Universidade
Estadual de Londrina

LUIZ GUSTAVO SOARES DA SILVA

CONTROLE ÓTIMO EMPRESARIAL COM CUSTOS DE AJUSTAMENTO

Londrina
2015

LUIZ GUSTAVO SOARES DA SILVA

CONTROLE ÓTIMO EMPRESARIAL COM CUSTOS DE AJUSTAMENTO

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Naresh Kumar Sharma.

Londrina
2015

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

S586c Silva, Luiz Gustavo Soares da.
Controle ótimo empresarial com custos de ajustamento / Luiz Gustavo Soares da Silva. – Londrina, 2015.
60 f. : il.

Orientador: Naresh Kumar Sharma.
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2015.
Inclui bibliografia.

1. Equações diferenciais– Teses. 2. Liapunov, Funções de – Teses. 3. Princípios de máximo (Matemática) – Teses. 4. Capital (Economia) x Modelos matemáticos – Teses. 5. Estabilidade – Teses. I. Sharma, Naresh Kumar. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

CDU 911:37. 02

LUIZ GUSTAVO SOARES DA SILVA

CONTROLE ÓTIMO EMPRESARIAL COM CUSTOS DE AJUSTAMENTO

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. Naresh Kumar Sharma
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Giovani Nunes Grapiglia
Universidade Federal do Paraná - UFPR

Prof. Dr. Túlio Oliveira de Carvalho
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 27 de fevereiro de 2015.

À Londrina,

Real e Imaginária.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Luiz e Lucilene, pela formação do meu caráter.

À minha irmã, Letícia Tartaglia, pelo incentivo.

Ao meu orientador, Naresh Kumar Sharma, pelos preciosos ensinamentos.

À Erika, pela compreensão e paciência.

Aos professores do PGMAC.

À CAPES, pelo apoio ao programa.

DA SILVA, Luiz Gustavo Soares. **Controle Ótimo Empresarial com custos de Ajustamento**. 2015. 57f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

RESUMO

Neste trabalho, estuda-se o modelo de uma empresa que enfrenta custos de ajustamento no seu processo produtivo. A empresa objetiva otimizar seu fluxo de renda. Por custos de ajustamento entende-se o *tradeoff* entre alocar recursos na produção atual ou, em detrimento de uma receita maior no presente, direcionar parte dos recursos no processo de acumulação de capital. O problema é abordado por métodos da teoria de controle ótimo. A decisão de investir, que é de controle da empresa, afeta diretamente a trajetória do estoque de capital. O *Princípio do Máximo de Pontryagin* fornece um conjunto de condições necessárias às quais uma política de investimento ótima deve satisfazer. Além disso, ele garante a existência de uma variável de coestado (*preço sombra*) que possui a interpretação econômica de mensurar corretamente o valor de investimentos futuros na receita atual da empresa.

Dentre as condições necessárias, surge um sistema de equações diferenciais que modela o comportamento da acumulação de capital e da variável de coestado. Depois é tratada a questão de analisar se políticas ótimas convergem para um estoque de capital de equilíbrio. Este objetivo é trabalhado pelos métodos de Liapunov, Teorema da Variedade Estável e a análise dos autovalores do sistema linearizado.

Palavras-chave: Custos de ajustamento. Controle ótimo. Princípio do Máximo. Equações diferenciais. Estabilidade de Liapunov. .

DA SILVA, Luiz Gustavo Soares. **Entrepreneurial Optimal Control with Adjustment Costs**. 2015. 57f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

ABSTRACT

In this work, we study the model of a firm which encounters the problem of cost of adjustment in its process of production. The firm has the goal to optimize its flux of revenue. Cost of adjustment is understood to be a tradeoff between putting the resources in the present production or in prejudice to higher preference for the present directing a part of resources to the process of accumulation of the capital. The problem is presented by means of theory of optimal control. The decision to invest, on which the firm has control, has direct effect on the trajectory of capital stock. The *Pontryagin Maximum Principle* gives a set of necessary conditions which the investment policy must satisfy. Beside that, it guarantees the existence of a costate variable (*shadow price*) which has an economic interpretation to measure correctly the future investment values in terms of the current income of the firm.

Within the necessary conditions, there is a system of differential equations, which models the behavior of accumulation of capital and the costate variable. After this is treated the question of analyzing if the optimum policy converges to a capital stock equilibrium. Such objective is worked by methods of Liapanov, Theorem of Stable Manifold and analysis of eigenvalues of linearized system.

Keywords: Cost of adjustment. Optimal control. Maximum Principle. Differential Equations. Liapunov stability.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

$\mathbb{R}^n_+$	Conjunto das n-uplas de números reais não negativos.
$\mathbb{R}^n_{++}$	Conjunto das n-uplas de números reais positivos.
$K_0 >> 0$	O vetor $K_0 \in \mathbb{R}^n_{++}$.
$f < g$	$g(x) - f(x) >> 0$, se *f* e *g* são funções reais de domínio comum.
$u \cdot v$	Produto interno entre os vetores *u* e *v*.
$\lvert x\rvert, \lVert x\rVert$	Função norma Euclidiana do vetor *x* em $\mathbb{R}^n$.
$d(x, y)$	Distância Euclidiana entre $x, y \in \mathbb{R}^n$.
$B_b(x_0)$	Bola aberta com centro em x_0 e raio *b*.
$\bar{B}_b(x_0)$	Bola fechada com centro em x_0 e raio *b*.
$\operatorname{int} X,\ X^\circ$	Conjunto dos pontos que são interiores ao conjunto *X*.
$\dot{x}(t)$	Derivada em relação ao tempo da função $x(t)$.
$\frac{\partial f}{\partial x},\ f_x$	Derivada parcial da função *f* em relação a variável *x*.
f_{xy}	$(f_x)_y = f_{xy}$.
$Df(a)$	Aplicação derivada da função *f* aplicada no ponto *a*.
$C^r(D)$	Conjunto das funções em *D* com derivadas parciais continuas de ordem *r*.
C^r	Conjunto das funções com derivadas parciais contínuas de ordem *r* no seu domínio.
$\forall$	Para todo.
$\equiv$	Igualdade por definição.
s.a	Sujeito a.
||	Fim da demonstração.
PVI	Problema de valor inicial.
PC	Problema de controle.
PCD	Problema de controle descontado.
PCDI	Problema de controle descontado no infinito.

Notações não explicadas são convencionais

INTRODUÇÃO

As técnicas matemáticas aplicadas em economia constituem uma abordagem na qual o economista usa símbolos matemáticos na formulação de seu problema e também recorre a teoremas conhecidos para ajudar seu raciocínio. Por mais complexa e ampla que seja a problemática econômica, essa poderosa ferramenta vem se mostrando de grande utilidade, tanto para explicar os fenômenos econômicos quanto para fazer previsões. Como exemplo de sucesso desta interdisciplinaridade pode-se citar os ganhadores do Nobel: Kenneth Arrow (1972), Gérard Debreu (1983), Jonh Nash (1994) entre outros.

Contudo a própria teoria econômica como ciência moderna é relativamente nova, surgindo como disciplina específica no século XVIII, com a publicação em 1776 de *A riqueza das nações*, livro do pensador escocês Adam Smith. Devido a essa juventude acredita-se que muitos resultados ainda podem surgir da interação entre matemática e economia.

Neste trabalho estuda-se um modelo microeconômico, originalmente proposto por autores como Treadway [16] e Lucas [13], em que uma empresa enfrenta a decisão entre alocar seus recursos entre a produção atual "*output*" e a acumulação de capital. Visto de outra maneira esse problema relaciona o quanto uma empresa deve abrir mão de receita hoje para obter uma trajetória de lucro ótimo ao longo do tempo. As técnicas utilizadas são desenvolvidas ao longo dos Capítulos de 1 à 4. A aplicação de tais técnicas ao modelo de uma empresa com custos de ajustamento é apresentada no Capítulo 5.

O Capítulo 1 apresenta a teoria fundamental de equações diferenciais. Tal teoria é uma das principais ferramentas para descrever o comportamento de certa grandeza ou variável econômica em relação a outras ou a si própria. A teoria fundamental mencionada acima é no sentido que se está interessado em questões como existência e unicidade de soluções, domínio máximo de uma solução e continuidade em relação aos dados iniciais e parâmetros do problema.

Sequencialmente, no Capítulo 2, é apresentada a propriedade de estabilidade de soluções de equilíbrio. Tal propriedade é buscada em modelos econômicos. Esta propriedade pode ser vista como a questão de soluções do modelo tenderem no longo prazo a um cenário econômico bem comportado. Ainda no Capítulo 2, são apresentados teoremas que permitem analisar a estabilidade. Mais precisamente são tratados, o método de linearização e análise dos autovalores, o método direto de Liapunov e o Teorema da Variedade Estável.

No Capítulo 3 é desenvolvida a abordagem de controle ótimo. Este problema é que modela o comportamento da empresa com custos de ajustamento que se tem interesse em estudar. São apresentadas as condições necessárias para soluções ótimas, conhecida como o *Princípio do Máximo de Pontryagin*. No final do capítulo é formulada a versão do problema de controle com horizonte de planejamento infinito e é apresentado um teorema que garante que algumas das condições geradas pelo *Princípio do Máximo de Pontryagin* são ainda necessárias. O mesmo teorema também fornece condições suficientes para o problema.

O *Princípio do Máximo de Pontryagin* gera um sistema de equações diferenciais entre a variável de estado e o preço sombra conhecido como *sistema Hamiltoniano*, onde as soluções são candidatas a trajetórias ótimas. Assim no Capítulo 4 são apresentados resultados, como em Brock e Mallaris [3], relativos à questão de estabilidade de problemas de controle ótimo.

No Capítulo 5 se estabelece o problema empresarial com custos de ajustamento. Primeiramente analisa-se um modelo onde a empresa deve encontrar uma trajetória ótima para sua acumulação de capital. Nesse modelo a empresa tem como fatores de produção o capital e o trabalho, e apresenta retornos decrescentes de produção e função custo de ajustamento convexa. Como aplicações das técnicas dos capítulos anteriores obtêm que o trabalho é contratado, segundo as técnicas de otimização estática, no ponto onde a sua produtividade marginal é igual ao salário real. Em relação ao capital tem-se um estoque de equilíbrio, caracterizado como um ponto de sela no espaço de fase do sistema Hamiltoniano de capital por preço sombra. Além disso, a acumulação de capital ótima será dada pela trajetória que converge para o equilíbrio. Tem ainda a segunda aplicação modelada da forma em que um vetor de *n* diferentes tipos de capitais é exigido no processo de produção da empresa. Tal empresa é considerada com uma função custo de ajustamento quadrática. Essa classe de problema incluem os custos de ajustamento com o formato de “U”, tais custos expressam a ideia de custos decrescentes em uma escala baixa de produção e crescentes em um nível de produção elevado. Através dos critérios anunciados no Capítulo 4, é obtido um simples, porém útil, teste para a análise da estabilidade global das soluções do sistema Hamiltoniano.

CAPÍTULO 1

PROPRIEDADES GERAIS DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Equações diferenciais, nas últimas décadas, têm sido aplicadas intensivamente por economistas, no processo de expor e explicar o comportamento dinâmico de diversas variáveis econômicas. Tal uso justifica a necessidade de uma exposição de noções fundamentais e propriedades desta teoria.

Neste capítulo são apresentados conceitos básicos e teoremas importantes. É anunciado um teorema sobre existência de soluções, seguido de um teorema sobre domínio máximo de uma solução. Finalmente trata-se da questão de unicidade, dependência contínua em relação aos dados iniciais e diferenciabilidade de soluções. Para informações gerais de análise no $\mathbb{R}^n$ veja Lima [12].

Considere $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto e conexo. Um elemento de *D* é representado na forma $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^n$ com $t \in I$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

Definição 1.1: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ uma função continua. Uma equação da forma

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1.1}$$

é chamada de *equação diferencial ordinária*.

A notação $\dot{x} = \dfrac{dx(t)}{dt}$ significa derivada da função *x* em relação à variável *t* (tempo). Nos pontos extremos serão consideradas as derivadas laterais.

Se existir uma função continuamente diferenciável $\phi(t)$ definida em algum intervalo I^* da reta tal que

$$\begin{aligned} &i)\ (t, \phi(t)) \in D, \\ &ii)\ \dot{\phi}(t) = f(t, \phi(t)), \end{aligned} \tag{1.2}$$

então é dito que $\phi(t)$ é uma *solução* da equação diferencial (1.1) em I^*.

Uma equação diferencial da forma

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.3}$$

na qual a variável independente *t* não aparece explicitamente na função f é chamada de *equação diferencial autônoma*.

Seja $(t_0, x_0) \in D$. Um *problema de valor inicial* (*PVI*) para (1.1) consiste em encontrar um intervalo I^* contendo t_0 e uma solução $\phi(t)$ de (1.1) tal que $\phi(t_0) = x_0$. Denota-se esse problema por:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.4}$$

O par (t_0, x_0) é chamado de condição inicial para o problema (1.4).

Para ilustrar os conceitos de solução de uma equação diferencial e de problema de valor inicial considere o exemplo a seguir.

Exemplo 1.1: Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = \alpha x, \tag{1.5}$$

onde $x, \alpha \in \mathbb{R}$. Note que (1.5) é autônoma. Integrando (1.5) se obtém uma solução da forma

$$\phi(t) = ce^{\alpha t}, \; t \in \mathbb{R}, \tag{1.6}$$

onde c é um número real arbitrário. Veja que (1.6) é continuamente diferenciável para qualquer *t* real e satisfaz (1.5) pois

$$\dot{x} = \dot{\phi}(t) = \alpha c e^{\alpha t} = \alpha \phi(t) = \alpha x.$$

Para transformar (1.5) em um problema de valor inicial deve-se especificar certo ponto t_0 e seu respectivo valor $x(t_0)$. Para ilustrar suponha $t_0 = 0,\ x(0) = 1$. Portanto tem-se o seguinte problema

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x, \\ x(0) = 1. \end{cases} \tag{1.7}$$

(1.7) possui solução da forma

$$\phi(t) = 1e^{\alpha t}, \; t \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Veja que a solução em (1.8) é uma solução passando através do ponto $(0,1)$ no plano cartesiano.

Neste capítulo serão estabelecidas, dentro da teoria de equações diferenciais, as condições nas quais se podem observar as seguintes propriedades:

i) Existência de solução para uma equação diferencial,

ii) Unicidade da solução,

iii) Domínio máximo de uma solução,

iv) Dependência contínua de uma solução em relação aos dados iniciais e parâmetros do problema.

As demonstrações dos resultados abaixo podem ser encontradas em Brock e Mallaris [3], Capítulo 1.

Para garantir existências de soluções basta a continuidade da função $f: D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ tem:

Teorema 1.1 (Teorema de existência de Cauchy-Peano): Se $f(t,x)$ é uma função continua no retângulo $R \subset D$**,** onde (*a* e *b* reais positivos)

$$R = \left\{(t,x); \left|t - t_0\right| \le a \;\; e \;\; x \in \bar{B}_b(x_0)\right\},$$

então existe uma solução $\phi(t)$ continuamente diferenciável definida num intervalo $\left|t - t_0\right| \le \alpha$ que resolve o *PVI,*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Demonstração: Ver Brock e Mallaris [3] (p.10).

O teorema acima nos garante a existência de solução para o *PVI,* porém nada nos diz se mais de uma solução é possível nem nos diz qual o domínio exato de uma solução uma vez que não nos informa estimativa para o valor α .

Para o problema da extensão do domínio de uma solução tem o seguinte

Teorema 1.2 (Teorema de extensão do domínio da solução): Seja $f(t,x)$ contínua em $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, aberto e conexo. Suponha $f(t,x)$ limitada em D. Se $\phi(t)$ é uma solução do *PVI*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

definida em um intervalo (*a,b*), então os limites $\phi(a+) e \phi(b-)$ existem. Além disso, se $(b, \phi(b-)) \in D$, então ϕ pode ser estendida para direita de *b*. Similarmente se $(a, \phi(a+)) \in D$, então ϕ pode ser estendida para esquerda de *a*. Aqui, $\phi(a+) = \lim_{t \to a+} \phi(t)$ e $\phi(b-) = \lim_{t \to b-} \phi(t)$.

Demonstração: Ver Brock e Mallaris [3] (p.12).

Já para o problema de unicidade, deve-se suspeitar que apenas a continuidade de $f(t,x)$ não seja suficiente e que se precisa impor condições adicionais para garantir uma única solução para um *PVI*. O próximo teorema nos diz que se $f(t,x)$ possuir certa regularidade na variável *x* nos é suficiente para garantir unicidade de soluções.

Teorema 1.3 (Unicidade): Seja $f \; e \; \partial f / \partial x$ continuas em um retângulo $R \subset D$,

$$R = \left\{(t,x); \left|t - t_0\right| \leq a \; e \; x \in \bar{B}_b(x_0)\right\},$$

com *a* e *b* positivos e sejam

$$M = \max_{(t,x)\in R}\left|f(t,x)\right| \; e \; \alpha = \min(a, b/M).$$

Então o *PVI*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

possui uma única solução em $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Demonstração: Ver Brock e Mallaris [3] (p.14).

Voltando ao Exemplo 1, pode-se mais geralmente expor tal exemplo como

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Pelo Teorema 1.3, este problema possui de fato uma solução única dada por

$$\phi(t) = x_0 e^{\alpha(t-t_0)}. \tag{1.10}$$

É claro que $\phi(t)$ dada em (1.10) depende não somente de *t*, mas também de $t_0, x_0 \, e \, \alpha$. A questão que surge é: Como será afetada a solução $\phi(t)$ quando $t_0, x_0 \, e \, \alpha$ sofrem pequenas perturbações? Para responder esta questão se denota o *PVI* da maneira seguinte:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,p), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.11}$$

onde *p* indica que a função *f* depende de um parâmetro *p* pertencente a algum espaço Euclidiano. Seja a solução geral de (1.11) escrita da maneira que se segue,

$$\phi = \phi(t, t_0, x_0, p), \tag{1.12}$$

a fim de explicitar a dependência em relação à $t, t_0, x_0 \; e \; p$. Nestas condições tem:

Teorema 1.4 (Dependência continua em relação aos dados inicias e parâmetros): Assuma que a função $f(t,x,p)$ é

(i) Continua em seus três argumentos em um conjunto fechado e limitado D.

(ii) Satisfaça em *x* a seguinte propriedade de Lipschitz:

Para todo $(t,x,p),(t,y,p)\in D$, existe uma constante real *k* tal que

$$\left| f(t,x,p)-f(t,y,p)\right| \le k\left|x-y\right|. \tag{1.13}$$

Então a solução $\phi=\phi(t,t_0,x_0,p)$ de (1.11) é continua em todos os argumentos.

Demonstração: Ver Coddington e Levinson [4] (p.23-24).

Observação 1.1: A condição (1.13) também é uma condição suficiente para unicidade de soluções, claramente menos restritiva que a continuidade da derivada de *f* em relação à *x*. Pode-se mostrar, via teorema do valor médio, que toda função continuamente diferenciável satisfaz a propriedade de Lipschitz na variável *x* em bolas fechadas.

Nas notações anteriores, um teorema útil sobre diferenciabilidade das soluções é fornecido por

Teorema 1.5 (Diferenciabilidade de soluções): Suponha que a função $f(t,x)$, definida em D fechado e limitado, é contínua em *t* e *x*. Além disso, assuma que $\partial f/\partial x$ exista e é continua em D. Então a solução $\phi=\phi(t,t_0,x_0)$ do *PVI*

$$\begin{cases}\dot{x}=f(t,x),\\ x(t_0)=x_0,\end{cases}$$

também é diferenciável em x_0, com $\partial\phi/\partial x_0$ contínua.

Demonstração: Ver Coddington e Levinson [4] (p.25-28).

De fato, $f\in C^r(D^\circ)$ implica em soluções $\phi\in C^r(D^\circ)$, para $n\ge 1$.

Em resumo, a força dos teoremas acima pode ser elucidada nas seguintes questões em que um economista enfrenta:

i) Caso uma equação diferencial modele o comportamento de uma variável econômica, existe uma trajetória que a define? O teorema 1 nos fornece tal resposta.

ii) Caso haja mais que uma trajetória qual deve ser escolhida? O Teorema 3 é útil nesta questão pois garante que existe apenas uma trajetória.

iii) Pode-se usar a solução do modelo até que horizonte de tempo? O Teorema 2 é uma ferramenta para tratar essa questão.

iv) Nas aplicações é normal haver erros nas medições dos dados iniciais de um modelo. Tais erros causam grandes alterações nas soluções? Neste caso atua fortemente o Teorema 4, nos dizendo que de fato pequenas alterações nos dados iniciais não alteram em grande magnitude as respectivas soluções.

CAPÍTULO 2

ESTABILIDADE DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Neste capítulo é definida a propriedade de estabilidade de soluções de uma equação diferencial ordinária e alguns métodos para tratar problemas sobre tal propriedade. O primeiro apresentado é o Método da Linearização de Sistemas de Equações Diferenciais. Em seguida é apresentado o útil Método Direto de Liapunov, onde se pode tratar de questões de estabilidade em caráter local e global. Por fim é exposto o Teorema da Variedade Estável.

Como foi visto no Capítulo 1, se a função $f(t,x)$ é suficientemente bem comportada no aberto $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, o *problema de valor inicial* (*PVI*),

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

possui uma única solução $\phi(t)$ definida num intervalo em torno de t_0 e que depende continuamente dos dados iniciais do problema.

Nas notações do Capítulo 1, a dependência continua nos dados iniciais nos diz em particular que pequenas perturbações em x_0 produzem pequenas mudanças em $\phi(t)$ em um intervalo em volta de t_0. Embora este fato seja muito importante, em aplicações econômicas é ainda mais importante ter alguma informação quanto ao comportamento de soluções no longuíssimo prazo. Será que toda solução de (2.1) que esteja próxima de x_0 no instante t_0 permanece próxima da solução $\phi(t)$ para sempre, ou existem soluções que eventualmente se afastem de $\phi(t)$?

O ramo da matemática que estuda a questão de comportamento no longo prazo das soluções de uma equação diferencial é conhecido como *Teoria de Estabilidade*. Para maiores detalhes sobre o assunto ver Coddington, E. A.; Levinson [4] e Hale [8].

Inicia-se um estudo de estabilidade para a classe de equações diferenciais autônomas, visto que surgem amiúde em problemas econômicos.

Em muitas, se não todas as aplicações, não se está primeiramente interessado na proximidade de duas soluções arbitrárias quando o tempo tende ao infinito, mas sim o quanto próximo uma solução permanece de uma solução de equilíbrio. Uma *solução de equilíbrio* ou *solução trivial* ou um *estado estacionário* é uma solução, denotada por $x(t)=\bar{x}$, que satisfaz a equação

$$f(t,\bar{x})=0,$$
$$\forall t\in I=[0,\infty).$$

Seja $\bar{x}$ e $x(t,0,x_0)$ soluções do sistema (2.1), com $\bar{x}$ solução de equilíbrio, note que fazendo a mudança de variável

$$y=x(t,0,x_0)-\bar{x},$$

obtém-se, diferenciando a expressão acima, o seguinte sistema

$$\dot{y}=\dot{x}(t,0,x_0)=f(t,x(t,0,x_0))=f(t,y+\bar{x}),$$

onde $y=0$ é uma solução de equilíbrio. Com esse argumento concluímos que não há perda de generalidade em enunciar as varias definições a seguir em termos da solução nula, denotada por *0-solução*. Especificamente seja

$$\dot{x}=f(t,x),\ \text{tal que}\ f(t,0)=0,\ \forall t\in[0,\infty), \tag{2.2}$$

e assuma que $f:[0,\infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ satisfaça as condições que garantam existência, unicidade e dependência contínua em relações as condições iniciais e parâmetros.

Definição 2.1: A 0-solução é chamada de *estável no sentido de Liapunov* se para todo $\varepsilon>0$ e $t_0\geq 0$, existe um $\delta(\varepsilon,t_0)>0$ tal que $|x_0|<\delta$ implica que $|x(t,t_0,x_0)|<\varepsilon$ para todo $t\in[t_0,\infty)$.

A 0-solução é *assintoticamente estável no sentido de Liapunov* se é estável e se $x(t,t_0,x_0)\to 0$ quando $t\to\infty$. Em outras palavras, a 0-solução é assintoticamente estável se é estável e se para todo $t_0\geq 0$, exista $\delta_0=\delta_0(t_0)>0$ tal que $|x_0|<\delta_0$ implique $x(t,t_0,x_0)\to 0$ quando $t\to\infty$.

A 0-solução é *uniformemente estável* se é estável e se δ possa ser escolhido independentemente de $t_0>0$. A 0-solução é *uniformemente assintoticamente estável* se é uniformemente estável, se $\delta_0(t_0)$ da definição de estabilidade assintótica possa ser escolhido independente de $t_0 > 0$, e também, se para todo $\eta > 0$ exista um $T(\eta)$ tal que $|x_0| < \delta_0$ implique $|x(t,t_0,x_0)| < \eta$ se $t > t_0 + T(\eta)$.

Finalmente, a 0-solução é *instável* se não é estável.

A propriedade de uma 0-solução ser estável pode ser visualizada geometricamente considerando as soluções de (2.2) como curvas no espaço euclidiano com dimensão (n+1). A desigualdade $|x_0| < \delta$ define uma bola no hiperplano $t = t_0$ e a desigualdade $|x(t,t_0,x_0)| < \varepsilon$ determina um cilindro de raio ε sobre o eixo do tempo. Escolhendo assim os dados iniciais em uma bola suficientemente pequena força-se o gráfico da solução permanecer para $t \geq t_0$ inteiramente contido no cilindro de raio ε.

Exemplo 2.1: Considere a equação em $\mathbb{R}$, $\dot{x} = 0$. As soluções desta equação são $x(t) = x_0$, onde x_0 é uma constante arbitrária. A 0-solução para $t > 0$ é estável, mas não é assintoticamente estável. Além disso, uma vez que as soluções são independentes do tempo, a 0-solução também é uniformemente estável.

Exemplo 2.2: A equação $\dot{x} = x$, como função real de uma variável real, possui soluções da forma $x(t) = x_0 e^t$ quando x_0 é uma constante arbitrária. A 0-solução é instável pelo fato de $x_0 e^t$ não se aproximar uniformemente de zero em $[0,\infty)$ quando x_0 aproxima-se de zero.

Exemplo 2.3: Generalizando os dois exemplos acima. Considere

$$\dot{x} = \lambda x$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$. As soluções são da forma $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$. A 0-solução é estável, uniformemente estável, assintoticamente estável e uniformemente assintoticamente estável se $\lambda < 0$. A 0-solução é estável e uniformemente estável se $\lambda = 0$ (Exemplo 2.1). Finalmente, a 0-solução é instável se $\lambda > 0$, como Exemplo 2.2.

2.1 O Método da Linearização de Sistemas de Equações Diferenciais.

Os resultados desta seção e de todas as próximas serão formulados para sistemas de equações diferenciais *autônomas*, essencialmente pelo fato de muitas aplicações econômicas serem modeladas por equações deste tipo.

Para sistemas autônomos, uma verificação imediata das definições nos garante que a estabilidade da 0-solução implica em estabilidade uniforme e estabilidade assintótica implica estabilidade assintótica uniforme.

O primeiro método de análise de estabilidade que é estabelecido será, de modo geral, encontrar quais condições um sistema de equações diferenciais deve possuir para que herde as propriedades de estabilidade de sua linearização.

Mais precisamente, dada uma função $f : D \to \mathbb{R}^n$, continuamente diferenciável no aberto $D \subset \mathbb{R}^n$ tem-se que numa vizinhança de $a \in D$ (fórmula de Taylor),

$$f(x) = f(a) + J_f(a)(x-a) + r(x-a),$$

onde $J_f(a)$ é a matriz Jacobiana de *f* calculada em *a* e $r(x-a)$ é uma função resto tal que $\lim_{x\to a} \frac{r(x-a)}{|x-a|} = 0$. (Veja Lima [12] para mais detalhes).

O teorema que nos fornece essas condições é o seguinte.

Teorema 2.1: Considere o sistema autônomo $\dot{x} = f(x)$ e suponha que $f(x)$ seja continuamente diferenciável em um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ contendo a origem e tal que $f(0) = 0$. Então

(i) Se todos os autovalores da Jacobiana $J_f(0)$ tiverem as partes reais negativas, a 0-solução é assintoticamente estável.

(ii) Se algum autovalor da Jacobiana $J_f(0)$ tiver parte real positiva, a 0-solução é instável.

(iii) Se todas as partes reais dos autovalores forem não negativas, com pelo menos um com parte real nula nada poderá ser concluído sobre estabilidade.

Demonstração: Ver Brock e Mallaris [3] (p.66).

2.2 O Método Direto de Liapunov.

A abordagem que é utilizada para análise das propriedades de estabilidade de equações diferenciais nesta seção é conhecida como o *método direto de Liapunov*. Para fins metodológicos, os teoremas dessa abordagem podem ser classificados como resultados *locais* e *globais*. Resultados locais dizem respeito à estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade para dados iniciais em uma pequena vizinhança do equilíbrio dado pela 0-

solução. Os resultados globais referem-se à estabilidade assintótica para dados iniciais em todo $\mathbb{R}^n$.

Para começar, considere o *sistema autonômo* $\dot{x} = f(x)$, $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; onde *f* é continuamente diferenciável no aberto *D*. Além disso, assuma que o conjunto aberto *D* contenha a origem e que $f(0) = 0$. Resumindo

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x); \ f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; \\ f(0) = 0; \ 0 \in D \subset \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.3}$$

Pelo Capítulo 1 f sendo continuamente diferenciável implica que uma única solução existe para qualquer dado inicial. Também é assumido que a 0-solução seja a única solução de equilíbrio em *D*.

Definição 2.2: Seja *D* um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ contendo a origem. Uma função real $V(x) : D \to \mathbb{R}$ é *semidefinida positiva* em $D \subset \mathbb{R}^n$ se é continua em *D* e $V(x) \geq 0,\ \forall x \in D$. Uma função real $V(x)$ é *semidefinida negativa* em *D* se $-V(x)$ for semidefinida positiva. Uma função real $V(x)$ é *definida positiva* em *D* se é continua, $V(x) > 0,\ x \neq 0$ e $V(0) = 0$. Finalmente uma função real continua em *D*, $V(x)$, é *definida negativa* se $-V(x)$ for definida positiva. Uma função real continua em *D*, $V(x)$, é *indefinida* se $V(0) = 0$ e em qualquer vizinhança da origem a função assuma valores tanto positivo quanto negativo.

Exemplo 2.4: A função

$$V(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

é definida positiva em $\mathbb{R}^3$ e semidefinida positiva em $\mathbb{R}^4$.

Definição 2.3: Suponha $V(x)$ definida positiva em $D \subset \mathbb{R}^n$ e além disso seja uma função continuamente diferenciável. Considere $x(t)$ uma solução do sistema autônomo $\dot{x} = f(x)$ como em (2.3). A função $\dot{V}(x(t))$ é chamada de *derivada no tempo ao longo de uma solução* $x(t)$ e é definida como

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}(x(t)) &= \nabla V(x(t))\cdot \dot{x}(t)\\ &= \nabla V(x(t))\cdot f(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V(x)}{\partial x_k}\cdot f_k(x),\end{aligned} \tag{2.4}$$

onde $\nabla V(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1},...,\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)$ é o *vetor gradiente* de V e f_k denota a *k*-ésima função coordenada de $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. No caso, $V(x(t))$ positiva definida com $\dot{V}(x(t))$negativa semidefinida negativa, $V(x(t))$ é chamada de *função de Liapunov*.

2.2.1 Estabilidade Local para Sistemas Autônomos.

Os seguintes teoremas nos dão um método de análise de estabilidade, em função da existência de funções de Liapunov para determinados sistemas.

Teorema 2.2: (Estabilidade de Liapunov para sistemas autônomos) Suponha que exista uma função continuamente diferenciável e definida positiva, $V(x): D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, onde D é um aberto contendo a origem, e $\dot{V}(x)$ seja semidefinida negativa para $x \in D$. Então a 0-solução de $\dot{x} = f(x)$ em (2.3) é estável.
Demonstração: Ver Brock e Mallaris [3] (p.93).

Teorema 2.3: (Estabilidade assintótica de Liapunov para sistemas autônomos) Suponha que exista uma função continuamente diferenciável e definida positiva, $V(x): D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, onde D é um aberto contendo a origem, e $\dot{V}(x)$ seja definida negativa para $x \in D$. Então a 0-solução de $\dot{x} = f(x)$ em (2.3) é assintoticamente estável.
Demonstração: Ver Brock e Mallaris [3] (p.94).

Note nos teoremas acima, que a existência de funções de Liapunov é suficiente para estabelecer a estabilidade do equilíbrio de $\dot{x} = f(x),\ f(0) = 0,$ sem ser necessário resolver explicitamente tal sistema.

Exemplo 2.5: Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - xf(x,y), \\ \dot{y} &= -x - yf(x,y), \end{aligned} \tag{2.5}$$

com $f(0,0)=0$. Para discutir as propriedades de estabilidade desse sistema considere

$$V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \tag{2.6}$$

com

$$\begin{aligned} \dot{V}(x,y) &= x\dot{x} + y\dot{y} = xy - x^2 f(x,y) - xy - y^2 f(x,y) \\ &= -(x^2 + y^2) f(x,y). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Agora para determinar as propriedades sobre estabilidade da 0-solução necessita-se obter alguma hipótese sobre $f(x,y)$. Algumas possibilidades independentes são:

Primeiro, assuma que $f(x,y)$ seja semidefinida positiva numa vizinhança aberta $D \subset \mathbb{R}^2$ da origem. Então *V* é definida positiva em *D*, $\dot{V}$ é semidefinida negativa em *D* e pelo teorema 2.2, a 0-solução é estável.

Segundo, assuma que $f(x,y)$ seja definida positiva em *D*. Então, V é definida positiva, $\dot{V}$ é definida negativa e pelo teorema 2.3 a 0-solução é assintoticamente estável.

Este exemplo ilustra a generalidade do método de Liapunov. O sistema não linear em (2.5) não pode ser estudado conclusivamente pela análise dos autovalores de sua linearização. A equação (2.7) deixa claro que a parte não linear $f(x,y)$ influencia de maneira crítica a análise. Mais especificamente, os autovalores da linearização de (2.5) são $\pm i$, supondo $r(x,y) = (-xf(x,y), -yf(x,y))$ com $\lim_{(x,y)\to 0} \frac{r(x,y)}{|(x,y)|} = 0$, a parte *iii*) do teorema 2.1 não nos permite concluir nada sobre a estabilidade da 0-solução. Entretanto, os dois casos para função *f*, discutidos acima nos apontam, em geral, que as propriedades de estabilidade não podem ser decididas examinando somente a parte linear, pois as não linearidades podem fazer um papel crucial na determinação da estabilidade de todo sistema.

2.2.2 Estabilidade Global para Sistemas Autônomos.

Em aplicações econômicas, na prática pode não ser possível ajustar inicialmente um sistema para muito próximo de seu equilíbrio. Pode ocorrer que o modelo seja assintoticamente estável em uma vizinhança do equilíbrio, porém inicialmente nosso sistema esteja fora desta vizinhança. A noção desejável de estabilidade nestes casos é *estabilidade assintótica global*. Esta noção descreve a propriedade de sistemas dinâmicos convergirem para um equilíbrio, independente de seus dados iniciais.

Como nas seções anteriores, considere

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x); \ f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; \\ f(0) = 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

onde $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é continuamente diferenciável com um único equilíbrio na origem.

Definição 2.4: Diz-se que a 0-solução de (2.8) é *globalmente assintoticamente estável* se para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a solução $x(t,t_0,x_0)$ existe para $t \geq t_0$ e $x(t,t_0,x_0) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Exemplo 2.6: Um exemplo simples de estabilidade assintótica global para uma 0-solução é a equação em $\mathbb{R}$

$$\dot{x} = \lambda x,$$

que possui uma solução, obtida por integração direta dada por

$$x(t,0,x_0) = x_0 e^{\lambda t}, \ x(0) = x_0, \ t \geq 0. \tag{2.9}$$

Se λ é um número real negativo, é possível concluir de (2.9) que a 0-solução possui estabilidade assintótica global, uma vez que para todo $x_0 \in \mathbb{R}, x(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.Se $\lambda = 0$ então (2.9) torna-se $x(t) = x_0, \ t \geq 0$ e a 0-solução é estável mas não é assintoticamente estável de forma global e nem local. Se $\lambda > 0$ tem-se que a 0-solução instável.

Agora, considere o sistema diferencial autônomo

$$\dot{x} = f(x), \tag{2.10}$$

onde $f(x): D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é continua e D é um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Assuma que para qualquer ponto $p \in D,$ exista uma única solução $x(t,t_0,p)$ de (2.10) passando pelo ponto p no tempo t_0. Sem perda de generalidade seja $t_0 = 0$ e passemos a escrever $x(t,t_0,p)$ como $x(t,p)$. A solução $x(t,p)$ de (2.10) passando por p no instante $t_0 = 0$ pode ser vista como uma função de (t,p) que possui certas propriedades. Mais precisamente, seja G um subconjunto aberto de $(-\infty,+\infty) \times \mathbb{R}^n$ e considere a função

$$x(t,p): G \subset (-\infty,+\infty)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Esta função $x(t,p)$ satisfaz três propriedades:

(1) $x(0,p)=p;$

(2) $x(t,p)$ é contínua em $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$

(3) $x(t+s,p)=x(t,x(s,p))$ para qualquer numero real s tal que $t+s$ pertença ao intervalo máximo da solução $x(t,p)$.

Para o propósito de analisar as propriedades de estabilidade assintótica global de (2.10) assuma que $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisfaça condições suficientes que garantam que a solução $x(t,p)$ passando por *p* no instante $t_0=0$ está definida para todo $t\in(-\infty,+\infty)$, para todo $p\in\mathbb{R}^n$ e com (1), (2) e (3).

Definições 2.5: Para um dado ponto *p*, a *órbita* associada a *p* que é denotada por $\gamma(p)$ é o conjunto definido como

$$\gamma(p)=\left\{x\in\mathbb{R}^n : x=x(t,p), t\in(-\infty,+\infty)\right\}. \tag{2.11}$$

Pela propriedade de unicidade de soluções, se pode deduzir que para um dado *p* há uma única órbita $\gamma(p)$ passando através deste ponto. Em outras palavras duas órbitas distintas não podem se intersectar.

A *semi-órbita positiva* passando por *p* é denotada por $\gamma^+(p)$ e definida como

$$\gamma^+(p)=\left\{x\in\mathbb{R}^n : x=x(t,p), t\geq 0\right\}, \tag{2.12}$$

e similarmente, define-se

$$\gamma^-(p)=\left\{x\in\mathbb{R}^n : x=x(t,p), t\leq 0\right\}, \tag{2.13}$$

como a *semi-órbita negativa* passando por *p*.

O conjunto ω*-limite* da órbita de (2.10) é denotado por $\omega(\gamma^+)$ e definido como

$$\begin{gathered}\omega(\gamma^+)=\{y\in\mathbb{R}^n : \text{exista uma sequência crescente de tempos}\\ (t_k), t_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty, \text{tal que } x(t_k,p)\xrightarrow{k\to\infty} y\}.\end{gathered} \tag{2.14}$$

Similarmente, o conjunto α*-limite* é definido da mesma forma de (2.14) com a única exceção que *t* é trocado por *–t*.

Finalmente, um conjunto $M\subset\mathbb{R}^n$ é chamado de *invariante* para (2.10) se para qualquer $p\in M$, então $x(t,p)\in M$ para todo $t\in(-\infty,\infty)$.

Observe que pelas definições dadas qualquer órbita é um conjunto invariante. Em outras palavras, um conjunto invariante *M* é caracterizado pelo fato que se um ponto *p* está em M então toda trajetória indo para o futuro ou para o passado estará em M. As propriedades do conjunto ω*-limite* são resumidas no seguinte Teorema.

Teorema 2.4: O conjunto ω*-limite* de uma órbita γ do sistema autônomo (2.10) é fechado e invariante. Também, se a semiórbita positiva, γ^+, é limitada, então o conjunto ω*-limite* é não vazio, compacto, conexo e a distância entre $x(t,p)$ e $\omega(\gamma^+)$ aproxima-se de 0 quando $t \to \infty$.

Demonstração: Ver Hale [8] (p.47).

Teorema 2.5: Seja $f(x)$ de (2.10) continuamente diferenciável em um subconjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^n$ e considere $V(x)$ uma função real continuamente diferenciável em D tal que $V(x) \geq 0$ e $\dot{V}(x) \leq 0$ para $x \in D$. Suponha que $x(t)$ seja uma solução de (2.10) para todo $t \geq 0$ e suponha que x_0 seja um ponto do conjunto ω*-limite* de $x(t)$. Então $\dot{V}(x_0) = 0$.

Demonstração: Ver Brock e Mallaris [3] (p.115).

Teorema 2.6: Seja $f(x)$ de (2.10) continuamente diferenciável em todo espaço $\mathbb{R}^n$ e seja $V(x)$ uma função real continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^n$ tal que $V(x) \geq 0$ e $\dot{V}(x) \leq 0$ para $x \in \mathbb{R}^n$ e $V(x) \to \infty$ quando $|x| \to \infty$. Então todas as soluções de $\dot{x} = f(x)$ existem em $[0, \infty)$ e são limitadas, e se existir um único x_0 tal que $\dot{V}(x_0) = 0$, este x_0 é um equilíbrio assintoticamente estável global.

Demonstração: Ver Brock e Mallaris [3] (p.116).

Exemplo 2.7: Considere a equação de Lienard

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0.$$

Tal equação é generalização de sistemas físicos como o pêndulo amortecido, o sistema massa mola. Ver Boyce e DiPrima [2] (p.265) para referências.

Pode-se escrever esta equação equivalentemente como o sistema,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -g(x) - f(x)y. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Seguindo como LaSalle e Lefschetz [10] (pp. 67-68) considere a função de Liapunov $V(x,y)$ dada por

$$V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x g(s)ds,$$

com derivada ao longo de uma solução obtida imediatamente por

$$\dot{V}(x,y)=y\dot{y}+g(x)\dot{x}=-f(x)y^2.$$

Assumindo que

(1) $xg(x)>0, \forall x\neq 0,$
(2) $f(x)>0, \forall x\neq 0,$
(3) $\int_0^x g(s)ds\to\infty$ quando $|x|\to\infty.$

Estas três hipóteses implicam que

(1) $V(x,y)\to\infty$ quando $|x|\to\infty,$
(2) $V(x,y)>0, \forall(x,y)\neq(0,0)$ e $V(0,0)=0,$
(3) $\dot{V}(x,y)\leq 0,$ se anulando somente nos eixos ordenados.

Portanto pelo teorema 2.6 é possível concluir que a 0-solução, $(x,y)=(0,0)$ possui estabilidade assintótica global.

2.3 Variedade Estável.

Nesta seção é retornada a discussão de estabilidade local e é introduzida a noção de *variedade estável*. O teorema 2.1 nos diz que se pelo menos um autovetor, de um sistema linearizado, tiver parte real positiva já é suficiente para instabilidade local. Porém o resultado exposto aqui nos diz basicamente que mesmo não sendo válida a estabilidade local de um equilíbrio, pode ser verdade que certo subconjunto de soluções com dados iniciais partindo de certo subconjunto convergirão para o equilíbrio. Para tornar mais profunda esta discussão precisa-se primeiro explicar a noção de *variedade*, segundo escrever o sistema de equações diferenciais e terceiro apresentar o teorema da variedade estável.

Primeiro, para explicar a noção de variedade se deve definir um *difeomorfismo*. Se U e V são conjuntos abertos do $\mathbb{R}^n$, uma função bijetora e diferenciável $h:U\to V$ com uma inversa diferenciável $h^{-1}:V\to U$ é chamada de difeomorfismo. Um subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ é chamado de uma *variedade de dimensão k* se para todo ponto $x\in S$, existem um conjunto aberto U contendo x, um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, e um difeomorfismo $h: U \to V$ tal que

$$h(U \cap S) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \{y \in V : y^{k+1} = \cdots = y^n = 0\}.$$

Em outras palavras, uma variedade de dimensão k é um espaço que é localmente difeomórfico ao espaço euclidiano de dimensão *k*. Para uma discussão mais detalhada sobre o tema ver Lima [12] e Spivak [15].

Segundo, o sistema de equações considerado é dado por

$$\dot{x} = Ax + h(t,x). \tag{2.16}$$

Com a matriz real *A*, de dimensão $n \times n$, tendo todos os autovalores com parte real não nula com pelo menos um deles tendo parte real negativa. A função $h(t,x):[0,\infty) \times D \to \mathbb{R}^n$ é assumida continua em ambas variáveis e D é um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ contendo a origem, com $h(t,0) = 0$ para $t \geq 0$ e finalmente dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ e $T > 0$ tais que

$$|h(t,x) - h(t,y)| \leq \varepsilon |x - y|, \tag{2.17}$$

para $t \geq T$, $|x| \leq \delta$ e $|y| \leq \delta$.

A hipótese em A permite a distinção entre *k* autovalores com parte real negativa e *n-k* autovalores com parte real positiva. E por fim é apresentado:

Teorema 2.7: (Variedade Estável). Suponha que a matriz *A* e a função $h(t,x)$ de (2.16) satisfaçam as hipóteses acima e suponha que *k* autovalores de *A* possuam partes reais negativas e *n-k* partes reais positivas. Então existe uma variedade S, de dimensão k, contendo a origem e tendo as seguintes propriedades:

(i) Qualquer solução $x(t)$ de (2.16) partindo de S em $t = t_0$ para t_0 suficientemente grande, satisfaz $x(t) \to 0$ quando $t \to \infty$;

(ii) Existe um $\eta > 0$, suficientemente pequeno tal que qualquer solução $x(t)$ próximo à origem mas não pertencente a *S* em $t = t_0$ não pode satisfazer $|x(t)| \leq \eta$ para todo $t \geq t_0$.

Demonstração: Ver Coddington e Levinson [4] (pp. 330-333).

CAPÍTULO 3

CONTROLE ÓTIMO

3.1 Introdução.

Neste capítulo é tratado o problema de Controle Ótimo. São anunciadas condições necessárias, as quais soluções do problema devem satisfazer. Também são discutidos casos especiais nos quais são fornecidos condições suficientes. Para maiores informações sobre problemas de controle ver Leitão [11].

Um problema de controle é estabelecido a partir de uma variável de estado evoluindo de acordo com certa dinâmica, denominada *equação de estado* ou *lei do movimento*

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad t > t_0 \tag{3.1}$$

partindo de um estado inicial $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, onde

- (i) $x : I \to \mathbb{R}^n$, é uma função com I contendo t_0;
- (ii) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma função(relacionada com o modelo estudado);
- (iii) $u : \mathbb{R} \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ é uma função contínua por partes.

A função u assume valores em um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, ou seja, $u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, $t \geq t_0$, e será chamada de *controle do sistema*. Note que o controle adotado influencia a *equação de estado* (3.1).

Para um problema de controle ótimo, o objetivo é maximizar funcionais do tipo

$$I(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} U(t, x(t), u(t))dt$$

onde $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é dita *função utilidade* com x e u relacionados pela dinâmica $\dot{x} = f(t,x,u)$, $t \in (t_0, t_1)$ com $x(t_0) = x_0$ e $u(t) \in \Omega$. Em resumo, denota-se o problema da forma seguinte:

$$(PC)\begin{cases} \max\limits_{\{x,u\}} \int_{t_0}^{t_1} U(t,x(t),u(t))dt \\ s.a \\ u:[t_0,t_1]\to\Omega, \text{ contínua por partes;} \\ \dot{x} = f(t,x,u),\ t\in(t_0,t_1), \\ x(t_0)=x_0\ e\ \ x(t_1)\ livre. \end{cases}$$

O conjunto das funções contínuas por partes com contradomínio $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ é denominado *controles admissíveis*. Daqui para frente é admitido que f e $U\in C^2$. Além de que será mantido o controle "u" e seu estado correspondente "*x*" como admissíveis.

Para um controle admissível u^*, diz-se que o par $(x^*(t),u^*(t)):[t_0,t_1]\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ é uma solução de (*PC*) se $I(x,u)\le I(x^*,u^*)$, para qualquer par (x,u) admissível.

O problema (*PC*) acima será utilizado para exibir condições necessárias e suficientes para soluções, tendo em vista que este é o problema mais simples de controle ótimo.

3.2 Condições necessárias.

O resultado que fornece condições necessárias para um problema de controle é conhecido como *Princípio do Máximo de Pontryagin*. Este resultado é forte, no sentido que abrange problemas de controle mais gerais. Será fornecido um enunciado ajustado ao problema (*PC*) e será omitida sua demonstração por ser muito técnica e para não sair do objetivo desse trabalho. Ainda assim é exibida uma discussão heurística do nosso problema, em dimensão 1, a fim de ilustrar o princípio. Para mais detalhes ver Leitão [11].

Teorema 3.1 (Princípio do Máximo para (*PC*)): Para que $(x^*(t),u^*(t))$ seja uma solução ótima do problema (*PC*), é necessário que exista uma função contínua $p:[t_0,t_1]\to\mathbb{R}^n$, com $p(t)=(p_1(t),...,p_n(t))$, tal que para todo $t_0\le t\le t_1$, u^* maximiza a *função Hamiltoniana H*, definida por:

$$H(t,x,u,p)=U(t,x,u)+\sum_{i=1}^{n} p_i f_i(t,x,u),$$

Isto é,

$$H(t, x^*(t), u, p(t)) \leq H(t, x^*(t), u^*(t), p(t)).$$

E exceto nos pontos de descontinuidade de $u^*(t)$ vale a seguinte equação,

$$\dot{p}_i(t) = -\partial H(t, x^*(t), u^*(t), p(t)) / \partial x_i, \;\; i = 1, ..., n.$$

Além disso, as seguintes *condições de transversalidade* são satisfeitas:

$$p_i(t_1) = 0, \;\; i = 1, ..., n.$$

Exposto o teorema, existem fatos a serem esclarecidos, tais como a existência de tal função $p(t)$ e a importância da definição de uma função auxiliar $H(t, x, u, p)$ denominada *função Hamiltoniana*. Para ilustrar o aparecimento das funções acima, como em Kamien e Schwartz [9] (p.124) apresentam um argumento heurístico do *Princípio do Maximo* para (*PC*) com *U*, *f* e *u* a valores reais.

Recordando que *x* e *u* são chamadas de funções admissíveis, se *x* e *u* satisfazem

$$\begin{aligned} &u:[t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ tal que } u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ &\dot{x} = f(t, x, u), \;\; t \in (t_0, t_1), \;\; x(t_0) = x_0 \;\; e \;\; x(t_1) \;\; livre. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Para dar inicio a discussão heurística, veja que para qualquer função *p* continuamente diferenciável definida em $t_0 \leq t \leq t_1$, tem-se:

$$\int_{t_0}^{t_1} U(t, x(t), u(t))dt = \int_{t_0}^{t_1} [U(t, x(t), u(t)) + p(t) f(t, x(t), u(t) - p(t)\dot{x}]dt. \tag{3.3}$$

Integrando o último termo do lado direito de (3.3) por partes obtêm

$$-\int_{t_0}^{t_1} p(t)\dot{x}(t)dt = -p(t_1)x(t_1) + p(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \dot{p}(t)x(t)dt. \tag{3.4}$$

Substituindo (3.2) em (3.1) tem-se

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} U(t, x(t), u(t))dt = \int_{t_0}^{t_1} &[U(t, x(t), u(t)) + p(t) f(t, x(t), u(t)) + \dot{p}(t)x(t)]dt \\ &- p(t_1)x(t_1) + p(t_0)x(t_0). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Agora para um controle *u(t)* admissível, juntamente com a lei do movimento e a condição inicial, dados em (3.2), note que $u(t)$ determina a trajetória de uma variável de estado *x(t)* correspondente. Assim pode-se falar em encontrar o controle ótimo uma vez que a função de estado está implícita.

Considere uma família de controles de comparação $u^*(t)+ah(t),$ onde $u^*(t)$ é um controle ótimo, $h(t)$ é uma função fixa tal que $h(t_0)=0$ e *"a"* é um parâmetro que gera tal família. Seja $y(t,a),\ t_0 \le t \le t_1$, a variável de estado gerada pela família de controles acima. É assumido que $y(t,a)$ seja suave (ver Lima [12] e Spivak [15]) em ambos os argumentos, claramente *a=0* fornece a trajetória ótima x^*. Fixando x^*, u^* e *h* segue que o valor do funcional objetivo depende apenas do parâmetro "*a*", assim

$$J(a)=\int_{t_0}^{t_1} U(t,y(t,a),u^*(t)+ah(t))dt\ .$$

Usando (3.5)

$$\begin{aligned} J(a)=\int_{t_0}^{t_1} [U(t,y(t,a),u^*(t)+ah(t)) \\ + p(t)f(t,y(t,a),u^*(t)+ah(t)) \\ + \dot{p}(t)y(t,a)]dt - p(t_1)y(t_1,a)+p(t_0)y(t_0,a). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Como u^* é um controle ótimo, a função *J(a)* assume um máximo em *a=0*. Portanto $J'(0)=0$. Pelas hipóteses assumidas se pode aplicar a regra de Leibniz de diferenciar sob o sinal de integral (ver Lima [12]). Assim diferenciando (3.6) em relação à *"a"*, calculada no ponto *a=0,* segue que

$$J'(0)=\int_{t_0}^{t_1} [(U_x+pf_x+\dot{p})y_a+(U_u+pf_u)h]dt - p(t_1)y_a(t_1,0)=0, \tag{3.7}$$

onde U_x, f_x, U_u, f_u e y_a denotam as derivadas parciais das funções correspondentes. Uma vez que *a=0,* as funções são calculadas ao longo de $(t,x^*(t),u^*(t))$. O termo $p(t_0)y(t_0,a)$ de (3.6) é independente de "*a"*. De fato, $y_a(t_0,a)=0$, pois $y(t_0,a)=x_0, \forall a.$

Para validade do argumento até esse ponto, necessita-se apenas que *p(t)* seja diferenciável. O impacto preciso das mudanças nos controles sobre o curso da variável de estado (i.e., y_a) é difícil de determinar. Deste modo *p(t)* é escolhida a fim de eliminar a necessidade de fazê-lo. Justamente *p(t)* deve satisfazer a seguinte equação diferencial

$$\dot{p}(t)=-[U_x(t,x^*,u^*)+p(t)f_x(t,x^*,u^*)], \tag{3.8}$$

com $p(t_1)=0$. Para *p(t)* dada em (3.8), (3.7) será válida desde que

$$\int_{t_0}^{t_1} [U_u(t,x^*,u^*)+pf_u(t,x^*,u^*)]h\,dt=0, \tag{3.9}$$

para alguma função *h(t)*. Assume-se que *h(t)* possa ser escolhida como

$$h(t) = U_u(t, x^*, u^*) + p(t) f_u(t, x^*, u^*),$$

então de (3.9)

$$\int_{t_0}^{t_1} [U_u(t, x^*(t), u^*(t)) + p(t) f_u(t, x^*(t), u^*(t))]^2 dt = 0, \qquad (3.10)$$

que implica na condição necessária de

$$U_u(t, x^*, u^*) + p \cdot f_u(t, x^*, u^*) = 0, \;\; t_0 \le t \le t_1. \qquad (3.11)$$

Resumindo, foi mostrado que se as funções $u^*(t), x^*(t)$ são soluções de (*PC*) então existe uma função continua *p(t)* e juntamente com $u^*(t), x^*(t)$ satisfazem a *equação de estado*

$$\dot{x} = f(t, x, u), \;\; x(t_0) = x_{0,} \qquad (3.12)$$

a *equação adjunta (ou de coestado)*

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -[U_x(t, x^*, u^*) + p \cdot f_x(t, x^*, u^*)], \\ p(t_1) &= 0. \end{aligned} \qquad (3.13)$$

e a *condição de otimização*

$$U_u(t, x^*, u^*) + p \cdot f_u(t, x^*, u^*) = 0, \;\; t_0 \le t \le t_1. \qquad (3.14)$$

O dispositivo para lembrar ou gerar as condições acima é a *Hamiltoniana*

$$H(t, x(t), u(t), p(t)) \equiv U(t, x, u) + pf(t, x, u), \qquad (3.15)$$

e é obtido portanto que

$$\begin{aligned} &\partial H / \partial u = 0, \\ &-\partial H / \partial x = \dot{p}, \\ &\partial H / \partial p = \dot{x}, \end{aligned}$$

geram as equações (3.14), (3.13), (3.12) respectivamente. Além disso, tem-se que $x(t_0) = x_0$ e $p(t_1) = 0.$ Como em cada ponto *t*, u^* é um ponto estacionário da *Hamiltoniana* para valores dados de *x* e *p*, pela equação (3.14) pode escrever u^* como função de *x* e *p* e substituir em (3.12) e (3.13) para obter um sistema de equações diferenciais em *x* e *p*.

Para problemas do tipo (*PC*), Kamien e Schwartz [9] indicam que também é necessário que $u^*(t)$ maximize a Hamiltoniana em relação a *u*. Assim é exigido

$$H_{uu}(t, x^*, u^*, p) \le 0.$$

Exemplo 3.1: Considere o seguinte problema de controle

$$\max_{\{x,u\}} \int_0^1 (x(t)+u(t))dt$$
$$s.a: \ \dot{x} = 1-u^2, \ \ x(0)=1.$$

Formando a Hamiltoniana para o problema acima

$$H(t,x,u,p) = x+u+p(1-u^2).$$

As condições necessárias são

$$\begin{aligned} &\dot{x} = 1-u^2, \ \ x(0)=1; \\ &\dot{p} = -H_x = -1, \ \ p(1)=0 \\ &H_u = 1-2pu = 0, \ \ H_{uu} = -2p \leq 0. \end{aligned}$$

Integrando a equação diferencial em *p*, é obtido

$$p = 1-t.$$

E substituindo *p* em H_u e H_{uu} tem-se

$$\begin{aligned} &u = 1/2(1-t), \\ &H_{uu} = -2(1-t) \leq 0, \ \text{em } 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Como foi obtido o controle ótimo explicitamente, é possível resolver a lei do movimento para variável de estado. De fato:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - \dfrac{1}{4(1-t)^2}, \\ x(0) = 1; \end{cases}$$

com solução

$$x(t) = t - \frac{1}{4(1-t)} + \frac{5}{4}.$$

3.3 Condições suficientes.

O Princípio do Máximo nos propõe um conjunto de funções candidatas a solução de um problema de controle ótimo via as condições necessárias. Porém nada nos informa se alguma candidata é ótima, ou mais geralmente se existe um ótimo para o problema.

Nesta seção é estabelecido um resultado que; caso as funções x^*, u^* e p satisfaçam as condições necessárias, então estas condições também são suficientes para um problema de controle ótimo.

Definição 3.1: Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, X é convexo se $\forall x_1, x_2 \in X$ implica $(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 \in X$, para $0 \le \alpha \le 1$. Se X é convexo, uma função $g : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, é côncava se

$$\alpha g(x) + (1-\alpha) g(y) \le g(\alpha x + (1-\alpha) y)$$

para todo $0 \le \alpha \le 1$ e quaisquer $x, y \in X$. Caso a desigualdade seja estrita no aberto (0,1) é dito que *g* é estritamente côncava. Além disso, dizemos que *g* é convexa se $-g$ é côncava.

Antes de prosseguir, serão anunciadas duas propriedades das funções côncavas. Para mais detalhes sobre funções côncavas ver Fuente [7] Capítulo 6.

Proposição 3.1: Dado $X \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Seja $g : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função C^1. Então *g* é côncava se e somente se dados $x_1, x \in X$ tem-se $g(x) - g(x_1) \le Dg(x_1) \cdot (x - x_1)$. Aqui $Dg(x_1)$ é a diferencial de *g* no ponto x_1.

Proposição 3.2: Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ convexo e $g : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função C^2. Então *g* é côncava se e somente se a matriz *Hessiana* das segundas derivadas parciais $D^2 g(x)$ é semidefinida negativa para qualquer $x \in X$. Isto é

$$\forall x \in X \text{ e } \forall h \in \mathbb{R}^n,\ h^T D^2 g(x) h \le 0,$$

onde h^T é o vetor transposto de *h*.

Considere o problema, com a condição de que *U* e *f* sejam continuamente diferenciáveis

$$
(PC)\begin{cases}
\max\limits_{\{x,u\}} \int_{t_0}^{t_1} U(t,x(t),u(t))dt \\
s.a \\
u:[t_0,t_1]\to\Omega, \text{ contínua por partes;} \\
\dot{x} = f(t,x,u),\ t\in(t_0,t_1), \\
x(t_0)=x_0 \ e \ x(t_1) \ livre.
\end{cases}
$$

Aqui é recordado por conveniência às condições necessárias e a lei do movimento que funções candidatas devem satisfazer em $t_0 \le t \le t_1$,

$$\partial H/\partial u = U_u(t,x^*,u^*) + p\cdot f_u(t,x^*,u^*) = 0\ , \tag{3.16}$$

$$\begin{gathered} -\partial H/\partial x = \dot{p} = -[U_x(t,x^*,u^*) + p\cdot f_x(t,x^*,u^*)], \\ p(t_1)=0, \end{gathered} \tag{3.17}$$

$$\begin{gathered} \dot{x} = f(t,x,u), \\ x(t_0)=x_0. \end{gathered} \tag{3.18}$$

Teorema 3.2: Sejam U e f funções côncavas em cada variável x e u. Se

$$p(t)\ge 0, \tag{3.19}$$

para todo $t\in[t_0,t_1]$, então as condições necessárias (3.16) até (3.18) são também suficientes para otimização.

Demonstração: Considere que x^*, u^* $e\ p$ satisfaçam (3.16) até (3.19). Sejam *x, u* funções admissíveis satisfazendo (3.16). Denotando por U^*, f^* as respectivas funções calculadas ao longo de $(t,x^*(t),u^*(t))$ e U, f ao longo de $(t,x(t),u(t))$. Então se deve mostrar que

$$D \equiv \int_{t_0}^{t_1} (U^*(t,x^*(t),u^*(t)) - U(t,x(t),u(t)))dt \ge 0. \tag{3.20}$$

Uma vez que U e f são côncavas em (*x*,*u*), pela Proposição 3.1

$$\begin{gathered} U^* - U \ge (x^*-x)U_x^* + (u^*-u)U_u^*, \\ f^* - f \ge (x^*-x)f_x^* + (u^*-u)f_u^*, \end{gathered} \tag{3.21}$$

e portanto

$$D \geq \int_{t_0}^{t_1} (x^*(t) - x(t))U_x^* + (u^*(t) - u(t))U_u^* dt. \tag{3.22}$$

Utilizando (3.16) e (3.17), (3.22) implica

$$D \geq \int_{t_0}^{t_1} (x^*(t) - x(t))(-p(t) f_x^* - \dot{p}(t)) + (u^*(t) - u(t))(-p(t) f_u^*) dt. \tag{3.23}$$

Integrando por partes os termos em (3.23) que possuem $\dot{p}$ e usando (3.18) para x^*, x e o fato $p(t_1) = 0$, segue que:

$$\begin{aligned} D &\geq \int_{t_0}^{t_1} p(t)[f^* - f - (x^*(t) - x(t)) f_x^* - (u^*(t) - u(t)) f_u^*] dt \\ &\geq 0, \end{aligned} \tag{3.24}$$

pois *f* é côncava em (*x*,*u*) e por (3.19).‖

Observação 3.1: Se *f* é linear em (*x*,*u*) então *p* não precisa da condição (3.19) para a validade do Teorema 3.2 pois a expressão no colchete de (3.24) é igual a zero.

3.4 Alguns resultados e especificações para problemas econômicos.

Nesta seção é especificado o problema de controle ótimo a fim de moldá-lo em uma forma a qual abrange uma grande classe de problemas que surgem naturalmente em economia. Primeiro é adicionado à função utilidade um fator de desconto a uma taxa constante e são deduzidas as equações necessárias de otimalidade de uma forma modificada. Em seguida é tratado o problema onde o horizonte de planejamento seja infinito, i.e, no tempo $[0, +\infty)$. E por fim será discutida a interpretação econômica para a função de coestado *p(t)*.

Em problemas econômicos muitas variáveis tem seu valor mudado com o passar do tempo, como por exemplo as finanças. É natural que valores futuros de recompensas e despesas sejam descontados para o tempo inicial a uma taxa $\rho \geq 0$. Assim o problema a tratar fica da forma:

$$
(PCD)\begin{cases}
\max\limits_{\{x,u\}} \int_0^T e^{-\rho t} U(t, x(t), u(t)) dt \\
s.a, \\
u : [t_0, t_1] \to \Omega, \text{ contínua por partes;} \\
\dot{x} = f(t, x, u), \\
x(0) = x_0 \ e \ \ x(T) \ livre.
\end{cases}
$$

Nas notações anteriores, as condições necessárias para tal problema são obtidas da função Hamiltoniana, que neste caso é expressa por

$$
H(t, x, u) = H = e^{-\rho t} U(t, x, u) + pf(t, x, u). \tag{3.25}
$$

É desejado que (x, u, p) satisfaça (3.13) e (3.14). Nestas condições;

$$
H_u = e^{-\rho t} U_u + pf_u = 0, \tag{3.26}
$$

$$
\begin{aligned}
&\dot{p} = -H_x = -e^{-\rho t} U_x - pf_x, \\
&p(T) = 0.
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

Pode-se assim observar nas equações acima que os valores das utilidades marginais, as derivadas parciais de *U*, são descontados para valores até o tempo inicial zero.

É conveniente conduzir sempre uma discussão em termos dos valores correntes, ao invés dos valores descontados até o tempo inicial. Além disso, como será demonstrado a seguir, se tiver por hipótese adicional que tanto *U* como *f* não dependam explicitamente de *t* então as equações diferenciais geradas pelo Teorema 3.1 serão autônomas.

Para isto, se deve escrever a Hamiltoniana da seguinte forma

$$
H(t, x, u) = H = e^{-\rho t} [U(t, x, u) + e^{\rho t} pf(t, x, u)], \tag{3.28}
$$

e definir

$$
q(t) \equiv e^{\rho t} p(t). \tag{3.29}
$$

Denominando $q(t)$, como função de *coestado a valores correntes* e escrevendo

$$
H^c(t) \equiv e^{\rho t} H = U(t, x(t), u(t)) + q(t) \cdot f(t, x(t), u(t)). \tag{3.30}
$$

H^c é definida como a *função Hamiltoniana a valores correntes*.

Diferenciando (3.29) com respeito a *"t"* por (3.30) segue

$$
\begin{aligned}
\dot{q}(t) &= \rho e^{\rho t} p(t) + e^{\rho t} \dot{p}(t) \\
&= \rho q - e^{\rho t} H_x.
\end{aligned} \tag{3.31}
$$

E como, $H = e^{-\rho t} H^c$, usando (3.27) então (3.31) pode ser escrita

$$\begin{aligned}\dot{q}(t) &= \rho q - e^{\rho t}\partial(e^{-\rho t}H^c)/\partial x \\ &= \rho q - e^{\rho t}e^{-\rho t}H_x^c \\ &= \rho q - H_x^c \\ &= \rho q - U_x - qf_x.\end{aligned} \tag{3.32}$$

Mais ainda, (3.26) fica

$$H_u = \partial(e^{-\rho t}H^c)/\partial u = e^{-\rho t}\partial H^c/\partial u = 0,$$

que implica

$$\partial H^c/\partial u = 0. \tag{3.33}$$

Finalmente, pode-se recuperar a *equação de estado* (3.1) também em termos da *Hamiltoniana a valores correntes*., por (3.30),

$$\dot{x} = \partial H^c/\partial q = f. \tag{3.34}$$

Resumindo, (3.25) até (3.27) pode ser formalizado de forma equivalente no caso de H^c como:

$$H^c \equiv e^{\rho t}H = U(t,x,u) + q(t)f(t,x,u) \tag{3.35}$$

$$\partial H^c/\partial u = U_u + qf_u = 0 \tag{3.36}$$

$$\dot{q}(t) = \rho q - H_x^c = \rho q - U_x - qf_x. \tag{3.37}$$

A *condição de transversalidade* do Teorema 3.1 segue de modo natural para valores correntes, pois

$$p(T) = e^{-\rho T}q(T) = 0 \text{ implica } q(T) = 0.$$

Observe que (3.36) e (3.37) não possuem nenhum termo descontado. Além disso, se t não for um argumento explícito de U e f, então o sistema (3.34), (3.36) e (3.37) é um sistema autônomo. Resolvendo (3.36) para *u=u(q,x,)* em termos de q e x, e substituindo em (3.34) e (3.37), é obtido como resultado um sistema de equações diferenciais autônomas.

Em economia, muitas vezes é conveniente assumir que o horizonte de planejamento seja para sempre. Neste caso, o funcional a ser maximizado torna-se uma integral imprópria , que pode não convergir. Neste ponto de vista o problema de controle fica como:

$$(PCDI)\begin{cases} \max\limits_{\{x,u\}} \int_0^\infty e^{-\rho t}U(t,x(t),u(t))dt, \\ Sujeito\, a \;\; u \in \Omega, \\ \dot{x} = f(t,x,u), \\ x(0) = x_0 . \end{cases}$$

Se existir um ótimo para o problema, as condições necessárias obtidas do *Princípio do Maximo* ainda são válidas com exceção das condições de transversalidade, como em Fuente [7] (p. 527).

Por outro lado, em horizonte infinito, tem-se um teorema que garante suficiência de trajetórias ótimas desde que sejam verificadas as seguintes *condições de transversalidade no infinito*:

$$\text{(i)} \quad \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} p(t) \geq 0,$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} p(t)x(t) = 0.$$

Aqui, e no restante do texto, adotaremos $p(t)$ como a variável de coestado a *valores correntes*.

O próximo teorema resume a discussão:

Teorema 3.3 (Princípio do Máximo e Condições suficientes (*PCDI*)): Se x^* e u^* são soluções do problema (*PCDI*), então existe uma função contínua $p:[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$, com $p(t) = (p_1(t),..., p_n(t))$, com

$$H(t,x^*(t),u,p(t)) \leq H(t,x^*(t),u^*(t),p(t)),$$

para qualquer $t\in[0,\infty)$. Além de que, exceto nos pontos de descontinuidade de u^* tem-se,

$$\dot{p}_i = \rho p - \partial H(t,x^*,u^*,p)/\partial x_i,$$

para $i = 1,...,n$. O par (x^*,u^*) satisfaz a lei do movimento,

$$\dot{(x^*)} = f(x^*,u^*,t).$$

Além disso, seja o Hamiltoniano (a valores correntes) maximizado, $H^0(x,p) \equiv \max\limits_u H(x,u,p)$ uma função côncava de *x*. Quaisquer funções x, u e p são ótimas se satisfazem as condições do *Princípio do Máximo* e as *Condições de Transversalidade* no infinito

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} p(t) \geq 0 \;\text{ e }\; \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} p(t)x(t) = 0.$$

Demonstração: Ver Fuente [7] (p.528).

Observação 3.2: Observe que se U e f forem côncavas em (x,u), então $H^0(x,p) = \max_u H(x,u,p)$ é côncava em x.

O próximo passo é apresentar uma interpretação interessante na economia, da variável de coestado. Considere o problema (*PCDI*) com U e f continuamente diferenciável. Supondo para o problema (*PCDI*) a existência de soluções (x^*, u^*) para cada (t_0, x_0), é possível calcular o valor da integral do problema para todo par (x^*, u^*) ótimo. Então este número é finito e dessa maneira se pode definir uma função que depende em particular de x_0, t_0. Essa função é denotada por $V = V(x_0, t_0)$. Simbolicamente,

$$V(x_0,t_0) = \sup\left\{\int_{t_0}^{\infty}\left(e^{-\rho t}U(t,x(t),u(t))dt; (x,u)\, admissível.\right)\right\}$$

A função definida acima é chamada de *função valor ótimo* ou simplesmente *função valor*. Como mostrado em Arrow e Kurz [1] (p.35) tem-se os seguintes fatos:

(i) A função $V = V(x_0, t_0)$ não depende de t_0, ou seja, $V = V(x_0)$.

(ii) Caso a *função valor* seja diferenciável com respeito à x tem-se que

$$p^*(t) = V_x(x(t)) \tag{3.38}$$

onde p^* é a variável de coestado associada ao par ótimo de (*PCDI*).

A equação (3.38) significa que cada coordenada da variável de coestado é simplesmente a derivada parcial da função valor em ordem a correspondente coordenada da variável de estado, ou seja, $p_i^*(t) = \dfrac{\partial V(x(t))}{\partial x_i}$, $i = 1,\ldots,n$.

Assim a variável de coestado mede a variação na *função valor* dada uma pequena mudança na variável de estado x. Em termos da *Hamiltoniana a valores correntes* (3.30), $H^c = U + p \cdot f$, o primeiro termo (a função *U)* gera a utilidade corrente do agente econômico, e o segundo (o produto interno entre p e f) mede um possível acréscimo de valor devido a alterações na variável de estado x via (3.1) no início do capítulo. Portanto H^c pode ser vista como a soma da utilidade imediata mais o valor dos ganhos futuros que provêm da alteração na variável de estado. Pela equação (3.30), a variável de coestado é uma boa maneira de medir os ganhos futuros devido a variações no estado. Consequentemente é comum em economia considerar a variável de coestado a *valores correntes "p"* como o preço-sombra associado à mudança na variável de estado.

CAPÍTULO 4

ESTABILIDADE DE CONTROLE ÓTIMO

Neste capítulo são anunciados resultados de estabilidade, vistos no Capítulo 2, em problemas de controle ótimo, tema apresentado no capítulo anterior.

O primeiro resultado nessa direção é um resultado que garante que trajetórias que se aproximam de determinado equilíbrio, como por exemplo, as que iniciam em uma variedade estável são trajetórias ótimas de certos problemas de controle. Depois é anunciado um teorema sobre estabilidade global, para problemas de controle, que é uma aplicação direta dos resultados sobre o método direto de Liapunov, do Capítulo 2.

Neste capítulo são tratados especificamente problemas de controle com horizonte de planejamento infinito, a função utilidade e lei de movimento não dependem explicitamente da variável tempo. Para tanto nas notações anteriores considere: $U:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ uma função utilidade continuamente diferenciável, $x(t)\in\mathbb{R}^n$ o vetor de estado no tempo t, $u(t)\in\mathbb{R}^m$ o vetor de controle no tempo t e $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ uma lei de movimento continuamente diferenciável. É conveniente relembrar o assunto a trabalhar:

$$V(x_0)=\sup\int_0^\infty e^{-rt}U(x(t),u(t))dt, \tag{4.1}$$

sujeito a

$$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t)),\ x(0)=x_0.$$

Recordando que o supremo em (4.1) é calculado sobre funções admissíveis, i.e, o conjunto das funções contínuas por partes, tomando valores em um subconjunto $\Omega\subset\mathbb{R}^n$.

Como foi exposto no Capítulo 3, é conveniente escrever a expressão simplificada para a Hamiltoniana a valores correntes para equação (4.1) com

$$H(x,u,p)=U(x,u)+p\cdot f(x,u). \tag{4.2}$$

Seja u^* o controle que maximiza (4.1), o Teorema 3.1, Princípio do Máximo, garante que existe uma função de coestado $p^*:[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ expressa em *valores correntes* tal que em cada intervalo de continuidade de $u^*(t)$, vale:

$$(\dot{p}^*)(t) = rp^*(t) - H_x^0(x^*(t), p^*(t)), \tag{4.3}$$

$$(\dot{x}^*)(t) = H_p^0(x^*(t), p^*(t)),\ x^*(0) = x_{0,} \tag{4.4}$$

onde $u^*(t)$ resolve

$$H^0(x^*(t), p^*(t)) \equiv \max_{u(t)\in\Omega} H(x^*(t), u(t), p^*(t)).$$

E se V_x existe, por (3.36) tem-se

$$p^*(t) = V_x(x^*(t)). \tag{4.5}$$

Observação 4.1: Note que se $U(\cdot)$ e $f(\cdot)$ são côncavas e existe V_{xx}, então V_{xx} será semidefinida negativa, pois $V(\cdot)$ será côncava.

Agora o objetivo é expor um modo no qual se pode verificar como o Teorema 2.7, o Teorema da Variedade Estável, aplicado juntamente com o Teorema 3.3 pode ser usado para analisar a estabilidade de trajetórias que determinam um ótimo.

Como no problema (4.1) a função utilidade e a lei do movimento não dependem do tempo explicitamente, as condições (4.3) e (4.4) geram um sistema autônomo de equações diferenciais. Este sistema oferece muitas vezes trajetórias de estado estacionário. O Teorema da Variedade Estável nos indica soluções que convergem para a solução estacionária. Assim se $(x^*(t), p^*(t))$ são trajetórias que satisfaçam as condições necessárias e sejam assintoticamente estáveis para algum equilíbrio com limite finito. Tais trajetórias devem satisfazer as condições de transversalidade no infinito apresentadas na seção 3.4, i.e,

$$\text{(i)}\quad \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} p(t) \geq 0,$$

$$\text{(ii)}\quad \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} p(t)x(t) = 0,$$

pois $e^{-rt}\to 0$ quando $t\to\infty$. Em resumo, tem-se o seguinte resultado:

Teorema 4.1 (Condições suficientes para trajetórias que aproximam de E.E)**:** Considere $x^*(t), u^*(t)\ e\ p^*(t)$ trajetórias que satisfaçam as condições necessárias para o problema (4.1), isto é, para todo $0 \leq t < \infty$ tem-se

$$H(x^*(t), u, p^*(t)) \leq H(x^*(t), u^*(t), p^*(t)).$$

Exceto nos pontos de descontinuidade de $u^*(t)$ é válida a equação

$$\dot{p}_i^* = \rho p^* - \partial H(x^*, u^*, p^*) / \partial x_i,\ \ i = 1, ..., n.$$

O par $x^*(t), u^*(t)$ satisfaz a lei do movimento

$$\dot{x}^*(t) = f(x^*(t), u^*(t)).$$

Se o Hamiltoniano (a valores correntes) maximizado $H^0(x, p) \equiv \max_u H(x, u, p)$ for uma função côncava de x e se x^* e p^* convergirem para um estado estacionário/equilíbrio $(\bar{x}, \bar{p})$ com $\bar{x}, \bar{p} \geq 0$, então $x^*(t)\, e\, p^*(t)$ definem um trajeto ótimo.

Demonstração: Ver Fuente [7] (p.529).

Este resultado é útil, como será visto no próximo capítulo, quando as condições de Pontryagin dão origem a um sistema autônomo de duas equações diferenciais em duas variáveis que possui algum equilíbrio com autovalores com partes reais com sinais opostos. Pois neste caso a variedade estável será unidimensional, e a trajetória que leva ao equilíbrio é caracterizada como ótimo.

O próximo passo é utilizar o método de Liapunov, visto no Capítulo 2, em problemas de Controle Ótimo.

Com o objetivo de buscar propriedades na Hamiltoniana que forneçam resultados de estabilidade global assintótica para o problema de controle, Brock e Mallaris [3] considera a seguinte classe de funções, com a matriz $G(p, x)$ definida positiva

$$W = \dot{x}^T G(p, x) \dot{x}.$$

Agora para que tal função seja uma função de Liapunov, $\dot{W}$ deve ser definida negativa ao longo de soluções da equação diferencial reduzida (simplificando x^*, u^* e p para x, u e p respectivamente):

$$\begin{cases} \dot{x} = H_p(p(x), x), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Supondo que vale a igualdade em (4.5) e calculando $\dot{W}$ a derivada com respeito a t ao longo de soluções da equação (4.6) é obtido

$$\begin{aligned}\dot{W} &= \ddot{x}^T G\dot{x} + \dot{x}^T G\ddot{x} + \dot{x}^T \dot{G}\dot{x} \\ &= [H_{pp}\dot{p} + H_{px}\dot{x}]^T G\dot{x} + \dot{x}^T G[H_{pp}\dot{p} + H_{px}\dot{x}] + \dot{x}^T \dot{G}\dot{x}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Assumindo que a função valor seja tal que $V_{xx}(\cdot)$ exista e seja semidefinida negativa, derivando no tempo (4.5), obtem

$$\dot{p}(t) = V_{xx}(x(t))\dot{x}(t)\,.$$

Portanto

$$\dot{p}^T \dot{x} = \dot{x}V_{xx}\dot{x} \le 0. \tag{4.8}$$

Retornando a equação (4.7), Brock e Mallaris [3] determina em condições especiais uma escolha como, $G = H_{pp}{}^{-1}$. Assim

$$\dot{W} = 2\dot{p}^T \dot{x} + \dot{x}^T[H_{pp}{}^{-1}H_{px} + (H_{pp}{}^{-1}H_{px})^T + (\dot{H}_{pp}{}^{-1})]\dot{x}\,. \tag{4.9}$$

Para aplicação no problema de custos de ajustamento de uma empresa tem o resultado:

Teorema 4.2: Sejam $p(\cdot), x(\cdot)$ soluções do sistema (4.3) e (4.4) tais que $\dot{p}^T \dot{x} \le 0$ em $[0,\infty)$. Assuma que $\dot{x}^T[H_{pp}{}^{-1}H_{px} + (H_{pp}{}^{-1}H_{px})^T + (\dot{H}_{pp}{}^{-1})]\dot{x} \le 0$ ao longo da solução x. Também assuma que a função valor seja duas vezes diferenciável. Então $x(t)$ converge para o maior conjunto invariante X contido em $\left\{\bar{x} : \dot{W}(V_x(\bar{x}), \bar{x}) = 0\right\}$.

Demonstração: Ver Brock e Mallaris [3] (p.150).

No Teorema 4.2 a distância entre dois conjuntos, $X, Z \subset \mathbb{R}^n$, é definida por:

$$d(Z, X) = \inf\{d(z,x); z \in Z \text{ e } x \in X\}.$$

Assim dizer que uma trajetória converge para um conjunto é equivalente a dizer que a distância da órbita e do conjunto em questão é tão próxima quanto desejada, quando o tempo tender ao infinito. Em notação matemática:

$$x(t) \to X \text{ se e somente se } d(x(t), X) \to 0 \text{ se } t \to \infty.$$

Relembrando que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de *invariante*, para um sistema de equações diferenciais autônomas, se para $p \in X$, a solução x que passa por p é tal que $x(t) \in X$ para todo $t \in (-\infty, \infty)$. Ainda sobre Teorema 4.2 é válido citar os seguintes fatos:

(i) Como a função $U(x,u)$ é côncava, V'' é semidefinida negativa e portanto $\dot{W}(x) \leq 0$ com a conclusão do Teorema 4.2 pelo Teorema 2.5, uma vez que os pontos do conjunto ω-limite estão contidos em $\left\{\bar{x} : \dot{W}(V_x(\bar{x}), \bar{x}) = 0\right\}$.

(ii) Muitas vezes a própria estrutura da função de Liapunov W e a lei do movimento f podem ser usadas para concluir que o maior conjunto invariante contido em $\left\{\bar{x} : \dot{W}(V_x(\bar{x}), \bar{x}) = 0\right\}$ é um ponto.

CAPÍTULO 5

CONTROLE ÓTIMO EMPRESARIAL COM CUSTOS DE AJUSTAMENTO

Neste capítulo é tratada, como em Treadway [16] e Lucas [13], a estrutura imposta sobre as decisões de uma empresa que se depara com *custos de ajustamento*. Tal estrutura gera um modelo que descreve o comportamento racional de uma empresa com o objetivo de maximizar o seu valor de mercado. Este comportamento é a solução de um problema de controle ótimo. Por fim são usados os resultados obtidos nos capítulos anteriores para analisar a estabilidade das possíveis soluções do modelo.

5.1 O Modelo.

O modelo apresentado a seguir é parte da teoria microeconômica conhecida como *teoria da empresa*, que junto com a *teoria do consumidor*, visam explicar o funcionamento dos mercados através das leis de oferta e demanda. Para maiores referências sobre o assunto ver Pindyck e Rubenfeld [14] e Varian [17].

A teoria da empresa, por sua vez, tenta modelar a questão de decisão por partes dos agentes econômicos que ofertam bens e serviços em uma economia. Para tanto é necessário que essas decisões tenham algum grau de regularidade. Essa regularidade é justificada pela hipótese de racionalidade, que diz basicamente que as empresas têm como objetivo a maximização de seus lucros. Tal hipótese torna possível o tratamento desta questão como um problema matemático de otimização dinâmica com restrição, mais precisamente um problema de controle ótimo.

A questão de estabilidade de pontos de equilíbrios torna-se substancial para a consistência dessa teoria. Na prática não há mercados com ofertas ilimitadas, uma vez que a população mundial é finita. E esses são alguns dos problemas que os economistas enfrentam.

Supondo que uma empresa tem um lucro (*revenue*) $R(t)$ calculado no tempo *t*, dado pela venda de um único produto (*output*) descontado os custos de remuneração de seus fatores de produção e os custos de aquisição de bens de investimentos, i.e:

$$R(t) = P(t)Q(t) - W(t)\cdot x(t) - G(t)\cdot I(t), \tag{5.1}$$

com

- *Q(t)* é a quantidade positiva do bem (*output*) produzido pela empresa no tempo *t*,
- *P*(t) é o preço do bem produzido,
- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de fatores de produção,
- $W(t) \in \mathbb{R}^n_+$ são os custos que remuneram os de fatores de produção,
- $G(t) \in \mathbb{R}^n_+$ é o vetor de preços associados ao investimento em fatores de produção,
- $I(t) \in \mathbb{R}^n$ é a taxa de acumulação de capital ou investimento bruto.

Admite-se durante o tempo em consideração que a empresa se encontre com *expectativas estacionárias*, isto é, os preços (P,W,G) não possuem incentivos para se alterarem e, portanto são mantidos constantes. A empresa tem uma restrição técnica, $T(Q,x,I)=0$ (para mais detalhes desta restrição ver Treadway [16]). Esta restrição define uma relação entre a quantidade de *output* Q e as variáveis x *e* I. Resolvendo para Q tem-se,

$$Q = F(x,I), \tag{5.2}$$

com hipóteses de $F \in C^2$ e as funções em (5.1) também serem consideradas diferenciáveis de ordem 2.

Se a empresa pode emprestar ou tomar emprestado em um mercado de capital competitivo a uma taxa de juros positiva "*r*" constante, é possível calcular o valor de mercado presente da empresa:

$$V = \int_0^\infty R(t)e^{-rt}dt \tag{5.3}$$

Observação 5.1: O modelo de uma empresa com custos de ajustamento que é proposto no presente trabalho assume a hipótese em que os preços *P,W,G* e *r* (onde a taxa de juros *r* é vista como o preço de se obter recursos no mercado) serão mantidos constantes ao longo do tempo. Tal hipótese é por sua vez irreal, visto que os preços variam constantemente numa economia real. Mas mesmo frente a tal limitação o modelo permite um válido entendimento teórico do comportamento empresarial. Tem-se o trabalho de Dzansi [6] para maiores informações sobre:

(i) As dificuldades de relacionar dados empíricos à formulação teórica.

(ii) Apresentar a teoria de investimento onde o modelo de custos de ajustamento assume uma expectativa de variação nos preços, isto é, preços como funções temporais,

A decisão empresarial tem como objetivo maximizar (5.3) escolhendo trajetórias para os usos dos fatores de produção. A maximização de (5.3) possui como restrição a hipótese de que a taxa líquida de acumulação dos fatores de produção $\dot{x}(t)$ é dada pela variável investimento bruto $I(t) \in \mathbb{R}^n$, descontada a depreciação linear dos estoques dos fatores de produção indicada pela matriz diagonal $\delta = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ com a_{ij} não negativas, isto é,

$$\dot{x} = I - \delta x, \tag{5.4}$$

e que algum estoque é herdado no início do planejamento com $x(0) = x_0$.

O investimento bruto, como é de decisão da empresa, é a variável de controle do modelo. Precisa-se justificar o fato da empresa apresentar *custos de ajustamento* $C(I)$. Considerando um estoque de fatores fixo, o custo de ajustamento é a relação entre a decisão da empresa em investir I e a quantidade de output produzida Q pela restrição (5.2). O ajustamento do estoque de fatores é um custo interno, geralmente se verifica momentaneamente, que um aumento dos recursos voltados ao investimento diminui a quantidade produzida de (*output*) no início, porém logo em seguida esta quantidade volta a crescer.

O modelo que será trabalhado possui ainda as seguintes especificações:

(1) Os fatores de produção (*x(t)*) serão considerados como capital, denotado por $K(t)$, e trabalho $L(t)$.

(2) A função $F(\bullet)$ de (5.2) será dada por

$$Q(K,L,I) = F(K,L,I) = f(K,L) - C(I)$$

A principal diferença entre o capital e o trabalho será que o capital será adquirido pela empresa enquanto o trabalho será contratado por um salário *W*. Matematicamente esta hipótese nos diz que a variável de estado no modelo será apenas o capital. E a escolha de uma função $F(\bullet)$ como acima, considera a função custo de ajustamento, dada por $C(I)$, independente dos estoques de fatores.

Finalmente nas notações do Capítulo 3, por (5.1), (5.2), (5.3), (5.4), (1) e (2), o modelo de uma empresa com ajustamento de custos pode ser resumido como:

$$\begin{aligned} &\max_{\{K,I\}} V = \int_0^\infty [Pf(K(t),L(t)) - PC(I(t)) - WL(t) - GI(t)]e^{-rt}dt, \\ &sujeito\, a: \ \dot{K} = I - \delta K, \\ &\qquad\qquad K(0) = K_0 > 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

5.2 Aplicação 1.

Assumindo nessa aplicação as seguintes hipóteses:

$$K(t), L(t) \in \mathbb{R} \tag{5.6}$$

$$f_K(K,L),\, f_L(K,L) > 0 \quad para\, K, L > 0, \tag{5.7}$$

$$f_{KK}(K,L),\, f_{LL}(K,L) < 0 \quad para\, K, L > 0, \tag{5.8}$$

$$0 < \lim_{L\to\infty} f_L(K,L) < W/P < \lim_{L\to 0} f_L(K,L) \quad para\, K > 0, \tag{5.9}$$

$$f_{KK} f_{LL} - (f_{KL})^2 > 0, \tag{5.10}$$

$$\frac{dC}{dI} = C' \text{ sobrejetiva,} \tag{5.11}$$

$$C'(I) > 0 \ se\, I > 0 \ e \ C'(I) < 0 \ se\, I < 0, \tag{5.12}$$

$$(C')' = C''(I) > 0. \tag{5.13}$$

É válido apresentar o significado econômico de algumas hipóteses acima, para mais detalhes ver Pindyck e Rubenfeld [14] e Varian [17]. (5.7) nos diz a razoável hipótese que se aumentarmos a quantidade de capital ou trabalho a empresa produzirá mais. Por sua vez (5.8) ilustra o princípio econômico de *produtividade marginal decrescente*, isto é, os ganhos de produtividade serão menores à medida que são expandidos os fatores *K* e *L*. Note que (5.8) junto com (5.10), que é o determinante da matriz Hessiana de *f*, significam na economia o conceito de *retornos decrescentes*, que reflete o fato de que os aumentos na escala dos fatores tendem a diminuir a magnitude da produtividade marginal desses estoques. Matematicamente esse conceito reflete a concavidade da função $f(K,L)$.

Nas notações do §3.4 a função Hamiltoniana a *valores correntes* de (5.5) é

$$H(K,L,I,p) = f(K,L) - C(I) - wL - gI + p[I - \delta K]. \tag{5.14}$$

onde $w = W/P$ e $g = G/P$. Aqui p é a variável de coestado de acordo com o Teorema 3.3 do Princípio do Máximo.

A condição necessária que fornece a demanda por trabalho ótima é a condição clássica de otimização estática, $\partial H/\partial L = 0$, que gera

$$f_L(K,L) = w, \tag{5.15}$$

que informa que o trabalho será contratado seguindo o critério de sua produtividade marginal ser igual ao salário real (w). E por (5.8) e (5.15) é possível escrever a demanda de trabalho ótima implicitamente como função do capital, isto é

$$L = L^*(K,w)$$

A condição (3.14) necessária para a maximização da Hamiltoniana em relação ao controle I ($\partial H/\partial I = 0$) é dada pela expressão:

$$-C'(I) - g + p = 0, \tag{5.16}$$

e por (5.12) e (5.13) é possível escrever o controle implicitamente como função de p (o parâmetro g é mantido fixo)

$$I = l(p,g) = l(p) = C^{-1}(g-p), \tag{5.17}$$

onde $(C')^{-1}$ é a inversa da função C' garantida por (5.12) e (5.13).

Além disso, pela regra da derivada da função inversa é valido

$$\frac{dI}{dp} = 1/C''(I) > 0. \tag{5.18}$$

Portanto a Hamiltoniana maximizada $H(K,L,I,p)$ possui a forma:

$$H(K,p) = f(K,L(K)) - C(l(p)) - wL - gl(p) + p[l(p) - \delta K],$$

e assim as *trajetórias ótimas* devem satisfazer o sistema autônomo:

$$\dot{p} = (r+\delta)p - f_K(K,L(K)), \tag{5.19}$$

$$\dot{K} = l(p) - \delta K. \tag{5.20}$$

Juntamente com as condições:

$$K(0) = K_0 > 0, \tag{5.21}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} p(t) \geq 0 \;\; e \;\; \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} p(t)K(t) = 0. \tag{5.22}$$

Nesta situação, (5.19) é a equação que a variável de coestado de satisfazer oriunda do Princípio do Maximo a valores correntes, (5.20) é a equação de estado do problema de controle, (5.21) é a condição inicial e (5.22) são as condições de transversalidade no infinito.

Para determinar os pontos de equilíbrio do sistema (5.19) e (5.20), calcula-se $\dot{p} = 0 = \dot{K}.$

Por (5.18), e usando (5.10) obtém

$$\frac{df_K}{dK} = f_{KK} - \frac{f_{KL}^2}{f_{LL}} < 0,$$

conclui-se que a monotonicidade de f_K e l em K e p respectivamente, caracteriza este único estado estacionário/equilíbrio $(\bar{p}, \bar{K})$, no quadrante positivo do plano de fase (p, K).

O próximo passo é linearizar o sistema em torno do estado estacionário. Definindo $f_K(K, L(K)) = h(K)$ e

$$\psi(p,K) = \begin{pmatrix} \psi_1(p,K) \\ \psi_2(p,K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r+\delta)p - h(K) \\ l(p) - \delta K \end{pmatrix}.$$

Nesta situação, pela regra de Taylor aplicada na função $\psi(p,K)$ em torno do ponto $(\bar{p}, \bar{K})$ tem-se,

$$\psi(p,K) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (r+\delta) & -h'(\bar{K}) \\ l'(\bar{p}) & -\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p - \bar{p} \\ K - \bar{K} \end{pmatrix} + R(p,K) \tag{5.23}$$

onde $R(p,K) = \begin{pmatrix} R_1(p,K) \\ R_2(p,K) \end{pmatrix}$ é a função resto. Portanto a sistema (5.19) - (5.20) possui linearização da forma seguinte:

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r+\delta) & -h'(\bar{K}) \\ l'(\bar{p}) & -\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p - \bar{p} \\ K - \bar{K} \end{pmatrix} + R(p,K), \tag{5.23'}$$

a matriz real $A = \begin{pmatrix} (r+\delta) & -h'(\bar{K}) \\ l'(\bar{p}) & -\delta \end{pmatrix}$ em (5.23') possui polinômio característico

$$\lambda^2 - [\delta + (r+\delta)]\lambda + \delta(r+\delta) + h'(\bar{K})l'(\bar{p}).$$

As raízes do polinômio característico são dadas por,

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4[(r+\delta)\delta - l'(\bar{p})h'(\bar{K})]}}{2}. \tag{5.24}$$

Como (5.10) e (5.18) implicam $l(p)h(K) < 0$ e todos os outros parâmetros do modelo são positivos segue que $\lambda_1 \, e \, \lambda_2$ possuem sinais opostos.

Agora note que como f e C são funções de classe C^2, tem-se $\psi \in C^1$. Assim ψ satisfaz a condição de Lipschitz, isto é, existe constante $M_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|\psi(p_1, K_1) - \psi(p_2, K_2)\| &\leq M_1 \|(p_1, K_1) - (p_2, K_2)\| \\ &= M_1 \|(p_1 - p_2, K_1 - K_2)\|. \end{aligned}$$

Aqui a norma considerada é a Euclidiana. Além disso, note que

$$\left\| A\begin{pmatrix} p_1 - \bar{p} \\ K_1 - \bar{K} \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} p_2 - \bar{p} \\ K_2 - \bar{K} \end{pmatrix} \right\| = \left\| A\begin{pmatrix} p_1 - p_2 \\ K_1 - K_2 \end{pmatrix} \right\|.$$

É obvio que existe $M_2 > 0$ tal que

$$\left\| A\begin{pmatrix} p_1 - p_2 \\ K_1 - K_2 \end{pmatrix} \right\| \leq M_2 \|(p_1 - p_2, K_1 - K_2)\|$$

Assim pode-se concluir que o resto definido por

$$R(p, K) = \begin{pmatrix} \psi_1(p, K) \\ \psi_2(p, K) \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} p - \bar{p} \\ K - \bar{K} \end{pmatrix},$$

é tal que

$$\begin{aligned} \|R(p_1, K_1) - R(p_2, K_2)\| &\leq \|\psi(p_1, K_1) - \psi(p_2, K_2)\| + \left\| A\begin{pmatrix} p_1 - p_2 \\ K_1 - K_2 \end{pmatrix} \right\| \\ &\leq M_1 \|(p_1 - p_2, K_1 - K_2)\| + M_2 \|(p_1 - p_2, K_1 - K_2)\|. \end{aligned}$$

Escolhendo $M = M_1 + M_2$ tem-se

$$\|R(p_1, K_1) - R(p_2, K_2)\| < M \|(p_1 - p_2, K_1 - K_2)\|.$$

Portanto o sistema linear (5.23') satisfaz as condições, incluindo (2.17), do Teorema 2.7 da Variedade Estável. Pode-se concluir que dado qualquer condição inicial $K_0 > 0$, existirá uma trajetória que será assintoticamente estável para o estado estacionário $\bar{K}$. Assim, aplicando o Teorema 4.1, esta trajetória será a trajetória ótima que o estoque de capital deve ter ao longo do tempo.

5.3 Aplicação 2.

Considerando nas notações anteriores outro modelo empresarial com custos de ajustamento, porém com n fatores de produção. Denotando-os por $K(t) \in \mathbb{R}^n$, restrito pela dinâmica

$$\dot{K} = I - \delta K,$$
$$K(0) = K_0 > 0.$$

Aqui, $\delta \in \mathbb{R}^{nxn}$, é uma matriz constante diagonal não negativa de depreciação do capital *K*.

Isto significa que se desconsidera os fatores como o trabalho da *aplicação 1*, pois com fatores dessa natureza a análise não se diferenciaria da tratada na aplicação anterior.

Além disso, assuma as seguintes hipóteses:

$$F : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R} \text{ é uma função de classe } C^2 \text{ e côncava em } K. \tag{5.25}$$

$$C : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R} \text{ é quadrática e convexa com Hessiana não singular.} \tag{5.26}$$

$$P \in \mathbb{R}_+ \text{ é o preço do bem produzido.} \tag{5.27}$$

$$G \in \mathbb{R}^n_+ \text{ é um vetor que indica os custos do investimento bruto.} \tag{5.28}$$

O modelo, portanto se torna,

$$\begin{aligned} &\max_{\{K,I\}} V = \int_0^\infty [Pf(K(t)) - PC(I(t)) - GI(t)]e^{-rt}dt, \\ &sujeito\, a: \;\; \dot{K} = I - \delta K, \\ &\qquad\qquad\; K(0) = K_0 >> 0. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Considere que para todo $K_0 \in \mathbb{R}^n_{++}$ esteja definido um ótimo contido nas fronteiras naturais. Seja este como $K^*(t, K_0) \in \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+, t \in [0, +\infty)$, com

$$\begin{aligned} &V(K_0) = \sup \int_0^\infty [Pf(K(t)) - C(I(t)) - GI(t)]e^{-rt}dt, \\ &s.a: \; \dot{K} = I - \delta K, \; K(0) = K_0, \end{aligned} \tag{5.30}$$

tal que $V(K_0)$ seja uma função de classe C^2.

Nestas condições pela equação (3.30), tem-se a função Hamiltoniana a *valores correntes*

$$H(K,I,P)=f(K)-C(I)-gI+p(I-\delta K), \tag{5.31}$$

onde $g=G/P$.

Portanto o investimento bruto deve ser tal que maximize a Hamiltoniana, cumprindo $\dfrac{\partial H}{\partial I}=0$, gerando assim a seguinte equação matricial,

$$-(DC)-g+p=0, \tag{5.32}$$

onde (DC) é a aplicação derivada da função *C*.

Mantendo o parâmetro *g* fixo como antes, pela hipótese (5.26), se pode inverter (5.30) tornando possível escrever o investimento como função do preço sombra,

$$I=u(p). \tag{5.33}$$

Substituindo a equação (5.33) a Hamiltoniana fica

$$H^*(K,p)=F(K)-C(u(p))-gu(p)+p(u(p)-\delta K). \tag{5.34}$$

Calculando as seguintes derivadas parciais de H^* é obtido (omitindo os asteriscos),

$$\frac{\partial H}{\partial p}=H_p=u(p)-\delta K \tag{5.35}$$

$$H_{pK}=-\delta, \tag{5.36}$$

$$H_{pp}=Du(p). \tag{5.37}$$

E neste caso, usando a Proposição 3.2, $H_{pp}=Du(p)$ é uma matriz constante semidefinida positiva, uma vez que é assumido $C(I)$ convexa e quadrática com Hessiana não singular e

$$\dot{(H_{pp}^{-1})}=0. \tag{5.38}$$

Por (4.5) tem-se $p(t)=V_K(K(t))$. Agora como a função utilidade $U(K,I)=Pf(K)-PC(I)-GI$ e a lei do movimento $h(K,I)=I-\delta K$ são côncavas, segue como na Observação 4.1 que a função valor $V(\cdot)$ é côncava com

$$\dot{p}^T\dot{K}=K^TV_{KK}K\le 0.$$

Pela discussão antes do Teorema 4.2 é possível escolher a função de Liapunov, $W(K(t))=\dot{K}^T[Du(p)]^{-1}\dot{K}$. Agora a verificação de $S=-[H_{pp}{}^{-1}\delta+(H_{pp}{}^{-1}\delta)^T]$ como definida negativa e a análise da estrutura do conjunto $\left\{K \in \mathbb{R}^n : \dot{W}(K) = 0\right\}$ nos permite aplicar o Teorema 4.2 para responder questões sobre estabilidade assintótica das trajetórias ótimas de estoque de capital.

5.4 Conclusões.

Dentro da modelagem do comportamento de uma empresa, a passagem de um modelo estático (que não considera o passar do tempo) para um modelo dinâmico fomentou inúmeras questões aos economistas. Como por exemplo, a existência de equilíbrios para quais as soluções ótimas tendem no longo prazo.

O conceito de estabilidade para uma empresa é desejável, bem como consistente com a teoria microeconômica. Uma vez que fornece um estoque de capital a qual a empresa deve aproximar-se através de sua política de investimento, não permitindo assim um resultado um tanto quanto irreal como a possibilidade de uma acumulação infinita.

Na primeira aplicação, onde se considera o capital unidimensional, é obtido um sistema Hamiltoniano cujas trajetórias se encontram no espaço de fase capital por preço-sombra. Através dos resultados desenvolvidos nos capítulos anteriores é conseguida a importante propriedade na qual a única trajetória que se aproxima do equilíbrio, é de fato a trajetória ótima para o modelo.

Já em dimensões maiores tem-se uma maior complexidade em caracterizar a variedade estável, juntamente com a possibilidade de não unicidade de trajetórias convergentes ao equilíbrio. É usado na segunda aplicação o Teorema 4.2 (Brock e Mallaris [3]) no modelo de uma empresa que enfrenta uma função custo de ajustamento quadrática. Tal escolha é justificada, pois no inicio da teoria microeconômica foi comum à escolha de funções custos com a forma de “U”. Portanto essa aplicação resolve a questão de estabilidade para uma classe significativa de problemas. O Teorema 4.2 permite desenvolver um teste simples. O teste consiste em verificar a matriz $S = -[H_{pp}{}^{-1}\delta + (H_{pp}{}^{-1}\delta)^T]$ como definida negativa e analisar a estrutura do conjunto $\left\{K \in \mathbb{R}^n : \dot{W}(K) = 0\right\}$, para assim caracterizar a estabilidade global das soluções do modelo estudado.

REFERÊNCIAS

[1] Arrow, K. J.; Kurz, M.; *Public Investment, the Rate of Returns, and Optimal Fiscal Policy*. Jonhs Hopkins Press, Baltimore, 1970.

[2] Boyce, W. E.; DiPrima, R. C.; *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Jonh Wiley & Sons, 2001.

[3] Brock, W. A.; Mallaris, A. G.; *Differential Equations, Stability and Chaos in Dynimic Economics*. North-Holland, Amisterdã, 1996.

[4] Coddington, E. A.; Levinson, N.; *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, New York, 1955.

[5] Coelho, F. U.; Lourenço, M. L.; *Um Curso de Álgebra Linear*. Edusp, São Paulo, 2001.

[6] Dzansi, J.; *Essays on Financing and Returns on Investment*. PhD thesis, Jonkoping International Business School, 2011.

[7] Fuente, A. de la; *Métodos e Modelos Matemáticos para Economistas*. Instituto Piaget, Lisboa, 2002.

[8] Hale, J.K.; *Ordinary Differential Equations*. Wiley-Interscience, New York, 1969.

[9] Kamien, M.; Schwartz, N.; The *Caulculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. North-Holland, Amisterdã, 1981.

[10] LaSalle, J.P.; Lefschetz; *Stability by Liapunov´s Direct Method with Applications*. Academic Press, New York, 1961.

[11] Leitão, A.C.G.; *Cálculo Variacional e Controle Ótimo*. 23º CBM, IMPA, Rio de Janeiro, 2001.

[12] Lima, E.; *Curso de Ánalise,* vol. 2, Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 2009.

[13] Lucas, R. E.; *Adjustment Costs and the Theory of Supply*. Journal of Political Economy, 75; 321-334, 1967.

[14] Pindyck, R.S.; Rubinfeld, D.L.; *Microeconomia*. Prentice Hall, São Paulo, 2002.

[15] Spivak, M.; *Calculus on Manifolds*. Perseus Books Publishing, Estados Unidos, 1965.

[16] Treadway, A. B.; *On Rational Entrepreneurial Behavior and the Demand for Investment*. Review of economic studies, 36: 227-239, 1969.

[17] Varian, H.R.; *Princípios Básicos de Microeconomia: Uma Abordagem Moderna*. Campus, Rio de Janeiro, 2004.