(s)ds} g(t) \leq g(0), \quad \forall\ t > 0. \tag{4.79}$$

Com efeito, multiplicando a equação (4.77) por $e^{\int_0^s \xi(\tau)d\tau}$, temos

$$\left(e^{\int_0^s \xi(\tau)d\tau} g(s)\right)' \leq 0. \tag{4.80}$$

Uma simples integração em (4.80) resulta em (4.79).
(ii) Existe uma constante $C = C(|\Omega|, \rho) > 0$ tal que

$$\|f(u(t))\|_2^2 \leq C(1 + \left[\tilde{E}(0)\right]^{\rho/2})\|\Delta u(t)\|_2^2, \quad \forall\ t \geq 0. \tag{4.81}$$

Com efeito, de (4.52), da Desigualdade de Hölder com $\frac{2}{\rho+2} + \frac{\rho}{\rho+2} = 1$ e de (4.54), obtemos

$$\begin{aligned}
\|f(u(t))\|_2^2 &= \int_\Omega |f(u(t))|^2 dx \\
&\leq k_0 \int_\Omega (1 + |u(t)|^{\rho/2})^2 |u(t)|^2 dx \\
&\leq 2k_0 \int_\Omega (1 + |u(t)|^{\rho})|u(t)||u(t)| dx \\
&\leq 2k_0(|\Omega|^{\rho/\rho+2} + \|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho})\|u(t)\|_{\rho+2}\|u(t)\|_{\rho+2} \\
&\leq 2k_0\mu_\rho^2(|\Omega|^{\rho/\rho+2} + \|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho})\|\Delta u(t)\|_2^2.
\end{aligned}$$

Além disso, de (4.54), (4.74) e (4.76) deduzimos que

$$\|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho} = \left(\|u(t)\|_{\rho+2}^2\right)^{\rho/2} \leq \mu_\rho^\rho \left(\|\Delta u(t)\|_2^2\right)^{\rho/2} \leq \left(\frac{2\mu_\rho^2}{\beta\omega}\right)^{\rho/2} \left[\tilde{E}(0)\right]^{\rho/2},$$

donde

$$\|f(u(t))\|_2^2 \leq 2k_0\mu_\rho^2 \left(|\Omega|^{\rho/\rho+2} + \left(\frac{2\mu_\rho^2}{\beta\omega}\right)^{\rho/2} \left[\tilde{E}(0)\right]^{\rho/2}\right) \|\Delta u(t)\|_2^2 \leq C(1+\left[\tilde{E}(0)\right]^{\rho/2})\|\Delta u(t)\|_2^2,$$

onde $C = C(|\Omega|, \rho) > 0$.

Teorema 4.5. *Suponhamos que as hipóteses* (**H.1**)-(**H.6**) *sejam satisfeitas e seja* $R > 0$ *qualquer. Se* $U_0 \in \mathcal{H}$ *com* $\|U_0\|_{\mathcal{H}} \leq R$*, então existem constantes* $0 < \gamma_0 < 1$ *e* $C_R > 0$*, dependente* *de R, tais que*

$$\tilde{E}(t) \leq C_R \left(1 + \int_0^t (g(s))^{1-\varepsilon_0} ds\right) e^{-\varepsilon_0 \int_0^t \xi(s)ds} + C_R \int_t^\infty g(s)ds, \quad \forall\ t \geq 0, \tag{4.82}$$

para todo $\varepsilon_0 \in (0, \gamma_0]$, onde $\tilde{E}(t)$ é definida em (4.73).

Demonstração. A prova de (4.82) será feita para soluções fortes de (4.6)-(4.9), sendo o mesmo resultado válido para soluções generalizadas por argumentos de densidade.
Energia Perturbada: Considere os funcionais

$$\begin{aligned} G_0(t) &:= \tilde{E}(t) + \varepsilon_1 \Psi_1(t) + \varepsilon_2 \Psi_2(t), & (4.83)\\ G(t) &:= \xi(t) G_0(t) + \tilde{E}(t), & (4.84) \end{aligned}$$

onde Ψ_1 e Ψ_2 são dados por

$$\begin{aligned} \Psi_1(t) &:= (u_t(t), u(t)) & (4.85)\\ \Psi_2(t) &:= -(u_t(t), \mathcal{I}_g \eta^t). & (4.86) \end{aligned}$$

Aqui $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ são constantes a serem determinadas. Note que

$$\frac{1}{2}\tilde{E}(t) \leq G_0(t) \leq \frac{3}{2}\tilde{E}(t), \quad \forall\ t \geq 0, \tag{4.87}$$

para $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ suficientemente pequenos. Com efeito, da Desigualdade de Cauchy-Schwarz e da Desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} |\Psi_1(t)| &\leq \frac{1}{\mu_2^{1/2}} \left(\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2\right)\\ &\leq \frac{1}{\beta\omega\mu_2^{1/2}} \left(\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\beta\omega}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2\right)\\ &\leq \frac{1}{\beta\omega\mu_2^{1/2}} \left(\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\beta\omega}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2\right). \end{aligned}$$

Pondo $C = \dfrac{1}{\beta\omega\mu_2^{1/2}} > 0$, segue de (4.75) que

$$|\Psi_1(t)| \leq C \left(\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\beta\omega}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2\right) \leq C\tilde{E}(t).$$

Usando novamente a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, a Desigualdade de Young e também

(2.27) e (4.75) obtemos

$$\begin{aligned}
|\Psi_2(t)| &\leq \frac{1}{\mu_2^{1/2}}\|u_t(t)\|_2\|\mathcal{I}_g(\Delta\eta^t)\|_2 \\
&\leq \frac{1}{\mu_2^{1/2}}\|u_t(t)\|_2\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{1/2}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2} \\
&\leq \frac{1}{\mu_2^{1/2}}\left(\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2\right) \\
&\leq C\left(\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2+\frac{\beta\omega}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2\right) \\
&\leq C\tilde{E}(t).
\end{aligned}$$

Então,

$$|G_0(t)-\tilde{E}(t)| \leq \varepsilon_1|\Psi_1(t)|+\varepsilon_2|\Psi_2(t)| \leq (\varepsilon_1+\varepsilon_2)C\tilde{E}(t).$$

Assim,

$$(1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)C)\tilde{E}(t) \leq G_0(t) \leq (1+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)C)\tilde{E}(t).$$

Logo, para $0<\varepsilon_1,\varepsilon_2\leq\frac{1}{4C}$ vale (4.87). Além disso, usando que $0\leq\xi(t)\leq\xi(0)$ para todo $t\geq 0$ e de (4.87), também concluímos

$$\tilde{E}(t) \leq G(t) \leq \left(\frac{3}{2}\xi(0)+1\right)\tilde{E}(t), \quad \forall\, t\geq 0. \tag{4.88}$$

<u>*Derivada de* Ψ_1</u>: O funcional $\Psi_1(t)$ satisfaz a desigualdade

$$\frac{d}{dt}\Psi_1(t) \leq \frac{3}{2}\|u_t(t)\|_2^2-\frac{\beta\omega}{4}\|\Delta u(t)\|_2^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\omega\beta}\right)\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2-\tilde{E}(t), \quad \forall\, t>0. \tag{4.89}$$

Com efeito, note que

$$\frac{d}{dt}\Psi_1(t) = (u_{tt}(t),u(t))+\|u_t(t)\|_2^2. \tag{4.90}$$

Como

$$u_{tt}(t) = -\omega\Delta^2u(t)-\int_0^\infty g(s)\Delta^2\eta^t(s)ds+M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u(t)-f(u(t)),\ \forall\, t>0, \tag{4.91}$$

segue de (4.90), (4.91) e do Teorema do Green que

$$\frac{d}{dt}\Psi_1(t) = -\omega\|\Delta u(t)\|_2^2+\|u_t(t)\|_2^2+\tilde{I}_1+\tilde{I}_2, \tag{4.92}$$

onde

$$
\begin{aligned}
\tilde{I}_1 &:= -(\mathcal{I}_g(\Delta\eta^t), \Delta u(t)),\\
\tilde{I}_2 &:= -M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\|\nabla u(t)\|_2^2 - \int_\Omega f(u(t))u(t)dx.
\end{aligned}
$$

Da Desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$ e de (2.27), segue que

$$
\begin{aligned}
|\tilde{I}_1| &\leq \|\mathcal{I}_g(\Delta\eta^t)\|_2\|\Delta u(t)\|_2\\
&\leq \frac{1}{4\varepsilon}\|\mathcal{I}_g(\Delta\eta^t)\|_2^2 + \varepsilon\|\Delta u(t)\|_2^2\\
&\leq \frac{1}{4\varepsilon}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2 + \varepsilon\|\Delta u(t)\|_2^2.
\end{aligned}
$$

Agora, somando e subtraindo a energia $\tilde{E}(t)$ em $\tilde{I}_2$, usando (4.51) e (4.78), obtemos

$$
\begin{aligned}
\tilde{I}_2 &= -\tilde{E}(t) + \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\omega}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2\\
&\quad + \frac{1}{2}\widehat{M}(\|\nabla u(t)\|_2^2) - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\|\nabla u(t)\|_2^2 + \int_\Omega [\widehat{f}(u(t)) - f(u(t))u(t)]dx\\
&\leq -\tilde{E}(t) + \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\omega}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2 + \frac{\omega}{2}\left(\frac{\beta_1}{\mu_1} + \frac{\beta_2}{\mu_2}\right)\|\Delta u(t)\|_2^2.
\end{aligned}
$$

Substituindo as estimativas feitas para os termos $\tilde{I}_1$ e $\tilde{I}_2$ em (4.92), segue que

$$
\frac{d}{dt}\Psi_1(t) \leq \frac{3}{2}\|u_t(t)\|_2^2 - \left(\frac{\omega\beta}{2} - \varepsilon\right)\|\Delta u(t)\|_2^2 - \tilde{E}(t) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\varepsilon}\right)\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2.
$$

Tomando $\varepsilon = \dfrac{\omega\beta}{4} > 0$ concluímos que

$$
\frac{d}{dt}\Psi_1(t) \leq \frac{3}{2}\|u_t(t)\|_2^2 - \frac{\omega\beta}{4}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\omega\beta}\right)\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2 - \tilde{E}(t), \quad \forall\ t > 0,
$$

como queríamos.

Derivada de Ψ_2: Existem constantes $C_R > 0$, dependendo de R e $C > 0$, tais que

$$
\frac{d}{dt}\Psi_2(t) \leq -\frac{\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\omega\beta\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}}{24}\|\Delta u(t)\|_2^2 + C_R\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2 - C\frac{d}{dt}\tilde{E}(t),\ \forall\ t > 0. \tag{4.93}
$$

De fato, derivando Ψ_2 definido em (4.86) temos

$$
\frac{d}{dt}\Psi_2(t) = -(u_{tt}(t), \mathcal{I}_g\eta^t) - (u_t(t), \mathcal{I}_g\eta_t^t).
$$

Lembrando que $\eta_t^t(s) = -\eta_s^t(s) + u_t(t)$ e usando a igualdade (4.91) e o Teorema de Green,

obtemos

$$\frac{d}{dt}\Psi_2(t) = -\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}\|u_t(t)\|_2^2 + \sum_{j=1}^{5}\tilde{J}_j, \tag{4.94}$$

onde,

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_1 &:= \omega(\Delta u(t), \mathcal{I}_g(\Delta\eta^t)),\\
\tilde{J}_2 &:= \|\mathcal{I}_g(\Delta\eta^t)\|_2^2,\\
\tilde{J}_3 &:= -M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\Delta u(t), \mathcal{I}_g\eta^t),\\
\tilde{J}_4 &:= (f(u(t)), \mathcal{I}_g\eta^t),\\
\tilde{J}_5 &:= (u_t(t), \mathcal{I}_g\eta^t_s).
\end{aligned}$$

No que segue, vamos estimar os termos $\tilde{J}_j$, $j = 1, \ldots, 5$. Para todos os termos, vamos usar a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, a estimativa (2.27) e a Desigualdade de Young com $\delta > 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
|\tilde{J}_1| &\leq \omega\|\Delta u(t)\|_2\|\mathcal{I}_g(\Delta\eta^t)\|_2\\
&\leq \omega\|\Delta u(t)\|_2\|g\|^{1/2}_{L^1(\mathbb{R}^+)}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}\\
&\leq \delta\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{\omega^2}{4\delta}\|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}_2}.
\end{aligned}$$

Mais ainda,

$$|\tilde{J}_2| \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}\|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}_2} \leq \|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}_2}.$$

Como $\|U_0\|_{\mathcal{H}} \leq R$, existe uma constante $M_R > 0$ tal que

$$|M(\|\nabla u(t)\|_2^2)| \leq M_R, \quad \forall\ t \geq 0.$$

Então,

$$\begin{aligned}
|\tilde{J}_3| &\leq \frac{M_R}{\mu_2^{1/2}}\|\Delta u(t)\|_2\|\mathcal{I}_g(\Delta\eta^t)\|_2\\
&\leq \frac{M_R}{\mu_2^{1/2}}\|\Delta u(t)\|_2\|g\|^{1/2}_{L^1(\mathbb{R}^+)}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}\\
&\leq \delta\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{M_R^2}{4\mu_2\delta}\|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}_2}.
\end{aligned}$$

Por (4.81) e tomando $N_R > 0$ tal que $\tilde{E}(0) \leq N_R$, segue que

$$\begin{aligned} |\tilde{J}_4| &\leq \frac{1}{\mu_2^{1/2}} \|f(u(t))\|_2 \|\mathcal{I}_g(\Delta\eta^t)\|_2 \\ &\leq \frac{\left[C(1+N_R^{\rho/2})\right]^{1/2}}{\mu_2^{1/2}} \|\Delta u(t)\|_2 \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{1/2} \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2} \\ &\leq \delta\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{C(1+N_R^{\rho/2})}{4\mu_2\delta} \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2. \end{aligned}$$

Agora, fazendo uma integração por partes, temos

$$\mathcal{I}_g\eta_s^t = \int_0^\infty g(s)\eta_s^t(s)ds = -\int_0^\infty g'(s)\eta^t(s)ds = -\mathcal{I}_{g'}\eta^t. \tag{4.95}$$

De (4.95), usando uma estimativa análoga a (2.27) com $-g'$ no lugar de g, e de (4.72), obtemos

$$\begin{aligned} |\tilde{J}_5| &\leq \frac{1}{\mu_2^{1/2}} \|u_t(t)\|_2 \| -\mathcal{I}_{g'}(\Delta\eta^t)\|_2 \\ &\leq \frac{2^{1/2}}{\mu_2^{1/2}} \|u_t(t)\|_2 \| -g'\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{1/2} \left[-\frac{d}{dt}\tilde{E}(t)\right]^{1/2} \\ &\leq \delta\|u_t(t)\|_2^2 - \frac{g(0)}{2\delta\mu_2}\frac{d}{dt}\tilde{E}(t). \end{aligned}$$

Substituindo as estimativas feitas para os termos $\tilde{J}_j$, $j = 1, \ldots, 5$, em (4.94), obtemos que

$$\frac{d}{dt}\Psi_2(t) \leq \left(\delta - \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}\right)\|u_t(t)\|_2^2 + 3\delta\|\Delta u(t)\|_2^2 + C_{\delta,R}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2 - \frac{g(0)}{2\delta\mu_2}\frac{d}{dt}\tilde{E}(t),$$

onde

$$C_{\delta,R} := 1 + \frac{\omega^2}{4\delta} + \frac{1}{4\delta\mu_2}\left[M_R^2 + C(1+N_R^{\rho/2})\right] > 0.$$

Tomando $\delta = \dfrac{\omega\beta\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}}{72} > 0$, temos que $\delta < \dfrac{\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}}{2}$, donde

$$\frac{d}{dt}\Psi_2(t) \leq -\frac{\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\omega\beta\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}}{24}\|\Delta u(t)\|_2^2 + C_R\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2 - C\frac{d}{dt}\tilde{E}(t),$$

com $C = \frac{36g(0)}{\beta\mu_2\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}} > 0$ independente de R, como queríamos.

Derivada de G_0: O funcional G_0 definido em (4.83) satisfaz

$$\begin{aligned} \xi(t)\frac{d}{dt}G_0(t) \leq\ & -\varepsilon_1\xi(t)\tilde{E}(t) - 2\left[\varepsilon_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\omega\beta}\right) + \varepsilon_2 C_R\right]\frac{d}{dt}\tilde{E}(t) \\ & + \left[\varepsilon_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\omega\beta}\right) + \varepsilon_2 C_R\right]\xi(t)\int_t^\infty g(s)\|\Delta\eta^t(s)\|_2^2 ds, \ \forall\ t > 0, \end{aligned} \tag{4.96}$$

para $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ suficientemente pequenos. Com efeito, derivando o funcional G_0 e usando as estimativas em (4.89) e (4.93), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G_0(t) &= \frac{d}{dt}\tilde{E}(t) + \varepsilon_1\frac{d}{dt}\Psi_1(t) + \varepsilon_2\frac{d}{dt}\Psi_2(t) \\
&\leq [1-\varepsilon_2 C]\frac{d}{dt}\tilde{E}(t) - \omega\left[\varepsilon_1\frac{\beta}{4} - \varepsilon_2\frac{\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}\beta}{24}\right]\|\Delta u(t)\|_2^2 - \varepsilon_1\tilde{E}(t) \\
&\quad - \left[\varepsilon_2\frac{\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}}{2} - \varepsilon_1\frac{3}{2}\right]\|u_t(t)\|_2^2 + \left[\varepsilon_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\omega\beta}\right) + \varepsilon_2 C_R\right]\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2.
\end{aligned}$$

Escolhemos $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ suficientemente pequenos tais que

$$\frac{1}{2}\varepsilon_2 < \frac{3}{\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}}\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2C}. \tag{4.97}$$

Logo, de (4.97) concluímos que

$$\frac{d}{dt}G_0(t) \leq -\varepsilon_1\tilde{E}(t) + \left[\varepsilon_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\omega\beta}\right) + \varepsilon_2 C_R\right]\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2, \quad \forall\ t > 0. \tag{4.98}$$

Notando que ξ é decrescente e usando (4.72), deduzimos que

$$\xi(t)\int_0^t g(s)\|\Delta\eta^t(s)\|_2^2 ds \leq -\int_0^t g'(s)\|\Delta\eta^t(s)\|_2^2 ds \leq -2\frac{d}{dt}\tilde{E}(t), \quad \forall\ t > 0.$$

Multiplicando ambos os lados de (4.98) por $\xi(t)$ e usando esta última desigualdade,

$$\begin{aligned}
\xi(t)\frac{d}{dt}G_0(t) &\leq -\varepsilon_1\xi(t)\tilde{E}(t) - \left[\varepsilon_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\omega\beta}\right) + \varepsilon_2 C_R\right]\xi(t)\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2 \\
&= -\varepsilon_1\xi(t)\tilde{E}(t) + \left[\varepsilon_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\omega\beta}\right) + \varepsilon_2 C_R\right]\xi(t)\int_0^t g(s)\|\Delta\eta^t(s)\|_2^2 ds \\
&\quad + \left[\varepsilon_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\omega\beta}\right) + \varepsilon_2 C_R\right]\xi(t)\int_t^\infty g(s)\|\Delta\eta^t(s)\|_2^2 ds \\
&\leq -\varepsilon_1\xi(t)\tilde{E}(t) - 2\left[\varepsilon_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\omega\beta}\right) + \varepsilon_2 C_R\right]\frac{d}{dt}\tilde{E}(t) \\
&\quad + \left[\varepsilon_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\omega\beta}\right) + \varepsilon_2 C_R\right]\xi(t)\int_t^\infty g(s)\|\Delta\eta^t(s)\|_2^2 ds,
\end{aligned}$$

como queríamos.

<u>*Derivada de G*</u>: Para $\varepsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno e dependendo de R, o funcional G definido em (4.84) satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\frac{d}{dt}G(t) \leq -\varepsilon_1\xi(t)\tilde{E}(t) + \frac{1}{2}\xi(t)\int_t^\infty g(s)\|\Delta\eta^t(s)\|_2^2 ds, \quad \forall\ t > 0. \tag{4.99}$$

De fato, derivando G e usando (4.96) e (4.72), temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}G(t) &= \xi'(t)G_0(t) + \xi(t)\frac{d}{dt}G_0(t) + \frac{d}{dt}\tilde{E}(t)\\ &\leq -\varepsilon_1\xi(t)\tilde{E}(t) + 2\left[\frac{1}{2} - \varepsilon_1\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\omega\beta}\right) - \varepsilon_2 C_R\right]\frac{d}{dt}\tilde{E}(t)\\ &\quad + \left[\varepsilon_1\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\omega\beta}\right) + \varepsilon_2 C_R\right]\xi(t)\int_t^\infty g(s)\|\Delta\eta^t(s)\|_2^2 ds,\end{aligned}$$

para todo $t > 0$. Tomando $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ satisfazendo (4.97), (4.88) e também

$$\varepsilon_2 < \min\left\{\frac{3}{2}\frac{\omega\beta}{(2+\beta)\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}}, \frac{1}{4C_R}\right\}, \tag{4.100}$$

obtemos

$$\frac{d}{dt}G(t) \leq -\varepsilon_1\xi(t)\tilde{E}(t) + \frac{1}{2}\xi(t)\int_t^\infty g(s)\|\Delta\eta^t(s)\|_2^2 ds, \quad \forall\ t > 0,$$

o que prova o desejado, onde notamos que $\varepsilon_1 \sim \dfrac{1}{C_R}$.

<u>*Conclusão*</u>: De (4.46), segue que para todo $s > t$ temos

$$\begin{aligned}\|\Delta\eta^t(s)\|_2^2 &= \|\Delta u(t) - \Delta u_0(t-s)\|_2^2\\ &\leq 2\|\Delta u(t)\|_2^2 + 2\|\Delta u_0(t-s)\|_2^2\\ &\leq \frac{4}{\beta\omega}\tilde{E}(0) + 2\sup_{\tau<0}\|\Delta u_0(\tau)\|_2^2\\ &\leq 2K_R,\end{aligned}$$

para alguma constante $K_R > 0$ dependente de R. Assim,

$$\xi(t)\int_t^\infty g(s)\|\Delta\eta^t(s)\|_2^2 ds \leq K_R h(t), \tag{4.101}$$

onde $h(t) := \xi(t)\displaystyle\int_t^\infty g(s)ds$. Por outro lado, de (4.88) obtemos

$$-\varepsilon_1\xi(t)\tilde{E}(t) \leq -\varepsilon_1\left(\frac{2}{3\xi(0)+2}\right)\xi(t)G(t). \tag{4.102}$$

Defina $\gamma_0 := \varepsilon_1\left(\frac{2}{3\xi(0)+2}\right) > 0$. Da escolha de ε_2 em (4.100), segue que $\varepsilon_1 \in (0,1)$ e, consequentemente, $\gamma_0 \in (0,1)$. Então, de (4.102) temos

$$-\varepsilon_1\xi(t)\tilde{E}(t) \leq -\gamma_0\xi(t)G(t) \leq -\varepsilon_0\xi(t)G(t), \quad \forall\ \varepsilon_0 \in (0,\gamma_0]. \tag{4.103}$$

Logo, usando as estimativas (4.101) e (4.103) em (4.99), deduzimos que

$$\frac{d}{dt}G(t) \leq -\varepsilon_0\xi(t)G(t) + K_R h(t). \tag{4.104}$$

Multiplicando a desigualdade (4.104) por $e^{\varepsilon_0\int_0^t \xi(s)ds} > 0$, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\varepsilon_0\int_0^t \xi(s)ds}G(t)\right) \leq K_R e^{\varepsilon_0\int_0^t \xi(s)ds}h(t), \quad t > 0.$$

Isto implica que

$$G(t) \leq e^{-\varepsilon_0\int_0^t \xi(s)ds}\left(G(0) + K_R\int_0^t e^{\varepsilon_0\int_0^s \xi(\tau)d\tau}h(s)ds\right), \quad t > 0.$$

Usando novamente (4.88), chegamos a

$$\tilde{E}(t) \leq e^{-\varepsilon_0\int_0^t \xi(s)ds}\left(G(0) + K_R\int_0^t e^{\varepsilon_0\int_0^s \xi(\tau)d\tau}h(s)ds\right), \quad t > 0. \tag{4.105}$$

Usando integração por partes, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^{\varepsilon_0\int_0^s \xi(\tau)d\tau}h(s)ds &= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^t \left(e^{\varepsilon_0\int_0^s \xi(\tau)d\tau}\right)'\int_s^\infty g(\tau)d\tau ds \\
&= \frac{1}{\varepsilon_0}\left(e^{\varepsilon_0\int_0^t \xi(\tau)d\tau}\int_t^\infty g(\tau)d\tau - \int_0^\infty g(\tau)d\tau + \int_0^t e^{\varepsilon_0\int_0^s \xi(s)ds}g(s)ds\right) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon_0}\left(e^{\varepsilon_0\int_0^t \xi(\tau)d\tau}\int_t^\infty g(\tau)d\tau + \int_0^t e^{\varepsilon_0\int_0^s \xi(s)ds}g(s)ds\right).
\end{aligned}$$

Logo, de (4.105) obtemos

$$\tilde{E}(t) \leq G(0)e^{-\varepsilon_0\int_0^t \xi(s)ds} + \frac{K_R}{\varepsilon_0}\int_t^\infty g(\tau)d\tau + \frac{K_R}{\varepsilon_0}e^{-\varepsilon_0\int_0^t \xi(s)ds}\int_0^t e^{\varepsilon_0\int_0^s \xi(s)ds}g(s)ds, \ t > 0. \tag{4.106}$$

Além disso, de (4.79), temos

$$\int_0^t e^{\varepsilon_0\int_0^s \xi(s)ds}g(s)ds = \int_0^t \left(e^{\int_0^s \xi(s)ds}g(s)\right)^{\varepsilon_0}(g(s))^{1-\varepsilon_0}ds \leq (g(0))^{\varepsilon_0}\int_0^t (g(s))^{1-\varepsilon_0}ds. \tag{4.107}$$

Portanto, de (4.106) e (4.107) concluímos que

$$\tilde{E}(t) \leq \left(G(0) + \frac{K_R}{\varepsilon_0}(g(0))^{\varepsilon_0}\int_0^t (g(s))^{1-\varepsilon_0}ds\right)e^{-\varepsilon_0\int_0^t \xi(s)ds} + \frac{K_R}{\varepsilon_0}\int_t^\infty g(\tau)d\tau, \quad t > 0. \tag{4.108}$$

Finalmente, tomando

$$C_R := \max\left\{G(0), \frac{K_R}{\varepsilon_0}(g(0))^{\varepsilon_0}, \frac{K_R}{\varepsilon_0}\right\} > 0,$$

em (4.108), obtemos a desigualdade (4.82) como desejado.

Portanto, a prova do Teorema 4.5 está completa. □

4.3.1 Exemplos de Taxas de Decaimento

Assim como foi feito no Capítulo 3, exibiremos alguns exemplos de funções de g e ξ que satisfazem a hipótese (**H.5**). Além disso, veremos as taxas de decaimento obtidas pela relação (4.82).

Observação. Se existe $\delta_0 \in (0,1)$ tal que

$$\int_0^\infty (g(s))^{1-\delta_0} ds < \infty, \tag{4.109}$$

então podemos escolher $\varepsilon_0 \in (0, \gamma_1]$ com $\gamma_1 = \min\{\delta_0, \gamma_0\}$, tal que

$$\int_0^\infty (g(s))^{1-\varepsilon_0} ds < \infty.$$

Neste caso a desigualdade (4.82) fica

$$\tilde{E}(t) \leq C_R \left(e^{-\varepsilon_0 \int_0^t \xi(s)ds} + \int_t^\infty g(s)ds \right), \quad t \geq 0. \tag{4.110}$$

Exemplo 4.3.1. Considere

$$\xi(t) = k\ \ln(a+1), \quad k > 0, \quad a > 0.$$

Temos que $g(t) \leq g(0)(a+1)^{-kt}$. Assim, para todo $\delta_0 \in (0,1)$, a função g satisfaz a condição (4.109). Logo, usando a relação (4.110) com

$$e^{-\varepsilon_0 \int_0^t \xi(s)ds} = (a+1)^{-\varepsilon_0 kt}, \qquad \int_t^\infty g(s)ds \leq \frac{g(0)}{kln(a+1)}(a+1)^{-\varepsilon_0 kt}$$

obtemos

$$\tilde{E}(t) \leq C_R (a+1)^{-\varepsilon_0 kt}, \quad t \geq 0.$$

Em particular, para $a = e - 1 > 0$ temos o decaimento exponecial clássico.

Exemplo 4.3.2. Seja

$$\xi(t) = \frac{k}{t+1}, \quad k > 1.$$

Observe que $g(t) \leq g(0)(1+t)^{-k}$. Além disso, a condição (4.109) é satisfeita para $\delta_0 > 0$ tal que $\delta_0 < \frac{k-1}{k}$. Então, usando a relação (4.110) com

$$e^{-\varepsilon_0 \int_0^t \xi(s)ds} = (1+t)^{-\varepsilon_0 k}, \qquad \int_t^\infty g(s)ds \leq \frac{g(0)}{k-1}(t+1)^{-\varepsilon_0 k}$$

obtemos

$$\tilde{E}(t) \leq C_R(t+1)^{-\varepsilon_0 k}, \quad t \geq 0.$$

Exemplo 4.3.3. Seja

$$\xi(t) = \frac{k + \ln(t+2)}{(t+2)\ln(t+2)}, \quad k > 1.$$

Note que $g(t) \leq \frac{2g(0)\,(\ln(2))^k}{(t+2)(\ln(t+2))^k}$, com $g(0)$ suficientemente pequeno. Como a condição (4.109) não é satisfeita, vamos usar a relação (4.82). De fato, temos

$$e^{-\varepsilon_0 \int_0^t \xi(s)ds} = \frac{a_1}{(t+2)(\ln(t+2))^{\varepsilon_0 k}}, \quad \int_t^\infty g(s)ds \leq a_2(\ln(t+2))^{1-k},$$

onde $a_1 = 2\,(\ln(2))^{\varepsilon_0 k}$ e $a_2 = \frac{2g(0)(\ln(2))^k}{k-1}$. Logo, para $\varepsilon_0 < \frac{k-1}{k}$ obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{E}(t) &\leq C_R\left(1 + a_3^{1-\varepsilon_0}\int_0^t \frac{1}{(s+2)^{1-\varepsilon_0}(\ln(s+2))^{(1-\varepsilon_0)k}}ds\right)\left(\frac{2^{\varepsilon_0}\,(\ln(2))^{\varepsilon_0 k}}{(t+2)^{\varepsilon_0}(\ln(t+2))^{\varepsilon_0 k}}\right)\\
&\quad + a_2C_R(\ln(t+2))^{1-k}\\
&\leq C_R\left(1 + a_3^{1-\varepsilon_0}\int_0^t \frac{1}{(s+2)(\ln(s+2))^{(1-\varepsilon_0)k}}ds\right)\left(\frac{2^{\varepsilon_0}\,(\ln(2))^{\varepsilon_0 k}}{(\ln(t+2))^{\varepsilon_0 k}}\right)\\
&\quad + a_2C_R(\ln(t+2))^{1-k}\\
&\leq C_R[(\ln(t+2))^{-(k-1)} + (\ln(t+2))^{-\varepsilon_0 k}]\\
&\leq C_R(\ln(t+2))^{-\varepsilon_0 k}.
\end{aligned}$$

4.4 Decaimento Geral de Energia - Caso 2

Nesta seção mostraremos que o decaimento do funcional de energia $\tilde{E}$ definido em (4.73) é estabelecido pelo decaimento de uma solução de uma EDO não linear. Não encontramos tal resultado na literatura para equações viscoelásticas com história. No entanto, mediante a adaptação de algumas técnicas empregadas em problemas com história nula, ver por exemplo Lasiecka et al. [17, 19], determinamos tal decaimento uniforme para o problema abordado neste capítulo. Começamos assumindo que o núcleo de memória g satisfaz uma desigualdade diferencial não linear.

(H.7) Suponhamos que exista uma função crescente e convexa $H \in C^1([0,\infty))$ com $H(0) = 0$ tal que

$$g'(t) \leq -H(g(t)), \quad \forall\ t > 0, \tag{4.111}$$

e que existe $\alpha_0 \in (0,1)$ tal que

$$\int_0^\infty g^{1-\alpha_0}(s)ds < \infty. \tag{4.112}$$

Observação. (i) Considere uma função H satisfazendo a hipótese (**H.7**). Note que H possui inversa $H^{-1} \in C^1([0,\infty))$ crescente. Assim, de (4.111)

$$g(t) \leq H^{-1}(-g'(t)), \quad \forall\, t > 0. \tag{4.113}$$

(ii) Seja H satisfazendo a hipótese (**H.7**) e considere uma constante $\beta_0 \geq 1$. A função

$$G(s) := C_1 H(C_2 s^{\beta_0}) \tag{4.114}$$

é crescente, convexa com $G \in C^1([0,\infty))$ e $G(0) = 0$, para quaisquer constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$. Para demonstrar isto, basta fazer as mesmas contas feitas para a função F definida em (3.181).

Agora, vamos enunciar e demonstrar o próximo (e último) resultado deste trabalho.

Teorema 4.6. *Suponhamos que as hipóteses* (**H.1**)-(**H.4**), (**H.6**) *e* (**H.7**) *sejam satisfeitas e consideramos $R > 0$ qualquer. Se $(u_0, u_1) \in \{z \in \mathcal{H} \mid \|z\|_{\mathcal{H}} \leq R\}$, então o funcional de energia $\tilde{E}$ definido em* (4.73) *decai uniformemente para zero. Mais especificamente, para algum $T_1 > 0$,*

$$\tilde{E}(t) \leq S\left(\frac{t}{T_1} - 1\right), \quad \forall\, t > T_1, \tag{4.115}$$

onde $S(t)$ é solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0, \qquad S(0) = \tilde{E}(0),$$

com

$$q(s) = s - (Id + \tilde{H}_{\alpha_0}^{-1})^{-1}(s), \quad \tilde{H}_{\alpha_0}(s) = \left[c_1 H^{-1}(c_2 s)\right]^{\alpha_0} + c_3 s, \quad \lim_{t\to\infty} S(t) = 0,$$

para algumas constantes positivas c_1, c_2, c_3 sendo c_1, c_3 dependentes de R.

Demonstração. A demonstração é feita em algumas etapas como segue.
Identidade Inicial: Integrando a igualdade (4.72) sobre $(nT, (n+1)T)$, $n \in \mathbb{N}$, $T > 0$, temos

$$\tilde{E}(nT) = \tilde{E}((n+1)T) + \int_{nT}^{(n+1)T} D(t)dt. \tag{4.116}$$

onde

$$D(t) := -\frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\Delta\eta^t\|_2^2 ds. \tag{4.117}$$

Estimativa I: Multiplicando a primeira equação de (4.6) por $u(t)$, integrando sobre

$\Omega \times (nT,(n+1)T)$ e usando o Teorema de Green obtemos

$$\begin{aligned}\int_{nT}^{(n+1)T}(u_{tt}(t),u(t))dt+\omega\int_{nT}^{(n+1)T}\|\Delta u(t)\|_2^2dt\\=-\int_{nT}^{(n+1)T}\big(\mathcal{I}_g(\Delta\eta^t),\Delta u(t)\big)\,dt-\int_{nT}^{(n+1)T}M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\|\nabla u(t)\|_2^2dt\\-\int_{nT}^{(n+1)T}(f(u(t)),u(t))dt.\end{aligned}\tag{4.118}$$

Integrando por partes o primeiro termo de (4.118), obtemos

$$\int_{nT}^{(n+1)T}(u_{tt}(t),u(t))dt=(u_t(t),u(t))\Big|_{nT}^{(n+1)T}-\int_{nT}^{(n+1)T}\|u_t(t)\|_2^2dt.\tag{4.119}$$

Assim, substituindo (4.119) em (4.118) e somando $\displaystyle\int_{nT}^{(n+1)T}\tilde{E}(t)dt$ em ambos os lados da igualdade resultante, chegamos a

$$\begin{aligned}\frac{\omega}{2}\int_{nT}^{(n+1)T}\|\Delta u(t)\|_2^2dt-\frac{3}{2}\int_{nT}^{(n+1)T}\|u_t(t)\|_2^2dt+\int_{nT}^{(n+1)T}\tilde{E}(t)dt\\=\sum_{i=1}^{4}\tilde{K}_i+\frac{1}{2}\int_{nT}^{(n+1)T}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2dt,\end{aligned}\tag{4.120}$$

onde

$$\begin{aligned}\tilde{K}_1&:=-(u_t(t),u(t))\Big|_{nT}^{(n+1)T},\\\tilde{K}_2&:=-\int_{nT}^{(n+1)T}\big(\mathcal{I}_g(\Delta\eta^t),\Delta u(t)\big)\,dt,\\\tilde{K}_3&:=-\int_{nT}^{(n+1)T}M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\|\nabla u(t)\|_2^2dt+\frac{1}{2}\int_{nT}^{(n+1)T}\widehat{M}(\|\nabla u(t)\|_2^2)dt,\\\tilde{K}_4&:=-\int_{nT}^{(n+1)T}(f(u(t)),u(t))dt+\int_{nT}^{(n+1)T}\int_\Omega\widehat{f}(u(t))dxdt.\end{aligned}$$

No que segue, estimaremos os termos $\tilde{K}_i$, $i=1,\ldots,4$. De fato, seja $k\in\mathbb{N}$. De (4.75), temos

$$\tilde{E}(kT)\geq\frac{1}{2}\|u_t(kT)\|_2^2+\frac{\omega\beta}{2}\|\Delta u(kT)\|_2^2.$$

Assim, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz e pela Desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}
|(u_t(kT), u(kT))| &\leq \frac{1}{\mu_2^{1/2}} \|u_t(kT)\|_2 \|\Delta u(kT)\|_2 \\
&\leq \frac{1}{\omega\beta\mu_2^{1/2}} \left(\frac{1}{2} \|u_t(kT)\|_2^2 + \frac{\omega\beta}{2} \|\Delta u(kT)\|_2^2 \right) \\
&\leq \frac{1}{\omega\beta\mu_2^{1/2}} \tilde{E}(kT).
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
|\tilde{K}_1| &\leq |(u_t((n+1)T), u((n+1)T))| + |(u_t(nT), u(nT))| \\
&\leq \frac{1}{\omega\beta\mu_2^{1/2}} [\tilde{E}((n+1)T) + \tilde{E}(nT)].
\end{aligned}$$

Além disso, usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, a Desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$ e a estimativa (2.27), obtemos

$$\begin{aligned}
|\tilde{K}_2| &\leq \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2 \|\mathcal{I}_g(\Delta\eta^t)\|_2 dt \\
&\leq \varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2^2 dt + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{nT}^{(n+1)T} \|\mathcal{I}_g(\Delta\eta^t)\|_2^2 dt \\
&\leq \varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2^2 dt + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{nT}^{(n+1)T} \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2 dt.
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando (4.78) e (4.51) respectivamente, obtemos

$$\tilde{K}_3 + \tilde{K}_4 \leq \frac{l}{2} \left(\frac{\beta_1}{\mu_1} + \frac{\beta_2}{\mu_2} \right) \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2^2 dt.$$

Substituindo as estimativas feitas para os termos $\tilde{K}_i$, $i = 1, \ldots, 4$, deduzimos que

$$\begin{aligned}
&\frac{\omega}{2} \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2^2 dt - \frac{3}{2} \int_{nT}^{(n+1)T} \|u_t(t)\|_2^2 dt + \int_{nT}^{(n+1)T} \tilde{E}(t) dt \\
&\quad \leq C[\tilde{E}((n+1)T) + \tilde{E}(nT)] + \frac{\omega}{2} \left(\frac{\beta_1}{\mu_1} + \frac{\beta_2}{\mu_2} \right) \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2^2 dt \\
&\quad + \left(\frac{1}{4\varepsilon} + \frac{1}{2} \right) \int_{nT}^{(n+1)T} \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2 dt + \varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2^2 dt.
\end{aligned} \tag{4.121}$$

Usando (4.53) em (4.121), chegamos a

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\omega\beta}{2} - \varepsilon \right) \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2^2 dt - \frac{3}{2} \int_{nT}^{(n+1)T} \|u_t(t)\|_2^2 dt + \int_{nT}^{(n+1)T} \tilde{E}(t) dt \\
&\quad \leq C[\tilde{E}((n+1)T) + \tilde{E}(nT)] + \left(\frac{1}{4\varepsilon} + \frac{1}{2} \right) \int_{nT}^{(n+1)T} \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2 dt.
\end{aligned} \tag{4.122}$$

Tomando $\varepsilon = \dfrac{\omega\beta}{4} > 0$ em (4.122), concluímos que

$$\begin{aligned}&\frac{\omega\beta}{4}\int_{nT}^{(n+1)T}\|\Delta u(t)\|_2^2dt - \frac{3}{2}\int_{nT}^{(n+1)T}\|u_t(t)\|_2^2dt + \int_{nT}^{(n+1)T}\tilde{E}(t)dt\\ &\qquad \leq C[\tilde{E}((n+1)T) + \tilde{E}(nT)] + \left(\frac{1}{\omega\beta} + \frac{1}{2}\right)\int_{nT}^{(n+1)T}\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2dt.\end{aligned} \tag{4.123}$$

<u>*Estimativa II*</u>: Multiplicando a primeira equação de (4.6) por $\mathcal{I}_g\eta^t$, integrando sobre $\Omega \times (nT, (n+1)T)$ e usando o Teorema de Green, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_{nT}^{(n+1)T}(u_{tt}(t), \mathcal{I}_g\eta^t)dt + \omega\int_{nT}^{(n+1)T}(\Delta u(t), \mathcal{I}_g(\Delta\eta^t))dt + \int_{nT}^{(n+1)T}\|\mathcal{I}_g(\Delta\eta^t)\|_2^2dt\\ &= \int_{nT}^{(n+1)T}M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\left(\Delta u(t), \mathcal{I}_g\eta^t\right)dt - \int_{nT}^{(n+1)T}(f(u(t)), \mathcal{I}_g\eta^t)dt.\end{aligned} \tag{4.124}$$

Integração por partes o primeiro termo de (4.124), usando a segunda equação de (4.6) e a igualdade (4.95), temos

$$\begin{aligned}\int_{nT}^{(n+1)T}(u_{tt}(t), \mathcal{I}_g\eta^t)dt &= \left(u_t(t), \mathcal{I}_g\eta^t\right)\Big|_{nT}^{(n+1)T} - \int_{nT}^{(n+1)T}(u_t(t), \mathcal{I}_g\eta_t^t)dt\\ &= \left(u_t(t), \mathcal{I}_g\eta^t\right)\Big|_{nT}^{(n+1)T} - \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}\int_{nT}^{(n+1)T}\|u_t(t)\|_2^2dt\\ &\quad - \int_{nT}^{(n+1)T}(u_t(t), \mathcal{I}_{g'}\eta^t)dt.\end{aligned} \tag{4.125}$$

Assim, substituindo (4.125) em (4.124) obtemos

$$\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}\int_{nT}^{(n+1)T}\|u_t(t)\|_2^2dt = \sum_{i=1}^{6}\tilde{L}_i, \tag{4.126}$$

com

$$\begin{aligned}\tilde{L}_1 &:= \left(u_t(t), \mathcal{I}_g\eta^t\right)\Big|_{nT}^{(n+1)T},\\ \tilde{L}_2 &:= -\int_{nT}^{(n+1)T}(u_t(t), \mathcal{I}_{g'}\eta^t)dt,\\ \tilde{L}_3 &:= \omega\int_{nT}^{(n+1)T}(\Delta u(t), \mathcal{I}_g(\Delta\eta^t))dt,\\ \tilde{L}_4 &:= \int_{nT}^{(n+1)T}\|\mathcal{I}_g(\Delta\eta^t)\|_2^2dt,\\ \tilde{L}_5 &:= -\int_{nT}^{(n+1)T}M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\left(\Delta u(t), \mathcal{I}_g\eta^t\right)dt,\\ \tilde{L}_6 &:= \int_{nT}^{(n+1)T}(f(u(t)), \mathcal{I}_g\eta^t)dt.\end{aligned}$$

Agora, vamos estimar os termos $\tilde{L}_i$, $i = 1, \ldots, 6$. Em todas as estimativas usaremos a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, a Desigualdade de Young e (2.27). Com efeito, seja $k \in \mathbb{N}$. De (4.76), temos

$$
\begin{aligned}
|\left(u_t(kT), \mathcal{I}_g \eta^{kT}\right)| &\leq \frac{1}{\mu_2^{1/2}} \|u_t(kT)\|_2 \|\mathcal{I}_g(\Delta \eta^{kT})\|_2 \\
&\leq \frac{1}{\mu_2^{1/2}} \|u_t(kT)\|_2 \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{1/2} \|\eta^{kT}\|_{\mathcal{M}_2} \\
&\leq \frac{1}{\mu_2^{1/2}} \left(\frac{1}{2} \|u_t(kT)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\eta^{kT}\|_{\mathcal{M}_2}^2 \right) \\
&\leq \frac{1}{\mu_2^{1/2}} \tilde{E}(kT).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
|\tilde{L}_1| &\leq |\left(u_t((n+1)T), \mathcal{I}_g \eta^{(n+1)T}\right)| + |\left(u_t(nT), \mathcal{I}_g \eta^{nT}\right)| \\
&\leq C[\tilde{E}((n+1)T + \tilde{E}(nT)].
\end{aligned}
$$

Seja $\delta > 0$ dado. Usando (2.27) com $-g'$ no lugar de g e de (4.117), obtemos

$$
\begin{aligned}
|\tilde{L}_2| &\leq \frac{1}{\mu_2^{1/2}} \int_{nT}^{(n+1)T} \|u_t(t)\|_2 \| - \mathcal{I}_{g'}(\Delta \eta^t)\|_2 dt \\
&\leq \frac{2^{1/2}}{\mu_2^{1/2}} \int_{nT}^{(n+1)T} \|u_t(t)\|_2 \| - g'\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{1/2} [D(t)]^{1/2} dt \\
&\leq \delta \int_{nT}^{(n+1)T} \|u_t(t)\|_2^2 dt + \frac{g(0)}{2\delta\mu_2} \int_{nT}^{(n+1)T} D(t) dt.
\end{aligned}
$$

Agora note que

$$
\begin{aligned}
|\tilde{L}_3| &\leq \omega \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2 \|\mathcal{I}_g(\Delta \eta^t)\|_2 dt \\
&\leq \delta \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2^2 dt + \frac{\omega^2}{4\delta} \int_{nT}^{(n+1)T} \|\mathcal{I}_g(\Delta \eta^t)\|_2^2 dt \\
&\leq \delta \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2^2 dt + \frac{\omega^2}{4\delta} \int_{nT}^{(n+1)T} \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2 dt.
\end{aligned}
$$

Além disso,

$$
|\tilde{L}_4| = \int_{nT}^{(n+1)T} \|\mathcal{I}_g(\Delta \eta^t)\|_2^2 dt \leq \int_{nT}^{(n+1)T} \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2 dt.
$$

Seja $M_R > 0$ tal que $|M(\|\nabla u(t)\|_2^2)| \leq M_R$, para todo $t \geq 0$. Então,

$$
\begin{aligned}
|\tilde{L}_5| &\leq \frac{M_R}{\mu_2^{1/2}} \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2 \|\mathcal{I}_g(\Delta\eta^t)\|_2 dt \\
&\leq \frac{M_R}{\mu_2^{1/2}} \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2 \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{1/2} \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2} dt \\
&\leq \delta \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2^2 dt + \frac{M_R^2}{4\mu_2\delta} \int_{nT}^{(n+1)T} \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2 dt.
\end{aligned}
$$

Por (4.81) e tomando $N_R > 0$ tal que $\tilde{E}(0) \leq N_R$, segue que

$$
\begin{aligned}
|\tilde{L}_6| &\leq \frac{1}{\mu_2^{1/2}} \int_{nT}^{(n+1)T} \|f(u(t))\|_2 \|\mathcal{I}_g(\Delta\eta^t)\|_2 dt \\
&\leq \frac{\left[C(1+N_R^{\rho/2})\right]^{1/2}}{\mu_2^{1/2}} \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2 \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{1/2} \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2} dt \\
&\leq \delta \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2^2 dt + \frac{C(1+N_R^{\rho/2})}{4\mu_2\delta} \int_{nT}^{(n+1)T} \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2 dt.
\end{aligned}
$$

Substituindo as estimativas feitas para os termos $\tilde{L}_i$, $i = 1, \ldots, 6$, em (4.126) concluímos que

$$
\begin{aligned}
&\int_{nT}^{(n+1)T} \left(\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} - \delta\right) \|u_t(t)\|_2^2 dt - 3\delta \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2^2 dt \\
&\leq C[\tilde{E}((n+1)T + \tilde{E}(nT)] + C_{\delta,R} \int_{nT}^{(n+1)T} \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2 dt + C_\delta \int_{nT}^{(n+1)T} D(t) dt,
\end{aligned}
\tag{4.127}
$$

com

$$
C_{\delta,R} := 1 + \frac{\omega^2}{4\delta} + \frac{1}{4\mu_2\delta}\left[M_R^2 + C(1+N_R^{\rho/2})\right] > 0, \qquad C_\delta := \frac{g(0)}{2\delta\mu_2} > 0.
$$

Tomando $\delta = \dfrac{\omega\beta\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}}{36} > 0$ temos que $\delta < \dfrac{\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}}{2}$. Assim, de (4.127), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}}{2} \int_{nT}^{(n+1)T} \|u_t(t)\|_2^2 dt - \frac{\omega\beta\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}}{12} \int_{nT}^{(n+1)T} \|\Delta u(t)\|_2^2 dt \\
&\leq C[\tilde{E}((n+1)T + \tilde{E}(nT)] + C_R \int_{nT}^{(n+1)T} \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2 dt + C \int_{nT}^{(n+1)T} D(t) dt,
\end{aligned}
\tag{4.128}
$$

onde $C > 0$ e $C_R > 0$ são constantes independentes de n e de T.

<u>*Desigualdade de Observabilidade*</u>: Multiplicando (4.128) por $\dfrac{3}{\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}} > 0$ e somando com a

desigualdade (4.123), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{nT}^{(n+1)T} \tilde{E}(t)dt \leq C[\tilde{E}((n+1)T) + \tilde{E}(nT)] + C_R \int_{nT}^{(n+1)T} \|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}_2} dt \\ +C \int_{nT}^{(n+1)T} D(t)dt,\end{aligned} \tag{4.129}$$

para todo $T > 0$, com $C > 0$ e $C_R > 0$ independentes de n e de T. Combinando (4.116) e (4.129), vem que

$$\int_{nT}^{(n+1)T} \tilde{E}(t)dt \leq C\tilde{E}((n+1)T) + C_R \int_{nT}^{(n+1)T} \|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}_2} dt + C \int_{nT}^{(n+1)T} D(t)dt, \tag{4.130}$$

para todo $T > 0$, onde $C > 0$ e $C_R > 0$ são independentes de n e de T. Finalmente, como $\tilde{E}$ é decrescente, temos

$$T\tilde{E}((n+1)T) = \int_{nT}^{(n+1)T} \tilde{E}((n+1)T)dt \leq \int_{nT}^{(n+1)T} \tilde{E}(t)dt,$$

e portanto de (4.130) obtemos

$$(T-C)\tilde{E}((n+1)T) \leq C_R \int_{nT}^{(n+1)T} \|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}_2} dt + C \int_{nT}^{(n+1)T} D(t)dt, \quad \forall\ T > 0.$$

Logo, tomando $T_1 \geq 2C$, então

$$\tilde{E}((n+1)T) \leq C_R \int_{nT}^{(n+1)T} \|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}_2} dt + C \int_{nT}^{(n+1)T} D(t)dt, \quad \forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ T > T_1, \tag{4.131}$$

onde $C > 0$ e $C_R > 0$ independem de n.

<u>*Estimativa para* $\int_{nT}^{(n+1)T} \|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}_2} dt$</u>: Usando as hipóteses (4.111) e (4.112), vamos mostrar que existe uma função crescente $\widehat{H}_{\alpha_0} \in C^1([0,\infty))$ com $\widehat{H}_{\alpha_0}(0) = 0$ tal que

$$\int_{nT}^{(n+1)T} \|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}_2} dt \leq \widehat{H}^{-1}_{\alpha_0}\left(\int_{nT}^{(n+1)T} D(t)dt\right).$$

De fato, de (4.113) temos

$$g(t) \leq H^{-1}(-g'(t)), \quad \forall\ t > 0.$$

Além disso, de (4.46), segue que para todo $s > t$ temos

$$\begin{aligned}
\|\Delta\eta^t(s)\|_2^2 &= \|\Delta u(t) - \Delta u_0(t-s)\|_2^2 \\
&\leq 2\|\Delta u(t)\|_2^2 + 2\|\Delta u_0(t-s)\|_2^2 \\
&\leq \frac{4}{\beta\omega}\tilde{E}(0) + 2\sup_{\tau<0}\|\Delta u_0(\tau)\|_2^2 \\
&\leq C_R,
\end{aligned}$$

para alguma constante $K_R > 0$ dependente de R. Assim, usando (4.112) obtemos

$$\left|\int_0^\infty g^{1-\alpha_0}(s)\|\Delta\eta^t(s)\|_2^2 ds\right| \leq C_R \int_0^\infty g^{1-\alpha_0}(s)ds < \infty, \quad \forall\ t > 0.$$

Com isso definimos

$$C_{\alpha_0}(t) := \int_0^\infty g^{1-\alpha_0}(s)\|\Delta\eta^t(s)\|_2^2 ds, \quad t > 0,$$

e

$$C_{1,\alpha_0} := \inf_{t>0} C_{\alpha_0}(t), \quad C_{2,\alpha_0} := \sup_{t>0} C_{\alpha_0}(t).$$

Sem perda de generalidade podemos assumir que $C_{1,\alpha_0} > 0$. Como $\dfrac{1}{\alpha_0} > 1$, segue que a função $F_{\alpha_0}(s) := H(s^{1/\alpha_0})$ é convexa e crescente. Logo, pela Desigualdade de Jensen com

$$G = -F_{\alpha_0}^{-1}, \quad h_1 = -g', \quad h_2^t(s) = g^{1-\alpha_0}(s)\|\Delta\eta^t(s)\|_2^2 ds,$$

temos

$$\begin{aligned}
\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2 &= \int_0^\infty g^{\alpha_0}(s)g^{1-\alpha_0}(s)\|\Delta\eta^t(s)\|_2^2 ds \\
&\leq \int_0^\infty [H^{-1}(-g'(s))]^{\alpha_0} g^{1-\alpha_0}(s)\|\Delta\eta^t(s)\|_2^2 ds \\
&\leq C_{\alpha_0}(t)\left[H^{-1}\left(\frac{1}{C_{\alpha_0}(t)}\int_0^\infty (-g'(s))g^{1-\alpha_0}(s)\|\Delta\eta^t(s)\|_2^2 ds\right)\right]^{\alpha_0}.
\end{aligned}$$

Usando que a função H^{-1} é crescente e de (4.117), então

$$\begin{aligned}
\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2 &\leq C_{\alpha_0}(t)\left[H^{-1}\left(\frac{1}{C_{\alpha_0}(t)}\int_0^\infty (-g'(s))g^{1-\alpha_0}(s)\|\Delta\eta^t(s)\|_2^2 ds\right)\right]^{\alpha_0} \\
&\leq C_{2,\alpha_0}\left[H^{-1}\left(\frac{g^{1-\alpha_0}(0)}{C_{1,\alpha_0}}\int_0^\infty (-g'(s))\|\Delta\eta^t(s)\|_2^2 ds\right)\right]^{\alpha_0} \\
&= C_{2,\alpha_0}\left[H^{-1}\left(\frac{2g^{1-\alpha_0}(0)}{C_{1,\alpha_0}}D(t)\right)\right]^{\alpha_0}.
\end{aligned}$$

Pondo

$$C_1 = \frac{C_{1,\alpha_0}}{2g^{1-\alpha_0}(0)} > 0, \qquad C_2 = C_{2,\alpha_0}^{-1/\alpha_0} > 0,$$

definimos a função $H_{\alpha_0} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ por $H_{\alpha_0}(s) = C_1 H(C_2 s^{1/\alpha_0})$. Note que H_{α_0} é uma função H_{α_0} crescente, convexa e de classe C^1 em $[0,\infty)$ com $H_{\alpha_0}(0) = 0$ (veja as contas feitas para (3.181)). Mais ainda, a função

$$H_{\alpha_0}^{-1}(s) = \frac{1}{C_2^{\alpha_0}} \left[H^{-1}\left(\frac{1}{C_1} s \right) \right]^{\alpha_0}.$$

é crescente. Consequentemente,

$$\|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2 \leq H_{\alpha_0}^{-1}(D(t)), \quad \forall\ t > 0. \tag{4.132}$$

Integrando (4.132) sobre $(nT, (n+1)T)$, temos

$$\int_{nT}^{(n+1)T} \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2 dt \leq \int_{nT}^{(n+1)T} H_{\alpha_0}^{-1}(D(t)) dt. \tag{4.133}$$

Como H_{α_0} é convexa e crescente, então, usando novamente a Desigualdade de Jensen, agora com

$$G = -H_{\alpha_0}^{-1}, \quad h_1 = D, \quad h_2 \equiv 1,$$

obtemos

$$\int_{nT}^{(n+1)T} H_{\alpha_0}^{-1}(D(t)) dt \leq T H_{\alpha_0}^{-1} \left(\frac{1}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} D(t) dt \right). \tag{4.134}$$

Logo, de (4.133) e (4.134), segue que

$$\int_{nT}^{(n+1)T} \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2 dt \leq T H_{\alpha_0}^{-1} \left(\frac{1}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} D(t) dt \right). \tag{4.135}$$

Definindo $\widehat{H}_{\alpha_0} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ por

$$\widehat{H}_{\alpha_0}(s) = T H_{\alpha_0}\left(\frac{1}{T} s \right) = T C_1 H\left(C_2 T^{-1/\alpha_0} s^{1/\alpha_0} \right),$$

temos que $\widehat{H}_{\alpha_0}$ é crescente, convexa e de classe C^1 em $[0,\infty)$ com $\widehat{H}_{\alpha_0}(0) = 0$ e possui inversa crescente

$$\widehat{H}_{\alpha_0}^{-1}(s) = T H_{\alpha_0}^{-1}\left(\frac{1}{T} s \right) = \frac{T}{C_2^{\alpha_0}} \left[H^{-1}\left(\frac{1}{T C_1} s \right) \right]^{\alpha_0}. \tag{4.136}$$

Portanto, de (4.135) e (4.136), vem que

$$\int_{nT}^{(n+1)T} \|\eta^t\|_{\mathcal{M}_2}^2 dt \leq \widehat{H}_{\alpha_0}^{-1} \left(\int_{nT}^{(n+1)T} D(t) dt \right), \tag{4.137}$$

como queríamos.

<u>*Conclusão*</u>: De (4.131) e (4.137), temos que

$$\begin{aligned} \tilde{E}((n+1)T) &\leq C_R \widehat{H}_{\alpha_0}^{-1}\left(\int_{nT}^{(n+1)T} D(t)dt\right) + C\int_{nT}^{(n+1)T} D(t)dt \\ &\leq C_R(\widehat{H}_{\alpha_0}^{-1} + Id)\left(\int_{nT}^{(n+1)T} D(t)dt\right), \end{aligned} \tag{4.138}$$

para todo $T > T_1$ com $C_R > 0$ independente de n. Considere a função $\tilde{H}_{\alpha_0} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ dada por

$$\tilde{H}_{\alpha_0}(s) = C_R(\widehat{H}_{\alpha_0}^{-1} + Id)(s) = \left[c_1 H^{-1}(c_2 s)\right]^{\alpha_0} + c_3 s,$$

onde

$$c_1 = \frac{(C_R T)^{1/\alpha_0}}{C_2} > 0, \quad c_2 = \frac{1}{TC_1} > 0, \quad c_3 = C_R > 0.$$

Note que $\tilde{H}_{\alpha_0}$ é crescente e positiva, pois a soma de duas funções crescentes e positivas é ainda uma função crescente e positiva. Assim, a função

$$\tilde{H}_{\alpha_0}^{-1}(s) = (\widehat{H}_{\alpha_0}^{-1} + Id)^{-1}\left(\frac{1}{C_R}s\right)$$

é crescente. Mais ainda , $\tilde{H}_{\alpha_0}^{-1}$ é positiva e de (4.138), temos

$$\tilde{E}((n+1)T) \leq \tilde{H}_{\alpha_0}\left(\int_{nT}^{(n+1)T} D(t)dt\right), \quad \forall\ T > T_1. \tag{4.139}$$

Logo, de (4.116) e (4.139) vem que

$$\tilde{E}((n+1)T) + \tilde{H}_{\alpha_0}^{-1}(\tilde{E}((n+1)T)) \leq \tilde{E}(nT), \quad \forall\ T > T_1. \tag{4.140}$$

Agora, vamos mostrar que $\tilde{H}_{\alpha_0}^{-1}(0) = 0$. De fato, suponhamos que $\tilde{H}_{\alpha_0}^{-1}(0) > 0$. Como $\tilde{H}_{\alpha_0}$ é crescente, temos $0 > \tilde{H}_{\alpha_0}(0)$, o que contraria o fato de $\tilde{H}_{\alpha_0}$ ser positiva. Assim, fixando $T > T_1$ e pondo

$$s_n = \tilde{E}(nT), \qquad S(0) = \tilde{E}(0), \qquad p = \tilde{H}_{\alpha_0}^{-1},$$

obtemos do Lema 2.114 que

$$\tilde{E}(nT) \leq S(n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

onde $S(t)$ é solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0, \qquad S(0) = \tilde{E}(0),$$

onde $q(s) = s - (Id + \tilde{H}_{\alpha_0}^{-1})^{-1}(s)$. Além disso, $\lim\limits_{t\to\infty} S(t) = 0$. Para todo $t > T > T_1$, existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $0 < r < T_1$ tais que $t = n_0 T_1 + r$. Portanto, como S é decrescente (ver [18]), concluímos que

$$\tilde{E}(t) = \tilde{E}(n_0T_1 + r) \leq \tilde{E}(n_0T_1) \leq S(n_0) = S\left(\frac{t-r}{T_1}\right) \leq S\left(\frac{t}{T_1} - 1\right), \quad \forall\ t > T_1,$$

e a prova do Teorema 4.6 está completa. $\square$

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho estudamos dois modelos de vigas viscoelásticas extensíveis com uma força externa atuando sobre a viga. O primeiro modelo foi considerado com história nula e duas condições de fronteira. A boa colocação foi mostrada via método de Faedo-Galerkin, uma vez que a equação proveniente do modelo é não autônoma. No segundo caso, considerou-se a história não nula e, por meio da introdução de uma nova variável, o modelo foi convertido num sistema autônomo, o qual é equivalente ao problema original. Neste caso, foi possível aplicar o método de semigrupos lineares para mostrar a boa colocação do modelo.

A principal contribuição deste trabalho foi em relação aos resultados de decaimento de energia. De fato, assumindo que o núcleo de memória satisfaz uma Desigualdade Diferencial Linear (DDL), foi mostrado que, para o modelo com história nula, a energia decai para zero na mesma taxa que decai a função g. Já para o modelo com história não nula, podemos observar que a taxa de decaimento de energia não é a mesma que o núcleo de memória g. Isto se deve ao fato de que um termo adicional aparece somado à expressão do decaimento de energia para o modelo com história nula. Para dar uma ideia mais precisa desses fatos, vejamos o esquema a seguir.

<u>Hipótese caso DDL:</u>

$$\boxed{g'(t) \leq -\xi(t)g(t)} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{g(t) \leq g(0)e^{-\int_0^t \xi(s)\,ds}}$$

<u>Decaimentos:</u>

(a) <u>Modelo sem história:</u>

$$\boxed{E(t) \leq K_R e^{-\gamma_R \int_0^t \xi(s)ds}}$$

(b) <u>Modelo com história:</u>

$$\boxed{\tilde{E}(t) \leq C_R\left(1 + \int_0^t (g(s))^{1-\varepsilon_0} ds\right) e^{-\varepsilon_0 \int_0^t \xi(s)ds} + C_R \int_t^{\infty} g(s)ds}$$

Por outro lado, assumindo que a função g satisfaz uma Desigualdade Diferencial Não Linear (DDNL), foi mostrado que, em ambos os modelos com ou sem história, a taxa de decaimento da energia é governada pela solução de um problema de valor inicial. Ou seja, a estrutura do decaimento é preservada, como vemos no esquema abaixo.

<u>Hipótese:</u>

$$\boxed{g'(t) \leq -H(g(t))}$$

Decaimentos:

(a) Modelo sem história:

$$\boxed{E(t) \leq S\left(\frac{t}{T_1} - 1\right)}$$

(b) Modelo com história:

$$\boxed{\tilde{E}(t) \leq S\left(\frac{t}{T_1} - 1\right)}$$

onde, em ambos os casos, S é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} S_t + q(S) = 0, \quad t > 0, \\ S(0) = E(0) \ (\tilde{E}(0) \text{ no caso (b)}), \end{cases}$$

com

$$q(s) = s - (Id + \tilde{H}_{\alpha_0}^{-1})^{-1}(s) \quad \text{e} \quad \tilde{H}_{\alpha_0} = \left[c_1 H^{-1}(c_2 s)\right]^{\alpha_0} + c_3 s.$$

Para trabalhos futuros, pode-se investigar uma maneira de preservar a estrutura de decaimento quando assumido a hipótese para DDL e, com isto, mostrar que a energia associada ao problema com história não nula decai na mesma taxa que o núcleo de memória g.

A EXEMPLOS DE NÃO LINEARIDADES

Este apêndice tem como objetivo exibir exemplos de funções M e f satisfazendo as hipóteses (**H.2**), (**H.3**) e (**H.6**). As funções consideradas aqui são exemplos referentes ao Capítulo 3, já que o mesmo pode ser feito para o Capítulo 4 (basta trocar l por ω).

A.1 Termo Não Local M

Observe que as hipóteses (**H.2**) e (**H.6**) são satisfeitas se M satisfaz a seguinte desigualdade diferencial:

$$\mathcal{J}(y) := 2y'(s)s + y(s) + \alpha_0 \geq 0 \quad \text{em} \quad [0, \infty), \tag{A.1}$$

De fato, suponhamos que $M \in C^1([0,\infty))$ satisfaz (A.1) para qualquer constante $\alpha_0 \geq 0$ (que posteriormente tomaremos como $l\beta_1$). Para $s = 0$ obtemos a igualdade em (3.6) e em (3.145). Seja $s > 0$. Integrando (A.1) sobre $[0, s]$ com M no lugar de y, temos

$$2\int_0^s \tau M'(\tau)d\tau + \widehat{M}(s) + \alpha_0 s \geq 0. \tag{A.2}$$

Usando integração por partes, obtemos

$$2\int_0^s \tau M'(\tau)d\tau = 2\tau M(\tau)\Big|_0^s - 2\widehat{M}(s) = 2sM(s) - 2\widehat{M}(s). \tag{A.3}$$

De (A.2) e (A.3), segue que a hipótese (**H.6**) é satisfeita com $\alpha_0 = l\beta_1$. Além disso, multiplicando (3.145) por $\dfrac{1}{2}s^{-1/2}$ temos

$$\frac{d}{ds}\left(\widehat{M}(s)s^{-1/2}\right) \geq -\frac{\alpha_0}{2}s^{-\frac{1}{2}}. \tag{A.4}$$

Assim, integrando (A.4) sobre $(0, s]$ e tomando $\alpha_0 = l\beta_1$ obtemos a desigualdade (3.6) da hipótese (**H.2**).

Vejamos agora exemplos de funções M que satisfazem a desigualdade (A.1). Aqui tomaremos $\alpha_0 = l\beta_1$.

Exemplo A.1.1 (constante)**.** Seja $M(s) = -\frac{l\beta_1}{2}$. Neste caso M satisfaz a desigualdade (A.1) com

$$\mathcal{J}(M) = \frac{l\beta_1}{2} > 0 \quad s \geq 0.$$

Exemplo A.1.2 (polinomial)**.** Considere $M(s) = s^p - l\beta_1$, $p \geq 1$. Note que

$$\mathcal{J}(M) = s^p(2p+1) \geq 0, \quad s \geq 0.$$

Logo, M satisfaz as hipóteses (**H.2**) e (**H.6**).

Exemplo A.1.3 (logarítmo)**.** Considere também $M(s) = b\ln(s + e^{-l\beta_1})$, $b \in [0,1]$. Assim, M satisfaz as hipóteses (**H.2**) e (**H.6**) com

$$\mathcal{J}(M) \geq l\beta_1(1-b) \geq 0, \quad s \geq 0.$$

Exemplo A.1.4 (exponencial)**.** Seja $M(s) = (a+1)^s - (1 + l\beta_1)$, $a > 0$. Temos que

$$\mathcal{J}(M) = 2s\ \ln(a+1)(a+1)^s + (a+1)^s - 1 \geq 0, \quad s \geq 0.$$

Ou seja, a desigualdade (A.1) é satisfeita.

Exemplo A.1.5 (hiperbólico)**.** A função $M(s) = b\sinh(s) - l\beta_1$, $b \geq 0$ satisfaz a desigualdade (A.1). De fato, note que

$$\mathcal{J}(M) = 2bs\cosh(s) + b\sinh(s) \geq 0, \quad s \geq 0,$$

o que prova o desejado.

A.2 FORÇA EXTERNA f

Exemplo A.2.1 (Localmente Lipschitz)**.** Considere $f(s) = |s|^\gamma s$, $\gamma > 0$. Note que f satisfaz a hipótese (**H.3**) com $\widehat{f}(s) = \frac{1}{\gamma+2}|s|^{\gamma+2}$, $f'(s) = \gamma|s|^\gamma$ e $\gamma = \frac{\rho}{2}$. Além disso, as funções

- $f_1(s) = a|s|^\gamma s + bs, \quad a, b, \gamma > 0,$
- $f_2(s) = |s|^\gamma s + |s|^\delta s, \quad \gamma > \delta \geq 0,$

também cumprem as condições da hipótese (**H.3**) para uma escolha particular de a, b, γ e δ, uma vez que são combinações lineares positivas de f.

Exemplo A.2.2 (Globalmente Lipschitz)**.** As funções

- $f_3(s) = \kappa\sin(s), \quad \kappa > 0,$
- $f_4(s) = \kappa\ \ln(s^2+1), \quad \kappa > 0,$
- $f_5(s) = -\kappa\arctan(s), \quad \kappa > 0,$

satisfazem a hipótese (**H.3**) com $\kappa = \mu_3$ e

- $\widehat{f}_3(s) = -\kappa\cos(s), \quad f_3'(s) = \kappa\cos(s),$
- $\widehat{f}_4(s) = \kappa s(\ln(s^2+1) - 2) + 2\arctan(s), \quad f_4'(s) = \kappa\dfrac{2s}{s^2+1},$

- $\widehat{f}_5(s) = -\kappa\left(s\arctan(s) - \dfrac{1}{2}\ln(s^2+1)\right), \quad f_5'(s) = -\dfrac{\kappa}{1+s^2}.$

Os cálculos dos exemplos acima foram comprovados usando ferramentas básicas do cálculo diferencial e integral, tais como máximo e mínimo de funções na reta.

REFERÊNCIAS

[1] ADAMS, R. A., AND FOURNIER, J. J. F. *Sobolev Spaces*. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 2003.

[2] BOCHNER, S., AND TAYLOR, A. E. Linear functionals on certain spaces of abstractly-valued functions. *Annals of Mathematics* (1938), 913–944.

[3] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer New York, 2010.

[4] CAPOBIANCO, R. Decaimento de energia para um modelo viscoelástico de placas. Dissertação de Mestrado, UEL, 2014.

[5] CAVALCANTI, M. M., AND CAVALCANTI, V. N. D. *Introdução a Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*. Eduem, Maringá, PR, 2009.

[6] CAVALCANTI, M. M., CAVALCANTI, V. N. D., AND KOMORNIK, V. *Introdução a Análise Funcional*. Eduem, Maringá, PR, 2011.

[7] CAVALCANTI, M. M., CAVALCANTI, V. N. D., AND MA, T. F. Exponential decay of the viscoelastic Euler-Bernoulli equation with a nonlocal dissipation in general domains. *Differential and Integral Equations 17*, 5-6 (2004), 495–510.

[8] CAVALCANTI, M. M., CAVALCANTI, V. N. D., AND SORIANO, J. A. Global existence and asymptotic stability for the nonlinear and generalized damped extensible plate equation. *Communications in Contemporary Mathematics 6*, 05 (2004), 705–731.

[9] CODDINGTON, E. A., AND LEVINSON, N. *Theory of ordinary differential equations*. Tata McGraw-Hill Education, 1955.

[10] EVANS, L. *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 1998.

[11] FOLLAND, G. B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2013.

[12] GIORGI, C., PATA, V., AND VUK, E. On the extensible viscoelastic beam. *Nonlinearity 21*, 4 (2008), 713–734.

[13] GRASSELLI, M., AND PATA, V. Uniform attractors of nonautonomous dynamical systems with memory. In *Evolution equations, semigroups and Functional Analysis*. Springer, 2002, pp. 155–178.

[14] GUESMIA, A., AND MESSAOUDI, S. A. A new approach to the stability of an abstract system in the presence of infinite history. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 416*, 1 (2014), 212–228.

[15] KESAVAN, S. *Functional Analysis*. Texts and readings in mathematics. Hindustan Book Agency, 2009.

[16] KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley Classics Library. Wiley, 1989.

[17] LASIECKA, I., MESSAOUDI, S. A., AND MUSTAFA, M. I. Note on intrinsic decay rates for abstract wave equations with memory. *Journal of Mathematical Physics 54*, 3 (2013), 031504.

[18] LASIECKA, I., AND TATARU, D. Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping. *Differential and integral Equations 6*, 3 (1993), 507–533.

[19] LASIECKA, I., AND WANG, X. Intrinsic decay rate estimates for semilinear abstract second order equations with memory. In *New Prospects in Direct, Inverse and Control Problems for Evolution Equations*. Springer, 2014, pp. 271–303.

[20] LIONS, J.-L. *Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non linéaires*, vol. 31. Dunod Paris, 1969.

[21] MEDEIROS, L. A. *Tópicos em equações diferenciais parciais*. UFRJ/IM, Rio de Janeiro, 2006.

[22] MESSAOUDI, S. A. General decay of solutions of a viscoelastic equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 341*, 2 (2008), 1457–1467.

[23] MESSAOUDI, S. A. General decay of the solution energy in a viscoelastic equation with a nonlinear source. *Nonlinear Analysis 69*, 8 (2008), 2589–2598.

[24] PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 1992.

[25] RIVERA, J. *Teoria das distribuições e equações diferenciais parciais*. UFRJ, Rio de Janeiro, 2004.

[26] RIVERA, J. M., LAPA, E. C., AND BARRETO, R. Decay rates for viscoelastic plates with memory. *Journal of Elasticity 44*, 1 (1996), 61–87.

[27] TOSTI, A. S. O. Taxas de decaimento para um modelo viscoelástico de placas. Dissertação de Mestrado, UEL, 2015.

[28] Visik, M. I., and Ladyzenskaya, O. A. On boundary value problems for pde and certain class of operators equations. *AMS Transl 2*, 10 (1958).

[29] Yosida, K. *Functional Analysis*. Classics in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2012.

[30] Zeidler, E., and Boron, L. *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications: II/ A: Linear Monotone Operators*. Nonlinear Functional Analysis and Its Applications: Linear Monotone Operators / Transl. by the Author and by Leo F. Boron. Springer New York, 1989.

[31] Zheng, S. *Nonlinear Evolution Equations*. Chapman & Hall/CRC monographs and surveys in pure and applied mathematics. CRC Press, 2004.