Universidade
Estadual de Londrina

PEDRO ROBERTO DE LIMA

SISTEMA DE BRESSE TERMOELÁSTICO NÃO LINEAR:
EXISTÊNCIA GLOBAL E ESTABILIDADE EXPONENCIAL

Londrina
2015

PEDRO ROBERTO DE LIMA

SISTEMA DE BRESSE TERMOELÁSTICO NÃO LINEAR:
EXISTÊNCIA GLOBAL E ESTABILIDADE EXPONENCIAL

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientadora: Profa. Dra. Luci Harue Fatori

Londrina
2015

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

L732s Lima, Pedro Roberto de.
Sistema de Bresse termoelástico não linear : existência global e estabilidade exponencial / Pedro Roberto de Lima. – Londrina, 2015.
117 f. : il.

Orientador: Luci Harue Fatori.
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2015.
Inclui bibliografia.

1. Análise matemática – Teses. 2. Equações diferenciais parciais – Teses. 3. Equações de evolução – Teses. 4. Estabilidade – Teses. I. Fatori, Luci Harue. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

CDU 517.1

PEDRO ROBERTO DE LIMA

SISTEMA DE BRESSE TERMOELÁSTICO NÃO LINEAR:
EXISTÊNCIA GLOBAL E ESTABILIDADE EXPONENCIAL

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Prof[a]. Dr[a]. Luci Harue Fatori
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Hugo Danilo Fernández Sare
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 20 de fevereiro de 2015.

Dedico este trabalho aos meus pais, Flávio e Maria, e às minhas irmãs, Maria e Flávia.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida, pela graça diária e pela conquista do presente trabalho. Agradeço aos meus pais, Aparecido Flávio de Lima e Maria Ines Ramim de Lima, e às minhas irmãs, Flávia Maria de Lima e Maria Antonia de Lima, pelo apoio incondicional. Agradeço à professora Luci Harue Fatori pelo convívio agradável e pela enriquecedora orientação. Agradeço aos professores do PGMAC pelos conhecimentos compartilhados. Agradeço aos colegas de curso pela amizade e pelas ajudas. Agradeço aos professores Hugo Danilo Fernández Sare e Marcio Antonio Jorge da Silva, membros da banca examinadora, pelas contribuições. Agradeço aos professores da graduação, Ana Lucia Pereira Bacon e Jonis Jeckis Nervis, pelo incentivo. Agradeço a todos os amigos, familiares e conhecidos que torceram por mim. Finalmente, mas não menos importante, agradeço à Capes pelo apoio financeiro.

Não há limite para fazer livros, e o muito estudar é enfado da carne. De tudo o que se tem ouvido, a suma é: Teme a Deus e guarda os seus mandamentos; porque isto é o dever de todo homem. (Eclesiastes 12:12-13)

DE LIMA, Pedro Roberto. **Sistema de Bresse termoelástico não linear:** existência global e estabilidade exponencial. 2015. 117 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar um sistema de Bresse não linear dissipativo. A não linearidade está presente na equação do movimento vertical e o mecanismo dissipativo é dado por uma dissipação térmica agindo na equação do cisalhamento. A existência de uma solução local para o problema e a existência de uma solução global exponencialmente estável serão ambas investigadas.

Palavras-chave: Sistema de Bresse. Sistema não linear. Dissipação térmica. Existência e unicidade. Decaimento exponencial.

DE LIMA, Pedro Roberto. **Nonlinear thermoelastic Bresse system:** global existence and exponential stability. 2015. 117 p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

ABSTRACT

The aim of this work is to study a dissipative nonlinear Bresse system. The nonlinearity is present in the vertical motion equation and the dissipative mechanism is given by a thermal dissipation acting on the shear equation. The existence of a local solution for the problem and the existence of an exponentially stable global solution will be both investigated.

Keywords: Bresse system. Nonlinear system. Thermal dissipation. Existence and uniqueness. Exponential decay.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{K}$	corpo $\mathbb{R}$ dos números reais ou o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos
$L^p(\Omega)$	espaço $L^p(\Omega)$ usual
$L^p_{\text{loc}}(\Omega)$	espaço das funções de $L^p(\Omega)$ localmente integráveis em Ω
$L^p\big(0,T;X\big)$	espaço $L^p(0,T;X)$ usual
$\mathbf{L}^p\big(0,T;X\big)$	produto cartesia;o $\big[L^p\big(0,T;X\big)\big]^3$
$W^{m,p}(\Omega)$	espaço de Sobolev usual
$H^m(\Omega)$	espaço $W^{m,p}(\Omega)$ para $p=2$
$H^0(\Omega)$	espaço $L^2(\Omega)$
$H^1_*(\Omega)$	espaço das funções de $H^1(\Omega)$ que possuem média nula
$L^2_*(\Omega)$	espaço das funções de $L^2(\Omega)$ que possuem média nula
$\mathcal{L}(X)$	espaço dos operadores lineares limitados de $B : X \to X$
X'	espaço dos funcionais lineares limitados $\Lambda : X \to \mathbb{K}$
$C(\Omega)$	espaço das funções contínuas $f : \Omega \to \mathbb{K}$
$C^0(\Omega)$	espaço $C(\Omega)$
$C^j(\Omega)$	espaço das funções $f : \Omega \to \mathbb{K}$, j vezes continuamente diferenciáveis
$C^\infty(\Omega)$	espaço das funções $f : \Omega \to \mathbb{K}$ infinitamente diferenciáveis
$C^\infty_0(\Omega)$	espaço das funções de $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto
$C^j\big([0,T],X\big)$	espaço das funções $f : [0,T] \to X$, j vezes continuamente diferenciáveis
$D(A)$	domínio do operador A
$\mathcal{D}(\Omega)$	espaço usual das funções teste
$\mathcal{D}'(\Omega)$	espaço usual das distribuições
$\mathcal{D}'(0,T;X)$	espaço usual das distribuições a valores vetoriais
$\mathrm{Im}(A)$	imagem do operador A
$\boldsymbol{\rho}(A)$	conjunto resolvente do operador A
$\boldsymbol{\sigma}(A)$	espectro do operador A
$\{\mathrm{e}^{tA}\}_{t\geq 0}$	semigrupo gerado pelo operador A
$\exp$	função exponencial
$\mathrm{med}\, X$	medida de Lebesgue de $X \subset \mathbb{R}^N$
$\mathrm{supp}(\phi)$	suporte da função ϕ
$\overline{\lim}$	limite superior
$\underline{\lim}$	limite inferior
$\cong$	isomorfismo isométrico
$\hookrightarrow$	inclusão contínua
$\rightharpoonup$	convergência fraca
$\overset{*}{\rightharpoonup}$	convergência fraca estrela
i	aplicação inclusão dada por $i(x)=x$

I	operador identidade
$\mathbf{i}$	unidade imaginária
$\mathbf{i}\mathbb{R}$	conjunto dos números complexos que possuem parte real nula
$\Im(z)$	parte imaginária do número complexo z
$\Re(z)$	parte real do número complexo z
$\overline{z}$	conjugado do número complexo z
$\lvert z\rvert$	norma do número complexo z
$\lVert\cdot\rVert_{\mathbb{R}^3}$	norma do máximo em $\mathbb{R}^3$
$\lVert\cdot\rVert_{L^p}$	norma usual em $L^p(\Omega)$
$\lVert\cdot\rVert_{L^p(0,T;X)}$	norma usual em $L^p\big(0,T;X)$
$\lVert\cdot\rVert_{\mathbf{L}^p(0,T;X)}$	norma em $\mathbf{L}^p\big(0,T;X)$ dada por $\lVert(u_1,u_2,u_3)\rVert^2_{\mathbf{L}^p(0,T;X)} = \sum_{j=1}^{3}\lVert u_j\rVert^2_{L^p(0,T;X)}$
$\lvert\cdot\rvert_{W^{m,p}}$	norma em $W^{m,p}(\Omega)$ dada por $\lvert u\rvert_{W^{m,p}} = \sum_{\lVert\alpha\rVert\leq m}\lVert D^\alpha u\rVert_{L^p}$
$\lVert\cdot\rVert_{W^{m,p}}$	norma em $W^{m,p}(\Omega)$ dada por $\lVert u\rVert^p_{W^{m,p}} = \sum_{\lVert\alpha\rVert\leq m}\lVert D^\alpha u\rVert^p_{L^p}$
$\lVert\cdot\rVert_{\mathcal{L}}$	norma em $\mathcal{L}(X)$ dada por $\lVert T\rVert_{\mathcal{L}} = \sup\{\lVert Tx\rVert_X;\ x\in X \text{ e } \lVert x\rVert_X = 1\}$
$\lVert\cdot\rVert_{D(A)}$	norma do gráfico em $D(A)\subset X$ dada por $\lVert U\rVert_{D(A)} = \lVert U\rVert_X + \lVert AU\rVert_X$
$\lVert\cdot\rVert_\infty$	norma uniforme em $C([a,b])$ dada por $\lVert f\rVert_\infty = \sup_{x\in[a,b]}\lvert f(x)\rvert$
$\lVert\cdot\rVert_{j,\infty}$	norma em $C^j([a,b])$ dada por $\lVert f\rVert_{j,\infty} = \max_{0\leq i\leq j}\lVert\partial^i_x f\rVert_\infty$
$\lVert\alpha\rVert$	soma $\alpha_1+\cdots+\alpha_N$, onde $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_N)\in\mathbb{N}^N$
D^α	operador derivação dado por $D^\alpha f = \dfrac{\partial^{\lVert\alpha\rVert}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_N^{\alpha_N}}$

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O *sistema de Bresse*, assim chamado em referência ao engenheiro francês Jacques Antoine Charles Bresse (1822-1883), é um sistema de equações diferenciais parciais que descreve o comportamento de uma viga arqueada fina.

Figura 1.1 – Jacques Antoine Charles Bresse (Fonte: [14], p. 719).

Em sua forma isotérmica (isto é, que despreza a variação de temperatura), o sistema de Bresse leva em conta três variáveis - o deslocamento vertical φ, o ângulo de rotação da seção transversal ψ e o deslocamento longitudinal w - todas elas funções dependentes do tempo $t \geq 0$ e da posição $x \in [0, \ell]$, onde ℓ é o comprimento de uma *linha de referência* que atravessa o centro da viga. Neste caso, as leis constitutivas do sistema são dadas por

$$\begin{aligned} \rho_0 A \varphi_{tt} &= Q_x + lN, \\ \rho_0 I \psi_{tt} &= M_x - Q, \\ \rho_0 A w_{tt} &= N_x - lQ, \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde $Q = Gh(\varphi_x + \psi + lw)$, $N = Eh(w_x - l\varphi)$ e $M = EI\psi_x$ descrevem, respectivamente, a força de cisalhamento, a força axial e o momento fletor, ρ_0 é a densidade, A é a área da seção transversal, l é a curvatura inicial, I é o momento de inércia da seção transversal (com respeito ao eixo vertical), G é o módulo de cisalhamento, h é o coeficiente de cisalhamento e E é o módulo de elasticidade (ver [2, 16]).

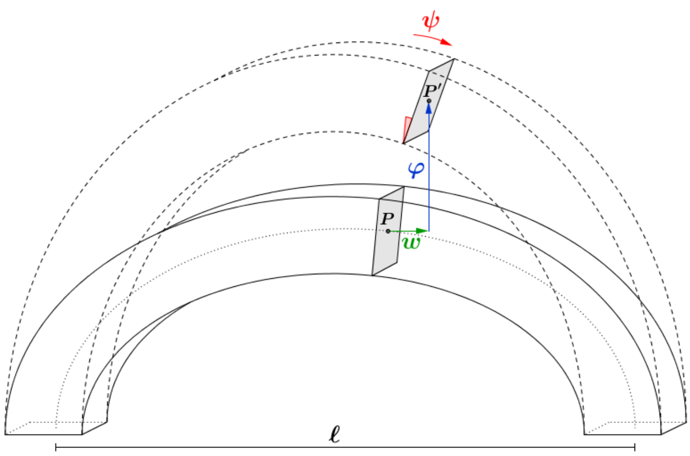

Figura 1.2 – Viga arqueada fina. Após a deformação, uma partícula P da linha de referência ocupa a posição P' (Fonte: Elaborada pelo autor).

O sistema (1.1) foi, primeiramente, obtido por Bresse em [3] e, mais recentemente, por Lagnese, Leugering e Schmidt em [15] como um caso particular de um sistema mais geral que rege a movimentação de uma viga arqueada considerando uma quarta variável: a variação de temperatura θ. Utilizando este modelo mais geral, pode-se deduzir o *sistema de Bresse termoelástico* que consiste no sistema (1.1) com uma (ou mais de uma) equação do calor acoplada. No caso em que se considera o fluxo de calor agindo apenas no ângulo de rotação, o sistema termoelástico se escreve da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \rho_0 A\varphi_{tt} &= Q_x + lN, \\ \rho_0 I\psi_{tt} &= M_x - Q, \\ \rho_0 A w_{tt} &= N_x - lQ, \\ \rho_0 c_\nu \theta_t &= q_x - \gamma T_0 \psi_{tx}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

onde $M = EI\psi_x - \gamma\theta$, q representa o fluxo de calor, c_ν é a capacidade térmica, T_0 é a temperatura de referência, γ é uma constante de acoplamento e as demais notações são as mesmas que anteriormente. Nos casos em que se utiliza a Lei de Fourier de condução do calor (como originalmente feito em [15]), a função q é dada por $q = \frac{1}{\rho_0 c_\nu}\theta_x$. Por outro lado, quando se utiliza a Lei de Cattaneo, o fluxo de calor q é tal que $\tau q_t + \beta q + \theta_x = 0$, onde τ e β são constantes positivas.

O sistema de Bresse termoelástico vem sendo estudado por diversos autores. Em [17], Liu e Rao estudaram um sistema baseado na Lei de Fourier com dois mecanismos dissipativos. Eles deram condições suficientes para garantir tanto o decaimento exponencial da solução quanto o seu decaimento polinomial. Este mesmo resultado foi obtido por Fatori e Rivera em [10] para o sistema (1.2), com o fluxo de calor também sendo dado pela Lei de Fourier. Fatori e Rivera mostraram, ainda, que a condição suficiente para o decaimento exponencial também é necessária. Em [20], Najdi e Wehbe estenderam os resultados obtidos por Fatori e Rivera, considerando uma dissipação térmica localizada. Em [11], Han e Xu deram condições suficientes para garantir o decaimento exponencial de um sistema de Bresse termoelástico baseado na Lei de Cattaneo e possuindo coeficientes variáveis (nos trabalhos anteriormente mencionados, os coeficientes do sistema foram todos considerados constantes).

Outro sistema que também pode ser obtido a partir do modelo mais geral apresentado em [15] é o *sistema de Timoshenko* - assim chamado em referência ao engenheiro ucraniano Stephen Prokofievich Timoshenko (1878-1972).

Figura 1.3 – Stephen Prokofievich Timoshenko (Fonte: [14], p. 769).

O sistema de Timoshenko pode ser visto como um caso particular do sistema de Bresse. Especificamente, o caso no qual a curvatura inicial é nula e o deslocamento longitudinal é desprezado. Por exemplo, considerando a Lei de Fourier e tomando $l = w = 0$ no sistema (1.2), obtém-se o sistema de Timoshenko termoelástico linear:

$$\begin{aligned} \rho_0 A\varphi_{tt} &= Gh(\varphi_x + \psi)_x, \\ \rho_0 I\psi_{tt} &= EI\psi_{xx} - Gh(\varphi_x + \psi) - \gamma\theta_x, \\ \rho_0 c_\nu \theta_t &= \theta_{xx} - \gamma T_0 \psi_{tx}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Se, no sistema (1.3), a força de cisalhamento $Q = Gh(\varphi_x + \psi)$ for substituída por uma não linearidade $Q = \sigma(\varphi_x, \psi)$, obtém-se o seguinte sistema de Timoshenko não linear:

$$\begin{aligned} \rho_0 A\varphi_{tt} &= [\sigma(\varphi_x, \psi)]_x, \\ \rho_0 I\psi_{tt} &= EI\psi_{xx} - Gh(\varphi_x + \psi) - \gamma\theta_x, \\ \rho_0 c_\nu \theta_t &= \theta_{xx} - \gamma T_0 \psi_{tx}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ambos os sistemas, (1.3) e (1.4), foram estudados em [25] por Rivera e Racke. Para o sistema não linear (1.4), eles deram uma condição suficiente para garantir a existência de uma solução global exponencialmente estável. O objetivo do presente trabalho é estender este resultado para um sistema de Bresse termoelástico não linear, também baseado na Lei de Fourier. Por simplicidade, serão utilizadas as seguintes notações: $\rho_0 A = \rho_1$, $Gh = k$, $Eh = k_0$, $\rho_0 I = \rho_2$, $EI = b$, $k_1 = \frac{1}{\rho_0 c_\nu}$ e $m = \frac{\gamma}{\rho_0 c_\nu}$. Assim sendo, o sistema estudado será o seguinte:

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - [\sigma(\varphi_x, \psi, w)]_x - k_0 l(w_x - l\varphi) &= 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x &= 0, \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) &= 0, \\ \theta_t - k_1\theta_{xx} + m\psi_{tx} &= 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

A exposição será organizada conforme segue. No Capítulo 2 serão enunciados os principais resultados necessários para o desenvolvimento dos capítulos seguintes; neste capítulo, a maioria das demonstrações serão omitidas, porém, referências serão indicadas. No Capítulo 3 serão apresentadas demonstrações detalhadas da existência de solução global para o problema (1.2) e de sua estabilidade exponencial - resultado originalmente provado em [10] e que será de fundamental importância para o tratamento do sistema não linear (1.5). Por fim, no Capítulo 4, serão demonstradas existência e estabilidade de solução global para o problema (1.5); este capítulo se dividirá em duas partes: na primeira, será mostrado que o problema (1.5) possui uma solução local e, na segunda, que a solução local pode ser estendida para uma solução global que decai exponencialmente.

2 PRELIMINARES

O objetivo deste capítulo é apresentar algumas definições e os principais resultados que serão necessários para o desenvolvimento do trabalho. Os conceitos relativos à análise funcional e à teoria da medida que forem utilizados sem serem definidos são os usuais e podem, por exemplo, ser consultados em [13] e [26].

2.1 ALGUNS RESULTADOS DE ANÁLISE FUNCIONAL

Definição 2.1 (Sequências convergentes e de Cauchy)**.** Uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em um espaço métrico (X, d) é chamada de

- *convergente* quando existe $x \in X$ satisfazendo a seguinte condição: para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$ sempre que $n > n_0$;
- *sequência de Cauchy* quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ sempre que $n, m > n_0$.

Observação 2.2. Uma sequência em um espaço normado $(X, \|\cdot\|_X)$ é chamada de *sequência de Cauchy* (respect. *convergente*) quando é uma sequência de Cauchy (respect. convergente) em (X, d), onde d é a métrica dada por $d(x, y) = \|x - y\|_X$. A métrica d assim definida é chamada de *métrica induzida pela norma* $\|\cdot\|_X$.

Definição 2.3 (Espaço completo)**.** Diz-se que um espaço métrico (X, d) é *completo* quando toda sequência de Cauchy em X é convergente.

Definição 2.4 (Contração)**.** Seja (X, d) um espaço métrico. Uma aplicação $B : X \to X$ é chamada de *contração* quando existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que $d(Bx, By) \leq \lambda d(x, y)$ quaisquer que sejam $x, y \in X$.

Teorema 2.5 (Teorema do Ponto Fixo de Banach)**.** *Seja (X, d) um espaço métrico completo não vazio. Se $B : X \to X$ é uma contração, então existe $x \in X$ tal que $Bx = x$.*

Demonstração: Ver Teorema 5.1-2 em [13]. ■

Definição 2.6 (Espaço de Banach)**.** Um espaço vetorial normado $(X, \|\cdot\|_X)$ é chamado de *espaço de Banach* quando (X, d) é completo, onde d é a métrica induzida pela norma $\|\cdot\|_X$.

Definição 2.7 (Espaço reflexivo)**.** Um espaço normado X é chamado de *espaço de reflexivo* quando a aplicação canônica

$$C : X \longrightarrow X''$$

$$x \longmapsto g_x$$

é sobrejetiva, onde $g_x : X' \to \mathbb{K}$ é dado por $g_x(f) = f(x)$.

Definição 2.8 (Convergência fraca)**.** Diz-se que uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ num espaço normado X *converge fracamente em* X quando existe $x \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x), \quad \forall\, f \in X'.$$

No caso afirmativo, diz-se que x é o *limite fraco* da sequência e escreve-se $x_n \rightharpoonup x$.

Proposição 2.9. *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Toda sequência limitada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em X possui uma subsequência que converge fracamente em X.*

Demonstração: Ver Proposição 11 (página 501) em [7]. ■

Definição 2.10 (Espaço separável)**.** Um espaço normado X é chamado de *espaço de separável* quando possui um subconjunto enumerável que é denso em X.

Definição 2.11 (Convergência fraca estrela)**.** Seja X um espaço normado. Diz-se que uma sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em X' *converge fraco estrala em* X' quando existe $f \in X'$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall\, x \in X.$$

No caso afirmativo, diz-se que f é o *limite fraco estrela* da sequência e escreve-se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

Proposição 2.12. *Seja X um espaço normado separável. Toda sequência limitada $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em X' possui uma subsequência que converge fraco estrela em X'.*

Demonstração: Ver Proposição 11* (página 502) em [7]. ■

Definição 2.13 (Resolvente e espectro)**.** Sejam X um espaço de Banach complexo e $B : D(B) \subset X \to X$ um operador linear. O *conjunto resolvente* de B é representado por $\rho(B)$ e consiste no conjunto formado por todos os $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o operador $(\lambda I - B)^{-1}$ existe, é limitado e tem domínio denso em X. O *espectro* de B é o conjunto $\sigma(B) = \mathbb{C} \setminus \rho(B)$. Os elementos de $\rho(B)$ são chamados de *valores regulares* de B e os elementos de $\sigma(B)$ são chamados de *valores espectrais* de B.

Cabe salientar que o espectro de um operador B pode se ser decomposto em três partes disjuntas:

- **Espectro pontual** - é representado por $\sigma_p(B)$ e consiste no conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $(\lambda I - B)$ não é invertível. Os elementos de $\sigma_p(B)$ são chamados de *autovalores* de B;

- **Espectro contínuo** - é representado por $\sigma_c(B)$ e consiste no conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $(\lambda I - B)$ é invertível, tem domínio denso mas não é limitado;

- **Espectro residual** - é representado por $\sigma_r(B)$ e consiste no conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $(\lambda I - B)$ é invertível mas não tem domínio denso.

Definição 2.14 (Operador limitado)**.** Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços normados e $B : D(B) \subset X \to Y$ um operador linear. Diz-se que B é *limitado* (ou *contínuo*) quando existe uma constante $C > 0$ tal que $\|Bx\|_Y \leq C\|x\|_X$ para todo $x \in D(B)$.

Observação 2.15. Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço normado. O espaço vetorial de todos os operadores lineares limitados $B : X \to X$ será representado por $\mathcal{L}(X)$. Este espaço será munido com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ dada por $\|B\|_{\mathcal{L}} = \sup\{\|Bx\|_X;\ x \in X$ e $\|x\|_X = 1\}$.

Proposição 2.16. *Sejam X um espaço de Banach e $B_1 \in \mathcal{L}(X)$ um operador invertível tal que $B_1^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Se $B_2 \in \mathcal{L}(X)$ é tal que $\|B_2\|_{\mathcal{L}} < \|B_1^{-1}\|_{\mathcal{L}}^{-1}$, então o operador $B_1 + B_2$ é linear, limitado e invertível.*

Demonstração: Ver Lema 2.12.1 em [24]. ■

Teorema 2.17. *Sejam X, Y espaços de Banach e $B : X \to Y$ um operador linear limitado. Se B é bijetivo, então seu inverso $B^{-1} : Y \to X$ é um operador linear limitado.*

Demonstração: Ver Teorema 4.12-2 em [13]. ■

Proposição 2.18. *Sejam $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ e $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ espaços de Banach. Se existe uma constante C tal que $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$ para todo $x \in X$, então as normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes.*

Demonstração: Defina $B : X_2 \to X_1$ colocando $Bx = x$ para todo $x \in X_2$. É imediato que B é linear e bijetivo. Além disso, B é limitado, pois por hipótese tem-se

$$\|Bx\|_1 = \|x\|_1 \leq C\|x\|_2 \quad \forall\, x \in X_2.$$

Segue-se do Teorema 2.17 que o operador $B^{-1} : X_1 \to X_2$ é limitado, ou seja, existe $K > 0$ tal que

$$\|x\|_2 = \|B^{-1}x\|_2 \leq K\|x\|_1 \quad \forall\, x \in X_2.$$

Isto mostra que as normas são equivalentes. ■

Definição 2.19 (Forma sesquilinear, produto interno)**.** Sejam X e Y espaços vetoriais, ambos definidos sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$. Uma forma *sesquilinear* em $X \times Y$ é uma aplicação $a[\cdot,\cdot] : X \times Y \to \mathbb{K}$ tal que

- $a[x_1 + x_2, y] = a[x_1, y] + a[x_2, y]$,
- $a[x, y_1 + y_2] = a[x, y_1] + a[x, y_2]$,
- $a[\alpha x, y] = \alpha[x, y]$,
- $a[x, \beta y] = \overline{\beta} a[x, y]$,

sejam quais forem $x, x_1, x_2 \in X$, $y, y_1, y_2 \in Y$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. No caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, diz-se *bilinear* em vez de sesquilinear. No caso em que $X = Y$ e valem as propriedades adicionais

- $a[x, y] = \overline{a[y, x]}$ para todo $(x, y) \in X \times X$,
- $a[x, x] \geq 0$ para todo $x \in X$,
- $a[x, x] = 0 \Rightarrow x = 0$,

a forma sesquilinear $a[\cdot, \cdot]$ é chamada de *produto interno* e representada por $(\cdot, \cdot)_X$.

Definição 2.20 (Continuidade de uma forma sesquilinear)**.** Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços normados e $a[\cdot, \cdot]$ uma forma sesquilinear em $X \times Y$. Diz-se que $a[\cdot, \cdot]$ é *contínua* (ou *limitada*) quando $|a[x, y]| \leq \|x\|_X \|y\|_Y$ para todo par $(x, y) \in X \times Y$.

Definição 2.21 (Coercividade de uma forma sesquilinear)**.** Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço normado e $a[\cdot, \cdot]$ uma forma sesquilinear em $X \times X$. Diz-se que $a[\cdot, \cdot]$ é *coerciva* quando existe uma constante positiva C tal que $\Re(a[x, x]) > C\|x\|_X^2$ para todo $x \in X$.

Definição 2.22 (Norma proveniente do produto interno)**.** Sejam X um espaço vetorial e $(\cdot, \cdot)_X$ um produto interno em $X \times X$. Diz-se que a norma definida por $\|x\|_X = \sqrt{(x, x)_X}$ *provém do* (ou é *induzida pelo*) produto interno $(\cdot, \cdot)_X$.

Definição 2.23 (Espaço de Hilbert)**.** Um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ é chamado de *espaço de Hilbert* quando a norma $\|\cdot\|_X$ provém de um produto interno $(\cdot, \cdot)_X$.

Proposição 2.24 (Lema de Lax-Milgram)**.** *Sejam X um espaço de Hilbert (real) e $a[\cdot, \cdot] : X \times X \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear contínua coerciva. Então, dado um funcional linear limitado $\Lambda : X \to \mathbb{R}$, existe um único $u \in X$ satisfazendo*

$$a[u, v] = \Lambda(v), \quad \forall\, v \in X.$$

Demonstração: Ver Corolário 5.8 em [4]. ■

Observação 2.25. Substituindo, nas hipóteses da última proposição, X *real* por X *complexo*, $\Lambda : X \to \mathbb{R}$ por $\Lambda : X \to \mathbb{C}$ e $a[\cdot, \cdot] : X \times X \to \mathbb{R}$ *bilinear* por $a[\cdot, \cdot] : X \times X \to \mathbb{C}$ *sesquilinear*, a conclusão permanece válida (ver Teorema 1, página 376, em [6]).

Definição 2.26 (Operador dissipativo)**.** Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço de Hilbert. Diz-se que um operador linear $B : D(B) \subset X \to X$ é *dissipativo* quando $\Re(Bx, x)_X \leq 0$ para todo $x \in D(B)$.

Teorema 2.27. *Sejam X um espaço de Hilbert e $B : D(B) \subset X \to X$ um operador linear dissipativo.*

(a) Se $\mathrm{Im}(\lambda_0 I - B) = X$ para algum $\lambda_0 > 0$, então $\mathrm{Im}(\lambda I - B) = X$ para todo $\lambda > 0$;

(b) Se $\mathrm{Im}(I-B)=X$*, então* $\overline{D(B)}=X$.

Demonstração: Ver Teoremas 4.5 e 4.6 (páginas 15 e 16) em [22]. ■

Definição 2.28 (Operador compacto)**.** Sejam X e Y espaços normados e $B:X\to Y$ um operador linear. Diz-se que B é *compacto* quando, para todo conjunto limitado $X_1\subset X$, o conjunto $B(X_1)$ é relativamente compacto em Y (ou seja, quando $X_1\subset X$ limitado implica $\overline{B(X_1)}^{Y}\subset Y$ compacto).

Teorema 2.29. *Sejam X e Y espaços normados e $B:X\to Y$ um operador linear. Então, B é compacto se, e somente se, para toda sequência limitada $\{x_n\}_{n\in N}$ em X a sequência $\{Bx_n\}_{n\in N}$ possui uma subsequência convergente em Y.*

Demonstração: Ver Teorema 8.1-3 em [13]. ■

Definição 2.30 (Operador com resolvente compacto)**.** Sejam X um espaço de Banach e $B:D(B)\subset X\to X$ um operador linear. Diz-se que B tem *resolvente compacto* quando existe $\lambda\in\boldsymbol{\rho}(B)$ tal que $(\lambda I-B)^{-1}$ é compacto.

Proposição 2.31. *Sejam $(X,\|\cdot\|_X)$ um espaço de Banach e $B:D(B)\subset X\to X$ um operador linear com resolvente não vazio. Então, B tem resolvente compacto se, e somente, a aplicação inclusão $i:(D(B),\|\cdot\|_{D(B)})\to(X,\|\cdot\|_X)$ é compacta.*

Demonstração: Ver Proposição 5.8 em [8]. ■

Proposição 2.32. *Seja X um espaço de Banach. Se $B:D(B)\subset X\to X$ é um operador linear com resolvente compacto, então $\boldsymbol{\sigma}(B)=\boldsymbol{\sigma}_p(B)$.*

Demonstração: Ver Corolário 1.15 em [8].

2.2 Espaços $\mathbf{L^p(\Omega)}$ e $\mathbf{L^p(0,T;X)}$

Definição 2.33 (Espaço $L^p(\Omega)$)**.** Sejam $1\le p<\infty$ e $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ um aberto. O espaço $L^p(\Omega)$ é o espaço vetorial da classe de funções $u:\Omega\to\mathbb{K}$, mensuráveis à Lebesgue, que satisfazem

$$\int_\Omega |u(x)|^p\,dx<\infty.$$

No espaço $L^p(\Omega)$ defini-se uma norma $\|\cdot\|_{L^p}$ colocando

$$\|u\|_{L^p}=\left(\int_\Omega |u(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 2.34 (Espaço $L^\infty(\Omega)$)**.** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. O espaço $L^\infty(\Omega)$ é o espaço vetorial da classe de funções $u : \Omega \to \mathbb{K}$, mensuráveis à Lebesgue, que são *essencialmente limitadas* em Ω, ou seja, existe uma constante K tal que $|u(x)| \leq K$ para quase todo $x \in \Omega$. O número

$$\inf\{K;\ |u(x)| \leq K \text{ para quase todo } x \in \Omega\}$$

é chamado de *supremo essencial* de u em Ω e representado por $\sup\limits_{x\in\Omega} \text{ess}|u(x)|$.

No espaço $L^\infty(\Omega)$ defini-se uma norma $\|\cdot\|_{L^\infty}$ colocando

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\Omega} \text{ess}|u(x)|.$$

Teorema 2.35. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. O espaço $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Ver Teorema 2.16 em [1]. ■

Observação 2.36. Segue-se do Teorema 2.35 que o espaço $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2})$ é um espaço de Hilbert cujo produto interno é dada por

$$(u, v)_{L^2} = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\, dx.$$

Proposição 2.37 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam p e q expoentes conjugados com $1 < p < \infty$. Se $a, b \geq 0$, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Ver página 622 em [9]. ■

Teorema 2.38 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e p, q expoentes conjugados com $1 \leq p \leq \infty$. Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, então $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx \leq \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}.$$

Demonstração: Ver Teorema 2.4 em [1]. ■

Teorema 2.39 (Desigualdade de Clarkson)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $2 \leq p < \infty$. Se $u, v \in L^p(\Omega)$, então*

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}\|u\|_p^p + \frac{1}{2}\|v\|_p^p.$$

Demonstração: Ver Teorema 2.38 em [1]. ■

Teorema 2.40 (Desigualdade de Gronwall). *Sejam $\phi \in C([0,T])$, $u \in L^1(0,T)$ funções não negativas e $K > 0$ uma constante. Se*

$$\phi(t) \leq K + \int_0^t u(s)\phi(s)\, ds, \quad \forall\, t \in [0,T],$$

então

$$\phi(t) \leq K e^{\int_0^t u(s)\, ds}, \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Demonstração: Ver Corolário 1.5.1 em [23]. ∎

Definição 2.41 (Espaço $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$). Sejam $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. O espaço $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, chamado de espaço das funções *localmente integráveis* em Ω, é o espaço vetorial da classe de funções $u : \Omega \to \mathbb{K}$, mensuráveis à Lebesgue, que satisfazem

$$\int_K |u(x)|^p\, dx < \infty$$

para todo compacto $K \subset \Omega$.

Definição 2.42 (Espaço $C_0^\infty(\Omega)$). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é o espaço vetorial de todas as funções $u : \Omega \to \mathbb{K}$ infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto.

Proposição 2.43 (Lema de Du Bois-Raymond). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Se*

$$\int_\Omega u(x)\phi(x)\, dx = 0,$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, então $u = 0$ quase sempre em Ω.

Demonstração: Ver Proposição 4 (página 20) em [5]. ∎

Proposição 2.44. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}$ um aberto e $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Se*

$$\int_\Omega u(x)\phi_x(x)\, dx = 0$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, então existe uma constante C tal que $u = C$ quase sempre em Ω.

Demonstração: Ver Lema 8.1 em [4]. ∎

Definição 2.45 (Espaço $L^p(0,T;X)$). Sejam $1 \leq p \leq \infty$, $T > 0$ e $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço de Banach. O espaço $L^p(0,T;X)$ é o espaço vetorial das classes de funções $u : (0,T) \to X$, fortemente mensuráveis, tais que $\|u(\cdot)\|_X \in L^p(0,T)$. O espaço $L^\infty(0,T;X)$ é munido com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t \in (0,T)} \text{ess} \|u(t)\|_X := \inf \{K;\ \|u(t)\|_X \leq K \text{ para quase todo } t \in (0,T)\}$$

e, para $1 \leq p < \infty$, o espaço $L^p(0,T;X)$ é munido com a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposição 2.46. *Seja X um espaço de Banach. O espaço $\left(L^p(0,T;X), \|\cdot\|_{L^p(0,T;X)}\right)$ é um espaço de Banach para todo p satisfazendo $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração: Ver Proposição 1 (página 469) em [7]. ■

Proposição 2.47. *Sejam X, Y espaços de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Se $X \hookrightarrow Y$, então*

$$L^p(0,T;X) \hookrightarrow L^p(0,T;Y).$$

Demonstração: Ver página 471 em [7]. ■

Proposição 2.48. *Seja X um espaço de Banach.*

(a) $[L^1(0,T;X)]' \cong L^\infty(0,T;X')$;

(b) Se X é reflexivo separável e $1 < p < \infty$, então $L^p(0,T;X)$ é reflexivo e

$$[L^p(0,T;X)]' \cong L^q(0,T;X'), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Demonstração: Ver Exemplo 4 (páginas 500-501) em [7]. ■

2.3 Distribuições a valores reais e a valores vetoriais

Definição 2.49 (Espaço das funções teste)**.** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. O espaço $\mathcal{D}(\Omega)$, chamado de *espaço das funções teste*, é o espaço vetorial formado por todas as funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto.

Definição 2.50 (Convergência em $\mathcal{D}(\Omega)$)**.** Considere uma sequência $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e uma função ϕ, ambas em $\mathcal{D}(\Omega)$. Diz-se que $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para ϕ em $\mathcal{D}(\Omega)$* quando existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

- $\operatorname{supp}(\phi_n) \subset K$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\operatorname{supp}(\phi) \subset K$;
- Para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $D^\alpha \phi_n$ converge para $D^\alpha \phi$ uniformemente sobre K.

Definição 2.51 (Distribuição)**.** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. Uma *distribuição sobre* Ω é uma aplicação linear $B : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ que é contínua no sentido da convergência de $\mathcal{D}(\Omega)$, ou seja: se $\phi_n \to 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $B(\phi_n) \to 0$ em $\mathbb{R}$. O espaço vetorial formado por todas as distribuições sobre Ω é representado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Definição 2.52 (Derivada de uma distribuição)**.** Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ um multi-índice e $\|\alpha\| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$. A *derivada de ordem* α de uma distribuição $B \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é a distribuição

$$\begin{aligned} D^\alpha B : \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto (-1)^{\|\alpha\|} B(D^\alpha \phi). \end{aligned}$$

Proposição 2.53. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $\alpha \in \mathbb{N}^N$ um multi-índice. O operador derivação $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ é contínuo, ou seja: se $B_n \to B$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, então $D^\alpha B_n \to D^\alpha B$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demonstração: Ver página 29 em [5]. ■

Observação 2.54. Dada $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, a aplicação

$$\begin{aligned} B_u : \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto \int_\Omega u(x)\phi(x)\, dx \end{aligned}$$

defini uma distribuição sobre Ω. Além disso, a aplicação

$$\begin{aligned} B : L^1_{\text{loc}}(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ u &\longmapsto B_u \end{aligned}$$

é linear, injetiva e contínua (ver páginas 25-26 em [5]). Por esta razão, identifica-se u com B_u, escreve-se $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$, diz-se que u é uma distribuição sobre Ω e que $D^\alpha B_u$ é a *derivada distribucional de ordem α de u*. Se $u \in C^k(\Omega)$, então a derivada distribucional de ordem α de u coincide com sua derivada clássica de ordem α, para todo α satisfazendo $\|\alpha\| \leq k$.

Definição 2.55 (Distribuição a valores vetoriais)**.** Seja X um espaço de Banach. Uma *distribuição com valores em X* é uma aplicação linear $B : \mathcal{D}(0,T) \to X$ que é contínua no sentido da convergência de $\mathcal{D}(0,T)$, ou seja: se $\phi_n \to 0$ em $\mathcal{D}(0,T)$, então $B(\phi_n) \to 0$ em X. O espaço vetorial formado por todas as distribuições com valores em X é representado por $\mathcal{D}'(0,T;X)$.

Definição 2.56 (Derivada de uma distribuição a valores vetoriais)**.** Seja m um inteiro não negativo. A *derivada de ordem* m de uma distribuição $B \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ é a distribuição

$$\begin{aligned} \frac{d^m B}{dt^m} : \mathcal{D}(0,T) &\longrightarrow X \\ \phi &\longmapsto (-1)^m B\left(\frac{d^m \phi}{dt^m}\right). \end{aligned}$$

Observação 2.57. Dada $u \in L^p(0,T;X)$, a aplicação

$$\begin{aligned} B_u : \mathcal{D}(0,T) &\longrightarrow X \\ \phi &\longmapsto \int_0^T u(s)\phi(s)\, ds \end{aligned}$$

defini uma distribuição com valores em X. Analogamente ao caso real (ver página 6 em [18]), identifica-se u com B_u, escreve-se $L^p(0,T;X) \subset \mathcal{D}'(0,T;X)$, diz-se que u é uma distribuição com valores em X e que $\frac{d^m B_u}{dt^m}$ é a *derivada distribucional de ordem* m *de* u.

Proposição 2.58. *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach satisfazendo* $X \hookrightarrow Y$. *Se* $u \in L^1(0,T;X)$ *e* $\frac{du}{dt} \in L^1(0,T;Y)$*, então* $u \in C([0,T],Y)$.

Demonstração: Ver Corolário 1 em [18]. ∎

2.4 ESPAÇOS DE SOBOLEV

Definição 2.59 (Derivada fraca)**.** Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ um multi-índice, $\|\alpha\| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$, $1 \leq p \leq \infty$ e $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Diz-se que uma função $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ é *derivada parcial fraca de ordem* α *de* u quando

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \phi(x)\, dx = (-1)^{\|\alpha\|} \int_\Omega g(x)\phi(x)\, dx, \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

No caso em que $N = 1$, as derivadas fracas de ordens um e dois de u (quando existirem) serão representadas, respectivamente, por u_x e u_{xx}.

Observação 2.60. Se $u \in C^k(\Omega)$, então u possui derivada parcial fraca de ordem α e esta coincide com sua derivada parcial clássica de ordem α, para todo α satisfazendo $\|\alpha\| \leq k$.

Definição 2.61 (Espaço de Sobolev $W^{m,p}$)**.** Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é o subespaço vetorial de $L^p(\Omega)$ formado pela classe de funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que, para todo multi-índice α com $\|\alpha\| \leq m$, $D^\alpha u$ existe (no sentido fraco) e está em $L^p(\Omega)$.

Observação 2.62. Se $u \in W^{m,p}(\Omega)$, então u possui derivada distribucional de ordem α e esta coincide com sua derivada parcial fraca de ordem α, para todo α satisfazendo $\|\alpha\| \leq m$.

No espaço $W^{m,p}(\Omega)$ defini-se uma norma $|\cdot|_{W^{m,p}}$ colocando

$$|u|_{W^{m,p}} = \sum_{\|\alpha\| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}.$$

Teorema 2.63. *Seja* $1 \leq p \leq \infty$. *O espaço* $(W^{m,p}(\Omega), |\cdot|_{W^{m,p}})$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração: Ver Teorema 3.3 em [1]. ∎

Observação 2.64. Quando $1 \leq p < \infty$ pode-se definir em $W^{m,p}(\Omega)$ uma norma $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$ equivalente à norma $|\cdot|_{W^{m,p}}$ através da igualdade

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{\|\alpha\| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

O espaço $W^{m,2}(\Omega)$ munido com a norma $\|\cdot\|_{W^{m,2}}$ é um espaço de Hilbert que será representado por $H^m(\Omega)$ e no qual o produto interno é dado por

$$(u,v)_{H^m} = \sum_{\|\alpha\| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}.$$

Definição 2.65 (Espaço $W_0^{m,p}$)**.** Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $1 \leq p \leq \infty$. O espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ é o espaço vetorial formado pelo fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, ou seja,

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Observação 2.66. Quando o conjunto Ω é limitado, pode-se definir em $W_0^{m,p}(\Omega)$ uma norma $\|\cdot\|_{W_0^{m,p}}$ equivalente à norma $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$ colocando

$$\|u\|_{W_0^{m,p}} = \left(\sum_{\|\alpha\| = m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

De modo mais geral, $\|\cdot\|_{W_0^{m,p}}$ e $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$ são equivalentes sempre que Ω tem *largura finita*, ou seja, está contido entre dois planos paralelos, cada um possuindo dimensão $N-1$ (ver [1], corolário 6.31).

Observação 2.67. Segue-se da própria definição de $W_0^{m,p}(\Omega)$ que $(W_0^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}})$ é um espaço de Banach.

Teorema 2.68 (Desigualdades de Poincaré)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto.*

- *Se $1 \leq p < \infty$ e Ω é limitado, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

- *Se $1 \leq p \leq \infty$ e Ω é conexo com fronteira de classe C^1, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}, \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega),$$

onde

$$(u)_\Omega = \textit{média de } u \textit{ sobre } \Omega = \frac{1}{\operatorname{med} \Omega} \int_\Omega u\, dx.$$

Demonstração: Ver Corolário 9.19 em [4] e Teorema 1 (página 275) em [9]. ∎

Teorema 2.69. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $1 \leq p \leq \infty$. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então existe uma função $\tilde{u} \in C(\overline{\Omega})$ tal que $u = \tilde{u}$ quase sempre em Ω. Além disso,*

$$\int_\alpha^\beta u_x(t)\, dt = \tilde{u}(\beta) - \tilde{u}(\alpha),$$

sejam quais forem $\alpha, \beta \in \overline{\Omega}$.

Demonstração: Ver Teorema 8.2 em [4]. ∎

Observação 2.70. Segue-se do Teorema 2.69 que, para um domínio unidimensional Ω, as funções de $W^{1,p}(\Omega)$ sempre possuem um representante contínuo. Assim, ao se tomar uma função de $W^{1,p}(\Omega)$, pode-se sempre considerar que é um representante contínuo que está sendo tomado.

Proposição 2.71 (Desigualdade de interpolação de Gagliardo-Nirenberg)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado, $1 \leq r \leq \infty$ e $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^q}^{1-a}\|u\|_{W^{1,r}}^{a}, \quad \forall\, u \in W^{1,r}(\Omega),$$

onde $a \in [0,1]$ é definido por $a\big(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} + 1\big) = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$.

Demonstração: Ver página 233 em [4]. ∎

Proposição 2.72 (Integração por partes)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $1 \leq p \leq \infty$. Se $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, então $uv \in W^{1,p}(\Omega)$. Além disso, $(uv)_x = u_x v + u v_x$ e*

$$\int_\alpha^\beta u_x(x)v(x)\, dx = u(\beta)v(\beta) - u(\alpha)v(\alpha) - \int_\alpha^\beta u(x)v_x(x)\, dx$$

quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \overline{\Omega}$.

Demonstração: Ver Corolário 8.10 em [4]. ∎

Proposição 2.73. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $\alpha \in \Omega$. Se v é a função dada por*

$$v(x) = \int_\alpha^x g(t)\, dt, \quad \forall\, x \in \Omega,$$

então $v \in C(\Omega)$ e

$$\int_\Omega v(x)\phi_x(x)\, dx = \int_\Omega g(x)\phi(x)\, dx, \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Demonstração: Ver Lema 8.2 em [4]. ∎

Teorema 2.74. *Se $u \in W^{1,p}(\alpha, \beta)$, então*

$$u \in W_0^{1,p}(\alpha, \beta) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{u}(\alpha) = \tilde{u}(\beta) = 0,$$

onde $\tilde{u}$ é o representante contínuo cuja existência foi assegurada no Teorema 2.69.

Demonstração: Ver Teorema 8.12 em [4]. ∎

Observação 2.75. Segue-se do Teorema 2.74 e da Observação 2.70 que, ao se tomar uma função de $W_0^{1,p}(\Omega)$, pode-se sempre considerar que se trata de um representante contínuo, o qual se anula na fronteira de Ω.

Teorema 2.76. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado, $m \geq 1$, $j \geq 0$ inteiros e $1 \leq p, q < \infty$. Então, as seguintes inclusões são compactas (e, consequentemente, contínuas):*

$$\begin{array}{lll} i : \big(W^{j+m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{j+m,p}}\big) \to \big(W^{j,q}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{j,q}}\big), & \textit{se} & mp > 1; \\ i : \big(W^{j+m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{j+m,p}}\big) \to \big(C^j(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{j,\infty}\big), & \textit{se} & p > 1. \end{array}$$

Demonstração: Ver Teorema 6.3 em [1]. ∎

2.5 ALGUNS PVIS

O objetivo desta seção é apresentar alguns resultados sobre existência e unicidade de solução para alguns problemas com condições iniciais e condições de fronteira, os quais serão utilizados nos capítulos seguintes.

Proposição 2.77. *Dados $K \geq 0$ e $g \in L^2(0, \ell)$, a equação $-\theta_{xx} + K\theta = g$ possui uma única solução $\theta \in H^2(0, \ell) \cap H_0^1(0, \ell)$.*

Demonstração: Considere o espaço $H_0^1(0, \ell)$ munido com a norma $\|\cdot\|_{H_0^1}$ e defina a aplicação $a[\cdot, \cdot] : H_0^1(0, \ell) \times H_0^1(0, \ell) \to \mathbb{C}$ colocando

$$a[\theta, \theta^*] = K \int_0^\ell \theta \overline{\theta^*}\, dx + \int_0^\ell \theta_x \overline{\theta_x^*}\, dx.$$

Segue-se imediatamente da definição que $a[\cdot, \cdot]$ é uma forma sesquilinear. Além disso, $a[\cdot, \cdot]$ é contínua. Com efeito, pela desigualdade de Hölder,

$$|a[\theta, \theta^*]| \leq K\|\theta\|_{L^2}\|\theta^*\|_{L^2} + \|\theta_x\|_{L^2}\|\theta_x^*\|_{L^2} \leq (K+1)\|\theta\|_{H^1}\|\theta^*\|_{H^1} \leq C\|\theta\|_{H_0^1}\|\theta^*\|_{H_0^1}.$$

A aplicação $a[\cdot, \cdot]$ também é coerciva. De fato,

$$a[\theta, \theta] = K\|\theta\|_{L^2}^2 + \|\theta_x\|_{L^2}^2 \geq \|\theta_x\|_{L^2}^2 = \|\theta\|_{H_0^1}^2.$$

Agora, defina $\Lambda : H_0^1(0,\ell) \to \mathbb{C}$ colocando

$$\Lambda(\theta^*) = \int_0^\ell g\theta^* \, dx.$$

É imediato que Λ é linear. Além disso, Λ é limitado, pois, pelas desigualdades de Hölder e de Poincaré, $|\Lambda(\theta^*)| \leq C\|\theta^*\|_{H_0^1}$, onde $C = c_p\|g\|_{L^2}$.

Deste modo, como $H_0^1(0,\ell)$ é um espaço de Hilbert, pode-se aplicar o Lema de Lax-Milgram e concluir que existe um único $\theta \in H_0^1(0,\ell)$ tal que

$$K\int_0^\ell \theta\overline{\theta^*} \, dx + \int_0^\ell \theta_x\overline{\theta_x^*} \, dx = \int_0^\ell g\overline{\theta^*} \, dx \quad \forall\, \theta^* \in H_0^1(0,\ell).$$

Segue-se que

$$\int_0^\ell \theta_x\phi_x \, dx = -\int_0^\ell (K\theta - g)\phi \, dx \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(0,\ell).$$

Tendo em vista a definição de derivada fraca, resulta da última igualdade que $\theta \in H^2(0,\ell)$ e $\theta_{xx} = K\theta - g$, o que conclui a demonstração. ■

Proposição 2.78. *Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ com $\lambda_1\lambda_2 > 0$ e $f, g \in L^2(0,\ell)$. Então, existem $v \in H_0^1(0,\ell)$ e $u \in H^1(0,\ell)$ tais que*

$$\begin{cases} u_x + \lambda_1 v = f, \\ v_x - \lambda_2 u = g. \end{cases} \tag{2.1}$$

Além disso:

$$\textit{Se} \int_0^\ell g(x)\, dx = 0, \ \textit{então} \int_0^\ell u(x)\, dx = 0. \tag{2.2}$$

Demonstração: Defina

$$h(x) = g(x) + \lambda_2 \int_0^x f(z)\, dz.$$

Observe que a equação

$$y_{xx}(x) + \lambda_1\lambda_2 y(x) = h(x)$$

admite uma solução $y \in H^2(0,\ell)$ com $y_x \in H_0^1(0,\ell)$. De fato, basta tomar

$$\begin{aligned} y(x) = {} & c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\, x\right) + \sin\left(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\, x\right) \int_0^x \frac{h(z)\cos\left(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\, z\right)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\, dz \\ & - \cos\left(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\, x\right) \int_0^x \frac{h(z)\sin\left(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\, z\right)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\, dz, \end{aligned}$$

onde

$$c_1 = \frac{\cos\big(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\,\ell\big)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\sin\big(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\,\ell\big)}\int_0^\ell h(z)\cos\big(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}z\big)\,dz$$
$$+\frac{\sin\big(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\,\ell\big)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\sin\big(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\,\ell\big)}\int_0^\ell h(z)\sin(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}z)\,dz.$$

Agora, defina u e v colocando

$$v(x) = y_x(x), \qquad u(x) = \int_0^x f(z)\,dz - \lambda_1\int_0^x v(z)\,dz.$$

É imediato que $v \in H_0^1(0,\ell)$ e $u \in H^1(0,\ell)$. Além disso:

$$u_x(x) + \lambda_1 v(x) = f(x) - \lambda_1 v(x) + \lambda_1 v(x) = f(x),$$
$$v_x(x) - \lambda_2 u(x) = y_{xx}(x) - \lambda_2 u = h(x) - \lambda_1\lambda_2 y(x) - \lambda_2 u(x) = g(x).$$

Isto mostra que o sistema (2.1) é satisfeito. Por fim, integrando a segunda equação do sistema, vê-se que (2.2 se verifica. ■

Teorema 2.79. *Sejam $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado (ou ilimitado com complementar limitado) com fronteira suave, $U = (U_1, U_2, U_3)$ e $s \geq 4$. Suponha que, para $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$,*

1. $C_{ijkl} \in C\big([0,T]\times\overline{\Omega}\big) \cap L^\infty\big([0,T], L^\infty(\Omega)\big)$,
   $\partial_x C_{ijkl} \in L^\infty\big([0,T], H^{s-2}(\Omega)\big)$,
   $\partial_t^m C_{ijkl} \in L^\infty\big([0,T], H^{s-1-m}(\Omega)\big)$ *para* $m = 1, 2, ..., s-1$;

2. $C_{ijkl}(t,x) = C_{klij}(t,x)$ *para todo* $(t,x) \in [0,T]\times\overline{\Omega}$ *e existe uma constante positiva* γ_0 *tal que, para* $t \in [0,T]$ *e* $U(t,\cdot) \in [H_0^1(\Omega)]^3$,

$$\|U(t,\cdot)\|^2_{[H^1]^3} \leq \gamma_0\left(\sum_{i,j,k,l=1}^{3}\left(C_{ijkl}(t,\cdot)\frac{\partial U_k}{\partial x_l}(t,\cdot), \frac{\partial U_i}{\partial x_j}(t,\cdot)\right)_{L^2} + \|U(t,\cdot)\|^2_{[L^2]^3}\right);$$

3. *Existe uma constante* γ_1 *tal que, para quase todo* $t \in [0,T]$, *se* $C_{ijkl}(t,\cdot)\frac{\partial^2 U_k}{\partial x_j \partial x_l}(t,\cdot) \in H^m(\Omega)$ *e* $U(t,\cdot) \in [H_0^1(\Omega)]^3$, *então* $U(t,\cdot) \in [H^{m+2}(\Omega)]^3$ *e*

$$\|U(t,\cdot)\|_{[H^{m+2}]^3} \leq \gamma_1\left(\left\|\sum_{i,j,k,l=1}^{3} C_{ijkl}(t,\cdot)\frac{\partial^2 U_k}{\partial x_j\partial x_l}\right\|_{H^m} + \|U(t,\cdot)\|_{[L^2]^3}\right), \quad m = 0, 1, ...s-2;$$

4. $\partial_t^m f_i \in C\big([0,T], H^{s-2-m}(\Omega)\big)$ $(0 \leq m \leq s-2)$ *e* $\partial_t^{s-1} f_i \in L^2\big([0,T], L^2(\Omega)\big)$;

5. *$U_i^m \in [H^{s-m}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^3$ $(0 \leq m \leq s-1)$ e $U_i^s \in L^2(\Omega)$, onde U_i^0 e U_i^1 são dados inicias e, para $m = 2, ..., s$,*

$$U_i^m(x) = \sum_{n=0}^{m-2} \binom{m-2}{n} \sum_{i,j,k,l=1}^{3} \partial_t^n C_{ijkl}(0,x) \frac{\partial^2 U_k^{m-2-n}}{\partial x_j \partial x_l}(x) + \partial_t^{m-2} f_i(0,x).$$

Então, o problema

$$\partial_t^2 U_i - \sum_{i,j,k,l=1}^{3} C_{ijkl} \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_j \partial x_l} = f_i \quad \textit{em} \quad (0,T) \times \Omega, \quad i = 1,2,3$$

com condições de fronteira

$$U_i(t,x) = 0, \quad (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega, \quad i = 1,2,3$$

e condições iniciais

$$U_i(0,x) = U_i^0(x), \quad \partial_t U_i(0,x) = U_i^1(x), \quad x \in \Omega, \quad i = 1,2,3,$$

possui uma única solução (U_1, U_2, U_3) satisfazendo

$$\partial_t^m U_i \in C\big([0,T], H^{s-m}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\big), \quad i = 1,2,3, \quad m = 0,1,...,s-1;$$
$$\partial_t^s U_i \in C\big([0,T], L^2(\Omega)\big), \quad i = 1,2,3.$$

Demonstração: Ver Teorema A.11 em [12]. ■

Teorema 2.80. *Sejam $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado (ou ilimitado com complementar limitado) com fronteira suave e $s \geq 4$. Suponha que, para $i, j \in \{1,2,3\}$,*

1. $a_{ij} \in C\big([0,T] \times \overline{\Omega}\big) \cap L^\infty\big([0,T], L^\infty(\Omega)\big)$,
   $\partial_x a_{ij} \in L^\infty\big([0,T], H^{s-2}(\Omega)\big)$,
   $\partial_t^m a_{ij} \in L^\infty\big([0,T], H^{s-1-m}(\Omega)\big)$ *para* $m = 1,2,...,s-2$,
   $\partial_t^{s-1} a_{ij} \in L^2\big([0,T], L^2(\Omega)\big)$;

2. *Existe uma constante γ_3 tal que, para todo $t \in [0,T]$, se $a_{ij}(t,\cdot)\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i \partial x_j}(t,\cdot) \in H^m(\Omega)$ e $\theta(t,\cdot) \in H_0^1(\Omega)$, então $\theta(t,\cdot) \in H^{m+2}(\Omega)$ e*

$$\|\theta(t,\cdot)\|_{H^{m+2}} \leq \gamma_1 \left(\left\| \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(t,\cdot) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{H^m} + \|\theta(t,\cdot)\|_{L^2} \right), \quad m = 0,1,...s-2;$$

3. $\partial_t^m g \in C\big([0,T], H^{s-2-m}(\Omega)\big)$ $(0 \leq m \leq s-2)$ *e* $\partial_t^{s-1} g \in L^2\big([0,T], H^{-1}(\Omega)\big)$;

4. $\theta^m \in H^{s-m}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ $(0 \leq m \leq s-2)$ *e* $\theta^{s-1} \in L^2(\Omega)$*, onde* θ^0 *é um dado inicial e, para* $m = 2, ..., s-1$*,*

$$\theta^m(x) = \sum_{n=0}^{m-1} \binom{m-1}{n} \sum_{i,j=1}^{3} \partial_t^n a_{ij}(0,x) \frac{\partial^2 \theta^{m-1-n}}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \partial_t^{m-1} g(0,x).$$

Então, o problema

$$\theta_t - \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} = g \quad \textit{em} \quad (0,T) \times \Omega$$

com condição de fronteira

$$\theta(t,x) = 0, \quad (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega$$

e condição inicial

$$\theta(0,x) = \theta^0(x), \quad x \in \Omega,$$

possui uma única solução θ *satisfazendo*

$$\begin{aligned} \partial_t^m \theta &\in C\big([0,T], H^{s-m}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\big), \quad m = 0,1,...,s-2; \\ \partial_t^{s-1} \theta &\in C\big([0,T], L^2(\Omega)\big), \quad \partial_t^{s-1} \nabla\theta \in L^2\big([0,T], L^2(\Omega)\big). \end{aligned}$$

Demonstração: Ver Teorema A.15 em [12]. ∎

Observação 2.81. Devido à imersão $H^1(0,\ell) \hookrightarrow L^\infty(0,\ell)$, nas versões unidimensionais dos teorema 2.79 e 2.80, a hipótese $s \geq 4$ pode ser enfraquecida para $s \geq 3$. Além disso, o Teorema 2.79 permanece válido com condições de fronteira dadas por

$$U_1(t,x) = \partial_x U_2(t,x) = \partial_x U_3(t,x) = 0, \quad (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega.$$

A seguir serão enunciadas as versões adaptadas dos teoremas acima, que serão utilizadas posteriormente.

Teorema 2.82. *Sejam* $T, \ell > 0$*. Suponha que, para* $i,k \in \{1,2,3\}$*,*

1. $C_{ik} \in C\big([0,T] \times [0,\ell]\big) \cap L^\infty\big([0,T], L^\infty(0,\ell)\big)$*,*
   $\partial_x C_{ik} \in L^\infty\big([0,T], H^1(0,\ell)\big)$*,*
   $\partial_t^j C_{ik} \in L^\infty\big([0,T], H^{2-j}(0,\ell)\big)$ *para* $j = 1,2$*;*

2. $C_{ik}(t,x) = C_{ki}(t,x)$ *para todo* $(t,x) \in [0,T] \times [0,\ell]$ *e existe uma constante positiva* γ_0 *tal que, para* $t \in [0,T]$ *e* $U(t,\cdot) \in [H_0^1(0,\ell)]^3$*,*

$$\|U(t,\cdot)\|_{[H^1]^3}^2 \leq \gamma_0 \left(\sum_{i,k=1}^{3} \big(C_{ik}(t,\cdot)\partial_x U_k(t,\cdot), \partial_x U_i(t,\cdot)\big)_{L^2} + \|U(t,\cdot)\|_{[L^2]^3}^2 \right);$$

3. *Existe uma constante* γ_1 *tal que, para quase todo* $t \in [0,T]$, *se* $C_{ik}(t,\cdot)\partial_x^2 U_k(t,\cdot) \in H^j(0,\ell)$ *e* $U(t,\cdot) \in [H_0^1(0,\ell)]^3$, *então* $U(t,\cdot) \in [H^{j+2}(0,\ell)]^3$ *e*

$$\|U(t,\cdot)\|_{[H^{j+2}]^3} \le \gamma_1 \left(\left\| \sum_{i,k=1}^{3} C_{ik}(t,\cdot)\partial_x^2 U_k \right\|_{H^j} + \|U(t,\cdot)\|_{[L^2]^3} \right), \quad j = 0,1;$$

4. $\partial_t^j f_i \in C\big([0,T], H^{1-j}(0,\ell)\big)$ $(0 \le j \le 1)$ *e* $\partial_t^2 f_i \in L^2\big([0,T], L^2(0,\ell)\big)$;

5. $U_i^j \in [H^{3-j}(0,\ell) \cap H_0^1(0,\ell)] \times [H^{3-j}(0,\ell) \cap H_*^1(0,\ell)]^2$ *para* $0 \le j \le 2$, $\partial_x U_2^j, \partial_x U_3^j \in H_0^1(0,\ell)$ *para* $j = 0,1$ *e* $U_i^3 \in L^2(0,\ell)$, *onde* U_i^0 *e* U_i^1 *são dados inicias e, para* $j = 2,3$,

$$U_i^j(x) = \sum_{n=0}^{j-2} \binom{j-2}{n} \sum_{i,k=1}^{3} \partial_t^n C_{ik}(0,x)\partial_x^2 U_k^{j-2-n}(x) + \partial_t^{j-2} f_i(0,x).$$

Então, o problema

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 U_1 - (C_{11}\partial_x^2 U_1 + C_{12}\partial_x^2 U_2 + C_{13}\partial_x^2 U_3) &= f_1 \quad \textit{em} \quad (0,T)\times(0,\ell),\\
\partial_t^2 U_2 - (C_{21}\partial_x^2 U_1 + C_{22}\partial_x^2 U_2 + C_{23}\partial_x^2 U_3) &= f_2 \quad \textit{em} \quad (0,T)\times(0,\ell),\\
\partial_t^2 U_3 - (C_{31}\partial_x^2 U_1 + C_{32}\partial_x^2 U_2 + C_{33}\partial_x^2 U_3) &= f_3 \quad \textit{em} \quad (0,T)\times(0,\ell),
\end{aligned}$$

com condições de fronteira

$$U_1(\cdot,0) = U_1(\cdot,\ell) = \partial_x U_2(\cdot,0) = \partial_x U_2(\cdot,\ell) = \partial_x U_3(\cdot,0) = \partial_x U_3(\cdot,\ell) = 0$$

e condições iniciais

$$\begin{aligned}
&U_1(0,\cdot) = U_1^0, \quad \partial_t U_1(0,\cdot) = U_1^1, \quad U^2(0,\cdot) = U_2^0, \quad \partial_t U^2(0,\cdot) = U_2^1,\\
&U_3(0,\cdot) = U_3^0, \quad \partial_t U^3(0,\cdot) = U_3^1,
\end{aligned}$$

possui uma única solução (U^1,U^2,U^3) *satisfazendo*

$$\begin{gathered}
\partial_t^j U_1 \in C^0\big([0,T], H^{3-j}(0,\ell) \cap H_0^1(0,\ell)\big), \quad j = 0,1,2;\\
\partial_t^j U_i \in C^0\big([0,T], H^{3-j}(0,\ell) \cap H_*^1(0,\ell)\big), \quad j = 0,1,2, \quad i = 2,3;\\
\partial_x U_i(t), \partial_t\partial_x U_i(t) \in H_0^1(0,\ell), \quad t \in [0,T], \quad i = 2,3;\\
\partial_t^3 U_i \in C^0\big([0,T], L^2(0,\ell)\big), \quad i = 1,2,3.
\end{gathered}$$

Teorema 2.83. *Sejam* $T,\ell > 0$. *Suponha que*

1. $a \in C\big([0,T]\times[0,\ell]\big) \cap L^\infty\big([0,T], L^\infty(0,\ell)\big)$,

$\partial_x a, \partial_t a \in L^\infty\big([0,T], H^1(0,\ell)\big)$,
$\partial_t^2 a \in L^2\big([0,T], L^2(0,\ell)\big)$;

2. *Existe uma constante γ_3 tal que, para todo $t \in [0,T]$, se $a(t,\cdot)\partial_x^2\theta(t,\cdot) \in H^j(0,\ell)$ e $\theta(t,\cdot) \in H_0^1(0,\ell)$, então $\theta(t,\cdot) \in H^{j+2}(0,\ell)$ e*

$$\|\theta(t,\cdot)\|_{H^{j+2}} \leq \gamma_1 \left(\left\|a(t,\cdot)\partial_x^2\theta\right\|_{H^j} + \|\theta(t,\cdot)\|_{L^2}\right), \quad j = 0,1;$$

3. $\partial_t^j g \in C\big([0,T], H^{1-j}(0,\ell)\big)$ $(0 \leq j \leq 1)$ *e* $\partial_t^2 g \in L^2\big([0,T], H^{-1}(0,\ell)\big)$*;*

4. $\theta^j \in H^{s-j}(0,\ell) \cap H_0^1(0,\ell)$ $(0 \leq j \leq 1)$ *e* $\theta^2 \in L^2(0,\ell)$*, onde* θ^0 *é um dado inicial e, para* $j = 1,2$,

$$\theta^j(x) = \sum_{n=0}^{j-1} \binom{j-1}{n} \partial_t^n a(0,x)\partial_x^2\theta^{j-1-n}(x) + \partial_t^{j-1} g(0,x).$$

Então, o problema

$$\theta_t - a\partial_x^2\theta = g \quad \textit{em} \quad (0,T)\times(0,\ell)$$

com condição de fronteira

$$\theta(t,0) = \theta(t,\ell) = 0, \quad t \in [0,T]$$

e condição inicial

$$\theta(0,x) = \theta^0(x), \quad x \in (0,\ell),$$

possui uma única solução θ satisfazendo

$$\partial_t^j\theta \in C\big([0,T], H^{3-j}(0,\ell) \cap H_0^1(0,\ell)\big), \quad j = 0,1;$$
$$\partial_t^2\theta \in C\big([0,T], L^2(0,\ell)\big), \quad \partial_t^2\theta_x \in L^2\big([0,T], L^2(0,\ell)\big).$$

2.6 Semigrupos de Operadores Lineares

Definição 2.84 (Semigrupo)**.** Seja X um espaço de Banach. Um *semigrupo* sobre X é uma família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares contínuos $S(t) : X \to X$ que satisfaz as seguintes condições:

- $S(0) = I$;
- $S(s)S(t) = S(s+t)$, quaisquer que sejam $s, t \geq 0$.

Definição 2.85 (Semigrupo fortemente contínuo)**.** Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo sobre um espaço de Banach X. Diz-se que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é *fortemente contínuo* (ou C_0) quando, para todo $x \in X$,

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t)x - x\|_X = 0.$$

Definição 2.86 (Semigrupo de contrações)**.** Diz-se que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo *de contrações* quando $\|S(t)\|_{\mathcal{L}} \leq 1$ para todo $t \geq 0$.

Definição 2.87 (Gerador infinitesimal)**.** Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo sobre um espaço de Banach X. O *gerador infinitesimal* de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é o operador

$$\begin{aligned} A : D(A) &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}, \end{aligned}$$

onde

$$D(A) = \left\{ x \in X;\ \text{o limite } \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}.$$

Teorema 2.88. *Sejam X um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear dissipativo com domínio denso. Se $0 \in \rho(A)$, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações.*

Demonstração: Ver Teorema 2.12.3 em [24]. ∎

Observação 2.89. O semigrupo cujo gerador infinitesimal é o operador A será chamado de semigrupo *gerado* por A e representado por $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$.

Teorema 2.90. *Sejam X um espaço de Banach e $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ um semigrupo C_0 sobre X. Então, para todo $x \in D(A)$ e todo $t \geq 0$, $e^{tA}x \in D(A)$ e*

$$A\big(e^{tA}x\big) = e^{tA}(Ax) = \frac{d}{dt}e^{tA}x.$$

Demonstração: Ver Teorema 2.4 (página 4) em [22]. ∎

Teorema 2.91. *Sejam X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 sobre X. Se $U_0 \in D(A)$, então o problema*

$$\begin{cases} U_t = AU, & t > 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

possui uma única solução U satisfazendo

$$U \in C\big([0,\infty), D(A)\big) \cap C^1\big([0,\infty), X\big).$$

Além disso, esta solução é dada por $U(t) = e^{tA}U_0$.

Demonstração: Ver Teorema 2.2.2 em [27]. ∎

Proposição 2.92. *Sejam X um espaço de Banach, $A : D(A) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 sobre X e $F : X \to X$ uma aplicação contínua. Se $U_0 \in D(A)$, então qualquer solução clássica do problema*

$$\begin{cases} U_t = AU + F(U), & 0 < t < T \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

é da forma

$$U(t) = \mathrm{e}^{tA}U_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A}F(U(s))\, ds.$$

Demonstração: Ver página 183 em [22]. ∎

Definição 2.93 (Semigrupo exponencialmente estável)**.** Diz-se que um semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é *exponencialmente estável* quando existem constantes $\alpha > 0$ e $M \geq 1$ satisfazendo

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}} \leq Me^{-\alpha t} \quad \forall\, t \geq 0.$$

Teorema 2.94. *Um semigrupo fortemente contínuo $\{\mathrm{e}^{tA}\}_{t\geq 0}$ é exponencialmente estável se, e somente se, ambas as condições abaixo se verificam.*

(i) $\mathbf{i}\mathbb{R} \subset \boldsymbol{\rho}(A)$;

(ii) $\overline{\lim\limits_{|\beta|\to\infty}} \|(\mathbf{i}\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}} < \infty$.

Demonstração: Ver Teorema 3.5.5 em [24]. ∎

3 SISTEMA DE BRESSE TERMOELÁSTICO LINEAR

O objetivo deste capítulo é fazer uma apresentação detalhada de um resultado demonstrado em [10], o qual será necessário nas demonstrações dos resultados contidos no capítulo seguinte. Especificamente, serão estabelecidas a existência e a unicidade de solução para o problema

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) = 0 \quad &\text{em} \quad (0,\infty)\times(0,\ell), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = 0 \quad &\text{em} \quad (0,\infty)\times(0,\ell), \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = 0 \quad &\text{em} \quad (0,\infty)\times(0,\ell), \\ \theta_t - k_1\theta_{xx} + m\psi_{xt} = 0 \quad &\text{em} \quad (0,\infty)\times(0,\ell), \end{aligned} \tag{3.1}$$

com condições de fronteira

$$\varphi(\cdot,0) = \varphi(\cdot,\ell) = \psi_x(\cdot,0) = \psi_x(\cdot,\ell) = w_x(\cdot,0) = w_x(\cdot,\ell) = \theta(\cdot,0) = \theta(\cdot,\ell) = 0 \tag{3.2}$$

e condições iniciais

$$\begin{aligned} &\varphi(0,\cdot) = \varphi_0, \quad \varphi_t(0,\cdot) = \varphi_1, \quad \psi(0,\cdot) = \psi_0, \quad \psi_t(0,\cdot) = \psi_1, \\ &w(0,\cdot) = w_0, \quad w_t(0,\cdot) = w_1, \quad \theta(0,\cdot) = \theta_0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde os coeficientes ρ_1, k, l, k_0, ρ_2, b, γ, k_1 e m são constantes positivas e as funções φ, ψ, w e θ descrevem, respectivamente, a oscilação vertical, o ângulo de rotação da seção transversal, a oscilação longitudinal e a variação temperatura de uma viga arqueada fina de comprimento ℓ. Também será mostrado que se $b\rho_1 = k\rho_2$ e $k = k_0$, então a solução obtida possui decaimento exponencial. Alguns detalhes que não se encontram explícitos em [10] foram feitos com base nos cálculos que se pode encontrar em [19].

3.1 FORMULAÇÃO ABSTRATA

O objetivo desta seção é reformular o problema (3.1)-(3.3) como um problema de Cauchy abstrato homogêneo. Inicialmente, considere os espaços

$$H^1_*(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega);\ \int_0^\ell u(x)\,dx = 0 \right\}, \qquad L^2_*(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega);\ \int_0^\ell u(x)\,dx = 0 \right\}.$$

Observação 3.1. Segue-se do Teorema 2.68 que, para uma função u em qualquer destes dois espaços, a desigualdade $\|u\|_{L^p} \leq C\|\nabla u\|_{L^p}$ se verifica. Quando Ω tem medida finita, estes espaços munidos com as normas $\|\cdot\|_{H^1}$ e $\|\cdot\|_{L^2}$, respectivamente, são espaços de Banach. Com efeito, seja $\{u_n\}$ uma sequência de Cauchy em $(H^1_*(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$. Então, $\{u_n\}$ é de Cauchy em

$(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$, o qual é completo. Segue-se que existe $u \in H^1(\Omega)$ tal que $\|u_n - u\|_{H^1} \to 0$. Além disso, pela desigualdade de Hölder, para todo natural n tem-se

$$0 \leq \left| \int_\Omega u_n \, dx - \int_\Omega u \, dx \right| \leq \int_\Omega 1 \cdot |u_n - u| \, dx \leq \operatorname{med}(\Omega)\|u_n - u\|_{L^2} \leq \operatorname{med}(\Omega)\|u_n - u\|_{H^1}.$$

Tomando o limite, resulta que

$$\int_\Omega u = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

de onde se deduz que $u \in H^1_*(\Omega)$. Isto mostra que $\{u_n\}$ converge em $(H^1_*(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ e que, portanto, este espaço é completo. Um argumento análogo se aplica ao espaço $(L^2_*(\Omega), \|\cdot\|_{L^2})$.

Agora, considere o espaço

$$\mathcal{H} = H^1_0(0,\ell) \times L^2(0,\ell) \times H^1_*(0,\ell) \times L^2_*(0,\ell) \times H^1_*(0,\ell) \times L^2_*(0,\ell) \times L^2(0,\ell).$$

No que se segue, dois elementos $(\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \theta)$ e $(\varphi^*, \Phi^*, \psi^*, \Psi^*, w^*, W^*, \theta^*)$ de $\mathcal{H}$ serão representados de forma abreviada pelas notações U e U^*, respectivamente. Considere também o subespaço

$$D(A) = \left\{ U \in \mathcal{H};\ \varphi, \psi, w, \theta \in H^2(0,\ell),\ \ \Phi, \psi_x, w_x, \theta \in H^1_0(0,\ell),\ \ \Psi, W \in H^1_*(0,\ell) \right\}$$

e o operador $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido por

$$AU = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1}\partial_x^2 - \frac{k_0 l^2}{\rho_1} I & 0 & \frac{k}{\rho_1}\partial_x & 0 & \frac{l(k+k_0)}{\rho_1}\partial_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{\rho_2}\partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{k}{\rho_2} I & 0 & -\frac{kl}{\rho_2} I & 0 & -\frac{\gamma}{\rho_2}\partial_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{l(k_0+k)}{\rho_1}\partial_x & 0 & -\frac{lk}{\rho_1} I & 0 & \frac{k_0}{\rho_1}\partial_x^2 - \frac{l^2 k}{\rho_1} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m\partial_x & 0 & 0 & k_1\partial_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \Phi \\ \psi \\ \Psi \\ w \\ W \\ \theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw)_x + \frac{k_0 l}{\rho_1}(w_x - l\varphi) \\ \Psi \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + lw) - \frac{\gamma}{\rho_2}\theta_x \\ W \\ \frac{k_0}{\rho_1}(w_x - l\varphi)_x - \frac{kl}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw) \\ k_1\theta_{xx} - m\Psi_x \end{pmatrix},$$

para todo $U \in D(A)$. Com estas definições, o problema (3.1)-(3.3) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} U_t = AU, \quad t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{3.4}$$

onde $U_t = (\varphi_t, \Phi_t, \psi_t, \Psi_t, w_t, W_t, \theta_t)$ e $U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1, \theta_0)$. Deste modo, o estudo do problema original se reduz ao estudo de um problema de valor inicial, o que será feito por meio da teoria de semigrupos de operadores lineares limitados.

No espaço $\mathcal{H}$ serão consideradas duas normas, as quais serão representadas por $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. A norma $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ será a norma induzida pelo produto interno usual

$$\begin{aligned} (U, U^*)_{\mathcal{H}} = & \int_0^\ell \varphi \overline{\varphi^*}\, dx + \int_0^\ell \varphi_x \overline{\varphi_x^*}\, dx + \int_0^\ell \Phi \overline{\Phi^*}\, dx + \int_0^\ell \psi \overline{\psi^*}\, dx \\ & + \int_0^\ell \psi_x \overline{\psi_x^*}\, dx + \int_0^\ell \Psi \overline{\Psi^*}\, dx + \int_0^\ell w \overline{w^*}\, dx + \int_0^\ell w_x \overline{w_x^*}\, dx \\ & + \int_0^\ell W \overline{W^*}\, dx + \int_0^\ell \theta \overline{\theta^*}\, dx \end{aligned} \tag{3.5}$$

e a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ será a norma induzida pelo produto interno

$$\begin{aligned} (\!(U, U^*)\!)_{\mathcal{H}} = & \rho_1 \int_0^\ell \Phi \overline{\Phi^*}\, dx + \rho_2 \int_0^\ell \Psi \overline{\Psi^*}\, dx + \rho_1 \int_0^\ell W \overline{W^*}\, dx \\ & + b \int_0^\ell \psi_x \overline{\psi_x^*}\, dx + k \int_0^\ell (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\varphi_x^* + \psi^* + lw^*)}\, dx \\ & + k_0 \int_0^\ell (w_x - l\varphi) \overline{(w_x^* - l\varphi^*)}\, dx + \frac{\gamma}{m} \int_0^\ell \theta \overline{\theta^*}\, dx. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Assim, para todo $U \in \mathcal{H}$, tem-se

$$|U|_{\mathcal{H}}^2 = \|\varphi\|_{H^1}^2 + \|\Phi\|_{L^2}^2 + \|\psi\|_{H^1}^2 + \|\Psi\|_{L^2}^2 + \|w\|_{H^1}^2 + \|W\|_{L^2}^2 + \|\theta\|_{L^2}^2$$

e

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 = & \rho_1 \|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2 \|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_1 \|W\|_{L^2}^2 + b \|\psi_x\|_{L^2}^2 \\ & + k \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0 \|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma}{m} \|\theta\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Note que, relativamente à aplicação $(\!(\cdot,\cdot)\!)_{\mathcal{H}}$, a única propriedade de produto interno que não pode ser deduzida imediatamente a partir da definição é aquela segundo a qual $(\!(U, U)\!)_{\mathcal{H}} = 0$ acarreta $U = 0$. Na verdade, para que esta propriedade se verifique, precisa-se supor que $l\ell$ não seja um múltiplo inteiro de π. Sob esta hipótese, que será assumida em toda a exposição que se segue, a justificativa pode ser feita do seguinte modo: se $(\!(U,U)\!)_{\mathcal{H}} = 0$, então

$$\Phi = \Psi = W = \psi_x = (\varphi_x + \psi + lw) = (w_x - l\varphi) = \theta = 0. \tag{3.7}$$

Como $\psi_x = 0$, segue-se que

$$\int_0^\ell \psi\phi_x \, dx = -\int_0^\ell \psi_x \phi \, dx = -\int_0^\ell 0 \, dx = 0, \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(0,\ell).$$

Pela Proposição 2.44, conclui-se que $\psi = C$ para alguma constante C. Mas $\psi \in H_*^1(0,\ell)$, logo

$$C = \frac{C}{\ell}\int_0^\ell 1 \, dx = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell C \, dx = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell \psi \, dx = 0.$$

Segue-se que $\psi = 0$. Substituindo este resultado em (3.7), obtém-se

$$(\varphi_x + lw) = 0 = (w_x - l\varphi). \tag{3.8}$$

Da primeira igualdade conclui-se que $lw_x = -\varphi_{xx}$ e, da segunda, que $lw_x = l^2\varphi$. Portanto, $\varphi_{xx} = -l^2\varphi$. Como $\varphi \in H_0^1(0,\ell)$, para mostrar que $\varphi = 0$, basta mostrar que o problema

$$\begin{cases} l^2\varphi + \varphi_{xx} = 0, \\ \varphi(0) = \varphi(\ell) = 0, \end{cases} \tag{3.9}$$

admite apenas a solução nula, onde $l\ell \neq n\pi$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere, então, uma solução $\varphi \in H^2(0,\ell) \cap H_0^1(0,\ell)$ do problema (3.9). Pelo Teorema 2.69 pode-se considerar $\varphi \in C(0,\ell)$, o que implica $\varphi \in C^2(0,\ell)$ (ver nota 6, página 204, em [4]). Mas, de acordo com a teoria clássica das equações diferenciais ordinárias, qualquer solução $\varphi \in C^2(0,\ell)$ do problema (3.9) é da forma $\varphi(x) = c\,\mathrm{sen}(lx)$ com c constante. Como $\varphi(\ell) = c\,\mathrm{sen}(l\ell) = 0$ e $l \neq \frac{n\pi}{\ell}$, conclui-se que $c = 0$ e, consequentemente, φ é a função nula. Utilizando (3.8), segue-se que $w = 0$.

Observação 3.2. A condição $l\ell \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, também é necessária para que $(\!(U,U)\!)_{\mathcal{H}} = 0$ acarrete $U = 0$. De fato, considere $U = \big(\mathrm{sen}(lx), 0, 0, 0, -\cos(lx), 0, 0\big)$, onde $l\ell = n\pi$ com n inteiro. Então, $U \in \mathcal{H}$, $U \neq 0$ mas $(\!(U,U)\!)_{\mathcal{H}} = 0$.

Sabe-se que $(\mathcal{H}, |\cdot|_{\mathcal{H}})$ é um espaço de Hilbert (o que, na realidade, decorre da Observação 2.67, da Observação 3.1 e do Teorema 2.35). O lema a seguir estabelece uma condição suficiente para que $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ também seja um espaço de Hilbert. Entretanto, conforme pode ser visto no Apêndice A, esta condição não é necessária.

Lema 3.3. *Se $l < \frac{1}{\sqrt{2}\ell}$, então as normas $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ são equivalentes. Consequentemente, o espaço $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ é completo e, portanto, de Hilbert.*

Demonstração: Para simplificar a notação, escreva

$$P(\varphi,\psi,w)=\sqrt{\|\varphi\|_{H^1}^2+\|\psi\|_{H^1}^2+\|w\|_{H^1}^2}$$

e

$$Q(\varphi,\psi,w)=\sqrt{k\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2+k_0\|w_x-l\varphi\|_{L^2}^2+b\|\psi_x\|_{L^2}^2}.$$

Então,

$$|U|_{L^2}^2=\|\Phi\|_{L^2}^2+\|\Psi\|_{L^2}^2+\|W\|_{L^2}^2+\|\theta\|_{L^2}^2+P(\varphi,\psi,w)^2$$

e

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2=\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2+\rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2+\rho_1\|W\|_{L^2}^2+\frac{\gamma}{m}\|\theta\|_{L^2}^2+Q(\varphi,\psi,w)^2. \tag{3.10}$$

Assim, para se obter a equivalência desejada, basta mostrar que existem constantes positivas c_1 e c_2 tais que

$$Q(\varphi,\psi,w)\le c_1P(\varphi,\psi,w),\quad \forall\,(\varphi,\psi,w)\in H_0^1(0,\ell)\times H_*^1(0,\ell)\times H_*^1(0,\ell) \tag{3.11}$$

e

$$P(\varphi,\psi,w)\le c_2Q(\varphi,\psi,w),\quad \forall\,(\varphi,\psi,w)\in H_0^1(0,\ell)\times H_*^1(0,\ell)\times H_*^1(0,\ell). \tag{3.12}$$

Note que, pela desigualdade de Clarkson,

$$\begin{aligned}k\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2&\le k\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2+k\|\varphi_x+\psi-lw\|_{L^2}^2\\&\le 2k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2+2kl^2\|w\|_{L^2}^2\\&\le 2k\|\varphi_x+\psi\|_{L^2}^2+2k\|\varphi_x-\psi\|_{L^2}^2+2kl^2\|w\|_{L^2}^2\\&\le 4k\|\varphi_x\|_{L^2}^2+4k\|\psi\|_{L^2}^2+2kl^2\|w\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{3.13}$$

e

$$k_0\|w_x-l\varphi\|_{L^2}^2\le k_0\|w_x+l\varphi\|_{L^2}^2+k_0\|w_x-l\varphi\|_{L^2}^2\le 2k_0\|w_x\|_{L^2}^2+2k_0l\|\varphi\|_{L^2}^2 \tag{3.14}$$

Somando (3.13) e (3.14) membro a membro, conclui-se que a desigualdade (3.11) se verifica com $c_1=\sqrt{\max\{4k,2kl^2,2k_0,2k_0l,b\}}$. Observe que, até aqui, não foi necessário utilizar a hipótese.

A fim de demonstrar (3.12), note que para toda função u em $H_0^1(0,\ell)$ ou em $H_*^1(0,\ell)$, tem-se $\|u\|_{L^2}^2 \le \frac{\ell^2}{2}\|u_x\|_{L^2}^2$ (ver Proposição 1, página 125, em [6] e página 1 em [21]). Portanto,

$$\begin{aligned}\|\varphi_x\|_{L^2}^2 &\le 2\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 + 2\|\psi+lw\|_{L^2}^2\\ &\le 2\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 + 4\|\psi\|_{L^2}^2 + 4\|lw\|_{L^2}^2\\ &\le 2\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 + 2\ell^2\|\psi_x\|_{L^2}^2 + 2l^2\ell^2\|w_x\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|w_x\|_{L^2}^2 &\le 2\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + 2\|l\varphi\|_{L^2}^2\\ &\le 2\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + l^2\ell^2\|\varphi_x\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Somando as últimas duas desigualdades membro a membro, obtém-se

$$(1-l^2\ell^2)\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + (1-2l^2\ell^2)\|w_x\|_{L^2} \le 2\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 + 2\ell^2\|\psi_x\|_{L^2}^2 + 2\|w_x-l\varphi\|_{L^2}^2.$$

Assim, utilizando a hipótese,

$$\begin{aligned}\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\psi_x\|^2 + \|w_x\|_{L^2}^2 \le{}& \frac{2}{(1-2l^2\ell^2)}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 + \left(\frac{2\ell^2}{(1-2l^2\ell^2)}+1\right)\|\psi_x\|_{L^2}^2\\ &+\frac{2}{(1-2l^2\ell^2)}\|w_x-l\varphi\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

e, consequentemente, a desigualdade (3.12) se verifica com

$$c_2^2 = \min\left\{\frac{2}{k(1-2l^2\ell^2)}, \frac{2}{k_0(1-2l^2\ell^2)}, \left(\frac{2\ell^2}{(1-2l^2\ell^2)}+1\right)\frac{1}{b}\right\}.$$

Isto mostra que as normas $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ e $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ são equivalentes. Como $(\mathcal{H}, |\cdot|_{\mathcal{H}})$ é completo, resulta que $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ também é. E como $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ provém de um produto interno, resulta que $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ é um espaço de Hilbert. ■

3.2 EXISTÊNCIA E UNICIDADE

O objetivo desta seção é mostrar que o problema (3.4) admite uma única solução (esta conclusão se estenderá ao problema (3.1)-(3.3)). Com vistas à aplicação do Teorema 2.91, o primeiro passo será verificar que o operador A, acima definido, é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações. Para este propósito, um lema será necessário.

Lema 3.4. *Dadas $g_1 \in L^2(0,\ell)$ e $g_2, g_3 \in L^2_*(0,\ell)$, o sistema*

$$k(\varphi_x + \psi + lw)_x + k_0 l(w_x - l\varphi) = g_1, \tag{3.15}$$

$$b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + lw) = g_2, \tag{3.16}$$

$$k_0(w_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x + \psi + lw) = g_3, \tag{3.17}$$

possui uma única solução $(\varphi, \psi, w) \in [H^2(0,\ell) \cap H^1_0(0,\ell)] \times [H^2(0,\ell) \cap H^1_*(0,\ell)]^2$ com $\psi_x, w_x \in H^1_0(0,\ell)$.

Demonstração:

- **Existência**

Pelo Lema 2.78, existem $v \in H^1_0(0,\ell)$ e $u \in H^1_*(0,\ell)$ tais que

$$\begin{cases} ku_x + k_0 lv = g_1, \\ k_0 v_x - klu = g_3. \end{cases}$$

Defina

$$\psi(x) = \frac{1}{b}\int_0^x \int_0^z \Big(g_2(s) + ku(s)\Big)\, ds\, dz - \frac{1}{b\ell}\int_0^\ell \int_0^r \int_0^z \Big(g_2(s) + ku(s)\Big)\, ds\, dz\, dr.$$

Observe que $\psi \in H^2(0,\ell) \cap H^1_*(0,\ell)$ com $\psi_x \in H^1_0(0,\ell)$. Novamente pelo Lema 2.78, existem $\varphi \in H^1_0(0,\ell)$ e $w \in H^1_*(0,\ell)$ tais que

$$\begin{cases} w_x - l\varphi = v, \\ \varphi_x + lw = u - \psi. \end{cases} \tag{3.18}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} k(\varphi_x + \psi + lw)_x + k_0 l(w_x - l\varphi) &= ku_x + k_0 lv &= g_1, \\ b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + lw) &= b\psi_{xx} - ku &= g_2, \\ k_0(w_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x + \psi + lw) &= k_0 v_x - klu &= g_3. \end{aligned}$$

Da primeira equação do sistema (3.18), resulta que $w \in H^2(0,\ell)$ com $w_x \in H^1_0(0,\ell)$. E, pela segunda equação do mesmo sistema, resulta que $\varphi \in H^2(0,\ell)$. Logo, o sistema (3.15)-(3.16) possui uma solução (φ, ψ, w) com a regularidade mencionada.

- **Unicidade**

Considere o espaço $\mathcal{V} = H^1_0(0,\ell) \times H^1_*(0,\ell) \times H^1_*(0,\ell)$ munido com as normas

$$|(\varphi, \psi, w)|^2_{\mathcal{V}} = \|\varphi\|^2_{H^1} + \|\psi\|^2_{H^1} + \|w\|^2_{H^1}, \quad \|(\varphi, \psi, w)\|_{\mathcal{V}} = \|\varphi\|_{H^1} + \|\psi\|_{H^1} + \|w\|_{H^1}.$$

Como $(H_0^1(0,\ell), |\cdot|_{H^1})$ e $(H_*^1(0,\ell), |\cdot|_{H^1})$ são completos, $(\mathcal{V}, |\cdot|_{\mathcal{V}})$ e $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$ também são. Consequentemente, $(\mathcal{V}, |\cdot|_{\mathcal{V}})$ é um espaço de Hilbert. Além disso, para todo $(\varphi, \psi, w) \in \mathcal{V}$, tem-se

$$\|(\varphi, \psi, w)\|_{\mathcal{V}}^2 = (\|\varphi\|_{H^1} + \|\psi\|_{H^1} + \|w\|_{H^1})^2 \geq \|\varphi\|_{H^1}^2 + \|\psi\|_{H^1}^2 + \|w\|_{H^1}^2 = |(\varphi, \psi, w)|_{\mathcal{V}}^2.$$

Portanto, pela Proposição 2.18, as normas $|\cdot|_{\mathcal{V}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ são equivalentes. Dito isto, defina $a[\cdot,\cdot] : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ colocando

$$\begin{aligned} a[(\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*)] = k &\int_0^\ell (\varphi_x + \psi + lw)\overline{(\varphi_x^* + \psi^* + lw^*)}\, dx \\ &+ k_0 \int_0^\ell (w_x - l\varphi)\overline{(w_x^* - l\varphi^*)}\, dx + b \int_0^\ell \psi_x \overline{\psi_x^*}\, dx. \end{aligned}$$

Segue-se da definição que $a[\cdot,\cdot]$ é sesquilinear. Além disso, por (3.11) e por (3.12), $a[\cdot,\cdot]$ é contínua e coerciva. Defina, também, $\Lambda : \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ colocando

$$\Lambda(\varphi^*, \psi^*, w^*) = -\int_0^\ell g_1 \overline{\varphi^*}\, dx - \int_0^\ell g_2 \overline{\psi^*}\, dx - \int_0^\ell g_3 \overline{w^*}\, dx.$$

A linearidade de Λ segue-se da definição e a limitação segue-se da equivalência entre $|\cdot|_{\mathcal{V}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$. Deste modo, pode-se aplicar o Lema de Lax-Milgram e concluir que existe um único $(\hat{\varphi}, \hat{\psi}, \hat{w}) \in \mathcal{V}$ tal que

$$a[(\hat{\varphi}, \hat{\psi}, \hat{w}), (\varphi^*, \psi^*, w^*)] = \Lambda(\varphi^*, \psi^*, w^*), \quad \forall\, (\varphi^*, \psi^*, w^*) \in \mathcal{V}.$$

Mas, multiplicando (3.15) por $\varphi^* \in H_0^1(0,\ell)$, (3.16) por $\psi^* \in H_*^1(0,\ell)$ e (3.15) por $w^* \in H_*^1(0,\ell)$, concui-se que

$$a[(\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*)] = \Lambda(\varphi^*, \psi^*, w^*), \quad \forall\, (\varphi^*, \psi^*, w^*) \in \mathcal{V}.$$

Logo, $(\varphi, \psi, w) = (\hat{\varphi}, \hat{\psi}, \hat{w})$ e isso mostra que a solução do sistema (3.15)-(3.17) é única. ∎

Teorema 3.5. *O operador A, definido na Seção 3.1, é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações sobre $\mathcal{H}$.*

Demonstração: O objetivo é verificar que as hipóteses do Teorema 2.88 são satisfeitas. A linearidade de A é imediata. Resta verificar que A é dissipativo, que $0 \in \boldsymbol{\rho}(A)$ e que $D(A)$ é denso em $\mathcal{H}$. A verificação de que $0 \in \boldsymbol{\rho}(A)$ se dividirá em duas partes: mostrar que A é invertível e que seu inverso A^{-1} é limitado.

- **O operador A é dissipativo.**

Note que

$$AU = \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1}\varphi_{xx} + \frac{k_0 l^2}{\rho_1}\varphi + \frac{k}{\rho_1}\psi_x + \frac{l(k+k_0)}{\rho_1}w_x \\ \Psi \\ -\frac{k}{\rho_2}\varphi_x + \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}\psi - \frac{kl}{\rho_2}w - \frac{\gamma}{\rho_2}\theta_x \\ W \\ -\frac{l(k+k_0)}{\rho_1}\varphi_x - \frac{lk}{\rho_1}\psi + \frac{k_0}{\rho_1}w_{xx} - \frac{l^2 k}{\rho_1}w \\ -m\Psi_x + k_1\theta_{xx} \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(\!(AU,U)\!)_{\mathcal{H}} &= \int_0^\ell \Big(k\varphi_{xx} + k_0 l^2\varphi + k\psi_x + l(k+k_0)w_x\Big)\overline{\Phi}\,dx + \int_0^\ell \left(-\gamma\Psi_x + \frac{k_1\gamma}{m}\theta_{xx}\right)\overline{\theta}\,dx \\
&+ \int_0^\ell \Big(-k\varphi_x + b\psi_{xx} - k\psi - klw - \gamma\theta_x\Big)\overline{\Psi}\,dx + \int_0^\ell k_0(W_x - l\Phi)\overline{(w_x - l\varphi)}\,dx \\
&+ \int_0^\ell \Big(-l(k+k_0)\varphi_x - lk\psi + k_0 w_{xx} - l^2 kw\Big)\overline{W}\,dx + \int_0^\ell b\Psi_x\overline{\psi_x}\,dx \\
&+ \int_0^\ell k(\Phi_x + \Psi + lW)\overline{(\varphi_x + \psi + lw)}\,dx.
\end{aligned}$$

Rearranjando, conclui-se que

$$\begin{aligned}
(\!(AU,U)\!)_{\mathcal{H}} &= k\int_0^\ell (\varphi_x + \psi + lw)_x\overline{\Phi}\,dx + k\int_0^\ell \overline{(\varphi_x + \psi + lw)}\Phi_x\,dx + k_0\int_0^\ell (w_x - l\varphi)_x\overline{W}\,dx \\
&+ k_0\int_0^\ell \overline{(w_x - l\varphi)}W_x\,dx + b\int_0^\ell \psi_{xx}\overline{\Psi}\,dx + b\int_0^\ell \overline{\psi_x}\Psi_x\,dx - \gamma\int_0^\ell \overline{\Psi}\theta_x\,dx \\
&+ kl\int_0^\ell \Big(\overline{(\varphi_x + \psi + lw)}W - (\varphi_x + \psi + lw)\overline{W}\Big)dx - \gamma\int_0^\ell \Psi_x\overline{\theta}\,dx \\
&+ k_0 l\int_0^\ell \Big((w_x - l\varphi)\overline{\Phi} - \overline{(w_x - l\varphi)}\Phi\Big)dx + \frac{\gamma k_1}{m}\int_0^\ell \theta_{xx}\overline{\theta}\,dx \\
&+ k\int_0^\ell \Big(\overline{(\varphi_x + \psi + lw)}\Psi - (\varphi_x + \psi + lw)\overline{\Psi}\Big)dx.
\end{aligned}$$

Aplicando integração por partes, resulta que

$$
\begin{aligned}
(\!(AU, U)\!)_{\mathcal{H}} = & \; k\int_0^\ell \left(\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\Phi_x - (\varphi_x+\psi+lw)\overline{\Phi_x}\right)dx + b\int_0^\ell \left(\overline{\psi_x}\Psi_x - \psi_x\overline{\Psi}\right)dx \\
& + k\int_0^\ell \left(\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\Psi - (\varphi_x+\psi+lw)\overline{\Psi}\right)dx - \gamma\int_0^\ell \left(\overline{\Psi}\theta_x - \Psi\overline{\theta_x}\right)dx \\
& + k_0\int_0^\ell \left(\overline{(w_x-l\varphi)}W_x - (w_x-l\varphi)\overline{W_x}\right)dx - \frac{\gamma k_1}{m}\|\theta_x\|_{L^2}^2 \\
& + kl\int_0^\ell \left(\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}W - (\varphi_x+\psi+lw)\overline{W}\right)dx \\
& + k_0 l\int_0^\ell \left((w_x-l\varphi)\overline{\Phi} - \overline{(w_x-l\varphi)}\Phi\right)dx.
\end{aligned}
$$

Observe que, nas integrais da última igualdade, os integrandos são nulos ou da forma $z - \overline{z} = 2\mathbf{i}\Im(z)$. Portanto, tomando a parte real, segue-se que

$$
\Re(\!(AU, U)\!)_{\mathcal{H}} = -\frac{\gamma k_1}{m}\|\theta_x\|_{L^2}^2 \leq 0. \tag{3.20}
$$

Como $U \in D(A)$ foi tomado arbitrário, isto mostra que o operador A é dissipativo.

- **O operador A é invertível.**

Seja $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7) \in \mathcal{H}$. Tome $\Phi = f_1$, $\Psi = f_3$ e $W = f_5$. Pela Proposição 2.77 existe uma única função $\theta \in H^2(0,\ell) \cap H_0^1(0,\ell)$ tal que

$$
-m\Psi_x + k_1\theta_{xx} = f_7.
$$

De fato, basta tomar $K = 0$ e $g = -\frac{1}{k_1}(f_7 + m\Psi_x)$. Além disso, existe um único $(\varphi, \psi, w) \in [H^2(0,\ell) \cap H_0^1(0,\ell)] \times [H^2(0,\ell) \cap \times H_*^1(0,\ell)]^2$ satisfazendo

$$
\begin{aligned}
k(\varphi_x+\psi+lw)_x + k_0 l(w_x - l\varphi) &= \rho_1 f_2, \\
b\psi_{xx} - k(\varphi_x+\psi+lw) - \gamma\theta_x &= \rho_2 f_4, \\
k_0(w_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x+\psi+lw) &= \rho_1 f_6,
\end{aligned}
$$

com $\psi_x, w_x \in H_0^1(0,\ell)$. De fato, basta tomar $g_1 = \rho_1 f_2$, $g_2 = \rho_2 f_4 + \gamma\theta_x$ e $g_3 = \rho_1 f_6$ no Lema

3.4. Em resumo: existe um único $U \in D(A)$ tal que

$$AU = \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1}\varphi_{xx} - \frac{k_0 l^2}{\rho_1}\varphi + \frac{k}{\rho_1}\psi_x + \frac{l(k+k_0)}{\rho_1}w_x \\ \Psi \\ -\frac{k}{\rho_2}\varphi_x + \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}\psi - \frac{kl}{\rho_2}w - \frac{\gamma}{\rho_2}\theta_x \\ W \\ -\frac{l(k+k_0)}{\rho_1}\varphi_x - \frac{lk}{\rho_1}\psi + \frac{k_0}{\rho_1}w_{xx} - \frac{l^2 k}{\rho_1}w \\ -m\Psi_x + k_1\theta_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{pmatrix} = F.$$

Isto mostra que A é bijetivo e, portanto, invertível.

- **O operador $A^{-1} : \mathcal{H} \to D(A)$ é limitado.**

Seja $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7) \in \mathcal{H}$. Então, existe $U \in D(A)$ tal que $AU = F$. Segue-se que

$$\Phi = f_1 \tag{3.21}$$
$$k(\varphi_x + \psi + lw)_x + k_0 l(w_x - l\varphi) = \rho_1 f_2 \tag{3.22}$$
$$\Psi = f_3 \tag{3.23}$$
$$b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + lw) - \gamma\theta_x = \rho_2 f_4 \tag{3.24}$$
$$W = f_5 \tag{3.25}$$
$$k_0(w_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x + \psi + lw) = \rho_1 f_6 \tag{3.26}$$
$$k_1\theta_{xx} - m\Psi_x = f_7 \tag{3.27}$$

Multiplicando (3.22) por $\overline{\varphi}$, (3.24) por $\overline{\psi}$ e (3.26) por $\overline{w}$, integrando cada uma das três equações resultantes sobre $(0, \ell)$ e somando membro a membro, conclui-se que

$$\begin{aligned} k\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2 = &-\int_0^\ell (\rho_2 f_4 + \gamma\theta_x)\overline{\psi}\, dx \\ &-\int_0^\ell \rho_1 f_2 \overline{\varphi}\, dx - \int_0^\ell \rho_1 f_6 \overline{w}\, dx. \end{aligned}$$

Segue-se da definição de $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ que

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 = &\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_1\|W\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma}{m}\|\theta\|_{L^2}^2 \\ &- \int_0^\ell \rho_1 f_2\overline{\varphi}\, dx - \int_0^\ell \rho_2 f_4\overline{\psi}\, dx - \int_0^\ell \rho_1 f_6\overline{w}\, dx - \int_0^\ell \gamma\theta_x\overline{\psi}\, dx. \end{aligned}$$

A seguir, cada termo do lado direito da igualdade acima será estimado. Por (3.21), (3.23) e

(3.25), deduz-se que

$$\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_1\|W\|_{L^2}^2 \leq c_5|F|_{\mathcal{H}}^2,$$

onde $c_5 = \max\{\rho_1, \rho_2\}$. Utilizando (3.23), (3.27) e as desigualdades de Young e Poincaré, segue-se

$$\frac{\gamma}{m}\|\theta\|_{L^2}^2 \leq c_6|F|_{\mathcal{H}}|U|_{\mathcal{H}}$$

para alguma constante positiva c_6. Pelas desigualdades triangular e de Hölder, obtém-se

$$\left| -\int_0^\ell \rho_1 f_2\overline{\varphi}\, dx - \int_0^\ell \rho_2 f_4\overline{\psi}\, dx - \int_0^\ell \rho_1 f_6\overline{w}\, dx \right| \leq 3c_5|F|_{\mathcal{H}}|U|_{\mathcal{H}}.$$

Pela desigualdade de Hölder, pela desigualdade de Poincaré e por (3.27),

$$\left| -\int_0^\ell \gamma\theta_x\overline{\psi}\, dx \right| \leq c_7|F|_{\mathcal{H}}|U|_{\mathcal{H}}$$

para alguma constante positiva c_7. Logo, tomando $c_8 = \max\{c_5, c_6 + 3c_5 + c_7\}$ e utilizando o Lema 3.3, vê-se que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq c_8|F|_{\mathcal{H}}^2 + c_8|F|_{\mathcal{H}}|U|_{\mathcal{H}} \leq c_8 d_4^2\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + c_8 d_4^2\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Aplicando a desigualdade de Young na última parcela, segue-se que existe uma constante positiva $c_9 = 3c_8 d_4^2/2$ tal que

$$\|A^{-1}F\|_{\mathcal{H}} = \|U\|_{\mathcal{H}} \leq c_9\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Como $F \in \mathcal{H}$ foi tomado arbitrário, isto mostra que o operador A^{-1} é limitado.

- **O espaço $D(A)$ é denso em $\mathcal{H}$.**

Note que $(\lambda_0 I - A) : D(A) \to H$ pode ser escrito como composição dos operadores $A : D(A) \to H$ e $(\lambda_0 A^{-1} - I) : D(A) \to D(A)$, ou seja,

$$(\lambda_0 I - A) = A(\lambda_0 A^{-1} - I).$$

Como A^{-1} é limitado, pode-se tomar $B_1 = -I$ e $B_2 = \lambda_0 A^{-1}$ (para λ_0 pequeno o bastante) na Proposição 2.16 e concluir que $B_1 + B_2 = \lambda_0 A^{-1} - I$ é invertível. Sendo assim, $\lambda_0 I - A$ é invertível (por se tratar de uma composição de operadores invertíveis) e, portanto, sobrejetivo. Pelo item (a) do Teorema 2.27, $\lambda I - A$ é sobrejetivo para todo $\lambda > 0$ e, em particular, para $\lambda = 1$. Como A é dissipativo, segue-se do Lema 3.3 e do item (b) do Teorema 2.27 que $D(A)$ é denso em $\mathcal{H}$. ■

Teorema 3.6. *Para cada vetor $U_0 \in D(A)$, o problema (3.4) possui uma única solução*

$$U \in C\big([0,\infty), D(A)\big) \cap C^1\big([0,\infty), \mathcal{H}\big)$$

dada por $U(t) = \mathrm{e}^{tA}U_0$.

Demonstração: Segue-se do Teorema 3.5 e do Teorema 2.91. ■

3.3 Estabilidade Exponencial

O objetivo desta seção é apresentar uma condição suficiente para que o semigrupo associado ao problema (3.1)-(3.3) tenha decaimento exponencial. A demonstração será feita mediante a verificação dos itens (i) e (ii) do Teorema 2.94. Para tanto, serão demonstrados uma série de lemas.

Dados $\lambda \in \mathbb{C}$ e $F \in \mathcal{H}$, considere a equação resolvente

$$\lambda U - AU = F \tag{3.28}$$

a qual, em termos de suas componentes, pode ser escrita como

$$\lambda\varphi - \Phi = f_1 \tag{3.29}$$
$$\rho_1\lambda\Phi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) = \rho_1 f_2 \tag{3.30}$$
$$\lambda\psi - \Psi = f_3 \tag{3.31}$$
$$\rho_2\lambda\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = \rho_2 f_4 \tag{3.32}$$
$$\lambda w - W = f_5 \tag{3.33}$$
$$\rho_1\lambda W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = \rho_1 f_6 \tag{3.34}$$
$$\lambda\theta - k_1\theta_{xx} + m\Psi_x = f_7 \tag{3.35}$$

Lema 3.7. *Se $U \in D(A)$ é uma solução da equação resolvente (3.28), então*

$$\frac{\gamma k_1}{m}\|\theta_x\|^2_{L^2} = \Re(\!(F, U)\!)_{\mathcal{H}} \leq \|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Demonstração: Tomando o produto interno de ambos os lados de (3.28) com U, obtém-se

$$\lambda\|U\|^2_{\mathcal{H}} - (\!(AU, U)\!)_{\mathcal{H}} = (\!(F, U)\!)_{\mathcal{H}}\,.$$

Assim, tomando $\lambda \in \mathbf{i}\mathbb{R}$ e calculando a parte real, o resultado desejado segue-se de (3.20). ■

Lema 3.8. *Sejam $\lambda \in \mathbf{i}\mathbb{R}$ e $U \in D(A)$ uma solução da equação resolvente (3.28). Se $|\lambda| \geq 1$,* *então existe uma constante positiva C tal que*

$$\|\Psi\|_{L^2}^2 \leq C\|\theta_x\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Demonstração: Defina uma função auxiliar p colocando, para cada t fixado,

$$p(x,t) = \int_0^x \Psi(y,t)\, dy \quad \forall x \in [0,\ell].$$

Como $\Psi \in L^2_*(0,\ell)$, tem-se $p \in H^1_0(0,\ell)$ e, além disso, $p_x = \Psi$ (ver Proposição 2.73 e Teorema 2.74). Multiplicando (3.35) por $\overline{p}$ e integrando de 0 até ℓ, resulta que

$$\int_0^\ell \lambda\theta\overline{p}\, dx - k_1\int_0^\ell \theta_{xx}\overline{p}\, dx + m\int_0^\ell \Psi_x\overline{p}\, dx = \int_0^\ell f_7\overline{p}\, dx.$$

Mas, integrando por partes, vê-se que

$$-\,k_1\int_0^\ell \theta_{xx}\overline{p}\, dx = k_1\int_0^\ell \theta_x\overline{\Psi}\, dx$$

e

$$m\int_0^\ell \Psi_x\overline{p}\, dx = -\,m\int_0^\ell |\Psi|^2\, dx$$

de onde segue que

$$m\int_0^\ell |\Psi|^2\, dx = \int_0^\ell \lambda\theta\overline{p}\, dx + k_1\int_0^\ell \theta_x\overline{\Psi}\, dx - \int_0^\ell f_7\overline{p}\, dx. \tag{3.36}$$

Considere, agora, mais uma função auxiliar q que satisfaça $q_{xx} = \theta$ e $q(0) = q(\ell) = 0$ (a existência de uma função com tal propriedade é assegurada pela Proposição 2.77). Então, integrando por partes e usando a igualdade (3.32), deduz-se que

$$\begin{aligned}\int_0^\ell \lambda\theta\overline{p}\, dx &= \int_0^\ell \lambda q_{xx}\overline{p}\, dx = -\int_0^\ell \lambda q_x\overline{\Psi}\\ &= \frac{b}{\rho_2}\int_0^\ell q_x\overline{\psi_{xx}}\, dx - \frac{k}{\rho_2}\int_0^\ell q_x\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\, dx - \frac{\gamma}{\rho_2}\int_0^\ell q_x\overline{\theta_x}\, dx + \int_0^\ell q_x\overline{f_4}\, dx\\ &= -\frac{b}{\rho_2}\int_0^\ell \theta\overline{\psi_x}\, dx - \frac{k}{\rho_2}\int_0^\ell q_x\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\, dx + \frac{\gamma}{\rho_2}\int_0^\ell |\theta|^2\, dx + \int_0^\ell q_x\overline{f_4}\, dx.\end{aligned}$$

Além disso, pela igualdade (3.31), tem-se que

$$\frac{b}{\rho_2}\int_0^\ell \theta\overline{\psi_x}\, dx = \frac{b}{\lambda\rho_2}\int_0^\ell \theta\overline{f_{3,x}}\, dx - \frac{b}{\lambda\rho_2}\int_0^\ell \theta_x\overline{\Psi}\, dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^\ell \lambda\theta\overline{p}\,dx =& -\frac{b}{\lambda\rho_2}\int_0^\ell \theta\overline{f_{3,x}}\,dx + \frac{b}{\lambda\rho_2}\int_0^\ell \theta_x\overline{\Psi}\,dx - \frac{k}{\rho_2}\int_0^\ell q_x\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx\\ &+\frac{\gamma}{\rho_2}\int_0^\ell |\theta|^2\,dx + \int_0^\ell q_x\overline{f_4}\,dx.\end{aligned}$$

Substituindo este resultado em (3.36), obtém-se

$$\begin{aligned}m\int_0^\ell |\Psi|^2\,dx =& -\frac{b}{\lambda\rho_2}\int_0^\ell \theta\overline{f_{3,x}}\,dx + \frac{b}{\lambda\rho_2}\int_0^\ell \theta_x\overline{\Psi}\,dx - \frac{k}{\rho_2}\int_0^\ell q_x\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx\\ &+\frac{\gamma}{\rho_2}\int_0^\ell |\theta|^2\,dx + \int_0^\ell q_x\overline{f_4}\,dx + k_1\int_0^\ell \theta_x\overline{\Psi}\,dx - \int_0^\ell f_7\overline{p}\,dx.\end{aligned}$$

Tomando a parte real de ambos os lados da última igualdade, aplicando a desigualdade de Hölder e utilizando que $|\lambda|\geq 1$, conclui-se que

$$\begin{aligned}m\|\Psi\|_{L^2}^2 \leq& \frac{b}{|\lambda|\rho_2}\|\theta\|_{L^2}\|f_{3,x}\|_{L^2} + \frac{b}{|\lambda|\rho_2}\|\theta_x\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + \frac{k}{\rho_2}\|q_x\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}\\ &+\frac{\gamma}{\rho_2}\|\theta\|_{L^2}^2 + \|q_x\|_{L^2}\|f_4\|_{L^2} + k_1\|\theta_x\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + \|f_7\|_{L^2}\|p\|_{L^2}\\ \leq& \frac{b}{\rho_2}\|\theta\|_{L^2}\|f_{3,x}\|_{L^2} + \frac{b}{\rho_2}\|\theta_x\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + \frac{k}{\rho_2}\|q_x\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}\\ &+\frac{\gamma}{\rho_2}\|\theta\|_{L^2}^2 + \|q_x\|_{L^2}\|f_4\|_{L^2} + k_1\|\theta_x\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + \|f_7\|_{L^2}\|p\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré, utilizando o Lema 3.7 e a definição da norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, resulta que

$$\begin{aligned}m\|\Psi\|_{L^2}^2 \leq& \frac{b}{\rho_2}\|\theta\|_{L^2}\|f_{3,x}\|_{L^2} + \frac{b}{\rho_2}\|\theta_x\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + \frac{c_pk}{\rho_2}\|q_{xx}\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}\\ &+\frac{c_p\gamma}{\rho_2}\|\theta_x\|_{L^2}^2 + c_p\|q_{xx}\|_{L^2}\|f_4\|_{L^2} + k_1\|\theta_x\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + c_p\|f_7\|_{L^2}\|p_x\|_{L^2}\\ =& \frac{b}{\rho_2}\|\theta\|_{L^2}\|f_{3,x}\|_{L^2} + \frac{b}{\rho_2}\|\theta_x\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + \frac{c_pk}{\rho_2}\|\theta\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}\\ &+\frac{c_p\gamma}{\rho_2}\|\theta_x\|_{L^2}^2 + c_p\|\theta\|_{L^2}\|f_4\|_{L^2} + k_1\|\theta_x\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + c_p\|f_7\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2}\\ \leq& \frac{b\sqrt{m}}{\rho_2\sqrt{\gamma}\sqrt{b}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{b}{\rho_2\sqrt{\rho_2}}\|\theta_x\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{c_pc_pk}{\rho_2\sqrt{k}}\|\theta_x\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}}\\ &+\frac{c_p\gamma m}{\rho_2\gamma k_1}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{c_p\sqrt{m}}{\sqrt{\gamma}\sqrt{\rho_2}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{k_1}{\sqrt{\rho_2}}\|\theta_x\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}}\\ &+\frac{c_p\sqrt{m}}{\sqrt{\gamma}\sqrt{\rho_2}}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Portanto, tem-se

$$\|\Psi\|_{L^2}^2 \leq C\|\theta_x\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}},$$

onde

$$C=\frac{1}{m}\max\left\{\frac{\sqrt{bm}}{\rho_2\sqrt{\gamma}}+\frac{c_pm}{\rho_2k_1}+\frac{c_p\sqrt{m}}{\sqrt{\gamma\rho_2}}+\frac{c_p\sqrt{m}}{\sqrt{\gamma\rho_2}},\frac{b}{\sqrt{\rho_2^3}}+\frac{c_p^2\sqrt{k}}{\rho_2}+\frac{k_1}{\sqrt{\rho_2}}\right\}.$$

■

Lema 3.9. *Sejam $\lambda=\mathbf{i}\beta\in\mathbf{i}\mathbb{R}$ e $U\in D(A)$ uma solução da equação resolvente (3.28). Se $|\lambda|\geq 1$, então existe uma constante positiva C tal que*

$$\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2\leq C\beta^2\left|\frac{b\rho_1}{k}-\rho_2\right|^2\|\Psi\|_{L^2}^2+C\|\Psi\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}+C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Demonstração: Multiplicando (3.32) por $\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}$ e integrando sobre o intervalo $[0,\ell]$, obtém-se

$$k\int_0^\ell|\varphi_x+\psi+lw|^2\,dx=b\underbrace{\int_0^\ell\psi_{xx}\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx}_{i_1}-\lambda\rho_2\int_0^\ell\Psi\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx$$
$$-\gamma\int_0^\ell\theta_x\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx+\rho_2\int_0^\ell f_4\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx.$$

Integrando por partes o termo i_1 e usando a igualdade (3.30) resulta que

$$k\int_0^\ell|\varphi_x+\psi+lw|^2\,dx=\frac{bk_0l}{k}\underbrace{\int_0^\ell\psi_x\overline{(w_x-l\varphi)}\,dx}_{i_2}+\frac{b\rho_1}{k}\int_0^\ell\psi_x\overline{f_2}\,dx+\frac{\lambda b\rho_1}{k}\int_0^\ell\psi_x\overline{\Phi}\,dx$$
$$-\lambda\rho_2\int_0^\ell\Psi\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx-\gamma\int_0^\ell\theta_x\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx+\rho_2\int_0^\ell f_4\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx.$$

Integrando por partes o termo i_2 e usando a igualdade (3.34) deduz-se que

$$k\int_0^\ell|\varphi_x+\psi+lw|^2\,dx=-\lambda\rho_2\underbrace{\int_0^\ell\Psi\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx}_{i_3}+\frac{\lambda b\rho_1}{k}\underbrace{\int_0^\ell\psi_x\overline{\Phi}\,dx}_{i_4}$$
$$+\frac{\lambda b\rho_1l}{k}\underbrace{\int_0^\ell\psi\overline{W}\,dx}_{i_5}-bl^2\underbrace{\int_0^\ell\psi_x\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx}_{i_6}+\frac{b\rho_1l}{k}\int_0^\ell\psi\overline{f_6}\,dx$$
$$+\frac{b\rho_1}{k}\int_0^\ell\psi_x\overline{f_2}\,dx-\gamma\int_0^\ell\theta_x\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx+\rho_2\int_0^\ell f_4\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx.$$

Reescrevendo o termo i_3 através das igualdades (3.29), (3.31) e (3.33), reescrevendo i_4, i_5 e i_6

através de (3.31) e integrando i_4 por partes, conclui-se que

$$k\int_0^\ell |\varphi_x+\psi+lw|^2\,dx = \left(\rho_2-\frac{b\rho_1}{k}\right)\underbrace{\int_0^\ell \Psi\overline{\Phi_x}\,dx}_{i_7} + \rho_2\int_0^\ell \Psi\overline{(f_{1,x}+f_3+lf_5)}\,dx$$
$$+\rho_2 l\int_0^\ell \Psi\overline{W}\,dx+\rho_2\int_0^\ell |\Psi|^2\,dx+\frac{b\rho_1}{k}\int_0^\ell f_{3,x}\overline{\Phi}\,dx+\frac{b\rho_1 l}{k}\int_0^\ell f_3\overline{W}\,dx+\frac{b\rho_1 l}{k}\int_0^\ell \Psi\overline{W}\,dx$$
$$-\frac{bl^2}{\lambda}\int_0^\ell \Psi\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx-\frac{bl^2}{\lambda}\int_0^\ell f_3\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx+\frac{b\rho_1 l}{k}\int_0^\ell \psi\overline{f_6}\,dx$$
$$+\frac{b\rho_1}{k}\int_0^\ell \psi_x\overline{f_2}\,dx-\gamma\int_0^\ell \theta_x\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx+\rho_2\int_0^\ell f_4\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx.$$

Reescrevendo o termo i_7 através das igualdades (3.29), (3.31) e (3.33), segue-se que

$$k\int_0^\ell |\varphi_x+\psi+lw|^2\,dx = \lambda\left(\frac{b\rho_1}{k}-\rho_2\right)\int_0^\ell \Psi\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx$$
$$+\rho_2\int_0^\ell \Psi\overline{(f_{1,x}+f_3+lf_5)}\,dx+\rho_2 l\int_0^\ell \Psi\overline{W}\,dx+\rho_2\int_0^\ell |\Psi|^2\,dx+\frac{b\rho_1}{k}\int_0^\ell f_{3,x}\overline{\Phi}\,dx$$
$$+\frac{b\rho_1 l}{k}\int_0^\ell f_3\overline{W}\,dx+\frac{b\rho_1 l}{k}\int_0^\ell \Psi\overline{W}\,dx-\frac{bl^2}{\lambda}\int_0^\ell \Psi\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx$$
$$-\frac{bl^2}{\lambda}\int_0^\ell f_3\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx+\frac{b\rho_1 l}{k}\int_0^\ell \psi\overline{f_6}\,dx+\frac{b\rho_1}{k}\int_0^\ell \psi_x\overline{f_2}\,dx$$
$$-\gamma\int_0^\ell \theta_x\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx+\rho_2\int_0^\ell f_4\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx.$$

Agora, tomando a parte real de ambos os lados, aplicando a desigualdade de Hölder e usando que $|\lambda|\geq 1$, resulta que

$$k\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 \leq \underbrace{|\beta|\left|\frac{b\rho_1}{k}-\rho_2\right|\|\Psi\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}}_{i_8}+\rho_2\|\Psi\|_{L^2}\|f_{1,x}+f_3+lf_5\|_{L^2}$$
$$+\rho_2 l\|\Psi\|_{L^2}\|W\|_{L^2}+\rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2+\frac{b\rho_1}{k}\|f_{3,x}\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2}+\frac{b\rho_1 l}{k}\|f_3\|_{L^2}\|W\|_{L^2}+\frac{b\rho_1 l}{k}\|\Psi\|_{L^2}\|W\|_{L^2}$$
$$+bl^2\|\Psi\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}+bl^2\|f_3\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}+\frac{b\rho_1 l}{k}\|\psi\|_{L^2}\|f_6\|_{L^2}$$
$$+\frac{b\rho_1}{k}\|\psi_x\|_{L^2}\|f_2\|_{L^2}+\underbrace{\gamma\|\theta_x\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}}_{i_9}+\rho_2\|f_4\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}.$$

Aplicando a desigualdade de Young nos termos i_8 e i_9 e a desigualdade de Poincaré nas funções

f_3 e ψ, obtém-se

$$\frac{k}{2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 \leq \frac{\beta^2}{k}\left|\frac{b\rho_1}{k}-\rho_2\right|^2 \|\Psi\|_{L^2}^2+\rho_2\|\Psi\|_{L^2}\|f_{1,x}+f_3+lf_5\|_{L^2}+\rho_2 l\|\Psi\|_{L^2}\|W\|_{L^2}$$
$$+\rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2+\frac{b\rho_1}{k}\|f_{3,x}\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2}+\frac{c_pb\rho_1 l}{k}\|f_{3,x}\|_{L^2}\|W\|_{L^2}+\frac{b\rho_1 l}{k}\|\Psi\|_{L^2}\|W\|_{L^2}$$
$$+bl^2\|\Psi\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}+c_pbl^2\|f_{3,x}\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}+\frac{c_pb\rho_1 l}{k}\|\psi_x\|_{L^2}\|f_6\|_{L^2}$$
$$+\frac{b\rho_1}{k}\|\psi_x\|_{L^2}\|f_2\|_{L^2}+\frac{\gamma^2}{k}\|\theta_x\|_{L^2}^2+\rho_2\|f_4\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}.$$

Da definição de $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ e do Lema 3.7, resulta que

$$\frac{k}{2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 \leq \frac{\beta^2}{k}\left|\frac{b\rho_1}{k}-\rho_2\right|^2 \|\Psi\|_{L^2}^2+\frac{\gamma^2 m}{k\gamma k_1}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}+\frac{\rho_2}{\sqrt{\rho_2}\sqrt{k}}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}$$
$$+\frac{\rho_2}{\sqrt{\rho_2}\sqrt{k}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+\frac{\rho_2 l}{\sqrt{\rho_1}}\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}}+\frac{\rho_2}{\sqrt{\rho_2}}\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}}+\frac{b\rho_1}{k\sqrt{b}\sqrt{\rho_1}}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}$$
$$+\frac{c_pb\rho_1 l}{k\sqrt{b}\sqrt{\rho_1}}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}+\frac{b\rho_1 l}{k\sqrt{\rho_1}}\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}}+\frac{bl^2}{\sqrt{k}}\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}}$$
$$+\frac{c_pbl^2}{\sqrt{b}\sqrt{k}}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}+\frac{c_pb\rho_1 l}{k\sqrt{b}\sqrt{\rho_1}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|+\frac{b\rho_1}{k\sqrt{b}\sqrt{\rho_1}}\|U\|_{L^2}\|F\|_{\mathcal{H}}$$

Portanto, tem-se

$$\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 \leq C\beta^2\left|\frac{b\rho_1}{k}-\rho_2\right|^2\|\Psi\|_{L^2}^2+C\|\Psi\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}+C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}},$$

onde

$$C=\frac{2}{k}\max\left\{\frac{1}{k},\frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{k}}+\frac{2\sqrt{b\rho_1}}{k}+\frac{c_pl\sqrt{b\rho_1}}{k}+\frac{c_pl^2\sqrt{b}}{\sqrt{k}}+\frac{c_pl\sqrt{b\rho_1}}{k}+\frac{\gamma m}{kk_1}+\frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{k}},\right.$$
$$\left.\frac{\rho_2 l}{\sqrt{\rho_1}}+\sqrt{\rho_2}+\frac{bl\sqrt{\rho_1}}{k}+\frac{bl^2}{\sqrt{k}}\right\}.$$

■

Lema 3.10. *Sejam $\lambda\in i\mathbb{R}$ e $U\in D(A)$ uma solução da equação resolvente (3.28). Se $|\lambda|\geq 1$, então existe uma constante positiva C tal que*

$$\|\psi_x\|_{L^2}^2 \leq C\|\Psi\|_{L^2}^2+C\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2+C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Demonstração: Multiplicando (3.32) por $\overline{\psi}$ e integrando de 0 até ℓ segue-se que

$$b\int_0^\ell|\psi_x|^2\,dx=\rho_2\int_0^\ell f_4\overline{\psi}\,dx-\lambda\rho_2\underbrace{\int_0^\ell\Psi\overline{\psi}\,dx}_{i_1}-k\int_0^\ell(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\psi}\,dx-\gamma\int_0^\ell\theta_x\overline{\psi}\,dx.$$

Usando (3.31) em i_1, resulta que

$$b\int_0^\ell |\psi_x|^2\,dx = \rho_2\int_0^\ell \Psi\overline{f_3}\,dx + \rho_2\int_0^\ell |\Psi|^2\,dx - k\int_0^\ell (\varphi_x+\psi+lw)\overline{\psi}\,dx + \\ -\gamma\int_0^\ell \theta_x\overline{\psi}\,dx + \rho_2\int_0^\ell f_4\overline{\psi}\,dx.$$

Tomando a parte real de ambos os lados da última igualdade e aplicando a desigualdade de Hölder, obtém-se

$$b\|\psi_x\|_{L^2}^2 \le \rho_2\|\Psi\|_{L^2}\|f_3\|_{L^2} + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + k\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2} \\ + \gamma\|\theta_x\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2} + \rho_2\|f_4\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}.$$

Pela desigualdade de Poincaré, deduz-se que

$$b\|\psi_x\|_{L^2}^2 \le c_p\rho_2\|\Psi\|_{L^2}\|f_{3,x}\|_{L^2} + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + c_pk\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2} \\ + c_p\gamma\|\theta_x\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2} + c_p\rho_2\|f_4\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2}.$$

Da desigualdade de Young, conclui-se que

$$\frac{b}{2}\|\psi_x\|_{L^2}^2 \le c_p\rho_2\|\Psi\|_{L^2}\|f_{3,x}\|_{L^2} + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \frac{c_p^2k^2}{b}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 \\ + \frac{c_p^2\gamma^2}{b}\|\theta_x\|_{L^2}^2 + c_p\rho_2\|f_4\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2}.$$

Deste modo, pelo Lema 3.7 e pela definição de $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$,

$$\frac{b}{2}\|\psi_x\|_{L^2}^2 \le \frac{c_p\rho_2}{\sqrt{\rho_2}\sqrt{b}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \frac{c_p^2k^2}{b}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 \\ + \frac{mc_p^2\gamma^2}{\gamma k_1 b}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{c_p\rho_2}{\sqrt{\rho_2}\sqrt{b}}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Portanto,

$$\|\psi_x\|_{L^2}^2 \le C\|\Psi\|_{L^2}^2 + C\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}},$$

onde

$$C = \frac{2}{b}\max\left\{\rho_2, \frac{c_p^2k^2}{b}, \frac{c_p\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}} + \frac{mc_p^2\gamma}{k_1 b} + \frac{c_p\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}}\right\}.$$

■

Lema 3.11. *Sejam $\lambda \in i\mathbb{R}$ e $U \in D(A)$ uma solução da equação resolvente (3.28). Se $|\lambda|^2 \ge$*

$\max\left\{1, k_0, \frac{2k_0l^2}{\rho_1}\right\}$, *então existe uma constante positiva C tal que*

$$\begin{aligned}\|\Phi\|_{L^2}^2 \leq C(k_0-k)\|w\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2} + C\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 \\ + C\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2.\end{aligned}$$

Demonstração: Multiplicando (3.30) por $\overline{\varphi} = -\frac{1}{\lambda}\overline{(f_1+\Phi)}$, integrando sobre o intervalo $[0,\ell]$ e usando integração por partes, obtém-se

$$\begin{aligned}\rho_1\int_0^\ell |\Phi|^2\,dx = k\underbrace{\int_0^\ell(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\varphi}_x\,dx}_{i_1} + \underbrace{k_0l\int_0^\ell w\overline{\varphi}_x\,dx}_{i_2} \\ + k_0l^2\int_0^\ell|\varphi|^2\,dx - \rho_1\int_0^\ell \Phi\overline{f_1}\,dx - \rho_1\int_0^\ell f_2\overline{\varphi}\,dx.\end{aligned}$$

Somando e subtraindo $(\varphi_x+\psi+lw)\overline{(\psi+lw)}$ aos integrandos de i_1 e i_2, conclui-se que

$$\begin{aligned}k\int_0^\ell(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\varphi}_x\,dx + k_0l\int_0^\ell w\overline{\varphi}_x\,dx = k_0l\int_0^\ell w\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx - k_0l^2\int_0^\ell|w|^2\,dx \\ + k\int_0^\ell|\varphi_x+\psi+lw|^2\,dx - k\int_0^\ell(\varphi_x+\psi+lw)\overline{(\psi+lw)}\,dx - k_0l\int_0^\ell w\overline{\psi}\,dx.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\rho_1\int_0^\ell|\Phi|^2\,dx + k_0l^2\int_0^\ell|w|^2\,dx = k\int_0^\ell|\varphi_x+\psi+lw|^2\,dx - k\int_0^\ell(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\psi}\,dx \\ + \mathfrak{R}\left(l(k_0-k)\int_0^\ell w\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx\right) - \mathbf{i}\,\mathfrak{I}\left(l(k_0+k)\int_0^\ell \overline{w}(\varphi_x+\psi+lw)\,dx\right) \\ - k_0l\int_0^\ell w\overline{\psi}\,dx + k_0l^2\int_0^\ell|\varphi|^2\,dx - \rho_1\int_0^\ell\Phi\overline{f_1}\,dx - \rho_1\int_0^\ell f_2\overline{\varphi}\,dx.\end{aligned}$$

Tomando a parte real de ambos os lados da igualdade acima e aplicando a desigualdade de Hölder, segue-se que

$$\begin{aligned}\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + k_0l^2\|w\|_{L^2}^2 \leq k\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 + \underbrace{k\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}}_{i_3} + \rho_1\|f_2\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} \\ + l(k_0-k)\|w\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2} + \underbrace{k_0l\|w\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}}_{i_4} + \underbrace{k_0l^2\|\varphi\|_{L^2}^2}_{i_5} + \rho_1\|\Phi\|_{L^2}\|f_1\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Agora, usando (3.31) em conjunto com a desigualdade de Young em i_3 e em i_4, e usando (3.29) em i_5, deduz-se que

$$\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + k_0 l^2\|w\|_{L^2}^2 \leq k\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 + \frac{k^2}{|\lambda|^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|f_3\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\Psi\|_{L^2}^2$$
$$+ l(k_0-k)\|w\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2} + \frac{k_0^2 l^2}{|\lambda|^2}\|w\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|f_3\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\Psi\|_{L^2}^2 + \frac{2k_0 l^2}{|\lambda|^2}\|f_1\|_{L^2}^2$$
$$+ \frac{2k_0 l^2}{|\lambda|^2}\|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_1\|\Phi\|_{L^2}\|f_1\|_{L^2} + \rho_1\|f_2\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}.$$

Usando a hipótese sobre λ, resulta que

$$\frac{\rho_1}{2}\|\Phi\|_{L^2}^2 \leq \left(\rho_1 - \frac{k_0 l^2}{|\lambda|^2}\right)\|\Phi\|_{L^2}^2 + \left(k_0 l^2 - \frac{k_0^2 l^2}{|\lambda|^2}\right)\|w\|_{L^2}^2$$
$$\leq k\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 + k^2\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 + \|f_3\|_{L^2}^2 + \|\Psi\|_{L^2}^2 + 2k_0 l^2\|f_1\|_{L^2}^2$$
$$+ l(k_0-k)\|w\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2} + 2\rho_1\|\Phi\|_{L^2}\|f_1\|_{L^2} + \rho_1\|f_2\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}.$$

Usando as definições das normas $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ bem como o fato de elas serem equivalentes, obtém-se

$$\frac{\rho_1}{2}\|\Phi\|_{L^2}^2 \leq (k+k^2)\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 + c\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{\sqrt{\rho_2}}\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + 2k_0 l^2\|F\|_{\mathcal{H}}^2$$
$$+ l(k_0-k)\|w\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2} + \frac{2\sqrt{c}\rho_1}{\sqrt{\rho_1}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \sqrt{c}\sqrt{c}\rho_1\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}$$

onde c é uma constante proveniente da equivalência mencionada. Deste modo,

$$\|\Phi\|_{L^2}^2 \leq C(k_0-k)\|w\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2} + C\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2$$
$$+ C\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

onde

$$C = \frac{2}{\rho_1}\max\left\{l, k+k^2, \frac{1}{\sqrt{\rho_2}}, 2\sqrt{c\rho_1}+c\rho_1, c+2k_0 l^2\right\}.$$

■

Lema 3.12. *Seja $\lambda = \mathbf{i}\beta \in \mathbf{i}\mathbb{R}$. Se $U \in D(A)$ é uma solução da equação resolvente (3.28), então existe uma constante positiva C tal que*

$$\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 \leq C\left(\beta^2\left|1-\frac{k}{k_0}\right|^2 + 1\right)\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 + C\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}$$
$$+ C\|\Phi\|_{L^2}^2.$$

Demonstração: Multiplicando (3.30) por $\overline{(w_x - l\varphi)}$ e integrando sobre o intervalo $[0,\ell]$, obtém-se

$$k_0 l \int_0^\ell |w_x - l\varphi| \, dx = \lambda\rho_1 \int_0^\ell \Phi\overline{(w_x - l\varphi)} \, dx - k \underbrace{\int_0^\ell (\varphi_x + \psi + lw)_x \overline{(w_x - l\varphi)} \, dx}_{i_1}$$
$$- \rho_1 \int_0^\ell f_2 \overline{(w_x - l\varphi)} \, dx.$$

Integrando por partes o termo i_1 e usando (3.34), resulta que

$$k_0 l \int_0^\ell |w_x - l\varphi| \, dx = \lambda\rho_1 \underbrace{\int_0^\ell \Phi\overline{(w_x - l\varphi)} \, dx}_{i_2} - \frac{\lambda k \rho_1}{k_0} \underbrace{\int_0^\ell (\varphi_x + \psi + lw)\overline{W} \, dx}_{i_3}$$
$$+ \frac{k^2 l}{k_0} \int_0^\ell |\varphi_x + \psi + lw|^2 \, dx - \frac{k\rho_1}{k_0} \int_0^\ell (\varphi_x + \psi + lw)\overline{f_6} \, dx - \rho_1 \int_0^\ell f_2 \overline{(w_x - l\varphi)} \, dx.$$

Usando (3.29), (3.31) e (3.33) para reescrever os integrando de i_2 e i_3, conclui-se que

$$k_0 l \int_0^\ell |w_x - l\varphi| \, dx = -\rho_1 \int_0^\ell \Phi\overline{W_x} \, dx + \rho_1 l \int_0^\ell |\Phi|^2 \, dx - \rho_1 \int_0^\ell \Phi\overline{(f_{5,x} - lf_1)} \, dx$$
$$- \frac{k\rho_1}{k_0} \int_0^\ell \Phi_x \overline{W} \, dx - \frac{k\rho_1}{k_0} \int_0^\ell \Psi\overline{W} \, dx - \frac{k\rho_1 l}{k_0} \int_0^\ell |W|^2 \, dx - \frac{k\rho_1}{k_0} \int_0^\ell (f_{1,x} + f_3 + lf_5)\overline{W} \, dx$$
$$+ \frac{k^2 l}{k_0} \int_0^\ell |\varphi_x + \psi + lw|^2 \, dx - \frac{k\rho_1}{k_0} \int_0^\ell (\varphi_x + \psi + lw)\overline{f_6} \, dx - \rho_1 \int_0^\ell f_2 \overline{(w_x - l\varphi)} \, dx.$$

Integrando por partes a primeira integral do membro direito da última igualdade, segue-se que

$$k_0 l \int_0^\ell |w_x - l\varphi| \, dx + \frac{k\rho_1 l}{k_0} \int_0^\ell |W|^2 \, dx = \left(\rho_1 - \frac{k\rho_1}{k_0}\right) \underbrace{\int_0^\ell \Phi_x \overline{W} \, dx}_{i_4} + \rho_1 l \int_0^\ell |\Phi|^2 \, dx$$
$$- \rho_1 \int_0^\ell \Phi\overline{(f_{5,x} - lf_1)} \, dx - \frac{k\rho_1}{k_0} \int_0^\ell \Psi\overline{W} \, dx - \frac{k\rho_1}{k_0} \int_0^\ell (f_{1,x} + f_3 + lf_5)\overline{W} \, dx$$
$$+ \frac{k^2 l}{k_0} \int_0^\ell |\varphi_x + \psi + lw|^2 \, dx - \frac{k\rho_1}{k_0} \int_0^\ell (\varphi_x + \psi + lw)\overline{f_6} \, dx - \rho_1 \int_0^\ell f_2 \overline{(w_x - l\varphi)} \, dx.$$

Note que por (3.29), (3.31) e (3.33), tem-se $\Phi_x + \Psi + lW = \lambda(\varphi_x + \psi + lw) - (f_{1,x} + f_3 + lf_5)$. Deste modo, somando e subtraindo $(\Psi + lW)\overline{W}$ ao integrando de i_4, deduz-se que

$$k_0 l \int_0^\ell |w_x - l\varphi| \, dx + \rho_1 l \int_0^\ell |W|^2 \, dx = \lambda\rho_1 \left(1 - \frac{k}{k_0}\right) \int_0^\ell (\varphi_x + \psi + lw)\overline{W} \, dx$$
$$- \rho_1 \int_0^\ell (f_{1,x} + f_3 + lf_5)\overline{W} \, dx - \rho_1 \int_0^\ell \Psi\overline{W} \, dx + \rho_1 l \int_0^\ell |\Phi|^2 \, dx - \rho_1 \int_0^\ell \Phi\overline{(f_{5,x} - lf_1)} \, dx$$
$$+ \frac{k^2 l}{k_0} \int_0^\ell |\varphi_x + \psi + lw|^2 \, dx - \frac{k\rho_1}{k_0} \int_0^\ell (\varphi_x + \psi + lw)\overline{f_6} \, dx - \rho_1 \int_0^\ell f_2 \overline{(w_x - l\varphi)} \, dx.$$

Tomando a parte real de ambos os lados da igualdade acima e aplicando a desigualdade de Hölder, resulta que

$$\begin{aligned}
k_0 l\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + \rho_1 l\|W\|_{L^2}^2 \leq& \left|\lambda\rho_1\left(1-\frac{k}{k_0}\right)\right| \|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}\|W\|_{L^2}\\
&+ \rho_1\|f_{1,x}+f_3+lf_5\|_{L^2}\|W\|_{L^2} + \rho_1\|\Psi\|_{L^2}\|W\|_{L^2} + \rho_1 l\|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_1\|\Phi\|_{L^2}\|f_{5,x}-lf_1\|_{L^2}\\
&+ \frac{k^2 l}{k_0}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 + \frac{k\rho_1}{k_0}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}\|f_6\|_{L^2} + \rho_1\|f_2\|_{L^2}\|w_x-l\varphi\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Decorre da desigualdade de Young a da definição de $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ que

$$\begin{aligned}
k_0 l\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + \frac{\rho_1 l}{2}\|W\|_{L^2}^2 \leq& \frac{\beta^2\rho_1}{2l}\left|1-\frac{k}{k_0}\right|^2 \|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2\\
&+ \frac{\rho_1}{\sqrt{k}\sqrt{\rho_1}}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{\rho_1}{\sqrt{\rho_1}}\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + \rho_1 l\|\Phi\|_{L^2}^2 + \frac{\rho_1}{\sqrt{\rho_1}\sqrt{k_0}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\\
&+ \frac{k^2 l}{k_0}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 + \frac{k\rho_1}{k_0\sqrt{k}\sqrt{\rho_1}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{\rho_1}{\sqrt{\rho_1}\sqrt{k_0}}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Portanto, vale a desigualdade desejada com

$$C = \frac{1}{k_0 l}\max\left\{\frac{\rho_1}{2l}, \frac{k^2 l}{k_0}, \sqrt{\rho_1}, \frac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{k}} + \frac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{k_0}} + \frac{k\sqrt{\rho_1}}{k_0\sqrt{k}} + \frac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{k_0}}, \rho_1 l\right\}.$$

■

Lema 3.13. *Todos os valores espectrais de A são autovalores de A.*

Demonstração: Em vista da Proposição 2.31 e da Proposição 2.32, basta mostrar que a aplicação inclusão $i : (D(A), \|\cdot\|_{D(A)}) \to (\mathcal{H}, |\cdot|_{\mathcal{H}})$ é compacta. Considere, então, uma sequência de vetores $U_n = (\varphi^{(n)}, \Phi^{(n)}, \psi^{(n)}, \Psi^{(n)}, w^{(n)}, W^{(n)}, \theta^{(n)}) \in D(A)$ limitada (na norma do gráfico). Em face do Teorema 2.29, o objetivo é mostrar que $\{U_n\}$ possui uma subsequência $\{U_{n_k}\}$ que converge em $(\mathcal{H}, |\cdot|_{\mathcal{H}})$. Inicialmente, observe que

$$\begin{aligned}
\|U_n\|_{D(A)} =& |U_n|_{\mathcal{H}} + |AU_n|_{\mathcal{H}}\\
=& \|\varphi^{(n)}\|_{H^1}^2 + \|\Phi^{(n)}\|_{L^2}^2 + \|\psi^{(n)}\|_{H^1}^2 + \|\Psi^{(n)}\|_{L^2}^2 + \|w^{(n)}\|_{H^1}^2 + \|W^{(n)}\|_{L^2}^2 + \|\theta^{(n)}\|_{L^2}^2\\
&+ \|\Phi^{(n)}\|_{H^1}^2 + \frac{1}{\rho_1}\|k(\varphi_x^{(n)}+\psi^{(n)}+lw^{(n)})_x + k_0 l(w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)})\|_{L^2}^2 + \|\Psi^{(n)}\|_{H^1}^2\\
&+ \frac{1}{\rho_2}\|b\psi_{xx}^{(n)} - k(\varphi_x^{(n)}+\psi^{(n)}+lw^{(n)}) - \gamma\theta_x^{(n)}\|_{L^2}^2 + \|W^{(n)}\|_{H^1}^2\\
&+ \frac{1}{\rho_1}\|k_0(w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)})_x - kl(\varphi_x^{(n)}+\psi^{(n)}+lw^{(n)})\|_{L^2}^2 + \|k_1\theta_{xx}^{(n)} - m\Psi_x^{(n)}\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Assim, pela desigualdade triangular e pela igualdade em (3.20), deduz-se que as sequências $\{\varphi_{xx}^{(n)}\}$, $\{\psi_{xx}^{(n)}\}$ e $\{\theta_x^{(n)}\}$ são todas limitadas em $L^2(0,\ell)$. Portanto,

(1) a sequência $\{\varphi^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $(H^2(0,\ell), \|\cdot\|_{H^2})$. Assim, uma vez que a aplicação inclusão

$$i : (H^2(0,\ell), \|\cdot\|_{H^2}) \to (H^1(0,\ell), \|\cdot\|_{H^1})$$

é compacta (pelo Teorema 2.76), existem uma subsequência $\{\varphi^{(n_k)}\}_{n_k\in\mathbb{N}_1\subset\mathbb{N}}$ e uma função $\varphi \in H^1(0,\ell)$ tais que $\|\varphi^{(n_k)} - \varphi\| \to 0$. Mas, como $\varphi^{(n_k)} \in H_0^1(0,\ell)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e como $(H_0^1(0,\ell), \|\cdot\|_{H^1})$ é completo, segue-se que $\varphi \in H_0^1(0,\ell)$;

(2) a sequência $\{\Phi^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}_1}$ é limitada em $(H^1(0,\ell), \|\cdot\|_{H^1})$. E como a aplicação inclusão

$$i : (H^1(0,\ell), \|\cdot\|_{H^1}) \to (C[0,\ell], \|\cdot\|_\infty)$$

é compacta (pelo Teorema 2.76), existem uma subsequência $\{\Phi^{(n_k)}\}_{n_k\in\mathbb{N}_2\subset\mathbb{N}_1}$ e uma função $\Phi \in C[0,\ell]$ tais que $\|\Phi^{(n_k)} - \Phi\|_\infty \to 0$. Uma vez que

$$0 \le \|\Phi^{(n_k)} - \Phi\|_{L^2}^2 = \int_0^\ell |\Phi^{(n_k)} - \Phi|^2\, dx \le \ell\|\Phi^{(n_k)} - \Phi\|_\infty^2,$$

segue-se que $\|\Phi^{(n_k)} - \Phi\|_{L^2} \to 0$;

(3) a sequência $\{\psi^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}_2}$ é limitada em $(H^2(0,\ell), \|\cdot\|_{H^2})$ e, analogamente ao item (a), conclui-se que existem uma subsequência $\{\psi^{(n_k)}\}_{n_k\in\mathbb{N}_3\subset\mathbb{N}_2}$ e uma função $\psi \in H^1(0,\ell)$ tais que $\|\psi^{(n_k)} - \psi\|_{H^1} \to 0$. Mas, como $\psi^{(n_k)} \in H_*^1(0,\ell)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e como $H_*^1(0,\ell)$ é completo, segue-se que $\psi \in H_*^1(0,\ell)$;

(4) a sequência $\{\Psi^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}_3}$ é limitada em $(H^1(0,\ell), \|\cdot\|_{H^1})$ e, analogamente ao item (b), conclui-se que existem uma subsequência $\{\Psi^{(n_k)}\}_{n_k\in\mathbb{N}_4\subset\mathbb{N}_3}$ e uma função $\Psi \in L^2(0,\ell)$ tais que $\|\Psi^{(n_k)} - \Psi\|_{L^2} \to 0$. Mas, como $\Psi^{(n_k)} \in L_*^2(0,\ell)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e como $(L_*^2(0,\ell), \|\cdot\|_{L^2})$ é completo, segue-se que $\Psi \in L_*^2(0,\ell)$;

(5) a sequência $\{w^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}_4}$ é limitada em $(H^2(0,\ell), \|\cdot\|_{H^2})$ e, analogamente ao item (c), conclui-se que existem uma subsequência $\{w^{(n_k)}\}_{n_k\in\mathbb{N}_5\subset\mathbb{N}_4}$ e uma função $w \in H_*^1(0,\ell)$ tais que $\|w^{(n_k)} - \psi\|_{H^1} \to 0$;

(6) a sequência $\{W^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}_5}$ é limitada em $(H^1(0,\ell), \|\cdot\|_{H^1})$ e, analogamente ao item (b), conclui-se que existem uma subsequência $\{W^{(n_k)}\}_{n_k\in\mathbb{N}_6\subset\mathbb{N}_5}$ e uma função $W \in L^2(0,\ell)$ tais que $\|W^{(n_k)} - W\|_{L^2} \to 0$;

(7) a sequência $\{\theta^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}_6}$ é limitada em $(H^1(0,\ell), \|\cdot\|_{H^1})$ e, analogamente ao item (b), conclui-se que existem uma subsequência $\{\theta^{(n_k)}\}_{n_k\in\mathbb{N}_7\subset\mathbb{N}_6}$ e uma função $\theta \in L^2(0,\ell)$ tais que $\|\theta^{(n_k)} - \theta\|_{L^2} \to 0$.

Considere, agora, o vetor $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \theta)$ e a subsequência $\{U_{n_k}\}_{n_k\in\mathbb{N}_7}$. Pelos itens

(1)-(7) tem-se $U \in \mathcal{H}$ e

$$|U_{n_k} - U|_{\mathcal{H}} = \|\varphi^{(n_k)} - \varphi\|_{H^1}^2 + \|\Phi^{(n_k)} - \Phi\|_{L^2}^2 + \|\psi^{(n_k)} - \psi\|_{H^1}^2 + \|\Psi^{(n_k)} - \Psi\|_{L^2}^2$$
$$+ \|w^{(n_k)} - w\|_{H^1}^2 + \|W^{(n_k)} - W\|_{L^2}^2 + \|\theta^{(n_k)} - \theta\|_{L^2}^2 \to 0.$$

Ou seja, $\{U_{n_k}\}_{n_k \in \mathbb{N}_7}$ converge para U em $(\mathcal{H}, |\cdot|_{\mathcal{H}})$. ■

Teorema 3.14. *Se $b\rho_1 = \rho_2 k$ e $k = k_0$, então o semigrupo $\{\mathrm{e}^{tA}\}_{t \geq 0}$ associado ao problema (3.1)-(3.3) é exponencialmente estável. Consequentemente, existem constantes $\alpha, \kappa > 0$ tais que, para todo $t > 0$ e todo $U_0 \in \mathcal{H}$,*

$$\|\mathrm{e}^{tA} U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \kappa \|U_0\|_{\mathcal{H}} \mathrm{e}^{-\alpha t}. \tag{3.37}$$

Demonstração: O objetivo é mostrar que os itens (i) e (ii) do Teorema 2.94 se verificam. A demonstração do item (i) será feita por redução ao absurdo e a demonstração do item (ii) será feita de forma direta.

- **Verificação do item (i)**

Suponha que $\mathbf{i}\mathbb{R} \not\subset \boldsymbol{\rho}(A)$. Então, existe $\lambda \in \mathbf{i}\mathbb{R}$ tal que $\lambda \in \boldsymbol{\sigma}(A)$ (note que $\lambda \neq 0$, pois já foi visto que $0 \in \boldsymbol{\rho}(A)$). Pelo Lema 3.13, conclui-se que λ é um autovalor de A. Consequentemente existe um vetor não nulo $U \in D(A)$ que satisfaz a equação (3.28) com $F = 0$. Deste modo, em termos das componentes, tem-se

$$\lambda\varphi - \Phi = 0 \tag{3.38}$$
$$\rho_1 \lambda \Phi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) = 0 \tag{3.39}$$
$$\lambda\psi - \Psi = 0 \tag{3.40}$$
$$\rho_2 \lambda \Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = 0 \tag{3.41}$$
$$\lambda w - W = 0 \tag{3.42}$$
$$\rho_1 \lambda W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = 0 \tag{3.43}$$
$$\lambda\theta - k_1\theta_{xx} + m\Psi_x = 0 \tag{3.44}$$

Resulta do Lema 3.7 que $\theta_x = 0$. Por conseguinte, $\theta = c_1$ (constante) e $\theta_{xx} = 0$. Substituindo estes resultados em (3.44) deduz-se que $\Psi_x = -m^{-1}\lambda c_1$ (constante) e, por conseguinte, que $\Psi = 0$ (pois $\Psi \in L^2_*(0, \ell)$). Segue-se que $\theta = -\lambda^{-1} m \Psi_x = 0$ e, de (3.40), que $\psi = \lambda^{-1}\Psi = 0$. Deste modo, as igualdades (3.41), (3.39) e (3.43) se reduzem a

$$k(\varphi_x + lw) = 0 \tag{3.45}$$
$$\rho_1 \lambda \Phi - k_0 l(w_x - l\varphi) = 0 \tag{3.46}$$
$$\rho_1 \lambda W - k_0(w_x - l\varphi)_x = 0 \tag{3.47}$$

Substituindo (3.38) em (3.46) e (3.42) em (3.47) obtém-se, respectivamente,

$$lw = \frac{k_0 l}{\rho_1 \lambda^2}(w_x - l\varphi)_x$$

e

$$w_x = \frac{\rho_1 \lambda^2}{k_0 l}\varphi + l\varphi. \tag{3.48}$$

Portanto,

$$lw = \frac{k_0 l}{\rho_1 \lambda^2}\left(\frac{\rho_1 \lambda^2}{k_0 l}\varphi + l\varphi - l\varphi\right)_x = \varphi_x.$$

Segue-se que $k(\varphi_x - lw) = 0$. Somando isto com (3.45) resulta que $\varphi_x = 0$. Utilizando (3.45), (3.48), (3.42) e (3.38) conclui-se que $w = \varphi = W = \Phi = 0$. Logo U é o vetor nulo, o que é um absurdo. Logo o item (i) se verifica. (Note que não foi necessário utilizar a hipótese do teorema para demonstrar este item.) ∎

- **Verificação do item (ii)**

Considere $\lambda = \mathbf{i}\beta \in \mathbf{i}\mathbb{R}$ com $|\lambda| \geq \max\left\{1, k_0, \frac{2k_0 l^2}{\rho_1}\right\}$. Observe que, para todo vetor

$$F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7) \in \mathrm{Im}(\lambda I - A),$$

existe $U \in D(A)$ tal que $(\lambda I - A)U = F$. Reescrevendo a última expressão em termos das componentes obtém-se, novamente, as igualdades (3.29)-(3.35). Multiplicando (3.30) por $\overline{\varphi}$, (3.32) por $\overline{\psi}$, (3.34) por $\overline{w}$, somando os produtos resultantes e integrando sobre o intervalo $[0, \ell]$ resulta que

$$\begin{aligned}
&\lambda\rho_1 \int_0^\ell \Phi\overline{\varphi}\,dx + \lambda\rho_2 \int_0^\ell \Psi\overline{\psi}\,dx + \lambda\rho_1 \int_0^\ell W\overline{w}\,dx + k\int_0^\ell |\varphi + \psi + lw|^2\,dx + b\int_0^\ell |\psi_x|^2\,dx \\
&\quad + k_0 \int_0^\ell |w_x - l\varphi|^2\,dx \\
&= \rho_1 \int_0^\ell f_2\overline{\varphi}\,dx + \rho_2 \int_0^\ell f_4\overline{\psi}\,dx + \rho_1 \int_0^\ell f_6\overline{w}\,dx - \gamma\int_0^\ell \theta_x\overline{\psi}\,dx.
\end{aligned}$$

Utilizando (3.29), (3.31) e (3.33) para substituir, respectivamente, φ, ψ e w nas três primeiras integrais da última igualdade, obtém-se

$$\begin{aligned}
\rho_1 \int_0^\ell |\Phi|^2\,dx + \rho_2 \int_0^\ell |\Psi|^2\,dx + \rho_1 \int_0^\ell |W|^2\,dx &= k\int_0^\ell |\varphi + \psi + lw|^2\,dx + b\int_0^\ell |\psi_x|^2\,dx \\
&\quad + k_0 \int_0^\ell |w_x - l\varphi|^2\,dx - \rho_1 \int_0^\ell f_2\overline{\varphi}\,dx - \rho_2 \int_0^\ell f_4\overline{\psi}\,dx - \rho_1 \int_0^\ell f_6\overline{w}\,dx + \gamma\int_0^\ell \theta_x\overline{\psi}\,dx \\
&\quad - \rho_1 \int_0^\ell \Phi\overline{f_1}\,dx - \rho_2 \int_0^\ell \Psi\overline{f_3}\,dx - \rho_1 \int_0^\ell W\overline{f_5}\,dx.
\end{aligned}$$

Tomando a parte real de ambos os lados da última igualdade e utilizando a desigualdade de

Hölder, segue-se que

$$\begin{aligned}\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2+\rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2+\rho_1\|W\|_{L^2}^2 &\leq k\|\varphi+\psi+lw\|_{L^2}^2+k_0\|w_x-l\varphi\|_{L^2}^2+b\|\psi_x\|_{L^2}^2\\ &+\rho_1\|f_2\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}+\rho_2\|f_4\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}+\rho_1\|f_6\|_{L^2}\|w\|_{L^2}+\gamma\|\theta_x\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}\\ &+\rho_1\|\Phi\|_{L^2}\|f_1\|_{L^2}+\rho_2\|\Psi\|_{L^2}\|f_3\|_{L^2}+\rho_1\|W\|_{L^2}\|f_5\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Pela definição da norma $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ conclui-se que

$$\begin{aligned}\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2+\rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2+\rho_1\|W\|_{L^2}^2 \leq k\|\varphi+\psi+lw\|_{L^2}^2+k_0\|w_x-l\varphi\|_{L^2}^2+b\|\psi_x\|_{L^2}^2\\ +(4\rho_1+2\rho_2)|F|_{\mathcal{H}}|U|_{\mathcal{H}}+\gamma\|\theta_x\|_{L^2}|U|_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Pela equivalência das normas $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ e $|\cdot|_{\mathcal{H}}$, deduz-se que

$$\begin{aligned}\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2+\rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2+\rho_1\|W\|_{L^2}^2 \leq k\|\varphi+\psi+lw\|_{L^2}^2+k_0\|w_x-l\varphi\|_{L^2}^2+b\|\psi_x\|_{L^2}^2\\ +(4\rho_1+2\rho_2)c^2\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}+\underbrace{c\gamma\|\theta_x\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}}}_{i_1},\end{aligned}$$

onde c é a constante proveniente da equivalência mencionada. Deste modo, aplicando a desigualdade de Young em i_1 e notando que

$$\begin{aligned}\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2+\rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2+\rho_1\|W\|_{L^2}^2 = \|U\|_{\mathcal{H}}^2-b\|\psi_x\|_{L^2}^2-k\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2-k_0\|w_x-l\varphi\|_{L^2}^2\\ -\frac{\gamma}{m}\|\theta\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

resulta que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq 2k\|\varphi+\psi+lw\|_{L^2}^2+2k_0\|w_x-l\varphi\|_{L^2}^2+2b\|\psi_x\|_{L^2}^2+(4\rho_1+2\rho_2)c^2\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}\\ &+\frac{c^2\gamma^2}{2}\|\theta_x\|_{L^2}^2+\frac{\gamma}{m}\|\theta\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Assim, aplicando a desigualdade de Poincaré no último termo e, em seguida, usando o Lema 3.7, obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq 2k\|\varphi+\psi+lw\|_{L^2}^2+2k_0\|w_x-l\varphi\|_{L^2}^2+2b\|\psi_x\|_{L^2}^2+(4\rho_1+2\rho_2)c^2\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}\\ &+\frac{mc^2\gamma^2}{2\gamma k_1}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}+\frac{mc_p^2\gamma}{m\gamma k_1}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \hat{C}\|\varphi+\psi+lw\|_{L^2}^2+\hat{C}\|w_x-l\varphi\|_{L^2}^2+\hat{C}\|\psi_x\|_{L^2}^2+\hat{C}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}},$$

onde
$$\hat{C} = 2\max\left\{2k, 2k_0, 2b, +(4\rho_1 + 2\rho_2)c^2 + \frac{mc^2\gamma}{2k_1} + \frac{c_p^2}{k_1}\right\}.$$
Segue-se do Lema 3.12 que existe uma constante $\tilde{C}_1 > 0$ tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \le \tilde{C}_1\left(\beta^2\left|1-\frac{k}{k_0}\right|^2 + 1\right)\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + \tilde{C}_1\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + \tilde{C}_1\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \\ + \tilde{C}_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \tilde{C}_1\|\psi_x\|_{L^2}^2.$$

Segue-se do Lema 3.11 que existe uma constante $\tilde{C}_2 > 0$ tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \le \tilde{C}_2\left(\beta^2\left|1-\frac{k}{k_0}\right|^2 + 1\right)\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + \tilde{C}_2(k_0 - k)\|w\|_{L^2}\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2} \\ + \tilde{C}_2\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + \tilde{C}_2\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \tilde{C}_2\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \tilde{C}_2\|\psi_x\|_{L^2}^2.$$

Segue-se do Lema 3.10 que existe uma constante $\tilde{C}_3 > 0$ tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \le \tilde{C}_3\left(\beta^2\left|1-\frac{k}{k_0}\right|^2 + 1\right)\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + \tilde{C}_3(k_0 - k)\|w\|_{L^2}\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2} \\ + \tilde{C}_3\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + \tilde{C}_3\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \tilde{C}_3\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \tilde{C}_3\|\Psi\|_{L^2}^2.$$

Segue-se do Lema 3.9 que existe uma constante $\tilde{C}_4 > 0$ tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \le \tilde{C}_4\beta^2\left|1-\frac{k}{k_0}\right|^2\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + \tilde{C}_4(k_0 - k)\|w\|_{L^2}\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2} + \tilde{C}_4\|\Psi\|_{L^2}^2 \\ + \tilde{C}_4\beta^2\left|\frac{b\rho_1}{k} - \rho_2\right|^2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \tilde{C}_4\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + \tilde{C}_4\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \tilde{C}_4\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Segue-se da desigualdade de Young que existe uma constante $\tilde{C}_5 > 0$ tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \le \tilde{C}_5\beta^2\left|1-\frac{k}{k_0}\right|^2\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + \tilde{C}_5(k_0 - k)\|w\|_{L^2}\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2} \\ + \tilde{C}_5\beta^2\left|\frac{b\rho_1}{k} - \rho_2\right|^2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \tilde{C}_5\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \tilde{C}_5\|\Psi\|_{L^2}^2.$$

Segue-se do Lema 3.8 que existe uma constante $\tilde{C}_6 > 0$ tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \le \tilde{C}_6\beta^2\left|1-\frac{k}{k_0}\right|^2\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + \tilde{C}_6(k_0 - k)\|w\|_{L^2}\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2} \\ + \tilde{C}_6\beta^2\left|\frac{b\rho_1}{k} - \rho_2\right|^2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \tilde{C}_6\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \tilde{C}_6\|\theta_x\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + \tilde{C}_6\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Segue-se da desigualdade de Young e do Lema 3.7 que existe uma constante $\tilde{C}_7 > 0$ tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \tilde{C}_7\beta^2 \left|1 - \frac{k}{k_0}\right|^2 \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + \tilde{C}_7(k_0 - k)\|w\|_{L^2}\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}$$
$$+ \tilde{C}_7\beta^2 \left|\frac{b\rho_1}{k} - \rho_2\right|^2 \|\Psi\|_{L^2}^2 + \tilde{C}_7\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \tilde{C}_7\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Segue-se da desigualdade de Young que existe uma constante $\tilde{C}_8 > 0$ tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \tilde{C}_8\beta^2 \left|1 - \frac{k}{k_0}\right|^2 \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + \tilde{C}_8(k_0 - k)\|w\|_{L^2}\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}$$
$$+ \tilde{C}_8\beta^2 \left|\frac{b\rho_1}{k} - \rho_2\right|^2 \|\Psi\|_{L^2}^2 + \tilde{C}_8\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Como $b\rho_1 = \rho_2 k$ e $k = k_0$, resulta que

$$\|(\lambda I - A)^{-1}F\|_{\mathcal{H}} = \|U\|_{\mathcal{H}} \leq \sqrt{\tilde{C}_8}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Como $F \in \mathrm{Im}(\lambda I - A) = D\left((\lambda I - A)^{-1}\right)$ foi tomado arbitrário, conclui-se que existe uma constante positiva $\tilde{C} = \sqrt{\tilde{C}_8}$ tal que

$$\|(\lambda I - A)^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq \tilde{C}\|F\|_{\mathcal{H}} \quad \forall\, F \in D\left((\lambda I - A)^{-1}\right),$$

de onde segue que $\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}} \leq \tilde{C}$. Tendo em vista a escolha do λ, isto acarreta que

$$\|(\mathbf{i}\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}} = \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}} \leq \tilde{C},$$

para todo $\beta \in \mathbb{R}$ satisfazendo $|\beta| \geq \max\left\{1, k_0, \frac{2k_0 l^2}{\rho_1}\right\}$. Deste modo,

$$\overline{\lim_{|\beta|\to\infty}} \|(\mathbf{i}\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}} \leq \tilde{C} < \infty,$$

ou seja, o item (ii) também se verifica. ∎

4 SISTEMA DE BRESSE TERMOELÁSTICO NÃO LINEAR

O objetivo deste capítulo é estabelecer existência e unicidade de solução global para o problema

$$\rho_1\varphi_{tt} - [\sigma(\varphi_x,\psi,w)]_x - k_0 l(w_x - l\varphi) = 0, \tag{4.1}$$
$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = 0, \tag{4.2}$$
$$\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = 0, \tag{4.3}$$
$$\theta_t - k_1\theta_{xx} + m\psi_{tx} = 0, \tag{4.4}$$

com condições de fronteira

$$\varphi(\cdot,0) = \varphi(\cdot,\ell) = \psi_x(\cdot,0) = \psi_x(\cdot,\ell) = w_x(\cdot,0) = w_x(\cdot,\ell) = \theta(\cdot,0) = \theta(\cdot,\ell) = 0 \tag{4.5}$$

e condições iniciais

$$\begin{aligned} &\varphi(0,\cdot) = \varphi_0, \quad \varphi_t(0,\cdot) = \varphi_1, \quad \psi(0,\cdot) = \psi_0, \quad \psi_t(0,\cdot) = \psi_1, \\ &w(0,\cdot) = w_0, \quad w_t(0,\cdot) = w_1, \quad \theta(0,\cdot) = \theta_0, \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^3 satisfazendo

$$\sigma_{z_1}(z_1,z_2,z_3) \geq \beta > 0, \quad \forall\,(z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{R}^3; \tag{4.7}$$
$$\sigma_{z_1}(0,0,0) = \sigma_{z_2}(0,0,0) = k, \quad \sigma_{z_3}(0,0,0) = lk; \tag{4.8}$$
$$\sigma_{z_r z_j}(0,0,0) = 0, \quad r,j = 1,2,3. \tag{4.9}$$

Como anteriormente, todos os coeficientes do sistema são constantes positivas. Note que se σ for dada por $\sigma(z_1,z_2,z_3) = k(z_1 + z_2 + lz_3)$, então o sistema não linear (4.1)-(4.4) reduz-se ao sistema linear estudado no Capítulo 3. Um exemplo de função não linear satisfazendo as condições exigidas (com $\beta = k$) é dado por

$$\sigma(z_1,z_2,z_3) = z_1\left(k + \frac{z_1^2}{3}\right) + z_2\Big(k + \ln\left(1 + z_2^2\right)\Big) + k\,\mathrm{sen}(lz_3).$$

A fim de resolver o referido problema, será necessário impor algumas condições sobre os dados iniciais. Para tanto, defina

$$\begin{aligned} V^j &= (\partial_t^j\varphi(0,\cdot), \partial_t^j\psi(0,\cdot), \partial_t^j w(0,\cdot)), \qquad j = 0,1,2,3, \\ \theta^j &= \partial_t^j\theta(0,\cdot), \qquad j = 0,1,2, \end{aligned}$$

onde V^0, V^1, θ^0 são dados pelas igualdades em (4.6) e V^2, V^3, θ^1, θ^2 são calculados recursivamente (em termos de V^0, V^1 e θ^0) através das equações (4.1)-(4.4). No que se segue, assumi-se que

$$\begin{gathered} V^j \in \big(H^{3-j}(0,\ell)\cap H_0^1(0,\ell)\big)\times[\big(H^{3-j}(0,\ell)\cap H_*^1(0,\ell)\big)]^2,\ j=0,1,2; \\ V^3\in[L^2(0,\ell)]^3;\quad \partial_x\psi_j,\partial_x w_j\in H_0^1(0,\ell),\ j=0,1; \\ \theta^j\in H^{3-j}(0,\ell)\cap H_0^1(0,\ell),\ j=0,1;\quad \theta^2\in L^2(0,\ell). \end{gathered} \tag{4.10}$$

4.1 Existência Local

O objetivo desta seção é demonstrar que o problema (4.1)-(4.6), sob as condições (4.7)-(4.10), possui uma única solução local, ou seja, uma única solução definida sobre um intervalo limitado $(0,T)$ (tal solução será estendida ao intervalo $(0,\infty)$ na Seção 4.2). Para este propósito, o método do ponto fixo será utilizado. As seguintes notações serão empregadas:

$$\begin{gathered} V=(\varphi,\psi,w),\quad \tilde V=(\tilde\varphi,\tilde\psi,\tilde w),\quad \hat V=(\hat\varphi,\hat\psi,\hat w), \\ Z=(\varphi_x,\psi,w),\quad \tilde Z=(\tilde\varphi_x,\tilde\psi,\tilde w),\quad \hat Z=(\hat\varphi_x,\hat\psi,\hat w). \end{gathered} \tag{4.11}$$

Além disso, $T<\infty$ representará um número real positivo e, para um espaço normado H, o produto cartesiano $\big[L^\infty\big(0,T;H\big)\big]^3$ será representado por $\mathbf{L}^\infty\big(0,T;H\big)$ e munido com a norma

$$\|V\|^2_{\mathbf{L}^\infty(0,T;H)}=\|\varphi\|^2_{L^\infty(0,T;H)}+\|\psi\|^2_{L^\infty(0,T;H)}+\|w\|^2_{L^\infty(0,T;H)}.$$

Seja Y o espaço formado por todos os vetores $(\tilde V,\tilde\theta)$ tais que

$$\begin{gathered} \tilde V\in\mathbf{L}^\infty\big(0,T;H^1(0,\ell)\big),\quad \tilde V_t\in\mathbf{L}^\infty\big(0,T;L^2(0,\ell)\big), \\ \tilde\theta\in L^\infty\big(0,T;L^2(0,\ell)\big),\quad \tilde\theta_x\in L^2\big(0,T;L^2(0,\ell)\big). \end{gathered}$$

Considere em Y a métrica d dada por

$$\begin{aligned} d^2\big((\tilde V,\tilde\theta),(\hat V,\hat\theta)\big) &= \sum_{j=0}^{1}\|\partial_t^j(\tilde V-\hat V)\|^2_{\mathbf{L}^\infty(0,T;L^2)}+\|\tilde V_x-\hat V_x\|^2_{\mathbf{L}^\infty(0,T;L^2)} \\ &\quad+\|\tilde\theta-\hat\theta\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}+\|\tilde\theta_x-\hat\theta_x\|^2_{L^2(0,T;L^2)}. \end{aligned}$$

Lema 4.1. *O espaço (Y,d) é completo.*

Demonstração: Considere uma sequência de vetores $y^{(n)}=(\varphi^{(n)},\psi^{(n)},w^{(n)},\theta^{(n)})\in Y$. Suponha que $(y^{(n)})$ seja uma sequência de Cauchy. Então, $(\varphi^{(n)})$ e $(\varphi_t^{(n)})$ são sequências de Cauchy em $L^\infty\big(0,T;H^1(0,\ell)\big)$ e $L^\infty\big(0,T;L^2(0,\ell)\big)$, respectivamente. Do fato dos últimos dois espaços mencionados serem completos, resulta que existem $\varphi\in L^\infty\big(0,T;H^1(0,\ell)\big)$ e

$\Phi \in L^\infty\big(0,T;L^2(0,\ell)\big)$ tais que

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)} \to \varphi \quad &\text{em} \quad L^\infty\big(0,T;H^1(0,\ell)\big),\\ \varphi_t^{(n)} \to \Phi \quad &\text{em} \quad L^\infty\big(0,T;L^2(0,\ell)\big). \end{aligned}$$

Tendo em vista que

$$L^\infty\big(0,T;H^1(0,\ell)\big) \hookrightarrow L^\infty\big(0,T;L^2(0,\ell)\big) \hookrightarrow L^2\big(0,T;L^2(0,\ell)\big) \cong L^2(Q) \hookrightarrow \mathcal{D}'(Q),$$

onde $Q = (0,T)\times(0,\ell)$, conclui-se que

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)} \to \varphi \quad &\text{em} \quad \mathcal{D}'(Q),\\ \varphi_t^{(n)} \to \Phi \quad &\text{em} \quad \mathcal{D}'(Q). \end{aligned}$$

Pelo Proposição 2.53 e pela unicidade do limite, conclui-se que $\varphi_t = \Phi \in L^\infty\big(0,T;L^2(0,\ell)\big)$. Um argumento inteiramente análogo mostra que existem $\psi, w \in L^\infty\big(0,T;H^1(0,\ell)\big)$, com $\psi_t, w_t \in L^\infty\big(0,T;L^2(0,\ell)\big)$, tais que

$$\begin{aligned} \psi^{(n)} \to \psi \quad &\text{em} \quad L^\infty\big(0,T;H^1(0,\ell)\big), \qquad & w^{(n)} \to w \quad &\text{em} \quad L^\infty\big(0,T;H^1(0,\ell)\big),\\ \psi_t^{(n)} \to \psi_t \quad &\text{em} \quad L^\infty\big(0,T;L^2(0,\ell)\big), \qquad & w_t^{(n)} \to w_t \quad &\text{em} \quad L^\infty\big(0,T;L^2(0,\ell)\big). \end{aligned}$$

Ainda de $(y^{(n)})$ ser de Cauchy em Y, resulta que $(\theta^{(n)})$ é de Cauchy tanto em $L^\infty\big(0,T;L^2(0,\ell)\big)$ quanto em $L^2\big(0,T;H^1(0,\ell)\big)$, ambos completos. Consequentemente, existem $\theta \in L^\infty\big(0,T;L^2(0,\ell)\big)$ e $\Theta \in L^2\big(0,T;H^1(0,\ell)\big)$ tais que

$$\begin{aligned} \theta^{(n)} \to \theta \quad &\text{em} \quad L^\infty\big(0,T;L^2(0,\ell)\big) \hookrightarrow L^2\big(0,T;L^2(0,\ell)\big),\\ \theta^{(n)} \to \Theta \quad &\text{em} \quad L^2\big(0,T;H^1(0,\ell)\big) \hookrightarrow L^2\big(0,T;L^2(0,\ell)\big). \end{aligned}$$

Da unicidade do limite em $L^2\big(0,T;L^2(0,\ell)\big)$, deduz-se que $\theta = \Theta \in L^2\big(0,T;H^1(0,\ell)\big)$. De todas as convergências mencionadas, conclui-se que $(y^{(n)})$ converge para (φ,ψ,w,θ) em Y. Logo Y é completo. ■

Agora, dada uma constante $M > 0$, defina $X(M,T)$ como sendo o conjunto de todos os vetores $(\tilde{V},\tilde{\theta})$ que satisfazem

(a) $\partial_t^j \tilde{V} \in \mathbf{L}^\infty\big(0,T;H^{3-j}(0,\ell)\big), \quad j = 0,1,2,3;$

(b) $\partial_t^j \tilde{\theta} \in L^\infty\big(0,T;H^{3-j}(0,\ell)\big), \quad j = 0,1;$

(c) $\partial_t^2 \tilde{\theta} \in L^\infty\big(0,T;L^2(0,\ell)\big), \quad \partial_t^2 \tilde{\theta}_x \in L^2\big(0,T;L^2(0,\ell)\big);$

(d) $\big(\tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}_x(t), \tilde{w}_x(t), \tilde{\theta}(t)\big) \in [H_0^1(0,\ell)]^4$ para todo $t \in [0,T]$;

(e) $\partial_t^j \tilde{V}(0) = V^j, \quad j = 0,1,2;$

(f) $\partial_t^j\tilde{\theta}(0) = \theta^j, \quad j = 0, 1;$

(g) $|||\tilde{V}|||_1^2 + |||\tilde{\theta}|||_2^2 \leq M^2$, onde

$$|||\tilde{V}|||_1^2 = \sum_{j=0}^{3} \|\partial_t^j \tilde{V}\|^2_{\mathbf{L}^\infty(0,T;H^{3-j})}$$

e

$$|||\tilde{\theta}|||_2^2 = \sum_{j=0}^{1} \|\partial_t^j\tilde{\theta}\|^2_{L^\infty(0,T;H^{3-j})} + \|\partial_t^2\tilde{\theta}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\partial_t^2\tilde{\theta}_x\|^2_{L^2(0,T;L^2)}.$$

Lema 4.2. *O espaço $X(M,T)$ é um subespaço fechado de Y e, portanto, é completo.*

Demonstração: É imediato que $X(M,T)$ é um subespaço de Y. Para ver que ele é fechado, considere uma sequência $(\tilde{V}^{(n)}, \tilde{\theta}^{(n)})$ em $X(M,T)$ tal que

$$(\tilde{V}^{(n)}, \tilde{\theta}^{(n)}) \to (\tilde{V}, \tilde{\theta}) \quad \text{em} \quad Y. \tag{4.12}$$

No que se segue, será mostrado que $(\tilde{V}, \tilde{\theta})$ está em $X(M,T)$, ou seja, que $(\tilde{V}, \tilde{\theta})$ satisfaz as condições (a)-(g) da definição de $X(M,T)$.

Verificação do item (a).

Seja $j \in \{0,1,2,3\}$. Pelo item (g) da definição de $X(M,T)$ e pela Proposição 2.48, conclui-se que

$$(\partial_t^j\tilde{\varphi}^{(n)}) \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty\big(0,T;H^{3-j}(0,\ell)\big) \cong [L^1\big(0,T;[H^{3-j}(0,\ell)]'\big)]'.$$

Assim, pela Proposição 2.12, existem uma função Φ, com $\partial_t^j\Phi \in L^\infty\big(0,T;H^{3-j}(0,\ell)\big)$, e uma subsequência de $(\partial_t^j\tilde{\varphi}^{(n)})$, que continuará sendo representada por $(\partial_t^j\tilde{\varphi}^{(n)})$, tais que

$$\partial_t^j\tilde{\varphi}^{(n)} \overset{*}{\rightharpoonup} \partial_t^j\Phi \quad \text{em} \quad L^\infty\big(0,T;H^{3-j}(0,\ell)\big) \hookrightarrow L^\infty\big(0,T;L^2(0,\ell)\big). \tag{4.13}$$

Por outro lado, da convergência (4.12) e da definição da métrica d resulta que

$$\tilde{\varphi}^{(n)} \to \tilde{\varphi} \quad \text{em} \quad L^\infty\big(0,T;L^2(0,\ell)\big).$$

Como convergência forte implica em convergência fraca estrela, então

$$\tilde{\varphi}^{(n)} \overset{*}{\rightharpoonup} \tilde{\varphi} \quad \text{em} \quad L^\infty\big(0,T;L^2(0,\ell)\big). \tag{4.14}$$

Da convergência (4.13) com $j = 0$, da convergência (4.14) e da unicidade do limite fraco estrela em $L^\infty\big(0,T;L^2(0,\ell)\big)$, segue-se que $\tilde{\varphi} = \Phi$ e, por conseguinte, $\partial_t^j\tilde{\varphi} \in L^\infty\big(0,T;H^{3-j}(0,\ell)\big)$.

Um argumento inteiramente análogo mostra que as funções $\tilde{\psi}$ e $\tilde{w}$ também satisfazem $\partial_t^j \tilde{\psi}, \partial_t^j \tilde{w} \in L^\infty\big(0,T;H^{3-j}(0,\ell)\big)$. Logo, o item (a) da definição de $X(M,T)$ se verifica.

Verificação dos itens (b) e (c).

Seja $j \in \{0,1\}$. Pelo item (g) da definição de $X(M,T)$, conclui-se que

$$\begin{array}{lll} (\partial_t^j \tilde{\theta}^{(n)}) & \text{é limitada em} & L^\infty\big(0,T;H^{3-j}(0,\ell)\big) \cong [L^1\big(0,T;[H^{3-j}(0,\ell)]'\big)]', \\ (\partial_t^2 \tilde{\theta}^{(n)}) & \text{é limitada em} & L^\infty\big(0,T;L^2(0,\ell)\big) \cong [L^1\big(0,T;L^2(0,\ell)\big)]', \\ (\partial_t^2 \tilde{\theta}_x^{(n)}) & \text{é limitada em} & L^2\big(0,T;L^2(0,\ell)\big). \end{array}$$

Assim, pelas proposições 2.9 e 2.12, existem uma função Θ, com

$$\partial_t^j \Theta \in L^\infty\big(0,T;H^{3-j}(0,\ell)\big), \quad \partial_t^2 \Theta \in L^\infty\big(0,T;L^2(0,\ell)\big), \quad \partial_t^2 \Theta_x \in L^2\big(0,T;L^2(0,\ell)\big)$$

e uma subsequência de $(\partial_t^j \tilde{\theta}^{(n)})$, que continuará sendo representada por $(\partial_t^j \tilde{\theta}^{(n)})$, tais que

$$\begin{aligned} \partial_t^j \tilde{\theta}^{(n)} &\overset{*}{\rightharpoonup} \partial_t^j \Theta \quad \text{em} \quad L^\infty\big(0,T;H^{3-j}(0,\ell)\big) \hookrightarrow \mathcal{D}'(Q), \\ \partial_t^2 \tilde{\theta}^{(n)} &\overset{*}{\rightharpoonup} \partial_t^2 \Theta \quad \text{em} \quad L^\infty\big(0,T;L^2(0,\ell)\big) \hookrightarrow \mathcal{D}'(Q), \\ \partial_t^2 \tilde{\theta}_x^{(n)} &\rightharpoonup \partial_t^2 \Theta_x \quad \text{em} \quad L^2\big(0,T;L^2(0,\ell)\big) \hookrightarrow \mathcal{D}'(Q). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Por outro lado, da convergência (4.12) e da definição da métrica $\mathscr{d}$, resulta que

$$\tilde{\theta}^{(n)} \to \tilde{\theta} \quad \text{em} \quad L^\infty\big(0,T;L^2(0,\ell)\big) \hookrightarrow \mathcal{D}'(Q)$$

e, consequentemente,

$$\tilde{\theta}^{(n)} \overset{*}{\rightharpoonup} \tilde{\theta} \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(Q). \tag{4.16}$$

Da convergência (4.15) com $j=0$, da convergência (4.16) e da unicidade do limite fraco estrela em $\mathcal{D}'(Q)$, segue-se que $\tilde{\theta} = \Theta$ e, por conseguinte,

$$\partial_t^j \tilde{\theta} \in L^\infty\big(0,T;H^{3-j}(0,\ell)\big), \quad \partial_t^2 \tilde{\theta} \in L^\infty\big(0,T;L^2(0,\ell)\big), \quad \partial_t^2 \tilde{\theta}_x \in L^2\big(0,T;L^2(0,\ell)\big).$$

Logo, os itens (b) e (c) da definição de $X(M,T)$ se verificam.

Verificação do item (d).

Seja $t \in [0,T]$. Da convergência (4.12), conclui-se que

$$\|\tilde{\varphi}^{(n)} - \tilde{\varphi}\|_{L^2(0,T;H^1)} \to 0$$

de onde segue que

$$\tilde{\varphi}^{(n)} \rightharpoonup \tilde{\varphi} \quad \text{em} \quad L^2\big(0,T;H^1(0,\ell)\big).$$

Por outro lado, como $(\tilde{\varphi}^{(n)})$ é uma sequência limitada em $L^2\big(0,T;H_0^1(0,\ell)\big)$, conclui-se que existe Φ neste último espaço tal que

$$\tilde{\varphi}^{(n)} \rightharpoonup \Phi \quad \text{em} \quad L^2\big(0,T;H_0^1(0,\ell)\big) \hookrightarrow L^2\big(0,T;H^1(0,\ell)\big).$$

Das duas últimas convergências e da unicidade do limite fraco em $L^2\big(0,T;H^1(0,\ell)\big)$, resulta que $\tilde{\varphi} = \Phi$ e, por conseguinte, $\tilde{\varphi}(t) \in H_0^1(0,\ell)$. Um argumento inteiramente análogo mostra que $\tilde{\psi}_x(t), \tilde{w}_x(t), \tilde{\theta}(t) \in H_0^1(0,\ell)$.

Verificação dos itens (e) e (f).

Seja $j \in \{0,1,2\}$. Segue-se do que foi visto na verificação do item (a) que

$$\partial_t^j \tilde{\varphi}^{(n)} \overset{*}{\rightharpoonup} \partial_t^j \tilde{\varphi},\ \partial_t^{j+1} \tilde{\varphi}^{(n)} \overset{*}{\rightharpoonup} \partial_t^{j+1} \tilde{\varphi} \quad \text{em} \quad L^\infty\big(0,T;L^2(0,\ell)\big),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left(\int_0^\ell \partial_t^j \tilde{\varphi}^{(n)}(t,x)\eta_1(t)\,dx \right) dt &\to \int_0^T \left(\int_0^\ell \partial_t^j \tilde{\varphi}(t,x)\eta_1(t)\,dx \right) dt, \\
\int_0^T \left(\int_0^\ell \partial_t^{j+1} \tilde{\varphi}^{(n)}(t,x)\eta_2(t)\,dx \right) dt &\to \int_0^T \left(\int_0^\ell \partial_t^{j+1} \tilde{\varphi}(t,x)\eta_2(t)\,dx \right) dt,
\end{aligned}$$

quaisquer que sejam $\eta_1, \eta_2 \in L^1\big(0,T;L^2(0,\ell)\big)$ (ver exemplo 5, páginas 501-502, em [7]). Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left(\int_0^\ell \partial_t^j \tilde{\varphi}^{(n)}(t,x)\phi(x)\,dx \right) \eta_t(t)\,dt &\to \int_0^T \left(\int_0^\ell \partial_t^j \tilde{\varphi}(t,x)\phi(x)\,dx \right) \eta_t(t)\,dt, \\
\int_0^T \left(\int_0^\ell \partial_t^{j+1} \tilde{\varphi}^{(n)}(t,x)\phi(x)\,dx \right) \eta(t)\,dt &\to \int_0^T \left(\int_0^\ell \partial_t^{j+1} \tilde{\varphi}(t,x)\phi(x)\,dx \right) \eta(t)\,dt,
\end{aligned} \tag{4.17}$$

para toda função $\phi \in L^2(0,\ell)$, onde η é uma função em $C^1([0,T])$ que satisfaz $\eta(0) = 1$ e $\eta(T) = 0$ (de fato, basta tomar $\eta_1(t) = \eta_t(t)\phi$ e $\eta_2(t) = \eta(t)\phi$). Integrando por partes, conclui-se que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left(\int_0^\ell \partial_t^{j+1} \tilde{\varphi}^{(n)}(t,x)\phi(x)\,dx \right) \eta(t)\,dt = &- \int_0^\ell \partial_t^j \tilde{\varphi}^{(n)}(0,x)\phi(x)\,dx \\
&- \int_0^T \left(\int_0^\ell \partial_t^j \tilde{\varphi}^{(n)}(t,x)\phi(x)\,dx \right) \eta_t(t)\,dt
\end{aligned}$$

e

$$\int_0^T \left(\int_0^\ell \partial_t^{j+1} \tilde{\varphi}(t,x)\phi(x)\, dx \right) \eta(t)\, dt = - \int_0^\ell \partial_t^j \tilde{\varphi}(0,x)\phi(x)\, dx \\ - \int_0^T \left(\int_0^\ell \partial_t^j \tilde{\varphi}(t,x)\phi(x)\, dx \right) \eta_t(t)\, dt.$$

Das duas últimas igualdades e de (4.17), deduz-se que

$$\int_0^\ell \partial_t^j \tilde{\varphi}^{(n)}(0,x)\phi(x)\, dx \to \int_0^\ell \partial_t^j \tilde{\varphi}(0,x)\phi(x)\, dx, \quad \forall\, \phi \in L^2(0,\ell),$$

ou seja,

$$\partial_t^j \tilde{\varphi}^{(n)}(0,x) \rightharpoonup \partial_t^j \tilde{\varphi}(0,x) \quad \text{em} \quad L^2(0,\ell).$$

Por outro lado, $\partial_t^j \tilde{\varphi}^{(n)}(0,x) = \partial_t^j \varphi(0,x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, em virtude da última convergência, resulta que $\partial_t^j \tilde{\varphi}(0,x) = \partial_t^j \varphi(0,x)$. Um argumento inteiramente análogo mostra que $\partial_t^j \tilde{\psi}(0,x) = \partial_t^j \psi(0,x)$ e $\partial_t^j \tilde{w}(0,x) = \partial_t^j w(0,x)$. Portanto, o item (e) da definição de $X(M,T)$ se verifica. Um argumento similar, usando o que foi visto na verificação do item (b), mostra que o item (f) também se verifica.

Verificação do item (g).

Basta observar que

$$|||\tilde{V}|||_1^2 + |||\tilde{\theta}|||_2^2 \leq \underline{\lim}(|||\tilde{V}^{(n)}|||_1^2 + |||\tilde{\theta}^{(n)}|||_2^2) \leq \underline{\lim}\, M^2 = M^2,$$

o que conclui a demonstração. ∎

Teorema 4.3. *Se valem as condições (4.7) e (4.10), então existe $T > 0$ tal que o problema (4.1)-(4.6) possui uma única solução local $U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t, \theta)$, definida sobre $[0,T]$, satisfazendo*

$$(\varphi,\psi,w) \in \bigcap_{j=0}^{2} C^j\big([0,T], (H^{3-j}(0,\ell)\cap H_0^1(0,\ell)) \times (H^{3-j}(0,\ell)\cap H_*^1(0,\ell))^2\big) \cap C^3\big([0,T], L^2(0,\ell)^3\big)$$
$$\theta \in \bigcap_{j=0}^{1} C^j\big([0,T], H^{3-j}(0,\ell)\cap H_0^1(0,\ell)\big) \cap C^2\left([0,T], L^2(0,\ell)\right),$$

com $\psi_x(t), w_x(t) \in H_0^1(0,\ell)$ para todo $t \in [0,T]$ e $\partial_t^2\theta_x \in L^2\big([0,T], L^2(0,\ell)\big)$.

Demonstração: Seja $(\tilde{V}, \tilde{\theta}) \in X(M,T)$. Tomando

$$C_{11} = \frac{\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})}{\rho_1}, \qquad C_{22} = \frac{b}{\rho_2}, \qquad C_{33} = \frac{k_0}{\rho_1},$$
$$C_{12} = C_{13} = C_{21} = C_{23} = C_{31} = C_{32} = 0,$$
$$f_1 = \frac{1}{\rho_1}\Big(\sigma_\psi(\tilde{Z})\tilde{\psi}_x + \sigma_w(\tilde{Z})\tilde{w}_x + k_0 l(\tilde{w}_x - l\tilde{\varphi})\Big)$$
$$f_2 = -\frac{1}{\rho_2}\Big(k(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{w}) + \gamma\tilde{\theta}_x\Big), \qquad f_3 = -\frac{1}{\rho_1}\Big(kl(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{w}) + k_0 l\tilde{\varphi}_x\Big)$$

e escrevendo $(U_1, U_2, U_3) = (\varphi, \psi, w)$, resulta do Teorema 2.82 que o problema

$$\rho_1\varphi_{tt} - \sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\varphi_{xx} = \sigma_\psi(\tilde{Z})\tilde{\psi}_x + \sigma_w(\tilde{Z})\tilde{w}_x + k_0 l(\tilde{w}_x - l\tilde{\varphi}) \quad \text{em} \quad (0,T)\times(0,\ell) \tag{4.18}$$
$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} = -k(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{w}) - \gamma\tilde{\theta}_x \quad \text{em} \quad (0,T)\times(0,\ell) \tag{4.19}$$
$$\rho_1 w_{tt} - k_0 w_{xx} = -kl(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{w}) - k_0 l\tilde{\varphi}_x \quad \text{em} \quad (0,T)\times(0,\ell) \tag{4.20}$$

com condições de fronteira

$$\varphi(\cdot,0) = \varphi(\cdot,\ell) = \psi_x(\cdot,0) = \psi_x(\cdot,\ell) = w_x(\cdot,0) = w_x(\cdot,\ell) = 0 \tag{4.21}$$

e condições iniciais

$$\begin{aligned} &\varphi(0,\cdot) = \varphi_0, \quad \varphi_t(0,\cdot) = \varphi_1, \quad \psi(0,\cdot) = \psi_0, \quad \psi_t(0,\cdot) = \psi_1, \\ &w(0,\cdot) = w_0, \quad w_t(0,\cdot) = w_1 \end{aligned} \tag{4.22}$$

possui uma única solução (φ, ψ, w) satisfazendo

$$\begin{gathered} \partial_t^j\varphi \in C^0\big([0,T], H^{3-j}(0,\ell)\cap H_0^1(0,\ell)\big), \ j = 0,1,2; \\ \partial_t^j\psi, \partial_t^j w \in C^0\big([0,T], H^{3-j}(0,\ell)\cap H_*^1(0,\ell)\big), \ j = 0,1,2; \\ \psi_x(t), w_x(t), \psi_{tx}(t), w_{tx}(t) \in H_0^1(0,\ell), \ t \in [0,T], \\ \partial_t^3\varphi, \partial_t^3\psi, \partial_t^3 w \in C^0\big([0,T], L^2(0,\ell)\big). \end{gathered} \tag{4.23}$$

Analogamente, tomando

$$a = k_1, \qquad g = -m\psi_{tx}$$

no Teorema 2.83, onde ψ é a função dada pela solução do problema (4.18)-(4.22), conclui-se que o problema

$$\begin{cases} \theta_t - k_1\theta_{xx} + m\psi_{tx} = 0 & \text{em} \quad (0,T)\times(0,\ell), \\ \theta(\cdot,0) = \theta(\cdot,\ell) = 0 & \text{em} \quad [0,T], \\ \theta(0,\cdot) = \theta_0 & \text{em} \quad (0,\ell), \end{cases} \tag{4.24}$$

admite uma única solução θ satisfazendo

$$\begin{aligned} &\partial_t^j\theta \in C^0\big([0,T], H^{3-j}(0,\ell)\cap H_0^1(0,\ell)\big),\ j=0,1;\\ &\partial_t^2\theta \in C^0\big([0,T], L^2(0,\ell)\big);\quad \partial_t^2\theta_x \in L^2\big(0,T; L^2(0,\ell)\big). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Pode-se, portanto, definir uma aplicação

$$\begin{aligned} B : X(M,T) &\longrightarrow Y\\ (\tilde V,\tilde\theta) &\longmapsto B(\tilde V,\tilde\theta) = (V,\theta), \end{aligned}$$

onde V é a solução do problema (4.18)-(4.22) e θ é a solução de (4.24). O passo seguinte será verificar que, para T suficientemente pequeno e M suficientemente grande, a aplicação B satisfaz as hipóteses do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

(I) O conjunto $X(M,T)$ é invariante sob B.

Basta verificar que os itens (a)-(g) da definição de $X(M,T)$ são satisfeitos pelo vetor $B(\tilde V,\tilde\theta) = (V,\theta)$. Os itens (a)-(d) seguem-se diretamente de (4.23) e (4.25). Os itens (e) e (f) seguem-se do fato de V satisfazer o problema (4.18)-(4.22) e de θ satisfazer o problema (4.24).

Para verificar o item (g) note que, pelo Teorema 2.76,

$$(H^1(0,\ell), \|\cdot\|_{H^1}) \hookrightarrow (C[0,\ell], \|\cdot\|_\infty).$$

Assim, existe uma constante c_0 tal que $\|\cdot\|_\infty \le c_0\|\cdot\|_{H^1}$. Utilizando esta constante, defina

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \max_j \sup_{\|z\|_{\mathbb{R}^3}\le c_0M} |\sigma_{z_j}(z)|,\\ \nu_2 &= \max_{j,r} \sup_{\|z\|_{\mathbb{R}^3}\le 2c_0M} |\sigma_{z_jz_r}(z)|,\\ \nu_3 &= \max_{j,r,s} \sup_{\|z\|_{\mathbb{R}^3}\le c_0M} |\sigma_{z_jz_rz_s}(z)|, \end{aligned}$$

onde $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^3}$ representa a norma do máximo em $\mathbb{R}^3$ e j,r,s variam em $\{1,2,3\}$. Note que, como $(\tilde V,\tilde\theta) \in X(M,T)$,

$$\begin{aligned} |\tilde\varphi_x(t,x)| &\le \|\tilde\varphi_x(t,\cdot)\|_\infty \le c_0\|\tilde\varphi_x(t,\cdot)\|_{H^1} \le c_0\|\tilde\varphi_x\|_{L^\infty(0,T;H^1)} \le c_0|||\tilde V|||_1 \le c_0M,\\ |\tilde\psi(t,x)| &\le \|\tilde\psi(t,\cdot)\|_\infty \le c_0\|\tilde\psi(t,\cdot)\|_{H^1} \le c_0\|\tilde\psi\|_{L^\infty(0,T;H^1)} \le c_0|||\tilde V|||_1 \le c_0M,\\ |\tilde w(t,x)| &\le \|\tilde w(t,\cdot)\|_\infty \le c_0\|\tilde w(t,\cdot)\|_{H^1} \le c_0\|\tilde w\|_{L^\infty(0,T;H^1)} \le c_0|||\tilde V|||_1 \le c_0M. \end{aligned}$$

Como consequência, $\|\tilde Z\|_{\mathbb{R}^3} \le c_0M \le 2c_0M$. Deste modo, as derivadas de primeira, segunda e terceira ordem de σ (no ponto $\tilde Z(t,x)$) podem ser estimadas, respectivamente, por ν_1, ν_2 e ν_3.

Escrevendo $|p(t,x)| = |p|$ conclui-se ainda, pelo mesmo argumento já empregado, que

$$|\tilde{\varphi}_t|, |\tilde{\psi}_t|, |\tilde{w}_t|, |\tilde{\psi}_x|, |\tilde{w}_x|, |\tilde{\varphi}_{tx}|, |\tilde{w}_{tx}|, |\tilde{\psi}_{tx}|, |\tilde{\varphi}_{xx}|, |\tilde{\psi}_{xx}|, |\tilde{w}_{xx}| \leq c_0 M.$$

O próximo passo será estimar $|\!|\!| V |\!|\!|_1$ e $|\!|\!|\theta|\!|\!|_2$. Para obter tais estimativas, será necessário estimar as derivadas de primeira, segunda e terceira ordem das funções φ, ψ, w e θ.

Estimativa das derivadas de primeira ordem de φ, ψ e w.

Multiplicando (4.18) por φ_t e integrando sobre $[0,\ell]$ resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \rho_1|\varphi_t|^2\,dx - \int_0^\ell \sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\varphi_{xx}\varphi_t\,dx = \int_0^\ell h_1\varphi_t\,dx \tag{4.26}$$

onde $\tilde{Z} = (\tilde{\varphi}_x, \tilde{\psi}, \tilde{w})$ e $h_1 = \sigma_\psi(\tilde{Z})\tilde{\psi}_x + \sigma_w(\tilde{Z})\tilde{w}_x + k_0 l(\tilde{w}_x - l\tilde{\varphi})$. Mas, fazendo integração por partes, conclui-se que

$$\begin{aligned}\int_0^\ell \sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\varphi_{xx}\varphi_t\,dx &= \Big[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\varphi_t\varphi_x\Big]_0^\ell - \int_0^\ell \varphi_x\frac{d}{dx}\Big[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\varphi_t\Big]\,dx\\ &= 0 - \int_0^\ell \varphi_x\frac{d}{dx}\Big[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\Big]\varphi_t\,dx - \int_0^\ell \varphi_x\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\varphi_{tx}\,dx\end{aligned}$$

E, como

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})|\varphi_x|^2\Big] = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\Big]|\varphi_x|^2 + \sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\varphi_x\varphi_{tx},$$

segue-se que

$$\begin{aligned}\int_0^\ell \sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\varphi_{xx}\varphi_t\,dx = &- \int_0^\ell \varphi_x\frac{d}{dx}\Big[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\Big]\varphi_t\,dx + \frac{1}{2}\int_0^\ell \frac{d}{dt}\Big[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\Big]|\varphi_x|^2 dx\\ &- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})|\varphi_x|^2\,dx.\end{aligned}$$

Substituindo a última igualdade em (4.26), obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(\rho_1|\varphi_t|^2 + \sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})|\varphi_x|^2\Big)\,dx = &\int_0^\ell h_1\varphi_t\,dx - \int_0^\ell \varphi_x\frac{d}{dx}\Big[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\Big]\varphi_t\,dx\\ &+ \frac{1}{2}\int_0^\ell \frac{d}{dt}\Big[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\Big]|\varphi_x|^2\,dx.\end{aligned} \tag{4.27}$$

Observe que

$$\begin{aligned}|h_1| &\leq |\sigma_\psi(\tilde{Z})||\tilde{\psi}_x| + |\sigma_w(\tilde{Z})||\tilde{w}_x| + k_0 l|\tilde{w}_x| + k_0 l^2|\tilde{\varphi}|\\ &\leq \nu_1|\tilde{\psi}_x| + \nu_1|\tilde{w}_x| + k_0 l|\tilde{w}_x| + k_0 l^2|\tilde{\varphi}|\\ &\leq c_0\nu_1 M + c_0\nu_1 M + c_0 k_0 l M + c_0 k_0 l^2 M = J_1 M,\end{aligned}$$

onde $J_1 = 2c_0\nu_1 + c_0k_0l + c_0k_0l^2$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{dx}\left[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\right]\right| &\leq |\sigma_{\varphi_x\varphi_x}(\tilde{Z})||\tilde{\varphi}_{xx}| + |\sigma_{\varphi_x\psi}(\tilde{Z})||\tilde{\psi}_x| + |\sigma_{\varphi_x w}(\tilde{Z})||\tilde{w}_x| \\ &\leq \nu_2|\tilde{\varphi}_{xx}| + \nu_2|\tilde{\psi}_x| + \nu_2|\tilde{w}_x| \\ &\leq c_0\nu_2 M + c_0\nu_2 M + c_0\nu_2 M = J_2 M,\end{aligned}$$

onde $J_2 = 3c_0\nu_2$ e

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{dt}\left[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\right]\right| &\leq |\sigma_{\varphi_x\varphi_x}(\tilde{Z})||\tilde{\varphi}_{tx}| + |\sigma_{\varphi_x\psi}(\tilde{Z})||\tilde{\psi}_t| + |\sigma_{\varphi_x w}(\tilde{Z})||\tilde{w}_t| \\ &\leq \nu_2|\tilde{\varphi}_{tx}| + \nu_2|\tilde{\psi}_t| + \nu_2|\tilde{w}_t| \\ &\leq c_0\nu_2 M + c_0\nu_2 M + c_0\nu_2 M = J_2 M.\end{aligned}$$

Assim, de (4.27) deduz-se que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \left(\rho_1|\varphi_t|^2 + \sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})|\varphi_x|^2\right)\,dx \leq \int_0^\ell |h_1||\varphi_t|\,dx + J_2 M\int_0^\ell |\varphi_x||\varphi_t|\,dx \\ + \frac{J_2 M}{2}\int_0^\ell |\varphi_x|^2\,dx\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young, conclui-se que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \left(\rho_1|\varphi_t|^2 + \sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})|\varphi_x|^2\right)\,dx \leq \frac{J_1^2 M^2 \ell}{2} + \frac{1}{2}\int_0^\ell |\varphi_t|^2\,dx + \frac{J_2 M}{2}\int_0^\ell |\varphi_x|^2\,dx \\ + \frac{J_2 M}{2}\int_0^\ell \left(|\varphi_x|^2 + |\varphi_t|^2\right)\,dx\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \left(\rho_1|\varphi_t(\tau,x)|^2 + \sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z}(\tau,x))|\varphi_x(\tau,x)|^2\right)\,dx \leq J_1^2 M^2 \ell \\ + (1+3J_2M)\int_0^\ell \left(|\varphi_t(\tau,x)|^2 + |\varphi_x(\tau,x)|^2\right)\,dx\end{aligned}$$

para todo $\tau \in [0,T]$. Integrando a última expressão de 0 até $t \in [0,T]$, com respeito à variável τ, resulta que

$$\begin{aligned}\int_0^\ell \left(\rho_1|\varphi_t(t,x)|^2 + \sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z}(t,x))|\varphi_x(t,x)|^2\right)\,dx \leq E_1(0) + \int_0^T J_1^2 M^2 \ell\,d\tau \\ + (1+3J_2M)\int_0^t\int_0^\ell \left(|\varphi_t(\tau,x)|^2 + |\varphi_x(\tau,x)|^2\right)\,dx\,d\tau,\end{aligned}$$

onde

$$E_1(0) = \int_0^\ell \left(\rho_1|\varphi_t(0,x)|^2 + \sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z}(0,x))|\varphi_x(0,x)|^2\right) dx.$$

Portanto, pela desigualdade de Gronwall,

$$\int_0^\ell \left(|\varphi_t(t,x)|^2 + |\varphi_x(t,x)|^2\right) dx \leq \frac{E_1(0) + J_1^2 M^2 \ell T}{\min\{\rho_1, \beta\}} \exp\left(\frac{(1+3J_2M)t}{\min\{\rho_1,\beta\}}\right).$$

Assim, para

$$T < \min\left\{\frac{1}{J_1^2 M^2 \ell T}, \frac{\min\{\rho_1,\beta\}}{1+3J_2M}\right\} := T_1$$

obtém-se

$$\|\varphi_t(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|\varphi_x(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \leq \frac{E_1(0)+1}{\min\{\rho_1,\beta\}} \exp(1) = \frac{(E_1(0)+1)\mathrm{e}}{\min\{\rho_1,\beta\}} := M_1.$$

Tomando o supremo na desigualdade acima, com t variando em $[0,T]$, conclui-se que

$$\|\varphi_t\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 + \|\varphi_x\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 \leq M_1. \tag{4.28}$$

Agora, multiplicando (4.19) por ψ_t, integrando sobre $[0,\ell]$ e fazendo integração por partes resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \left(\rho_2|\psi_t|^2 + b|\psi_x|^2\right) dx \leq \int_0^\ell |h_2||\psi_t|\, dx,$$

onde $h_2 = -k(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{w}) - \gamma\tilde{\theta}_x$. Assim, como $|h_2| \leq (2k + kl + \gamma)c_0 M$, segue-se da desigualdade de Young que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \left(\rho_2|\psi_t|^2 + b|\psi_x|^2\right) dx &\leq (2k+kl+\gamma)^2 c_0^2 M^2 \ell + \int_0^\ell |\psi_t|^2\, dx \\ &\leq (2k+kl+\gamma)^2 c_0^2 M^2 \ell + \int_0^\ell \left(|\psi_t|^2 + |\psi_x|^2\right) dx.\end{aligned}$$

Integrando a última expressão de 0 até $t \in [0,T]$, resulta que

$$\begin{aligned}\int_0^\ell \left(\rho_2|\psi_t(t,x)|^2 + b|\psi_x(t,x)|^2\right) dx \leq{}& E_2(0) + (2k+kl+\gamma)^2 c_0^2 M^2 \ell T \\ &+ \int_0^t \int_0^\ell \left(|\psi_t(\tau,x)|^2 + |\psi_x(\tau,x)|^2\right) dx\, d\tau,\end{aligned}$$

onde

$$E_2(0) = \int_0^\ell \left(\rho_2|\psi_t(0,x)|^2 + b|\psi_x(0,x)|^2\right) dx.$$

Portanto, pela desigualdade de Gronwall,

$$\int_0^\ell \left(|\psi_t(t,x)|^2 + |\psi_x(t,x)|^2\right) dx \leq \frac{E_2(0) + (2k+kl+\gamma)^2 c_0^2 M^2 \ell T}{\min\{\rho_2, b\}} \exp\left(\frac{t}{\min\{\rho_2, b\}}\right).$$

Assim, para

$$T < \min\left\{\frac{1}{(2k+kl+\gamma)^2 c_0^2 M^2 \ell}, \min\{\rho_2, b\}\right\} := T_2$$

obtém-se

$$\|\psi_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\psi_x\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq \frac{(E_2(0)+1)\mathrm{e}}{\min\{\rho_2, b\}} := M_2. \tag{4.29}$$

Por fim, multiplicando (4.20) por w_t, integrando sobre $[0,\ell]$ e fazendo integração por partes resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \left(\rho_1|w_t|^2 + k_0|w_x|^2\right) dx \leq \int_0^\ell |h_3||w_t|\, dx,$$

onde $h_3 = -(kl + k_0 l)\tilde{\varphi}_x - kl\tilde{\psi}_x - kl^2\tilde{w}$. Assim, como $|h_3| \leq (2kl + k_0 l + kl^2)c_0 M$, segue-se da desigualdade de Young que

$$\frac{d}{dt}\int_0^\ell \left(\rho_1|w_t|^2 + k_0|w_x|^2\right) dx \leq (2kl + k_0 l + kl^2)^2 c_0^2 M^2 \ell + \int_0^\ell \left(|w_t|^2 + |w_x|^2\right) dx.$$

Integrando a última expressão de 0 até $t \in [0,T]$ e, em seguida, aplicando a desigualdade de Gronwall, resulta que

$$\int_0^\ell \left(|w_t(t,x)|^2 + |w_x(t,x)|^2\right) dx \leq \frac{E_3(0) + (2kl + k_0 l + kl^2)^2 c_0^2 M^2 \ell T}{\min\{\rho_1, k_0\}} \exp\left(\frac{t}{\min\{\rho_1, k_0\}}\right),$$

onde

$$E_3(0) = \int_0^\ell \left(\rho_1|w_t(0,x)|^2 + k_0|w_x(0,x)|^2\right) dx.$$

Assim, para

$$T < \left\{\min\{\rho_1, k_0\}, \frac{1}{(2kl + k_0 l + kl^2)^2 c_0^2 M^2 \ell}\right\} := T_3$$

obtém-se

$$\|w_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|w_x\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq \frac{(E_3(0)+1)\mathrm{e}}{\min\{\rho_1, k_0\}} := M_3. \tag{4.30}$$

Estimativa das derivadas de segunda ordem de φ, ψ e w.

Derivando (4.18) em t, multiplicando por φ_{tt} e integrando sobre $[0,\ell]$ obtém-se

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \rho_1|\varphi_{tt}|^2\,dx-\int_0^\ell \frac{d}{dt}\left[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\right]\varphi_{xx}\varphi_{tt}\,dx-\int_0^\ell \sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\varphi_{txx}\varphi_{tt}\,dx\\&\quad=\int_0^\ell \frac{d}{dt}[h_1]\varphi_{tt}\,dx,\end{aligned}\tag{4.31}$$

Mas, fazendo integração por partes, conclui-se que

$$\begin{aligned}\int_0^\ell \sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\varphi_{txx}\varphi_{tt}\,dx&=\left[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\varphi_{tt}\varphi_{tx}\right]_0^\ell-\int_0^\ell \varphi_{tx}\frac{d}{dx}[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\varphi_{tt}]\,dx\\&=0-\int_0^\ell \varphi_{tx}\frac{d}{dx}[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})]\varphi_{tt}\,dx-\int_0^\ell \varphi_{tx}\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\varphi_{ttx}\,dx\end{aligned}$$

E, como

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})|\varphi_{tx}|^2]=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})]|\varphi_{tx}|^2+\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\varphi_{tx}\varphi_{ttx},$$

segue-se que

$$\begin{aligned}\int_0^\ell \sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\varphi_{txx}\varphi_{tt}\,dx=&-\int_0^\ell \varphi_{tx}\frac{d}{dx}\left[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\right]\varphi_{tt}\,dx+\frac{1}{2}\int_0^\ell \frac{d}{dt}\left[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\right]|\varphi_{tx}|^2dx\\&-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})|\varphi_{tx}|^2\,dx.\end{aligned}$$

Substituindo a última igualdade em (4.31), obtém-se

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \left(\rho_1|\varphi_{tt}|^2+\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})|\varphi_{tx}|^2\right)dx=\int_0^\ell \frac{d}{dt}\left[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\right]\varphi_{xx}\varphi_{tt}\,dx\\&\quad+\frac{1}{2}\int_0^\ell \frac{d}{dt}\left[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\right]|\varphi_{tx}|^2\,dx-\int_0^\ell \varphi_{tx}\frac{d}{dx}\left[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\right]\varphi_{tt}\,dx+\int_0^\ell \frac{d}{dt}[h_1]\varphi_{tt}\,dx.\end{aligned}\tag{4.32}$$

Observe que

$$\left|\frac{d}{dt}\left[\sigma_\psi(\tilde{Z})\right]\right|\le J_2M,\quad \left|\frac{d}{dt}\left[\sigma_w(\tilde{Z})\right]\right|\le J_2M,$$

e

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{dt}[h_1]\right|&=\left|\frac{d}{dt}\left[\sigma_\psi(\tilde{Z})\right]\tilde{\psi}_x+\sigma_\psi(\tilde{Z})\tilde{\psi}_{tx}+\frac{d}{dt}\left[\sigma_w(\tilde{Z})\right]\tilde{w}_x+\sigma_w(\tilde{Z})\tilde{w}_{tx}+k_0l(\tilde{w}_{tx}-l\tilde{\varphi}_t)\right|\\&\le J_2Mc_0M+\nu_1|\tilde{\psi}_{tx}|+J_2Mc_0M+\nu_1|\tilde{w}_{tx}|+k_0lc_0M+k_0l^2c_0M\\&=2c_0J_2M^2+\nu_1|\tilde{\psi}_{txx}|+\nu_1|\tilde{w}_{txx}|+J_3M,\end{aligned}$$

onde $J_3 = c_0k_0l + c_0k_0l^2$. Assim, de (4.32) deduz-se que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \left(\rho_1|\varphi_{tt}|^2 + \sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})|\varphi_{tx}|^2\right)\,dx \le J_2M\int_0^\ell |\varphi_{xx}||\varphi_{tt}|\,dx + \frac{J_2M}{2}\int_0^\ell |\varphi_{tx}|^2\,dx$$
$$+ J_2M\int_0^\ell |\varphi_{tx}||\varphi_{tt}|\,dx + \int_0^\ell 2c_0J_2M^2|\varphi_{tt}|\,dx + \nu_1\int_0^\ell |\tilde{\psi}_{txx}||\varphi_{tt}|\,dx$$
$$+ \nu_1\int_0^\ell |\tilde{w}_{txx}||\varphi_{tt}|\,dx + \int_0^\ell J_3M|\varphi_{tt}|\,dx.$$

Aplicando a desigualdade de Young resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \left(\rho_1|\varphi_{tt}|^2 + \sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})|\varphi_{tx}|^2\right)\,dx \le \frac{J_2M}{2}\int_0^\ell \left(|\varphi_{xx}|^2 + |\varphi_{tt}|^2\right)\,dx + \frac{J_2M}{2}\int_0^\ell |\varphi_{tx}|^2\,dx$$
$$+ \frac{J_2M}{2}\int_0^\ell \left(|\varphi_{tx}|^2 + |\varphi_{tt}|^2\right)\,dx + 2c_0^2J_2^2M^4\ell + \frac{1}{2}\int_0^\ell |\varphi_{tt}|^2\,dx + \frac{\nu_1}{2}\|\tilde{\psi}_{txx}(t,\cdot)\|_{L^2}^2$$
$$+ \frac{\nu_1}{2}\int_0^\ell |\varphi_{tt}|^2\,dx + \frac{\nu_1}{2}\|\tilde{w}_{txx}(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \frac{\nu_1}{2}\int_0^\ell |\varphi_{tt}|^2\,dx + \frac{J_3^2M^2\ell}{2} + \frac{1}{2}\int_0^\ell |\varphi_{tt}|^2\,dx$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \left(\rho_1|\varphi_{tt}|^2 + \sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})|\varphi_{tx}|^2\right)\,dx &\le 4c_0^2J_2^2M^4\ell + J_3^2M^2\ell + \nu_1\|\tilde{\psi}_{txx}\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 \\ &+ \nu_1\|\tilde{w}_{txx}\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + (3J_2M + 2\nu_1 + 2)\int_0^\ell \left(|\varphi_{xx}|^2 + |\varphi_{tx}|^2 + |\varphi_{tt}|^2\right)\,dx.\end{aligned} \tag{4.33}$$

Multiplicando (4.18) por $-\varphi_{txx}$, integrando sobre $[0,\ell]$ e usando integração por partes resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \rho_1|\varphi_{tx}|^2\,dx + \int_0^\ell \sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\varphi_{xx}\varphi_{txx}\,dx = \int_0^\ell \frac{d}{dx}[h_1]\varphi_{tx}\,dx.$$

Mas, como

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})|\varphi_{xx}|^2\right] = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\right]|\varphi_{xx}|^2 + \sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\varphi_{xx}\varphi_{txx},$$

segue-se que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \left(\rho_1|\varphi_{tx}|^2 + \sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})|\varphi_{xx}|^2\right)\,dx = \int_0^\ell \frac{d}{dx}[h_1]\varphi_{tx}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^\ell \frac{d}{dt}\left[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\right]|\varphi_{xx}|^2\,dx.$$

E, uma vez que

$$\left|\frac{d}{dx}[h_1]\right| \le 2c_0J_2M^2 + \nu_1|\tilde{\psi}_{xxx}| + \nu_1|\tilde{w}_{xxx}| + J_3M,$$

conclui-se que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \left(\rho_1|\varphi_{tx}|^2+\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})|\varphi_{xx}|^2\right)\,dx &\leq 4c_0^2J_2^2M^4\ell+J_3^2M^2\ell+\nu_1\|\tilde{\psi}_{xxx}\|^2_{L^2(0,T;L^2)}\\ &+\nu_1\|\tilde{w}_{xxx}\|^2_{L^2(0,T;L^2)}+(3\nu_1+2)\int_0^\ell \left(|\varphi_{xx}|^2+|\varphi_{tx}|^2\right)\,dx.\end{aligned} \tag{4.34}$$

Somando (4.33) com (4.34), obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \left(\rho_1|\varphi_{tt}|^2+(\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})+\rho_1)|\varphi_{tx}|^2+\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})|\varphi_{xx}|^2\right)\,dx &\leq 8c_0^2J_2^2M^4\ell+2J_3^2M^2\ell\\ +4\nu_1M+(3J_2M+5\nu_1+4)\int_0^\ell \left(|\varphi_{xx}|^2+|\varphi_{tx}|^2+|\varphi_{tt}|^2\right)\,dx.\end{aligned}$$

Integrando a última expressão de 0 até $t\in[0,T]$, resulta que

$$\begin{aligned}\min\{\rho_1,\beta\}\int_0^\ell \left(|\varphi_{tt}(t,x)|^2+|\varphi_{tx}(t,x)|^2+|\varphi_{xx}(t,x)|^2\right)\,dx \ &\leq E_4(0)\\ +(8c_0^2J_2^2M^4\ell+2J_3^2M^2\ell+4\nu_1M)T&\\ +(3J_2M+5\nu_1+4)\int_0^t\int_0^\ell \left(|\varphi_{xx}(\tau,x)|^2+|\varphi_{tx}(\tau,x)|^2+|\varphi_{tt}(\tau,x)|^2\right)\,dx\,d\tau,&\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}E_4(0)=&\int_0^\ell \left(\rho_1|\varphi_{tt}(0,x)|^2+(\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z}(0,x))+\rho_1)|\varphi_{tx}(0,x)|^2\right)\,dx\\ &+\int_0^\ell \sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z}(0,x))|\varphi_{xx}(0,x)|^2\,dx.\end{aligned}$$

Portanto, pela desigualdade de Gronwall,

$$\begin{aligned}&\int_0^\ell \left(|\varphi_{tt}(t,x)|^2+|\varphi_{tx}(t,x)|^2+|\varphi_{xx}(t,x)|^2\right)\,dx\\ &\quad\leq \frac{E_4(0)+(8c_0^2J_2^2M^4\ell+2J_3^2M^2\ell+4\nu_1M)T}{\min\{\rho_1,\beta\}}\exp\left(\frac{(3J_2M+5\nu_1+4)t}{\min\{\rho_1,\beta\}}\right).\end{aligned}$$

Assim, para

$$T<\min\left\{\frac{1}{8c_0^2J_2^2M^4\ell+2J_3^2M^2\ell+4\nu_1M},\frac{\min\{\rho_1,\beta\}}{3J_2M+5\nu_1+4}\right\}:=T_4$$

obtém-se

$$\|\varphi_{tt}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}+\|\varphi_{tx}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}+\|\varphi_{xx}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}\leq \frac{(E_4(0)+1)\mathrm{e}}{\min\{\rho_1,\beta\}}:=M_4. \tag{4.35}$$

Agora, derivando (4.19) em t, multiplicando por ψ_{tt}, integrando sobre $[0,\ell]$ e fazendo integração por partes resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \left(\rho_2|\psi_{tt}|^2 + b|\psi_{tx}|^2\right)\,dx \le \int_0^\ell \left|\frac{d}{dt}[h_2]\right| |\psi_{tt}|\,dx$$

Como

$$\left|\frac{d}{dt}\,[h_2]\right| \le (2k+kl+\gamma)c_0M,$$

segue-se da desigualdade de Young que

$$\frac{d}{dt}\int_0^\ell \left(\rho_2|\psi_{tt}|^2 + b|\psi_{tx}|^2\right)\,dx \le (2k+kl+\gamma)^2c_0^2M^2\ell + \int_0^\ell \left(|\psi_{tt}|^2 + |\psi_{xx}|^2\right)\,dx. \quad (4.36)$$

Multiplicando (4.19) por $-\psi_{txx}$, integrando sobre $[0,\ell]$ e fazendo integração por partes resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \left(\rho_2|\psi_{tx}|^2 + b|\psi_{xx}|^2\right)\,dx \le \int_0^\ell \left|\frac{d}{dx}[h_2]\right| |\psi_{tx}|\,dx$$

Assim, como

$$\left|\frac{d}{dx}\,[h_2]\right| \le (2k+kl+\gamma)c_0M,$$

segue-se da desigualdade de Young que

$$\frac{d}{dt}\int_0^\ell \left(\rho_2|\psi_{tx}|^2 + b|\psi_{xx}|^2\right)\,dx \le (2k+kl+\gamma)^2c_0^2M^2\ell + \int_0^\ell |\psi_{tx}|^2\,dx. \quad (4.37)$$

Somando (4.36) com (4.37), obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \left(\rho_2|\psi_{tt}|^2 + (\rho_2+b)|\psi_{tx}|^2 + b|\psi_{xx}|^2\right)\,dx &\le 2(2k+kl+\gamma)^2c_0^2M^2\ell \\ &\quad + \int_0^\ell \left(|\psi_{tt}|^2 + |\psi_{tx}|^2 + |\psi_{xx}|^2\right)\,dx.\end{aligned}$$

Integrando a última expressão de 0 até $t \in [0,T]$ e, em seguida, aplicando a desigualdade de Gronwall, resulta que

$$\begin{aligned}&\int_0^\ell \left(|\psi_{tt}(t,x)|^2 + |\psi_{tx}(t,x)|^2 + |\psi_{xx}(t,x)|^2\right)\,dx \\ &\qquad \le \frac{E_5(0) + 2(2k+kl+\gamma)^2c_0^2M^2\ell T}{\min\{\rho_2, b\}}\exp\left(\frac{t}{\min\{\rho_2,b\}}\right),\end{aligned}$$

onde

$$E_5(0) = \int_0^\ell \left(\rho_2|\psi_{tt}(0,x)|^2 + (\rho_2+b)|\psi_{tx}(0,x)|^2 + b|\psi_{xx}(0,x)|^2\right)\,dx.$$

Assim, para

$$T < \min\left\{\min\{\rho_2,b\}, \frac{1}{2(2k+kl+\gamma)^2c_0^2M^2\ell}\right\} := T_5$$

obtém-se

$$\|\psi_{tt}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\psi_{tx}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\psi_{xx}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq \frac{(E_5(0)+1)\mathrm{e}}{\min\{\rho_2, b\}} := M_5. \tag{4.38}$$

Por fim, derivando (4.20) em t, multiplicando por w_{tt}, integrando sobre $[0,\ell]$ e fazendo integração por partes resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(\rho_1|w_{tt}|^2 + k_0|w_{tx}|^2\Big)\,dx \leq \int_0^\ell \left|\frac{d}{dt}[h_3]\right| |w_{tt}|\,dx.$$

Como

$$\left|\frac{d}{dx}[h_3]\right| \leq (2kl + k_0 l + kl^2)c_0 M,$$

segue-se da desigualdade de Young que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(\rho_1|w_{tt}|^2 + k_0|w_{tx}|^2\Big)\,dx &\leq (2kl + k_0 l + kl^2)^2 c_0^2 M^2 \ell \\ &\quad + \int_0^\ell \Big(|w_{tt}|^2 + |w_{xx}|^2\Big)\,dx.\end{aligned} \tag{4.39}$$

Multiplicando (4.19) por $-w_{txx}$, integrando sobre $[0,\ell]$ e fazendo integração por partes resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(\rho_1|w_{tx}|^2 + k_0|w_{xx}|^2\Big)\,dx \leq \int_0^\ell \left|\frac{d}{dx}[h_3]\right| |w_{tx}|\,dx$$

Assim, como

$$\left|\frac{d}{dx}[h_3]\right| \leq (2kl + k_0 l + kl^2)c_0 M,$$

segue-se da desigualdade de Young que

$$\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(\rho_1|w_{tx}|^2 + k_0|w_{xx}|^2\Big)\,dx \leq (2kl + k_0 l + kl^2)^2 c_0^2 M^2 \ell + \int_0^\ell |w_{tx}|^2\,dx. \tag{4.40}$$

Somando (4.39) com (4.40), obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(\rho_1|w_{tt}|^2 + (\rho_1 + k_0)|w_{tx}|^2 + k_0|w_{xx}|^2\Big)\,dx &\leq 2(2kl + k_0 l + kl^2)^2 c_0^2 M^2 \ell \\ &\quad + \int_0^\ell \Big(|w_{tt}|^2 + |w_{tx}|^2 + |w_{xx}|^2\Big)\,dx.\end{aligned}$$

Integrando a última expressão de 0 até $t \in [0,T]$ e, em seguida, aplicando a desigualdade de

Gronwall, resulta que

$$\begin{aligned}\int_0^\ell &\left(|w_{tt}(t,x)|^2+|w_{tx}(t,x)|^2+|w_{xx}(t,x)|^2\right)\,dx\\ &\le \frac{E_6(0)+2(2kl+k_0l+kl^2)^2c_0^2M^2\ell T}{\min\{\rho_1,k_0\}}\exp\left(\frac{t}{\min\{\rho_1,k_0\}}\right),\end{aligned}$$

onde

$$E_6(0)=\int_0^\ell\left(\rho_1|w_{tt}(0,x)|^2+(\rho_1+k_0)|w_{tx}(0,x)|^2+k_0|w_{xx}(0,x)|^2\right)\,dx.$$

Assim, para

$$T<\left\{\min\{\rho_1,k_0\},\frac{1}{2(2kl+k_0l+kl^2)^2c_0^2M^2\ell}\right\}:=T_6$$

obtém-se

$$\|w_{tt}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}+\|w_{tx}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}+\|w_{xx}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}\le\frac{(E_6(0)+1)\mathrm{e}}{\min\{\rho_1,k_0\}}:=M_6. \tag{4.41}$$

Estimativa das derivadas de terceira ordem de φ, ψ e w.

Derivando (4.18) em t duas vezes, multiplicando por φ_{ttt} e integrando sobre $[0,\ell]$ obtém-se

$$\begin{aligned}\frac12\frac{d}{dt}\int_0^\ell\rho_1|\varphi_{ttt}|^2\,dx-\int_0^\ell\frac{d^2}{dt^2}\left[\sigma_{\varphi_x}(\tilde Z)\right]\varphi_{xx}\varphi_{ttt}\,dx-2\int_0^\ell\frac{d}{dt}\left[\sigma_{\varphi_x}(\tilde Z)\right]\varphi_{txx}\varphi_{ttt}\,dx\\ -\int_0^\ell\sigma_{\varphi_x}(\tilde Z)\varphi_{ttxx}\varphi_{ttt}\,dx=\int_0^\ell\frac{d^2}{dt^2}[h_1]\varphi_{ttt}\,dx.\end{aligned} \tag{4.42}$$

Mas, fazendo integração por partes, conclui-se que

$$\begin{aligned}\int_0^\ell\sigma_{\varphi_x}(\tilde Z)\varphi_{ttxx}\varphi_{ttt}\,dx&=\left[\sigma_{\varphi_x}(\tilde Z)\varphi_{ttt}\varphi_{ttx}\right]_0^\ell-\int_0^\ell\varphi_{ttx}\frac{d}{dx}\left[\sigma_{\varphi_x}(\tilde Z)\varphi_{ttt}\right]\,dx\\ &=0-\int_0^\ell\varphi_{ttx}\frac{d}{dx}\left[\sigma_{\varphi_x}(\tilde Z)\right]\varphi_{ttt}\,dx-\int_0^\ell\varphi_{ttx}\sigma_{\varphi_x}(\tilde Z)\varphi_{tttx}\,dx\end{aligned}$$

E, como

$$\frac12\frac{d}{dt}\left[\sigma_{\varphi_x}(\tilde Z)|\varphi_{ttx}|^2\right]=\frac12\frac{d}{dt}\left[\sigma_{\varphi_x}(\tilde Z)\right]|\varphi_{ttx}|^2+\sigma_{\varphi_x}(\tilde Z)\varphi_{ttx}\varphi_{tttx},$$

segue-se que

$$\begin{aligned}\int_0^\ell\sigma_{\varphi_x}(\tilde Z)\varphi_{ttxx}\varphi_{ttt}\,dx=-\int_0^\ell\varphi_{ttx}\frac{d}{dx}\left[\sigma_{\varphi_x}(\tilde Z)\right]\varphi_{ttt}\,dx+\int_0^\ell\frac12\frac{d}{dt}\left[\sigma_{\varphi_x}(\tilde Z)\right]|\varphi_{ttx}|^2\,dx\\ -\frac12\frac{d}{dt}\int_0^\ell\left[\sigma_{\varphi_x}(\tilde Z)|\varphi_{ttx}|^2\right]\,dx.\end{aligned}$$

Substituindo a última igualdade em (4.42), obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(\rho_1|\varphi_{ttt}|^2+\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})|\varphi_{ttx}|^2\Big)\,dx &= \int_0^\ell \frac{d^2}{dt^2}[h_1]\varphi_{ttt}\,dx\\
+\int_0^\ell \frac{d^2}{dt^2}\Big[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\Big]\,\varphi_{xx}\varphi_{ttt}\,dx &+ 2\int_0^\ell \frac{d}{dt}\Big[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\Big]\,\varphi_{txx}\varphi_{ttt}\,dx\\
-\int_0^\ell \varphi_{ttx}\frac{d}{dx}\Big[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\Big]\,\varphi_{ttt}\,dx &+ \frac{1}{2}\int_0^\ell \frac{d}{dt}\Big[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\Big]\,|\varphi_{ttx}|^2\,dx.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Observe que

$$\left|\frac{d^2}{dt^2}\Big[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\Big]\right|,\ \left|\frac{d^2}{dt^2}\Big[\sigma_{\psi}(\tilde{Z})\Big]\right|,\ \left|\frac{d^2}{dt^2}\Big[\sigma_{w}(\tilde{Z})\Big]\right| \le 9\nu_3 c_0^2 M^2 + J_2 M$$

e

$$\left|\frac{d^2}{dt^2}[h_1]\right| \le 18\nu_3 c_0^3 M^3 + 6c_0 J_2 M^2 + J_1 M.$$

Assim, utilizando a desigualdade de Young em (4.43), deduz-se que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(\rho_1|\varphi_{ttt}|^2+\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})|\varphi_{ttx}|^2\Big)\,dx &\le (18\nu_3 c_0^3 M^3 + 6J_2 c_0 M^2 + J_1 M)^2\ell + J_2 M^3\\
+ 9\nu_3 c_0^2 M^4 + (9\nu_3 c_0^2 M^2 + 6J_2 M + 1)&\int_0^\ell \Big(|\varphi_{ttt}|^2+|\varphi_{ttx}|^2+|\varphi_{txx}|^2\Big)\,dx.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Derivando (4.19) em x, multiplicando por $-\varphi_{txxx}$, integrando sobre $[0,\ell]$ e usando integração por partes resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(\rho_1|\varphi_{txx}|^2+\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})|\varphi_{xxx}|^2\Big)\,dx &= -\frac{1}{2}\int_0^\ell \frac{d}{dt}\Big[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\Big]\,|\varphi_{xxx}|^2\,dx\\
-\int_0^\ell \varphi_{txx}\frac{d^2}{dx^2}\Big[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\Big]\,\varphi_{xx}\,dx - \int_0^\ell \varphi_{txx}&\frac{d}{dx}\Big[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\Big]\,\varphi_{xxx}\,dx - \int_0^\ell \frac{d^2}{dx^2}[h_1]\varphi_{txx}\,dx.
\end{aligned}$$

E, tendo em vista que

$$\left|\frac{d^2}{dx^2}[h_1]\right| \le 18\nu_3 c_0^3 M^3 + 6c_0 J_2 M^2 + J_1 M,$$

conclui-se que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(\rho_1|\varphi_{txx}|^2+\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})|\varphi_{xxx}|^2\Big)\,dx &\le (18\nu_3 c_0^3 M^3 + 6J_2 c_0 M^2 + J_1 M)^2\ell\\
+ 9\nu_3 c_0^2 M^4 + J_2 M^3 + (9\nu_3 c_0^2 M^2 + 3J_2 M + 1)&\int_0^\ell \Big(|\varphi_{txx}|^2+|\varphi_{xxx}|^2\Big)\,dx.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

De (4.44) e (4.45), segue-se que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(\rho_1|\varphi_{ttt}|^2+\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})|\varphi_{ttx}|^2+\rho_1|\varphi_{txx}|^2+\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})|\varphi_{xxx}|^2\Big)\,dx \leq 18\nu_3c_0^2M^4+2J_2M^3\\ +2(18\nu_3c_0^3M^3+6J_2c_0M^2+J_1M)^2\ell\\ +(18\nu_3c_0^2M^2+9J_2M+2)\int_0^\ell\Big(|\varphi_{ttt}|^2+|\varphi_{ttx}|^2+|\varphi_{txx}|^2+|\varphi_{xxx}|^2\Big)\,dx.\end{aligned}$$

Integrando a última expressão de 0 até $t\in[0,T]$, resulta que

$$\begin{aligned}\int_0^\ell \Big(|\varphi_{ttt}(t,x)|^2+|\varphi_{ttx}(t,x)|^2+|\varphi_{txx}(t,x)|^2+|\varphi_{xxx}(t,x)|^2\Big)\,dx \leq \frac{E_7(0)}{\min\{\rho_1,\beta\}}\\ +K_0T+K_1\int_0^t\int_0^\ell\Big(|\varphi_{ttt}(\tau,x)|^2+|\varphi_{ttx}(\tau,x)|^2+|\varphi_{txx}(\tau,x)|^2+|\varphi_{xxx}(\tau,x)|^2\Big)\,dx\,d\tau,\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}E_7(0)=&\int_0^\ell\Big(\rho_1|\varphi_{ttt}(0,x)|^2+\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z}(0,x))|\varphi_{ttx}(0,x)|^2\Big)\,dx\\ &+\int_0^\ell\Big(\rho_1|\varphi_{txx}(0,x)|^2+\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})(0,x)|\varphi_{xxx}(0,x)|^2\Big)\,dx,\end{aligned}$$

$$K_0=\frac{1}{\min\{\rho_1,\beta\}}(18\nu_3c_0^2M^4+2J_2M^3+2(18\nu_3c_0^3M^3+6J_2c_0M^2+J_1M)^2\ell)$$

e

$$K_1=\frac{1}{\min\{\rho_1,\beta\}}(18\nu_3c_0^2M^2+9J_2M+2).$$

Portanto, pela desigualdade de Gronwall,

$$\begin{aligned}&\int_0^\ell\Big(|\varphi_{ttt}(t,x)|^2+|\varphi_{ttx}(t,x)|^2+|\varphi_{txx}(t,x)|^2+|\varphi_{xxx}(t,x)|^2\Big)\,dx\\ &\quad\leq\left(\frac{E_7(0)}{\min\{\rho_1,\beta\}}+K_0T\right)\exp(K_1t).\end{aligned}$$

Assim, para

$$T<\min\left\{\frac{1}{K_1},\ \frac{1}{\min\{\rho_1,\beta\}K_0}\right\}:=T_7$$

obtém-se

$$\begin{aligned}&\|\varphi_{ttt}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}+\|\varphi_{ttx}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}+\|\varphi_{txx}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}+\|\varphi_{xxx}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}\\ &\quad\leq\frac{(E_7(0)+1)\mathrm{e}}{\min\{\rho_1,\beta\}}:=M_7.\end{aligned}\tag{4.46}$$

Observação 4.4. Note que a função φ não possui derivadas de quarta ordem. Entretanto, é possível obter uma sequência de funções mais regulares $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para φ. Para os termos desta sequência, os cálculos formais efetuados acima se aplicam de onde segue que

$$\|\varphi_{ttt}^{(n)}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2+\|\varphi_{ttx}^{(n)}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2+\|\varphi_{txx}^{(n)}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2+\|\varphi_{xxx}^{(n)}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2\leq M_7$$

para todo $n\in\mathbb{N}$. Resulta disto que tal estimativa também se verifica para a função φ, pois

$$\begin{aligned}
&\|\varphi_{ttt}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2+\|\varphi_{ttx}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2+\|\varphi_{txx}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2+\|\varphi_{xxx}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2\\
&\quad\leq \varliminf_{n\to\infty}\Big(\|\varphi_{ttt}^{(n)}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2+\|\varphi_{ttx}^{(n)}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2+\|\varphi_{txx}^{(n)}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2+\|\varphi_{xxx}^{(n)}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2\Big)\\
&\quad\leq \varliminf_{n\to\infty} M_7\\
&\quad= M_7.
\end{aligned}$$

Isto justifica o procedimento utilizado. Um argumento análogo será empregado nas estimativas seguintes.

Derivando (4.19) em t duas vezes, multiplicando por ψ_{ttt}, integrando sobre $[0,\ell]$ e fazendo integração por partes resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell\Big(\rho_2|\psi_{ttt}|^2+b|\psi_{ttx}|^2\Big)\,dx\leq\int_0^\ell\left|\frac{d^2}{dt^2}[h_2]\right||\psi_{ttt}|\,dx$$

Como

$$\left|\frac{d^2}{dt^2}\,[h_2]\right|\leq(2k+kl+\gamma)c_0M,$$

segue-se da desigualdade de Young que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_0^\ell\Big(\rho_2|\psi_{ttt}|^2+b|\psi_{ttx}|^2\Big)\,dx&\leq(2k+kl+\gamma)^2c_0^2M^2\ell\\
&\quad+\int_0^\ell\Big(|\psi_{ttt}|^2+|\psi_{xxx}|^2\Big)\,dx.
\end{aligned}\tag{4.47}$$

Agora, derivando (4.19) em x, multiplicando por $-\psi_{txxx}$, integrando sobre $[0,\ell]$ e fazendo integração por partes resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell\Big(\rho_2|\psi_{txx}|^2+b|\psi_{xxx}|^2\Big)\,dx\leq\int_0^\ell\left|\frac{d^2}{dx^2}[h_2]\right||\psi_{txx}|\,dx.$$

Assim, como

$$\left|\frac{d^2}{dx^2}\,[h_2]\right|\leq(2k+kl+\gamma)c_0M,$$

segue-se da desigualdade de Young que

$$\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(\rho_2|\psi_{txx}|^2 + b|\psi_{xxx}|^2\Big)\,dx \le (2k+kl+\gamma)^2c_0^2M^2\ell + \int_0^\ell \Big(|\psi_{txx}|^2 + |\psi_{ttx}|^2\Big)\,dx. \tag{4.48}$$

Somando (4.47) com (4.48), obtém-se

$$\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(\rho_2|\psi_{ttt}|^2 + b|\psi_{ttx}|^2 + \rho_2|\psi_{txx}|^2 + b|\psi_{xxx}|^2\Big)\,dx \le 2(2k+kl+\gamma)^2c_0^2M^2\ell + \int_0^\ell \Big(|\psi_{ttt}|^2 + |\psi_{ttx}|^2 + |\psi_{txx}|^2 + |\psi_{xxx}|^2\Big)\,dx.$$

Integrando a última expressão de 0 até $t \in [0,T]$ e, em seguida, aplicando a desigualdade de Gronwall, resulta que

$$\int_0^\ell \Big(|\psi_{ttt}(t,x)|^2 + |\psi_{ttx}(t,x)|^2 + |\psi_{txx}(t,x)|^2 + |\psi_{xxx}(t,x)|^2\Big)\,dx \le \frac{E_8(0) + 2(2k+kl+\gamma)^2c_0^2M^2\ell T}{\min\{\rho_2,b\}}\exp\left(\frac{t}{\min\{\rho_2,b\}}\right),$$

onde

$$E_8(0) = \int_0^\ell \Big(\rho_2|\psi_{ttt}(0,x)|^2 + b|\psi_{ttx}(0,x)|^2 + \rho_2|\psi_{txx}(0,x)|^2 + b|\psi_{xxx}(0,x)|^2\Big)\,dx.$$

Assim, para

$$T < \min\left\{\min\{\rho_2,b\}, \frac{1}{2(2k+kl+\gamma)^2c_0^2M^2\ell}\right\} := T_8$$

obtém-se

$$\|\psi_{ttt}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\psi_{ttx}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\psi_{txx}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\psi_{xxx}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} \le \frac{(E_8(0)+1)\mathrm{e}}{\min\{\rho_2,b\}} := M_8. \tag{4.49}$$

Por fim, derivando (4.20) em t duas vezes, multiplicando por w_{ttt}, integrando sobre $[0,\ell]$ e fazendo integração por partes resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(\rho_1|w_{ttt}|^2 + k_0|w_{ttx}|^2\Big)\,dx \le \int_0^\ell \left|\frac{d^2}{dt^2}[h_3]\right| |w_{ttt}|\,dx.$$

Como

$$\left|\frac{d^2}{dt^2}[h_3]\right| \le (2kl + k_0l + kl^2)c_0M,$$

segue-se da desigualdade de Young que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(\rho_1|w_{ttt}|^2 + k_0|w_{ttx}|^2\Big)\,dx &\le (2kl + k_0 l + kl^2)^2 c_0^2 M^2 \ell \\ &+ \int_0^\ell \Big(|w_{ttt}|^2 + |w_{xxx}|^2\Big)\,dx.\end{aligned} \tag{4.50}$$

Agora, derivando (4.20) em x, multiplicando por $-w_{txxx}$, integrando sobre $[0,\ell]$ e fazendo integração por partes resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(\rho_1|w_{txx}|^2 + k_0|w_{xxx}|^2\Big)\,dx \le \int_0^\ell \left|\frac{d^2}{dx^2}[h_3]\right| |w_{txx}|\,dx$$

Assim, como

$$\left|\frac{d^2}{dx^2}\,[h_3]\right| \le (2kl + k_0 l + kl^2) c_0 M,$$

segue-se da desigualdade de Young que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(\rho_1|w_{txx}|^2 + k_0|w_{xxx}|^2\Big)\,dx &\le (2kl + k_0 l + kl^2)^2 c_0^2 M^2 \ell \\ &+ \int_0^\ell \Big(|w_{txx}|^2 + |w_{ttx}|^2\Big)\,dx.\end{aligned} \tag{4.51}$$

Somando (4.50) com (4.51), obtém-se

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(\rho_1|w_{ttt}|^2 + k_0|w_{ttx}|^2 + \rho_1|w_{txx}|^2 + k_0|w_{xxx}|^2\Big)\,dx \le 2(2kl + k_0 l + kl^2)^2 c_0^2 M^2 \ell \\ &+ \int_0^\ell \Big(|w_{ttt}|^2 + |w_{ttx}|^2 + |w_{txx}|^2 + |w_{xxx}|^2\Big)\,dx.\end{aligned}$$

Integrando a última expressão de 0 até $t \in [0,T]$ e, em seguida, aplicando a desigualdade de Gronwall, resulta que

$$\begin{aligned}&\int_0^\ell \Big(|w_{ttt}(t,x)|^2 + |w_{ttx}(t,x)|^2 + |w_{txx}(t,x)|^2 + |w_{xxx}(t,x)|^2\Big)\,dx \\ &\quad \le \frac{E_9(0) + 2(2kl + k_0 l + kl^2)^2 c_0^2 M^2 \ell T}{\min\{\rho_1, b\}} \exp\left(\frac{t}{\min\{\rho_1, b\}}\right),\end{aligned}$$

onde

$$E_9(0) = \int_0^\ell \Big(\rho_1|w_{ttt}(0,x)|^2 + k_0|w_{ttx}(0,x)|^2 + \rho_1|w_{txx}(0,x)|^2 + k_0|w_{xxx}(0,x)|^2\Big)\,dx.$$

Assim, para

$$T < \min\left\{\min\{\rho_1, b\}, \frac{1}{2(2kl + k_0 l + kl^2)^2 c_0^2 M^2 \ell}\right\} := T_9$$

obtém-se

$$\begin{aligned}&\|w_{ttt}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|w_{ttx}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|w_{txx}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|w_{xxx}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}\\ &\quad\leq \frac{(E_9(0)+1)\mathrm{e}}{\min\{\rho_1, b\}} := M_9.\end{aligned} \tag{4.52}$$

Estimativa das derivadas de primeira e segunda ordem θ.

Multiplicando a equação de (4.24) por θ_t, integrando sobre $[0,\ell]$ e fazendo integração por partes resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell k_1|\theta_x|^2\,dx = -m\int_0^\ell \psi_{tx}\theta_t\,dx - \int_0^\ell |\theta_t|^2\,dx.$$

Derivando a equação de (4.24) em t, multiplicando por θ_t, integrando sobre $[0,\ell]$ e fazendo integração por partes resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell |\theta_t|^2\,dx = -m\int_0^\ell \psi_{ttx}\theta_t\,dx - k_1\int_0^\ell |\theta_{tx}|^2\,dx.$$

Derivando a equação de (4.24) em x, multiplicando por θ_{ttx}, integrando sobre $[0,\ell]$ e fazendo integração por partes resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell |\theta_{tx}|^2\,dx = -m\int_0^\ell \psi_{txx}\theta_{ttx}\,dx + k_1\int_0^\ell \theta_{xxx}\theta_{ttx}\,dx.$$

Multiplicando a equação de (4.24) por $-\theta_{txx}$, integrando sobre $[0,\ell]$ e fazendo integração por partes resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell k_1|\theta_{xx}|^2\,dx = -m\int_0^\ell \psi_{tx}\theta_{txx}\,dx - \int_0^\ell |\theta_{tx}|^2\,dx.$$

Somando as últimas quatro igualdades membro a membro, aplicando a desigualdade Young e utilizando (4.56), obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(|\theta_t|^2 + k_1|\theta_x|^2 + |\theta_{tx}|^2 + k_1|\theta_{xx}|^2\Big)\,dx &\leq \left(4m + \frac{16m^2}{k_1}\right)M^2 + \frac{k_1}{4}\int_0^\ell |\theta_{ttx}|^2\\ &+ (2m + 2k_1 + 4)\int_0^\ell \Big(|\theta_t|^2 + |\theta_x|^2 + |\theta_{tx}|^2 + |\theta_{xx}|^2\Big)\,dx.\end{aligned}$$

Derivando a equação de (4.24) em t duas vezes, multiplicando por θ_{tt}, integrando sobre $[0,\ell]$, fazendo integração por partes e utilizando a desigualdade e Young resulta que

$$\frac{d}{dt}\int_0^\ell k_1|\theta_{tt}|^2\,dx + k_1\int_0^\ell |\theta_{ttx}|^2\,dx \leq \frac{4m^2M^2}{k_1} + \frac{k_1}{4}\int_0^\ell |\theta_{ttx}|^2\,dx. \tag{4.53}$$

Segue-se das duas últimas desigualdades que

$$\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(|\theta_t|^2 + k_1|\theta_x|^2 + k_1|\theta_{tt}|^2 + |\theta_{tx}|^2 + k_1|\theta_{xx}|^2\Big)\,dx + \frac{k_1}{2}\int_0^\ell |\theta_{ttx}|^2\,dx$$
$$\leq \left(4m + \frac{20m^2}{k_1}\right) M^2 + (2m + 2k_1 + 4)\int_0^\ell \Big(|\theta_t|^2 + |\theta_x|^2 + |\theta_{tx}|^2 + |\theta_{xx}|^2\Big)\,dx$$

e, consequentemente,

$$\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(|\theta_t|^2 + k_1|\theta_x|^2 + k_1|\theta_{tt}|^2 + |\theta_{tx}|^2 + k_1|\theta_{xx}|^2\Big)\,dx \leq \left(4m + \frac{20m^2}{k_1}\right) M^2$$
$$+ (2m + 2k_1 + 4)\int_0^\ell \Big(|\theta_t|^2 + |\theta_x|^2 + |\theta_{tt}| + |\theta_{tx}|^2 + |\theta_{xx}|^2\Big)\,dx.$$

Integrando ambos os lados da última desigualdade de 0 até $t \in [0,T]$, utilizando (4.57) e, em seguida, aplicando a desigualdade de Gronwall, resulta que

$$\int_0^\ell \Big(|\theta_t(t,x)|^2 + |\theta_x(t,x)|^2 + |\theta_{tt}(t,x)|^2 + |\theta_{tx}(t,x)|^2 + |\theta_{xx}(t,x)|^2\Big)\,dx$$
$$\leq \frac{E_{10}(0) + \left(4m + \frac{20m^2}{k_1}\right) M^2 T}{\min\{1,k_1\}} \exp\left(\frac{(2m+2k_1+4)t}{\min\{1,k_1\}}\right),$$

onde

$$E_{10} = \int_0^\ell \Big(|\theta_t(0,x)|^2 + |\theta_x(0,x)|^2 + |\theta_{tt}(0,x)|^2 + |\theta_{tx}(0,x)|^2 + |\theta_{xx}(0,x)|^2\Big)\,dx.$$

Assim, para

$$T < \min\left\{\frac{k_1}{(4mk_1 + 20m^2)M^2}, \frac{\min\{1,k_1\}}{2m + 2k_1 + 4}\right\} := T_{10}$$

obtém-se

$$\|\theta_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\theta_x\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\theta_{tt}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\theta_{tx}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\theta_{xx}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}$$
$$\leq \frac{(E_{10}(0) + 1)\mathrm{e}}{\min\{1,k_1\}} := M_{10}. \tag{4.54}$$

Estimativa das derivadas de terceira ordem de θ.

Derivando a equação de (4.24) em t, multiplicando por $-\theta_{ttxx}$, integrando sobre $[0,\ell]$ e fazendo integração por partes resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell k_1|\theta_{txx}|^2\,dx = -\int_0^\ell |\theta_{tt}|^2\,dx - m\int_0^\ell \psi_{ttxx}\theta_{ttx}\,dx.$$

Derivando a equação de (4.24) em x, multiplicando por $-\theta_{txxx}$, integrando sobre $[0,\ell]$ e fazendo integração por partes resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell k_1|\theta_{xxx}|^2\,dx = -\int_0^\ell |\theta_{txx}|^2\,dx - m\int_0^\ell \psi_{txx}\theta_{txx}\,dx.$$

Derivando a equação de (4.24) em t duas vezes, multiplicando por θ_{tt}, integrando sobre $[0,\ell]$ e fazendo integração por partes resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell k_1|\theta_{tt}|^2\,dx + k_1\int_0^\ell |\theta_{ttx}|^2\,dx = m\int_0^\ell \psi_{ttt}\theta_{ttx}\,dx.$$

Somando as últimas três igualdades membro a membro, obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(k_1|\theta_{tt}|^2 + k_1|\theta_{txx}|^2 + k_1|\theta_{xxx}|^2\Big)\,dx + k_1\int_0^\ell |\theta_{ttx}|^2\,dx = -\int_0^\ell |\theta_{tt}|^2\,dx\\ -\int_0^\ell m\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k_1}}\psi_{ttxx}\frac{\sqrt{k_1}}{\sqrt{2}}\theta_{ttx}\,dx - \int_0^\ell |\theta_{txx}|^2\,dx - m\int_0^\ell \psi_{txx}\theta_{txx}\,dx\\ +\int_0^\ell m\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k_1}}\psi_{ttt}\frac{\sqrt{k_1}}{\sqrt{2}}\theta_{ttx}\,dx.\end{aligned}$$

Assim, pela desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(k_1|\theta_{tt}|^2 + k_1|\theta_{txx}|^2 + k_1|\theta_{xxx}|^2\Big)\,dx + k_1\int_0^\ell |\theta_{ttx}|^2\,dx \le m\int_0^\ell |\psi_{txx}|^2\,dx\\ + \frac{2m^2}{k_1}\int_0^\ell |\psi_{ttxx}|^2\,dx + \frac{2m^2}{k_1}\int_0^\ell |\psi_{ttt}|^2\,dx + (m+2)\int_0^\ell \Big(|\theta_{tt}|^2 + |\theta_{txx}|^2\Big)\,dx.\end{aligned}$$

Deste modo, para $T < T_8$ obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(k_1|\theta_{tt}|^2 + k_1|\theta_{txx}|^2 + k_1|\theta_{xxx}|^2\Big)\,dx + k_1\int_0^\ell |\theta_{ttx}|^2\,dx \ \le \left(m + \frac{4m^2}{k_1}\right)M_8\\ + (m+2)\int_0^\ell \Big(|\theta_{tt}|^2 + |\theta_{txx}|^2\Big)\,dx.\end{aligned} \tag{4.55}$$

Decorre da última desigualdade que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(k_1|\theta_{tt}|^2 + k_1|\theta_{txx}|^2 + k_1|\theta_{xxx}|^2\Big)\,dx \le (m+2)\int_0^\ell \Big(|\theta_{tt}|^2 + |\theta_{txx}|^2 + |\theta_{xxx}|\Big)\,dx\\ + \left(m + \frac{4m^2}{k_1}\right)M_8.\end{aligned}$$

Integrando a última expressão de 0 até $t \in [0,T]$ e, em seguida, aplicando a desigualdade de

Gronwall, resulta que

$$\int_0^\ell \Big(|\theta_{tt}(t,x)|^2 + |\theta_{txx}(t,x)|^2 + |\theta_{xxx}(t,x)|^2 \Big)\, dx$$
$$\leq \frac{1}{k_1}\left(E_{11}(0) + \left(m + \frac{4m^2}{k_1} \right) M_8 T \right) \exp\left(\frac{(m+2)t}{k_1} \right),$$

onde

$$E_{11} = \int_0^\ell \Big(k_1|\theta_{tt}(0,x)|^2 + k_1|\theta_{txx}(0,x)|^2 + k_1|\theta_{xxx}(0,x)|^2 \Big)\, dx.$$

Assim, para

$$T < \min\left\{ T_8, \frac{k_1}{(k_1 m + 4m^2)M_8}, \frac{k_1}{m+2} \right\} := T_{11}$$

obtém-se

$$\|\theta_{tt}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\theta_{txx}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\theta_{xxx}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq \frac{(E_{11}(0)+1)\mathrm{e}}{k_1} := M_{11}. \tag{4.56}$$

Utilizando a última desigualdade em (4.55) e integrando com respeito a t sobre $[0,T]$, conclui-se que

$$\int_0^\ell \Big(k_1|\theta_{tt}|^2 + k_1|\theta_{txx}|^2 + k_1|\theta_{xxx}|^2 \Big)\, dx + k_1 \int_0^T \int_0^\ell |\theta_{ttx}|^2 \, dx\, dt \ \leq E_{11}(0)$$
$$+ \left(m + \frac{4m^2}{k_1} \right) M_8 T + (m+2) M_{11} T.$$

Assim, para

$$T < \left\{ \frac{k_1}{2(k_1 m + 4m^2)M_8}, \frac{1}{2(m+2)M_{11}} \right\} := T_{12}$$

obtém-se

$$\|\theta_{ttx}\|^2_{L^2(0,T;L^2)} \leq \frac{(E_{11}(0)+1)}{k_1} := M_{12}. \tag{4.57}$$

Segue-se de (4.28), (4.35), (4.46), (4.29), (4.38), (4.49), (4.30), (4.41), (4.52), (4.54), (4.56) e (4.57) que tomando

$$T < \min\{T_j;\ j = 1, ..., 12\} := \hat{T}, \qquad M^2 > \max\{12(c_p+1)M_j;\ j = 1, ..., 12\} := \hat{M},$$

obtém-se $|||U|||_1^2 + |||\theta|||_2^2 \leq M^2$. Logo, para T suficientemente pequeno e M suficientemente grande, o item (g) também se verifica.

(II) O operador B é uma contração

Mantendo as notações (4.11), o objetivo é mostrar que existe uma constante $\lambda \in (0,1)$ tal que, para quaisquer $(\tilde{V},\tilde{\theta}),(\hat{V},\hat{\theta}) \in X(M,T)$,

$$d\big(B(\tilde{V},\tilde{\theta}),B(\hat{V},\hat{\theta})\big) \leq \lambda d\big((\tilde{V},\tilde{\theta}),(\hat{V},\hat{\theta})\big).$$

Considere, então, $(\tilde{V},\tilde{\theta}),(\hat{V},\hat{\theta}) \in X(M,T)$ e escreva

$$\begin{aligned}
B(\tilde{V},\tilde{\theta}) &= (\varphi,\psi,w,\theta),\\
B(\hat{V},\hat{\theta}) &= (\varphi^*,\psi^*,w^*,\theta^*),\\
(\tilde{V},\tilde{\theta})-(\hat{V},\hat{\theta}) &= (\tilde{\Phi},\tilde{\Psi},\tilde{W},\tilde{\Theta}),\\
B(\tilde{V},\tilde{\theta})-B(\hat{V},\hat{\theta}) &= (\Phi,\Psi,W,\Theta).
\end{aligned}$$

Em virtude da definição de B, conclui-se que

$$\rho_1\Phi_{tt}-\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\varphi_{xx}+\sigma_{\varphi_x}(\hat{Z})\varphi^*_{xx}-k_0l(\tilde{W}_x-l\tilde{\Phi})-h=0, \tag{4.58}$$

$$\rho_2\Psi_{tt}-b\Psi_{xx}+k(\tilde{\Phi}_x+\tilde{\Psi}+l\tilde{W})+\gamma\tilde{\Theta}_x=0, \tag{4.59}$$

$$\rho_1W_{tt}-k_0(W_x-l\tilde{\Phi})_x+kl(\tilde{\Phi}_x+\tilde{\Psi}+l\tilde{W})=0, \tag{4.60}$$

$$\Theta_t-k_1\Theta_{xx}+m\Psi_{tx}=0, \tag{4.61}$$

onde

$$h=\Big[\sigma_\psi(\tilde{Z})-\sigma_\psi(\hat{Z})\Big]\hat{\psi}_x+\sigma_\psi(\tilde{Z})\tilde{\Psi}_x+\Big[\sigma_w(\tilde{Z})-\sigma_w(\hat{Z})\Big]\hat{w}_x+\sigma_w(\tilde{Z})\tilde{W}_x.$$

Somando $\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\varphi^*_{xx}$ em ambos os membros de (4.58), resulta que

$$\rho_1\Phi_{tt}-\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\Phi_{xx}-k_0l(\tilde{W}_x-l\tilde{\Phi})-h=\Big[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})-\sigma_{\varphi_x}(\hat{Z})\Big]\varphi^*_{xx}.$$

Multiplicando por Φ_t e integrando sobre $[0,\ell]$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \rho_1\Big(|\Phi_t|^2+\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})|\Phi_x|^2\Big)\,dx &= \int_0^\ell\Big[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})-\sigma_{\varphi_x}(\hat{Z})\Big]\varphi^*_{xx}\Phi_t\,dx+\int_0^\ell h\Phi_t\,dx\\
&+k_0l\int_0^\ell(\tilde{W}_x-l\tilde{\Phi})\Phi_t\,dx-\int_0^\ell\frac{d}{dt}\Big[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\Big]\Phi_x\Phi_t\,dx+\frac{1}{2}\int_0^\ell\frac{d}{dt}\Big[\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})\Big]|\Phi_x|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Mas, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\xi\in[0,1)$ tal que

$$\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})-\sigma_{\varphi_x}(\hat{Z})=\sigma_{\varphi_x\varphi_x}(\hat{Z}+\xi(\tilde{Z}-\hat{Z}))\tilde{\Phi}_x+\sigma_{\varphi_x\psi}(\hat{Z}+\xi(\tilde{Z}-\hat{Z}))\tilde{\Psi}+\sigma_{\varphi_xw}(\hat{Z}+\xi(\tilde{Z}-\hat{Z}))\tilde{W}$$

de modo que $|\sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})-\sigma_{\varphi_x}(\hat{Z})|\leq\nu_2|\tilde{\Phi}_x|+\nu_2|\tilde{\Psi}|+\nu_2|\tilde{W}|$. Um uso similar do Teorema do Valor Médio mostra que

$$|h|\leq 2\nu_2c_0M|\tilde{\Phi}_x|+2\nu_2c_0M|\tilde{\Psi}|+2\nu_2c_0M|\tilde{W}|+\nu_1|\tilde{\Psi}_x|+\nu_1|\tilde{W}_x|.$$

Assim, pela desigualdade de Young,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(\rho_1|\Phi_t|^2 + \sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})|\Phi_x|^2\Big)\,dx &\le k_0 l \int_0^\ell \Big(|\tilde{W}_x|^2 + |\Phi_t|^2\Big)\,dx \\
&+ k_0 l^2 \int_0^\ell \Big(|\tilde{\Phi}|^2 + |\Phi_t|^2\Big)\,dx + \int_0^\ell \Big(2\nu_2 c_0 M|\tilde{\Phi}_x|^2 + |\Phi_t|^2 + (2\nu_2 c_0 M)|\tilde{\Psi}|^2\Big)\,dx \\
&+ \int_0^\ell \Big(|\Phi_t|^2 + 2\nu_2 c_0 M|\tilde{W}|^2 + |\Phi_t|^2 + \nu_1|\tilde{W}_x|^2 + |\Phi_t|^2\Big)\,dx \\
&+ \int_0^\ell \Big(\nu_2|\tilde{\Phi}_x|^2 + |\Phi_t|^2 + \nu_2|\tilde{\Psi}|^2 + |\Phi_t|^2 + \nu_2|\tilde{W}_x|^2 + |\Phi_t|^2\Big)\,dx \\
&+ J_2 M \int_0^\ell \Big(|\Phi_x|^2 + |\Phi_t|^2\Big)\,dx + J_2 M \int_0^\ell |\Phi_x|^2\,dx.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(\rho_1|\Phi_t|^2 + \sigma_{\varphi_x}(\tilde{Z})|\Phi_x|^2\Big)\,dx \le K + \left(\frac{J_3}{c_0} + 3J_2 M + 7\right)\int_0^\ell \Big(|\Phi_t|^2 + |\Phi_x|^2\Big)\,dx,
$$

onde

$$
\begin{aligned}
K = k_0 l^2 \|\tilde{\Phi}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} &+ (2\nu_2 c_0 M + \nu_2)\|\tilde{\Phi}_x\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + (2\nu_2 c_0 M + \nu_1 + \nu_2)\|\tilde{\Psi}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} \\
&+ (2\nu_2 c_0 M)\|\tilde{W}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + (k_0 l + \nu_1 + \nu_2)\|\tilde{W}_x\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}.
\end{aligned}
$$

Integrando a última desigualdade de 0 até $t \in [0,T]$ e, em seguida, aplicando a desigualdade de Gronwall, conclui-se que

$$
\int_0^\ell \Big(|\Phi_t(t,x)|^2 + |\Phi_x(t,x)|^2\Big)\,dx \le \frac{E_{12}(0) + KT}{\min\{\rho_1,\beta\}}\exp\left(\frac{(J_3 + 3J_2 M c_0 + 7c_0)t}{c_0\min\{\rho_1,\beta\}}\right),
$$

onde

$$
E_{12}(0) = \int_0^\ell \Big(|\Phi_t(0,x)|^2 + |\Phi_x(0,x)|^2\Big)\,dx = \int_0^\ell 0\,dx = 0.
$$

Deste modo, tomando

$$
\begin{aligned}
T < \min\Bigg\{&\frac{c_0\min\{\rho_1,\beta\}}{J_3 + 3J_2 M c_0 + 7c_0}, \frac{\min\{\rho_1,\beta\}}{k_0 l^2 \mathrm{e} M}, \frac{\min\{\rho_1,\beta\}}{(2\nu_2 c_0 M + \nu_2)\mathrm{e}M}, \\
&\frac{\min\{\rho_1,\beta\}}{(2\nu_2 c_0 M + \nu_1 + \nu_2)\mathrm{e}M}, \frac{\min\{\rho_1,\beta\}}{2\nu_2 c_0 M^2 \mathrm{e}}, \frac{\min\{\rho_1,\beta\}}{(k_0 l + \nu_1 + \nu_2)\mathrm{e}}\Bigg\} := T_{13}
\end{aligned}
$$

resulta que

$$
\begin{aligned}
\int_0^\ell \Big(|\Phi_t(t,x)|^2 + |\Phi_x(t,x)|^2\Big)\,dx \le \frac{1}{M}&\Big(\|\tilde{\Phi}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\tilde{\Phi}_x\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\tilde{\Psi}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}\Big) \\
&+ \frac{1}{M}\|\tilde{W}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \frac{1}{M}\|\tilde{W}_x\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}
\end{aligned}
$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned}\|\Phi_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\Phi_x\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} &\leq \frac{1}{M}\|\tilde{\Phi}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \frac{1}{M}\|\tilde{\Phi}_x\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} \\ &+ \frac{1}{M}\|\tilde{\Psi}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \frac{1}{M}\|\tilde{W}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \frac{1}{M}\|\tilde{W}_x\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}.\end{aligned} \tag{4.62}$$

Multiplicando (4.59) por Ψ_t, integrando sobre $[0,\ell]$ e utilizando integração por partes obtém-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \left(\rho_2|\Psi_t|^2 + b|\Psi_x|^2\right) dx = -k\int_0^\ell \left(\tilde{\Phi}_x\Psi_t + \tilde{\Psi}\Psi_t + l\tilde{W}\Psi_t\right) dx - \gamma\int_0^\ell \tilde{\Theta}\Psi_t\, dx.$$

Assim, pela desigualdade de Young,

$$\frac{d}{dt}\int_0^\ell \left(\rho_2|\Psi_t|^2 + b|\Psi_x|^2\right) dx \leq K_1 + (2k + kl + \gamma)\int_0^\ell |\Psi_t|^2\, dx,$$

onde

$$K_1 = k\|\tilde{\Phi}_x\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + k\|\tilde{\Psi}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + kl\|\tilde{W}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \gamma\|\tilde{\Theta}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}.$$

Somando $(2k + kl + \gamma)\|\Psi_x(t,\cdot)\|^2_{L^2} \geq 0$ no lado direito da última desigualdade, resulta que

$$\frac{d}{dt}\int_0^\ell \left(\rho_2|\Psi_t|^2 + b|\Psi_x|^2\right) dx \leq K_1 + (2k + kl + \gamma)\int_0^\ell \left(|\Psi_t|^2 + |\Psi_x|^2\right) dx.$$

Integrando de 0 até $t \in [0,T]$ e aplicando a desigualdade de Gronwall, segue-se que

$$\int_0^\ell \left(|\Psi_t(t,x)|^2 + |\Psi_x(t,x)|^2\right) dx \leq \frac{K_1 T}{\min\{\rho_2, b\}}\exp\left(\frac{(2k + kl + \gamma)t}{\min\{\rho_2, b\}}\right).$$

Portanto, tomando

$$T < \left\{\frac{\min\{\rho_2, b\}}{2k + kl + \gamma}, \frac{\min\{\rho_2, b\}}{k\mathrm{e}M}, \frac{\min\{\rho_2, b\}}{kl\mathrm{e}M}, \frac{\min\{\rho_2, b\}}{\gamma\mathrm{e}M}\right\} := T_{14}$$

conclui-se que

$$\begin{aligned}\|\Psi_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\Psi_x\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} &\leq \frac{1}{M}\|\tilde{\Phi}_x\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \frac{1}{M}\|\tilde{\Psi}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} \\ &\quad + \frac{1}{M}\|\tilde{W}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \frac{1}{M}\|\tilde{\Theta}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}.\end{aligned} \tag{4.63}$$

Multiplicando (4.60) por W_t, integrando sobre $[0,\ell]$ e utilizando integração por partes obtém-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell \left(\rho_1|W_t|^2 + k_0|W_x|^2\right) dx = -k_0 l\int_0^\ell \tilde{\Phi}_x W_t\, dx - kl\int_0^\ell \left(\tilde{\Phi}_x W_t + \tilde{\Psi}W_t + l\tilde{W}W_t\right) dx.$$

Assim, pela desigualdade de Young,

$$\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(\rho_1|W_t|^2 + k_0|W_x|^2\Big)\,dx \le K_2 + (k_0 l + 2kl + kl^2)\int_0^\ell |W_t|^2\,dx,$$

onde

$$K_2 = (k_0 l + kl)\|\tilde{\Phi}_x\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + kl\|\tilde{\Psi}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + kl^2\|\tilde{W}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}.$$

Somando a última desigualdade, membro a membro, com $0 \le (k_0 l + 2kl + kl^2)\|W_x(t,\cdot)\|^2_{L^2}$, resulta que

$$\frac{d}{dt}\int_0^\ell \Big(\rho_1|W_t|^2 + k_0|W_x|^2\Big)\,dx \le K_2 + (k_0 l + 2kl + kl^2)\int_0^\ell \Big(|W_t|^2 + |W_x|^2\Big)\,dx,$$

Integrando de 0 até $t \in [0,T]$, com respeito à variável t, e aplicando a desigualdade de Gronwall, segue-se que

$$\int_0^\ell \Big(|W_t(t,x)|^2 + |W_x(t,x)|^2\Big)\,dx \le \frac{K_2 T}{\min\{\rho_1, k_0\}}\exp\left(\frac{(k_0 l + 2kl + kl^2)t}{\min\{\rho_1, k_0\}}\right).$$

Portanto, tomando

$$T < \left\{\frac{\min\{\rho_1,k_0\}}{k_0 l + 2kl + kl^2}, \frac{\min\{\rho_1,k_0\}}{(k_0 l + kl)\mathrm{e}M}, \frac{\min\{\rho_1,k_0\}}{kl\mathrm{e}M}, \frac{\min\{\rho_1,k_0\}}{kl^2\mathrm{e}M}\right\} := T_{15}$$

conclui-se que

$$\begin{aligned}\|W_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|W_x\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} \le{}& \frac{1}{M}\|\tilde{\Phi}_x\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \frac{1}{M}\|\tilde{\Psi}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}\\ &+ \frac{1}{M}\|\tilde{W}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}.\end{aligned} \tag{4.64}$$

Multiplicando (4.61) por Θ, integrando sobre $[0,\ell]$ e utilizando integração por partes obtém-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell |\Theta|^2\,dx + k_1\int_0^\ell |\Theta_x|^2\,dx \le m\int_0^\ell \Psi_t\Theta_x\,dx \le m\int_0^\ell \frac{1}{\sqrt{k_1}}\Psi_t\sqrt{k_1}\Theta_x\,dx + \int_0^\ell |\Theta|^2\,dx.$$

Assim, pela desigualdade de Young,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\ell |\Theta|^2\,dx + \left(k_1 - \frac{k_1}{2}\right)\int_0^\ell |\Theta_x|^2\,dx \le \frac{m}{2k_1}\int_0^\ell |\Psi_t|^2\,dx + \int_0^\ell |\Theta|^2\,dx. \tag{4.65}$$

Consequentemente,

$$\frac{d}{dt}\int_0^\ell |\Theta|^2\,dx \le \frac{m}{k_1}\|\Psi_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + 2\int_0^\ell |\Theta|^2\,dx.$$

Integrando de 0 até $t \in [0,T]$ e aplicando a desigualdade de Gronwall, segue-se que

$$\int_0^\ell |\Theta(t,x)|^2\, dx \le \frac{m}{k_1}\|\Psi_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} T\exp(2y).$$

Portanto, tomando

$$T < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{k_1}{me}\right\} := T_{16}$$

deduz-se que

$$\|\Theta\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} \le \|\Psi_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}. \tag{4.66}$$

Usando (4.66) em (4.65) e integrando sobre $[0,T]$ conclui-se que

$$\frac{1}{2}\int_0^\ell |\Theta(T,x)|^2\, dx + \frac{k_1}{2}\int_0^T\int_0^\ell |\Theta_x|^2\, dx\, dt \le \frac{m}{2k_1}\int_0^\ell |\Psi_t|^2\, dx + 2\|\Psi_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}$$

de onde segue que

$$\|\Theta_x\|^2_{L^2(0,T;L^2)} \le \frac{m+4k_1}{k_1^2} T\|\Psi_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}.$$

Portanto, tomando

$$T < \frac{k_1^2}{m+4k_1} := T_{17}$$

resulta que

$$\|\Theta_x\|^2_{L^2(0,T;L^2)} \le \|\Psi_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}. \tag{4.67}$$

Somando (4.66) com (4.67) e usando (4.63), obtém-se

$$\begin{aligned}\|\Theta\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\Theta_x\|^2_{L^2(0,T;L^2)} \le{}& \frac{2}{M}\|\tilde{\Phi}_x\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \frac{2}{M}\|\tilde{\Psi}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}\\ &+ \frac{2}{M}\|\tilde{W}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \frac{2}{M}\|\tilde{\Theta}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}.\end{aligned} \tag{4.68}$$

Por fim, somando as desigualdades (4.62), (4.63), (4.64) e (4.68) conclui-se que

$$K_3 \le \frac{5}{M}K_4 \tag{4.69}$$

onde

$$\begin{aligned}K_3 ={}& \|\Phi_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\Phi_x\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\Psi_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\Psi_x\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|W_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}\\ &+ \|W_x\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\Theta\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\Theta_x\|^2_{L^2(0,T;L^2)}.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}K_4 ={}& \|\tilde{\Phi}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\tilde{\Phi}_x\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\tilde{\Psi}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\tilde{\Psi}_x\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\tilde{W}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}\\ &+ \|\tilde{W}_x\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\tilde{\Theta}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)}.\end{aligned}$$

Deste modo, pela desigualdade de Poincaré, para $T < \min\{T_{13}, T_{14}, T_{15}, T_{16}, T_{17}\} := \tilde{T}$ tem-se

$$d^2\big(T(\tilde{V}, \tilde{\theta}), T(\hat{V}, \hat{\theta})\big) \leq (1 + c_p)K_3 \leq (1 + c_p)\frac{5}{M}K_4 \leq (1 + c_p)\frac{5}{M}d^2\big((\tilde{V}, \tilde{\theta}), (\hat{V}, \hat{\theta})\big).$$

Tomando, então, $M^2 > 25(1 + c_p)^2 := \tilde{M}$ obtém-se o resultado desejado com

$$\lambda = \frac{\sqrt{5(1 + c_p)}}{\sqrt{M}}.$$

Resulta de (I) e (II) que, para $T < \min\{\hat{T}, \tilde{T}\}$ e $M^2 > \max\{\hat{M}, \tilde{M}\}$, o operador $B : X(M, T) \to X(M, T)$ é uma contração. Assim, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe um único $(V, \theta) \in X(M, T)$ tal que $B(V, \theta) = (V, \theta)$ e isso conclui a prova do Teorema 4.3. ■

Observação 4.5. Escrevendo

$$F(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ (\sigma_{\varphi_x}(Z) - k)\varphi_{xx} + (\sigma_\psi(Z) - k)\psi_x + (\sigma_w(Z) - kl)w_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

vê-se que o problema tratado no Teorema 4.3 pode ser posto na forma

$$\begin{cases} U_t = AU + F(U), \quad 0 < t < T, \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

onde A é o operador definido na Seção 3.1. Além disso, pela Proposição 2.92, a solução local obtida satisfaz

$$U(t) = \mathrm{e}^{tA}U_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-r)A}F(U(r))\, dr, \quad \forall\, t \in [0, T].$$

4.2 Existência Global e Decaimento Exponencial

O objetivo desta seção é mostrar que, sob algumas hipóteses, a solução local obtida no Teorema 4.3 pode ser estendida para uma solução global que decai exponencialmente. Para tanto, serão utilizadas as seguintes notações: $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1} = \|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ e, para $j = 2, 3$,

$$\mathcal{H}_j = H^j(0,\ell) \times H^{j-1}(0,\ell) \times H^j(0,\ell) \times H^{j-1}(0,\ell) \times H^j(0,\ell) \times H^{j-1}(0,\ell) \times H^j(0,\ell),$$
$$\|U\|^2_{\mathcal{H}_j} = \|\varphi\|^2_{H^j} + \|\Phi\|^2_{H^{j-1}} + \|\psi\|^2_{H^j} + \|\Psi\|^2_{H^{j-1}} + \|w\|^2_{H^j} + \|W\|^2_{H^{j-1}} + \|\theta\|^2_{H^j}.$$

A seguir, assumi-se que U_0 é pequeno na norma de $\mathcal{H}_2$ podendo, porém, ser grande na norma de $\mathcal{H}_3$. Considere, então, $\delta < 1$ (para ser fixado posteriormente) e $\mu > 1$ tais que $\|U_0\|_{\mathcal{H}_2} < \delta$ e $\|U_0\|_{\mathcal{H}_3} < \mu$. Pela continuidade de U, existem $T_0, T_1 \leq T$ tais que

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \delta, \quad \forall\, t \in [0, T_0],$$
$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_3} \leq \mu, \quad \forall\, t \in [0, T_1].$$

Tome $d_0 > \frac{1}{2\kappa}$ e $d > 1$, também para serem fixados posteriormente, e defina

$$T_m^0 = \max\left\{\tau \in [0, T];\ \|U(t)\|_{\mathcal{H}_2} \leq 2\kappa\delta d_0 \text{ para todo } t \in [0, \tau]\right\},$$
$$T_m^1 = \max\left\{\tau \in [0, T];\ \|U(t)\|_{\mathcal{H}_3} \leq d\mu \text{ para todo } t \in [0, \tau]\right\},$$

onde κ é a constante proveniente do Teorema 3.14. Observe que a equação (4.1) pode ser reescrita como

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) = \tilde{b}(Z)\varphi_{xx} + \tilde{c}(Z)\psi_x + \tilde{d}(Z)w_x, \tag{4.70}$$

onde

$$\tilde{b}(Z) = \sigma_{\varphi_x}(Z) - \sigma_{\varphi_x}(0,0,0), \quad \tilde{c}(Z) = \sigma_{\psi}(Z) - \sigma_{\psi}(0,0,0), \quad \tilde{d}(Z) = \sigma_w(Z) - \sigma_w(0,0,0).$$

Lema 4.6. *Existe uma constante positiva C tal que a solução local $U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t, \theta)$ dada pelo Teorema 4.3 satisfaz, para todo $t \in [0, T_m^0]$,*

(a) $\|U_t(t)\|^2_{\mathcal{H}_1} \leq C\|U(t)\|^2_{\mathcal{H}_2}$*;*

(b) $\|U_{tt}(t)\|^2_{\mathcal{H}_1} \leq C\|U(t)\|^2_{\mathcal{H}_3}$*;*

(c) $\|U(t)\|^2_{\mathcal{H}_2} \leq C\|U(t)\|^2_{\mathcal{H}_1} + C\|U_t(t)\|^2_{\mathcal{H}_1}$*;*

(d) $\|U(t)\|^2_{\mathcal{H}_3} \leq C\|U(t)\|^2_{\mathcal{H}_2} + C\|U_{tt}(t)\|^2_{\mathcal{H}_1}$*.*

Demonstração: Por simplicidade, escreva $U(t) = U$. Note que

$$\|U_t\|^2_{\mathcal{H}_1} \leq \|U\|^2_{\mathcal{H}_2} + \|\varphi_{tt}\|^2_{L^2} + \|\psi_{tt}\|^2_{L^2} + \|w_{tt}\|^2_{L^2} + \|\theta_t\|^2_{L^2}. \tag{4.71}$$

Além disso, pela igualdade (4.70),

$$\begin{aligned}\|\varphi_{tt}\|^2_{L^2} &= \frac{1}{\rho_1}\|\tilde{b}(Z)\varphi_{xx} + \tilde{c}(Z)\psi_x + \tilde{d}(Z)w_x + k(\varphi_x + \psi + lw)_x + k_0 l(w_x - l\varphi)\|^2_{L^2}\\ &\leq C\Big(\|\varphi_{xx}\|^2_{L^2} + \|\psi_x\|^2_{L^2} + \|w_x\|^2_{L^2} + \|\varphi\|^2_{L^2}\Big)\\ &\leq C\|U\|^2_{\mathcal{H}_2}.\end{aligned}$$

Utilizando as igualdades (4.2), (4.3) e (4.4) e empregando um argumento análogo, conclui-se que os termos $\|\psi_{tt}\|^2_{L^2}$, $\|w_{tt}\|^2_{L^2}$ e $\|\theta_t\|^2_{L^2}$ também podem ser estimados por $C\|U\|^2_{\mathcal{H}_2}$. Substituindo estas estimativas em (4.71), obtém-se o item (a). Agora, pelo item (a),

$$\begin{aligned}\|U_{tt}\|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_3}^2 + \|\varphi_{ttt}\|_{L^2}^2 + \|\varphi_{ttx}\|_{L^2}^2 + \|\psi_{ttx}\|_{L^2}^2 + \|\psi_{ttx}\|_{L^2}^2 \\ + \|w_{ttt}\|_{L^2}^2 + \|w_{ttx}\|_{L^2}^2 + \|\theta_{tt}\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{4.72}$$

Derivando a igualdade (4.70) em t, obtém-se

$$\begin{aligned}\rho_1\varphi_{ttt} &= \frac{d}{dt}\Big[\tilde{b}(Z)\varphi_{xx} + \tilde{c}(Z)\psi_x + \tilde{d}(Z)w_x\Big] + k(\varphi_x + \psi + lw)_{tx} + k_0 l(w_x - l\varphi)_t \\ &= \tilde{b}_{\varphi_x}(Z)\varphi_{tx}\varphi_{xx} + \tilde{b}_{\psi}(Z)\psi_t\varphi_{xx} + \tilde{b}_w(Z)w_t\varphi_{xx} + \tilde{c}_{\varphi_x}(Z)\varphi_{tx}\psi_x + \tilde{c}_{\psi}(Z)\psi_t\psi_x \\ &\quad + \tilde{c}_w(Z)w_t\psi_x + \tilde{d}_{\varphi_x}(Z)\varphi_{tx}w_x + \tilde{d}_{\psi}(Z)\psi_t w_x + \tilde{d}_w(Z)w_t w_x + \tilde{b}(Z)\varphi_{txx} \\ &\quad + \tilde{c}(Z)\psi_{tx} + \tilde{d}(Z)w_{tx} + k\varphi_{txx} + k\psi_{tx} + klw_{tx} + k_0 lw_{tx} + k_0 l^2\varphi_t \\ &:= I_1 + \cdots + I_{17}.\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}\|I_1\|_{L^2}^2 &\leq C\|\varphi_{tx}\varphi_{xx}\|_{L^2}^2 \leq C\|\varphi_{tx}\|_{L^\infty}^2\|\varphi_{xx}\|_{L^2}^2 \leq C\|\varphi_{tx}\|_{L^2}\|\varphi_{tx}\|_{H^1}\|\varphi_{xx}\|_{L^2}^2 \\ &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}^3\|U\|_{\mathcal{H}_3} \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}^6 + C\|U\|_{\mathcal{H}_3}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}_3}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_3}^2.\end{aligned}$$

Pelo mesmo argumento,

$$\|I_2\|_{L^2}^2, \cdots, \|I_9\|_{L^2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_3}^2.$$

Observe ainda que

$$\|I_{10} + \cdots + I_{17}\|_{L^2}^2 \leq C\Big(\|\varphi_{txx}\|_{L^2}^2 + \|\psi_{tx}\|_{L^2}^2 + \|w_{tx}\|_{L^2}^2 + \|\varphi_t\|_{L^2}^2\Big) \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_3}^2.$$

Portanto,

$$\|\varphi_{ttt}\|_{L^2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_3}^2.$$

Um argumento análogo mostra que os demais termos que aparecem em (4.72) também podem ser estimados por $C\|U\|_{\mathcal{H}_3}$. Assim, o item (b) também se verifica. Os itens (c) e (d) podem ser obtidos de maneira semelhante. ■

Observação 4.7. Tome um dado inicial U_0 que satisfaz as condições (4.10), considere o caso em que $\sigma(\varphi_x, \psi, w) = k(\varphi_x + \psi + lw)$ e suponha $b\rho_1 = \rho_2 k$ e $k = k_0$. Sejam U^1 a solução global do problema (3.1)-(3.3) e U^2 a solução local do problema (4.1)-(4.6). Pelo Teorema 3.6, U^1 é dada por $U^1(t) = \mathrm{e}^{tA}U_0$. Por outro lado, na Observação 4.5, tem-se $F(U) = 0$ de onde segue que U^2 também é dada por $U^2(t) = \mathrm{e}^{tA}U_0$. Sendo assim, U^1 e U^2 coincidem sobre $[0, T]$. Consequentemente, pelo Lema 4.6,

$$\|\mathrm{e}^{tA}U_0\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \|U^2(t)\|_{\mathcal{H}_2}^2 \leq \|U^2(t)\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \|U_t^2(t)\|_{\mathcal{H}_1}^2 = \|U^1(t)\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \|AU^1(t)\|_{\mathcal{H}_1}^2 \tag{4.73}$$

para todo $t \in [0, T_m^0]$. Mas, pelos teoremas 3.14 e 2.90,

$$\|U^1(t)\|_{\mathcal{H}_1}^2 = \|e^{tA}U_0\|_{\mathcal{H}_1}^2 \le \Big(\kappa\|U_0\|_{\mathcal{H}_1}e^{-\alpha t}\Big)^2 \le \hat{c}\Big(\kappa\|U_0\|_{\mathcal{H}_2}e^{-\alpha t}\Big)^2.$$

e

$$\|AU^1(t)\|_{\mathcal{H}_1}^2 = \|A(e^{tA}U_0)\|_{\mathcal{H}_1}^2 = \|e^{tA}(AU_0)\|_{\mathcal{H}_1}^2 \le \Big(\kappa\|AU_0\|_{\mathcal{H}_1}e^{-\alpha t}\Big)^2 \le \hat{c}\Big(\kappa\|U_0\|_{\mathcal{H}_2}e^{-\alpha t}\Big)^2.$$

Substituindo as últimas duas estimativas em (4.73), conclui-se que

$$\|e^{tA}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \le \hat{c}\kappa\|U_0\|_{\mathcal{H}_2}e^{-\alpha t}, \quad \forall\, t \in [0, T_m^0].$$

Observe que a constante $\hat{c}$ pode ser escolhida maior do que $1/\kappa$.

Lema 4.8. *Se valem (4.7)-(4.9) com $\beta = k$, então existe uma constante $c > 0$ independente de T tal que, para $\|U_0\|_{\mathcal{H}_3} \le \mu$, a solução local $U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t, \theta)$ dada pelo Teorema 4.3 satisfaz*

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_3}^2 \le c\|U_0\|_{\mathcal{H}_3}^2 e^{\left(c\hat{d}\int_0^t \|U(\tau)\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\, d\tau\right)}, \quad 0 \le t \le \min\{T_m^0, T_m^1\},$$

onde $\hat{d} = \sqrt{d\mu}^3$.

Demonstração: Multiplicando, respectivamente, (4.70), (4.2), (4.3) e (4.4) por φ_t, ψ_t, w_t e θ, somando as igualdades resultantes, integrando sobre $[0, \ell]$ e aplicando integração por partes, resulta que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \frac{\gamma k_1}{m}\int_0^\ell |\theta_x|^2\, dx &= -\int_0^\ell \frac{d}{dx}\left[\tilde{b}(Z)\right]\varphi_x\varphi_t\, dx - \int_0^\ell \frac{d}{dx}\left[\tilde{c}(Z)\right]\psi\varphi_t\, dx \\ -\int_0^\ell \frac{d}{dx}\left[\tilde{d}(Z)\right]w\varphi_t\, dx &- \int_0^\ell \tilde{b}(Z)\varphi_x\varphi_{tx}\, dx + \int_0^\ell \tilde{c}(Z)\psi_x\varphi_t\, dx + \int_0^\ell \tilde{d}(Z)w_x\varphi_t\, dx.\end{aligned}$$

Reescrevendo a antepenúltima integral, resulta que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \int_0^\ell \tilde{b}(Z)|\varphi_x|^2\, dx\right) + \frac{\gamma k_1}{m}\int_0^\ell |\theta_x|^2\, dx = -\int_0^\ell \frac{d}{dx}\left[\tilde{b}(Z)\right]\varphi_x\varphi_t\, dx \\ &\quad -\int_0^\ell \frac{d}{dx}\left[\tilde{c}(Z)\right]\psi\varphi_t\, dx - \int_0^\ell \frac{d}{dx}\left[\tilde{d}(Z)\right]w\varphi_t\, dx + \frac{1}{2}\int_0^\ell \frac{d}{dt}\left[\tilde{b}(Z)\right]|\varphi_x|^2\, dx \\ &\quad + \int_0^\ell \tilde{c}(Z)\psi_x\varphi_t\, dx + \int_0^\ell \tilde{d}(Z)w_x\varphi_t\, dx \\ &:= I_1 + \cdots + I_6.\end{aligned}$$

A seguir, todas as integrais da última igualdade serão estimadas. Utilizando a Proposição 2.71

e as desigualdades triangular e de Young, resulta que

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leq \|\tilde{b}_{\varphi_x}(Z)\varphi_{xx} + \tilde{b}_{\psi}(Z)\psi_x + \tilde{b}_w(Z)w_x\|_{L^\infty} \int_0^\ell |\varphi_x||\varphi_t| \, dx \\
&\leq C(\|\varphi_{xx}\|_{L^\infty} + \|\psi_x\|_{L^\infty} + \|w_x\|_{L^\infty}) \int_0^\ell |\varphi_x||\varphi_t| \, dx \\
&\leq C \left(\|\varphi_{xx}\|_{L^2}^{1/2}\|\varphi_{xx}\|_{H^1}^{1/2} + \|\psi_x\|_{L^2}^{1/2}\|\psi_x\|_{H^1}^{1/2} + \|w_x\|_{L^2}^{1/2}\|w_x\|_{H^1}^{1/2} \right) \int_0^\ell |\varphi_x||\varphi_t| \, dx \\
&\leq C \left(\|\varphi\|_{H^2}^{1/2}\|\varphi\|_{H^3}^{1/2} + \|\psi\|_{H^2}^{1/2}\|\psi\|_{H^3}^{1/2} + \|w\|_{H^2}^{1/2}\|w\|_{H^3}^{1/2} \right) \int_0^\ell |\varphi_x||\varphi_t| \, dx \\
&\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2} \int_0^\ell \left(|\varphi_x|^2 + |\varphi_t|^2 \right) dx.
\end{aligned}
$$

Um cálculo inteiramente análogo mostra que

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2} \int_0^\ell \left(|\psi|^2 + |\varphi_t|^2 \right) dx, \\
I_3 &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2} \int_0^\ell \left(|w|^2 + |\varphi_t|^2 \right) dx, \\
I_4 &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2} \int_0^\ell |\varphi_x|^2 \, dx.
\end{aligned}
$$

Agora, utilizando o Teorema do Valor Médio, conclui-se que existe $\xi \in [0, 1)$ tal que

$$
\begin{aligned}
I_5 &\leq \|\tilde{c}(Z)\|_{L^\infty} \int_0^\ell \psi_x\varphi_t \, dx \\
&\leq \Big(\|\sigma_{\psi\varphi_x}(\xi Z)\varphi_x\|_{L^\infty} + \|\sigma_{\psi\psi}(\xi Z)\psi\|_{L^\infty} + \|\sigma_{\psi w}(\xi Z)w\|_{L^\infty} \Big) \int_0^\ell |\psi_x||\varphi_t| \, dx \\
&\leq C\Big(\|\varphi_x\|_{L^\infty} + \|\psi\|_{L^\infty} + \|w\|_{L^\infty} \Big) \int_0^\ell \left(|\psi_x|^2 + |\varphi_t|^2 \right) dx \\
&\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2} \int_0^\ell \left(|\psi_x|^2 + |\varphi_t|^2 \right) dx.
\end{aligned}
$$

Aplicando um argumento similar, deduz-se que

$$
I_6 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2} \int_0^\ell \left(|w_x|^2 + |\varphi_t|^2 \right) dx.
$$

Decorre das estimativas que acabam de ser feitas que

$$
I_1 + \cdots + I_6 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2}\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2.
$$

Consequentemente,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|U(\tau)\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \int_0^\ell \tilde{b}(Z(\tau,x))|\varphi_x(\tau,x)|^2\,dx\right) + \frac{\gamma k_1}{m}\int_0^\ell |\theta_x(\tau,x)|^2\,dx$$
$$\leq C\|U(\tau)\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|U(\tau)\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2}\|U(\tau)\|_{\mathcal{H}_1}^2.$$

Integrando ambos os lados da última desigualdade sobre $[0,t]$, com respeito à variavável τ, segue-se que

$$\begin{aligned}
&\|U(t)\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \int_0^\ell \tilde{b}(Z(t,x))|\varphi_x(t,x)|^2\,dx + \frac{2\gamma k_1}{m}\int_0^t\int_0^\ell |\theta_x(\tau,x)|^2\,dx\,d\tau \\
&\quad\leq \|U(0)\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \int_0^\ell \tilde{b}(Z(0,x))|\varphi_x(0,x)|^2\,dx + C\int_0^t \|U(\tau)\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|U(\tau)\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2}\|U(\tau)\|_{\mathcal{H}_1}^2\,d\tau \\
&\quad\leq C\|U(0)\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C\int_0^t \|U(\tau)\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|U(\tau)\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2}\|U(\tau)\|_{\mathcal{H}_1}^2\,d\tau.
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq C\|U_0\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C\int_0^t \|U(\tau)\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|U(\tau)\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2}\|U(\tau)\|_{\mathcal{H}_1}^2\,d\tau. \tag{4.74}$$

Agora, derivando as equações (4.70), (4.2), (4.3) e (4.4) com respeito a t e multiplicando, respectivamente, por φ_{tt}, ψ_{tt}, w_{tt} e θ_t resulta que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U_t\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \frac{\gamma k_1}{m}\int_0^\ell |\theta_{tx}|^2\,dx = \int_0^\ell \frac{d}{dt}\left[\tilde{b}(Z)\right]\varphi_{xx}\varphi_{tt}\,dx + \int_0^\ell \frac{d}{dt}\left[\tilde{c}(Z)\right]\psi_x\varphi_{tt}\,dx \\
&\quad+ \int_0^\ell \frac{d}{dt}\left[\tilde{d}(Z)\right]w_x\varphi_{tt}\,dx - \int_0^\ell \tilde{b}(Z)\varphi_{tx}\varphi_{ttx}\,dx + \int_0^\ell \tilde{c}(Z)\psi_{tx}\varphi_{tt}\,dx + \int_0^\ell \tilde{d}(Z)w_{tx}\varphi_{tt}\,dx.
\end{aligned}$$

Reescrevendo a antepenúltima integral, obtém-se

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|U_t\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \int_0^\ell \tilde{b}(Z)|\varphi_{tx}|^2\,dx\right) + \frac{\gamma k_1}{m}\int_0^\ell |\theta_{tx}|^2\,dx = \int_0^\ell \frac{d}{dt}\left[\tilde{b}(Z)\right]\varphi_{xx}\varphi_{tt}\,dx \\
&\quad+ \int_0^\ell \frac{d}{dt}\left[\tilde{c}(Z)\right]\psi_x\varphi_{tt}\,dx + \int_0^\ell \frac{d}{dt}\left[\tilde{d}(Z)\right]w_x\varphi_{tt}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^\ell \frac{d}{dt}\left[\tilde{b}(Z)\right]|\varphi_{tx}|^2\,dx \\
&\quad+ \int_0^\ell \tilde{c}(Z)\psi_{tx}\varphi_{tt}\,dx + \int_0^\ell \tilde{d}(Z)w_{tx}\varphi_{tt}\,dx \\
&:= I_7 + \cdots + I_{12}.
\end{aligned} \tag{4.75}$$

Um cálculo análogo ao que já foi feito mostra que

$$
\begin{aligned}
I_7 &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2}\int_0^\ell \Big(|\varphi_{xx}|^2+|\varphi_{tt}|^2\Big)\,dx,\\
I_8 &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2}\int_0^\ell \Big(|\psi_{x}|^2+|\varphi_{tt}|^2\Big)\,dx,\\
I_9 &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2}\int_0^\ell \Big(|w_{x}|^2+|\varphi_{tt}|^2\Big)\,dx,\\
I_{10} &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2}\int_0^\ell |\varphi_{tx}|^2\,dx,\\
I_{11} &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2}\int_0^\ell \Big(|\psi_{tx}|^2+|\varphi_{tt}|^2\Big)\,dx,\\
I_{12} &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2}\int_0^\ell \Big(|w_{tx}|^2+|\varphi_{tt}|^2\Big)\,dx.
\end{aligned}
$$

Portanto, $I_7+\cdots+I_{12}\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2}\Big(\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2+\|U_t\|_{\mathcal{H}_1}^2\Big)$. Substituindo este resultado em (4.75) e integrando sobre $[0,t]$ obtém-se

$$
\|U_t(t)\|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq C\|U_t(0)\|_{\mathcal{H}_1}^2 + C\int_0^t \|U(\tau)\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|U(\tau)\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2}\Big(\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2+\|U_t\|_{\mathcal{H}_1}^2\Big)\,d\tau. \tag{4.76}
$$

Em virtude do Lema 4.6, segue-se de (4.74) e (4.76) que

$$
\|U(t)\|_{\mathcal{H}_2}^2 \leq C\|U_0\|_{\mathcal{H}_2}^2 + C\int_0^t \|U(\tau)\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|U(\tau)\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2}\|U(\tau)\|_{\mathcal{H}_2}^2\,d\tau. \tag{4.77}
$$

Por fim, derivando duas vezes as equações (4.70), (4.2), (4.3) e (4.4) com respeito a t e multiplicando, respectivamente, por φ_{ttt}, ψ_{ttt}, w_{ttt} e θ_{tt} resulta que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U_{tt}\|_{\mathcal{H}_1}^2 &= \int_0^\ell \frac{d^2}{dt^2}\Big[\tilde{b}(Z)\Big]\varphi_{xx}\varphi_{ttt}\,dx + \int_0^\ell \frac{d^2}{dt^2}\Big[\tilde{c}(Z)\Big]\psi_x\varphi_{ttt}\,dx + \int_0^\ell \frac{d^2}{dt^2}\Big[\tilde{d}(Z)\Big]w_x\varphi_{ttt}\,dx\\
&+\int_0^\ell \tilde{d}(Z)w_{ttx}\varphi_{ttt}\,dx - \int_0^\ell \tilde{b}(Z)\varphi_{ttx}\varphi_{tttx}\,dx + \int_0^\ell \tilde{c}(Z)\psi_{ttx}\varphi_{ttt}\,dx - \frac{\gamma k_1}{m}\int_0^\ell |\theta_{ttx}|^2\,dx.
\end{aligned}
$$

Reescrevendo a antepenúltima integral, obtém-se

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|U_{tt}\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \int_0^\ell \tilde{b}(Z)|\varphi_{ttx}|^2\,dx\Big) + \frac{\gamma k_1}{m}\int_0^\ell |\theta_{ttx}|^2\,dx = \int_0^\ell \frac{d^2}{dt^2}\Big[\tilde{b}(Z)\Big]\varphi_{xx}\varphi_{ttt}\,dx\\
&\quad+\int_0^\ell \frac{d^2}{dt^2}\Big[\tilde{c}(Z)\Big]\psi_x\varphi_{ttt}\,dx + \int_0^\ell \frac{d^2}{dt^2}\Big[\tilde{d}(Z)\Big]w_x\varphi_{ttt}\,dx\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_0^\ell \frac{d}{dt}\Big[\tilde{b}(Z)\Big]|\varphi_{ttx}|^2\,dx + \int_0^\ell \tilde{c}(Z)\psi_{ttx}\varphi_{ttt}\,dx + \int_0^\ell \tilde{d}(Z)w_{ttx}\varphi_{ttt}\,dx\\
&:= I_{13}+\cdots+I_{18}.
\end{aligned} \tag{4.78}
$$

Um cálculo análogo ao que já foi feito mostra que

$$\begin{aligned}
I_{16} &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2}\int_0^\ell |\varphi_{ttx}|^2\,dx,\\
I_{17} &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2}\int_0^\ell \Big(|\psi_{ttx}|^2+|\varphi_{ttt}|^2\Big)\,dx,\\
I_{18} &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2}\int_0^\ell \Big(|w_{ttx}|^2+|\varphi_{ttt}|^2\Big)\,dx.
\end{aligned}$$

Sendo assim,

$$I_{16}+I_{17}+I_{18} \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2}\|U_{tt}\|_{\mathcal{H}_1}^2. \tag{4.79}$$

Para estimar I_{13} note que

$$\begin{aligned}
I_{13} = &\int_0^\ell \frac{d}{dt}\Big[\tilde{b}_{\varphi_x}(Z)\Big]\varphi_{tx}\varphi_{xx}\varphi_{ttt}\,dx + \int_0^\ell \tilde{b}_{\varphi_x}(Z)\varphi_{ttx}\varphi_{xx}\varphi_{ttt}\,dx + \int_0^\ell \frac{d}{dt}\Big[\tilde{b}_{\psi}(Z)\Big]\psi_t\varphi_{xx}\varphi_{ttt}\,dx\\
&+\int_0^\ell \tilde{b}_{\psi}(Z)\psi_{tt}\varphi_{xx}\varphi_{ttt}\,dx + \int_0^\ell \frac{d}{dt}\Big[\tilde{b}_{w}(Z)\Big]w_t\varphi_{xx}\varphi_{ttt}\,dx + \int_0^\ell \tilde{b}_{w}(Z)w_{tt}\varphi_{xx}\varphi_{ttt}\,dx\\
&:= I_{13.1}+\cdots+I_{13.6}.
\end{aligned}$$

Para estimar $I_{13.1}$ observe que

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{d}{dt}\Big[\tilde{b}_{\varphi_x}(Z)\Big]\right\|_{L^\infty} &\leq \|\tilde{b}_{\varphi_x\varphi_x}(Z)\varphi_{tx}\|_{L^\infty} + \|\tilde{b}_{\varphi_x\psi}(Z)\psi_t\|_{L^\infty} + \|\tilde{b}_{\varphi_x w}(Z)w_t\|_{L^\infty}\\
&\leq C\Big[\|\varphi_{tx}\|_{H^1}+\|\psi_t\|_{H^1}+\|w_t\|_{H^1}\Big]\\
&\leq C\|U\|_{\mathcal{H}_3}\\
&\leq Cd\mu.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
I_{13.1} &\leq C\left\|\frac{d}{dt}\Big[\tilde{b}_{\varphi_x}(Z)\Big]\right\|_{L^\infty}\|\varphi_{xx}\|_{L^\infty}\int_0^\ell \Big(\varphi_{tx}^2+\varphi_{ttt}^2\Big)\,dx\\
&\leq Cd\mu\|U\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2}\int_0^\ell \Big(\varphi_{tx}^2+\varphi_{ttt}^2\Big)\,dx.
\end{aligned}$$

O termo $I_{13.2}$ pode ser tratado com o mesmo argumento utilizado na estimativa do termo I_1:

$$I_{13.2} \leq \|\tilde{b}_{\varphi_x}(Z)\varphi_{xx}\|_{L^\infty}\int_0^\ell \varphi_{ttx}\varphi_{ttt}\,dx \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2}\int_0^\ell \Big(\varphi_{ttx}^2+\varphi_{ttt}^2\Big)\,dx.$$

O mesmo raciocínio pode ser aplicado aos termos $I_{13.3}$, ..., $I_{13.6}$. Assim obtém-se

$$I_{13} \leq Cd\mu\|U\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2}\Big(\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2+\|U_{tt}\|_{\mathcal{H}_1}^2\Big).$$

Similarmente, a mesma estimativa pode ser obtida para os termos I_{14} e I_{15} de modo que

$$I_{13} + I_{14} + I_{15} \leq Cd\mu \|U\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2} \Big(\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \|U_{tt}\|_{\mathcal{H}_1}^2 \Big). \tag{4.80}$$

Substituindo (4.79) e (4.80) em (4.78) e integrando sobre $[0, t]$ conclui-se que

$$\begin{aligned} \|U_{tt}(t)\|_{\mathcal{H}_1}^2 &\leq C\|U_{tt}(0)\|_{\mathcal{H}_1}^2 \\ &\quad + Cd\mu \int_0^t \|U(\tau)\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2} \|U(\tau)\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2} \Big(\|U(\tau)\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \|U_{tt}(\tau)\|_{\mathcal{H}_1}^2 \Big)\, d\tau. \end{aligned} \tag{4.81}$$

Novamente pelo Lema 4.6, segue-se de (4.77) e (4.81) que

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_3}^2 \leq C\|U_0\|_{\mathcal{H}_3}^2 + Cd\mu \int_0^t \|U(\tau)\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2} \|U(\tau)\|_{\mathcal{H}_3}^{1/2} \|U(\tau)\|_{\mathcal{H}_3}^2 \, d\tau.$$

Assim, o resultado desejado é obtido pela desigualdade de Gronwall. ∎

Lema 4.9. *Seja $U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t, \theta)$ a solução local dada pelo Teorema 4.3. Se $b\rho_1 = \rho_2 k$, $k = k_0$ e valem (4.8) e (4.9), então existe uma constante $c > 1$ tal que*

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \hat{c}\kappa \|U_0\|_{\mathcal{H}_2} \mathrm{e}^{-\alpha t} + c \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-r)} \|U(r)\|_{\mathcal{H}_2}^2 \|U(r)\|_{\mathcal{H}_3} \, dr, \quad \forall\, t \in [0, T_m^0],$$

onde $\hat{c}$ é a constante proveniente da Observação 4.7.

Demonstração: Resulta da Observação 4.5 que

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \|\mathrm{e}^{tA} U_0\|_{\mathcal{H}_2} + \int_0^t \|\mathrm{e}^{(t-r)A} F(U(r))\|_{\mathcal{H}_2} \, dr.$$

E, como $U_0, F(U(r)) \in D(A)$, segue-se da Observação 4.7 que

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \hat{c}\kappa \mathrm{e}^{-\alpha t} \|U_0\|_{\mathcal{H}_2} + \hat{c}\kappa \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-r)} \|F(U(r))\|_{\mathcal{H}_2} \, dr. \tag{4.82}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} \|F(U)\|_{\mathcal{H}_2} &= \|\tilde{b}(Z)\varphi_{xx} + \tilde{c}(Z)\psi_x + \tilde{d}(Z)w_x\|_{H^1} \\ &\leq \|\tilde{b}(Z)\varphi_{xx}\|_{L^2} + \|\tilde{c}(Z)\psi_x\|_{L^2} + \|\tilde{d}(Z)w_x\|_{L^2} + \|\tilde{b}(Z)\varphi_{xxx}\|_{L^2} \\ &\quad + \|\tilde{b}_{\varphi_x}(Z)\varphi_{xx}^2\|_{L^2} + \|\tilde{b}_\psi(Z)\psi_x\varphi_{xx}\|_{L^2} + \|\tilde{b}_w(Z)w_x\varphi_{xx}\|_{L^2} \\ &\quad + \|\tilde{c}(Z)\psi_{xx}\|_{L^2} + \|\tilde{c}_{\varphi_x}(Z)\varphi_{xx}\psi_x\|_{L^2} + \|\tilde{c}_\psi(Z)\psi_x^2\|_{L^2} \\ &\quad + \|\tilde{c}_w(Z)w_x\psi_x\|_{L^2} + \|\tilde{d}(Z)w_{xx}\|_{L^2} + \|\tilde{d}_{\varphi_x}(Z)\varphi_{xx}w_x\|_{L^2} \\ &\quad + \|\tilde{d}_\psi(Z)\psi_x w_x\|_{L^2} + \|\tilde{d}_w(Z)w_x^2\|_{L^2} \\ &:= I_1 + \cdots + I_{15}. \end{aligned} \tag{4.83}$$

Observe que, pelo Teorema do Valor Médio e pela Proposição 2.71,

$$\begin{aligned}
I_1 &\le \|\tilde{b}(Z)\|_{L^\infty}\|\varphi_{xx}\|_{L^2}\\
&\le \Big(\|\sigma_{\varphi_x\varphi_x}(\xi_1 Z)\varphi_x\|_{L^\infty}+\|\sigma_{\varphi_x\psi}(\xi_1 Z)\psi\|_{L^\infty}+\|\sigma_{\varphi_x w}(\xi_1 Z)w\|_{L^\infty}\Big)\|\varphi_{xx}\|_{L^2}\\
&\le \Big(\|\sigma_{\varphi_x\varphi_x}(\xi_1 Z)\|_{L^\infty}\|\varphi_x\|_{L^\infty}+\|\sigma_{\varphi_x\psi}(\xi_1 Z)\|_{L^\infty}\|\psi\|_{L^\infty}+\|\sigma_{\varphi_x w}(\xi_1 Z)\|_{L^\infty}\|w\|_{L^\infty}\Big)\|U\|_{\mathcal{H}_3}\\
&\le \Big(\|\sigma_{\varphi_x\varphi_x}(\xi_1 Z)\|_{L^\infty}+\|\sigma_{\varphi_x\psi}(\xi_1 Z)\|_{L^\infty}+\|\sigma_{\varphi_x w}(\xi_1 Z)\|_{L^\infty}\Big)\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}\\
&:= \Big(I_{1.1}+I_{1.2}+I_{1.3}\Big)\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
I_{1.1} &= \|\sigma_{\varphi_x\varphi_x}(\xi_1 Z)-\sigma_{\varphi_x\varphi_x}(0,0,0)\|_{L^\infty}\\
&\le \|\sigma_{\varphi_x\varphi_x\varphi_x}(\xi_2\xi_1 Z)(\xi_1\varphi_x)\|_{L^\infty}+\|\sigma_{\varphi_x\varphi_x\psi}(\xi_2\xi_1 Z)(\xi_1\psi)\|_{L^\infty}+\|\sigma_{\varphi_x\varphi_x w}(\xi_2\xi_1 Z)(\xi_1 w)\|_{L^\infty}\\
&\le C\Big(\|\varphi_x\|_{L^\infty}+\|\psi\|_{L^\infty}+\|w\|_{L^\infty}\Big)\\
&\le C\|U\|_{\mathcal{H}_2}.
\end{aligned}$$

Com o mesmo argumento vê-se que $I_{1.2},\ I_{1.3}\le C\|U\|_{\mathcal{H}_2}$ e, portanto,

$$I_1\le C\|U\|^2_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}.$$

Analogamente,

$$I_2,\ I_3,\ I_4,\ I_8,\ I_{12}\le C\|U\|^2_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}.$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned}
I_5 &\le \|\tilde{b}_{\varphi_x}(Z)\|_{L^\infty}\|\varphi_{xx}\|_{L^\infty}\|\varphi_{xx}\|_{L^2}\\
&\le \|\tilde{b}_{\varphi_x}(Z)\|_{L^\infty}\|\varphi_{xx}\|^{1/2}_{L^2}\|\varphi_{xx}\|^{1/2}_{H^1}\|\varphi_{xx}\|_{L^2}\\
&\le \|\tilde{b}_{\varphi_x}(Z)\|_{L^\infty}\|U\|^{1/2}_{\mathcal{H}_3}\|U\|^{1/2}_{\mathcal{H}_3}\|U\|_{\mathcal{H}_2}\\
&\le \Big(\|\sigma_{\varphi_x\varphi_x\varphi_x}(\xi_3 Z)\varphi_x\|_{L^\infty}+\|\sigma_{\varphi_x\varphi_x\psi}(\xi_3 Z)\psi\|_{L^\infty}+\|\sigma_{\varphi_x\varphi_x w}(\xi_3 Z)w\|_{L^\infty}\Big)\|U\|_{\mathcal{H}_3}\|U\|_{\mathcal{H}_2}\\
&\le C\Big(\|\varphi_x\|_{L^\infty}+\|\psi\|_{L^\infty}+\|w\|_{L^\infty}\Big)\|U\|_{\mathcal{H}_3}\|U\|_{\mathcal{H}_2}\\
&\le C\|U\|^2_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}.
\end{aligned}$$

De modo similar, conclui-se que

$$I_6,\ I_7,\ I_9,\ I_{10},\ I_{11},\ I_{13},\ I_{14},\ I_{15}\le C\|U\|^2_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}.$$

Assim, de (4.83) resulta que

$$\|F(U)\|_{\mathcal{H}_2}\le c\|U\|^2_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_3}. \tag{4.84}$$

Substituindo (4.84) em (4.82), obtém-se o resultado desejado. ∎

Dado $t \in [0, T]$, defina

$$M_2(t) := \sup_{0 \leq s \leq t} \left(\mathrm{e}^{\alpha s} \|U(s)\|_{\mathcal{H}_2} \right).$$

Note que $\|U(s)\|_{\mathcal{H}_2} \leq M_2(t)\mathrm{e}^{-\alpha s}$ para todo $s \in [0, t]$ e, consequentemente,

$$\int_0^t \|U(s)\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2} \, ds \leq \int_0^t \sqrt{M_2(t)} \mathrm{e}^{-\alpha\tau/2} \, d\tau \leq \frac{2\sqrt{M_2(t)}}{\alpha}. \tag{4.85}$$

Lema 4.10. *Seja $U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t, \theta)$ a solução local dada pelo Teorema 4.3. Se $b\rho_1 = \rho_2 k$, $k = k_0$ e valem (4.7)-(4.9) com $\beta = k$, então existem $M_0, \delta > 0$ (independentes de T) tais que, para $\|U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \delta$, tem-se*

$$M_2(t) \leq M_0, \quad \forall\, t \in [0, T_m^1].$$

Demonstração: Decorre do Lema 4.8 e do Lema 4.9 que, para $0 \leq s \leq t \leq \min\{T_m^0, T_m^1\}$,

$$\|U(s)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \hat{c}\kappa \|U_0\|_{\mathcal{H}_2} \mathrm{e}^{-\alpha s} + c \int_0^s \mathrm{e}^{-\alpha(s-r)} \|U(r)\|_{\mathcal{H}_2}^2 \|U_0\|_{\mathcal{H}_3} \mathrm{e}^{\left(c\hat{d} \int_0^r \|U(\tau)\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2} \, d\tau \right)} \, dr.$$

Assim, para $\|U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \delta$ (δ a ser determinado posteriormente), obtém-se

$$\begin{aligned} \|U(s)\|_{\mathcal{H}_2} &\leq \hat{c}\kappa \|U_0\|_{\mathcal{H}_2} \mathrm{e}^{-\alpha s} + c \int_0^s \mathrm{e}^{-\alpha(s-r)} \|U(r)\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2} \|U(r)\|_{\mathcal{H}_2}^{3/2} \|U_0\|_{\mathcal{H}_3} \mathrm{e}^{\left(c\hat{d} \int_0^r \|U(\tau)\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2} \, d\tau \right)} \, dr \\ &\leq \hat{c}\kappa\delta \mathrm{e}^{-\alpha s} + c\delta^{1/2} \mu \mathrm{e}^{\left(c\hat{d} \int_0^s \|U(\tau)\|_{\mathcal{H}_2}^{1/2} \, d\tau \right)} \int_0^s \mathrm{e}^{-\alpha(s-r)} \|U(r)\|_{\mathcal{H}_2}^{3/2} \, dr. \end{aligned}$$

Tendo em vista (4.85), resulta que

$$\|U(s)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \hat{c}\kappa\delta \mathrm{e}^{-\alpha s} + c\delta^{1/2} \mu \mathrm{e}^{\left(c\hat{d}\sqrt{M_2(s)} \right)} M_2(s)^{3/2} \int_0^s \mathrm{e}^{-\alpha(s-r)} \mathrm{e}^{-3\alpha r/2} \, dr.$$

Multiplicando a última desigualdade por $\mathrm{e}^{\alpha s}$ e tomando o supremo, com s variando em $[0, t]$, segue-se que

$$\begin{aligned} M_2(t) &\leq \hat{c}\kappa\delta + c\delta^{1/2} \mu \mathrm{e}^{\left(c\hat{d}\sqrt{M_2(t)} \right)} M_2(t)^{3/2} \sup_{0 \leq s \leq t} \left(\mathrm{e}^{\alpha s} \int_0^s \mathrm{e}^{-\alpha(s-r)} \mathrm{e}^{-3\alpha r/2} \, dr \right) \\ &< \hat{c}\kappa\delta + c\delta^{1/2} \mu \mathrm{e}^{\left(c\hat{d}\sqrt{M_2(t)} \right)} M_2(t)^{3/2} \sup_{0 \leq s < \infty} \left(\mathrm{e}^{\alpha s} \int_0^s \mathrm{e}^{-\alpha(s-r)} \mathrm{e}^{-3\alpha r/2} \, dr \right). \end{aligned}$$

Assim, como

$$\sup_{0 \leq s < \infty} \left(\mathrm{e}^{\alpha s} \int_0^s \mathrm{e}^{-\alpha(s-r)} \mathrm{e}^{-3\alpha r/2} \, dr \right) = \lim_{s \to \infty} \left(\int_0^s \mathrm{e}^{-\alpha r/2} \, dr \right) \leq \frac{2\mathrm{e}}{\alpha} < \infty,$$

conclui-se que

$$M_2(t) < \hat{c}\kappa\delta + c\delta^{1/2}\mu \mathrm{e}^{\left(c\hat{d}\sqrt{M_2(t)}\right)} M_2(t)^{3/2} \tag{4.86}$$

para todo t satisfazendo $0 \leq t \leq \min\{T_m^0, T_m^1\}$.

Defina $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ colocando $f(x) = \hat{c}^2\kappa\delta + c\hat{c}\delta^{1/2}\mu \mathrm{e}^{c\hat{d}\sqrt{x}} x^{3/2} - \hat{c}x$. Note que, para δ suficientemente pequeno, f possui uma raiz positiva. De fato, $f(0) > 0$ e, tomando

$$\delta < \frac{1}{\left(\hat{c}\kappa + c\mu \mathrm{e}^{c\hat{d}}\right)^2},$$

obtém-se $f(1) < 0$ de modo que, pelo Teorema do Valor Intermediário (TVI), existe $x_0 > 0$ tal que $f(x_0) = 0$. E como o conjunto das raízes de f é fechado (contendo, portanto, seu ínfimo) existe uma raiz M_0 que é a menor de todas. Observe que $M_2(0) \leq M_0$. De fato, como $\delta < 1$ e $f(M_0) = 0$ tem-se

$$\hat{c}^2\kappa\delta + c\hat{c}\delta\mu \mathrm{e}^{c\hat{d}\sqrt{M_0}} M_0^{3/2} \leq \hat{c}^2\kappa\delta + c\hat{c}\delta^{1/2}\mu \mathrm{e}^{c\hat{d}\sqrt{M_0}} M_0^{3/2} = \hat{c}M_0.$$

Logo, como $\hat{c} > 1/\kappa$,

$$M_2(0) = \|U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \delta \leq \frac{\hat{c}M_0}{\hat{c}^2\kappa + c\hat{c}\mu \mathrm{e}^{c\hat{d}\sqrt{M_0}} M_0^{3/2}} \leq M_0.$$

Afirmação: $M_2(t) \leq M_0$ para todo t satisfazendo $0 \leq t \leq \min\{T_m^0, T_m^1\}$. Com efeito, pela continuidade da aplicação $t \mapsto M_2(t)$, se existe t_0 entre 0 e $\min\{T_m^0, T_m^1\}$ com $M_2(t_0) > M_0$ então (novamente pelo TVI) existe t_1 entre 0 e $\min\{T_m^0, T_m^1\}$ tal que $M_0 = M_2(t_1)$. Mas isto contradiz o fato de M_0 ser raiz de f, pois a desigualdade (4.86) acarreta que $f\big(M_2(t_1)\big) > 0$.

Assim, para concluir a demonstração basta mostrar que $T_m^1 \leq T_m^0$. Suponha $T_m^1 > T_m^0$. Fixando $d_0 = \hat{c}$ e tomando δ tal que

$$\delta \mathrm{e}^{c\hat{d}\sqrt{2\kappa\delta\hat{c}}} < \frac{\hat{c}^2\kappa}{(2\kappa)^{3/2}\hat{c}^{5/2}c\mu},$$

conclui-se que $f(2\kappa\delta d_0) < 0$. Consequentemente, $M_0 < 2\kappa\delta d_0$ (pois, como M_0 é a menor raiz de f e $f(0) > 0$, f é positiva à esquerda de M_0). Segue-se disto e da afirmação acima que

$$\|U(T_m^0)\|_{\mathcal{H}_2} \leq M_2(T_m^0)\mathrm{e}^{-\alpha T_m^0} \leq M_2(T_m^0) \leq M_0 < 2\kappa\delta d_0.$$

Utilizando a permanência de sinal da aplicação contínua $t \mapsto \big(\|U(t)\|_{\mathcal{H}_2} - 2\kappa\delta d_0\big)$, conclui-se que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_2} \leq 2\kappa\delta d_0, \quad \forall\, t \in [0, T_m^0 + \varepsilon].$$

Mas isto contraria a maximalidade de T_m^0. Logo $T_m^1 \leq T_m^0$ e a demonstração está completa. ■

Teorema 4.11. *Se $b\rho_1 = \rho_2 k$, $k = k_0$ e as condições (4.7)-(4.10) se verificam com $\beta = k$, então existe $\delta > 0$ tal que, para $\|U_0\|_{\mathcal{H}_2} < \delta$, o problema (4.1)-(4.4) com condições de fronteira (3.2) e condições iniciais (3.3) possui uma única solução global $U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t, \theta)$ satisfazendo*

$$\varphi, \psi, w \in \bigcap_{j=0}^{3} C^j\left([0,\infty), H^{3-j}(0,\ell)\right),$$

$$\theta \in \bigcap_{j=0}^{1} C^j\left([0,\infty), H^{3-j}(0,\ell)\right) \cap C^2\left([0,\infty), L^2(0,\ell)\right).$$

Além disso, existe uma constante C_0 tal que $\|U(t)\|_{\mathcal{H}_2} \le C_0 \mathrm{e}^{-\alpha t}$ para todo $t \ge 0$ (onde α é a constante proveniente do Teorema 3.14).

Demonstração: Seja $U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t, \theta)$ a solução local dada pelo Teorema 4.3. Do Lema 4.8, de (4.85) e do Lema 4.10, obtém-se

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_3} \le c\|U_0\|_{\mathcal{H}_3} \mathrm{e}^{\left(c_1 \hat{d}\sqrt{M_2(t)}\right)} \le c\mu \mathrm{e}^{\left(c_1 \hat{d}\sqrt{M_0}\right)}, \quad \forall\, t \in [0, T_m^1].$$

Tome δ suficientemente pequeno de modo que se tenha $f\left(\frac{1}{c_1^2 \hat{d}^6}\right) < 0$. Então, $M_0 < \frac{1}{c_1^2 \hat{d}^6}$ de onde segue que $c_1 \hat{d}\sqrt{M_0} < 1$. Assim,

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_3} < c\mu \mathrm{e}, \quad \forall\, t \in [0, T_m^1]. \tag{4.87}$$

Fixando $d = 2c\mathrm{e} > 1$, deduz-se que T_m^1 é o maior número satisfazendo

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_3} \le 2c\mu \mathrm{e}, \quad \forall\, t \in [0, T_m^1].$$

Isto acarreta que $T_m^1 = T$. De fato, suponha $T_m^1 < T$. Então, pela continuidade da aplicação $t \mapsto \left(\|U(t)\|_{\mathcal{H}_3} - c\mu\mathrm{e}\right)$ e pela desigualdade (4.87) conclui-se (via permanência de sinal) que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_3} < c\mu\mathrm{e} < 2c\mu\mathrm{e}, \quad \forall\, t \in [0, T_m^1 + \varepsilon].$$

Mas isto contraria a maximalidade de T_m^1. Logo $T_m^1 = T$ e, portanto,

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_3} < C, \quad \forall\, t \in [0, T],$$

onde $C = c\mu\mathrm{e}$ independe de T. Isto mostra que a solução local pode ser estendida para uma solução global. Por fim, o decaimento exponencial de $\|U(t)\|_{\mathcal{H}_2}$ é uma consequência imediata do Lema 4.10. ∎

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, estudou-se um sistema de Bresse com uma não linearidade presente na equação do movimento vertical, uma dissipação térmica agindo na equação do cisalhamento, condições de Neumann nulas para os deslocamentos angular e longitudinal e condições de Dirichlet nulas para o deslocamento vertical e para a variação de temperatura.

A principal contribuição deste trabalho (Teorema 4.11) foi estabelecer uma condição suficiente, dependente tanto dos dados inicias quanto dos coeficientes do sistema, para garantir a existência de uma solução global exponencialmente estável.

Em trabalhos futuros, pode-se investigar se é possível estender tal resultado para um sistema de Bresse termoelástico com não linearidades presentes nas demais equações. Pode-se, também, estudar sistemas de Bresse não lineares com outros tipos de dissipações ou outras condições de fronteira.

A APÊNDICE

Na Seção 3.1 foi mostrado que se $l < \frac{1}{\sqrt{2}\ell}$, então as normas $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ e $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ são equivalentes. Como consequência, concluiu-se que o espaço $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ é completo. A seguir será mostrado que isto é verdade em geral, independentemente da relação entre l e ℓ. Entretanto, o caminho percorrido será inverso: inicialmente será mostrado que $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ é completo e, como consequência, resultará que as normas são equivalentes.

Lema A.1. *Dadas $F, G \in L^2(0,\ell)$ e $H \in L^2_*(0,\ell)$, o sistema*

$$\begin{aligned} \varphi_x + \psi + lw &= H, \\ w_x - l\varphi &= F, \\ \psi_x &= G, \end{aligned}$$

possui uma solução $(\varphi, \psi, w) \in H^1_0(0,\ell) \times H^1_*(0,\ell) \times H^1_*(0,\ell)$.

Demonstração: Defina

$$\psi(x) = \int_0^x G(s)\, ds - \frac{1}{\ell}\int_0^\ell \int_0^s G(r)\, dr\, ds.$$

Note que

$$\int_0^\ell \psi(x)\, dx = \int_0^\ell \int_0^x G(s)\, ds\, dx - \frac{1}{\ell}\int_0^\ell \int_0^\ell \int_0^s G(r)\, dr\, ds\, dx = 0.$$

Além disso, $\psi \in H^1(0,\ell)$ com

$$\psi_x(x) = G(x) - 0 = G(x), \qquad \forall\, x \in [0,\ell]. \tag{A.1}$$

Pelo Lema 2.78, existem $\varphi \in H^1_0(0,\ell)$ e $w \in H^1_*(0,\ell)$ tais que

$$w_x + (-l)\varphi = F \tag{A.2}$$

$$\varphi_x - (-l)w = H - \psi. \tag{A.3}$$

Decorre de (A.1)-(A.3) que (φ, ψ, w) é a solução desejada. ∎

Lema A.2. *O espaço*

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,\ell) \times L^2(0,\ell) \times H_*^1(0,\ell) \times L_*^2(0,\ell) \times H_*^1(0,\ell) \times L_*^2(0,\ell) \times L^2(0,\ell)$$

munido com a norma

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_1\|W\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2 \\ + k\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma}{m}\|\theta\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

é completo.

Demonstração: Considere uma sequência de Cauchy (U^n) em $\mathcal{H}$ e escreva

$$U^n = (\varphi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n, w^n, W^n, \theta^n).$$

Resulta da definição da norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ que

- (Φ^n), (ψ_x^n), $(w_x^n - l\varphi^n)$ e (θ^n) são de Cauchy em $(L^2(0,\ell), \|\cdot\|_{L^2})$;
- (Ψ^n), (W^n) e $(\varphi_x^n + \psi^n + lw^n)$ são de Cauchy em $(L_*^2(0,\ell), \|\cdot\|_{L^2})$.

Como $(L^2(0,\ell), \|\cdot\|_{L^2})$ e $(L_*^2(0,\ell), \|\cdot\|_{L^2})$ são ambos completos, resulta que existem Φ, F, G, $\theta \in L^2(0,\ell)$ e Ψ, W, $H \in L_*^2(0,\ell)$ tais que

(a) $\|\Phi^n - \Phi\|_{L^2} \to 0$;

(b) $\|\Psi^n - \Psi\|_{L^2} \to 0$;

(c) $\|W^n - W\|_{L^2} \to 0$;

(d) $\|\psi_x^n - F\|_{L^2} \to 0$;

(e) $\|\varphi_x^n + \psi^n + lw^n - H\|_{L^2} \to 0$;

(f) $\|w_x^n - l\varphi^n - G\|_{L^2} \to 0$;

(g) $\|\theta^n - \theta\|_{L^2} \to 0$.

Pelo Lema A.1, existe $(\varphi, \psi, w) \in H_0^1(0,\ell) \times H_*^1(0,\ell) \times H_*^1(0,\ell)$ tal que

$$\begin{aligned}\varphi_x + \psi + lw &= H, \\ w_x - l\varphi &= F, \\ \psi_x &= G.\end{aligned}$$

Assim $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \theta) \in \mathcal{H}$ e, em virtude de (a)-(g), satisfaz

$$\|U^n - U\|_{\mathcal{H}} \to 0.$$

Ou seja, (U^n) converge em $\mathcal{H}$. Isto mostra que $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ é completo. ■

Observação A.3. Utilizando a desigualdade triangular e a desigualdade de Young vê-se que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C|U|_{\mathcal{H}}, \quad \forall\, U \in \mathcal{H}.$$

Portanto, pela Proposição 2.18 e pelo Lema A.2, as normas $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ e $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ são equivalentes.

REFERÊNCIAS

[1] ADAMS, R. A., AND FOURNIER, J. J. F. *Sobolev Spaces*. Academic Press, Amsterdam, 2003.

[2] BOUSSOUIRA, F. A., RIVERA, J. E. M., AND DA S. ALMEIDA JÚNIOR, D. Stability to weak dissipative Bresse system. *J. Math. Anal. Appl. 374* (2011), 481–498.

[3] BRESSE, J. A. C. *Cours de Méchanique Appliquée*. Gauthier-Villars, Paris, 1866.

[4] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York, NY, 2011.

[5] CAVALCANTI, M. M., AND CAVALCANTI, V. N. D. *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*. Eduem, Maringá, PR, 2009.

[6] DAUTRAY, R., AND LIONS, J.-L. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology - Volume 2 - Functional and Variational Methods*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[7] DAUTRAY, R., AND LIONS, J.-L. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology - Volume 5 - Evolution Problems I*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[8] ENGEL, K., AND NAGEL, R. *A Short Course on Operator Semigroups*. Springer, New York, NY, 2006.

[9] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[10] FATORI, L. H., AND RIVERA, J. E. M. Rates of decay to weak thermoelastic Bresse system. *IMA Journal of Applied Mathematics 75* (2010), 881–904.

[11] HAN, Z., AND XU, G. Spectral analysis and stability of thermoelastic Bresse system with second sound and boundary viscoelastic damping. *Math. Meth. Appl. Sci. 38* (2015), 94–112.

[12] JIANG, S., AND RACKE, R. *Evolution Equations in Thermoelasticity*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000.

[13] KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons. Inc., New York, NY, 1978.

[14] KURRER, K.-E. *The History of the Theory of Structures*. Ernst & Sohn, Berlin, 1978.

[15] LAGNESE, J. E., LEUGERINGE, G., AND SCHMIDT, E. J. P. G. Modelling of dynamic networks of thin thermoelastic beams. *Mathematical Methods in the Applied Sciences 16* (1993), 327–358.

[16] LAGNESE, J. E., LEUGERINGE, G., AND SCHMIDT, E. J. P. G. *Modeling, Analysis and Control of Dynamic Elastic Multi-Link Structures*. Birkhäuser, Boston, MA, 1994.

[17] LIU, Z., AND RAO, B. Energy decay rate of the thermoelastic Bresse system. *Z. angew. Math. Phys. 60* (2009), 54–69.

[18] MEDEIROS, L. A. *Tópicos em Equações Diferenciais Parciais - Parte I*. UFRJ/IM, Rio de Janeiro, RJ, 2006.

[19] MONTEIRO, R. N. Comportamento Assintótico para Sistemas de Bresse Dissipativos e Taxa Ótima. Mestrado, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

[20] NAJDI, N., AND WEHBE, A. Weakly locally thermal stabilization of Bresse systems. *Electronic Journal of Differential Equations 2014* (2014), 1–19.

[21] NAZAROVI, A. I., AND REPIN, S. I. Exact constants in Poincaré type inequalities for functions with zero mean boundary traces. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* (2014).

[22] PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, NY, 1983.

[23] RIVERA, J. E. M. *Teoria das Distribuições e Equaçẽs Diferenciais Parciais*. LNCC, Rio de Janeiro, RJ, 2004.

[24] RIVERA, J. E. M. *Estabilização de Semigrupos e Aplicações*. EAC, Rio de Janeiro, RJ, 2008.

[25] RIVERA, J. E. M., AND RACKE, R. Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems–global existence and exponential stability. *J. Math. Anal. Appl. 276* (2002), 248–278.

[26] RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, New York, NY, 1987.

[27] ZHENG, S. *Nonlinear Evolutions Equations*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.