



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

EDUARDO APARECIDO DA ROSA NETO

**O PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE COM
APROVEITAMENTO DE SOBRAS:
UM ESTUDO DE COMPARAÇÃO DE DIFERENTES
MODELOS MATEMÁTICOS E HEURÍSTICAS DE
RESOLUÇÃO**

Londrina
2015

EDUARDO APARECIDO DA ROSA NETO

**O PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE COM
APROVEITAMENTO DE SOBRAS:
UM ESTUDO DE COMPARAÇÃO DE DIFERENTES
MODELOS MATEMÁTICOS E HEURÍSTICAS DE
RESOLUÇÃO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Robinson Samuel Vieira Hoto

Londrina
2015

**Catlogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da
Universidade Estadual de Londrina**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

R788p Rosa Neto, Eduardo Aparecido da.
O problema de corte de estoque com aproveitamento de sobras : um estudo de comparação de diferentes modelos matemáticos e heurísticas de resolução / Eduardo Aparecido da Rosa Neto. – Londrina, 2015.
131 f. : il.

Orientador: Robinson Samuel Vieira Hoto.
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2015.
Inclui bibliografia.

1. Pesquisa operacional – Teses. 2. Problema do corte de estoque – Teses. 3. Reaproveitamento (Sobras, refugos, etc.) – Teses. 4. Programação inteira – Teses. 5. Programação heurística – Teses. I. Hoto, Robinson Samuel Vieira. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

CDU 519.85

EDUARDO APARECIDO DA ROSA NETO

**O PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE COM APROVEITAMENTO
DE SOBRAS: UM ESTUDO DE COMPARAÇÃO DE DIFERENTES
MODELOS MATEMÁTICOS E HEURÍSTICAS DE RESOLUÇÃO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. Robinson Samuel Vieira
Hoto
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Prof. Dr^a Adriana Cristina Cherri Nicola
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Prof. Dr. Túlio Oliveira de Carvalho
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Londrina, 24 de abril de 2015.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais que apesar de todas as dificuldades me incentivaram, fortaleceram e não mediram esforços para que eu chegasse até essa etapa de minha formação acadêmica.

À minha esposa Priscilla de Freitas Cornelsen Rosa pela partilha de bons momentos, pela ajuda e pelos estímulos nas alturas de desânimo. Espero que possa, de alguma maneira, retribuir e compensar todo o carinho, apoio e dedicação que, constantemente me oferece.

Ao meu orientador, prof. Dr. Robinson Samuel Vieira Hoto pela constante orientação neste trabalho. Quero expressar o meu reconhecimento pela forma franca que conduziu minha orientação, opinando sobre a qualidade do trabalho e como melhorá-lo. A sua orientação foi determinante para que chegasse ao fim deste trabalho com um enorme sentimento de satisfação.

Aos professores Dr^a Adriana Cristina Cherri Nicola e Dr. Túlio Oliveira de Carvalho por participarem de minha banca.

À professora Dr^a Luci Harue Fatori pelo apoio e confiança.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos de Mestrado.

Aos docentes do programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada e Computacional (PGMAC) da Universidade Estadual de Londrina.

ROSA NETO, Eduardo Aparecido da. **O problema de corte de estoque com aproveitamento de sobras**: um estudo de comparação de diferentes modelos matemáticos e heurísticas de resolução. 2015. 131 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

RESUMO

Um Problema de Corte de Estoque (PCE) consiste basicamente em cortar um conjunto de peças maiores (matéria-prima) disponíveis em estoque com a finalidade de produzir um conjunto de peças menores (itens), otimizando um determinado objetivo, que pode ser minimizar a quantidade total de matéria-prima a ser cortada, bem como as sobras geradas pelo processo ou o custo associado ao corte; maximizar o lucro, entre outros. Está presente, por exemplo, em processos de corte de barras de aço, bobinas de papel, chapas de madeira, peças de couro, etc. Neste contexto, o Problema de Corte de Estoque com Aproveitamento de Sobras (PCES) enfoca tal questão visando a melhor utilização da matéria-prima, ou seja, utilizar as sobras em um processo de corte futuro, desde que elas apresentem condições para isso. A dificuldade na resolução de problemas desse tipo reside no fato de que há vários modelos matemáticos e heurísticas de resolução especializadas na tentativa de solucionar um PCES, cada uma delas apresentando abordagens e características específicas, o que torna pouco provável a definição de um método geral eficiente. Buscamos com este trabalho determinar soluções inteiras para um PCES por meio de um estudo computacional dos modelos matemáticos propostos por Pinto (2008). Exploramos também uma reformulação do modelo matemático da Estratégia 5 de Pinto (2008), a qual denominamos Estratégia 5 Reformulada (5R). Analisamos a eficácia dos modelos, considerando critérios de avaliação estabelecidos, *a priori*, pela comparação dos resultados com os resultados de heurísticas propostas por Cherri e outros (2009), por meio de simulações computacionais realizadas em um conjunto de classes de exemplares gerados aleatoriamente, variando-se a quantidade de itens, o tamanho dos itens e/ou as quantidades demandadas, dando atenção especial a problemas com baixa demanda. Os resultados mostram que, conforme as classes crescem em termos de dimensão e demanda dos exemplares, a concentração dos melhores resultados tende para a Estratégia 5R e para os procedimentos heurísticos, em particular para os residuais RAG_R1 , RAG_R2 e RAG_R3 . Em todas as classes estudadas os resultados da Estratégia 5R melhoram a superioridade já salientada, pois apresentam um melhor aproveitamento em relação ao total cortado.

Palavras-chave: Problema de corte de estoque unidimensional. Aproveitamento de sobras. Heurísticas. Gerador aleatório. Problema de programação linear inteira.

ROSA NETO, Eduardo Aparecido da. **O problema de corte de estoque com aproveitamento de sobras**: um estudo de comparação de diferentes modelos matemáticos e heurísticas de resolução. 2015. 131 p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

ABSTRACT

A Cutting Stock Problem (CSP) basically consists of cutting a set of larger parts (raw material) available in stock with the aim of produce smaller parts, optimizing a specific objective, which can minimize the amount of raw material to be cut, as well as the generated leftovers by the process or the associated cost to cut; maximize the profit, among others. It is present, for example, in cutting steel bars, paper rolls, wood boards, leather pieces, among others. In this context, the Cutting Stock Problem Using the Leftovers (CSPUL) focuses that question aiming at the better use of raw material, that is, use the waste in a future cutting process, as long as they offer conditions. The difficulty to solve problems like this are the various existing mathematical models to solve a CSPUL, each showing specific approaches and features, making it difficult to establish an efficient general method. What we seek, in this work, find full solutions to a CSPUL by means of computational studies of mathematical models proposed by Pinto (2008). We also explored a reformulation of the mathematical model of Strategy 5, by Pinto (2008), which we call Reformulated Strategy 5 (5R). We analyzed the efficiency of the models, considering avaluation criteria established by Cherri et al (2009), by computational simulations realized in a set of classes of pieces randomly generated, varying the quantity and size of items and the quantity requested, paying particular attention problems of low demand. The results show that, with the increase of classes in terms of extent and demand of pieces, the 5R strategy shows better results to heuristic procedure, specially the residual RAG_{R1} , RAG_{R2} e RAG_{R3} . In all the studied classes, the results of 5R strategy improve the already outlined superiority, because they show better exploitation in relation to the total cut.

Key-words: Cutting stock problem. Exploited of heuristic waste. Random generator. Inner linear programming problem.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – (a) Barra maior a ser cortada; (b) Barras menores demandadas; (c) Exemplo de padrão de corte.....	17
Figura 2 – (a) Placa maior a ser cortada; (b) Placas menores demandadas; (c) Exemplo de padrão de corte.....	17
Figura 3 – (a) Recipiente; (b) Itens menores a serem empacotados; (c) Exemplo de padrão de empacotamento.	18
Figura 4 – (a) Rolo maior a ser cortado; (b) Itens menores demandados; (c) Exemplo de padrão de corte.	19
Figura 5 – (a) Recipiente; (b) Itens menores a serem empacotados; (c) Exemplo de padrão de empacotamento.	20
Figura 6 – (a) Conjunto de barras em estoque de comprimento L a serem cortadas; (b) Conjunto de itens de comprimentos $\ell_i \leq L$ e demandas $d_i, i = 1, \dots, I$	21
Figura 7 – Esquema representando o processo de corte de uma bobina.....	21
Figura 8 – (a) Bobina jumbo em processo de corte; (b) Sub-bobinas obtidas pelo processo de corte.....	22
Figura 9 – Dados do exemplo 1.....	23
Figura10 – Representação dos possíveis padrões de corte do exemplo 1.....	24
Figura 11 – Representação dos dados do exemplo e três soluções factíveis, considerando o problema de corte de estoque homogêneo ilimitado.....	30
Figura 12 – Conjunto de barras em estoque de comprimentos $L_1, L_2, \dots, L_j, \dots, L_J$ e disponibilidade $e_1, e_2, \dots, e_j, \dots, e_J$ a serem cortadas.	31
Figura 13 – Representação dos dados do exemplo e três soluções factíveis, considerando o problema de corte de estoque heterogêneo limitado.	40
Figura 14 – Representação das três soluções factíveis do exemplo 3, considerando o problema de corte de estoque com aproveitamento de sobras.	43

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Dados de um exemplo, considerando o problema de corte de estoque com aproveitamento de sobras.....	75
Tabela 2	– Comparação dos resultados de um exemplo, considerando o problema de corte de estoque com aproveitamento de sobras..	76
Tabela 3	– Descrição das classes dos exemplares.....	80
Tabela 4	– Exemplo de solução ideal, aceitável e indesejável.....	81
Tabela 5	– Resultados para os 100 exemplares da classe 1 – 5PDB..	83
Tabela 6	– Resultados para os 100 exemplares da classe 2 – 5PDM.....	84
Tabela 7	– Resultados para os 100 exemplares da classe 3 – 5MDB.....	85
Tabela 8	– Resultados para os 100 exemplares da classe 4 – 5MDM.....	86
Tabela 9	– Resultados para os 100 exemplares da classe 5 – 10PDB.....	89
Tabela 10	– Resultados para os 100 exemplares da classe 6 – 10PDM.....	90
Tabela 11	– Resultados para os 100 exemplares da classe 7 – 10MDB.....	91
Tabela 12	– Resultados para os 100 exemplares da classe 8 – 10MDM.....	92
Tabela 13	– Resultados para os 100 exemplares da classe 9 – 15PDB.....	94
Tabela 14	– Resultados para os 100 exemplares da classe 10 – 15PDM.....	95
Tabela 15	– Resultados para os 100 exemplares da classe 11 – 15MDB.....	96
Tabela 16	– Resultados para os 100 exemplares da classe 12 – 15MDM.....	97

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PCE	Problema de Corte de Estoque Unidimensional.
PCEC	Problema de Corte de Estoque Unidimensional Clássico.
PCER	Problema de Corte de Estoque Unidimensional Restrito.
PCES	Problema de Corte de Estoque Unidimensional com Aproveitamento de Sobras.
FFD	<i>First Fit Decreasing.</i>
RAG	Residual por Arredondamento Guloso.
GPCE	Grupo Brasileiro com interesse em Problemas de Corte e Empacotamento e Correlatos.
ESICUP	<i>EURO Special Interest Group on Cutting and Packing.</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS	13
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	14
2	PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL	16
2.1	CLASSIFICAÇÃO DOS PROBLEMAS DE CORTE DE ESTOQUE	16
2.1.1	Problemas de Corte Unidimensional.....	17
2.1.2	Problemas de Corte Bidimensional.....	17
2.1.3	Problemas de Corte Tridimensional.....	18
2.1.4	Problemas de Corte 1.5-dimensional.....	18
2.1.5	Problemas de Corte 2.5-dimensional.....	19
2.1.6	Problemas de Corte N-dimensional	20
2.2	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL COM ESTOQUE HOMOGÊNEO ILIMITADO	20
2.3	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL COM ESTOQUE HETEROGÊNEO LIMITADO.....	31
3	PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL COM APROVEITAMENTO DE SOBRAS	41
3.1	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL COM APROVEITAMENTO DE SOBRAS	41
4	ALGUNS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL COM APROVEITAMENTO DE SOBRAS	50
4.1	HEURÍSTICAS CONSTRUTIVAS.....	51
4.1.1	Heurística Construtiva FFD.....	52
4.1.2	Heurística Construtiva Gulosa	52
4.1.3	Heurística Construtiva FFDR	53
4.1.4	Heurística Construtiva GulosaR.....	53
4.2	HEURÍSTICAS RESIDUAIS.....	54

4.2.1	Heurística Residual FFD.....	58
4.2.2	Heurística Residual Gulosa.....	58
4.2.3	Heurística Residual FFDR	58
4.2.4	Heurística Residual GulosaR.....	59
4.2.5	Heurística Residual por Arredondamento Guloso (RAG).....	59
4.2.6	Heurística Residual RAG – 1	60
4.2.7	Heurística Residual RAG – 2	60
4.2.8	Heurística Residual RAG – 3	60
4.2.9	Heurísticas Residuais RAGR – versões 1, 2 e 3.....	60
4.3	MODELOS PROPOSTOS POR PINTO (2008).....	61
4.3.1	Estratégia 1	62
4.3.2	Estratégia 2.....	64
4.3.3	Estratégia 3.....	66
4.3.4	Estratégia 4.....	67
4.3.5	Estratégia 5.....	68
5	REFORMULAÇÃO DA ESTRATÉGIA 5 DE PINTO (2008).....	71
6	EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS	77
6.1	UM GERADOR ALEATÓRIO.....	78
6.2	RESULTADOS E DISCUSSÃO	80
7	CONCLUSÕES.....	99
	REFERÊNCIAS.....	101
	APENDICE – ARTIGO SUBMETIDO À REVISTA GESTÃO INDUSTRIAL	104

1 INTRODUÇÃO

As indústrias de manufatura, principalmente indústrias de papel, metalúrgica, vidro, móveis, plástica, têxtil, entre outras, têm sido estimuladas a aprimorar seus processos, tornando-os cada vez mais eficientes e econômicos. Em tais indústrias, as etapas do gerenciamento de produção estão frequentemente associadas à utilização de estratégias de corte de matérias-primas para transformá-las em produtos finais, o que têm motivado a comunidade científica nacional e internacional na busca de métodos de solução eficientes. Uma linha de pesquisa importante na área de Pesquisa Operacional e que têm sido estudados por um número crescente de pesquisadores nas últimas décadas é o **Problema de Corte de Estoque** (PCE). Esse estudo tem gerado contribuições significativas em diversas áreas, principalmente em razão da importância econômica aliada aos avanços nos aspectos computacionais, interesse que pode ser comprovado, por exemplo, pela consulta a livros dedicados exclusivamente ao tema, em centenas de artigos de revisão e edições especiais de revistas nacionais e internacionais disponíveis na literatura, e pela formação de grupos de pesquisa para tratar exclusivamente do tema (p. ex. GPCE, ESICUP¹).

Destacamos alguns artigos que nortearam este trabalho, a citar: Poldi e Arenales (2009), Hoto e outros (2003), Cherri e outros (2009), Wäsher e outros (2007), Cui e Yang (2010), Gilmore e Gomory (1961) e Gau e Wäsher (1995). Centenas de outros artigos podem ser acessadas pelo endereço eletrônico <<http://www.fe.up.pt/esicup>>. Entre os livros específicos ao tema, consultamos Martello e Toth (1990).

Um PCE consiste basicamente em cortar um conjunto de peças maiores (matéria-prima) disponíveis em estoque com a finalidade de produzir um conjunto de peças menores (itens), otimizando um determinado objetivo, que pode ser minimizar a quantidade total de matéria-prima a ser cortada, bem como as sobras geradas pelo

¹ GPCE e ESICUP são grupos (nacional e internacional, respectivamente) que reúnem profissionais, pesquisadores e educadores da Pesquisa Operacional com interesses na área de corte e empacotamento.

processo ou o custo associado ao corte; maximizar o lucro, entre outros. Estão presentes, por exemplo, em processos de corte de barras de aço, bobinas de papel, chapas de madeira, peças de couro, etc.

Todavia, a solução do problema citado acima é de pouca valia em situações práticas, uma vez que é comum surgirem novas restrições no problema, como limitações do número de facas, compartimentação, etc. (Hoto, 2001). Uma primeira característica a ser considerada é a limitação e heterogeneidade da matéria-prima em estoque. Outra situação muito frequente consiste no aproveitamento da matéria-prima cortada e não demandada, caso esta apresente condições para isso, visto que qualquer indústria almeja reduzir os impactos econômicos e ambientais ocasionados pelo desperdício de matéria-prima. Este fato sugere uma nova abordagem no que se refere à determinação de uma solução desejada pela indústria. As sobras, na maioria das vezes, não são aproveitadas pelas indústrias, tornando-se peças inutilizáveis e gerando desperdício.

O problema ao qual daremos ênfase neste trabalho é o **Problema de Corte de Estoque Unidimensional com Aproveitamento de Sobras** (PCES), que considera também as **perdas** (leia-se sobras não reaproveitáveis) e os **retalhos** (leia-se sobras aproveitáveis) obtidos em um processo de corte. São problemas de vasta aplicabilidade prática, cuja aparente simplicidade entra em contraste com a grande dificuldade de resolução por conta do elevado número de variáveis envolvidas e da restrição de integralidade destas variáveis. Tais problemas pertencem à classe NP-difícil² (Garey e Johnson, 1979; Dyckhoff, 1990, citado por Poldi e Arenales, 2009) que, grosso modo, podemos dizer que são problemas improváveis de serem resolvidos num tempo polinomial aceitável.

Os pioneiros na aplicação da programação linear inteira ao PCE foram Kantorovich e Zalgaller (1951). Eles assumiram que o estoque deveria ser cortado em grandes quantidades, o que possibilitaria ignorar as dificuldades em arredondar as soluções ótimas. Outros trabalhos foram publicados, mas apresentando métodos

² Polinomial Não Determinístico Difícil.

capazes de resolver apenas problemas pequenos. No entanto, após a publicação dos trabalhos de Gilmore e Gomory (1961, 1963) é que se intensificaram os estudos acerca do PCE, pois os métodos por eles propostos eram capazes de resolver problemas com milhares de variáveis (Alem, 2006). O PCES foi citado por Brown (1971), no entanto os primeiros trabalhos acerca do tema surgiram mais tarde.

Sem perda de generalidade, ao se tratar do Problema de Corte de Estoque Unidimensional chamaremos os objetos maiores em estoque de **barras** e os objetos menores demandados de **itens**.

1.1 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

A principal motivação que contribui para o crescente aumento do estudo deste tema é a importância econômica e ambiental das aplicações aliada à complexidade de resolução (Poldi, 2003). Ao comparar diferentes estratégias de resolução do PCES, uma melhora nos resultados obtidos é bastante valorizada, pois uma pequena redução no desperdício pode significar uma grande economia. Entre outras metodologias aplicadas, com êxito, destacamos as heurísticas de Cherri e outros (2009), nas quais procedimentos heurísticos clássicos da literatura (construtivos e residuais) que resolvem problemas de corte de estoque foram modificados com a finalidade de resolverem problemas de corte de estoque com sobras aproveitáveis. Com as alterações realizadas, as sobras geradas no processo deveriam ser pequenas para serem descartadas como perdas ou suficientemente grandes para serem estocadas como retalhos, os quais seriam utilizados no atendimento de futuras demandas. As soluções obtidas pelas heurísticas desenvolvidas foram satisfatórias, considerando critérios de avaliação estabelecidos *a priori*.

Além disso, problemas de corte de estoque são facilmente formulados e compreendidos, escondendo por trás de sua aparente simplicidade, a sua real complexidade, como muitos de natureza combinatória.

O principal objetivo deste trabalho consiste em determinar soluções inteiras para o PCES. Para isso faremos um estudo computacional dos modelos matemáticos

propostos por Pinto (2008). A eficácia dos modelos será analisada pela comparação dos resultados com as de heurísticas propostas por Cherri e outros (2009).

Os objetivos secundários são:

- Apresentar as formulações matemáticas dos problemas de corte de estoque unidimensional com: estoque homogêneo ilimitado (PCEC); estoque heterogêneo limitado (PCER); e com aproveitamento de sobras (PCES);
- Propor um gerador aleatório de exemplares, baseado no CUTGEN1 proposto por Gau e Wäscher (1995), variando-se a quantidade de itens, o tamanho dos itens e/ou as quantidades demandadas, dando atenção especial a problemas com baixa demanda.

As simulações computacionais sugerem que é possível propor uma variação dos modelos propostos por Pinto (2008), na tentativa de buscar soluções melhores que as já encontradas, o que também se constitui num objetivo a ser alcançado no presente trabalho.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Na primeira parte do Capítulo 2 é apresentado o Problema de Corte de Estoque Unidimensional Clássico (PCEC) e uma breve discussão da classificação dos problemas segundo a tipologia de Dyckhoff (1990). Na segunda parte é apresentada, inicialmente, a formulação matemática do problema de corte de estoque unidimensional com estoque homogêneo ilimitado, isto é, que considera o modelo com quantidade suficiente de um único tipo de barra. Serão apresentadas em detalhes as etapas da formulação algébrica, assim como exemplos hipotéticos, quando conveniente. Esta didática torna-se importante, uma vez que a formulação matemática do Problema de Corte e Estoque Unidimensional com Estoque Heterogêneo Limitado (PCER), ou seja, que considera o modelo de J tipos de barras com disponibilidade limitada, apresentada logo em seguida, envolve essencialmente a inclusão de novos índices.

No Capítulo 3 é apresentada, de maneira mais sucinta, a formulação matemática do Problema de Corte de Estoque Unidimensional com Aproveitamento de Sobras (PCES), que considera também as **perdas** e os **retalhos** obtidos em um processo de corte.

No Capítulo 4, são apresentadas as heurísticas construtivas e residuais propostas por Cherri e outros (2009) para resolver o PCES, baseadas em modificações de heurísticas clássicas da literatura: Construtiva FFD_R , Construtiva Gulosa $_R$, Residual FFD_R , Residual Gulosa $_R$ e Residual por Arredondamento Guloso (RAG_R) – versões 1, 2 e 3. Neste capítulo também são apresentados os modelos matemáticos propostos por Pinto (2008) para as três abordagens de resolução em duas etapas (Estratégias 1, 2 e 3) e para as outras duas em uma única etapa (Estratégias 4 e 5).

No Capítulo 5 são apresentadas as modificações realizadas no modelo matemático da Estratégia 5 de Pinto (2008), na tentativa de buscar soluções melhores.

O Capítulo 6 segue com a descrição das classes de exemplares do gerador aleatório, bem como os resultados e a discussão dos experimentos computacionais.

Finalmente, as considerações finais e propostas de continuidade são apresentadas no Capítulo 7.

2 PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL

O problema ao qual daremos ênfase neste trabalho pertence a uma família de problemas de âmbito mais abrangente, denominada Problemas de Corte e Empacotamento. De forma geral, os problemas de empacotamento consistem em empacotar uma lista de itens em recipientes. Assim, um problema de corte de estoque pode ser visto como um problema de empacotamento, isto é, cortar unidades menores de unidades maiores ou empacotar unidades menores dentro de unidades maiores são considerados problemas duais.

2.1 CLASSIFICAÇÃO DOS PROBLEMAS DE CORTE DE ESTOQUE

Em razão da vasta aplicabilidade dos problemas de empacotamento, Dyckhoff (1990) sugeriu uma tipologia simplificada para padronizar o uso de diferentes notações na literatura. A tipologia leva em conta os aspectos das dimensões relevantes, da seleção e do sortimento dos objetos, nessa ordem. Combinando estes tipos de características obtêm-se 96 diferentes tipos de problemas de empacotamento, denotados simplifiadamente pela quádrupla $\alpha/\beta/\gamma/\delta$. Para o problema de corte de estoque unidimensional a notação é $1/V//R$, que classifica um problema da classe unidimensional (1); em que são selecionados objetos maiores (barras padronizadas em estoque) e todos os objetos menores (itens demandados) (V); os objetos maiores são idênticos (I); e são demandadas muitas peças de poucos objetos menores (R). Wäscher e outros (2007) sugeriu uma extensão da tipologia de Dyckhoff (1990), ao introduzir uma nova categoria que define problemas diferentes dos apresentados anteriormente, tornando-a mais abrangente e precisa.

Intuitivamente, um problema de corte e empacotamento remete a um pensamento geométrico, isto é, nos faz imaginar as dimensões do objeto: comprimento, largura e altura. Além do problema unidimensional, podemos pensar em situações nas quais outras dimensões são relevantes. De fato, o critério da dimensionalidade tem sido a característica mais comum na classificação de um problema.

2.1.1 Problemas de Corte Unidimensional

No problema de corte de estoque unidimensional, a única dimensão relevante no processo do corte é o comprimento, o que pode ser observado em cortes de barras de aço utilizadas na construção civil. O objetivo é cortar itens de comprimentos ℓ_i a partir de uma barra de comprimento L . A Figura 1 ilustra esse tipo de problema.

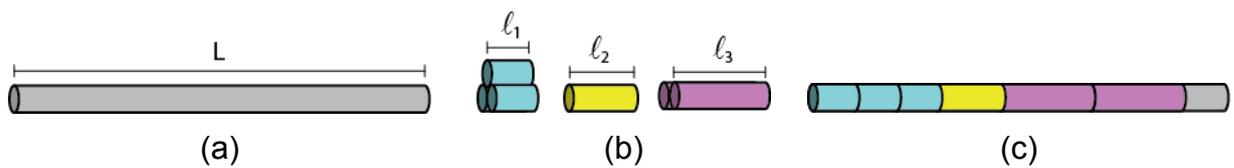


Figura 1 – (a) Barra maior a ser cortada; (b) Barras menores demandadas; (c) Exemplo de padrão de corte.

2.1.2 Problemas de Corte Bidimensional

No problema de corte de estoque bidimensional, as duas dimensões relevantes são o comprimento e a largura. Ocorre principalmente em cortes de chapas de metal, de vidro, de madeira, de couro, entre outras. O objetivo é cortar itens retangulares de dimensões (ℓ_i, h_i) a partir de uma placa de dimensões (L, H) . A Figura 2 ilustra esse tipo de problema.

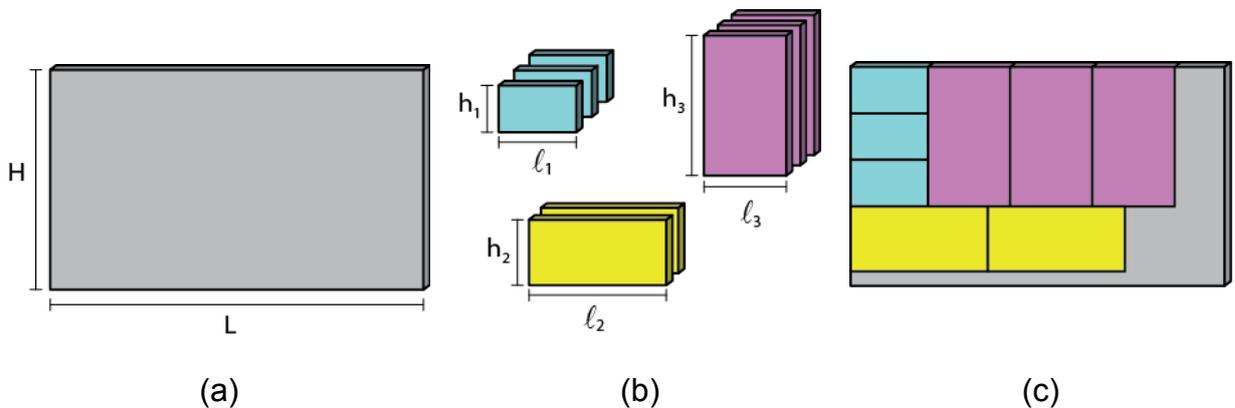


Figura 2 – (a) Placa maior a ser cortada; (b) Placas menores demandadas; (c) Exemplo de padrão de corte.

2.1.3 Problemas de Corte Tridimensional

No problema de corte de estoque tridimensional, as três dimensões relevantes são o comprimento, a largura e a altura, de ocorrência comum em problemas de empacotamento envolvendo embalagens de produtos, contêineres, etc. O objetivo é empacotar itens em forma de paralelepípedos retangulares de dimensões (ℓ_i, h_i, w_i) em um recipiente em forma de paralelepípedo retangular de dimensões (L, H, W) . A Figura 3 ilustra esse tipo de problema.

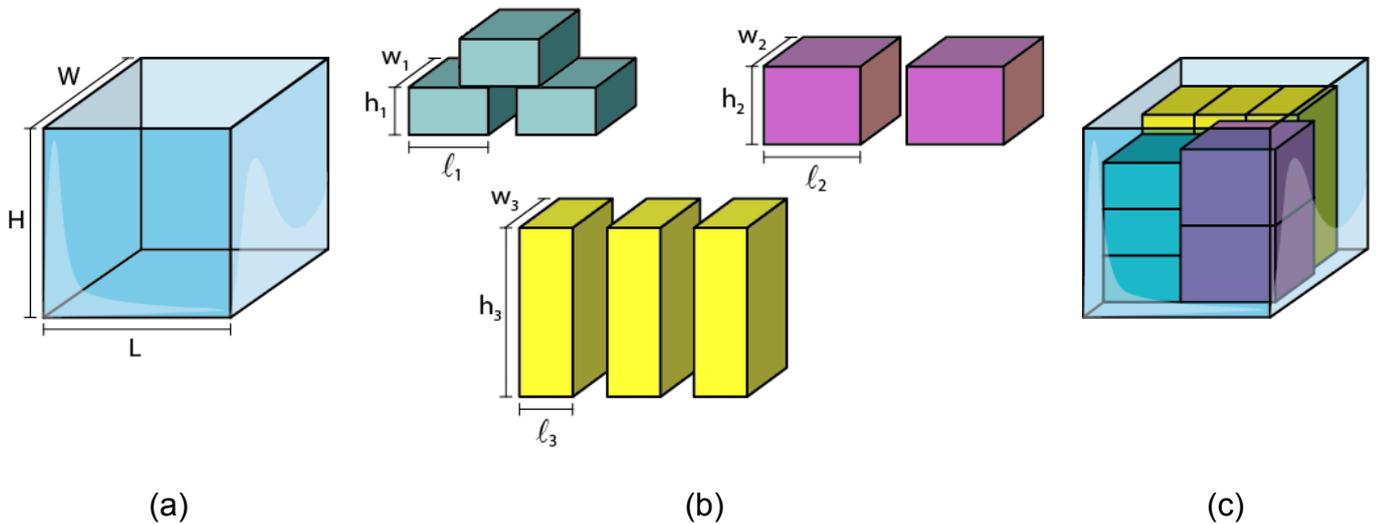


Figura 3 – (a) Recipiente; (b) Itens menores a serem empacotados; (c) Exemplo de padrão de empacotamento.

2.1.4 Problemas de Corte 1.5-dimensional

No problema de corte de estoque 1.5-dimensional as duas dimensões relevantes são o comprimento e a largura, porém, apenas uma delas tem tamanho fixado. Isso ocorre, por exemplo, em rolos de tecido que têm largura fixa e comprimento suficientemente grande. O objetivo é cortar itens retangulares de dimensões (ℓ_i, h_i) a partir de um rolo de largura H , cujo comprimento deve ser minimizado. A Figura 4 ilustra esse tipo de problema.

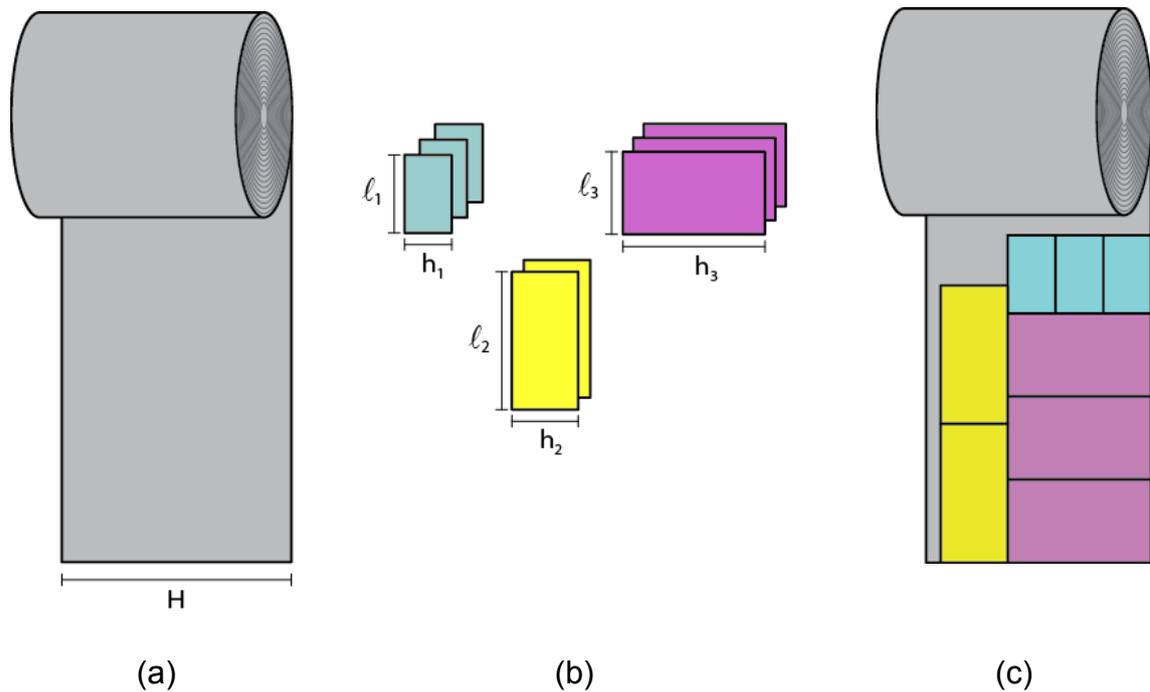


Figura 4 – (a) Rolo maior a ser cortado; (b) Itens menores demandados; (c) Exemplo de padrão de corte.

2.1.5 Problemas de Corte 2.5-dimensional

No problema de corte de estoque 2.5-dimensional, as três dimensões relevantes são o comprimento, a largura e a altura, porém, apenas duas delas têm tamanho fixado, por exemplo, no processo de acomodação de carga em um contêiner com largura e altura fixa e comprimento suficientemente grande. O objetivo é acomodar itens em forma de paralelepípedos retangulares de dimensões (ℓ_i, h_i, w_i) em um recipiente em forma de paralelepípedo retangular de altura H , largura W e cujo comprimento deve ser minimizado. A Figura 5 ilustra esse tipo de problema.

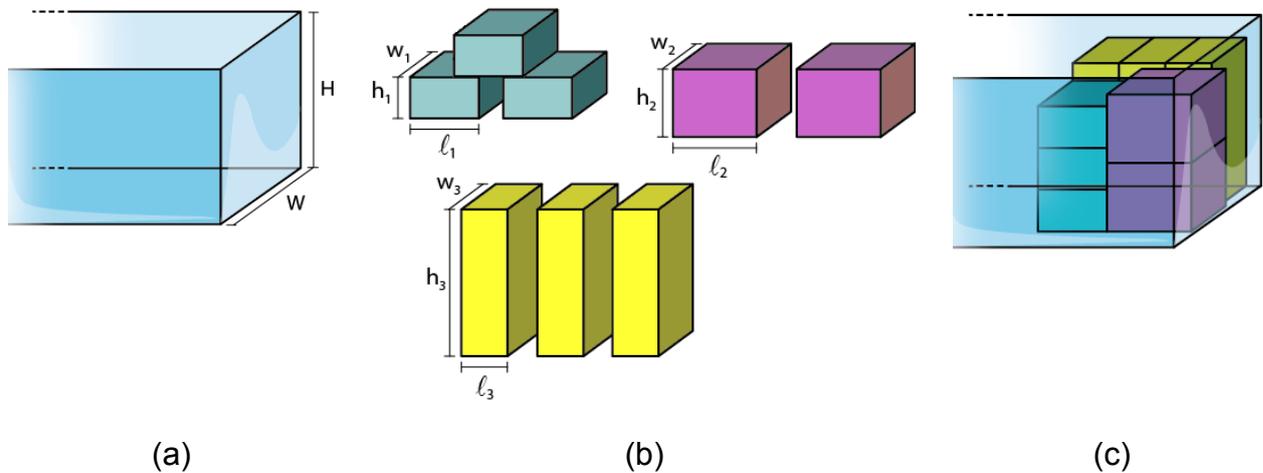


Figura 5 – (a) Recipiente; (b) Itens menores a serem empacotados; (c) Exemplo de padrão de empacotamento.

2.1.6 Problemas de Corte N-dimensional

Além das dimensões geométricas do problema, um fato intrigante é que há problemas relacionados à estrutura de um problema de corte e empacotamento cujas dimensões não geométricas são relevantes, como massa, tempo, entre outras. A título de curiosidade, podemos exemplificar a alocação de diferentes tarefas em um dia de trabalho, as quais consideram diferentes durações e prioridades.

2.2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL COM ESTOQUE HOMOGÊNEO ILIMITADO

Nesta seção, poderemos verificar que problemas de corte de estoque são facilmente formulados e compreendidos, escondendo por trás de sua aparente simplicidade a sua real complexidade, como muitos de natureza combinatória.

Suponhamos que há em estoque uma quantidade suficiente de barras de comprimento L para cortar uma quantidade I de diferentes itens, cujos comprimentos são $l_i \leq L$, $i = 1, \dots, I$, de modo a atender as respectivas demandas d_i , $i = 1, \dots, I$ (Figura 6). Geralmente o objetivo é de minimizar as sobras, mas pode-se também minimizar a

quantidade de barras a serem cortadas (matéria-prima), maximizar o lucro, minimizar o custo ou uma combinação destes³.

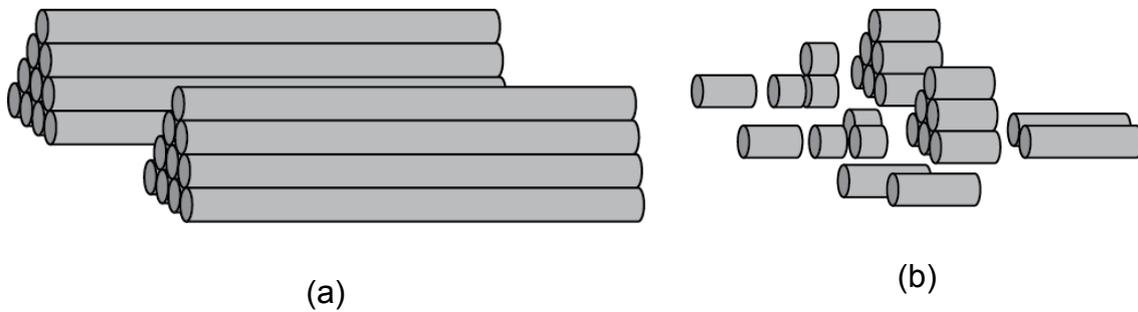


Figura 6 – (a) Conjunto de barras em estoque de comprimento L a serem cortadas; (b) Conjunto de itens de comprimentos $l_i \leq L$ e demandas d_i , $i = 1, \dots, l$.

Por exemplo, uma bobina (de papel, alumínio, tecido, aço,...) atravessa uma máquina com facas, que fará cortes em apenas um sentido.

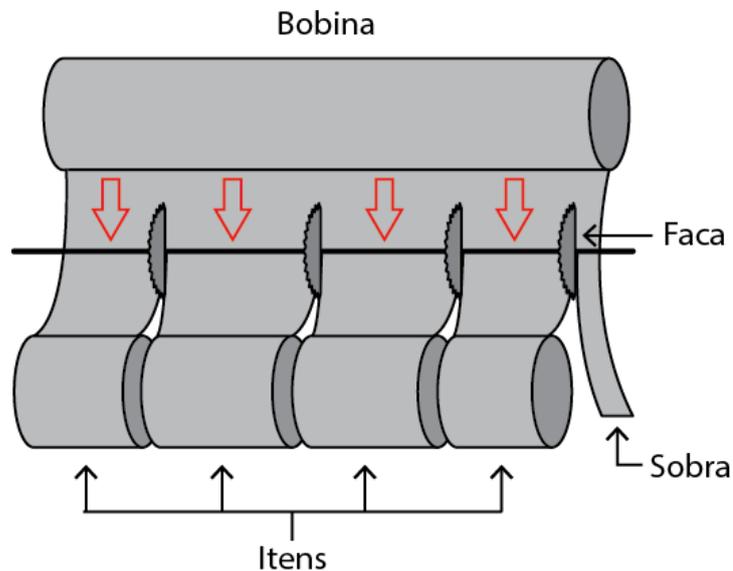


Figura 7 – Esquema representando o processo de corte de uma bobina.

³ Estamos considerando que não é permitido o excesso de produção e as barras devem ser cortadas completamente, ou seja, pedaços da barra que não sejam os itens demandados são considerados sobras.

Na indústria papelreira, por exemplo, bobinas-jumbo são cortadas em sub-bobinas que, por sua vez, podem ainda ser cortadas em retângulos de diversos tamanhos⁴.



Figura 8 – (a) Bobina jumbo em processo de corte;
(b) Sub-bobinas obtidas pelo processo de corte.

De acordo com o comprimento da bobina, as quantidades e os comprimentos dos itens demandados, há finitas maneiras de arranjos para a disposição das facas, mas esse número pode ser muito grande, mesmo para problemas considerados “pequenos”⁵. Denotaremos cada disposição das facas no processo de corte de **padrão de corte**. As variáveis de decisão, neste caso, baseiam-se na utilização de cada padrão de corte, as quais, em razão das restrições de maquinário, por exemplo, devem ser inteiras.

Vamos considerar que há P possibilidades, o que sugere a definição de padrão de corte como um vetor de dimensão l que contabiliza os itens produzidos.

$$\mathbf{a}_p = (a_{1p}, a_{2p}, \dots, a_{lp}, \dots, a_{lp})^T, \quad i = 1, \dots, l, \quad p = 1, \dots, P \quad (1)$$

⁴ As dimensões desses retângulos seguem padrões internacionais ISO 216, de 1975, o qual define os tamanhos de papel utilizados em casas e escritórios de quase todos os países. O formato A4, de uso comum, faz parte da série A desse padrão.

⁵ Em problemas práticos, l é da ordem de dezenas, enquanto a quantidade de maneiras de arranjos para a disposição das facas, que depende de l , L e ℓ_i , $i = 1, \dots, l$, pode ser da ordem de centenas de milhares (Poldi e Arenales, 2009).

Em que \mathbf{a}_p é o vetor representante do p-ésimo padrão de corte, e a coordenada a_{ip} representa a quantidade de vezes que o item de comprimento l_i aparece no p-ésimo padrão. Note que, para (1) satisfazer um padrão de corte, deve-se obedecer à seguinte restrição física:

$$l_1 a_{1p} + l_2 a_{2p} + \dots + l_i a_{ip} + \dots + l_l a_{lp} \leq L, \quad i = 1, \dots, l, \quad p = 1, \dots, P \quad (2)$$

O padrão de corte que produz apenas um tipo de item é denominado padrão de corte **homogêneo**, e o vetor correspondente possui apenas uma coordenada não nula. O padrão de corte homogêneo é chamado **maximal** quando ele produz o máximo possível de um tipo de item. Note que sempre haverá tantos padrões homogêneos maximais quantos forem os tipos de itens. Por sua vez, um padrão de corte **heterogêneo** é aquele que produz mais de um tipo de item, e o vetor correspondente possui mais de uma coordenada não nula. De maneira análoga, ele é **maximal** quando o máximo possível da barra é cortada.

Exemplo 1: Considerando um problema em que $L = 170$ cm, $l_1 = 30$ cm, $l_2 = 50$ cm e $l_3 = 55$ cm, há $P = 27$ padrões de corte possíveis.



Figura 9 – Dados do exemplo 1.

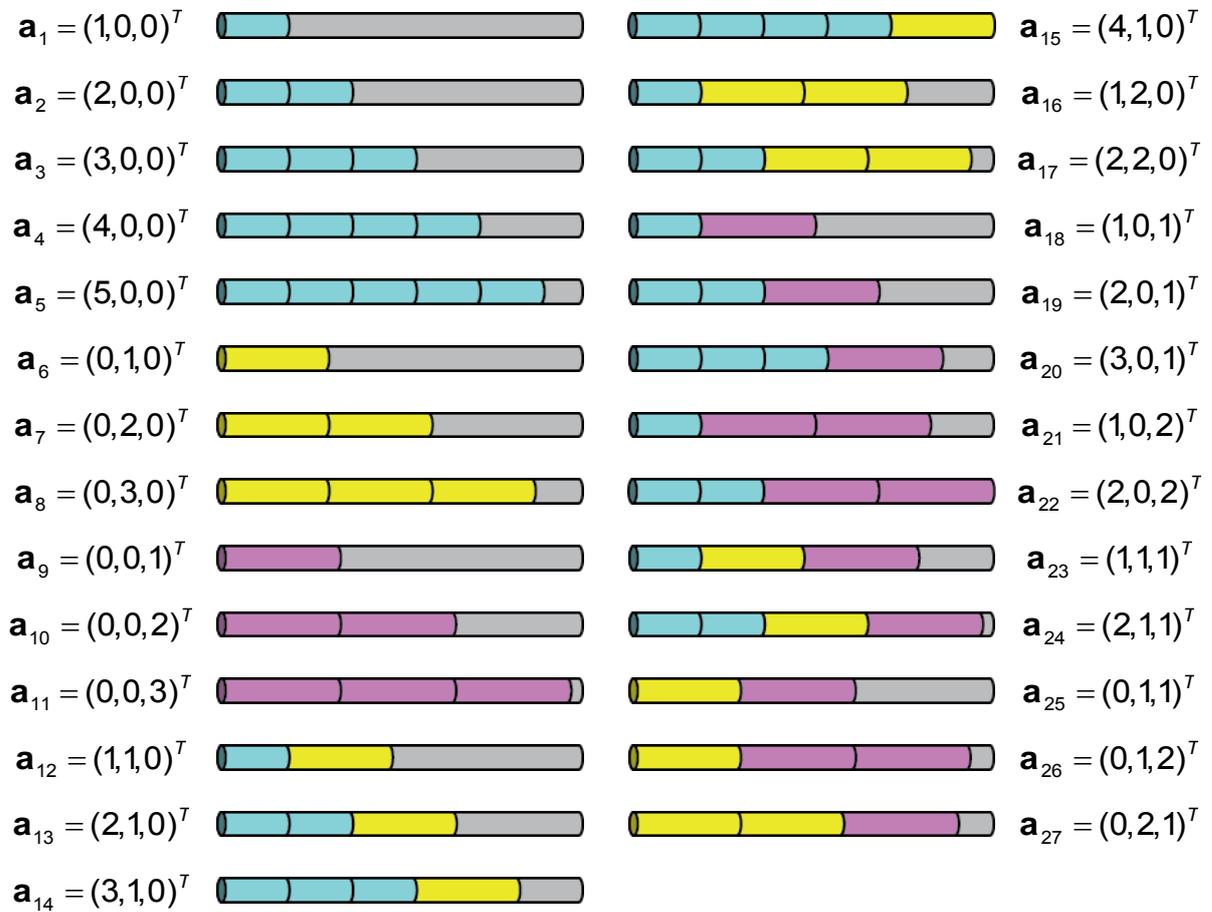


Figura 10 – Representação dos possíveis padrões de corte do exemplo 1.

Neste exemplo, os padrões de corte \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \mathbf{a}_3 , \mathbf{a}_4 , \mathbf{a}_5 , \mathbf{a}_6 , \mathbf{a}_7 , \mathbf{a}_8 , \mathbf{a}_9 , \mathbf{a}_{10} e \mathbf{a}_{11} são homogêneos, sendo que \mathbf{a}_5 , \mathbf{a}_8 e \mathbf{a}_{11} são maximais. Já os demais padrões de corte são heterogêneos, sendo que \mathbf{a}_{15} , \mathbf{a}_{17} , \mathbf{a}_{20} , \mathbf{a}_{22} , \mathbf{a}_{24} , \mathbf{a}_{26} e \mathbf{a}_{27} são maximais.

Para a formulação do modelo matemático do problema de corte de estoque unidimensional com estoque homogêneo ilimitado, vamos dividir em duas etapas:

1ª etapa: Definir todos os possíveis padrões de corte. Já definimos anteriormente que esse número é P .

2ª etapa: Uma vez definidos os padrões de corte, precisamos definir a quantidade de vezes que o p -ésimo padrão é utilizado no plano de corte. Digamos que seja x_p .

Assim, se (1) é um padrão de corte para cada $p = 1, \dots, P$, então:

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1 \cdot (\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{12}, \dots, \mathbf{a}_{i1}, \dots, \mathbf{a}_{1P})^T$$

$$\mathbf{a}_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 \cdot (\mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{22}, \dots, \mathbf{a}_{i2}, \dots, \mathbf{a}_{2P})^T$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{a}_p \mathbf{x}_p = \mathbf{x}_p \cdot (\mathbf{a}_{1p}, \mathbf{a}_{2p}, \dots, \mathbf{a}_{ip}, \dots, \mathbf{a}_{pP})^T$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{a}_P \mathbf{x}_P = \mathbf{x}_P \cdot (\mathbf{a}_{1P}, \mathbf{a}_{2P}, \dots, \mathbf{a}_{iP}, \dots, \mathbf{a}_{PP})^T$$

Ou seja:

- Demanda do item 1:

$$\mathbf{a}_{11} \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12} \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{1p} \mathbf{x}_p + \dots + \mathbf{a}_{1P} \mathbf{x}_P = d_1$$

- Demanda do item 2:

$$\mathbf{a}_{21} \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22} \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{2p} \mathbf{x}_p + \dots + \mathbf{a}_{2P} \mathbf{x}_P = d_2$$

$$\vdots$$

- Demanda do item i :

$$\mathbf{a}_{i1} \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{i2} \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{ip} \mathbf{x}_p + \dots + \mathbf{a}_{iP} \mathbf{x}_P = d_i \quad (3)$$

$$\vdots$$

- Demanda do item l :

$$\mathbf{a}_{l1} \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{l2} \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{lp} \mathbf{x}_p + \dots + \mathbf{a}_{lP} \mathbf{x}_P = d_l$$

Escrevendo o sistema, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p + \dots + a_{1P}x_P = d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p + \dots + a_{2P}x_P = d_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ip}x_p + \dots + a_{iP}x_P = d_i \\ \vdots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \dots + a_{lp}x_p + \dots + a_{lP}x_P = d_l \end{array} \right. \quad (4)$$

Em linguagem vetorial:

$$\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \dots + \mathbf{a}_px_p + \dots + \mathbf{a}_Px_P = \mathbf{d} \quad (5)$$

Em que:

$$\mathbf{a}_p = (a_{1p}, a_{2p}, \dots, a_{ip}, \dots, a_{lp})^T, \text{ para } p = 1, \dots, P \text{ e } \mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_i, \dots, d_l)^T$$

Ou em linguagem matricial:

$$A_{l \times P} \mathbf{x}_{P \times 1} = \mathbf{d}_{l \times 1}$$

Em que:

$$A_{l \times P} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & \dots & a_{1P} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & \dots & a_{2P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} & \dots & a_{iP} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lp} & \dots & a_{lP} \end{bmatrix}; \mathbf{x}_{P \times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \\ \vdots \\ x_P \end{bmatrix}; \mathbf{d}_{l \times 1} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ d_l \end{bmatrix}$$

Se considerarmos que o objetivo de minimizar a quantidade de barras a serem cortadas é equivalente a minimizar a quantidade de vezes que cada padrão é utilizado, quando a demanda é atendida exatamente (Arenales e outros, 2004):

Minimizar:

$$f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + \dots + x_p + \dots + x_P \quad (6)$$

Sujeito a:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p + \dots + a_{1P}x_P = d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p + \dots + a_{2P}x_P = d_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ip}x_p + \dots + a_{iP}x_P = d_i \\ \vdots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \dots + a_{lp}x_p + \dots + a_{lP}x_P = d_l \end{array} \right. \quad (7)$$

$$x_p \geq 0 \text{ e inteiro, } p=1, \dots, P \quad (8)$$

Equivalentemente:

Minimizar:

$$f(x) = \sum_{p=1}^P x_p \quad (9)$$

Sujeito a:

$$\sum_{p=1}^P a_p x_p = d \quad (10)$$

$$x_p \geq 0 \text{ e inteiro, } p=1, \dots, P \quad (11)$$

Ou então:

Minimizar:

$$f(x) = \sum_{p=1}^P x_p \quad (12)$$

Sujeito a:

$$A_{l \times P} x_{P \times 1} = d_{l \times 1} \quad (13)$$

$$x_p \geq 0 \text{ e inteiro, } p=1, \dots, P \quad (14)$$

As restrições (7), (10) ou (13) garantem que as quantidades de itens produzidos sejam exatamente iguais à demanda. Já as restrições (8), (11) ou (14) garantem a não nulidade e integralidade das variáveis.

Para a modelagem do problema, podemos ainda considerar que há um custo c_p qualquer associado ao p -ésimo padrão de corte. Nesse caso, a função objetivo (6) (9) ou (12) será substituída pela função:

$$f(x) = \sum_{p=1}^P c_p x_p \quad (15)$$

Note que c_p pode representar, por exemplo, o preço segundo o fornecedor ou a sobra do material produzida pelo p -ésimo padrão de corte na barra de comprimento L . Neste último caso, se um padrão de corte deve satisfazer (2), podemos definir por $c_p = T_p$:

$$T_p = L - (\ell_1 a_{1p} + \ell_2 a_{2p} + \dots + \ell_i a_{ip} + \dots + \ell_i a_{ip}) = L - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ip} \quad (16)$$

Então, se considerarmos o objetivo de minimizar sobras, podemos reescrever (15) como:

$$f(x) = T_1 x_1 + T_2 x_2 + \dots + T_p x_p + \dots + T_P x_P \quad (17)$$

Portanto, o modelo matemático para o problema de corte de estoque no caso unidimensional, que considera um único tipo de barra com disponibilidade ilimitada (estoque homogêneo ilimitado) e com objetivo de minimizar sobras é:

Minimizar:

$$f(x) = \sum_{p=1}^P T_p x_p \quad (18)$$

Sujeito a:

$$\sum_{p=1}^P \mathbf{a}_p x_p = \mathbf{d} \quad (19)$$

$$x_p \geq 0 \text{ e inteiro, } p = 1, \dots, P \quad (20)$$

Neste trabalho, este modelo será denominado **Problema de Corte de Estoque Unidimensional Clássico** (PCEC). O conjunto de vetores do \mathbb{R}^n que satisfazem (18)-(20) é chamado de **região factível**, que podemos denotar por

$S = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{p=1}^P \mathbf{a}_p x_p = \mathbf{d}, x_p \geq 0 \right\}$. Então, se $\tilde{\mathbf{x}} \in S$, dizemos que $\tilde{\mathbf{x}}$ é uma **solução factível**.

No modelo acima, minimizar sobras é equivalente a minimizar a quantidade de vezes que se utiliza cada padrão, que, por sua vez, é equivalente a minimizar o comprimento total de barras usadas para o atendimento à demanda. De fato, substituindo (16) em (18):

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^P T_p x_p &= \sum_{p=1}^P \left(L - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ip} \right) x_p = \sum_{p=1}^P \left(L x_p - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ip} x_p \right) = \\ &= \sum_{p=1}^P L x_p - \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ip} x_p = \sum_{p=1}^P L x_p - \sum_{i=1}^I \ell_i \sum_{p=1}^P a_{ip} x_p = \sum_{p=1}^P L x_p - \sum_{i=1}^I \ell_i d_i \end{aligned}$$

Exemplo 2: Para uma melhor compreensão do problema de corte de estoque unidimensional com estoque homogêneo ilimitado, deve-se considerar os dados do exemplo 1, no qual temos em estoque uma quantidade suficiente de barras de comprimento $L = 170$ cm, para cortar $I = 3$ tipos de itens de comprimentos $\ell_1 = 30$ cm, $\ell_2 = 50$ cm e $\ell_3 = 55$ cm. Nesse caso, vamos considerar que as respectivas demandas a serem atendidas são $d_1 = 2$, $d_2 = 4$ e $d_3 = 3$.

Minimizar:

$$\sum_{p=1}^{27} T_p x_p$$

Sujeito a:

$$A_{3 \times 27} x_{27 \times 1} = d_{3 \times 1}$$

$$x_p \geq 0 \text{ e inteiro, } p=1, \dots, 27$$

Em que os padrões da Figura 10 são apresentados na forma matricial:

$$A_{3 \times 27} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

A matriz $x_{27 \times 1}$ representa a frequência com que cada um dos possíveis 27 padrões serão cortados para atender a demanda $d_{3 \times 1}$:

$$x_{27 \times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \\ \vdots \\ x_{27} \end{bmatrix} \text{ e } d_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

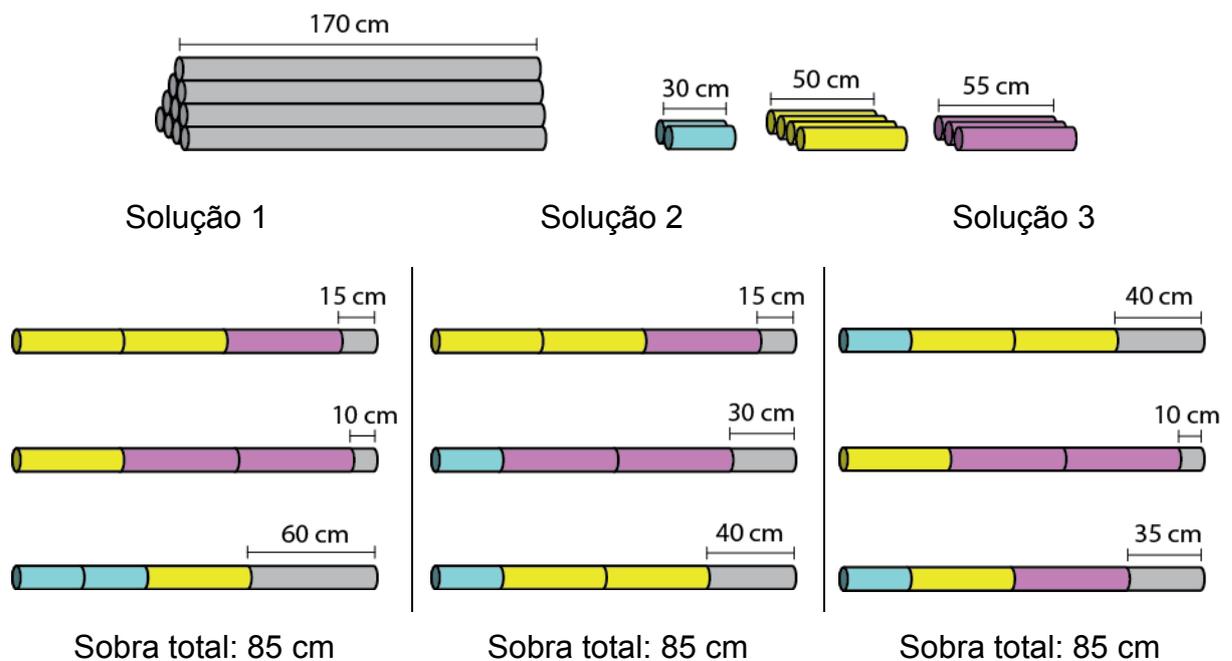


Figura 11 – Representação dos dados do exemplo e três soluções factíveis, considerando o problema de corte de estoque homogêneo ilimitado.

Note que, se considerarmos o objetivo de minimizar sobras, minimizar a quantidade de barras utilizadas ou o comprimento total cortado, as três soluções são equivalentes. Em todo caso, não podemos afirmar que uma das soluções apresentadas é solução ótima do exemplo. Para isso, devemos resolver o PCEC.

2.3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL COM ESTOQUE HETEROGÊNEO LIMITADO

Agora vamos considerar a seguinte situação: o estoque de barras é composto por J tipos de barras, de comprimentos $L_1, L_2, \dots, L_j, \dots, L_J$, entretanto, suficientes para o atendimento dos itens demandados. Denotaremos por $e_1, e_2, \dots, e_j, \dots, e_J$ a quantidade disponível das respectivas barras.

Esse tipo de problema pode ser aplicado, por exemplo, em indústrias nas quais os itens são produzidos por diferentes máquinas de corte.

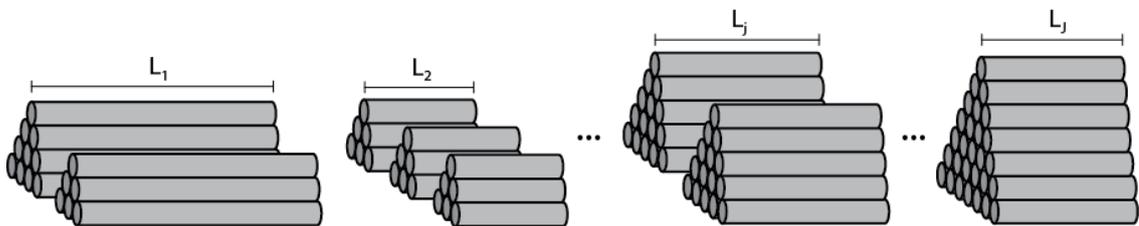


Figura 12 – Conjunto de barras em estoque de comprimentos $L_1, L_2, \dots, L_j, \dots, L_J$ e disponibilidade $e_1, e_2, \dots, e_j, \dots, e_J$ a serem cortadas.

O modelo matemático para o problema de corte de estoque com várias barras em estoque é semelhante ao problema (6)-(8), no entanto, os padrões de corte devem ser definidos para cada tipo de barra em estoque. Vamos denotar por $(a_p)_j$ a quantidade de vezes que o item de comprimento ℓ_j aparece no p -ésimo padrão de corte da j -ésima barra, com $i = 1, \dots, I$, $p = 1, \dots, P$ e $j = 1, \dots, J$. Desse modo, o vetor representante do p -ésimo padrão de corte na j -ésima barra será:

$$(\mathbf{a}_p)_j = [(a_{1p})_j, (a_{2p})_j, \dots, (a_{ip})_j, \dots, (a_{lp})_j]^T \quad (21)$$

Para satisfazer um padrão de corte, para todo $j = 1, \dots, J$:

$$\ell_1(\mathbf{a}_{1p})_j + \ell_2(\mathbf{a}_{2p})_j + \dots + \ell_i(\mathbf{a}_{ip})_j + \dots + \ell_I(\mathbf{a}_{Ip})_j \leq L_j \quad (22)$$

Novamente, vamos dividir em duas etapas:

1ª etapa: Definir todos os possíveis padrões de corte. Digamos que para a 1ª barra seja P_1 , para a 2ª barra seja P_2, \dots , para a j -ésima barra seja P_j, \dots , e, para a J -ésima barra seja P_J . Novamente, cada um desses números é finito, mas pode ser muito grande.

2ª etapa: Definir $(x_p)_j$, que representa a quantidade de vezes que o p -ésimo padrão é utilizado no plano de corte da j -ésima barra. Assim, se (21) é um padrão de corte para cada $p = 1, \dots, P_j$, então:

- Barra 1:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1)_1(x_1)_1 &= (x_1)_1 \cdot [(\mathbf{a}_{11})_1, (\mathbf{a}_{12})_1, \dots, (\mathbf{a}_{i1})_1, \dots, (\mathbf{a}_{I1})_1]^T \\ (\mathbf{a}_2)_1(x_2)_1 &= (x_2)_1 \cdot [(\mathbf{a}_{12})_1, (\mathbf{a}_{22})_1, \dots, (\mathbf{a}_{i2})_1, \dots, (\mathbf{a}_{I2})_1]^T \\ &\vdots \\ (\mathbf{a}_p)_1(x_p)_1 &= (x_p)_1 \cdot [(\mathbf{a}_{1p})_1, (\mathbf{a}_{2p})_1, \dots, (\mathbf{a}_{ip})_1, \dots, (\mathbf{a}_{Ip})_1]^T \\ &\vdots \\ (\mathbf{a}_{P_1})_1(x_{P_1})_1 &= (x_{P_1})_1 \cdot [(\mathbf{a}_{1P_1})_1, (\mathbf{a}_{2P_1})_1, \dots, (\mathbf{a}_{iP_1})_1, \dots, (\mathbf{a}_{IP_1})_1]^T \end{aligned}$$

Em que:

Demanda do item 1 na barra 1:

$$(\mathbf{a}_{11})_1(x_1)_1 + (\mathbf{a}_{12})_1(x_2)_1 + \dots + (\mathbf{a}_{1p})_1(x_p)_1 + \dots + (\mathbf{a}_{1P_1})_1(x_{P_1})_1 = (d_1)_1$$

Demanda do item 2 na barra 1:

$$(\mathbf{a}_{21})_1(\mathbf{x}_1)_1 + (\mathbf{a}_{22})_1(\mathbf{x}_2)_1 + \dots + (\mathbf{a}_{2p})_1(\mathbf{x}_p)_1 + \dots + (\mathbf{a}_{2P})_1(\mathbf{x}_P)_1 = (\mathbf{d}_2)_1$$

⋮

Demanda do item i na barra 1:

$$(\mathbf{a}_{i1})_1(\mathbf{x}_1)_1 + (\mathbf{a}_{i2})_1(\mathbf{x}_2)_1 + \dots + (\mathbf{a}_{ip})_1(\mathbf{x}_p)_1 + \dots + (\mathbf{a}_{iP})_1(\mathbf{x}_P)_1 = (\mathbf{d}_i)_1$$

⋮

Demanda do item l na barra 1:

$$(\mathbf{a}_{l1})_1(\mathbf{x}_1)_1 + (\mathbf{a}_{l2})_1(\mathbf{x}_2)_1 + \dots + (\mathbf{a}_{lp})_1(\mathbf{x}_p)_1 + \dots + (\mathbf{a}_{lP})_1(\mathbf{x}_P)_1 = (\mathbf{d}_l)_1$$

Escrevendo o sistema, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{a}_{11})_1(\mathbf{x}_1)_1 + (\mathbf{a}_{12})_1(\mathbf{x}_2)_1 + \dots + (\mathbf{a}_{1p})_1(\mathbf{x}_p)_1 + \dots + (\mathbf{a}_{1P})_1(\mathbf{x}_P)_1 = (\mathbf{d}_1)_1 \\ (\mathbf{a}_{21})_1(\mathbf{x}_1)_1 + (\mathbf{a}_{22})_1(\mathbf{x}_2)_1 + \dots + (\mathbf{a}_{2p})_1(\mathbf{x}_p)_1 + \dots + (\mathbf{a}_{2P})_1(\mathbf{x}_P)_1 = (\mathbf{d}_2)_1 \\ \vdots \\ (\mathbf{a}_{i1})_1(\mathbf{x}_1)_1 + (\mathbf{a}_{i2})_1(\mathbf{x}_2)_1 + \dots + (\mathbf{a}_{ip})_1(\mathbf{x}_p)_1 + \dots + (\mathbf{a}_{iP})_1(\mathbf{x}_P)_1 = (\mathbf{d}_i)_1 \\ \vdots \\ (\mathbf{a}_{l1})_1(\mathbf{x}_1)_1 + (\mathbf{a}_{l2})_1(\mathbf{x}_2)_1 + \dots + (\mathbf{a}_{lp})_1(\mathbf{x}_p)_1 + \dots + (\mathbf{a}_{lP})_1(\mathbf{x}_P)_1 = (\mathbf{d}_l)_1 \end{array} \right.$$

Em linguagem vetorial:

$$\sum_{p=1}^P (\mathbf{a}_p)_1 (\mathbf{x}_p)_1 = (\mathbf{d})_1 \quad (23)$$

Em que:

$$(\mathbf{a}_p)_1 = [(\mathbf{a}_{1p})_1, (\mathbf{a}_{2p})_1, \dots, (\mathbf{a}_{ip})_1, \dots, (\mathbf{a}_{lp})_1]^T, \text{ para } p = 1, \dots, P$$

$$\text{e } (\mathbf{d})_1 = [(\mathbf{d}_1)_1, (\mathbf{d}_2)_1, \dots, (\mathbf{d}_i)_1, \dots, (\mathbf{d}_l)_1]^T$$

De maneira equivalente, obtemos para as demais barras.

- Barra 2:

$$\sum_{p=1}^{P_1} (\mathbf{a}_p)_2 (x_p)_2 = (\mathbf{d})_2 \quad (24)$$

Em que:

$$(\mathbf{a}_p)_2 = \left[(a_{1p})_2, (a_{2p})_2, \dots, (a_{ip})_2, \dots, (a_{lp})_2 \right]^T, \text{ para } p = 1, \dots, P$$

$$\text{e } (\mathbf{d})_2 = \left[(d_1)_2, (d_2)_2, \dots, (d_i)_2, \dots, (d_l)_2 \right]^T$$

⋮

- Barra j :

$$\sum_{p=1}^{P_1} (\mathbf{a}_p)_j (x_p)_j = (\mathbf{d})_j \quad (25)$$

Em que:

$$(\mathbf{a}_p)_j = \left[(a_{1p})_j, (a_{2p})_j, \dots, (a_{ip})_j, \dots, (a_{lp})_j \right]^T, \text{ para } p = 1, \dots, P$$

$$\text{e } (\mathbf{d})_j = \left[(d_1)_j, (d_2)_j, \dots, (d_i)_j, \dots, (d_l)_j \right]^T$$

⋮

- Barra J :

$$\sum_{p=1}^{P_1} (\mathbf{a}_p)_J (x_p)_J = (\mathbf{d})_J \quad (26)$$

Em que:

$$(\mathbf{a}_p)_J = \left[(a_{1p})_J, (a_{2p})_J, \dots, (a_{ip})_J, \dots, (a_{lp})_J \right]^T, \text{ para } p = 1, \dots, P$$

$$e(\mathbf{d})_J = [(d_1)_J, (d_2)_J, \dots, (d_i)_J, \dots, (d_I)_J]^T$$

Note que a demanda é um vetor no qual cada coordenada é igual à soma das demandas nas barras variando de 1 a J , ou seja:

$$\mathbf{d} = (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_i, \dots, \mathbf{d}_I)^T$$

Em que:

$$\mathbf{d}_i = (\mathbf{d}_i)_1 + (\mathbf{d}_i)_2 + \dots + (\mathbf{d}_i)_j + \dots + (\mathbf{d}_i)_J = \sum_{j=1}^J (\mathbf{d}_i)_j \quad (27)$$

Então:

$$\begin{aligned} & \sum_{\rho=1}^{P_1} (\mathbf{a}_\rho)_1 (\mathbf{x}_\rho)_1 + \sum_{\rho=1}^{P_2} (\mathbf{a}_\rho)_2 (\mathbf{x}_\rho)_2 + \dots + \sum_{\rho=1}^{P_j} (\mathbf{a}_\rho)_j (\mathbf{x}_\rho)_j + \dots + \sum_{\rho=1}^{P_J} (\mathbf{a}_\rho)_J (\mathbf{x}_\rho)_J = \\ & = \sum_{j=1}^J \sum_{\rho=1}^{P_j} (\mathbf{a}_\rho)_j (\mathbf{x}_\rho)_j = \mathbf{d} \end{aligned} \quad (28)$$

Se considerarmos o objetivo de minimizar a quantidade de barras a serem cortadas, que é equivalente a minimizar a quantidade de vezes que se utiliza cada padrão em cada barra, temos:

Minimizar:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= (\mathbf{x}_1)_1 + (\mathbf{x}_2)_1 + \dots + (\mathbf{x}_\rho)_1 + \dots + (\mathbf{x}_{P_1})_1 + \\ & \quad + (\mathbf{x}_1)_2 + (\mathbf{x}_2)_2 + \dots + (\mathbf{x}_\rho)_2 + \dots + (\mathbf{x}_{P_2})_2 + \\ & \quad + \dots + \\ & \quad + (\mathbf{x}_1)_j + (\mathbf{x}_2)_j + \dots + (\mathbf{x}_\rho)_j + \dots + (\mathbf{x}_{P_j})_j + \\ & \quad + \dots + \\ & \quad + (\mathbf{x}_1)_J + (\mathbf{x}_2)_J + \dots + (\mathbf{x}_\rho)_J + \dots + (\mathbf{x}_{P_J})_J + \\ & = \sum_{j=1}^J \sum_{\rho=1}^{P_j} (\mathbf{x}_\rho)_j \end{aligned} \quad (29)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} (a_p)_j (x_p)_j = \mathbf{d} \quad (30)$$

$$(x_p)_j \geq 0 \text{ e inteiro, } p=1, \dots, P_j, \quad j=1, \dots, J \quad (31)$$

Novamente, para a modelagem do problema, podemos ainda considerar que há um custo $(c_p)_j$ qualquer associado ao p -ésimo padrão de corte na j -ésima barra. Nesse caso, a função objetivo (29) será substituída pela função:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} (c_p)_j (x_p)_j \quad (32)$$

Note que $(c_p)_j$ pode ser um custo qualquer ou a sobra do material, produzida pelo p -ésimo padrão de corte na j -ésima barra de comprimento L_j . Nesse caso, se um padrão de corte deve satisfazer (22) para todo $j=1, \dots, J$, podemos definir por $(c_p)_j = (T_p)_j$:

$$\begin{aligned} (T_p)_j &= L_j - \left[\ell_1 (a_{1p})_j + \ell_2 (a_{2p})_j + \dots + \ell_i (a_{ip})_j + \dots + \ell_l (a_{lp})_j \right] \\ &= L_j - \sum_{i=1}^l \ell_i (a_{ip})_j \end{aligned} \quad (33)$$

Portanto, o modelo matemático para o problema de corte de estoque no caso unidimensional, que considera J tipos de barras em estoque com disponibilidade limitada (estoque heterogêneo limitado) e cujo objetivo é minimizar sobras é:

Minimizar:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} (T_p)_j (x_p)_j \quad (34)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} (a_p)_j (x_p)_j = \mathbf{d} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{P_1} (x_p)_1 &\leq \mathbf{e}_1 \\ \sum_{p=1}^{P_2} (x_p)_2 &\leq \mathbf{e}_2 \\ &\vdots \\ \sum_{p=1}^{P_j} (x_p)_j &\leq \mathbf{e}_j \\ &\vdots \\ \sum_{p=1}^{P_J} (x_p)_J &\leq \mathbf{e}_J \end{aligned} \quad (36)$$

$$(x_p)_j \geq 0 \text{ e inteiro, } p=1, \dots, P_j, \quad j=1, \dots, J \quad (37)$$

Para simplificar a notação, podemos eliminar o uso dos parênteses e reescrever o modelo (34)-(37):

Minimizar:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} T_{pj} x_{pj} \quad (38)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} a_{pj} x_{pj} = \mathbf{d} \quad (39)$$

$$\sum_{p=1}^{P_j} x_{pj} \leq \mathbf{e}_j, \quad j=1, \dots, J \quad (40)$$

$$x_{pj} \geq 0 \text{ e inteiro, } p=1, \dots, P_j, \quad j=1, \dots, J \quad (41)$$

Em que:

- $\mathbf{a}_{pj} = (a_{1pj}, a_{2pj}, \dots, a_{lpj})^T$ é um vetor associado a um padrão de corte;
- a_{1pj} é a quantidade de vezes que o item de comprimento ℓ_i aparece no p-ésimo padrão de corte, na barra de comprimento L_j ;
- e_j é a quantidade disponível da barra de comprimento L_j em estoque;
- x_{pj} representa o total de barras que devem ser cortadas, segundo o p-ésimo padrão de corte;
- $\mathbf{d} = (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_j, \dots, \mathbf{d}_I)^T$ é o vetor de demandas
- $T_{pj} = L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ipj}$ representa a sobra produzida pelo p-ésimo padrão de corte na barra de comprimento L_j , em que $i=1, \dots, I$, $j=1, \dots, J$ e $p=1, \dots, P_j$.

A função objetivo (38) consiste em minimizar a sobra de material. A restrição (39) garante que a quantidade de itens produzidos seja exatamente igual à demanda. A restrição (40) garante que a quantidade de barras do tipo j cortadas não exceda a disponibilidade e_j . Por fim, a restrição (41) define as variáveis do problema.

Neste trabalho, este último modelo será denominado **Problema de Corte de Estoque Unidimensional Restrito** (PCER). Qualquer solução deste problema, cujos componentes sejam inteiros e não negativos, fornece uma solução factível para o problema de corte de estoque.

Do mesmo modo como foi demonstrado no modelo com estoque homogêneo ilimitado, podemos verificar que minimizar sobras é equivalente a minimizar o comprimento total de barras usadas para o atendimento da demanda. De fato, substituindo (28) e (33) em (38):

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=1}^{P_1} T_{p1} \mathbf{x}_{p1} + \sum_{p=1}^{P_2} T_{p2} \mathbf{x}_{p2} + \dots + \sum_{p=1}^{P_j} T_{pj} \mathbf{x}_{pj} + \dots + \sum_{p=1}^{P_J} T_{pJ} \mathbf{x}_{pJ} = \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} T_{pj} \mathbf{x}_{pj} = \\
& = \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} \left(L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i \mathbf{a}_{ipj} \right) \mathbf{x}_{pj} = \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} \left(L_j \mathbf{x}_{pj} - \sum_{i=1}^I \ell_i \mathbf{a}_{ipj} \mathbf{x}_{pj} \right) = \\
& = \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} L_j \mathbf{x}_{pj} - \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} \sum_{i=1}^I \ell_i \mathbf{a}_{ipj} \mathbf{x}_{pj} = \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} L_j \mathbf{x}_{pj} - \sum_{i=1}^I \ell_i \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} \mathbf{a}_{ipj} \mathbf{x}_{pj} = \\
& = \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} L_j \mathbf{x}_{pj} - \sum_{i=1}^I \ell_i \mathbf{d}_i
\end{aligned}$$

Exemplo 3: Para uma melhor compreensão do problema de corte de estoque unidimensional com estoque heterogêneo limitado, considere $J = 2$ barras de comprimentos $L_1 = 170$ cm e $L_2 = 100$ cm, cuja disponibilidade em estoque seja $e_1 = 2$ e $e_2 = 3$ respectivamente, para cortar $I = 3$ tipos de itens de comprimentos $\ell_1 = 30$ cm, $\ell_2 = 50$ cm e $\ell_3 = 55$ cm, de modo a atender às respectivas demandas $d_1 = 2$, $d_2 = 4$ e $d_3 = 3$. Há $P_1 = 27$ e $P_2 = 10$ padrões de corte possíveis.

Minimizar:

$$\sum_{p=1}^{27} T_{p1} \mathbf{x}_{p1} + \sum_{p=1}^{10} T_{p2} \mathbf{x}_{p2}$$

Sujeito a:

$$\mathbf{A}_{3 \times 27} \mathbf{x}_{27 \times 1} + \mathbf{A}_{3 \times 10} \mathbf{x}_{10 \times 1} = \mathbf{d}_{3 \times 1}$$

$$\sum_{p=1}^{27} \mathbf{x}_{p1} \leq 2$$

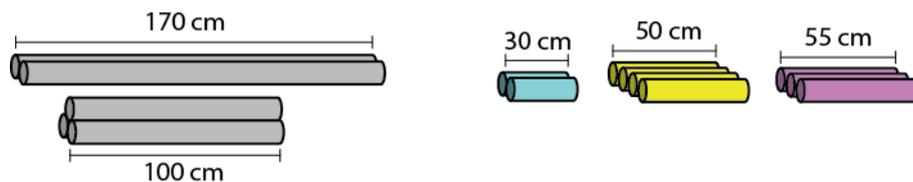
$$\sum_{p=1}^{10} \mathbf{x}_{p2} \leq 3$$

$$\mathbf{x}_{p1}, \mathbf{x}_{p2} \geq 0 \text{ e inteiro, } p = 1, \dots, 27$$

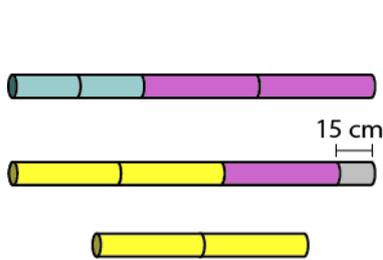
Em que:

$$A_{3 \times 27} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A_{3 \times 10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad x_{27 \times 1} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{p1} \\ \vdots \\ x_{27 \ 1} \end{bmatrix}; \quad x_{10 \times 1} = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{p2} \\ \vdots \\ x_{10 \ 2} \end{bmatrix} \quad e \quad d_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

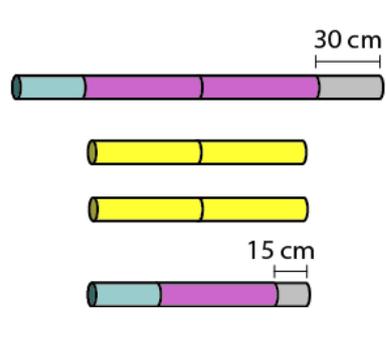


Solução 1:



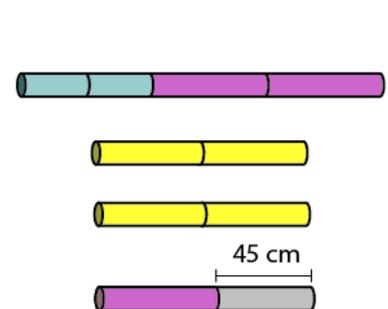
Sobra total: 15 cm

Solução 2:



Sobra total: 45 cm

Solução 3:



Sobra total: 45 cm

Figura 13 – Representação dos dados do exemplo e três soluções factíveis, considerando o problema de corte de estoque heterogêneo limitado.

Note que, se considerarmos o objetivo de minimizar sobras, a solução 1 é a mais desejável, e as soluções 2 e 3 são equivalentes. Em todo caso, não podemos afirmar que uma das soluções apresentadas é solução ótima do exemplo. Para isso, devemos resolver o PCER.

3 PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL COM APROVEITAMENTO DE SOBRAS

Atualmente as indústrias estão inseridas em um ambiente competitivo em que devem produzir somente o necessário, na quantidade exata e na qualidade que os clientes exigem, não se admitindo qualquer forma de desperdícios. As indústrias que apresentarem um alto índice de desperdício contribuem para a redução de sua lucratividade. Um dos princípios básicos do Sistema Toyota de Produção, segundo Shingo (1996) citado por Loeblein e outros (2012), é a minimização de custos, e uma maneira de chegar a este resultado é por meio da redução total da perda, desenvolvendo a produtividade a fim de utilizar da melhor maneira possível as máquinas e instalações para eliminar os desperdícios.

Dessa maneira, ressalta-se a importância da mensuração das sobras no estudo do problema de corte de estoque, buscando a melhor utilização da matéria-prima, ou seja, utilizando as sobras em um futuro processo de corte, desde que elas apresentem condições para isso.

3.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL COM APROVEITAMENTO DE SOBRAS

Vamos considerar uma situação semelhante à apresentada na seção 2.3, isto é, o estoque de barras é composto por J tipos de barras de comprimentos $L_1, L_2, \dots, L_j, \dots, L_J$, nas respectivas quantidades disponíveis $e_1, e_2, \dots, e_j, \dots, e_J$, suficientes para o atendimento dos itens demandados. Nesse momento, vamos considerar também que a demanda deve ser atendida de modo que as sobras geradas pelo processo de corte podem ser pequenas e descartáveis ou suficientemente grandes de modo a serem aproveitadas no futuro, num próximo processo de corte.

Sem perda de generalidade, ao se tratar do problema de corte de estoque com aproveitamento de sobras, chamaremos de **perdas** as sobras descartáveis, e de **retalhos** as sobras que podem ser aproveitadas. Vale lembrar que, nos métodos

apresentados nas seções anteriores, qualquer pedaço da barra cortada que não fosse um item demandado era considerado até então como sobra, sem tal distinção.

Ainda estabelecendo uma relação com os problemas clássicos de corte apresentados nas seções anteriores, para os quais consideramos o objetivo de minimizar a quantidade de vezes que cada padrão é utilizado, que é equivalente a minimizar a quantidade de barras a serem cortadas ou minimizar sobras, agora podemos perseguir o objetivo de obter sobras relativamente “pequenas” ou “suficientemente grandes” de modo a ainda atender tais objetivos. No entanto, se duas soluções para os problemas clássicos de corte apresentam a mesma sobra total, dessa vez são diferenciados, ou seja, é analisada a maneira como essa sobra total se distribui nos padrões de corte.

No ponto de vista prático, a definição de perdas e retalhos é relativa. Um comprimento mínimo aceitável como retalho é um critério que deve ser estabelecido pela indústria. É possível considerar, por exemplo, o comprimento do menor item demandado, o comprimento do maior item demandado, a média dos comprimentos dos itens demandados, ou um comprimento qualquer pré-estabelecido pelo usuário. Na literatura, são vários os trabalhos que consideram como retalho qualquer comprimento maior ou igual ao comprimento do menor item demandado, a citar Pinto (2008), Farias (2011), Hoto e outros (2003), Gradisar e outros (1997), (1999a, b), Gradisar e Trkman (2005), Abuabara e Morabito (2008, 2009). É importante ressaltar que essa atribuição pode não ser interessante no caso em que o conjunto dos itens demandados inclui um item atípico de comprimento muito pequeno ou apenas itens de comprimentos grandes. Desse modo o processo de corte iria gerar, no primeiro caso, muitos retalhos pequenos e de pouco uso, ou, no segundo caso, muitas perdas que poderiam ser aceitáveis em processos futuros.

O aproveitamento das sobras sugere novas possibilidades na escolha de uma solução, caso estas sejam grandes o suficiente para retornar ao estoque para atender demandas futuras. Na prática, alguns critérios também podem ser considerados, como a limitação na quantidade de retalhos, visto que precisam de espaço de armazenamento. De uma forma ou de outra, as indústrias preferem ter em estoque poucos retalhos de grandes dimensões ao invés de muitos retalhos de

pequenas dimensões. Uma solução que parece ser uma boa alternativa e merece avaliação é aquela que concentra os retalhos em poucos padrões de corte.

Exemplo 4: Vamos analisar novamente as três soluções factíveis apresentadas no exemplo 3, considerando como retalho qualquer comprimento maior ou igual ao comprimento do menor item demandado ($\ell_1 = 30$ cm).

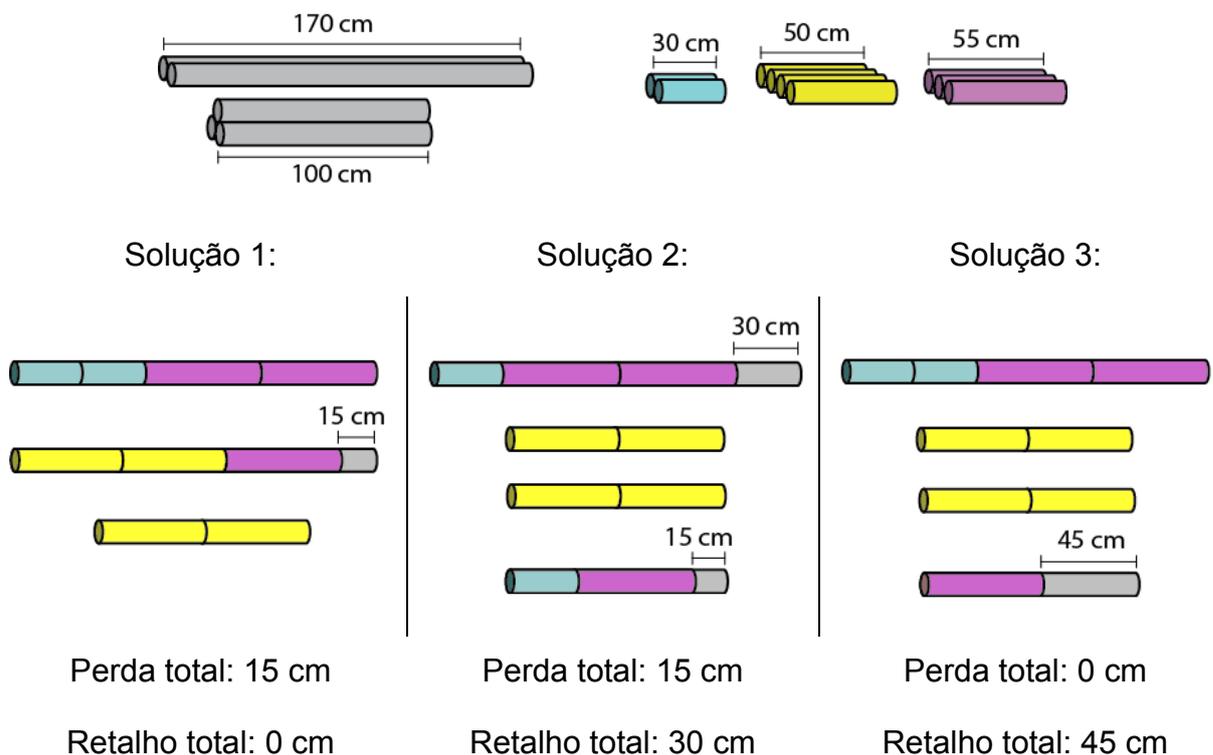


Figura 14 – Representação das três soluções factíveis do exemplo 3, considerando o problema de corte de estoque com aproveitamento de sobras.

Se considerarmos os problemas clássicos de corte com o objetivo de minimizar sobras, a solução 1 é a mais desejável, e as soluções 2 e 3 são equivalentes. No entanto, se analisarmos pelo ponto de vista de um problema de corte de estoque com aproveitamento de sobras, podemos verificar que a solução 2 é menos desejável que as outras duas, visto que apresenta uma perda total maior que a da solução 3 e igual à da solução 1, que por sua vez não gerou retalhos. A solução 3 é a mais desejável pelo fato de apresentar perda nula e concentrar o retalho em uma única barra. Em todo caso, não podemos afirmar que uma das soluções apresentadas é solução ótima do exemplo. Para isso, devemos resolver o PCES.

De modo geral, ao compararmos duas ou mais soluções, devemos analisar a perda total, o retalho total e como ambos estão distribuídos nos padrões de corte. Partiremos do pressuposto que é mais desejável reduzir as perdas ao nível mínimo, e maximizar os retalhos ao nível máximo, de tal maneira que estes retalhos estejam concentrados na menor quantidade possível de padrões, desde que seja mantido o objetivo inicial de um problema de corte de estoque: minimizar sobras. Uma solução é desejável se apresentar muitos padrões com perdas nulas ou pequenas, e poucos padrões com retalhos.

Para qualificar o que pode ser compreendido por “perda máxima” e “retalho mínimo” das soluções de um problema de corte de estoque com aproveitamento de sobras, Cherri e outros (2009) definiu “Solução ideal”, “Solução aceitável” e “Solução indesejável” com base em parâmetros pré-estabelecidos pelo usuário, que toma como base frações do comprimento da barra.

De maneira semelhante à apresentada no capítulo anterior, para a formulação do modelo matemático do problema de corte de estoque com aproveitamento de sobras, vamos dividir em duas etapas:

1ª etapa: Definir todos os possíveis padrões de corte, diferenciando o conjunto com padrões que geram perdas do conjunto com padrões que geram retalhos.

Digamos que:

- Para a primeira barra há P_1 padrões, dos quais P_1^α geram perdas e P_1^β geram retalhos;
- Para a segunda barra há P_2 padrões, dos quais P_2^α geram perdas e P_2^β geram retalhos;
- ⋮
- Para j-ésima barra há P_j padrões, dos quais P_j^α geram perdas e P_j^β geram retalhos;

⋮

- Para a J -ésima barra há P_j padrões, dos quais P_j^α geram perdas e P_j^β geram retalhos.

Por consequência, temos que decompor o vetor representante do p -ésimo padrão de corte na j -ésima barra (até então denotado por a_{ipj}) em dois vetores, um contendo apenas as coordenadas dos padrões que geram perdas e o outro contendo apenas as coordenadas dos padrões que geram retalhos. Consideramos que o vetor que representa os padrões com perdas geradas no p -ésimo padrão de corte da j -ésima barra será:

$$\mathbf{\alpha}_{pj} = (\alpha_{1pj}, \alpha_{2pj}, \dots, \alpha_{lpj})^T \quad (42)$$

Enfim, para todo $j = 1, \dots, J$, podemos definir por T_{pj} a perda do material produzida pelo padrão (42) na j -ésima barra:

$$T_{pj} = L_j - (\ell_1 \alpha_{1pj} + \ell_2 \alpha_{2pj} + \dots + \ell_l \alpha_{lpj}) = L_j - \sum_{i=1}^l \ell_i \alpha_{ipj}$$

Em que α_{ipj} representa a quantidade de vezes que o item de comprimento $\ell_i \leq L$, $i = 1, \dots, l$, aparece no p -ésimo padrão, $p = 1, \dots, P_j^\alpha$, que gera perda na j -ésima barra de comprimento L_j .

De maneira análoga, o vetor que representa os padrões com retalhos gerados no q -ésimo padrão de corte da j -ésima barra será:

$$\mathbf{\beta}_{qj} = (\beta_{1qj}, \beta_{2qj}, \dots, \beta_{lqj})^T \quad (43)$$

Assim, para todo $j = 1, \dots, J$, podemos definir por S_{qj} o retalho do material produzida pelo padrão (43) na j -ésima barra:

$$\begin{aligned} S_{qj} &= L_j - (\ell_1 \beta_{1qj} + \ell_2 \beta_{2qj} + \dots + \ell_l \beta_{lqj}) \\ &= L_j - \sum_{i=1}^l \ell_i \beta_{iqj} \end{aligned}$$

Em que β_{iqj} representa a quantidade de vezes que o item de comprimento $\ell_i \leq L$, $i = 1, \dots, l$, aparece no q -ésimo padrão, $q = 1, \dots, P_j^\beta$, que gera retalho na j -ésima barra de comprimento L_j .

2ª etapa: Vamos definir x_{pj}^α , que representa a quantidade de vezes que o p -ésimo padrão é utilizado no plano de corte da j -ésima barra, gerando perdas. Definimos também x_{qj}^β , que representa a quantidade de vezes que o q -ésimo padrão é utilizado no plano de corte da j -ésima barra, gerando retalhos.

Por fim, vamos considerar $\mathbf{d} = (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_l)^T$ o vetor de demandas dos itens, conforme já definido na modelagem do PCER. Nestas condições, o modelo matemático para o **Problema de Corte de Estoque Unidimensional com Aproveitamento de Sobras (PCES)** pode ser escrito por:

Minimizar:

$$\sum_{p=1}^{P_1^\alpha} T_{p1} x_{p1}^\alpha + \dots + \sum_{p=1}^{P_J^\alpha} T_{pJ} x_{pJ}^\alpha + \sum_{q=1}^{P_1^\beta} S_{q1} x_{q1}^\beta + \dots + \sum_{q=1}^{P_J^\beta} S_{qJ} x_{qJ}^\beta \quad (44)$$

Maximizar:

$$\sum_{q=1}^{P_1^\beta} S_{q1} x_{q1}^\beta + \dots + \sum_{q=1}^{P_J^\beta} S_{qJ} x_{qJ}^\beta \quad (45)$$

Minimizar:

$$\sum_{q=1}^{P_1^\beta} x_{q1}^\beta + \dots + \sum_{q=1}^{P_J^\beta} x_{qJ}^\beta \quad (46)$$

Sujeito a:

$$\sum_{p=1}^{P_1^\alpha} \alpha_{p1} x_{p1}^\alpha + \dots + \sum_{p=1}^{P_J^\alpha} \alpha_{pJ} x_{pJ}^\alpha + \sum_{q=1}^{P_1^\beta} \beta_{q1} x_{q1}^\beta + \dots + \sum_{q=1}^{P_J^\beta} \beta_{qJ} x_{qJ}^\beta = \mathbf{d} \quad (47)$$

$$\sum_{p=1}^{P_1^\alpha} x_{p1}^\alpha + \sum_{q=1}^{P_1^\beta} x_{q1}^\beta \leq e_1 \quad (48)$$

$$\sum_{p=1}^{P_2^\alpha} x_{p2}^\alpha + \sum_{q=1}^{P_2^\beta} x_{q2}^\beta \leq e_2 \quad (49)$$

⋮

$$\sum_{p=1}^{P_J^\alpha} x_{pJ}^\alpha + \sum_{q=1}^{P_J^\beta} x_{qJ}^\beta \leq e_J \quad (50)$$

$$x_{pj}^\alpha, x_{qj}^\beta \geq 0 \text{ e inteiro } p = 1, \dots, P_j^\alpha, q = 1, \dots, P_j^\beta, j = 1, \dots, J \quad (51)$$

Vale ressaltar que a formulação acima, apresentada por Pinto (2008) é estritamente didática, cujo objetivo é sugerir uma modelagem do PCES, indisponível na literatura. Podemos notar que o modelo apresenta um conflito entre a expressão

$\sum_{q=1}^{P_1^\beta} S_{q1} x_{q1}^\beta + \dots + \sum_{q=1}^{P_J^\beta} S_{qJ} x_{qJ}^\beta$ na primeira função objetivo de minimização (44) e na segunda função objetivo de maximização (45).

Comparando os modelos do PCER e PCES podemos notar que, basicamente, a diferença entre eles é que no PCES há uma distinção entre os padrões que geram perdas e os padrões que geram retalhos. Sob o mesmo ponto de vista, é como se tivéssemos decomposto os termos da função objetivo e das restrições do modelo do PCER, entre aqueles cujos padrões geram perda, e os que geram retalhos. Note ainda que foram acrescentados os objetivos de maximizar retalhos (45) e de minimizar a quantidade de vezes que cada padrão que gera perda é utilizado (46).

A comparação entre os modelos do PCER e PCES nos sugere a questionar se a melhor solução de um modelo é também a melhor solução do outro. De fato, é possível enunciar e demonstrar a seguinte propriedade (Pinto, 2008):

Propriedade 1: Uma solução ótima do PCER também é solução ótima do PCES.

Demonstração: Seja P^α o conjunto dos padrões que geram perdas e P^β o conjunto dos padrões que geram retalhos. Note que o conjunto $P^\alpha \cup P^\beta$ contém todos os padrões do PCER, assim como do PCES. Além disso, $P^\alpha \cup P^\beta \neq \emptyset$, basta considerar os padrões homogêneos maximais. Seja $x = (x^\alpha, x^\beta)$ a solução ótima do PCER, em que x^α são padrões que geram perdas e x^β são padrões que geram retalhos. Note ainda que x minimiza (38) e (44), e satisfaz (39)–(41), assim como (45)–(51), logo a solução ótima do PCER é também uma solução ótima do PCES.

Outra relação que podemos estabelecer entre as soluções do PCER e PCES é seguinte (Pinto, 2008):

Propriedade 2: Se a soma das perdas da solução do PCER é menor que o comprimento mínimo $S > 0$, que representa uma sobra, então, o PCES não admite solução.

Demonstração: Imediata. De fato, se a soma das perdas de uma solução do PCER é menor que S , então não existe a possibilidade de gerar sobras, mesmo que elas estejam concentradas em uma única barra.

Estas duas propriedades indicam que um bom procedimento é buscar o conjunto das soluções do PCER e, depois, buscar nesse conjunto aqueles que maximizem (45) e minimizem (46), isto é, que maximizem as sobras (perdas e retalhos), distribuindo-as numa menor quantidade de barras.

Seguindo este princípio, Pinto (2008) propôs cinco estratégias de resolução para o PCES, das quais três delas possuem uma etapa inicial para determinar o menor comprimento que deve ser cortado de barras para o atendimento de itens demandados

e, numa segunda etapa busca concentrar as perdas na menor quantidade de barras. As estratégias são apresentadas na seção 4.3.

4 ALGUNS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL COM APROVEITAMENTO DE SOBRAS

Há várias técnicas especializadas na tentativa de solucionar um PCE, com abordagens diferentes, como busca, programação, relaxação, grafos e outras. A dificuldade na resolução de problemas deste tipo reside no fato de que cada uma delas apresenta características específicas, o que torna a definição de um método geral eficiente pouco provável.

Via de regra, os métodos de resolução dos PCE são por meio de heurísticas. Nesse caso, há duas maneiras distintas de determinar soluções inteiras e aproximadas para um problema de corte. A primeira delas, que chamamos de **heurísticas construtivas**, constrói e utiliza um “bom” padrão de corte o máximo possível de vezes. São heurísticas de repetição exaustivas, bem conhecidas na literatura. A segunda maneira, que chamamos de **heurísticas residuais** (ou heurísticas de demandas residuais), resolve o problema com as condições de integralidade sobre as variáveis de decisão relaxadas, por geração de colunas, proposto por Gilmore e Gomory (1963). Com base na solução ótima do problema relaxado, aproximamos sua solução fracionária por uma solução inteira, restando um problema de menor demanda, chamado residual, o qual deve ser resolvido. A abordagem mais utilizada na prática é a sugerida por Gilmore e Gomory (1963), em que a aproximação é feita para o inteiro inferior.

A eficácia dos modelos propostos por Pinto (2008) será analisada pela comparação dos resultados com as de heurísticas propostas por Cherri e outros (2009). Os autores desenvolveram heurísticas construtivas e residuais específicas para resolver um problema de corte de estoque com aproveitamento de sobras (PCES), com base em modificações realizadas em heurísticas clássicas conhecidas na literatura. Essas heurísticas são: Construtiva FFD_R , Construtiva Gulosa $_R$, Residual FFD_R , Residual Gulosa $_R$ e Residual por Arredondamento Guloso (RAG_R) – versões 1, 2 e 3.

As heurísticas construtivas FFD_R e $Gulosa_R$, propostas por Cherri e outros (2009), foram desenvolvidas a partir de alterações nas heurísticas construtivas clássicas FFD e $Gulosa$, respectivamente. As Heurísticas Residuais FFD_R e $Gulosa_R$ foram desenvolvidas com modificações nas heurísticas residuais FFD e $Gulosa$, respectivamente. Para essas heurísticas, o clássico problema de corte é resolvido com as restrições de integralidade relaxadas e, para obter uma solução inteira aproximada, as soluções contínuas são arredondadas e o problema residual resultante é resolvido pelas heurísticas construtivas FFD_R ou $Gulosa_R$. Por fim, as Heurísticas Residuais RAG_R – versões 1, 2 e 3 foram desenvolvidas realizando modificações nas heurísticas RAG – versões 1, 2 e 3 propostas por Poldi e Arenales (2009).

Antes de apresentarmos a ideia principal destas heurísticas, faremos uma breve revisão de alguns conceitos e da estrutura geral das heurísticas construtivas e residuais. Outros detalhes e a estrutura dos algoritmos podem ser consultados em Cherri e outros (2009).

4.1 HEURÍSTICAS CONSTRUTIVAS

As heurísticas construtivas seguem o seguinte algoritmo (Poldi e Arenales, 2009):

- **Passo 1:** Construa um bom padrão de corte;
- **Passo 2:** Utilize este padrão o máximo possível de vezes, sem que a demanda seja excedida;
- **Passo 3:** Atualize a demanda.

Repita os passos acima até que a demanda seja atendida. No entanto, para precisar o que seria um “bom” padrão de corte, apresentaremos quatro métodos: FFD , $Gulosa$, FFD_R e $Gulosa_R$.

4.1.1 Heurística Construtiva FFD

De forma geral, a heurística FFD (*First-Fit-Decreasing*) consiste em alocar o maior item num padrão de corte tantas vezes quanto for possível, ou seja, até que não haja mais espaço para alocar esse item na barra, ou até que sua demanda já tenha sido atendida. Quando não for mais possível ou necessária a produção do maior item, o segundo maior item é considerado e, assim por diante, até o menor item.

Também é comum na literatura uma implementação diferente para a heurística FFD, esgotando-se o maior item em tantas barras quanto for necessário, ou seja, aloca-se o maior item na primeira barra tantas vezes quanto for possível. Caso ainda restem unidades do maior para serem alocados, aloque-as numa segunda barra e assim por diante, até que sua demanda tenha sido atendida. Procedendo de maneira análoga com o segundo maior item, alocando-o, se possível, no espaço restante da primeira barra, segunda barra, e assim sucessivamente, até que sua demanda tenha sido atendida. Analogamente para os demais itens.

4.1.2 Heurística Construtiva Gulosa

A heurística gulosa consiste em, a cada iteração, resolver um problema de mochila para gerar um padrão de corte:

Maximizar:

$$l_1 a_1 + l_2 a_2 + \dots + l_I a_I \quad (52)$$

Sujeito a:

$$l_1 a_1 + l_2 a_2 + \dots + l_I a_I \leq L \quad (53)$$

$$0 \leq a_i \leq r_i \text{ e inteiro, } i = 1, \dots, I \quad (54)$$

Em que L é a capacidade da mochila, l_i é o comprimento do i -ésimo item e r_i é a sua demanda residual, $i = 1, \dots, I$, atualizada no Passo 3 do algoritmo

apresentado na Seção 4.1. Inicialmente, $r_i = d_i$, isto é, r_i é a demanda inicial do i -ésimo item, $i = 1, \dots, I$.

4.1.3 Heurística Construtiva FFD_R

A heurística FFD_R de Cherri e outros (2009) consiste em aplicar a heurística FFD para obter um padrão de corte e, logo após, a sobra é analisada. Se a sobra for aceitável, isto é, estiver dentro de limites aceitáveis definidos a priori, o padrão para a próxima barra é gerado, senão um item (o maior) é retirado. Assim, com o comprimento remanescente da barra é resolvido o problema da mochila (52)-(54), com capacidade L igual à sobra de material gerada no padrão adicionado ao tamanho do item retirado. Depois de resolvido o problema da mochila, a sobra é analisada e, se ainda não for aceitável, outro item (o segundo maior) é retirado do padrão inicial. Mais uma vez, para o comprimento remanescente da barra é resolvido o problema da mochila (52)-(54). Caso tenha sido retirado um item de cada comprimento entre todos os que compõem o padrão, volta-se a retirar o maior item. Este procedimento é repetido até que a sobra obtida seja aceitável ou o padrão inicial tenha sido anulado. Neste último caso, o padrão de corte é definido pelo problema da mochila (52)-(54).

4.1.4 Heurística Construtiva $Gulosa_R$

A heurística $Gulosa_R$ de Cherri e outros (2009) consiste em aplicar a heurística $Gulosa$ para obter um padrão de corte e, logo após, a sobra é analisada. Se a sobra for aceitável, isto é, estiver dentro de limites aceitáveis definidos a priori, o padrão para a próxima barra é gerado, senão um item (o maior) é retirado e a sobra é novamente analisada. Se o padrão ainda não for aceitável, o segundo maior item é retirado. Este procedimento é repetido até que se tenha uma sobra aceitável ou o padrão anulado. Neste último caso, escolhe-se entre os padrões de corte originais, aquele que apresentar a menor sobra. No entanto, segundo os autores, esta é uma situação atípica que pode ocorrer, por exemplo, quando o estoque é formado apenas por retalhos.

4.2 HEURÍSTICAS RESIDUAIS

Ao contrário das heurísticas construtivas, que geram um bom padrão de corte e a utilizam o máximo possível de vezes, as heurísticas residuais baseiam-se na ideia de encontrar uma solução inteira para o problema de corte de estoque unidimensional a partir da solução ótima fracionada do problema relaxado⁶.

Considere o modelo (38)-(41) do problema de corte de estoque:

Minimizar:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} c_{pj} x_{pj} \quad (55)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} a_{pj} x_{pj} = \mathbf{d} \quad (56)$$

$$\sum_{p=1}^{P_j} x_{pj} \leq \mathbf{e}_j, \quad j = 1, \dots, J \quad (57)$$

$$x_{pj} \geq 0 \text{ e inteiro, } p = 1, \dots, P_j, \quad j = 1, \dots, J \quad (58)$$

Podemos simplificar a notação escrevendo na forma matricial:

Minimizar:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (59)$$

Sujeito a:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{d} \quad (60)$$

⁶ Neste caso estamos considerando que pelo menos uma coordenada do vetor solução ótima é fracionada, caso contrário já teríamos a solução inteira do problema.

$$\mathbf{Ex} \leq \mathbf{e} \quad (61)$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \text{ e inteiro} \quad (62)$$

Em que:

- \mathbf{c}^T é a matriz de ordem $1 \times [P_1 + \dots + P_J]$ em que cada termo corresponde à sobra do material produzida pelo p-ésimo padrão de corte na j-ésima barra de comprimento L_j em (55);
- \mathbf{x} é a matriz de ordem $[P_1 + \dots + P_J] \times 1$ em que cada termo representa a quantidade de vezes que o p-ésimo padrão é utilizado no plano de corte da j-ésima barra;
- \mathbf{A} é a matriz de ordem $I \times [P_1 + \dots + P_J]$ em que cada coluna representa o p-ésimo padrão de corte na j-ésima barra em (56);
- $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_i, \dots, d_I)^T$ em que cada termo corresponde à demanda do i-ésimo item.
- \mathbf{E} é a matriz de ordem $J \times [P_1 + \dots + P_J]$ com os termos “0” ou “1” da restrição (57);
- $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_j, \dots, e_J)^T$ em que cada termo corresponde à disponibilidade em estoque da j-ésima barra.

A condição de integralidade em (62) torna computacionalmente inviável a resolução de um problema de corte, principalmente para casos em que a quantidade de itens demandados é maior do que algumas dezenas.

Considere \mathbf{x} uma solução ótima fracionada e \mathbf{y} uma solução inteira aproximada para \mathbf{x} , satisfazendo (60) e (61), tal que:

$$\mathbf{Ay} \leq \mathbf{d} \quad (63)$$

$$\mathbf{Ey} \leq \mathbf{e} \quad (64)$$

Essa aproximação pode ser realizada, por exemplo, por um truncamento trivial:

$$\mathbf{y} = \left(\lfloor x_1 \rfloor, \lfloor x_2 \rfloor, \dots, \lfloor x_{P_1+P_2+\dots+P_J} \rfloor \right)^T \quad (65)$$

De fato todas coordenadas de (65) são não-negativos e satisfazem (63) e (64). Note que a solução aproximada não atende a todos os itens demandados, ou seja, ela gera uma demanda residual $\mathbf{r} = \mathbf{d} - \mathbf{Ay}$ dos itens, e um estoque residual $\mathbf{s} = \mathbf{e} - \mathbf{Ey}$ das barras.

O problema agora passa a ser resolver novamente a relaxação linear do problema (59)-(62) com $\mathbf{d} = \mathbf{r}$ e $\mathbf{e} = \mathbf{s}$, que denominamos simplesmente de **problema residual** (ou problema de demanda residual):

Minimizar:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (66)$$

Sujeito a:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{r} \quad (67)$$

$$\mathbf{Ex} \leq \mathbf{s} \quad (68)$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \text{ e inteiro} \quad (69)$$

A partir da resolução do problema (66)-(69), obteremos uma nova solução inteira aproximada que pode ou não atender a demanda remanescente. Esse processo é realizado até que a demanda residual se anule ou a solução inteira aproximada (por truncamento trivial, por exemplo) seja nula. Neste último caso, temos um problema residual final com poucos itens que pode ser resolvido por outro método (exato ou heurístico).

As heurísticas residuais seguem o seguinte algoritmo (Poldi e Arenales, 2009):

- **Passo 1:** {Inicialização}

Sejam $k = 1$, $\mathbf{r}^1 = \mathbf{d}$ e $\mathbf{s}^1 = \mathbf{e}$;

- **Passo 2:** {Determinar uma solução ótima contínua}

Resolver o problema (66)-(69) relaxado (método simplex com geração de colunas);

Seja \mathbf{x}^k a solução contínua obtida;

Se $\mathbf{x}^k \in \square^n$, ou seja, é uma solução inteira, então PARE.

- **Passo 3:** {Determinar uma solução inteira aproximada}

Determine uma solução inteira aproximada para \mathbf{x}^k e denote-a por \mathbf{y}^k ;

Se \mathbf{y}^k for um vetor nulo, então vá para o passo final.

- **Passo 4:** {Atualizações}

Determine a nova demanda residual e estoque residual:

$$\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^k - \mathbf{A}\mathbf{y}^k;$$

$$\mathbf{s}^{k+1} = \mathbf{s}^k - \mathbf{E}\mathbf{y}^k;$$

$$k = k + 1;$$

Volte ao **Passo 2**.

- **Passo 5:** {Passo Final}

Resolva o problema residual final com poucos itens por algum método (heurístico ou exato).

Para completar esse algoritmo, é preciso especificar como determinar a solução inteira aproximada \mathbf{y}^k no Passo 3 e também como resolver o problema residual final no Passo 5. No procedimento descrito por Cherri e outros (2009), a solução inteira aproximada \mathbf{y}^k do Passo 3 é determinada por um truncamento trivial, como em (65) e, no Passo 5, utiliza-se as heurísticas FFD e Gulosa para resolver o PCES.

4.2.1 Heurística Residual FFD

- **Passo 5:** {Passo Final}

Resolva o problema residual final com poucos itens pela heurística FFD (seção 4.1.1).

4.2.2 Heurística Residual Gulosa

- **Passo 5:** {Passo Final}

Resolva o problema residual final com poucos itens pela heurística Gulosa (seção 4.1.2).

Como já citado anteriormente, Cherri e outros (2009) sugere modificações nas heurísticas residuais FFD e Gulosa de modo a orientá-las para o PCES, as quais são denominadas Heurísticas Residuais FFD_R e Gulosa_R, respectivamente. Nestas heurísticas, a solução inteira aproximada \mathbf{y}^k do Passo 3 é determinada por um truncamento trivial, diferenciando-se apenas no Passo 5, descrito a seguir.

4.2.3 Heurística Residual FFD_R

- **Passo 5:** {Passo Final}

Resolva o problema residual final com poucos itens pela heurística FFD_R (seção 4.1.3).

4.2.4 Heurística Residual Gulosa_R

- **Passo 5:** {Passo Final}

Resolva o problema residual final com poucos itens pela heurística Gulosa_R (seção 4.1.4).

4.2.5 Heurística Residual por Arredondamento Guloso (RAG)

Poldi e Arenales (2009) desenvolveram e analisaram uma técnica para a obtenção da solução inteira aproximada \mathbf{y}^k . Ela é dividida em duas partes: Passo 3.1 {Pré processamento} e Passo 3.2 {Arredondamento}.

No Passo de Pré processamento, os padrões de corte da solução ótima \mathbf{x}^k (obtidas no Passo 2 do algoritmo residual) são ordenados segundo um dos critérios RAG_R – versões 1, 2 ou 3, por exemplo. No passo de Arredondamento, o processo é iniciado com o primeiro desses padrões de corte, e sua frequência é arredondada para o inteiro superior, isto é, $y_{1j_1} = \lceil x_{1j_1} \rceil$. As demais coordenadas são nulas ($y_{pj_p} = 0, p = 2, \dots, P$) e as condições (67) e (68) são testadas. Caso ocorra violação, y_{1j_1} é reduzido sucessivamente de uma unidade ($y_{1j_1} = y_{1j_1} - 1$) até obter uma solução inteira aproximada. Nesse caso o valor de y_{1j_1} é fixado e o procedimento é repetido com o segundo padrão de corte e, assim, determina-se uma solução inteira aproximada: y_{1j_1}, y_{2j_2} e $y_{pj_p} = 0, p = 0, \dots, P$. Este procedimento é repetido com os demais padrões de corte. Utilizando estas heurísticas, o Passo 4 do algoritmo não é executado, uma vez que o arredondamento da solução é realizado para o inteiro superior, e assim, toda demanda é atendida.

A seguir, apresentaremos os critérios de ordenação das heurísticas RAG – versões 1, 2 e 3, segundo Poldi e Arenales (2009). Para isso, considere P a quantidade total de padrões de corte gerados na solução ótima do Passo 2 do algoritmo residual, enumerados por $1, 2, \dots, P$, e j_p a barra associada ao p -ésimo padrão de corte, com $p = 1, \dots, P$.

4.2.6 Heurística Residual RAG – 1

Os padrões de corte são ordenados de acordo com os valores não-crescentes das frequências, isto é, $x_{1j_1} \geq x_{2j_2} \geq \dots \geq x_{pj_T}$;

4.2.7 Heurística Residual RAG – 2

Os padrões de corte são ordenados de acordo com os valores não-decrescentes de suas sobras, isto é, $c_{1j_1} \leq c_{2j_2} \leq \dots \leq c_{pj_T}$, em que c_{pj} representa o custo associado ao p-ésimo padrão de corte na j_p -ésima barra;

4.2.8 Heurística Residual RAG – 3

Considere $f_{pj} = x_{pj} - \lfloor x_{pj} \rfloor$ a parte fracionária de x_{pj} . Os padrões de corte são ordenados de acordo com os valores não-crescentes dessas partes fracionárias, isto é, $f_{1j_1} \geq f_{2j_2} \geq \dots \geq f_{pj_T}$.

4.2.9 Heurísticas Residuais RAG_R – versões 1, 2 e 3

Cherri e outros (2009) também desenvolveu uma técnica diferente para obter a solução inteira aproximada \mathbf{y}^k baseada nas versões RAG – versões 1, 2 e 3 desenvolvidas por Poldi e Arenales (2009), as quais definem novas heurísticas residuais, denominadas Heurísticas RAG_R – versões 1, 2 e 3. O Passo 3 do algoritmo residual é comum às três heurísticas.

Nas heurísticas RAG_R, utilizam-se as heurísticas RAG desenvolvidas por Poldi e Arenales (2009) e, em seguida, as sobras de todos os padrões são analisadas. Se a sobra for menor que um determinado comprimento (calculado *a priori*) o padrão é aceito e armazenado, caso contrário, é rejeitado e a demanda e o estoque são atualizados, gerando um problema residual. Esse problema residual é resolvido pela heurística FFD_R.

4.3 MODELOS PROPOSTOS POR PINTO (2008)

No capítulo anterior, as propriedades 1 e 2 indicaram que é uma boa tática obter o conjunto das soluções ótimas ou quase ótimas do PCER e, em seguida, buscar nesse conjunto soluções que maximizem as sobras, distribuindo-as na menor quantidade de barras. Seguindo este princípio, Pinto (2008) propôs três estratégias de resolução para o PCES que, numa primeira etapa encontra o menor comprimento que deve ser cortado de barras para o atendimento dos itens demandados e, numa segunda etapa, busca concentrar as perdas na menor quantidade de barras. O autor ainda propôs outras duas estratégias, visando resolver o PCES numa única etapa.

Nas três primeiras estratégias, a etapa inicial é sempre a mesma. Para isso considere as constantes:

- L_j : comprimento da j -ésima barra, $j = 1, \dots, J$;
- ℓ_i : comprimento do i -ésimo item, $i = 1, \dots, I$;
- d_i : demanda do i -ésimo item, $i = 1, \dots, I$;

E as variáveis:

- a_{ij} : quantidade de itens de índice $i = 1, \dots, I$ cortados da barra de índice $j = 1, \dots, J$;
- $y_j = \begin{cases} 1, & \text{se a barra de índice } j \text{ é escolhida;} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$;

O modelo matemático da etapa inicial é:

Minimizar:

$$\sum_{j=1}^J y_j L_j \quad (70)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^J a_{ij} = d_i, \quad i = 1, \dots, I \quad (71)$$

$$\sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq L_j y_j, \quad j = 1, \dots, J \quad (72)$$

$$a_{ij} \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J \quad (73)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, J \quad (74)$$

A função objetivo (70) minimiza o comprimento total utilizado para atender a demanda. A restrição (71) garante que a quantidade de itens produzidos seja igual à demanda. A restrição (72) funciona da seguinte forma: se a j -ésima barra está sendo usada ($y_j = 1$) a mesma equivale a uma restrição de mochila, por outro lado, se a j -ésima barra não está sendo usada ($y_j = 0$) a restrição obriga que $a_{ij} = 0$, $i = 1, \dots, I$. Por fim, as restrições (73) e (74) definem as variáveis do problema.

A etapa seguinte nas três primeiras estratégias consiste em determinar um conjunto de padrões que atenda a demanda diminuindo as sobras ao nível mínimo, gerando o mínimo de perdas e o máximo de retalhos, de tal maneira que estes retalhos estejam concentrados na menor quantidade de barras.

4.3.1 Estratégia 1

Para definir a segunda etapa da Estratégia 1, considere as constantes:

- N : quantidade de barras escolhida na primeira etapa;
- L_j : comprimento da j -ésima barra, $j = 1, \dots, N$;
- ℓ_i : comprimento do i -ésimo item, $i = 1, \dots, I$;
- d_i : demanda do i -ésimo item, $i = 1, \dots, I$;
- S : comprimento do menor item demandado;

- R : quantidade de barras usadas para concentrar retalhos⁷.

E as variáveis:

- a_{ij} : quantidade de itens de índice $i = 1, \dots, I$ cortados da barra de índice $j = 1, \dots, N$;
- $w_j = \begin{cases} 1, & \text{se a barra de índice } j \text{ é escolhida para concentrar retalhos} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

O modelo matemático utilizado na Estratégia 1 é:

Minimizar:

$$\sum_{j=1}^N \left(L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \right) \quad (75)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^N w_j = R \quad (76)$$

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} = d_i, \quad i = 1, \dots, I \quad (77)$$

$$L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq w_j L_j + (1 - w_j)(S - 1), \quad j = 1, \dots, N \quad (78)$$

$$L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \geq w_j S, \quad j = 1, \dots, N \quad (79)$$

$$a_{ij} \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, N \quad (80)$$

$$w_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, N \quad (81)$$

⁷ Na implementação do modelo, são atribuídos valores de forma crescente à constante R . Desse modo, a quantidade de barras usadas para concentrar os retalhos é, em cada problema, a menor possível.

A função objetivo (75) minimiza as sobras do processo. A restrição (76) garante que a quantidade de barras utilizadas para concentrar os retalhos seja igual ao número R previamente fixado. A restrição (77) garante que a quantidade de itens produzidos seja igual à demanda. As restrições (78) e (79) juntas, indicam para cada barra, que o comprimento remanescente do corte dos itens deve estar no intervalo $[S, L_j]$ quando $w_j = 1$, isto é, a barra deve gerar retalhos, ou deve estar no intervalo $[0, S)$ quando $w_j = 0$, isto é, a barra não deve gerar retalhos. Por fim, as restrições (80) e (81) definem as variáveis do problema.

4.3.2 Estratégia 2

Para definir a segunda etapa da Estratégia 2, considere as constantes:

- N : quantidade de barras escolhida na primeira etapa;
- L_j : comprimento da j -ésima barra, $j = 1, \dots, N$;
- $M \geq \max\{L_j \mid j = 1, \dots, J\}$
- T_j : Perda na j -ésima barra, $j = 1, \dots, N$;
- ℓ_i : comprimento do i -ésimo item, $i = 1, \dots, I$;
- d_i : demanda do i -ésimo item, $i = 1, \dots, I$;
- S : comprimento do menor item demandado;
- R : quantidade de barras usadas para concentrar retalhos.

E as variáveis:

- a_{ij} : quantidade de itens de índice $i = 1, \dots, I$ cortados da barra de índice $j = 1, \dots, N$;

- $w_j = \begin{cases} 1, & \text{se a barra de índice } j \text{ é escolhida para concentrar retalhos} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

O modelo matemático utilizado na Estratégia 2 é:

Minimizar:

$$\sum_{j=1}^N T_j \quad (82)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^N w_j = R \quad (83)$$

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} = d_i, \quad i = 1, \dots, I \quad (84)$$

$$L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq L_j + (1 - w_j)M, \quad j = 1, \dots, N \quad (85)$$

$$L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \geq S - (1 - w_j)M, \quad j = 1, \dots, N \quad (86)$$

$$L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq T_j + w_j M, \quad j = 1, \dots, N \quad (87)$$

$$L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \geq T_j - w_j M, \quad j = 1, \dots, N \quad (88)$$

$$a_{ij} \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, N \quad (89)$$

$$T_j \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad j = 1, \dots, N \quad (90)$$

$$w_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, N \quad (91)$$

A função objetivo (82) minimiza as perdas do processo. As restrições (83) e (84) são semelhantes às restrições (76) e (77) respectivamente. As restrições (85) e (86) juntas, indicam para cada barra, que o comprimento remanescente do corte dos itens deve gerar retalhos quando $w_j = 1$, e ficam inativas quando $w_j = 0$. As restrições

(87) e (88) juntas, indicam para cada barra, que o comprimento remanescente do corte dos itens deve gerar perdas quando $w_j = 0$, e ficam inativas quando $w_j = 1$. Por fim, as restrições (89), (90) e (91) definem as variáveis do problema.

4.3.3 Estratégia 3

Para definir a segunda etapa da Estratégia 3, considere as constantes:

- N : quantidade de barras escolhida na primeira etapa;
- L_j : comprimento da j -ésima barra, $j = 1, \dots, N$;
- ℓ_i : comprimento do i -ésimo item, $i = 1, \dots, I$;
- d_i : demanda do i -ésimo item, $i = 1, \dots, I$;
- R : quantidade de barras usadas para concentrar retalhos.

E as variáveis:

- a_{ij} : quantidade de itens de índice $i = 1, \dots, I$ cortados da barra de índice $j = 1, \dots, N$;

As restrições do modelo da primeira e da segunda etapa são parecidas, mas a função objetivo é bem diferente:

Maximizar:

$$\sum_{j=N-(R-1)}^N \left(L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \right) \quad (92)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} = d_i, \quad i = 1, \dots, I \quad (93)$$

$$\sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq L_j, \quad j = 1, \dots, N \quad (94)$$

$$a_{ij} \geq 0 \text{ e inteiro, } i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, N \quad (95)$$

A função objetivo (92) maximiza as sobras do processo nas barras de índice $j = N - (R - 1), \dots, N$. A restrição (93) garante que a quantidade de itens produzidos seja igual à demanda. A restrição (94) equivale a uma restrição de mochila. Por fim, a restrição (95) define as variáveis do problema. Note que ao fazer $R = 1$, optou-se por concentrar as sobras na última barra, e, neste caso, foi realizada uma ordenação decrescente das barras, ou seja, $L_1 \leq \dots \leq L_N$.

4.3.4 Estratégia 4

Para definir o modelo da Estratégia 4 de uma única etapa, considere as constantes:

- L_j : comprimento da j -ésima barra, $j = 1, \dots, J$;
- ℓ_i : comprimento do i -ésimo item, $i = 1, \dots, I$;
- d_i : demanda do i -ésimo item, $i = 1, \dots, I$;
- $S = \min\{\ell_i \mid i = 1, \dots, I\}$: comprimento mínimo considerado como retalho;
- R : quantidade de barras usadas para concentrar retalhos.

E as variáveis:

- a_{ij} : quantidade de itens de índice $i = 1, \dots, I$ cortados da barra de índice $j = 1, \dots, J$;
- $y_j = \begin{cases} 1, & \text{se a barra de índice } j \text{ é escolhida;} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$;
- $w_j = \begin{cases} 1, & \text{se a barra de índice } j \text{ é escolhida para concentrar retalhos;} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$.

O modelo matemático utilizado na Estratégia 4 é:

Minimizar:

$$\sum_{j=1}^J y_j L_j \quad (96)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^J w_j = R \quad (97)$$

$$\sum_{j=1}^J a_{ij} = d_i, \quad i = 1, \dots, I \quad (98)$$

$$L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq w_j L_j + (1 - w_j)(S - 1), \quad j = 1, \dots, J \quad (99)$$

$$L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \geq w_j S, \quad j = 1, \dots, J \quad (100)$$

$$a_{ij} \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J \quad (101)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad w_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, J \quad (102)$$

A função objetivo (96) minimiza o comprimento total cortado no processo. A restrição (97) garante que a quantidade de barras utilizadas para concentrar os retalhos seja igual ao número R previamente fixado. A restrição (98) garante que a quantidade de itens produzidos seja igual à demanda. As restrições (99) e (100) são equivalentes às restrições (78) e (79), respectivamente e, juntas, indicam para cada barra, que o comprimento remanescente do corte dos itens deve estar no intervalo $[S, L_j]$ quando $w_j = 1$, isto é, a barra deve gerar retalhos, ou deve estar no intervalo $[0, S)$ quando $w_j = 0$, isto é, a barra não deve gerar retalhos. Por fim, as restrições (101) e (102) definem as variáveis do problema.

4.3.5 Estratégia 5

Para definir o modelo da Estratégia 5 de uma única etapa, considere as constantes:

- L_j : comprimento da j -ésima barra, $j = 1, \dots, J$;
- T_j : Perda na j -ésima barra, $j = 1, \dots, J$;
- $M \geq \max\{L_j \mid j = 1, \dots, J\}$
- ℓ_i : comprimento do i -ésimo item, $i = 1, \dots, I$;
- d_i : demanda do i -ésimo item, $i = 1, \dots, I$;
- $S = \min\{\ell_i \mid i = 1, \dots, I\}$: comprimento mínimo considerado como retalho;
- R : quantidade de barras usadas para concentrar retalhos.

E as variáveis:

- a_{ij} : quantidade de itens de índice $i = 1, \dots, I$ cortados da barra de índice $j = 1, \dots, J$;
- $y_j = \begin{cases} 1, & \text{se a barra de índice } j \text{ é escolhida;} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$;
- $w_j = \begin{cases} 1, & \text{se a barra de índice } j \text{ é escolhida para concentrar retalhos;} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$.

O modelo matemático utilizado na Estratégia 5 é:

Minimizar:

$$\sum_{j=1}^J (T_j + y_j L_j) \quad (103)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^J w_j = R \quad (104)$$

$$\sum_{j=1}^J a_{ij} = d_i, \quad i = 1, \dots, I \quad (105)$$

$$y_j L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq L_j + (1 - w_j) M, \quad j = 1, \dots, J \quad (106)$$

$$y_j L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \geq S - (1 - w_j) M, \quad j = 1, \dots, J \quad (107)$$

$$y_j L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq T_j + w_j M, \quad j = 1, \dots, J \quad (108)$$

$$y_j L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \geq T_j - w_j M, \quad j = 1, \dots, J \quad (109)$$

$$a_{ij} \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J \quad (110)$$

$$T_j \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad j = 1, \dots, J \quad (111)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad w_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, J \quad (112)$$

A função objetivo (103) minimiza a perda e o comprimento total cortado no processo. As restrições (104) e (105) são semelhantes às restrições (97) e (98) respectivamente. As restrições (106) e (107) juntas, indicam para cada barra, que o comprimento remanescente do corte dos itens deve gerar retalhos quando $w_j = 1$, e ficam inativas quando $w_j = 0$, agindo de forma similar às restrições (85) e (86), respectivamente. As restrições (108) e (109) juntas, indicam para cada barra, que o comprimento remanescente do corte dos itens deve gerar perdas quando $w_j = 0$, e ficam inativas quando $w_j = 1$, agindo de forma similar às restrições (87) e (88), respectivamente.

5 REFORMULAÇÃO DA ESTRATÉGIA 5 DE PINTO (2008)

Embora as soluções apresentadas por Pinto (2008) indiquem que é frutífera a estratégia de selecionar barras para o atendimento de itens demandados e, posteriormente, concentrar as perdas na menor quantidade possível destas barras, diversas soluções foram apresentadas como “a heurística não encontrou solução”, “solução inviável” ou “o código falhou”. Muito provavelmente tais resultados indicam erros nas implementações dos modelos.

Em princípio, um desdobramento imediato deste trabalho trata-se de revisar e avaliar o desempenho das estratégias propostas por Pinto (2008) para os milhares de exemplares extraídos do gerador aleatório descrito na seção 6.1. As simulações realizadas mostraram que a Estratégia 5 se destacou em relação às outras quatro estratégias descritas na seção 4.3. A Estratégia 1 não teve grandes resultados, e as outras estratégias tiveram seus bons resultados entre uns e outros. Por consequência, percebemos que é possível explorar uma reformulação do modelo matemático da Estratégia 5, que justificaremos a seguir.

Analisando novamente as restrições (106)-(109), para cada barra escolhida ($y_j = 1$), temos:

- Quando $w_j = 1$, as restrições (106) e (107) visam gerar retalhos e as restrições (108) e (109) ficam inativas, para $i = 1, \dots, I$, $j = 1, \dots, J$.

$$S \leq L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq L_j$$

$$T_j - M \leq L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq T_j + M$$

De fato, para $i = 1, \dots, I$, $j = 1, \dots, J$:

$$T_j - M \leq S \leq L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq L_j \leq T_j + M$$

- Quando $w_j = 0$, as restrições (106) e (107) ficam inativas e as restrições (108) e (109) visam gerar perdas para $i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J$.

$$S - M \leq L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq L_j + M$$

$$T_j \leq L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq T_j$$

De fato, para $i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J$:

$$S - M \leq S \leq L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq T_j \leq L_j + M$$

Realizando algumas simulações e comparando os resultados obtidos da Estratégia 5 com os das Estratégias 1, 2, 3 e 4, pudemos observar que há uma grande dificuldade na definição dos critérios utilizados para avaliar uma boa solução. A ideia de “melhor” solução é relativa e depende, inicialmente, da decisão a ser tomada: minimizar sobras (Estratégia 1), minimizar perdas (Estratégia 2), maximizar as sobras em uma quantidade reduzida de barras (Estratégia 3), minimizar o comprimento total a ser cortado (Estratégia 4) ou uma combinação destas (Estratégia 5). Em nossa análise, acreditamos que do ponto de vista prático a indústria privilegia manter as perdas no seu patamar mínimo. Visando isso, para a reformulação da Estratégia 5 inicialmente eliminamos o termo $y_j L_j$ da função objetivo (103) que determina o comprimento total cortado. Desse modo, o objetivo passa a ser de minimizar perdas:

Minimizar:

$$\sum_{j=1}^J T_j$$

Em seguida, eliminamos o termo T_j nas restrições (108) e (109):

$$y_j L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq w_j M, \quad j = 1, \dots, J \quad (113)$$

$$y_j L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \geq -w_j M, \quad j = 1, \dots, J \quad (114)$$

Com tais alterações, quando $w_j = 1$, as restrições (106) e (107) ainda visam gerar retalhos e as novas restrições (113) e (114) continuam inativas, para $i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J$.

$$S \leq L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq L_j$$

$$-M \leq L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq M$$

De fato, para $i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J$:

$$-M \leq S \leq L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq L_j \leq M$$

Por outro lado, quando $w_j = 0$, as restrições (106) e (107) continuam inativas e as novas restrições (113) e (114) visam gerar **perdas nulas** para $i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J$.

$$S - M \leq L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq L_j + M$$

$$0 \leq L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq 0$$

De fato, para $i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J$:

$$S - M \leq 0 \leq L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq 0 \leq L_j + M$$

Portanto, o modelo matemático Reformulado para a Estratégia 5 é:

Minimizar:

$$\sum_{j=1}^J T_j \quad (115)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^J w_j = R \quad (116)$$

$$\sum_{j=1}^J a_{ij} = d_i, \quad i = 1, \dots, I \quad (117)$$

$$y_j L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq L_j + (1 - w_j) M, \quad j = 1, \dots, J \quad (118)$$

$$y_j L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \geq S - (1 - w_j) M, \quad j = 1, \dots, J \quad (119)$$

$$y_j L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq w_j M, \quad j = 1, \dots, J \quad (120)$$

$$y_j L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \geq -w_j M, \quad j = 1, \dots, J \quad (121)$$

$$a_{ij} \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J \quad (122)$$

$$T_j \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad j = 1, \dots, J \quad (123)$$

$$y_j \in [0, 1], \quad w_j \in [0, 1], \quad j = 1, \dots, J \quad (124)$$

Sem perda de generalidade, chamaremos este modelo simplesmente de **Estratégia 5 Reformulada** (Estratégia 5R). Ao analisar os resultados das simulações obtidas pela implementação desta estratégia, pudemos perceber que as soluções apresentaram perda nula e os retalhos são concentrados na menor quantidade possível de barras. Além disto, surpreendentemente, a quantidade de barras utilizadas e/ou o comprimento total cortado foram em média menores ou iguais. Do ponto de vista prático, partimos do pressuposto que esta é a “melhor” solução para um PCES.

Para ilustrar, vamos considerar um PCES cujos dados são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Dados de um exemplo, considerando o problema de corte de estoque com aproveitamento de sobras.

Barras		
j	L_j (u.c.)	e_j
1	1000	5
2	1500	5
3	2000	5
4	2500	5

Itens					
i	l_i (u.c.)	d_i	i	l_i (u.c.)	d_i
1	240	8	6	160	7
2	210	7	7	150	5
3	250	8	8	190	5
4	120	9	9	180	10
5	170	7	10	200	10

Nos testes foram comparados quatro principais parâmetros (em quantidade ou em comprimento):

- **Perda:** barras que geram perdas;
- **Retalho:** barras que geram retalhos;
- **Aprov.:** barras que foram aproveitadas. Em quantidade representam aquelas que geram aproveitamento pleno, ou seja, perda nula. Em comprimento representam a demanda total atendida.
- **Total:** barras utilizadas no processo de corte.

Os resultados são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Comparação dos resultados de um exemplo, considerando o problema de corte de estoque com aproveitamento de sobras.

Estratégias	Quantidade				Comprimento (u.c.)			
	Perda	Retalho	Aprov.	Total	Perda	Retalho	Aprov.	Total
1	6	2	1	9	220	500	14280	15000
2	5	1	3	9	320	400	14280	15000
3	1	1	7	9	30	690	14280	15000
4	5	2	3	10	200	520	14280	15000
5	7	1	0	8	150	570	14280	15000
5R	0	1	7	8	0	1220	14280	15500

Note que a Estratégia 5R apresenta a solução com a menor perda e cujo retalho total é concentrado na menor quantidade possível de barras. De fato, a Estratégia 5R selecionou a menor quantidade total de barras (8 barras), das quais nenhuma gera perda e apenas uma gera um único retalho de comprimento 1220 u.c. No entanto, o maior comprimento total cortado (15500 u.c.) deve-se à escolha de barras maiores para o atendimento da demanda.

Esses resultados podem ser justificados pelo fato de que a função objetivo busca minimizar a perda total ao mesmo tempo em que as restrições limitam a seleção de padrões de corte que apresentam perdas nulas ou retalhos. É provável que isto ocasione uma dominância do componente “Perdas” (nulas) sobre o componente “Retalhos”, levando a resultados em que a perda é mínima (nula se for possível) e a quantidade de retalhos é concentrada na menor quantidade possível de barras. Por exemplo, a Estratégia 5 apresenta uma solução em que o retalho total é de 570 u.c. e a perda é distribuída em 7 barras enquanto a Estratégia 5R apresenta uma solução em que o retalho total de 1220 u.c. é distribuído em uma única barra.

6 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Neste capítulo, apresentaremos os experimentos computacionais realizados com o objetivo de analisar o desempenho das abordagens de Pinto (2008) e comparar com os resultados das heurísticas propostas por Cherri e outros (2009). Conforme exposto no Capítulo 2, as características de interesse de um problema de corte de estoque com aproveitamento de sobras são a perda total, o retalho total e como eles estão distribuídos nos padrões de corte.

A quantidade de exemplares analisados no trabalho de Pinto (2008) é relativamente baixa se comparada aos trabalhos disponíveis na literatura. O autor selecionou oito exemplares: sete extraídos do trabalho de Abuabara (2006) e um extraído do trabalho de Sinuany-Stern e Weiner (1994). Uma tendência que vem sendo observada nos trabalhos mais recentes é a seleção de milhares de exemplares gerados aleatoriamente, organizados em classes e variando-se alguns critérios, geralmente relacionados aos tipos, tamanhos e demandas dos itens.

Wäscher e Gau (1996) propõem um gerador de exemplos para o problema de corte de estoque unidimensional, denominado CUTGEN1. No ano seguinte os autores determinam os parâmetros para gerar 4000 exemplares nesse gerador, que foram reproduzidos e resolvidos pelas heurísticas estudadas por eles. Esse gerador tem sido bastante utilizado na literatura e está disponível em <<http://ctpc22.inescn.pt/esicup/>>. Por outro lado, segundo Poldi e Arenales (2009), alguns parâmetros são gerados em torno de uma média preestabelecida, não apresentando grandes variações. Por esse motivo, em virtude de limitações computacionais de tempo, resolvemos criar um próprio gerador de exemplares aleatórios, dando atenção especial a problemas com baixa demanda, visto que estamos interessados em soluções boas e rápidas, mesmo que a otimalidade não seja garantida. Segundo Hinxam (1980) e Riehme e outros (1996) citado por Poldi e Arenales (2009), há um folclore no qual problemas de corte de estoque com demanda alta são bem resolvidos pela técnica de geração de colunas de Gilmore e Gomory (1961), porém se a demanda for baixa, então heurísticas construtivas devem ser utilizadas. É provável que a razão desse folclore esteja no fato de que, em um

problema relaxado com demandas baixas as soluções fracionárias sejam menores que 1, fazendo a aproximação para o inteiro inferior ser 0, ou seja, os padrões obtidos são “inúteis”. A questão da demanda baixa, segundo Stadler (1990) citado por Poldi e Arenales (2009), ainda não foi totalmente levada em conta, embora tenham sido propostas algumas poucas aproximações alternativas para a solução inteira. De fato, Wäscher e Gau (1996) fazem um estudo computacional de várias heurísticas visando a obtenção de soluções inteiras para um problema de corte, mas omitem o caso de demanda baixa.

Os algoritmos das cinco estratégias apresentadas na seção 4.3 e no Capítulo 5 foram implementados na linguagem de programação Mosel (Xpress-Mosel User Guide, 2008) e executados⁸ em um computador Intel Core i7 de 2,67 GHz com 12 GB de memória RAM. Quanto às heurísticas de Cherri e outros (2009), os exemplares selecionados foram gentilmente executados por ela, a quem registramos nossos sinceros agradecimentos. Devemos chamar a atenção para o fato de que neste trabalho não foi considerado o tempo computacional, uma vez que os métodos de resolução foram implementados em linguagens e máquinas diferentes, tornando inviável a comparação dos mesmos.

6.1 UM GERADOR ALEATÓRIO

Os experimentos estão divididos em 12 classes de problemas, sendo que para cada classe foram gerados 100 exemplares. A seguir, a descrição dos critérios utilizados.

- Quantidade de barras: 4 barras padronizadas.
- Comprimento das barras: 1000 u.c., 1500 u.c., 2000 u.c. e 2500 u.c.
- Disponibilidade das barras: 5 cada.

⁸ As soluções dos Programas Lineares foram obtidas pelo próprio *Solver* do programa, sem utilizar técnicas de Geração de Colunas.

- Quantidade de itens: 5, 10 ou 15.
- Comprimento dos itens: será gerado, aleatoriamente, dentro dos intervalos [50 u.c., 100 u.c.] para os itens de tamanho pequeno (P) e [100 u.c., 250 u.c.] para os itens de tamanho médio (M). Usando parâmetros que as aproximassem de situações reais, consideramos os comprimentos dos itens com dezenas inteiras.
- Demanda dos itens: será gerada, aleatoriamente, dentro dos intervalos [1, 5] para a demanda baixa (DB) e [5, 10] para a demanda média (DM).
- Comprimento para a sobra: menor item dentro do conjunto de itens do respectivo exemplar.

Obtemos, desta forma, problemas variando-se a quantidade de itens, o tamanho dos itens e/ou as quantidades demandadas. O código utilizado para caracterizar cada classe é formado por 5 dígitos: os dois primeiros representam a quantidade de itens (05, 10 ou 15); o próximo dígito representa o tamanho dos itens (P ou M) e; os dois últimos dígitos que completam o código representam as demandas (DB ou DM), conforme a Tabela 3. O código 15MDM, por exemplo, representa a classe com 15 itens de tamanho médio cujas demandas são médias.

Tabela 3 – Descrição das classes dos exemplares.

Classe		Parâmetros			Exemplares
Nº	Código	Quantidade de itens	Tamanho dos itens	Demandas	
1	5PDB	5	P	DB	100
2	5PDM			DM	100
3	5MDB		M	DB	100
4	5MDM			DM	100
5	10PDB	10	P	DB	100
6	10PDM			DM	100
7	10MDB		M	DB	100
8	10MDM			DM	100
9	15PDB	15	P	DB	100
10	15PDM			DM	100
11	15MDB		M	DB	100
12	15MDM			DM	100
Total					1200

6.2 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Em razão da dificuldade em comparar as soluções do PCES, utilizaremos critérios parecidos com os adotados por Cherri e outros (2009). Lembrando que, como já discutido no Capítulo 3, partimos do pressuposto que é mais desejável reduzir as perdas ao nível mínimo e maximizar os retalhos ao nível máximo, de tal maneira que esses retalhos estejam concentrados na menor quantidade possível de padrões, desde que seja mantido o objetivo inicial de um problema de corte de estoque: minimizar sobras. Este fato é justificado pela vantagem de manter retalhos maiores em estoque e aguardar futuras demandas.

Podemos classificar as soluções como:

- **Solução ideal:** quando houver perda não nula em no máximo uma barra e todos os retalhos estiverem concentrados em no máximo uma barra;

- **Solução aceitável:** quando houver perda não nula em mais de uma barra ou todos os retalhos estiverem concentrados em mais de uma barra, não ambos;
- **Solução indesejável:** quando houver perda não nula em mais de uma barra e todos os retalhos estiverem concentrados em mais de uma barra;

Para melhor compreender o que consideramos como solução ideal, aceitável ou indesejável, considere os resultados hipotéticos de um PCES, apresentado na Tabela 4.

Tabela 4 – Exemplo de solução ideal, aceitável e indesejável.

Solução	Quantidade			
	Perda	Retalho	Aprov.	Total
Ideal	0	1	11	12
Ideal	0	0	12	12
Ideal	1	1	11	13
Aceitável	0	3	10	13
Aceitável	2	1	10	13
Aceitável	1	5	8	12
Indesejável	4	3	6	13
Indesejável	2	6	6	14
Indesejável	3	7	3	13

Nos testes foram comparados quatro principais parâmetros (em quantidade ou em comprimento):

- **Perda:** barras que geram perdas;
- **Retalho:** barras que geram retalhos;
- **Aprov.:** em quantidade, representam barras que geram aproveitamento pleno, ou seja, perda nula; em comprimento, representam a demanda total atendida.
- **Total:** barras utilizadas no processo de corte.

A eficácia dos métodos de resolução será analisada pela comparação dos resultados de uns com os outros. Os métodos obtiveram soluções factíveis para todos os exemplares gerados. As tabelas 5 – 16 apresentam as médias para 100 exemplares de cada uma das 12 classes.

Tabela 5 – Resultados para os 100 exemplares da classe 1 – 5PDB.

Métodos de resolução		Solução	Quantidade				Comprimento (u.c.)			
			Perda	Retalho	Aprov.	Total	Perda	Retalho	Aprov.	Total
Estratégias	1	Ideal	0,1	1,0	0,0	1,1	1,1	295,1	1113,8	1410,0
	2	Ideal	0,0	1,0	0,0	1,1	0,9	295,3	1113,8	1410,0
	3	Ideal	0,0	1,0	0,0	1,1	0,3	295,9	1113,8	1410,0
	4	Ideal	0,0	1,0	0,0	1,1	1,5	294,7	1113,8	1410,0
	5	Ideal	0,0	1,0	0,0	1,0	0,3	280,9	1113,8	1395,0
	5R	Ideal	0,0	1,0	0,1	1,1	0,0	581,2	1113,8	1695,0
Heurísticas Construtivas	FFD _R	Aceitável	0,0	1,2	0,6	1,8	0,0	651,2	1113,8	1765,0
	Gulosa _R	Aceitável	0,0	1,2	0,6	1,8	0,0	646,2	1113,8	1760,0
Heurísticas Residuais	FFD _R	Aceitável	0,0	1,2	0,6	1,8	0,0	651,2	1113,8	1765,0
	Gulosa _R	Aceitável	0,0	1,2	0,6	1,8	0,0	646,2	1113,8	1760,0
	RAG _{R1}	Ideal	0,3	1,0	0,4	1,8	7,4	643,8	1113,8	1765,0
	RAG _{R2}	Ideal	0,3	1,0	0,5	1,8	4,6	646,6	1113,8	1765,0
	RAG _{R3}	Ideal	0,3	1,0	0,4	1,8	7,5	643,7	1113,8	1765,0

Tabela 6 – Resultados para os 100 exemplares da classe 2 – 5PDM.

Métodos de resolução		Solução	Quantidade				Comprimento (u.c.)			
			Perda	Retalho	Aprov.	Total	Perda	Retalho	Aprov.	Total
Estratégias	1	Aceitável	0,8	1,1	0,2	2,1	24,2	255,3	2810,5	3090,0
	2	Aceitável	0,6	1,2	0,3	2,1	16,7	262,8	2810,5	3090,0
	3	Ideal	0,2	1,0	0,9	2,1	2,6	276,9	2810,5	3090,0
	4	Aceitável	0,6	1,2	0,2	2,1	17,3	262,2	2810,5	3090,0
	5	Ideal	0,0	1,0	1,3	2,4	0,3	279,2	2810,5	3090,0
	5R	Ideal	0,0	1,0	1,1	2,1	0,0	1299,5	2810,5	4110,0
Heurísticas Construtivas	FFD _R	Aceitável	0,0	1,2	2,1	3,3	0,0	559,5	2810,5	3370,0
	Gulosa _R	Aceitável	0,0	1,2	2,2	3,3	0,0	569,5	2810,5	3380,0
Heurísticas Residuais	FFD _R	Aceitável	0,0	1,2	2,1	3,3	0,9	558,6	2810,5	3370,0
	Gulosa _R	Aceitável	0,0	1,1	2,1	3,3	0,9	568,6	2810,5	3380,0
	RAG _{R1}	Aceitável	0,0	1,2	1,1	2,3	0,5	464,0	2810,5	3275,0
	RAG _{R2}	Aceitável	0,0	1,2	1,1	2,3	0,5	469,0	2810,5	3280,0
	RAG _{R3}	Aceitável	0,0	1,2	1,1	2,3	0,5	474,0	2810,5	3285,0

Tabela 7 – Resultados para os 100 exemplares da classe 3 – 5MDB.

Métodos de resolução		Solução	Quantidade				Comprimento (u.c.)			
			Perda	Retalho	Aprov.	Total	Perda	Retalho	Aprov.	Total
Estratégias	1	Ideal	0,9	1,0	0,1	2,1	50,4	259,1	2630,5	2940,0
	2	Aceitável	0,8	1,2	0,1	2,1	41,8	267,7	2630,5	2940,0
	3	Ideal	0,2	1,0	0,8	2,1	3,0	306,5	2630,5	2940,0
	4	Aceitável	0,8	1,1	0,2	2,0	44,0	265,5	2630,5	2940,0
	5	Ideal	0,1	1,0	0,9	2,0	2,7	306,8	2630,5	2940,0
	5R	Ideal	0,0	1,0	0,8	1,8	0,0	714,5	2630,5	3345,0
Heurísticas Construtivas	FFD _R	Aceitável	0,0	1,4	1,7	3,1	0,0	574,5	2630,5	3205,0
	Gulosa _R	Aceitável	0,0	1,5	1,5	3,0	0,2	599,3	2630,5	3230,0
Heurísticas Residuais	FFD _R	Aceitável	0,0	1,4	1,6	3,1	0,7	573,8	2630,5	3205,0
	Gulosa _R	Aceitável	0,0	1,4	1,5	3,0	0,9	588,6	2630,5	3220,0
	RAG _{R1}	Aceitável	0,1	1,3	1,0	2,5	3,4	561,1	2630,5	3195,0
	RAG _{R2}	Aceitável	0,1	1,4	1,1	2,6	3,5	561,0	2630,5	3195,0
	RAG _{R3}	Aceitável	0,1	1,3	1,0	2,5	3,4	561,1	2630,5	3195,0

Tabela 8 – Resultados para os 100 exemplares da classe 4 – 5MDM.

Métodos de resolução		Solução	Quantidade				Comprimento (u.c.)			
			Perda	Retalho	Aprov.	Total	Perda	Retalho	Aprov.	Total
Estratégias	1	Indesejável	2,4	1,1	0,8	4,3	107,0	193,0	6710,0	7010,0
	2	Indesejável	2,1	1,1	1,1	4,3	95,5	204,5	6710,0	7010,0
	3	Ideal	0,3	1,0	3,0	4,3	3,3	296,7	6710,0	7010,0
	4	Indesejável	2,1	1,2	0,9	4,1	91,4	208,6	6710,0	7010,0
	5	Aceitável	1,5	1,0	1,9	4,3	38,1	261,9	6710,0	7010,0
	5R	Ideal	0,0	1,0	3,4	4,4	0,0	785,0	6710,0	7495,0
Heurísticas Construtivas	FFD _R	Aceitável	0,1	1,5	4,9	6,4	0,6	754,4	6710,0	7465,0
	Gulosa _R	Aceitável	0,1	1,5	4,8	6,3	0,6	739,4	6710,0	7450,0
Heurísticas Residuais	FFD _R	Aceitável	0,0	1,5	4,3	5,8	0,6	689,4	6710,0	7400,0
	Gulosa _R	Aceitável	0,0	1,5	4,3	5,8	0,4	704,6	6710,0	7415,0
	RAG _{R1}	Aceitável	0,0	1,4	2,6	4,1	0,5	524,5	6710,0	7235,0
	RAG _{R2}	Aceitável	0,0	1,4	2,6	4,0	0,5	514,5	6710,0	7225,0
	RAG _{R3}	Aceitável	0,1	1,5	2,6	4,1	1,2	533,8	6710,0	7245,0

Para a classe 5PDB, que considera exemplares com 5 itens de tamanho pequeno e demanda baixa, embora a quantidade de barras necessárias seja de pouco mais de uma unidade, de acordo com os critérios estabelecidos anteriormente, as soluções das estratégias e das heurísticas residuais RAG_{R1} , RAG_{R2} e RAG_{R3} são consideradas *ideais* e as soluções dos demais métodos são consideradas *aceitáveis*. Nessa classe, do ponto de vista das perdas geradas, é possível notar ainda que as soluções das heurísticas residuais RAG_{R1} , RAG_{R2} e RAG_{R3} apresentam valores maiores para as perdas não nulas.

Para a classe 5PDM, que considera exemplares com 5 itens de tamanho pequeno e demanda média, podemos observar que as soluções das Estratégias 3, 5 e 5R são consideradas *ideais* e as soluções dos demais métodos são consideradas *aceitáveis*. Para a classe 5MDB, que considera exemplares com 5 itens de tamanho médio e demanda baixa, podemos observar que as soluções das Estratégias 1, 3, 5 e 5R são consideradas *ideais* e as soluções dos demais métodos são consideradas *aceitáveis*. Note ainda que, do ponto de vista das perdas geradas, nessas classes ocorre o oposto do observado na classe 5PDB, ou seja, as soluções das heurísticas residuais RAG_{R1} , RAG_{R2} apresentam, de um modo geral, valores menores para as perdas não nulas.

Já para a classe 5MDM, que considera exemplares com 5 itens de tamanho médio e demanda média, podemos notar que, com exceção das Estratégias 3 e 5R, cujas soluções são consideradas *ideais*, e da Estratégia 5, cujas soluções são consideradas *aceitáveis*, as soluções das demais estratégias são consideradas *indesejáveis*, uma vez que geram muitas perdas não nulas. Nessa classe as soluções das heurísticas são consideradas *aceitáveis*. Em termos de melhor aproveitamento em relação ao total cortado, podemos notar que as soluções da Estratégia 5R e das heurísticas residuais RAG_{R1} , RAG_{R2} e RAG_{R2} melhoram a superioridade já salientada, pois selecionaram um número reduzido de barras, gerando perdas próximas de zero e concentrando os retalhos em pouco mais de uma barra.

Como já era de se esperar, as classes cujas soluções apresentem valores mais discrepantes são maiores em termos de dimensão dos exemplares. Assim sendo,

é muito provável que a maior quantidade de itens diferentes influencie fortemente tal superioridade nos resultados.

Tabela 9 – Resultados para os 100 exemplares da classe 5 – 10PDB.

Métodos de resolução		Solução	Quantidade				Comprimento (u.c.)			
			Perda	Retalho	Aprov.	Total	Perda	Retalho	Aprov.	Total
Estratégias	1	Aceitável	0,7	1,1	0,2	2,0	16,2	251,2	2252,6	2520,0
	2	Ideal	0,6	1,0	0,4	2,0	13,1	254,3	2252,6	2520,0
	3	Ideal	0,2	1,0	0,7	2,0	2,8	264,6	2252,6	2520,0
	4	Aceitável	0,6	1,1	0,2	1,9	15,7	251,7	2252,6	2520,0
	5	Ideal	0,0	1,0	0,7	1,7	0,0	267,4	2252,6	2520,0
	5R	Ideal	0,0	1,0	0,7	1,7	0,0	1007,4	2252,6	3260,0
Heurísticas Construtivas	FFD _R	Aceitável	0,0	1,1	1,7	2,8	0,0	557,4	2252,6	2810,0
	Gulosa _R	Aceitável	0,0	1,1	1,7	2,8	0,0	557,4	2252,6	2810,0
Heurísticas Residuais	FFD _R	Aceitável	0,0	1,1	1,7	2,8	0,0	557,4	2252,6	2810,0
	Gulosa _R	Aceitável	0,0	1,1	1,7	2,8	0,0	557,4	2252,6	2810,0
	RAG _{R1}	Aceitável	0,0	1,1	1,1	2,2	0,0	527,4	2252,6	2780,0
	RAG _{R2}	Aceitável	0,0	1,1	1,1	2,2	0,0	527,4	2252,6	2780,0
	RAG _{R3}	Aceitável	0,0	1,1	1,1	2,2	0,0	522,4	2252,6	2775,0

Tabela 10 – Resultados para os 100 exemplares da classe 6 – 10PDM.

Métodos de resolução		Solução	Quantidade				Comprimento (u.c.)			
			Perda	Retalho	Aprov.	Total	Perda	Retalho	Aprov.	Total
Estratégias	1	Aceitável	1,8	1,0	1,1	3,9	43,8	196,9	5594,3	5835,0
	2	Indesejável	1,2	1,7	1,0	3,9	30,4	210,3	5594,3	5835,0
	3	Ideal	0,2	1,0	2,7	3,9	2,5	238,2	5594,3	5835,0
	4	Indesejável	1,6	1,4	0,7	3,7	19,6	201,1	5594,3	5815,0
	5	Ideal	0,3	1,0	2,6	3,9	5,6	235,1	5594,3	5835,0
	5R	Ideal	0,0	1,0	3,3	4,3	0,0	905,7	5594,3	6500,0
Heurísticas Construtivas	FFD _R	Aceitável	0,0	1,1	4,8	5,9	0,0	730,7	5594,3	6325,0
	Gulosa _R	Aceitável	0,0	1,1	4,7	5,9	0,0	725,7	5594,3	6320,0
Heurísticas Residuais	FFD _R	Aceitável	0,0	1,1	4,6	5,7	0,0	725,7	5594,3	6320,0
	Gulosa _R	Aceitável	0,0	1,1	4,6	5,8	0,0	720,7	5594,3	6315,0
	RAG _{R1}	Aceitável	0,0	1,2	2,3	3,4	0,0	470,7	5594,3	6065,0
	RAG _{R2}	Aceitável	0,0	1,2	2,2	3,4	0,0	485,7	5594,3	6080,0
	RAG _{R3}	Aceitável	0,0	1,2	2,2	3,4	0,0	495,7	5594,3	6090,0

Tabela 11 – Resultados para os 100 exemplares da classe 7 – 10MDB.

Métodos de resolução		Solução	Quantidade				Comprimento (u.c.)			
			Perda	Retalho	Aprov.	Total	Perda	Retalho	Aprov.	Total
Estratégias	1	Indesejável	2,1	1,1	0,7	3,8	81,9	207,2	5315,9	5605,0
	2	Indesejável	2,0	1,1	0,7	3,8	92,0	197,1	5315,9	5605,0
	3	Ideal	0,4	1,0	2,4	3,8	3,3	285,8	5315,9	5605,0
	4	Indesejável	2,1	1,1	0,6	3,8	100,2	188,9	5315,9	5605,0
	5	Ideal	0,6	1,0	2,0	3,6	14,7	274,4	5315,9	5605,0
	5R	Ideal	0,0	1,0	2,5	3,5	0,0	839,1	5315,9	6155,0
Heurísticas Construtivas	FFD _R	Aceitável	0,0	1,3	4,2	5,6	0,0	659,1	5315,9	5975,0
	Gulosa _R	Aceitável	0,0	1,3	4,1	5,5	0,0	629,1	5315,9	5945,0
Heurísticas Residuais	FFD _R	Aceitável	0,0	1,4	4,2	5,5	0,0	659,1	5315,9	5975,0
	Gulosa _R	Aceitável	0,0	1,3	4,1	5,5	0,0	629,1	5315,9	5945,0
	RAG _{R1}	Aceitável	0,0	1,3	2,2	3,5	0,3	513,8	5315,9	5830,0
	RAG _{R2}	Aceitável	0,0	1,3	2,2	3,5	0,0	504,1	5315,9	5820,0
	RAG _{R3}	Aceitável	0,0	1,3	2,2	3,5	0,1	509,0	5315,9	5825,0

Tabela 12 – Resultados para os 100 exemplares da classe 8 – 10MDM.

Métodos de resolução		Solução	Quantidade				Comprimento (u.c.)			
			Perda	Retalho	Aprov.	Total	Perda	Retalho	Aprov.	Total
Estratégias	1	Indesejável	5,6	1,1	1,8	8,4	208,2	232,4	13264,4	13705,0
	2	Indesejável	4,8	1,5	2,2	8,4	206,5	234,1	13264,4	13705,0
	3	Aceitável	1,1	1,0	6,3	8,4	10,4	430,2	13264,4	13705,0
	4	Indesejável	5,8	1,5	1,5	8,7	281,0	254,6	13264,4	13800,0
	5	Indesejável	3,7	1,1	3,1	7,9	112,2	323,4	13264,4	13700,0
	5R	Ideal	0,0	1,0	7,0	8,0	0,0	960,6	13264,4	14225,0
Heurísticas Construtivas	FFD _R	Aceitável	0,1	1,3	9,5	10,9	0,9	1099,7	13264,4	14365,0
	Gulosa _R	Aceitável	0,1	1,4	9,4	10,8	0,8	1079,8	13264,4	14345,0
Heurísticas Residuais	FFD _R	Aceitável	0,0	1,4	8,4	9,7	0,0	860,6	13264,4	14125,0
	Gulosa _R	Aceitável	0,1	1,4	8,2	9,7	0,6	945,0	13264,4	14210,0
	RAG _{R1}	Aceitável	0,0	1,3	5,6	7,0	0,0	560,6	13264,4	13825,0
	RAG _{R2}	Aceitável	0,0	1,3	5,6	6,9	0,0	555,6	13264,4	13820,0
	RAG _{R3}	Aceitável	0,0	1,4	5,6	7,1	0,1	580,5	13264,4	13845,0

Para a classe 10PDB, que considera exemplares com 10 itens de tamanho pequeno e demanda baixa, embora a quantidade de barras necessárias seja relativamente baixa, as soluções das Estratégias 2, 3, 5 e 5R podem ser consideradas *ideais* e as soluções dos demais métodos podem ser consideradas *aceitáveis*. Nessa classe, do ponto de vista das perdas geradas, com exceção das soluções das Estratégias 1, 2, 3 e 4, as soluções dos demais métodos apresentam valores menores para as perdas não nulas.

Para a classe 10PDM, que considera exemplares com 10 itens de tamanho pequeno e demanda média, podemos observar que as soluções das Estratégias 3, 5 e 5R são consideradas *ideais*, as soluções das Estratégias 2 e 3 são consideradas *indesejáveis*, e as soluções dos demais métodos são consideradas *aceitáveis*. Para a classe 10MDB, que considera exemplares com 10 itens de tamanho médio e demanda baixa, podemos observar que as soluções das Estratégias 3, 5 e 5R são consideradas *ideais*, as soluções das demais estratégias são consideradas *indesejáveis*, e as soluções das heurísticas são consideradas *aceitáveis*. Note ainda que, do ponto de vista das perdas geradas, as soluções da Estratégia 5R e das heurísticas apresentam valores menores para as perdas não nulas se comparados aos das demais estratégias. As soluções da Estratégia 5R melhora esta superioridade, uma vez que concentra o retalho em uma única barra.

Já para a classe 10MDM, que considera exemplares com 10 itens de tamanho médio e demanda média, podemos notar que as soluções da Estratégia 5R são consideradas *ideais*, as soluções da Estratégia 3 são consideradas *aceitáveis* e as soluções das Estratégias 1, 2, 4 e 5 são consideradas *indesejáveis*, uma vez que geram muitas perdas não nulas. Nessa classe as soluções das heurísticas são consideradas *aceitáveis*. Do ponto de vista das perdas geradas, as soluções da Estratégia 5R e das heurísticas apresentam valores menores para as perdas não nulas se comparados aos das demais estratégias. Novamente, as soluções da Estratégia 5R melhora esta superioridade, uma vez que concentra o retalho em uma única barra.

Tabela 13 – Resultados para os 100 exemplares da classe 9 – 15PDB.

Métodos de resolução		Solução	Quantidade				Comprimento (u.c.)			
			Perda	Retalho	Aprov.	Total	Perda	Retalho	Aprov.	Total
Estratégias	1	Ideal	0,9	1,0	0,3	2,3	21,0	239,7	3314,3	3575,0
	2	Aceitável	0,7	1,2	0,5	2,3	15,1	245,6	3314,3	3575,0
	3	Ideal	0,2	1,0	1,1	2,3	2,3	258,4	3314,3	3575,0
	4	Aceitável	0,9	1,2	0,3	2,4	22,8	237,9	3314,3	3575,0
	5	Ideal	0,0	1,0	1,8	2,8	0,0	260,7	3314,3	3575,0
	5R	Ideal	0,0	1,0	1,4	2,4	0,0	1210,7	3314,3	4525,0
Heurísticas Construtivas	FFD _R	Aceitável	0,0	1,1	2,8	3,8	0,0	530,7	3314,3	3845,0
	Gulosa _R	Aceitável	0,0	1,1	2,7	3,8	0,0	530,7	3314,3	3845,0
Heurísticas Residuais	FFD _R	Aceitável	0,0	1,1	2,8	3,8	0,0	530,7	3314,3	3845,0
	Gulosa _R	Aceitável	0,0	1,1	2,7	3,8	0,0	530,7	3314,3	3845,0
	RAG _{R1}	Aceitável	0,0	1,2	1,3	2,4	0,0	485,7	3314,3	3800,0
	RAG _{R2}	Aceitável	0,0	1,2	1,3	2,4	0,0	485,7	3314,3	3800,0
	RAG _{R3}	Aceitável	0,0	1,2	1,3	2,4	0,0	480,7	3314,3	3795,0

Tabela 14 – Resultados para os 100 exemplares da classe 10 – 15PDM.

Métodos de resolução		Solução	Quantidade				Comprimento (u.c.)			
			Perda	Retalho	Aprov.	Total	Perda	Retalho	Aprov.	Total
Estratégias	1	Indesejável	2,6	1,1	1,7	5,4	64,5	225,0	8390,5	8680,0
	2	Indesejável	2,1	1,9	1,4	5,4	56,8	232,7	8390,5	8680,0
	3	Ideal	0,3	1,0	4,1	5,4	3,5	286,0	8390,5	8680,0
	4	Indesejável	2,6	1,6	1,2	5,3	66,3	223,2	8390,5	8680,0
	5	Aceitável	1,1	1,0	3,2	5,3	17,5	272,0	8390,5	8680,0
	5R	Ideal	0,0	1,0	4,7	5,7	0,0	1044,5	8390,5	9435,0
Heurísticas Construtivas	FFD _R	Aceitável	0,0	1,1	6,7	7,8	0,1	849,4	8390,5	9240,0
	Gulosa _R	Aceitável	0,0	1,2	6,7	7,8	0,0	854,5	8390,5	9245,0
Heurísticas Residuais	FFD _R	Aceitável	0,0	1,1	6,1	7,2	0,2	754,3	8390,5	9145,0
	Gulosa _R	Aceitável	0,0	1,1	6,1	7,2	0,0	764,5	8390,5	9155,0
	RAG _{R1}	Aceitável	0,0	1,3	3,4	4,7	0,0	579,5	8390,5	8970,0
	RAG _{R2}	Aceitável	0,0	1,3	3,4	4,7	0,0	579,5	8390,5	8970,0
	RAG _{R3}	Aceitável	0,0	1,3	3,5	4,7	0,0	604,5	8390,5	8995,0

Tabela 15 – Resultados para os 100 exemplares da classe 11 – 15MDB.

Métodos de resolução		Solução	Quantidade				Comprimento (u.c.)			
			Perda	Retalho	Aprov.	Total	Perda	Retalho	Aprov.	Total
Estratégias	1	Indesejável	2,9	1,0	1,1	5,1	98,3	234,4	7857,3	8190,0
	2	Indesejável	2,7	1,2	1,2	5,1	111,8	220,9	7857,3	8190,0
	3	Ideal	0,5	1,0	3,6	5,1	4,7	328,0	7857,3	8190,0
	4	Indesejável	3,0	1,2	1,0	5,2	136,5	186,2	7857,3	8180,0
	5	Aceitável	1,3	1,0	2,6	5,0	31,1	301,6	7857,3	8190,0
	5R	Ideal	0,0	1,0	4,0	5,0	0,0	977,7	7857,3	8835,0
Heurísticas Construtivas	FFD _R	Aceitável	0,0	1,2	6,2	7,4	0,2	842,5	7857,3	8700,0
	Gulosa _R	Aceitável	0,0	1,3	6,0	7,4	0,1	852,6	7857,3	8710,0
Heurísticas Residuais	FFD _R	Aceitável	0,0	1,2	6,1	7,4	0,2	857,5	7857,3	8715,0
	Gulosa _R	Aceitável	0,0	1,3	6,0	7,3	0,1	897,6	7857,3	8755,0
	RAG _{R1}	Aceitável	0,0	1,4	3,2	4,6	0,1	567,6	7857,3	8425,0
	RAG _{R2}	Aceitável	0,0	1,4	3,2	4,6	0,1	567,6	7857,3	8425,0
	RAG _{R3}	Aceitável	0,0	1,4	3,3	4,6	0,1	567,6	7857,3	8425,0

Tabela 16 – Resultados para os 100 exemplares da classe 12 – 15MDM.

Métodos de resolução		Solução	Quantidade				Comprimento (u.c.)			
			Perda	Retalho	Aprov.	Total	Perda	Retalho	Aprov.	Total
Estratégias	1	Indesejável	7,5	1,1	3,7	12,3	279,3	419,9	19815,8	20515,0
	2	Indesejável	7,6	1,8	2,9	12,3	342,3	351,9	19815,8	20510,0
	3	Aceitável	1,5	1,0	9,8	12,3	20,3	678,9	19815,8	20515,0
	4	Indesejável	8,3	1,7	2,5	12,4	391,6	297,6	19815,8	20505,0
	5	Indesejável	5,3	1,3	4,7	11,3	161,2	333,0	19815,8	20310,0
	5R	Ideal	0,0	1,0	10,5	11,5	0,0	844,2	19815,8	20660,0
Heurísticas Construtivas	FFD _R	Aceitável	0,3	1,2	12,6	14,0	2,7	1071,5	19815,8	20890,0
	Gulosa _R	Aceitável	0,1	1,3	12,8	14,1	0,5	1088,7	19815,8	20905,0
Heurísticas Residuais	FFD _R	Aceitável	0,0	1,3	11,6	12,9	0,2	819,0	19815,8	20635,0
	Gulosa _R	Aceitável	0,0	1,3	11,5	12,9	0,1	869,1	19815,8	20685,0
	RAG _{R1}	Aceitável	0,0	1,4	8,7	10,1	0,0	599,2	19815,8	20415,0
	RAG _{R2}	Aceitável	0,0	1,4	8,7	10,1	0,0	594,2	19815,8	20410,0
	RAG _{R3}	Aceitável	0,0	1,5	8,8	10,3	0,0	629,2	19815,8	20445,0

Para a classe 15PDB, que considera exemplares com 15 itens de tamanho pequeno e demanda baixa, embora a quantidade de barras necessárias seja relativamente baixa, as soluções das Estratégias 1, 3, 5 e 5R podem ser consideradas *ideais* e as soluções dos demais métodos podem ser consideradas *aceitáveis*. Em termos de melhor aproveitamento em relação ao total cortado, as soluções da Estratégia 5R melhoram a superioridade já salientada, pois selecionaram um número reduzido de barras, não gerando perdas e concentrando os retalhos em apenas uma barra.

Para as classes 15PDM (que considera exemplares com 15 itens de tamanho pequeno e demanda média) e 15MDB (que considera exemplares com 15 itens de tamanho médio e demanda baixa), podemos observar que as soluções das Estratégias 3 e 5R são consideradas *ideais*, as soluções das Estratégias 1, 2 e 4 são consideradas *indesejáveis*, e as soluções dos demais métodos são consideradas *aceitáveis*. Note ainda que, do ponto de vista das perdas geradas, as soluções da Estratégia 5R e das heurísticas apresentam valores menores para as perdas não nulas se comparados aos das demais estratégias. Em termos de melhor aproveitamento, as soluções da Estratégia 5R melhoram esta superioridade, uma vez que concentra o retalho em uma única barra.

Já para a classe 15MDM, que considera exemplares com 15 itens de tamanho médio e demanda média, podemos notar que as soluções da Estratégia 5R são consideradas *ideais*, as soluções da Estratégia 3 são consideradas *aceitáveis* e as soluções das demais estratégias são consideradas *indesejáveis*, uma vez que geram muitas perdas não nulas. As soluções das heurísticas são consideradas *aceitáveis*. Em termos de melhor aproveitamento em relação ao total cortado, podemos notar que as soluções da Estratégia 5R melhoram a superioridade já salientada, pois selecionaram um número reduzido de barras, não gerando perdas e concentrando os retalhos em apenas uma barra.

7 CONCLUSÕES

Buscamos com este trabalho determinar soluções inteiras para um Problema de Corte de Estoque com Aproveitamento de Sobras (PCES) por meio de um estudo computacional dos modelos matemáticos propostos por Pinto (2008). Exploramos também uma reformulação do modelo matemático da Estratégia 5, a qual denotamos por **Estratégia 5 Reformulada** (5R).

A eficácia dos modelos foi analisada pela comparação dos resultados com os resultados de heurísticas propostas por Cherri e outros (2009), nos quais procedimentos heurísticos clássicos da literatura (construtivos e residuais) que resolvem problemas de corte de estoque foram modificados com a finalidade de resolverem problemas de corte de estoque com sobras aproveitáveis. Para isto, propomos um gerador aleatório de classes de exemplares, variando-se a quantidade de itens, o tamanho dos itens e/ou as quantidades demandadas, dando atenção especial a problemas com baixa demanda.

Com relação à identificação das melhores soluções, percebemos que, embora todos os métodos de resolução apresentem soluções factíveis, satisfatórias e pouco discrepantes em alguns casos, a escolha do melhor método de resolução para um PCES não é trivial, pois envolve a análise simultânea de diversos critérios. De acordo com os critérios utilizados para definir uma solução *ideal*, *aceitável* ou *indesejada*, conforme as classes vão crescendo em termos de dimensão e demanda dos exemplares, a concentração dos melhores resultados tende para a Estratégia 5R e para os procedimentos heurísticos, em particular para os residuais RAG_R1 , RAG_R2 e RAG_R3 . De fato, embora para os exemplares da classe 5PDB as Estratégias 1, 2, 3, 4 e 5 apresentem um bom aproveitamento em relação ao total cortado, os resultados evidenciaram o contrário, à medida que analisamos as classes seguintes.

Em todas as classes estudadas os resultados da Estratégia 5R melhoram a superioridade já salientada, pois selecionam um número reduzido de barras, não geram perdas e concentram os retalhos em apenas uma barra.

Como perspectivas futuras de continuidade e melhoria deste trabalho, podemos citar:

- Estender os modelos para uma abordagem por geração de colunas;
- Testar os métodos de resolução, por meio de exemplares com comprimentos e demandas maiores, e verificar como se comportam as soluções;
- Investigar, na literatura, trabalhos que tratam do problema de corte de estoque com aproveitamento de sobras para o caso bidimensional.

REFERÊNCIAS

ABUABARA, A., *Otimização no corte de tubos estruturais: aplicação na indústria aeronáutica agrícola*. Dissertação de Mestrado, UFSCAR (2006).

ABUABARA, A., MORABITO R., *Modelos de programação inteira mista para o planejamento do corte unidimensional de tubos metálicos na indústria aeronáutica agrícola*. *Gestão e Produção*, 15: 605-617, (2008).

ABUABARA, A., MORABITO R., *Cutting optimization of structural tubes to build agricultural light aircrafts*. *Annals of Operations Research*, 149: 149-165, (2009).

ALEM, D. J. J., *O problema de corte de estoque com demanda estocástica*. Dissertação de Mestrado, EESC – USP (2006).

ARENALES, M. N., MORABITO, R., YANASSE, H. H., (editores), *O problema de corte e empacotamento*. Livro-texto de Minicurso. In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 26, 2004, São João del Rei - MG.

BROWN, A. R., *Optimum packing and depletion: the computer in space and resource usage proble*. New York: Macdonald - London and American Elsevier Inc, 1971.107p, (1971).

CHERRI, A. C., ARENALES, N., YANASSE, H. H., *The one dimensional cutting stock problems with usable leftover: A heuristic approach*. *European Journal of Operational Research*, 196: 897-908, (2009).

CUI, Y., YANG, Y., *A heuristic for the one-dimensional cutting stock problem with usable leftover*. *European Journal of Operational Research*, 204: 245-250, (2010).

DASH OPTIMIZATION, *Xpress-Mosel User Guide*. (2008).

DYCKHOFF, H. *A typology of cutting and packing problems*. *European Journal Operational Reserarch*, 44: 145-159, (1990).

FARIAS, P. C., *Problema de corte de estoque unidimensional com reaproveitamento de sobras: abordagem de resolução por meio de uma técnica de geração de colunas*. Dissertação de Mestrado, UEL (2011).

GAREY, M. R., JOHNSON, D. S., *Computers and intractability: a guide to the NP-completeness*. W. H., Freeman, 1979. 228p.

GAU, T., WÄSCHER, *CUTGEN: A problem generator for the standard one-dimensional cutting stock problem*. *European Journal Operational Reserarch*, 84: 572-579 (1995).

- GILMORE, P. C., GOMORY, R. E., *A linear programming approach to the cutting stock problem*. Operations Research, 9: 848-859, (1961).
- GILMORE, P. C., GOMORY, R. E., *A linear programming approach to the cutting stock problem – Part II*. Operations Research, 11: 863-888, (1963).
- GRADISAR, M., JESENKO, J., RESINOVIC, C., *Optimization of roll cutting in clothing industry*. Computers & Operational Reserarch, 10: 945-953, (1997).
- GRADISAR, M., KLJAJIC, M., RESINOVIC, C., JESENKO, J., *A sequential heuristic procedure for one-dimentional cutting*. European Journal of Operational Reserarch, 114: 557-568, (1999).
- GRADISAR, M., RESINOVIC, C., KLJAJIC, M., *A hybrid approach for optimization of one-dimentional cutting*. European Journal of Operational Research, 119: 719-728, (1999).
- GRADISAR, M., TRKMAN, P., *A combined approach to the solution to the general one-dimentional cutting stock problem*. Computers & Operational Reserarch, 32: 1793-1807, (2005).
- HINXMAN, A., *The trim-loss and assortment problems: a survey*. European Journal of Operational Research, 5: 8-18, (1980).
- HOTO, R. S. V., *Otimização no corte de peças unidimensionais com restrições de agrupamento*. Dissertação de Mestrado, ICMSC – USP (1996).
- HOTO, R. S. V., *O problema da mochila compartimentada aplicado no corte de bobinas de aço*. Tese de Doutorado, COPPE – UFRJ (2001).
- HOTO, R. S. V., ARENALES, M. N., MACULAN, N., *The one dimensional compartmentalised knapsack problem: a case study*. European Journal of Operational Research, 183: 1183-1195, (2007).
- HOTO, R. S. V., MACULAN, N.; MARQUES, F., ARENALES, M. N., *Um problema de corte com padrões compartimentados*. Pesquisa Operacional, Brasil, 23: 169-187, (2003).
- KANTOROVICH, L. V., ZALGALLER, V. A., *Calculation of Rational Cutting of Stock* (in Russian). Lenizdat: Leningrad, 1951.
- LOEBLEIN, L. C., GODOY, L. P., TABORDA, L. W., OLIVEIRA, D. C., *Aplicação da Programação Linear para Minimização de Perdas de Aparas em Indústria Metal Mecânica*. Revista Gestão Industrial, 08: 14-29, 2012.
- MARTELLO, S., TOTH, P., *Knapsack Problems*. Chichester: Wiley, 1990. 296p.
- PINTO, T. S., *Uma proposta para resolver o problema de corte de estoque unidimensional com reaproveitamento de sobras por meio de dois objetivos*. Dissertação de Mestrado, UEL (2008).

POLDI, K. C., *Algumas extensões do problema de corte de estoque*. Dissertação de Mestrado, ICMC – USP (2003).

POLDI, K. C., ARENALES, M. N., *Heuristics for the one-dimensional cutting stock problem with limited multiple stock lengths*. Computers and Operations Research, 36: 2074-2081, (2009).

RIEHME J., SCHEITHAUER G., TERNO J. *The solution of two-stage guillotine cuttingstock problems having extremelly varying order demands*. European Journal of Operational Research, 91: 543-552, (1996).

STADTLER, H., *A one-dimensional cutting stock problem in the Aluminium Industry and its solution*. European Journal of Operational Research, 44: 209-223, (1990).

SINUANY-STERM, Z., WEINER I., *The one dimensional cutting stock problem using two objectives*. Journal of Operations Research Society, 45: 231-236, (1994).

WÄSCHER, G., GAU, T., *Heuristics for the integer one-dimensional cutting stock problem: a computational study*. OR Spektrum, 18: 131-144, (1996).

WÄSCHER, G., HAUßNER, H., SCHUMANN, H., *An improved typology cutting and packing problems*. European Journal of Operational Research, 183: 1109-1130, (2007).

APENDICE – ARTIGO SUBMETIDO À REVISTA GESTÃO INDUSTRIAL

A Revista Gestão Industrial (ISSN 1808-0448) é um periódico eletrônico, do Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - PPGE/UTFPR. Tem por missão divulgar pesquisas científicas e tecnológicas da área de engenharia de produção e áreas correlatas. O artigo submetido à revista é apresentado a seguir.

O PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE COM APROVEITAMENTO DE SOBRAS: UM ESTUDO DE COMPARAÇÃO DE DIFERENTES MODELOS MATEMÁTICOS E HEURÍSTICAS DE RESOLUÇÃO

THE CUTTING STOCK PROBLEM USING THE WASTE: A STUDY INTO COMPARISON OF DIFFERENT MATHEMATICAL MODELS AND HEURISTICS FOR RESOLUTION

Eduardo Aparecido da Rosa Neto¹; Robinson Samuel Vieira Hoto²

¹Universidade Estadual de Londrina – UEL
eduardo.neto@ensinolivre.com.br

²Universidade Estadual de Londrina – UEL
hoto@uel.br

Resumo

Um Problema de Corte de Estoque (PCE) consiste basicamente em cortar um conjunto de peças maiores (matéria-prima) disponíveis em estoque com a finalidade de produzir um conjunto de peças menores (itens), otimizando um determinado objetivo, que pode ser minimizar a quantidade total de matéria-prima a ser cortada, bem como as sobras geradas pelo processo ou o custo associado ao corte; maximizar o lucro, entre outros. Neste contexto, o Problema de Corte de Estoque com Aproveitamento de Sobras (PCES) enfoca tal questão visando a melhor utilização da matéria-prima, ou seja, utilizar as sobras em um processo de corte futuro, desde que elas apresentem condições para isso. Buscamos com este trabalho determinar soluções inteiras para um PCES por meio de um estudo computacional dos modelos matemáticos propostos por Pinto (2008). Exploramos também uma reformulação do modelo matemático da Estratégia 5 de Pinto (2008), a qual denominamos Estratégia 5 Reformulada (5R). Analisamos a eficácia dos modelos, considerando critérios de avaliação estabelecidos, a priori, pela comparação dos resultados com os resultados de heurísticas propostas por Cherri e outros (2009), por meio de simulações computacionais realizadas em um conjunto de classes de exemplares gerados aleatoriamente. Os resultados mostram que, conforme as classes vão crescendo em termos de dimensão e demanda dos exemplares, a concentração dos melhores resultados tende para a Estratégia 5R e para os procedimentos heurísticos, em particular para os residuais RAG_{R1} , RAG_{R2} e RAG_{R3} .

Palavras-chave: problema de corte de estoque unidimensional; aproveitamento de sobras; heurísticas; gerador aleatório; problema de programação linear inteira.

1. Introdução

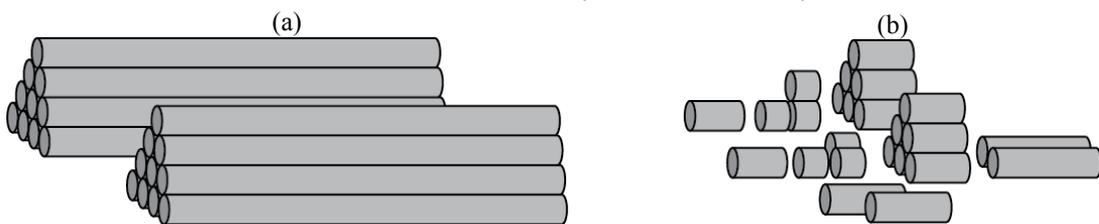
As indústrias de manufatura, principalmente indústrias de papel, metalúrgica, vidro, móveis, plástica, têxtil, entre outras, têm sido estimuladas a aprimorar seus processos, tornando-os cada vez mais eficientes e econômicos. Em tais indústrias, as etapas do gerenciamento de produção estão frequentemente associadas à utilização de estratégias de corte de matérias-primas para transformá-

las em produtos finais, o que têm motivado a comunidade científica nacional e internacional na busca de métodos de solução eficientes. Uma linha de pesquisa importante na área de Pesquisa Operacional e que têm sido estudados por um número crescente de pesquisadores nas últimas décadas é o **Problema de Corte de Estoque** (PCE). Esse estudo tem gerado contribuições significativas em diversas áreas, principalmente em razão da importância econômica aliada aos avanços nos aspectos computacionais, interesse que pode ser comprovado, por exemplo, pela consulta a livros dedicados exclusivamente ao tema, em centenas de artigos de revisão e edições especiais de revistas nacionais e internacionais disponíveis na literatura, e pela formação de grupos de pesquisa para tratar exclusivamente do tema (p. ex. GPCE, ESICUP⁹).

Destacamos alguns artigos que nortearam este trabalho, a citar: Poldi e Arenales (2009), Hoto e outros (2003), Cherri e outros (2009), Wäsher e outros (2007), Cui e Yang (2010), Gilmore e Gomory (1963) e Gau e Wäsher (1995). Centenas de outros artigos podem ser acessadas pelo endereço eletrônico <<http://www.fe.up.pt/esicup>>.

O problema de corte de estoque unidimensional pode ser descrito da seguinte forma: suponha que tenhamos em estoque uma quantidade suficiente de **barras** de comprimento L para cortar **itens** de comprimentos $l_i \leq L$, $i = 1, \dots, I$, de modo a atender **demandas** d_i , $i = 1, \dots, I$. Ver Figura 1. O problema consiste em efetuar o processo de corte, minimizando a sobra de material. Neste trabalho este problema será denominado **Problema de Corte de Estoque Unidimensional Clássico** (PCEC).

Figura 1 – (a) Conjunto de barras em estoque de comprimento L a serem cortadas;
(b) Conjunto de itens de comprimentos $l_i \leq L$ e demandas d_i , $i = 1, \dots, I$

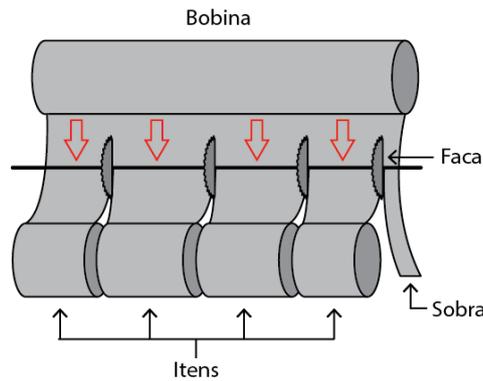


Fonte: Autoria própria (2015)

Por exemplo, uma bobina (de papel, alumínio, tecido, aço,...) atravessa uma máquina com facas, que fará cortes em apenas um sentido (Figura 2).

⁹ GPCE e ESICUP são grupos (nacional e internacional, respectivamente) que reúnem profissionais, pesquisadores e educadores da Pesquisa Operacional com interesses na área de corte e empacotamento.

Figura 2 – Esquema representando o processo de corte de uma bobina



Fonte: Autoria própria (2015)

Na indústria papelreira, por exemplo, bobinas-jumbo são cortadas em sub-bobinas que, por sua vez, podem ainda ser cortadas em retângulos de diversos tamanhos.

De acordo com o comprimento da bobina, as quantidades e os comprimentos dos itens demandados, há finitas maneiras de arranjos para a disposição das facas, mas esse número pode ser muito grande, mesmo para problemas considerados “pequenos”¹⁰. Denotaremos cada disposição das facas no processo de corte de **padrão de corte**. As variáveis de decisão, neste caso, baseiam-se na utilização de cada padrão de corte, as quais, em razão das restrições de maquinário, por exemplo, devem ser inteiras.

Vamos considerar que há P possibilidades, o que sugere a definição de padrão de corte como um vetor de dimensão I que contabiliza os itens produzidos.

$$\mathbf{a}_p = (a_{1p}, a_{2p}, \dots, a_{ip}, \dots, a_{Ip})^T, \quad i = 1, \dots, I, \quad p = 1, \dots, P \quad (1)$$

Em que \mathbf{a}_p é o vetor representante do p -ésimo padrão de corte, e a coordenada a_{ip} representa a quantidade de vezes que o item de comprimento ℓ_i aparece no p -ésimo padrão. Note que, para (1) satisfazer um padrão de corte, deve-se obedecer à seguinte restrição física:

$$\ell_1 a_{1p} + \ell_2 a_{2p} + \dots + \ell_i a_{ip} + \dots + \ell_I a_{Ip} \leq L, \quad i = 1, \dots, I, \quad p = 1, \dots, P \quad (2)$$

Nas inúmeras situações práticas podem ocorrer variações do problema. Nesse sentido, consideraremos que o estoque é composto por barras de vários comprimentos, cuja disponibilidade é limitada, entretanto, suficiente para o atendimento dos itens demandados. Para tanto, vamos

¹⁰ Em problemas práticos, I é da ordem de dezenas, enquanto a quantidade de maneiras de arranjos para a disposição das facas, que depende de I , L e ℓ_i , $i = 1, \dots, I$, pode ser da ordem de centenas de milhares.

considerar que o estoque de barras é composto por J tipos de barras, de comprimentos $L_1, L_2, \dots, L_j, \dots, L_J$. Denotaremos por $e_1, e_2, \dots, e_j, \dots, e_J$ a quantidade disponível das respectivas barras. Neste trabalho este problema será denominado **Problema de Corte de Estoque Unidimensional Restrito** (PCER). Matematicamente:

Minimizar:

$$f(x) = \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} T_{pj} x_{pj} \quad (3)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} a_{pj} x_{pj} = \mathbf{d} \quad (4)$$

$$\sum_{p=1}^{P_j} x_{pj} \leq e_j, \quad j = 1, \dots, J \quad (5)$$

$$x_{pj} \geq 0 \text{ e inteiro, } p = 1, \dots, P_j, \quad j = 1, \dots, J \quad (6)$$

Em que, $\mathbf{a}_{pj} = (a_{1pj}, a_{2pj}, \dots, a_{lpj})^T$ é um vetor associado a um padrão de corte na j -ésima barra, a_{1pj} é a quantidade de vezes que o item de comprimento ℓ_i aparece no p -ésimo padrão de corte, na barra de comprimento L_j , sendo e_j a quantidade disponível dessa barra em estoque. Por fim, x_{pj} representa o total de barras que devem ser cortadas, segundo o p -ésimo padrão de corte. Ainda, $\mathbf{d} = (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_i, \dots, \mathbf{d}_I)^T$ é o vetor de demandas, $T_{pj} = L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ipj}$ representa a sobra produzida pelo p -ésimo padrão de corte na barra de comprimento L_j , em que $i = 1, \dots, I$, $j = 1, \dots, J$ e $p = 1, \dots, P_j$. Qualquer solução deste problema, cujos componentes sejam inteiros e não negativos, fornece uma solução factível para o problema.

São problemas de vasta aplicabilidade prática, cuja aparente simplicidade entra em contraste com a grande dificuldade de resolução por conta do elevado número de variáveis envolvidas e da restrição de integralidade destas variáveis. Tais problemas pertencem à classe NP-difícil¹¹ (Garey e Johnson, 1979; Dyckhoff, 1990, citado por Poldi e Arenales, 2009) que, grosso modo, podemos

¹¹ Polinomial Não Determinístico Difícil.

dizer que são problemas improváveis de serem resolvidos num tempo polinomial aceitável. Em processos de corte, buscando uma melhor utilização da matéria-prima, muitas indústrias, ao invés de descartar as sobras do processo procuram utilizá-las, desde que apresentem condições para isto. O problema ao qual daremos ênfase neste trabalho é o **Problema de Corte de Estoque Unidimensional com Aproveitamento de Sobras** (PCES), que considera também as **perdas** (leia-se sobras não aproveitáveis) e os **retalhos** (leia-se sobras aproveitáveis) obtidos em um processo de corte. Adotaremos como retalho qualquer comprimento maior ou igual ao comprimento do menor item demandado.

No ponto de vista prático, a definição de perdas e retalhos é relativa. Um comprimento mínimo aceitável como retalho é um critério que deve ser estabelecido pela indústria. É possível considerar, por exemplo, o comprimento do menor item demandado, o comprimento do maior item demandado, a média dos comprimentos dos itens demandados, ou um comprimento qualquer pré-estabelecido pelo usuário. Na literatura, são vários os trabalhos que consideram como retalho qualquer comprimento maior ou igual ao comprimento do menor item demandado, a citar Pinto (2008), Farias (2011), Hoto e outros (2003), Gradisar e outros (1997), (1999a, b), Gradisar e Trkman (2005), Abuabara e Morabito (2008). É importante ressaltar que essa atribuição pode não ser interessante no caso em que o conjunto dos itens demandados inclui um item atípico de comprimento muito pequeno ou apenas itens de comprimentos grandes. Desse modo o processo de corte iria gerar, no primeiro caso, muitos retalhos pequenos e de pouco uso, ou, no segundo caso, muitas perdas que poderiam ser aceitáveis em processos futuros.

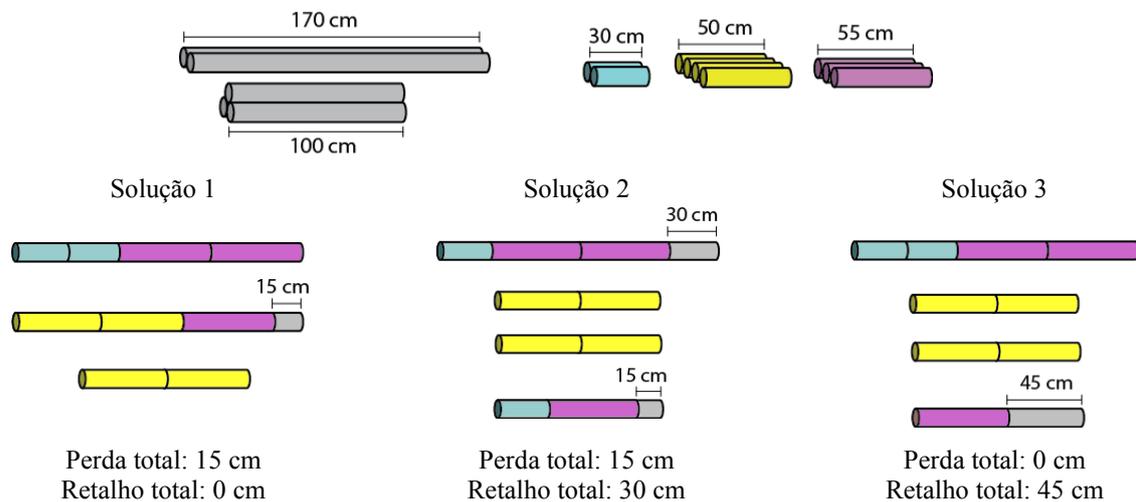
Partiremos do pressuposto que é mais desejável reduzir as perdas ao nível mínimo, e maximizar os retalhos ao nível máximo, de tal maneira que tais retalhos estejam concentrados na menor quantidade possível de padrões, desde que seja mantido o objetivo inicial de um problema de corte de estoque: minimizar sobras.

O principal objetivo deste trabalho consiste em determinar soluções inteiras para o PCES. Para isso faremos um estudo computacional dos modelos matemáticos propostos por Pinto (2008). A eficácia dos modelos será analisada pela comparação dos resultados com as de heurísticas propostas por Cherri e outros (2009). As simulações computacionais sugeriram que é possível propor uma variação dos modelos propostos por Pinto (2008), na tentativa de buscar soluções melhores que as já encontradas, o que também se constitui num objetivo a ser alcançado.

Para exemplificar, considere $J = 2$ barras de comprimentos $L_1 = 170$ cm e $L_2 = 100$ cm, cuja disponibilidade em estoque seja $e_1 = 2$ e $e_2 = 3$ respectivamente, para cortar $I = 3$ tipos de

itens de comprimentos $l_1 = 30$ cm, $l_2 = 50$ cm e $l_3 = 55$ cm, de modo a atender às respectivas demandas $d_1 = 2$, $d_2 = 4$ e $d_3 = 3$. A Figura 3 ilustra três soluções factíveis para esse problema.

Figura 3 – Representação dos dados do exemplo e três soluções factíveis, considerando o problema de corte de estoque com aproveitamento de sobras



Fonte: Autoria própria (2015)

Se considerarmos os problemas clássicos de corte com o objetivo de minimizar sobras, a solução 1 é mais desejável, e as soluções 2 e 3 são equivalentes. No entanto, se analisarmos pelo ponto de vista de um problema de corte de estoque com aproveitamento de sobras, a solução 2 é menos desejável que as outras duas, visto que apresenta uma perda total maior que a da solução 3 e igual à da solução 1, que por sua vez não gerou retalhos. A solução 3 é a mais desejável pelo fato de apresentar perda nula e concentrar o retalho em uma única barra. Em todo caso, não podemos afirmar que uma das soluções apresentadas é solução ótima do exemplo. Para isso, devemos resolver o PCES.

2. Abordagens de Resolução

Há várias técnicas especializadas na tentativa de solucionar um PCE, com abordagens diferentes, como busca, programação, relaxação, grafos e outras. A dificuldade na resolução de problemas deste tipo reside no fato de que cada uma delas apresenta características específicas, o que torna a definição de um método geral eficiente pouco provável.

2.1 Heurísticas propostas por Cherri e outros (2009)

Cherri e outros (2009) desenvolveram heurísticas construtivas e residuais específicas para resolver um PCES, com base em modificações realizadas em heurísticas clássicas conhecidas na literatura. Essas heurísticas são: Construtiva FFD_R , Construtiva $Gulosa_R$, Residual FFD_R , Residual $Gulosa_R$ e Residual por Arredondamento Guloso (RAG_R) – versões 1, 2 e 3.

As heurísticas construtivas FFD_R e $Gulosa_R$ foram desenvolvidas a partir de alterações nas heurísticas construtivas clássicas FFD e $Gulosa$, respectivamente. As Heurísticas Residuais FFD_R e $Gulosa_R$ foram desenvolvidas com modificações nas heurísticas residuais FFD e $Gulosa$, respectivamente. Para essas heurísticas, o clássico problema de corte é resolvido com as restrições de integralidade relaxadas e, para obter uma solução inteira aproximada, as soluções contínuas são arredondadas e o problema residual resultante é resolvido pelas heurísticas construtivas FFD_R ou $Gulosa_R$. Por fim, as Heurísticas Residuais RAG_R – versões 1, 2 e 3 foram desenvolvidas realizando modificações nas heurísticas RAG – versões 1, 2 e 3 propostas por Poldi e Arenales (2009).

2.2 Modelos propostos por Pinto (2008)

Fundamentando-se a partir de uma modelagem do PCES, Pinto (2008), sugere em sua dissertação de mestrado que uma boa tática para obter o conjunto das soluções ótimas ou quase ótimas do PCER e, em seguida, buscar nesse conjunto soluções que maximizem as sobras, distribuindo-as na menor quantidade de barras. Seguindo este princípio, Pinto (2008) propôs três estratégias de resolução para o PCES que, numa primeira etapa encontra o menor comprimento que deve ser cortado de barras para o atendimento dos itens demandados e, numa segunda etapa, busca concentrar as perdas na menor quantidade de barras. O autor ainda propôs outras duas estratégias, visando resolver o PCES numa única etapa. As estratégias serão descritas a seguir.

Para isso considere as constantes:

- L_j : comprimento da j -ésima barra, $j = 1, \dots, J$;
- T_j : Perda na j -ésima barra, $j = 1, \dots, J$;
- $M \geq \max \{L_j \mid j = 1, \dots, J\}$;
- ℓ_i : comprimento do i -ésimo item, $i = 1, \dots, I$;

- d_i : demanda do i -ésimo item, $i = 1, \dots, I$;
- $S = \min \{ \ell_i \mid i = 1, \dots, I \}$: comprimento mínimo considerado como retalho;
- N : quantidade de barras escolhida na primeira etapa;
- R : quantidade de barras usadas para concentrar retalhos.

E as variáveis:

- a_{ij} : quantidade de itens de índice $i = 1, \dots, I$ cortados da barra de índice $j = 1, \dots, J$;
- $y_j = \begin{cases} 1, & \text{se a barra de índice } j \text{ é escolhida} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$;
- $w_j = \begin{cases} 1, & \text{se a barra de índice } j \text{ é escolhida para concentrar retalhos} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$.

Nas três primeiras estratégias, a etapa inicial é sempre a mesma. O modelo matemático desta etapa é:

Minimizar:

$$\sum_{j=1}^J y_j L_j \quad (7)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^J a_{ij} = d_i, \quad i = 1, \dots, I \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq L_j y_j, \quad j = 1, \dots, J \quad (9)$$

$$a_{ij} \geq 0 \text{ e inteiro, } i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J \quad (10)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, J \quad (11)$$

A função objetivo (70) minimiza o comprimento total utilizado para atender a demanda. A restrição (71) garante que a quantidade de itens produzidos seja igual à demanda. A restrição (72) funciona da seguinte forma: se a j -ésima barra está sendo usada ($y_j = 1$) a mesma equivale a uma

restrição de mochila, por outro lado, se a j -ésima barra não está sendo usada ($y_j = 0$) a restrição obriga que $a_{ij} = 0$, $i = 1, \dots, I$. Por fim, as restrições (73) e (74) definem as variáveis do problema.

A etapa seguinte nas três primeiras estratégias consiste em determinar um conjunto de padrões que atenda a demanda diminuindo as sobras ao nível mínimo, gerando o mínimo de perdas e o máximo de retalhos, de tal maneira que estes retalhos estejam concentrados na menor quantidade de barras.

O modelo matemático utilizado na **Estratégia 1** é:

Minimizar:

$$\sum_{j=1}^N \left(L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \right) \quad (12)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^N w_j = R \quad (13)$$

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} = d_i, \quad i = 1, \dots, I \quad (14)$$

$$L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq w_j L_j + (1 - w_j)(S - 1), \quad j = 1, \dots, N \quad (15)$$

$$L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \geq w_j S, \quad j = 1, \dots, N \quad (16)$$

$$a_{ij} \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, N \quad (17)$$

$$w_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, N \quad (18)$$

A função objetivo (75) minimiza as sobras do processo. A restrição (76) garante que a quantidade de barras utilizadas para concentrar os retalhos seja igual ao número R previamente fixado. A restrição (77) garante que a quantidade de itens produzidos seja igual à demanda. As restrições (78) e (79) juntas, indicam para cada barra, que o comprimento remanescente do corte dos itens deve estar no intervalo $[S, L_j]$ quando $w_j = 1$, isto é, a barra deve gerar retalhos, ou deve estar no intervalo $[0, S)$ quando $w_j = 0$, isto é, a barra não deve gerar retalhos. Por fim, as restrições (80) e (81) definem as variáveis do problema.

O modelo matemático utilizado na **Estratégia 2** é:

Minimizar:

$$\sum_{j=1}^N T_j \quad (19)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^N w_j = R \quad (20)$$

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} = d_i, \quad i = 1, \dots, I \quad (21)$$

$$L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq L_j + (1 - w_j)M, \quad j = 1, \dots, N \quad (22)$$

$$L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \geq S - (1 - w_j)M, \quad j = 1, \dots, N \quad (23)$$

$$L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq T_j + w_j M, \quad j = 1, \dots, N \quad (24)$$

$$L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \geq T_j - w_j M, \quad j = 1, \dots, N \quad (25)$$

$$a_{ij} \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, N \quad (26)$$

$$T_j \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad j = 1, \dots, N \quad (27)$$

$$w_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, N \quad (28)$$

A função objetivo (82) minimiza as perdas do processo. As restrições (83) e (84) são semelhantes às restrições (76) e (77) respectivamente. As restrições (85) e (86) juntas, indicam para cada barra, que o comprimento remanescente do corte dos itens deve gerar retalhos quando $w_j = 1$, e ficam inativas quando $w_j = 0$. As restrições (87) e (88) juntas, indicam para cada barra, que o comprimento remanescente do corte dos itens deve gerar perdas quando $w_j = 0$, e ficam inativas quando $w_j = 1$. Por fim, as restrições (89), (90) e (91) definem as variáveis do problema.

Na **Estratégia 3**, as restrições do modelo da primeira e da segunda etapa são parecidas, mas a função objetivo é bem diferente:

Maximizar:

$$\sum_{j=N-(R-1)}^N \left(L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \right) \quad (29)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} = d_i, \quad i = 1, \dots, I \quad (30)$$

$$\sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq L_j, \quad j = 1, \dots, N \quad (31)$$

$$a_{ij} \geq 0 \text{ e inteiro, } i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, N \quad (32)$$

A função objetivo (92) maximiza as sobras do processo nas barras de índice $j = N - (R - 1), \dots, N$. A restrição (93) garante que a quantidade de itens produzidos seja igual à demanda. A restrição (94) equivale a uma restrição de mochila. Por fim, a restrição (95) define as variáveis do problema. Note que ao fazer $R = 1$, optou-se por concentrar as sobras na última barra, e, neste caso, foi realizada uma ordenação decrescente das barras, ou seja, $L_1 \leq \dots \leq L_N$.

O modelo matemático utilizado na **Estratégia 4** é:

Minimizar:

$$\sum_{j=1}^J y_j L_j \quad (33)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^J w_j = R \quad (34)$$

$$\sum_{j=1}^J a_{ij} = d_i, \quad i = 1, \dots, I \quad (35)$$

$$L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq w_j L_j + (1 - w_j)(S - 1), \quad j = 1, \dots, J \quad (36)$$

$$L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \geq w_j S, \quad j = 1, \dots, J \quad (37)$$

$$a_{ij} \geq 0 \text{ e inteiro, } i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J \quad (38)$$

$$y_j \in \{0,1\}, w_j \in \{0,1\}, j=1,\dots,J \quad (39)$$

A função objetivo (96) minimiza o comprimento total cortado no processo. A restrição (97) garante que a quantidade de barras utilizadas para concentrar os retalhos seja igual ao número R previamente fixado. A restrição (98) garante que a quantidade de itens produzidos seja igual à demanda. As restrições (99) e (100) são equivalentes às restrições (78) e (79), respectivamente e, juntas, indicam para cada barra, que o comprimento remanescente do corte dos itens deve estar no intervalo $[S, L_j]$ quando $w_j = 1$, isto é, a barra deve gerar retalhos, ou deve estar no intervalo $[0, S)$ quando $w_j = 0$, isto é, a barra não deve gerar retalhos. Por fim, as restrições (101) e (102) definem as variáveis do problema.

O modelo matemático utilizado na Estratégia 5 é:

Minimizar:

$$\sum_{j=1}^J (T_j + y_j L_j) \quad (40)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^J w_j = R \quad (41)$$

$$\sum_{j=1}^J a_{ij} = d_i, \quad i=1,\dots,I \quad (42)$$

$$y_j L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq L_j + (1 - w_j)M, \quad j=1,\dots,J \quad (43)$$

$$y_j L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \geq S - (1 - w_j)M, \quad j=1,\dots,J \quad (44)$$

$$y_j L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq T_j + w_j M, \quad j=1,\dots,J \quad (45)$$

$$y_j L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \geq T_j - w_j M, \quad j=1,\dots,J \quad (46)$$

$$a_{ij} \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad i=1,\dots,I, \quad j=1,\dots,J \quad (47)$$

$$T_j \geq 0 \text{ e inteiro, } j=1, \dots, J \quad (48)$$

$$y_j \in \{0,1\}, w_j \in \{0,1\}, j=1, \dots, J \quad (49)$$

A função objetivo (103) minimiza a perda e o comprimento total cortado no processo. As restrições (104) e (105) são semelhantes às restrições (97) e (98) respectivamente. As restrições (106) e (107) juntas, indicam para cada barra, que o comprimento remanescente do corte dos itens deve gerar retalhos quando $w_j = 1$, e ficam inativas quando $w_j = 0$, agindo de forma similar às restrições (85) e (86), respectivamente. As restrições (108) e (109) juntas, indicam para cada barra, que o comprimento remanescente do corte dos itens deve gerar perdas quando $w_j = 0$, e ficam inativas quando $w_j = 1$, agindo de forma similar às restrições (87) e (88), respectivamente.

2.3 Reformulação da Estratégia 5 de Pinto (2008)

Embora as soluções apresentadas por Pinto (2008) indiquem que é frutífera a estratégia de selecionar barras para o atendimento de itens demandados e, posteriormente, concentrar as perdas na menor quantidade possível destas barras, diversas soluções foram apresentadas como “a heurística não encontrou solução”, “solução inviável” ou “o código falhou”. Muito provavelmente tais resultados indicam erros nas implementações dos modelos.

Em princípio, um desdobramento imediato deste trabalho trata-se de revisar e avaliar o desempenho das estratégias propostas por Pinto (2008) para os milhares de exemplares extraídos de um gerador aleatório. As simulações realizadas mostraram que a Estratégia 5 se destacou em relação às outras quatro estratégias. A estratégia 1 não teve grandes resultados, e as outras estratégias tiveram seus bons resultados entre uns e outros. Por consequência, percebemos que é possível explorar uma reformulação do modelo matemático da Estratégia 5, que justificaremos a seguir.

Analisando novamente as restrições (106)-(109), para cada barra escolhida ($y_j = 1$), temos:

- Quando $w_j = 1$, as restrições (106) e (107) visam gerar retalhos e as restrições (108) e (109) ficam inativas, para $i = 1, \dots, I$, $j = 1, \dots, J$;

$$S \leq L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq L_j \quad (50)$$

$$T_j - M \leq L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq T_j + M \quad (51)$$

De fato, para $i = 1, \dots, I$, $j = 1, \dots, J$:

$$T_j - M \leq S \leq L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq L_j \leq T_j + M \quad (52)$$

- Quando $w_j = 0$, as restrições (106) e (107) ficam inativas e as restrições (108) e (109) visam gerar perdas para $i = 1, \dots, I$, $j = 1, \dots, J$.

$$S - M \leq L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq L_j + M \quad (53)$$

$$T_j \leq L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq T_j \quad (54)$$

De fato, para $i = 1, \dots, I$, $j = 1, \dots, J$:

$$S - M \leq S \leq L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq T_j \leq L_j + M \quad (55)$$

Realizando algumas simulações e comparando os resultados obtidos da Estratégia 5 com os das Estratégias 1, 2, 3 e 4, pudemos observar que há uma grande dificuldade na definição dos critérios utilizados para avaliar uma boa solução. A ideia de “melhor” solução é relativa e depende, inicialmente, da decisão a ser tomada: minimizar sobras (Estratégia 1), minimizar perdas (Estratégia 2), maximizar as sobras em uma quantidade reduzida de barras (Estratégia 3), minimizar o comprimento total a ser cortado (Estratégia 4) ou uma combinação destas (Estratégia 5). Em nossa análise, acreditamos que do ponto de vista prático a indústria privilegia manter as perdas no seu patamar mínimo. Visando isso, para a reformulação da Estratégia 5 inicialmente eliminamos o termo $y_j L_j$ da função objetivo (103) que determina o comprimento total cortado. Desse modo, o objetivo passa a ser de minimizar perdas:

Minimizar:

$$\sum_{j=1}^J T_j \quad (56)$$

Em seguida, eliminamos o termo T_j nas restrições (108) e (109):

$$y_j L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq w_j M, \quad j = 1, \dots, J \quad (57)$$

$$y_j L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \geq -w_j M, \quad j = 1, \dots, J \quad (58)$$

Com tais alterações, quando $w_j = 1$, as restrições (106) e (107) ainda visam gerar retalhos e as novas restrições (113) e (114) continuam inativas, para $i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J$.

$$S \leq L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq L_j \quad (59)$$

$$-M \leq L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq M \quad (60)$$

De fato, para $i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J$:

$$-M \leq S \leq L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq L_j \leq M \quad (61)$$

Por outro lado, quando $w_j = 0$, as restrições (106) e (107) continuam inativas e as novas restrições (113) e (114) visam gerar perdas nulas para $i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J$.

$$S - M \leq L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq L_j + M \quad (62)$$

$$0 \leq L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq 0 \quad (63)$$

De fato, para $i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J$:

$$S - M \leq 0 \leq L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq 0 \leq L_j + M \quad (64)$$

Portanto, o modelo matemático Reformulado para a Estratégia 5 é:

Minimizar:

$$\sum_{j=1}^J T_j \quad (65)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^J w_j = R \quad (66)$$

$$\sum_{j=1}^J a_{ij} = d_i, \quad i = 1, \dots, I \quad (67)$$

$$y_j L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq L_j + (1 - w_j) M, \quad j = 1, \dots, J \quad (68)$$

$$y_j L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \geq S - (1 - w_j) M, \quad j = 1, \dots, J \quad (69)$$

$$y_j L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \leq w_j M, \quad j = 1, \dots, J \quad (70)$$

$$y_j L_j - \sum_{i=1}^I \ell_i a_{ij} \geq -w_j M, \quad j = 1, \dots, J \quad (71)$$

$$a_{ij} \geq 0 \text{ e inteiro, } i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J \quad (72)$$

$$T_j \geq 0 \text{ e inteiro, } j = 1, \dots, J \quad (73)$$

$$y_j \in [0, 1], \quad w_j \in [0, 1], \quad j = 1, \dots, J \quad (74)$$

Sem perda de generalidade, chamaremos este modelo simplesmente de Estratégia 5 Reformulada. Ao analisar os resultados das simulações obtidas pela implementação desta estratégia, pudemos perceber que as soluções apresentaram perda nula e os retalhos são concentrados na menor quantidade possível de barras. Além disto, surpreendentemente a quantidade de barras utilizadas e/ou o comprimento total cortado foram em média menores ou iguais. Do ponto de vista prático, partimos do pressuposto que esta é a “melhor” solução para um PCES.

Para ilustrar, vamos considerar um PCES cujos dados são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Dados do exemplo.

Barras					
j	L_j (u.c.)			e_j	
1	1000			5	
2	1500			5	
3	2000			5	
4	2500			5	
Itens					
i	ℓ_i (u.c.)	d_i	i	ℓ_i (u.c.)	d_i
1	240	8	6	160	7
2	210	7	7	150	5
3	250	8	8	190	5
4	120	9	9	180	10
5	170	7	10	200	10

Fonte: Dados aleatórios

Nos testes foram comparados quatro principais parâmetros (em quantidade ou em comprimento):

- **Perda:** barras que geram perdas;
- **Retalho:** barras que geram retalhos;
- **Aprov.:** em quantidade, representam barras que geram aproveitamento pleno, ou seja, perda nula; em comprimento, representam a demanda total atendida;
- **Total:** barras utilizadas no processo de corte.

Os resultados são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Resultados do exemplo.

Estratégias	Quantidade				Comprimento (u.c.)			
	Perda	Retalho	Aprov.	Total	Perda	Retalho	Aprov.	Total
1	6	2	1	9	220	500	14280	15000
2	5	1	3	9	320	400	14280	15000
3	1	1	7	9	30	690	14280	15000
4	5	2	3	10	200	520	14280	15000
5	7	1	0	8	150	570	14280	15000
5 Reformulada	0	1	7	8	0	1220	14280	15500

Fonte: Experimentos computacionais

Note que a Estratégia 5 Reformulada apresenta a solução com a menor perda e cujo retalho total é concentrado na menor quantidade possível de barras. De fato, a Estratégia 5 Reformulada selecionou a menor quantidade total de barras (8 barras), das quais nenhuma gera perda e apenas

uma gera um único retalho de comprimento 1220 u.c. No entanto, o maior comprimento total cortado (15500 u.c.) deve-se à escolha de barras maiores para o atendimento da demanda.

Esses resultados podem ser justificados pelo fato de que a função objetivo busca minimizar a perda total ao mesmo tempo em que as restrições limitam a seleção de padrões de corte que apresentam perdas nulas ou retalhos. É provável que isto ocasione uma dominância do componente “Perdas” (nulas) sobre o componente “Retalhos”, levando a resultados onde a perda é mínima (nula se for possível) e a quantidade de retalhos é concentrada na menor quantidade possível de barras. Por exemplo, a Estratégia 5 apresenta uma solução em que o retalho total de 570 u.c. é distribuída em 7 barras enquanto a Estratégia 5 Reformulada apresenta uma solução em que o retalho total de 1220 u.c. é distribuído em uma única barra.

3. Experimentos Computacionais

A quantidade de exemplares analisados no trabalho de Pinto (2008) é relativamente baixa se comparada aos trabalhos disponíveis na literatura. O autor selecionou oito exemplares: sete extraídos do trabalho de Abuabara (2006) e um extraído do trabalho de Sinuany-Stern e Weiner (1994). Resolvemos criar um próprio gerador de exemplares aleatórios, baseado no CUTGEN1 proposto por Gau e Wäscher (1995), variando-se a quantidade de itens, o tamanho dos itens e/ou as quantidades demandadas, dando atenção especial a problemas com baixa demanda, visto que estamos interessados em soluções boas e rápidas, mesmo que a otimalidade não seja garantida.

Os experimentos estão divididos em 12 classes de problemas, sendo que para cada classe foram gerados 100 exemplares. A seguir, a descrição dos critérios utilizados.

- Quantidade de barras: 4 barras padronizadas;
- Comprimento das barras: 1000 u.c., 1500 u.c., 2000 u.c. e 2500 u.c.;
- Disponibilidade das barras: 5 cada;
- Quantidade de itens: 5, 10 ou 15;
- Comprimento dos itens: será gerado, aleatoriamente, dentro dos intervalos [50 u.c., 100 u.c.] para os itens de tamanho pequeno (P) e [100 u.c., 250 u.c.] para os itens de tamanho médio (M). Usando parâmetros que as aproximassem de situações reais, consideramos os comprimentos dos itens com dezenas inteiras;

- Demanda dos itens: será gerada, aleatoriamente, dentro dos intervalos [1, 5] para a demanda baixa (DB) e [5, 10] para a demanda média (DM);
- Comprimento para a sobra: menor item dentro do conjunto de itens do respectivo exemplar.

Obtemos, desta forma, problemas variando-se a quantidade de itens, o tamanho dos itens e/ou as quantidades demandadas. O código utilizado para caracterizar cada classe é formado por 5 dígitos: os dois primeiros representam a quantidade de itens (05, 10 ou 15); o próximo dígito representa o tamanho dos itens (P ou M) e; os dois últimos dígitos que completam o código representam as demandas (DB ou DM), conforme a tabela 1. O código 15MDM, por exemplo, representa a classe com 15 itens de tamanho médio cujas demandas são médias.

3.1 Resultados

Os algoritmos das cinco estratégias apresentadas na Seção 2.2 e na Seção 2.3 foram implementados na linguagem de programação Mosel (Xpress-Mosel User Guide, 2008) e, utilizando o próprio Solver do programa, foram executados em um computador Intel Core i7 de 2,67 GHz com 12 GB de memória RAM. Quanto às heurísticas de Cherri e outros (2009), os exemplares selecionados foram executados pela professora Adriana Cristina Cherri Nicola, a quem registramos nossos sinceros agradecimentos.

Em razão da dificuldade em comparar as soluções do PCES, utilizaremos os seguintes critérios:

- **Solução ideal:** quando houver perda não nula em no máximo uma barra e todos os retalhos estiverem concentrados em no máximo uma barra;
- **Solução aceitável:** quando houver perda não nula em mais de uma barra ou todos os retalhos estiverem concentrados em mais de uma barra, não ambos;
- **Solução indesejável:** quando houver perda não nula em mais de uma barra e todos os retalhos estiverem concentrados em mais de uma barra.

Nos testes foram comparados quatro principais parâmetros (em quantidade ou em comprimento):

- **Perda:** barras que geram perdas;
- **Retalho:** barras que geram retalhos;
- **Aprov.:** em quantidade, representam barras que geram aproveitamento pleno, ou seja, perda nula; em comprimento, representam a demanda total atendida;
- **Total:** barras utilizadas no processo de corte.

A eficácia dos métodos de resolução será analisada pela comparação dos resultados de uns com os outros. Os métodos obtiveram soluções factíveis para todos os exemplares gerados. As Tabelas 3 – 14 apresentam as médias para 100 exemplares de cada uma das 12 classes.

Tabela 3 – Resultados para os 100 exemplares da classe 1 – 5PDB

Métodos de resolução		Solução	Quantidade				Comprimento (u.c.)			
			Perda	Retalho	Aprov.	Total	Perda	Retalho	Aprov.	Total
Estratégias	1	Ideal	0,1	1,0	0,0	1,1	1,1	295,1	1113,8	1410,0
	2	Ideal	0,0	1,0	0,0	1,1	0,9	295,3	1113,8	1410,0
	3	Ideal	0,0	1,0	0,0	1,1	0,3	295,9	1113,8	1410,0
	4	Ideal	0,0	1,0	0,0	1,1	1,5	294,7	1113,8	1410,0
	5	Ideal	0,0	1,0	0,0	1,0	0,3	280,9	1113,8	1395,0
	5 Ref.	Ideal	0,0	1,0	0,1	1,1	0,0	581,2	1113,8	1695,0
Heurísticas Construtivas	FFD _R	Aceitável	0,0	1,2	0,6	1,8	0,0	651,2	1113,8	1765,0
	Gulos _{aR}	Aceitável	0,0	1,2	0,6	1,8	0,0	646,2	1113,8	1760,0
Heurísticas Residuais	FFD _R	Aceitável	0,0	1,2	0,6	1,8	0,0	651,2	1113,8	1765,0
	Gulos _{aR}	Aceitável	0,0	1,2	0,6	1,8	0,0	646,2	1113,8	1760,0
	RAG _{R1}	Ideal	0,3	1,0	0,4	1,8	7,4	643,8	1113,8	1765,0
	RAG _{R2}	Ideal	0,3	1,0	0,5	1,8	4,6	646,6	1113,8	1765,0
	RAG _{R3}	Ideal	0,3	1,0	0,4	1,8	7,5	643,7	1113,8	1765,0

Fonte: Experimentos computacionais

Tabela 4 – Resultados para os 100 exemplares da classe 2 – 5PDM

Métodos de resolução		Solução	Quantidade				Comprimento (u.c.)			
			Perda	Retalho	Aprov.	Total	Perda	Retalho	Aprov.	Total
Estratégias	1	Aceitável	0,8	1,1	0,2	2,1	24,2	255,3	2810,5	3090,0
	2	Aceitável	0,6	1,2	0,3	2,1	16,7	262,8	2810,5	3090,0
	3	Ideal	0,2	1,0	0,9	2,1	2,6	276,9	2810,5	3090,0
	4	Aceitável	0,6	1,2	0,2	2,1	17,3	262,2	2810,5	3090,0
	5	Ideal	0,0	1,0	1,3	2,4	0,3	279,2	2810,5	3090,0
	5 Ref.	Ideal	0,0	1,0	1,1	2,1	0,0	1299,5	2810,5	4110,0
Heurísticas Construtivas	FFD _R	Aceitável	0,0	1,2	2,1	3,3	0,0	559,5	2810,5	3370,0
	Gulos _{aR}	Aceitável	0,0	1,2	2,2	3,3	0,0	569,5	2810,5	3380,0
Heurísticas Residuais	FFD _R	Aceitável	0,0	1,2	2,1	3,3	0,9	558,6	2810,5	3370,0
	Gulos _{aR}	Aceitável	0,0	1,1	2,1	3,3	0,9	568,6	2810,5	3380,0
	RAG _{R1}	Aceitável	0,0	1,2	1,1	2,3	0,5	464,0	2810,5	3275,0
	RAG _{R2}	Aceitável	0,0	1,2	1,1	2,3	0,5	469,0	2810,5	3280,0
	RAG _{R3}	Aceitável	0,0	1,2	1,1	2,3	0,5	474,0	2810,5	3285,0

Fonte: Experimentos computacionais

Tabela 5 – Resultados para os 100 exemplares da classe 3 – 5MDB

Métodos de resolução		Solução	Quantidade				Comprimento (u.c.)			
			Perda	Retalho	Aprov.	Total	Perda	Retalho	Aprov.	Total
Estratégias	1	Ideal	0,9	1,0	0,1	2,1	50,4	259,1	2630,5	2940,0
	2	Aceitável	0,8	1,2	0,1	2,1	41,8	267,7	2630,5	2940,0
	3	Ideal	0,2	1,0	0,8	2,1	3,0	306,5	2630,5	2940,0
	4	Aceitável	0,8	1,1	0,2	2,0	44,0	265,5	2630,5	2940,0
	5	Ideal	0,1	1,0	0,9	2,0	2,7	306,8	2630,5	2940,0
	5 Ref.	Ideal	0,0	1,0	0,8	1,8	0,0	714,5	2630,5	3345,0
Heurísticas Construtivas	FFD _R	Aceitável	0,0	1,4	1,7	3,1	0,0	574,5	2630,5	3205,0
	Gulos _{aR}	Aceitável	0,0	1,5	1,5	3,0	0,2	599,3	2630,5	3230,0
Heurísticas Residuais	FFD _R	Aceitável	0,0	1,4	1,6	3,1	0,7	573,8	2630,5	3205,0
	Gulos _{aR}	Aceitável	0,0	1,4	1,5	3,0	0,9	588,6	2630,5	3220,0
	RAG _{R1}	Aceitável	0,1	1,3	1,0	2,5	3,4	561,1	2630,5	3195,0
	RAG _{R2}	Aceitável	0,1	1,4	1,1	2,6	3,5	561,0	2630,5	3195,0
	RAG _{R3}	Aceitável	0,1	1,3	1,0	2,5	3,4	561,1	2630,5	3195,0

Fonte: Experimentos computacionais

Tabela 6 – Resultados para os 100 exemplares da classe 4 – 5MDM

Métodos de resolução		Solução	Quantidade				Comprimento (u.c.)			
			Perda	Retalho	Aprov.	Total	Perda	Retalho	Aprov.	Total
Estratégias	1	Indesejável	2,4	1,1	0,8	4,3	107,0	193,0	6710,0	7010,0
	2	Indesejável	2,1	1,1	1,1	4,3	95,5	204,5	6710,0	7010,0
	3	Ideal	0,3	1,0	3,0	4,3	3,3	296,7	6710,0	7010,0
	4	Indesejável	2,1	1,2	0,9	4,1	91,4	208,6	6710,0	7010,0
	5	Aceitável	1,5	1,0	1,9	4,3	38,1	261,9	6710,0	7010,0
	5 Ref.	Ideal	0,0	1,0	3,4	4,4	0,0	785,0	6710,0	7495,0
Heurísticas Construtivas	FFD _R	Aceitável	0,1	1,5	4,9	6,4	0,6	754,4	6710,0	7465,0
	Gulos _{aR}	Aceitável	0,1	1,5	4,8	6,3	0,6	739,4	6710,0	7450,0
Heurísticas Residuais	FFD _R	Aceitável	0,0	1,5	4,3	5,8	0,6	689,4	6710,0	7400,0
	Gulos _{aR}	Aceitável	0,0	1,5	4,3	5,8	0,4	704,6	6710,0	7415,0
	RAG _{R1}	Aceitável	0,0	1,4	2,6	4,1	0,5	524,5	6710,0	7235,0
	RAG _{R2}	Aceitável	0,0	1,4	2,6	4,0	0,5	514,5	6710,0	7225,0
	RAG _{R3}	Aceitável	0,1	1,5	2,6	4,1	1,2	533,8	6710,0	7245,0

Fonte: Experimentos computacionais

Tabela 7 – Resultados para os 100 exemplares da classe 5 – 10PDB

Métodos de resolução		Solução	Quantidade				Comprimento (u.c.)			
			Perda	Retalho	Aprov.	Total	Perda	Retalho	Aprov.	Total
Estratégias	1	Aceitável	0,7	1,1	0,2	2,0	16,2	251,2	2252,6	2520,0
	2	Ideal	0,6	1,0	0,4	2,0	13,1	254,3	2252,6	2520,0
	3	Ideal	0,2	1,0	0,7	2,0	2,8	264,6	2252,6	2520,0
	4	Aceitável	0,6	1,1	0,2	1,9	15,7	251,7	2252,6	2520,0
	5	Ideal	0,0	1,0	0,7	1,7	0,0	267,4	2252,6	2520,0
	5 Ref.	Ideal	0,0	1,0	0,7	1,7	0,0	1007,4	2252,6	3260,0
Heurísticas Construtivas	FFD _R	Aceitável	0,0	1,1	1,7	2,8	0,0	557,4	2252,6	2810,0
	Gulos _{AR}	Aceitável	0,0	1,1	1,7	2,8	0,0	557,4	2252,6	2810,0
Heurísticas Residuais	FFD _R	Aceitável	0,0	1,1	1,7	2,8	0,0	557,4	2252,6	2810,0
	Gulos _{AR}	Aceitável	0,0	1,1	1,7	2,8	0,0	557,4	2252,6	2810,0
	RAG _{R1}	Aceitável	0,0	1,1	1,1	2,2	0,0	527,4	2252,6	2780,0
	RAG _{R2}	Aceitável	0,0	1,1	1,1	2,2	0,0	527,4	2252,6	2780,0
	RAG _{R3}	Aceitável	0,0	1,1	1,1	2,2	0,0	522,4	2252,6	2775,0

Fonte: Experimentos computacionais

Tabela 8 – Resultados para os 100 exemplares da classe 6 – 10PDM

Métodos de resolução		Solução	Quantidade				Comprimento (u.c.)			
			Perda	Retalho	Aprov.	Total	Perda	Retalho	Aprov.	Total
Estratégias	1	Aceitável	1,8	1,0	1,1	3,9	43,8	196,9	5594,3	5835,0
	2	Indesejável	1,2	1,7	1,0	3,9	30,4	210,3	5594,3	5835,0
	3	Ideal	0,2	1,0	2,7	3,9	2,5	238,2	5594,3	5835,0
	4	Indesejável	1,6	1,4	0,7	3,7	19,6	201,1	5594,3	5815,0
	5	Ideal	0,3	1,0	2,6	3,9	5,6	235,1	5594,3	5835,0
	5 Ref.	Ideal	0,0	1,0	3,3	4,3	0,0	905,7	5594,3	6500,0
Heurísticas Construtivas	FFD _R	Aceitável	0,0	1,1	4,8	5,9	0,0	730,7	5594,3	6325,0
	Gulos _{AR}	Aceitável	0,0	1,1	4,7	5,9	0,0	725,7	5594,3	6320,0
Heurísticas Residuais	FFD _R	Aceitável	0,0	1,1	4,6	5,7	0,0	725,7	5594,3	6320,0
	Gulos _{AR}	Aceitável	0,0	1,1	4,6	5,8	0,0	720,7	5594,3	6315,0
	RAG _{R1}	Aceitável	0,0	1,2	2,3	3,4	0,0	470,7	5594,3	6065,0
	RAG _{R2}	Aceitável	0,0	1,2	2,2	3,4	0,0	485,7	5594,3	6080,0
	RAG _{R3}	Aceitável	0,0	1,2	2,2	3,4	0,0	495,7	5594,3	6090,0

Fonte: Experimentos computacionais

Tabela 9 – Resultados para os 100 exemplares da classe 7 – 10MDB

Métodos de resolução		Solução	Quantidade				Comprimento (u.c.)			
			Perda	Retalho	Aprov.	Total	Perda	Retalho	Aprov.	Total
Estratégias	1	Indesejável	2,1	1,1	0,7	3,8	81,9	207,2	5315,9	5605,0
	2	Indesejável	2,0	1,1	0,7	3,8	92,0	197,1	5315,9	5605,0
	3	Ideal	0,4	1,0	2,4	3,8	3,3	285,8	5315,9	5605,0
	4	Indesejável	2,1	1,1	0,6	3,8	100,2	188,9	5315,9	5605,0
	5	Ideal	0,6	1,0	2,0	3,6	14,7	274,4	5315,9	5605,0
	5 Ref.	Ideal	0,0	1,0	2,5	3,5	0,0	839,1	5315,9	6155,0
Heurísticas Construtivas	FFD _R	Aceitável	0,0	1,3	4,2	5,6	0,0	659,1	5315,9	5975,0
	Gulos _{AR}	Aceitável	0,0	1,3	4,1	5,5	0,0	629,1	5315,9	5945,0
Heurísticas Residuais	FFD _R	Aceitável	0,0	1,4	4,2	5,5	0,0	659,1	5315,9	5975,0
	Gulos _{AR}	Aceitável	0,0	1,3	4,1	5,5	0,0	629,1	5315,9	5945,0
	RAG _{R1}	Aceitável	0,0	1,3	2,2	3,5	0,3	513,8	5315,9	5830,0
	RAG _{R2}	Aceitável	0,0	1,3	2,2	3,5	0,0	504,1	5315,9	5820,0
	RAG _{R3}	Aceitável	0,0	1,3	2,2	3,5	0,1	509,0	5315,9	5825,0

Fonte: Experimentos computacionais

Tabela 10 – Resultados para os 100 exemplares da classe 8 – 10MDM

Métodos de resolução		Solução	Quantidade				Comprimento (u.c.)			
			Perda	Retalho	Aprov.	Total	Perda	Retalho	Aprov.	Total
Estratégias	1	Indesejável	5,6	1,1	1,8	8,4	208,2	232,4	13264,4	13705,0
	2	Indesejável	4,8	1,5	2,2	8,4	206,5	234,1	13264,4	13705,0
	3	Aceitável	1,1	1,0	6,3	8,4	10,4	430,2	13264,4	13705,0
	4	Indesejável	5,8	1,5	1,5	8,7	281,0	254,6	13264,4	13800,0
	5	Indesejável	3,7	1,1	3,1	7,9	112,2	323,4	13264,4	13700,0
	5 Ref.	Ideal	0,0	1,0	7,0	8,0	0,0	960,6	13264,4	14225,0
Heurísticas Construtivas	FFD _R	Aceitável	0,1	1,3	9,5	10,9	0,9	1099,7	13264,4	14365,0
	Gulos _{AR}	Aceitável	0,1	1,4	9,4	10,8	0,8	1079,8	13264,4	14345,0
Heurísticas Residuais	FFD _R	Aceitável	0,0	1,4	8,4	9,7	0,0	860,6	13264,4	14125,0
	Gulos _{AR}	Aceitável	0,1	1,4	8,2	9,7	0,6	945,0	13264,4	14210,0
	RAG _{R1}	Aceitável	0,0	1,3	5,6	7,0	0,0	560,6	13264,4	13825,0
	RAG _{R2}	Aceitável	0,0	1,3	5,6	6,9	0,0	555,6	13264,4	13820,0
	RAG _{R3}	Aceitável	0,0	1,4	5,6	7,1	0,1	580,5	13264,4	13845,0

Fonte: Experimentos computacionais

Tabela 11 – Resultados para os 100 exemplares da classe 9 – 15PDB

Métodos de resolução		Solução	Quantidade				Comprimento (u.c.)			
			Perda	Retalho	Aprov.	Total	Perda	Retalho	Aprov.	Total
Estratégias	1	Ideal	0,9	1,0	0,3	2,3	21,0	239,7	3314,3	3575,0
	2	Aceitável	0,7	1,2	0,5	2,3	15,1	245,6	3314,3	3575,0
	3	Ideal	0,2	1,0	1,1	2,3	2,3	258,4	3314,3	3575,0
	4	Aceitável	0,9	1,2	0,3	2,4	22,8	237,9	3314,3	3575,0
	5	Ideal	0,0	1,0	1,8	2,8	0,0	260,7	3314,3	3575,0
	5 Ref.	Ideal	0,0	1,0	1,4	2,4	0,0	1210,7	3314,3	4525,0
Heurísticas Construtivas	FFD _R	Aceitável	0,0	1,1	2,8	3,8	0,0	530,7	3314,3	3845,0
	Gulos _{AR}	Aceitável	0,0	1,1	2,7	3,8	0,0	530,7	3314,3	3845,0
Heurísticas Residuais	FFD _R	Aceitável	0,0	1,1	2,8	3,8	0,0	530,7	3314,3	3845,0
	Gulos _{AR}	Aceitável	0,0	1,1	2,7	3,8	0,0	530,7	3314,3	3845,0
	RAG _{R1}	Aceitável	0,0	1,2	1,3	2,4	0,0	485,7	3314,3	3800,0
	RAG _{R2}	Aceitável	0,0	1,2	1,3	2,4	0,0	485,7	3314,3	3800,0
	RAG _{R3}	Aceitável	0,0	1,2	1,3	2,4	0,0	480,7	3314,3	3795,0

Fonte: Experimentos computacionais

Tabela 12 – Resultados para os 100 exemplares da classe 10 – 15PDM

Métodos de resolução		Solução	Quantidade				Comprimento (u.c.)			
			Perda	Retalho	Aprov.	Total	Perda	Retalho	Aprov.	Total
Estratégias	1	Indesejável	2,6	1,1	1,7	5,4	64,5	225,0	8390,5	8680,0
	2	Indesejável	2,1	1,9	1,4	5,4	56,8	232,7	8390,5	8680,0
	3	Ideal	0,3	1,0	4,1	5,4	3,5	286,0	8390,5	8680,0
	4	Indesejável	2,6	1,6	1,2	5,3	66,3	223,2	8390,5	8680,0
	5	Aceitável	1,1	1,0	3,2	5,3	17,5	272,0	8390,5	8680,0
	5 Ref.	Ideal	0,0	1,0	4,7	5,7	0,0	1044,5	8390,5	9435,0
Heurísticas Construtivas	FFD _R	Aceitável	0,0	1,1	6,7	7,8	0,1	849,4	8390,5	9240,0
	Gulos _{AR}	Aceitável	0,0	1,2	6,7	7,8	0,0	854,5	8390,5	9245,0
Heurísticas Residuais	FFD _R	Aceitável	0,0	1,1	6,1	7,2	0,2	754,3	8390,5	9145,0
	Gulos _{AR}	Aceitável	0,0	1,1	6,1	7,2	0,0	764,5	8390,5	9155,0
	RAG _{R1}	Aceitável	0,0	1,3	3,4	4,7	0,0	579,5	8390,5	8970,0
	RAG _{R2}	Aceitável	0,0	1,3	3,4	4,7	0,0	579,5	8390,5	8970,0
	RAG _{R3}	Aceitável	0,0	1,3	3,5	4,7	0,0	604,5	8390,5	8995,0

Fonte: Experimentos computacionais

Tabela 13 – Resultados para os 100 exemplares da classe 11 – 15MDB

Métodos de resolução		Solução	Quantidade				Comprimento (u.c.)			
			Perda	Retalho	Aprov.	Total	Perda	Retalho	Aprov.	Total
Estratégias	1	Indesejável	2,9	1,0	1,1	5,1	98,3	234,4	7857,3	8190,0
	2	Indesejável	2,7	1,2	1,2	5,1	111,8	220,9	7857,3	8190,0
	3	Ideal	0,5	1,0	3,6	5,1	4,7	328,0	7857,3	8190,0
	4	Indesejável	3,0	1,2	1,0	5,2	136,5	186,2	7857,3	8180,0
	5	Aceitável	1,3	1,0	2,6	5,0	31,1	301,6	7857,3	8190,0
	5 Ref.	Ideal	0,0	1,0	4,0	5,0	0,0	977,7	7857,3	8835,0
Heurísticas Construtivas	FFD _R	Aceitável	0,0	1,2	6,2	7,4	0,2	842,5	7857,3	8700,0
	Gulos _{aR}	Aceitável	0,0	1,3	6,0	7,4	0,1	852,6	7857,3	8710,0
Heurísticas Residuais	FFD _R	Aceitável	0,0	1,2	6,1	7,4	0,2	857,5	7857,3	8715,0
	Gulos _{aR}	Aceitável	0,0	1,3	6,0	7,3	0,1	897,6	7857,3	8755,0
	RAG _{R1}	Aceitável	0,0	1,4	3,2	4,6	0,1	567,6	7857,3	8425,0
	RAG _{R2}	Aceitável	0,0	1,4	3,2	4,6	0,1	567,6	7857,3	8425,0
	RAG _{R3}	Aceitável	0,0	1,4	3,3	4,6	0,1	567,6	7857,3	8425,0

Fonte: Experimentos computacionais

Tabela 14 – Resultados para os 100 exemplares da classe 12 – 15MDM

Métodos de resolução		Solução	Quantidade				Comprimento (u.c.)			
			Perda	Retalho	Aprov.	Total	Perda	Retalho	Aprov.	Total
Estratégias	1	Indesejável	7,5	1,1	3,7	12,3	279,3	419,9	19815,8	20515,0
	2	Indesejável	7,6	1,8	2,9	12,3	342,3	351,9	19815,8	20510,0
	3	Aceitável	1,5	1,0	9,8	12,3	20,3	678,9	19815,8	20515,0
	4	Indesejável	8,3	1,7	2,5	12,4	391,6	297,6	19815,8	20505,0
	5	Indesejável	5,3	1,3	4,7	11,3	161,2	333,0	19815,8	20310,0
	5 Ref.	Ideal	0,0	1,0	10,5	11,5	0,0	844,2	19815,8	20660,0
Heurísticas Construtivas	FFD _R	Aceitável	0,3	1,2	12,6	14,0	2,7	1071,5	19815,8	20890,0
	Gulos _{aR}	Aceitável	0,1	1,3	12,8	14,1	0,5	1088,7	19815,8	20905,0
Heurísticas Residuais	FFD _R	Aceitável	0,0	1,3	11,6	12,9	0,2	819,0	19815,8	20635,0
	Gulos _{aR}	Aceitável	0,0	1,3	11,5	12,9	0,1	869,1	19815,8	20685,0
	RAG _{R1}	Aceitável	0,0	1,4	8,7	10,1	0,0	599,2	19815,8	20415,0
	RAG _{R2}	Aceitável	0,0	1,4	8,7	10,1	0,0	594,2	19815,8	20410,0
	RAG _{R3}	Aceitável	0,0	1,5	8,8	10,3	0,0	629,2	19815,8	20445,0

Fonte: Experimentos computacionais

4. Discussões

Buscamos com este trabalho determinar soluções inteiras para um Problema de Corte de Estoque com Aproveitamento de Sobras (PCES) por meio de um estudo computacional dos modelos matemáticos propostos por Pinto (2008). Exploramos também uma reformulação do modelo matemático da Estratégia 5, a qual denotamos por Estratégia 5 Reformulada (5R).

A eficácia dos modelos foi analisada pela comparação dos resultados com os resultados de heurísticas propostas por Cherri e outros (2009), nos quais procedimentos heurísticos clássicos da literatura (construtivos e residuais) que resolvem problemas de corte de estoque foram modificados com a finalidade de resolverem problemas de corte de estoque com sobras aproveitáveis. Para isto,

propomos um gerador aleatório de classes de exemplares, variando-se a quantidade de itens, o tamanho dos itens e/ou as quantidades demandadas, dando atenção especial a problemas com baixa demanda.

Com relação à identificação das melhores soluções, percebemos que, embora todos os métodos de resolução apresentem soluções factíveis, satisfatórias e pouco discrepantes em alguns casos, a escolha do melhor método de resolução para um PCES não é trivial, pois envolve a análise simultânea de diversos critérios. De acordo com os critérios utilizados para definir uma solução ideal, aceitável ou indesejada, conforme as classes vão crescendo em termos de dimensão e demanda dos exemplares, a concentração dos melhores resultados tende para a Estratégia 5R e para os procedimentos heurísticos, em particular para os residuais RAG_{R1} , RAG_{R2} e RAG_{R3} . De fato, embora para os exemplares da classe 5PDB as Estratégias 1, 2, 3, 4 e 5 apresentem um bom aproveitamento em relação ao total cortado, os resultados evidenciaram o contrário, à medida que analisamos as classes seguintes.

Em todas as classes estudadas os resultados da Estratégia 5R melhoram a superioridade já salientada, pois selecionam um número reduzido de barras, não geram perdas e concentram os retalhos em apenas uma barra.

Como perspectivas futuras de continuidade e melhoria deste trabalho, podemos citar:

- Uma variação dos modelos propostos por Pinto (2008), na tentativa de buscar soluções melhores que as já encontradas;
- Estender os modelos para uma abordagem por geração de colunas;
- Testar os métodos de resolução, por meio de exemplares com comprimentos e demandas maiores, e verificar como se comportam as soluções;
- Investigar, na literatura, trabalhos que tratam do problema de corte de estoque com aproveitamento de sobras para o caso bidimensional.

Abstract

A Cutting Stock Problem (CSP) basically consists of cut a set of larger parts (raw material) available in stock with the aim of produce smaller parts, optimizing a specific objective, which can minimize the amount of raw material to be cut, as well as the generated leftovers by the process or the cost associated to cut; maximize the profit, among others. In this context, the Cutting Stock Problem Using the Waste (CSPUW) focuses that question aiming at the better use of raw material, that is, use the waste in a future cutting process, as long as they offer conditions. What we seek, in this work, find full solutions to a CSPUW by means of computational studies of mathematical models proposed by Pinto (2008). We also explored a reformulation of the mathematical model of

Strategy 5, by Pinto (2008), which we call Reformulated Strategy 5 (5R). We analyzed the efficiency of the models, considering evaluation criteria established by Cherri et al (2009), by computational simulations realized in a set of classes of pieces randomly generated. The results show that, with the increase of classes in terms of extent and demand of pieces, the 5R strategy shows better results to heuristic procedure, specially the residual RAGR1, RAGR2 e RAGR3.

Key-words: cutting stock problem; exploited of heuristic waste; random generator; inner linear programming problem.

Referências

- ABUABARA, A. **Otimização no corte de tubos estruturais:** aplicação na indústria aeronáutica agrícola. 2006. 144 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Universidade de São Carlos, São Carlos, 2006.
- ABUABARA, A., MORABITO R., Modelos de programação inteira mista para o planejamento do corte unidimensional de tubos metálicos na indústria aeronáutica agrícola. **Gestão e Produção**, v. 15, set./dez. 2008. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0104-530X2008000300014>. Acesso em: 31 jan. 2015.
- CHERRI, A. C., ARENALES, N., YANASSE, H. H., The one dimensional cutting stock problems with usable leftover: A heuristic approach. **European Journal of Operational Research**, v. 196, maio/abr. 2009.
- CUI, Y., YANG, Y., A heuristic for the one-dimensional cutting stock problem with usable leftover. **European Journal of Operational Research**, v. 204, jul./out. 2010.
- DASH OPTIMIZATION, **Xpress-Mosel User Guide**, 2008.
- DYCKHOFF, H. A typology of cutting and packing problems. **European Journal Operational Research**, v. 44, 1990.
- GAREY, M. R., JOHNSON, D. S., **Computers and intractability:** a guide to the NP-completeness. W. H., Freeman, 1979.
- GAU, T., WÄSCHER, CUTGEN: A problem generator for the standard one-dimensional cutting stock problem. **European Journal Operational Research**, v. 84, 1995.
- GILMORE, P. C., GOMORY, R. E., A linear programming approach to the cutting stock problem – Part II. **Operations Research**, v. 11, nov./dez/ 1963. Disponível em: <<http://www.jstor.org/discover/10.2307/167827?sid=21105218882281&uid=3737664&uid=4&uid=2>> Acesso em 31 jan. 2015.
- GRADISAR, M., JESENKO, J., RESINOVIC, C., Optimization of roll cutting in clothing industry. **Computers & Operational Research**, v. 10 1997.
- GRADISAR, M., KLJAJIC, M., RESINOVIC, C., JESENKO, J., A sequential heuristic procedure for one-dimensional cutting. **European Journal of Operational Research**, v. 114, 1999.
- GRADISAR, M., RESINOVIC, C., KLJAJIC, M., A hybrid approach for optimization of one-dimensional cutting. **European Journal of Operational Research**, v. 119, 1999.
- GRADISAR, M., TRKMAN, P., A combined approach to the solution to the general one-dimensional cutting stock problem. **Computers & Operational Research**, v. 32, 2005.
- HOTO, R. S. V., MACULAN, N.; MARQUES, F., ARENALES, M. N., Um problema de corte com padrões compartimentados. **Pesquisa Operacional**, Rio de Janeiro, v. 23, n. 1, jan./abr. 2003. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/S0101-74382003000100013>>. Acesso em: 31 jan. 2015.

PINTO, T. S., **Uma proposta para resolver o problema de corte de estoque unidimensional com reaproveitamento de sobras por meio de dois objetivos**. 68 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

POLDI, K. C., ARENALES, M. N., Heuristics for the one-dimensional cutting stock problem with limited multiple stock lengths. **Computers and Operations Research**, v. 36, n. 6, jun./jun., 2009.

SINUANY-STERN, Z., WEINER I., The one dimensional cutting stock problem using two objectives. **Journal of Operations Research Society**, v. 45, 1994.

WÄSCHER, G., HAUßNER, H., SCHUMANN, H., An improved typology cutting and packing problems. **European Journal of Operational Research**, v. 183, set./dez. 2007.

Dados dos autores

Nome completo: **Eduardo Aparecido da Rosa Neto**

Filiação Institucional: Universidade Estadual de Londrina – UEL

Endereço completo para correspondência: Rua Eliane Alvin Dias, 344, Jardim Império do Sol, Londrina, PR, CEP: 86073-770

Telefone para contato: (43) 3304-4574

e-mail: eduardo.neto@ensinolivre.com.br

Nome completo: **Robinson Samuel Vieira Hoto**

Filiação Institucional: Universidade Estadual de Londrina – UEL

Endereço completo para correspondência: Universidade Estadual de Londrina – UEL, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática – SimuLab (Lab Simulação e Otimização Sistemas), Rodovia Celso Garcia Cid, km 380, 344, Campus Universitário, Londrina, PR, CEP: 86057-970

Telefone para contato: (43) 3371-4150

e-mail: hoto@uel.br