Universidade
Estadual de Londrina

ALTAIR SANTOS DE OLIVEIRA TOSTI

TAXAS DE DECAIMENTO PARA UM MODELO VISCOELÁSTICO DE PLACAS

Londrina
2015

ALTAIR SANTOS DE OLIVEIRA TOSTI

TAXAS DE DECAIMENTO PARA UM MODELO VISCOELÁSTICO DE PLACAS

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.
Orientador: Prof. Dr. Marcio A. Jorge da Silva.

Londrina
2015

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação -na-Publicação (CIP)

T716t Tosti, Altair Santos de Oliveira.

Taxas de decaimento para um modelo viscoelástico de placas / Altair Santos de Oliveira Tosti. – Londrina, 2015.

104 f. : il.

Orientador: Marcio Antônio Jorge da Silva.

Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2015.

Inclui Bibliografia.

1. Equações diferenciais - Soluções analíticas – Teses. 2. Equações viscoelásticas – Teses. 3. Método de Faedo-Galerkin – Teses. 4. Estabilidade Assintótica – Teses. I. Silva, Marcio Antonio Jorge. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

CDU 519.61-7

ALTAIR SANTOS DE OLIVEIRA TOSTI

TAXAS DE DECAIMENTO PARA UM MODELO VISCOELÁSTICO DE PLACAS

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Marcio A. Jorge da Silva.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva
Universidade Estadual de Londrina

Flávio Alexandre Falcão Nascimento

Prof. Dr. Flávio Alexandre Falcão Nascimento
Universidade Estadual do Ceará

Lfatori

Profa. Dra. Luci Harue Fatori
Universidade Estadual de Londrina

Vando Narciso

Prof. Dr. Vando Narciso
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

Londrina, 06 de Fevereiro de 2015.

Dedico este trabalho, in memorian, à minha mãe, Alcília Santos de Oliveira e ao "vô" Adalberto Alves de Lima.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a toda minha família pelo incentivo. Em especial, à minha tia Amair (minha segunda mãe), ao meu pai, aos meus irmãos Adriano, Angélica, Anne, Augusto e Hugo, aos meus avós, às tias de Londrina, aos tios Alcir e Aldecir e ao meu padrinho Sebastião. Eu não teria chegado até aqui se não os tivesse na minha vida, obrigado a todos por compreenderem minha ausência.

À minha namorada Carolina, essencial na minha vida, por todo apoio, carinho e pela compreensão.

Ao meu orientador, professor Marcio Antonio Jorge da Silva, pela paciência, compreensão, pelos conselhos e ensinamentos e por colaborar com minha formação.

Aos demais professores da graduação e da pós-graduação que foram essenciais na minha formação. Principalmente aos professores Albo, Angela Marta, Luci, Naresh, Paulo Natti, Ricardo e Robinson que, de alguma maneira, ou me orientaram ou me incentivaram.

Aos membros da banca examinadora, Flávio Alexandre Falcão Nascimento, Luci Harue Fatori e Vando Narciso, pelo tempo dispendido na leitura deste trabalho e pelas sugestões.

Aos meus amigos de graduação: Ademir, Giovana, Luis e Osmar.

A todos os colegas de pós-graduação, pelas conversas fiadas e por toda ajuda e suporte. Em especial, ao Robson Gaebler, que partiu cedo demais, e aos "parças" Alisson, Lucas Ruan, Luiz Gustavo, Maurício e Pedro.

Ao professor Christian, pelo incentivo desde o ensino médio.

Aos amigos de São Paulo: Rodrigo, Walquíria e "Zé".

Aos companheiros de Cornélio Procópio: Clayton, Marlon, Monique e Taylon.

Aos "manolos" do 8C: Bruno, Enio e Wilson.

Aos funcionários (Eduardo, Paulo e Verginia) e professores do Departamento de Matemática da UEL por me acolherem como colega de trabalho.

Enfim, agradeço a todos que torceram por mim. Muito obrigado!

À CAPES, pelo apoio financeiro.

"Se você não puder se destacar pelo talento, vença pelo esforço."
Dave Weinbaum

TOSTI, Altair Santos de Oliveira. **Taxas de decaimento para um modelo viscoelástico de placas**. 2015. 104. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

RESUMO

Neste trabalho estudamos questões relativas a existência, unicidade, dependência contínua e taxas de decaimento de soluções para uma classe de equações viscoelásticas de placas. A demonstração do resultado de existência de soluções é feita via método de Faedo-Galerkin. Provamos a estabilidade geral da energia por meio de multiplicadores e energia perturbada. O último capítulo apresenta alguns resultados teóricos em análise funcional e equações diferenciais que foram utilizados nesta dissertação.

Palavras-chave: Equações de placas. Equações viscoelásticas. Existência e unicidade. Decaimento geral de energia. Estabilidade assintótica.

TOSTI, Altair Santos de Oliveira. **Decay Rates for a Model of Viscoelastic Plates**. 2015. 104. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

ABSTRACT

In this work we study the existence, uniqueness, continuous dependence and decay rates of solutions to a class of viscoelastic plate equations. The existence of solutions is given by Faedo-Galerkin method. We proof the general stability of energy by using multipliers and perturbed energy. The last chapter brings up some theoretical results on functional analysis and differential equations which are used in this dissertation.

Keywords: Plate equations. Viscoelastic equations. Existence and uniqueness. General decay of energy. Asymptotic stability.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS

$|\Omega|$:= medida de Lebesgue de $\Omega \subset \mathbb{R}^N$;

$\partial\Omega$:= fronteira de $\Omega \subset \mathbb{R}^N$;

$\hookrightarrow$ inclusão contínua;

$\overset{c}{\hookrightarrow}$ inclusão compacta;

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ dualidade;

$(X, ||\cdot||_X)$ espaço de Banach;

$\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$;

$\Delta u = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$;

$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$;

$C(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ é contínua}\}$;

$C^1(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ é diferenciável e sua derivada é contínua}\}$;

$\mathcal{D}(\Omega)$:= espaço das funções teste;

$L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ é mensurável e } \displaystyle\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\right\}$;

$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ é mensurável e } |u(x)| \leq K \text{ q.s. em } \Omega\}$;

$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}$;

$H_0^m(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^m(\Omega)}$;

$L^p(0,T;X) = \left\{u : (0,T) \to X \mid u \text{ é mensurável e } \displaystyle\int_0^T ||u(t)||_X^p dt < \infty\right\}$;

$L^\infty(0,T;X) = \{u : (0,T) \to X \mid u \text{ é mensurável e } ||u(t)||_X \leq K \text{ q.s. em } (0,T)\}$;

$C([0,T],X) = \{u : [0,T] \to X \mid u \text{ é contínua de } [0,T] \text{ em } X\}$;

$\mathcal{L}(X,Y) = \{T : X \to Y \mid T \text{ é linear e contínua}\}$;

$X' = \mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ dual de X;

$[L^p(\Omega)]' \cong L^q(\Omega),\ \ 1 \leq p < \infty,\ \ \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$;

$[H_0^m(\Omega)]' \cong H^{-m}(\Omega), \;\; m \in \mathbb{N};$

$[L^p(0,T,X)]' \cong L^q\left(0,T,X'\right), \;\; 1 \leq p < \infty;$

$\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega), \mathbb{R});$

$\mathcal{D}'(0,T;X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T), X);$

$\rightarrow$ convergência forte;

$\rightharpoonup$ convergência fraca;

$\overset{*}{\rightharpoonup}$ convergência fraca estrela;

$$(g * u)(t) = \int_0^t g(t-s)u(x,s)ds;$$

$$(g\Box u)(t) = \int_0^t g(t-s)\int_\Omega |u(x,t)-u(x,s)|^2 dxds;$$

$$||u||_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{1/p}, \qquad ||u||_\infty = \operatorname*{sup\,ess}_{x\in\Omega} |u(x)|;$$

$$||u||_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T ||u(t)||_X^p dt\right)^{1/p}, \qquad ||u||_{L^\infty(0,T;X)} = \operatorname*{sup\,ess}_{t\in(0,T)} ||u(t)||_X.$$

1 INTRODUÇÃO

No presente trabalho abordaremos questões relativas a existência, unicidade e dependência contínua de soluções e o comportamento assintótico de energia associada a um problema viscoelásticos de placas, anteriormente abordado em Cavalcanti et al. [6]. Um trabalho pioneiro para sistemas viscoelásticos foi introduzido por Dafermos [10], o qual mostrou que a solução para o sistema viscoelástico tende para zero ao longo do tempo, mas sem fornecer a taxa de decaimento explicitamente. Já em [6] os autores mostraram que o sistema é exponencialmente estável quando submetido às dissipações friccional (dissipação fraca) e viscoelástica (termo de memória) com núcleo da memória decaindo de forma exponencial.

Recentemente, vários trabalhos abordaram equações viscoelásticas com dissipação apenas dado pelo termo de memória, como por exemplo em Messaoudi [18, 19]. Em tais trabalhos o intuito foi exibir taxas de decaimento para a energia correspondente ao problema conforme a taxa de amortecimento do núcleo da memória. Tais taxas de decaimento constituem um decaimento geral de energia, incluindo decaimentos como exponencial e polinomial, entre outros. Tal resultado já era previamente conhecido, como pode-se ver em Barreto et al. [21], onde mostrou-se que a taxa de decaimento da solução depende da taxa de decaimento do núcleo da memória.

O principal objetivo deste trabalho é generalizar os resultados apresentados em [6] em domínios limitados. Mais precisamente, serão apresentados resultados sobre a boa colocação e o comportamento assintótico para a seguinte equação viscoelástica da placa

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)\, ds + M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right) u_t + f(u) = 0 \text{ em } \Omega \times (0,\infty), \tag{1.1}$$

com condições de fronteira

$$u = \Delta u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times [0,\infty), \tag{1.2}$$

ou

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times [0,\infty), \tag{1.3}$$

e com as seguintes condições iniciais

$$u(\cdot,0) = u_0, \;\; u_t(\cdot,0) = u_1 \text{ em } \Omega, \tag{1.4}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ bem regular e ν é o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$. Assumiremos hipóteses menos restritivas sobre as funções g e M, determinando qual entre estas mais influencia o decaimento e, também, considerando uma perturbação não linear $f(u)$.

Em [6] os autores estabeleceram a existência e unicidade de soluções fracas para (1.1) com $f \equiv 0$ e condição de fronteira (1.3), considerando hipóteses sobre g, g' e g'' e com $M \in C^1([0,\infty))$ tal que $M(s) \geq 0$ para todo $s \in [0,\infty)$. Além disso, para o decaimento exponencial de energia foi assumido que o *núcleo da memória* g é da forma $g(t) \approx e^{-kt}, t \geq 0$, para algum $k > 0$, e ainda que

$$M(s) \geq \lambda_0 > 0, \ \forall\, s \geq 0, \tag{1.5}$$

isto é, o termo $M(\|\nabla u(t)\|_2^2)u_t$ representa uma dissipação friccional que atua na equação da placa. Já no trabalho de dissertação [5] foi mostrado resultados análogos com respeito da existência e decaimento de energia para a equação (1.1), mas com condição de fronteira (1.2) e considerando condições sobre g, g' (e condição de decaimento mais geral), $M \geq 0$ e com $f \equiv 0$, mas sem a impor a condição (1.5). Isto permite afirmar que o termo de memória do problema (1.1)-(1.4) é suficiente para estabilizar o funcional energia.

Mediante aos trabalhos supracitados, os Capítulos 2 e 3 desta dissertação têm o propósito de generalizar todos os resultados obtidos em [6] em domínios limitados, considerando as duas condições de fronteira (1.2)-(1.3) ao mesmo tempo, hipóteses menos restritivas sobre as funções g e M e levando em consideração uma perturbação não linear $f(u)$. Neste caso, para determinadas funções não lineares $f(u)$ o decaimento de energia também dependerá dos dados iniciais.

Esta dissertação está organizada como segue. No Capítulo 2, determinamos a existência e unicidade de solução para (1.1)-(1.4) via método de Faedo-Galerkin, assim como feito em [2, 5, 6, 14]. Primeiro provamos a existência e unicidade de solução forte e, em seguida, a existência de solução fraca é dada por argumentos de densidade. No Capítulo 3, determinamos o decaimento geral do funcional energia associado ao problema (1.1)-(1.4). Para tanto, usamos as ideias introduzidas em [18, 19] primeiramente aplicadas em equações lineares viscoelásticas de segunda ordem. Finalmente, no Capítulo 4 ressaltamos as contribuições deste trabalho e no Capítulo 5 resumimos alguns resultados em análise funcional para tornar esta dissertação mais autossuficiente possível.

2 BOA COLOCAÇÃO

2.1 O PROBLEMA

O objetivo deste capítulo é estudar a existência e unicidade de soluções forte e fraca da seguinte equação

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds + M(\|\nabla u(t)\|_2^2)u_t + f(u) = 0 \text{ em } \Omega \times (0,\infty), \quad (2.1)$$

sendo Ω um conjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ natural, com fronteira $\partial\Omega$ bem regular, onde $\Delta^2 = \Delta(\Delta)$ denota o operador biharmônico, g uma função real chamada de *núcleo da memória*, M e $f(u)$ funções não lineares e $\|\cdot\|_2$ a norma em $L^2(\Omega)$. Consideraremos as condições de fronteira

$$u = \Delta u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times [0,\infty), \quad (2.2)$$

ou

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times [0,\infty), \quad (2.3)$$

onde ν é vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$, e condições iniciais

$$u(\cdot,0) = u_0, \quad u_t(\cdot,0) = u_1 \text{ em } \Omega. \quad (2.4)$$

Definamos, inicialmente, os espaços de Hilbert que serão utilizados no decorrer deste trabalho: $\mathcal{V}_0 := L^2(\Omega),\ \mathcal{V}_1 := H_0^1(\Omega)$,

$$\mathcal{V}_2 := \begin{cases} H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \text{ sob a condição (2.2)} \\ H_0^2(\Omega), \text{ sob a condição (2.3)} \end{cases},$$

e

$$\mathcal{V}_4 := \begin{cases} u \in H^4(\Omega);\ u = \Delta u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \text{ sob a condição (2.2)} \\ H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega), \text{ sob a condição (2.3)} \end{cases},$$

munidos com os seguintes produtos internos e normas, respectivamente,

$$\begin{aligned}
(u,v) &= \int_\Omega u(x)v(x)dx \quad \text{e} \quad \|u\|_2 = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx\right)^{1/2}, \\
(u,v)_{\mathcal{V}_1} &= (\nabla u, \nabla v) \quad \text{e} \quad \|u\|_{\mathcal{V}_1} = \|\nabla u\|_2, \\
(u,v)_{\mathcal{V}_2} &= (\Delta u, \Delta v) \quad \text{e} \quad \|u\|_{\mathcal{V}_2} = \|\Delta u\|_2, \\
(u,v)_{\mathcal{V}_4} &= (\Delta^2 u, \Delta^2 v) \quad \text{e} \quad \|u\|_{\mathcal{V}_4} = \|\Delta^2 u\|_2.
\end{aligned}$$

Todas as imersões utilizadas no decorrer deste trabalho são garantidas pelos Teoremas 5.10, 5.11 e 5.12. Em particular, temos as seguintes imersões:

- $\mathcal{V}_1 \hookrightarrow \mathcal{V}_0$, sendo $\mu_0 > 0$ a constante de imersão tal que $\mu_0 \|u\|_2^2 \leq \|\nabla u\|_2^2$;
- $\mathcal{V}_2 \overset{c}{\hookrightarrow} \mathcal{V}_0$, sendo $\mu_1 > 0$ a constante de imersão tal que $\mu_1 \|u\|_2^2 \leq \|\Delta u\|_2^2$;
- $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_1$, onde $\mu_2 > 0$ é a constante de imersão de modo que $\mu_2 \|\nabla u\|_2^2 \leq \|\Delta u\|_2^2$
- $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$, sendo $\mu_\rho > 0$ tal que $\|u\|_{\rho+2} \leq \mu_\rho \|\Delta u\|_2$.

Serão considerados ainda os seguintes espaços de fase

$$\mathcal{H} := \mathcal{V}_4 \times \mathcal{V}_2 \ \text{ e } \ \mathcal{V} := \mathcal{V}_2 \times \mathcal{V}_0,$$

que também são espaços de Hilbert, munidos com as seguintes normas, respectivamente,

$$\|(u,v)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\Delta^2 u\|_2^2 + \|\Delta v\|_2^2 \ \text{ e } \ \|(u,v)\|_{\mathcal{V}}^2 = \|\Delta u\|_2^2 + \|v\|_2^2,$$

No que segue, apresentaremos as hipóteses sobre g, M e $f(u)$.

Núcleo da memória g. Suponhamos que $g : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ é uma função de classe C^1 tal que

$$l := 1 - \int_0^\infty g(s)ds > 0 \ \text{ e } \ g'(t) \leq 0, \ \ \forall\, t \geq 0. \tag{2.5}$$

Termo não local M. Suponhamos que $M : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, com $M \in C^1$, tal que

$$M(s) \geq 0, \ \ \forall\, s \geq 0. \tag{2.6}$$

Perturbação não linear $f(u)$. Consideraremos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 de tal forma que

$$f(0) = 0 \text{ e } |f'(s)| \leq k_1(1 + |s|^{\rho/2}), \ \ \forall\, s \in \mathbb{R}, \tag{2.7}$$

sendo $k_1 > 0$ e ρ satisfazendo

$$\rho > 0, \text{ se } 1 \leq N \leq 4 \text{ e } 0 < \rho < \frac{8}{N-4}, \text{ se } N \geq 5. \tag{2.8}$$

Suponhamos ainda que

$$\frac{-l\beta}{2}|s|^2 \leq \widehat{f}(s) := \int_0^s f(\tau)d\tau \leq f(s)s + \frac{l\beta}{2}|s|^2, \ \forall\, s \in \mathbb{R}, \tag{2.9}$$

com $\beta \in [0, \mu_1)$.

Observação 2.1. Exemplos de funções satisfazendo as hipóteses (2.7) e (2.9) serão expostos na Seção 2.4.

Observação 2.2. Note que de (2.7), pelo Teorema do Valor Médio segue que

$$|f(s_1) - f(s_2)| \leq k_2(1 + |s_1|^{\rho/2} + |s_2|^{\rho/2})|s_1 - s_2|, \; \forall \; s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \tag{2.10}$$

em que $k_2 > 0$.

Note ainda que

$$\beta_1 := l\left(1 - \frac{\beta}{\mu_1}\right) > 0. \tag{2.11}$$

Observação 2.3. Fazendo uso do Teorema 5.10 e de (2.8), segue que $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$, qualquer que seja a dimensão N.

Tendo estes espaços, hipóteses e observações em mente, nas próximas duas seções apresentaremos os resultados sobre existência e unicidade de soluções forte e fraca do problema (2.1)-(2.4). No decorrer deste trabalho, $C > 0$ denotará várias constantes que dependem dos dados iniciais.

2.2 Existência e Unicidade de Solução Forte

Nesta seção estabeleceremos a existência e unicidade de solução forte para o problema (2.1)-(2.4) via método de Faedo-Galerkin.

Definição 2.1. *Uma função $u : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ na classe*

$$u \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_4), \quad u_t \in L^\infty([0,T];\mathcal{V}_2), \quad u_{tt} \in L^\infty([0,T];\mathcal{V}_0), \tag{2.12}$$

*satisfazendo (2.1) quase sempre em $\Omega \times (0,T)$ e as condições iniciais (2.4) quase sempre sobre Ω é dita **solução forte** do problema (2.1)-(2.4).*

Teorema 2.2. *Seja $T > 0$ arbitrário e considere as hipóteses (2.5)-(2.9). Se $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$, então existe uma única solução forte para o problema (2.1)-(2.4). Além disso, tal solução depende continuamente dos dados iniciais em $\mathcal{V}$. Mais precisamente, se $z^1 = (u, u_t)$, $z^2 = (v, v_t)$ são duas soluções do problema (2.1)-(2.4) correspondentes aos dados iniciais $z_0^1 = (u_0, u_1)$, $z_0^2 = (v_0, v_1) \in \mathcal{H}$, respectivamente, então existe uma constante $C_T = C_T(T, \|z_0^1\|_{\mathcal{V}}, \|z_0^2\|_{\mathcal{V}})$ tal que*

$$\|z^1(t) - z^2(t)\|_{\mathcal{V}} \leq C_T \|z_0^1 - z_0^2\|_{\mathcal{V}}, \;\; \forall \;\; t \in [0,T]. \tag{2.13}$$

Demonstração. A demonstração de tal resultado será dividida em várias etapas.

Problema Aproximado: Seja $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma base de $\mathcal{V}_4$ dada por autofunções do problema

$$\begin{cases} \Delta^2 w = \lambda w \;\text{ em }\; \Omega, \\ w = \Delta w = 0 \;\text{ ou }\; w = \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \;\text{ sobre }\; \partial\Omega, \end{cases}$$

tal que $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ seja ortogonal em $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ e $\mathcal{V}_4$ e seja ortonormal $\mathcal{V}_0$. Denotando por $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ a sequência de autovalores correspondentes, temos

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_j \leq \cdots \text{ com } \lambda_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

e

$$\begin{cases} \Delta^2 w_j = \lambda_j w_j \text{ em } \Omega, \\ w_j = \Delta w_j = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.14}$$

sob a condição (2.2), ou

$$\begin{cases} \Delta^2 w_j = \lambda_j w_j \text{ em } \Omega, \\ w_j = \dfrac{\partial w_j}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.15}$$

sob a condição (2.3), com $j \in \mathbb{N}$.

Consideremos $\mathcal{W}_m = [w_1, \ldots, w_m]$ o subespaço gerado pelas m primeiras autofunções. Procuraremos por soluções da forma

$$u^m(t) = \sum_{j=1}^{m} y_{jm}(t) w_j \text{ em } \mathcal{W}_m,\ t \in [0,T] \tag{2.16}$$

do seguinte problema aproximado

$$\begin{aligned} (u_{tt}^m(t), w_j) + (\Delta u^m(t), \Delta w_j) - \int_0^t g(t-s)(\Delta u^m(s), \Delta w_j) ds \\ + M\left(\|\nabla u^m(t)\|_2^2\right)(u_t^m(t), w_j) + (f(u^m(t)), w_j) = 0, \end{aligned} \tag{2.17}$$

sob condições iniciais

$$u^m(0) = u_0^m \text{ e } u_t^m(0) = u_1^m, \tag{2.18}$$

as quais

$$u_0^m \longrightarrow u_0 \text{ em } \mathcal{V}_4 \text{ e } u_1^m \longrightarrow u_1 \text{ em } \mathcal{V}_2, \tag{2.19}$$

quando $m \longrightarrow \infty$. Observe que, por (2.16) e (2.18),

$$\begin{aligned} u_0^m = u^m(0) = \sum_{j=1}^{m} y_{jm}(0) w_j = \sum_{j=1}^{m} (u_0^m, w_j) w_j, \\ u_1^m = u_t^m(0) = \sum_{j=1}^{m} y'_{jm}(0) w_j = \sum_{j=1}^{m} (u_1^m, w_j) w_j. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Além disso,

$$(u_{tt}^m(t), w_j) = \left(\sum_{i=1}^{m} y''_{im}(t) w_i, w_j \right) = \sum_{i=1}^{m} y''_{im}(t)(w_i, w_j) = y''_{jm}(t),$$

$$(\Delta u^m(t), \Delta w_j) = \left(\sum_{i=1}^{m} y_{im}(t)\Delta w_i, \Delta w_j\right) = \sum_{i=1}^{m} y_{im}(t)(\Delta w_i, \Delta w_j) = \lambda_j y_{jm}(t),$$

$$\|\nabla u^m(t)\|_2^2 = \left\|\nabla\left(\sum_{i=1}^{m} y_{im}(t)w_i\right)\right\|_2^2 = \left\|\sum_{i=1}^{m} y_{im}(t)\nabla w_i\right\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} y_{im}^2(t)\|\nabla w_i\|_2^2,$$

$$(u_t^m(t), w_j) = \left(\sum_{i=1}^{m} y'_{im}(t)w_i, w_j\right) = \sum_{i=1}^{m} y'_{im}(t)(w_i, w_j) = y'_{jm}(t).$$

Deste modo, podemos reescrever (2.17)-(2.18) como o seguinte sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (E.D.O.'s) de segunda ordem

$$\left\{\begin{array}{l} y''_{jm}(t) + \lambda_j y_{jm}(t) - \lambda_j \displaystyle\int_0^t g(t-s)y_{jm}(s)\,ds \\ \qquad\qquad +M\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_{im}^2(t)\|\nabla w_i\|_2^2\right) y'_{jm}(t) + f(y_{jm}(t)) = 0, \\ y_{jm}(0) = (u_0^m, w_j),\ y'_{jm}(0) = (u_1^m, w_j),\ j = 1, \cdots, m, \end{array}\right. \tag{2.21}$$

sendo

$$f(y_{jm}(t)) = \left(f\left(\sum_{i=1}^{m} y_{im}(t)w_i\right), w_j\right),$$

com $j = 1, \cdots, m$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m}(u_0^m, w_j)w_j \to u_0 \text{ em } \mathcal{V}_4, \\ &\sum_{j=1}^{m}(u_1^m, w_j)w_j \to u_1 \text{ em } \mathcal{V}_2, \end{aligned} \tag{2.22}$$

para $m \longrightarrow \infty$.

Provaremos que o sistema de E.D.O's (2.21) possui ao menos uma solução local em algum intervalo $[0, t_m)$, com $t_m < T$. Reescrevendo o sistema (2.21) sob a forma matricial, obtemos

$$\overbrace{\begin{bmatrix} y''_{1m}(t) \\ \vdots \\ y''_{mm}(t) \end{bmatrix}}^{Y''(t)} = -\overbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix}}^{C_1}\overbrace{\begin{bmatrix} y_{1m}(t) \\ \vdots \\ y_{mm}(t) \end{bmatrix}}^{Y(t)} + \overbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix}}^{C_1}\begin{bmatrix} \int_0^t g(t-s)y_{1m}(s)ds \\ \vdots \\ \int_0^t g(t-s)y_{mm}(s)ds \end{bmatrix}$$

$$-\underbrace{\begin{bmatrix} M\left(\sum_{i=1}^m y_{im}^2(t)\|\nabla w_i\|_2^2\right) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & M\left(\sum_{i=1}^m y_{im}^2(t)\|\nabla w_i\|_2^2\right) \end{bmatrix}}_{G(Y(t))}\begin{bmatrix} y'_{1m}(t) \\ \vdots \\ y'_{mm}(t) \end{bmatrix}$$

$$-\underbrace{\begin{bmatrix} f(y_{1m}(t)) \\ \vdots \\ f(y_{mm}(t)) \end{bmatrix}}_{F(Y(t))},$$

$$\begin{bmatrix} y_{1m}(0) \\ \vdots \\ y_{mm}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_0^m, w_1) \\ \vdots \\ (u_0^m, w_m) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y'_{1m}(0) \\ \vdots \\ y'_{mm}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_1^m, w_1) \\ \vdots \\ (u_1^m, w_m) \end{bmatrix}.$$

Podemos, ainda, reduzir nossos estudos ao seguinte sistema não linear de E.D.O.'s,

$$Y''(t) = C_1\left(-Y(t) + \int_0^t g(t-s)Y(s)ds\right) - G(Y(t))Y'(t) + F(Y(t)), \tag{2.23}$$

com condições iniciais

$$Y(0) = Y_0, \quad Y'(0) = Y_1, \tag{2.24}$$

sendo

$$Y_0 = \begin{bmatrix} (u_0^m, w_1) \\ \vdots \\ (u_0^m, w_m) \end{bmatrix} \text{ e } Y_1 = \begin{bmatrix} (u_1^m, w_1) \\ \vdots \\ (u_1^m, w_m) \end{bmatrix}.$$

Definindo

$$X(t) = Y'(t) \text{ e } Z(t) = \begin{bmatrix} Y(t) \\ X(t) \end{bmatrix},$$

por (2.23) obtemos

$$Z'(t) = \begin{bmatrix} Y'(t) \\ X'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(t) \\ C_1 \left(-Y(t) + \int_0^t g(t-s)Y(s)ds \right) - G(Y(t))Y'(t) + F(Y(t)) \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ -C_1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{C}} \cdot \begin{bmatrix} Y(t) \\ X(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ C_1 \int_0^t g(t-s)Y(s)ds - G(Y(t))X(t) + F(Y(t)) \end{bmatrix}}_{\varphi(t,Z(t))}.$$

Com isso em vista, podemos reescrever o sistema (2.23)-(2.24) como o seguinte Problema de Valor Inicial (P.V.I.) de primeira ordem

$$\begin{cases} Z'(t) = \mathcal{C}Z(t) + \varphi(t, Z(t)), \quad 0 < t \leq T, \\ Z(0) = Z_0. \end{cases} \tag{2.25}$$

Com o intuito de aplicar o Teorema de Carathéodory (ver Apêndice, Teorema 5.25), em (2.25), mostraremos que a função dada por

$$\begin{aligned} h : [0, T] \times \mathbb{R}^{2m} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2m} \\ (t, Z) &\longmapsto h(t, Z) = \mathcal{C}Z + \varphi(t, Z) \end{aligned}$$

satisfaz as condições de tal resultado. Com efeito:

- *Primeira Condição*: h é mensurável em relação a variável t, para cada Z fixado.

  De fato, observe que para cada $t \in [0, T]$, g é contínua e, por conseguinte, mensurável. Deste modo, $h(\cdot, Z)$ é mensurável.

- *Segunda Condição*: h é contínua em relação a Z, para cada t fixado.

  Com efeito, para todo t fixado, a aplicação $h(t, Z)$ é contínua em Z, pois a continuidade de $\varphi(t, Z)$ provém do fato de que, por hipótese, $g, M \in C^1(\mathbb{R}^+)$ e $f \in C^1(\mathbb{R})$ e, também, temos que $Z \mapsto \mathcal{C}Z$ é contínua.

- *Terceira Condição*: Dado um retângulo compacto $K \subset [0, T] \times \mathbb{R}^{2m}$, existe uma função real m_K Lebesgue-integrável tal que

  $$\|h(t, Z)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq m_K(t), \ \forall \ (t, Z) \in K.$$

  De fato, pela continuidade de $\mathcal{C}$ e φ em $\mathbb{R}^{2m}$, temos que existem constantes $M_{K,1}$ e $M_{K,2}$

tais que, para cada $(t, Z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{2m}$,

$$\begin{aligned}\|h(t, Z)\|_{\mathbb{R}^{2m}} &\leq \|\mathcal{C}Z\|_{\mathbb{R}^{2m}} + \|\varphi(t, Z)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \\ &\leq \|\mathcal{C}\|_{\mathbb{R}^{2m}}\|Z\|_{\mathbb{R}^{2m}} + \|\varphi(t, Z)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \\ &\leq M_{K,1} + M_{K,2}.\end{aligned}$$

Definindo $m_K(t) := M_{K,1} + M_{K,2}$, para cada $t \in [0, T]$, segue que

$$\|h(t, Z)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq m_K(t),\ \forall\ (t, Z) \in K.$$

Pelo exposto acima, todas as condições do Teorema 5.25 são satisfeitas por h. Logo, existe uma solução local $Z(t)$ para o sistema dado em (2.25) em algum intervalo $[0, t_m)$, com $0 < t_m \leq T$, tal que $Z(t)$ é absolutamente contínua e $Z'(t)$ existe quase sempre em $[0, t_m)$.

Assim o sistema (2.23)-(2.24) tem solução local $Y(t)$ no mesmo intervalo $(0, t_m)$ e as funções $Y(t)$ e $Y'(t)$ são absolutamente contínuas com $Y''(t)$ existindo quase sempre em $[0, t_m)$. Consequentemente as funções $y_{jm}(t)$, com $j = 1, ..., m$, são soluções locais do sistema (2.21) em $[0, t_m)$, como queríamos.

Portanto, o problema aproximado (2.17) possui uma solução local $u^m(t)$, com $m \in \mathbb{N}$, em $[0, t_m)$, da forma (2.16), com $u_t^m(t)$ absolutamente contínua e $u_{tt}^m(t)$ existindo quase sempre em $[0, t_m)$.

Estimativas a priori: No que segue, faremos estimativas com o intuito de prolongar a solução aproximada u^m para todo intervalo $[0, T]$ e passar o limite no problema aproximado.

• *Estimativa a priori I*: Multiplicando a equação aproximada (2.17) por $y'_{jm}(t)$ e somando de $j = 1$ até m, obtemos

$$\begin{aligned}(u_{tt}^m(t), u_t^m(t)) + (\Delta u^m(t), \Delta u_t^m(t)) - \int_0^t g(t-s)(\Delta u^m(s), \Delta u_t^m(t))ds \\ +M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(u_t^m(t), u_t^m(t)) + (f(u^m(t)), u_t^m(t)) = 0,\end{aligned} \tag{2.26}$$

quase sempre em $[0, t_m)$, com $t_m \leq T$, sendo

$$u_t^m(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{j=1}^m y_{jm}(t)w_j\right) = \sum_{j=1}^m y'_{jm}(t)w_j.$$

Afirmamos que são válidas as seguintes identidades

$$
\begin{aligned}
(u_{tt}^m(t), u_t^m(t)) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t^m(t)\|_2^2,\\
(\Delta u^m(t), \Delta u_t^m(t)) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u^m(t)\|_2^2, \qquad (2.27)\\
(f(u^m(t)), u_t^m(t)) &= \frac{d}{dt}\int_\Omega \widehat{f}(u^m(t))dx,
\end{aligned}
$$

em $\mathcal{D}'(0,t_m)$, sendo $\widehat{f}$ definida como em (2.9). De fato, dada função teste $\theta \in \mathcal{D}(0,t_m)$, temos

$$
\begin{aligned}
\langle (u_{tt}^m(t), u_t^m(t)), \theta\rangle &= \left\langle \int_\Omega u_{tt}^m(t) u_t^m(t)\, dx, \theta \right\rangle\\
&= \int_0^{t_m}\int_\Omega u_{tt}^m(t)u_t^m(t)\theta(t)dxdt\\
&= \int_\Omega \int_0^{t_m} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_t^m(t))^2\theta(t)dtdx\\
&= \int_\Omega \left[\frac{1}{2}(u_t^m(t))^2\theta(t)\Big|_0^{t_m} - \int_0^{t_m}\frac{1}{2}(u_t^m(t))^2\theta'(t)\,dt\right]dx\\
&= -\int_0^{t_m}\int_\Omega \frac{1}{2}(u_t^m(t))^2\theta'(t)dxdt\\
&= -\left\langle \frac{1}{2}\|u_t^m(t)\|_2^2, \theta'\right\rangle\\
&= \left\langle \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t^m(t)\|_2^2, \theta\right\rangle.
\end{aligned}
$$

Isto prova que

$$
(u_{tt}^m(t), u_t^m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t^m(t)\|_2^2.
$$

$$\begin{aligned}
\langle(\Delta u^m(t), \Delta u_t^m(t)), \theta\rangle &= \left\langle \int_\Omega \Delta u^m(t)\Delta u_t^m(t)dx, \theta \right\rangle \\
&= \int_0^{t_m}\int_\Omega \Delta u^m(t)\Delta u_t^m(t)\theta(t)dxdt \\
&= \int_\Omega \int_0^{t_m} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\Delta u^m(t))^2\theta(t)dtdx \\
&= \int_\Omega \left[\frac{1}{2}(\Delta u^m(t))^2\theta(t)\Big|_0^{t_m} - \int_0^{t_m}\frac{1}{2}(\Delta u^m(t))^2\theta'(t)dt\right]dx \\
&= -\int_0^{t_m}\int_\Omega \frac{1}{2}(\Delta u^m(t))^2\theta'(t)dxdt \\
&= -\left\langle \frac{1}{2}\|\Delta u^m(t)\|_2^2, \theta' \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u^m(t)\|_2^2, \theta \right\rangle.
\end{aligned}$$

O que prova que

$$(\Delta u^m(t), \Delta u_t^m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u^m(t)\|_2^2.$$

Fazendo uso da Regra da Cadeia,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \widehat{f}(u^m(t))dx = \int_\Omega \frac{d}{dt}\widehat{f}(u^m(t))dx = \int_\Omega f(u^m(t))u_t^m(t)dx = (f(u^m(t)), u_t^m(t)).$$

Note também que é válida a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}
\int_0^t g(t-s)(\Delta u^m(s), \Delta u_t^m(t))ds = &-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{(g\Box\Delta u^m)(t) - \left(\int_0^t g(s)ds\right)\|\Delta u^m(t)\|_2^2\right\} \\
&+\frac{1}{2}(g'\Box\Delta u^m)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\Delta u^m(t)\|_2^2. \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

Com efeito, por definição, temos que

$$(g\Box\Delta u^m)(t) = \int_0^t g(t-s)\|\Delta u^m(t) - \Delta u^m(s)\|_2^2 ds,$$

Diferenciando, segue pela Regra de Leibniz que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(g\Box\Delta u^m)(t) = \quad &\int_0^t g'(t-s)\|\Delta u^m(t) - \Delta u^m(s)\|_2^2 ds + \int_0^t g(t-s)\frac{d}{dt}(\Delta u^m(t), \Delta u^m(t))ds \\
&-2\int_0^t g(t-s)(\Delta u^m(s), \Delta u_t^m(t))ds.
\end{aligned} \qquad (2.29)$$

Por outro lado, pela Regra de Leibniz,

$$\int_0^t g(\tau)\frac{d}{dt}(\Delta u^m(t),\Delta u^m(t))d\tau = \frac{d}{dt}\left\{\left(\int_0^t g(\tau)d\tau\right)\|\Delta u^m(t)\|_2^2\right\} - g(t)\|\Delta u^m(t)\|_2^2.$$

Logo, podemos reescrever (2.29) como

$$\begin{aligned}\int_0^t g(t-s)(\Delta u^m(s),\Delta u_t^m(t))ds = &-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{(g\Box\Delta u^m)(t) - \left(\int_0^t g(\tau)d\tau\right)\|\Delta u^m(t)\|_2^2\right\}\\ &+\frac{1}{2}(g'\Box\Delta u^m)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\Delta u^m(t)\|_2^2,\end{aligned}$$

o que mostra o desejado.

Substituindo (2.27) e (2.28) em (2.26), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u^m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\,\Box\,\Delta u^m)(t) + \frac{1}{2}g(t)\|\Delta u^m(t)\|_2^2&\\ -\frac{1}{2}(g'\Box\Delta u^m)(t) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left(\int_0^t g(s)ds\right)\|\Delta u^m(t)\|_2^2\right\}&\\ +M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)\|u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{d}{dt}\int_\Omega \widehat{f}(u^m(t))dx = 0,&\end{aligned} \tag{2.30}$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt}E^m(t) = \frac{1}{2}(g'\,\Box\,\Delta u^m)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\Delta u^m(t)\|_2^2 - M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)\|u_t^m(t)\|_2^2, \tag{2.31}$$

sendo

$$\begin{aligned}E^m(t) = \frac{1}{2}\|u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left\{1-\left(\int_0^t g(s)ds\right)\right\}\|\Delta u^m(t)\|_2^2&\\ +\frac{1}{2}(g\,\Box\,\Delta u^m)(t) + \int_\Omega \widehat{f}(u^m(t))dx&\end{aligned} \tag{2.32}$$

a energia associada à solução aproximada $u^m(t)$.

Deste modo, pelas hipóteses (2.5) e (2.6), segue que

$$\frac{d}{dt}E^m(t) \leq 0. \tag{2.33}$$

Integrando a expressão anterior sobre $[0,t]$, com $t < t_m$, obtemos que

$$E^m(t) \leq E^m(0). \tag{2.34}$$

Por (2.32) e $(g\Box\Delta u^m)\,(t) \geq 0$, pelas hipóteses (2.5) e (2.9), pela imersão $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_0$ e por (2.11), segue que

$$\begin{aligned}
E^m(t) &\geq \frac{1}{2}\|u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{l}{2}\|\Delta u^m(t)\|_2^2 + \int_\Omega \widehat{f}(u^m(t))dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{l}{2}\|\Delta u^m(t)\|_2^2 - \frac{l\beta}{2}\int_\Omega |u^m(t)|^2 dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{l}{2}\|\Delta u^m(t)\|_2^2 - \frac{l\beta}{2}\|u^m(t)\|_2^2 \\
&\geq \frac{1}{2}\|u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{l}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\mu_1}\right)\|\Delta u^m(t)\|_2^2 \\
&\geq \frac{1}{2}\|u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{\beta_1}{2}\|\Delta u^m(t)\|_2^2.
\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\|u_t^m(t)\|_2^2 + \|\Delta u^m(t)\|_2^2 \leq C_1 E^m(t), \tag{2.35}$$

sendo $C_1 = \dfrac{2}{\min\{1, \beta_1\}}$. Por outro lado, temos que

$$E^m(0) = \frac{1}{2}\|u_1^m\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u_0^m\|_2^2 + \int_\Omega \widehat{f}(u_0^m)dx. \tag{2.36}$$

Pela convergência (2.19), devido às imersões $\mathcal{V}_4 \hookrightarrow \mathcal{V}_2$ e $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_0$, temos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u_1^m\|_2^2 + \|\Delta u_0^m\|_2^2 \leq C. \tag{2.37}$$

Estimemos a última parcela de (2.36). Por (2.9), pelas desigualdades de Hölder e de Young (ver Apêndice, Proposições 5.3 e 5.1, respectivamente) e pela imersão $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_0$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \widehat{f}(u_0^m)dx &\leq \int_\Omega |\widehat{f}(u_0^m)|dx \\
&\leq \int_\Omega \left| f(u_0^m)u_0^m + \frac{l\beta}{2}|u_0^m|^2 \right| dx \\
&\leq \int_\Omega \left(|f(u_0^m)u_0^m| + \frac{l\beta}{2}|u_0^m|^2 \right) dx \\
&\leq \int_\Omega |f(u_0^m)||u_0^m|dx + \frac{l\beta}{2}\int_\Omega |u_0^m|^2 dx \\
&\leq \|f(u_0^m)\|_2\|u_0^m\|_2 + \frac{l\beta}{2}\|u_0^m\|_2^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\|f(u_0^m)\|_2^2 + \frac{(1+l\beta)}{2}\|u_0^m\|_2^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\|f(u_0^m)\|_2^2 + C_2\|\Delta u_0^m\|_2^2,
\end{aligned}$$

sendo $C_2 = \dfrac{(1+l\beta)}{2\mu_1}$. Fazendo uso de (2.10) e do Lema 5.29, segue que

$$\begin{aligned} \|f(u_0^m)\|_2^2 = \int_\Omega |f(u_0^m)|^2 dx &\leq k_2^2 \int_\Omega \left(|u_0^m| + |u_0^m|^{\frac{\rho+2}{2}}\right)^2 dx \\ &\leq 2k_2^2 \int_\Omega \left(|u_0^m|^2 + |u_0^m|^{\rho+2}\right) dx \qquad (2.38) \\ &\leq 4k_2^2 \|u_0^m\|_{\rho+2}^{\rho+2}. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\int_\Omega \widehat{f}(u_0^m) dx \leq 2k_2^2 \|u_0^m\|_{\rho+2}^{\rho+2} + C_2 \|\Delta u_0^m\|_2^2 ,$$

ou ainda, considerando $\mu_\rho > 0$ a constante referente à imersão $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \widehat{f}(u_0^m) dx \leq 4k_2^2 \mu_\rho^{\rho+2} \|\Delta u_0^m\|_2^{\rho+2} + C_2 \|\Delta u_0^m\|_2^2 .$$

Logo, por (2.37), existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega \widehat{f}(u_0^m) dx \leq C. \qquad (2.39)$$

Combinando (2.36) com (2.37) e (2.39),

$$E^m(0) \leq C. \qquad (2.40)$$

Deste modo, por (2.34), (2.35) e (2.40) existe uma constante $K_1 > 0$, que depende dos dados iniciais, tal que

$$\|u_t^m(t)\|_2^2 + \|\Delta u^m(t)\|_2^2 \leq K_1, \qquad (2.41)$$

para todo $t \in [0, t_m)$, qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$, onde $K_1 = K_1\left(\|\Delta u_0\|_2, \|u_1\|_2\right)$.

Agora observe que

$$\begin{aligned} \|u_t^m(t)\|_2^2 = (u_t^m(t), u_t^m(t)) &= \left(\sum_{j=1}^m y'_{jm}(t) w_j, \sum_{i=1}^m y'_{im}(t) w_i \right) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m y'_{im}(t) y'_{jm}(t) (w_j, w_i) = \sum_{i=1}^m [y'_{im}(t)]^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|u^m(t)\|_2^2 = (u^m(t), u^m(t)) &= \left(\sum_{j=1}^m y_{jm}(t)w_j, \sum_{i=1}^m y_{im}(t)w_i\right)\\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m y_{im}(t)y_{jm}(t)(w_j, w_i) = \sum_{i=1}^m [y_{im}(t)]^2.\end{aligned}$$

Como $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_0$, segue por (2.41) que existe uma constante $C_3 > 0$ tal que

$$\|u^m(t)\|_2^2 \leq C_3, \tag{2.42}$$

sendo $C_3 = \dfrac{K_1}{\mu_1}$. Assim, existe uma constante $C_4 > 0$ de modo que

$$\|u_t^m(t)\|_2^2 + \|u^m(t)\|_2^2 \leq C_4,$$

para cada $t \in [0, t_m)$ e $m \in \mathbb{N}$. Portanto, a solução $Z(t)$ do P.V.I. (2.25) é limitada em $\mathbb{R}^{2m}$, visto que

$$\|Z(t)\|_{\mathbb{R}^{2m}}^2 = \sum_{i=1}^m [y'_{im}(t)]^2 + \sum_{i=1}^m [y_{im}(t)]^2 = \|u_t^m(t)\|_2^2 + \|u^m(t)\|_2^2 \leq C_4, \tag{2.43}$$

com C_4 independente de t e m. Pelo Corolário 5.26, podemos prolongar $Z(t)$ a todo o intervalo $[0, T]$, o mesmo ocorrendo com $y_{jm}(t)$ e $y'_{jm}(t)$, $j = 1, \ldots, m$. Por (2.16), podemos estender $u^m(t)$ a todo o intervalo $[0, T]$. Mais ainda, repetindo tal procedimento, obtemos que (2.41) permanece válida para todo $t \in [0, T]$ e $m \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$\|u_t^m(t)\|_2^2 + \|\Delta u^m(t)\|_2^2 \leq K_1, \tag{2.44}$$

para cada $t \in [0, T]$ e $m \in \mathbb{N}$, com $K_1 = K_1(\|\Delta u_0\|_2, \|u_1\|_2) > 0$ independente de $t > 0$ e $m \in \mathbb{N}$. Além disso, a estimativa (2.44) nos fornece que

$$\begin{aligned}&(u^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; \mathcal{V}_2) = [L^1(0, T; \mathcal{V}_2')]',\\ &(u_t^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; \mathcal{V}_0) = [L^1(0, T; \mathcal{V}_0)]'.\end{aligned} \tag{2.45}$$

• *Estimativa a priori II*: Fazendo uso do Teorema de Green (ver Apêndice, Teorema 5.13), podemos reescrever (2.17) como

$$\begin{aligned}(u_{tt}^m(t), w_j) + (\Delta^2 u^m(t), w_j) - \int_0^t g(t-s)(\Delta^2 u^m(s), w_j)ds&\\ +M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(u_t^m(t), w_j) + (f(u^m(t)), w_j) = 0,&\end{aligned}$$

Ao multiplicarmos a equação anterior por $\lambda_j y'_{jm}(t)$ e somarmos de $j = 1$ até m, obtemos

$$\begin{aligned}(u_{tt}^m(t), \Delta^2 u_t^m(t)) + (\Delta^2 u^m(t), \Delta^2 u_t^m(t)) - \int_0^t g(t-s)(\Delta^2 u^m(t), \Delta^2 u_t^m(t))ds \\ +M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(u_t^m(t), \Delta^2 u_t^m(t)) + (f(u^m(t)), \Delta^2 u_t^m(t)) = 0,\end{aligned}$$

sendo

$$\Delta^2 u_t^m(t) = \Delta^2 \left(\sum_{j=1}^m y'_{jm}(t) w_j \right) = \sum_{j=1}^m y'_{jm}(t) \Delta^2 w_j = \sum_{j=1}^m y'_{jm}(t) \lambda_j w_j.$$

Aplicando novamente o Teorema 5.13,

$$\begin{aligned}(\Delta u_{tt}^m(t), \Delta u_t^m(t)) + (\Delta^2 u^m(t), \Delta^2 u_t^m(t)) - \int_0^t g(t-s)(\Delta^2 u^m(t), \Delta^2 u_t^m(t))ds \\ +M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\Delta u_t^m(t), \Delta u_t^m(t)) + (f(u^m(t)), \Delta^2 u_t^m(t)) = 0.\end{aligned} \tag{2.46}$$

Note que, de modo análogo ao feito para provarmos (2.27) e (2.28), obtemos, com exceção da penúltima identidade, que provém de regras de derivação,

$$\begin{aligned}(\Delta u_{tt}^m(t), \Delta u_t^m(t)) =& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u_t^m(t)\|_2^2; \\ (\Delta^2 u_t^m(t), \Delta^2 u^m(t)) =& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2; \\ (f(u^m(t)), \Delta^2 u_t^m(t)) =& \frac{d}{dt}\left[(f(u^m(t)), \Delta^2 u^m(t)) \right] \\ & -(f'(u^m(t)) u_t^m(t), \Delta^2 u^m(t)); \\ \int_0^t g(t-s)(\Delta^2 u^m(s), \Delta^2 u_t^m(t))ds =& -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{ (g\Box\Delta^2 u^m)(t) - \left(\int_0^t g(s)ds \right) \|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2 \right\} \\ & +\frac{1}{2}(g'\Box\Delta^2 u^m)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2,\end{aligned} \tag{2.47}$$

em $\mathcal{D}'(0,T)$. Logo, por (2.47), a igualdade (2.46) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F^m(t) = \frac{1}{2}\left(g'\Box\Delta^2 u^m \right)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\Delta u^m(t)\|_2^2 \\ - M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)\|\Delta u_t^m\|_2^2 + J_f,\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}F^m(t) := \frac{1}{2}\|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)ds \right) \|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2 \\ + \frac{1}{2}\left(g\Box\Delta^2 u^m \right)(t) + (f(u^m(t)), \Delta^2 u^m(t))\end{aligned}$$

e

$$J_f := \left(f'(u^m(t)u_t^m(t), \Delta^2 u^m(t)\right).$$

Desta forma, das hipóteses (2.5) e (2.6), segue que

$$\frac{d}{dt}F^m(t) \leq J_f. \tag{2.48}$$

Estimemos o termo J_f. Segue, usando (2.7), que

$$\begin{aligned}
|J_f| &= \left|\left(f'(u^m(t)u_t^m(t), \Delta^2 u^m(t)\right)\right| \\
&= \left|\int_\Omega f'(u^m(t))u_t^m(t)\Delta^2 u^m(t)dt\right| \\
&\leq \int_\Omega |f'(u^m(t))|\,|u_t^m(t)|\,\left|\Delta^2 u^m(t)\right| dt \\
&\leq k_1 \int_\Omega (1 + |u^m(t)|^{\frac{\rho}{2}})\,|u_t^m(t)|\,\left|\Delta^2 u^m(t)\right| dt.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder generalizada com $\dfrac{\rho}{2(\rho+2)} + \dfrac{1}{\rho+2} + \dfrac{1}{2} = 1$, temos

$$\begin{aligned}
|J_f| &\leq k_1 \|1 + |u^m(t)|^{\frac{\rho}{2}}\|_{\frac{2(\rho+2)}{\rho}} \|u_t^m(t)\|_{\rho+2} \|\Delta^2 u^m(t)\|_2 \\
&\leq k_1 \left(|\Omega|^{\frac{\rho}{2(\rho+2)}} + \|u^m(t)\|_{\rho+2}^{\frac{\rho}{2}}\right) \|u_t^m(t)\|_{\rho+2} \|\Delta^2 u^m(t)\|_2.
\end{aligned}$$

Da imersão $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$, temos que

$$\|u^m(t)\|_{\rho+2}^{\frac{\rho}{2}} \leq \mu_\rho^{\frac{\rho}{2}} \|\Delta u^m(t)\|_2^{\frac{\rho}{2}} \ \text{ e } \ \|u_t^m(t)\|_{\rho+2} \leq \mu_\rho \|\Delta u_t^m(t)\|_2.$$

Deste modo, fazendo uso de (2.44) e da desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}
|J_f| &\leq k_1 \left(|\Omega|^{\frac{\rho}{2(\rho+2)}} + \mu_\rho^{\frac{\rho}{2}} \|\Delta u^m(t)\|_2^{\frac{\rho}{2}}\right) \mu_\rho \|\Delta u_t^m(t)\|_2 \|\Delta^2 u^m(t)\|_2 \\
&\leq \underbrace{k_1 \left(|\Omega|^{\frac{\rho}{2(\rho+2)}} + C\right) \mu_\rho}_{C} \|\Delta u_t^m(t)\|_2 \|\Delta^2 u^m(t)\|_2 \\
&\leq C \left[\frac{1}{2}\|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2\right].
\end{aligned}$$

De (2.48), temos

$$\frac{d}{dt}F^m(t) \leq C \left[\|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 + \|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2\right]. \tag{2.49}$$

Integrando (2.49) sobre $[0,t]$, com $t \leq T$, temos

$$F^m(t) \leq F^m(0) + C\int_0^t \left[\|\Delta u_t^m(s)\|_2^2 + \|\Delta^2 u^m(s)\|_2^2\right] ds.$$

Como

$$F^m(0) = \frac{1}{2}\|\Delta u_1^m\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta^2 u_0^m\|_2^2 + \left(f(u_0^m), \Delta^2 u_0^m\right)$$

e por (2.38), pela desigualdade de Young e pela imersão $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
\left(f\left(u_0^m\right), \Delta^2 u_0^m\right) &\leq \left|\left(f\left(u_0^m\right), \Delta^2 u_0^m\right)\right| \\
&\leq \left|\int_\Omega f\left(u_0^m\right)\Delta^2 u_0^m dx\right| \\
&\leq \int_\Omega \left|f\left(u_0^m\right)\right| \left|\Delta^2 u_0^m\right| dx \\
&\leq \frac{1}{2}\left[\|f\left(u_0^m\right)\|_2^2 + \left\|\Delta^2 u_0^m\right\|_2^2\right] \\
&\leq \frac{1}{2}\left[4k_2^2\|u_0^m\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \left\|\Delta^2 u_0^m\right\|_2^2\right] \\
&\leq \frac{1}{2}\left[4k_2^2\mu_\rho^{\rho+2}\|\Delta u_0^m\|_2^{\rho+2} + \left\|\Delta^2 u_0^m\right\|_2^2\right],
\end{aligned}$$

segue, pela imersão $\mathcal{V}_4 \hookrightarrow \mathcal{V}_2$, que

$$F^m(0) \leq C,$$

onde $C = C\left(\|\Delta^2 u_0^m\|_2, \|\Delta u_1\|_2\right) > 0$. Deste modo,

$$F^m(t) \leq C + C\int_0^t \left[\|\Delta u_t^m(s)\|_2^2 + \|\Delta^2 u^m(s)\|_2^2\right] ds, \tag{2.50}$$

com $C = C\left(\|\Delta^2 u_0^m\|_2, \|\Delta u_1\|_2\right) > 0$.

Por outro lado, pela hipótese (2.5) e por $\left(g\Box\Delta^2 u^m\right)(t) \geq 0$,

$$F^m(t) \geq \frac{1}{2}\|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{l}{2}\|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2 + (f(u^m(t)), \Delta^2 u^m(t)). \tag{2.51}$$

Agora, pela hipótese (2.2), pela desigualdade de Hölder generalizada, pela imersão $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow$

$L^{\rho+2}(\Omega)$, pela estimativa (2.44) e pela de Young com $\epsilon = \dfrac{l}{4}$ segue que

$$\begin{aligned}
-(f(u^m(t)), \Delta^2 u^m(t))| &\leq \left|\left(f\left(u^m(t)\right), \Delta^2 u^m(t)\right)\right| \\
&\leq \left|\int_\Omega f\left(u^m(t)\right) \Delta^2 u^m(t) dx\right| \\
&\leq \int_\Omega |f(u^m(t))||\Delta^2 u^m(t)| dx \\
&\leq k_2 \int_\Omega \left(1 + |u^m(t)|^{\frac{\rho}{2}}\right) |u^m(t)| \left|\Delta^2 u^m(t)\right| dx \\
&\leq k_2 \left(|\Omega|^{\frac{\rho}{2(\rho+2)}} + \|u^m(t)\|_{\rho+2}^{\frac{\rho}{2}}\right) \|u^m(t)\|_{\rho+2} \left\|\Delta^2 u^m(t)\right\|_2 \\
&\leq k_2 \left(|\Omega|^{\frac{\rho}{2(\rho+2)}} + \mu_\rho^{\frac{\rho}{2}} \|\Delta u^m(t)\|_2^{\frac{\rho}{2}}\right) \|\Delta u^m(t)\|_2 \left\|\Delta^2 u^m(t)\right\|_2 \\
&\leq C \left\|\Delta^2 u^m(t)\right\|_2 \\
&\leq C + \frac{l}{4} \left\|\Delta^2 u^m(t)\right\|_2^2.
\end{aligned}$$

Assim, existe uma constante $C = C\left(k_2, \mu_\rho, K_1\right) > 0$ tal que

$$-(f(u^m(t)), \Delta^2 u^m(t)) \leq C + \frac{l}{4}\|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2.$$

Portanto,

$$(f(u^m(t)), \Delta^2 u^m(t)) \geq -C - \frac{l}{4}\|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2.$$

Assim, em (2.51),

$$\begin{aligned}
F^m(t) &\geq \frac{1}{2}\|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{l}{2}\|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2 - C - \frac{l}{4}\|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2 \\
&\geq \frac{1}{2}\|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{l}{4}\|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2 - C.
\end{aligned}$$

Logo, existe uma constante $C = C\left(k_2, \mu_\rho, K_1\right) > 0$ de tal modo que

$$\frac{1}{2}\|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{l}{4}\|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2 \leq F^m(t) + C. \tag{2.52}$$

Assim, por (2.50) e (2.52),

$$\frac{1}{2}\|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{l}{4}\|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2 \leq C + C\int_0^t \left[\|\Delta u_t^m(s)\|_2^2 + \|\Delta^2 u^m(s)\|_2^2\right] ds.$$

Então, existe uma constante $C > 0$, independente de $m \in \mathbb{N}$ e $t > 0$, tal que

$$\|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 + \|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2 \leq C + C\int_0^t \left[\|\Delta u_t^m(s)\|_2^2 + \|\Delta^2 u^m(s)\|_2^2\right] ds.$$

Pela desigualdade de Gronwall,

$$\|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 + \|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2 \leq C\mathrm{e}^{\int_0^t C ds} \leq C\mathrm{e}^{Ct}$$

Como $t \leq T$, segue que

$$\|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 + \|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2 \leq C\mathrm{e}^{CT}$$

Deste modo, definindo $K_2 = C\mathrm{e}^{CT}$, temos que para todo $t \in [0,T]$ e para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 + \|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2 \leq K_2, \tag{2.53}$$

sendo $K_2 = K_2(\|\Delta u_1\|_2, \|\Delta^2 u_0\|_2, |\Omega|, T) > 0$. Em particular, a estimativa (2.53) implica que

$$\begin{array}{ll} (u^m) & \text{é limitada em } \; L^\infty(0,T;\mathcal{V}_4) = [L^1(0,T;\mathcal{V}_4')]', \\ (u_t^m) & \text{é limitada em } \; L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2) = [L^1(0,T;\mathcal{V}_2')]'. \end{array} \tag{2.54}$$

Passagem ao Limite: Com o intuito de proceder o limite no problema aproximado e determinar a existência de solução forte, consideremos $j, m \in \mathbb{N}$, tais que $j \leq m$, e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Multiplicando (2.17) por θ e integrando sobre $[0,T]$, obtemos

$$\int_0^T (u_{tt}^m(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (\Delta u^m(t), \Delta w_j)\theta(t)dt - \int_0^T \int_0^t g(t-s)(\Delta^2 u^m(s), w_j)ds\theta(t)dt$$
$$+ \int_0^T M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(u_t^m(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (f(u^m(t)), w_j)\theta(t)dt = 0.$$

Integrando por partes, segue que

$$\begin{aligned} -\int_0^T (u_t^m(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T (\Delta u^m(t), \Delta w_j)\theta(t)dt \\ -\int_0^T \int_0^t g(t-s)(\Delta u^m(s), \Delta w_j)ds\theta(t)dt \\ + \int_0^T M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(u_t^m(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (f(u^m(t)), w_j)\theta(t)dt = 0. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Em face das estimativas (2.45) e (2.54), segue, pelo Lema da Compacidade Fraca Estrela (ver Apêndice, Lema 5.24), que existe uma subsequência de (u^m), que também será denotada por (u^m), tal que

$$\begin{array}{l} u^m \overset{*}{\rightharpoonup} u \;\text{ em }\; L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2), \\ u_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} u_t \;\text{ em }\; L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0), \\ u^m \overset{*}{\rightharpoonup} u \;\text{ em }\; L^\infty(0,T;\mathcal{V}_4), \\ u_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} u_t \;\text{ em }\; L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2). \end{array} \tag{2.56}$$

Pelas duas primeiras convergências de (2.56), temos que

$$\begin{aligned} &\int_0^T (u^m(t),\eta(t))dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (u(t),\eta(t))dt, \ \ \forall \ \ \eta \in L^1(0,T;\mathcal{V}_2'), \\ &\int_0^T (u_t^m(t),\vartheta(t))dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (u_t(t),\vartheta(t))dt, \ \ \forall \ \ \vartheta \in L^1(0,T;\mathcal{V}_0). \end{aligned} \tag{2.57}$$

Afirmamos que $\Delta^2 w_j\theta \in L^1(0,T;\mathcal{V}_2')$ e $w_j\theta' \in L^1(0,T;\mathcal{V}_0)$. Com efeito, sejam $\iota \in \mathcal{V}_2'$ e $\sigma \in \mathcal{V}_0$, então

$$\begin{aligned} \left|\left\langle \Delta^2 w_j\theta(t),\iota\right\rangle\right| &= |\theta(t)|\left|\left\langle \Delta^2 w_j,\iota\right\rangle\right| \\ &= |\theta(t)|\,|(\Delta w_j,\Delta\iota)| \\ &\leq \max_{t\in[0,T]} |\theta(t)|\|\Delta w_j\|_2\|\Delta\iota\|_2. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |\langle w_j\theta'(t),\sigma\rangle| &= |\theta'(t)|\,|\langle w_j,\sigma\rangle| \\ &\leq \max_{t\in[0,T]} |\theta'(t)|\,\|w_j\|_2\,\|\sigma\|_2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left\|\Delta^2 w_j\theta(t)\right\|_{\mathcal{V}_2'} \leq \max_{t\in[0,T]} |\theta(t)|\,\|\Delta w_j\|_2 \ \text{ e } \ \|w_j\theta'(t)\|_2 \leq \max_{t\in[0,T]} |\theta'(t)|\,\|w_j\|_2\,.$$

Definindo $D_j := \max\limits_{t\in[0,T]} |\theta(t)|\,\|\Delta w_j\|_2$ e $F_j := \max\limits_{t\in[0,T]} |\theta'(t)|\,\|w_j\|_2$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\|\Delta^2 w_j\theta(t)\right\|_{\mathcal{V}_2'} dt &\leq \int_0^T D_j dt = D_jT < \infty \\ \int_0^T \|w_j\theta'(t)\|_2 dt &\leq \int_0^T F_j dt = F_jT < \infty, \end{aligned}$$

o que mostra o desejado. Logo, se em particular tomarmos $\eta = \Delta^2 w_j\theta,\ \vartheta = w_j\theta'$, segue que

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\Delta u^m(t),\Delta w_j)\theta(t)dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (\Delta u(t),\Delta w_j)\theta(t)dt, \\ &\int_0^T (u_t^m(t),w_j)\theta'(t)dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (u_t(t),w_j)\theta'(t)\,dt. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Entretanto, para passarmos o limite em (2.55) devemos analisar o termo de memória, o termo não local e o termo de perturbação não linear. Afirmamos que existem subsequências de (u^m), que ainda denotaremos por (u^m), de modo que

$$\int_0^T \int_0^t g(t-s)(\Delta u^m(s), \Delta w_j)\theta(t) ds dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \int_0^t g(t-s)(\Delta u(s), \Delta w_j)\theta(t) ds dt, \tag{2.59}$$

$$\int_0^T M\left(\|\nabla u^m(t)\|_2^2\right)(u_t^m(t), w_j)\theta(t) dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(u_t(t), w_j)\theta(t) dt, \tag{2.60}$$

$$\int_0^T (f(u^m t)), w_j)\theta(t) dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (f(u(t)), w_j)\theta(t) dt. \tag{2.61}$$

De fato, pelo Teorema 5.16 segue que

$$\begin{aligned}
\|(g * u^m)(t)\|_2 &= \left\| \int_0^t g(t-s) u^m(s) ds \right\|_2 \\
&\leq \int_0^t \|g(t-s) u^m(s)\|_2 ds \\
&\leq \int_0^t |g(t-s)| \|u^m(s)\|_2 ds \\
&\leq \|u^m\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0)} \int_0^t |g(t-s)| ds \\
&\leq \|u^m\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)},
\end{aligned}$$

para cada $t \in [0, T]$. Deste modo, por (2.44), obtemos que

$$\|(g * u^m)(t)\|_2 \leq C,$$

para todo $t \in [0, T]$, sendo $C = C(\|\Delta u_0\|_2, \|u_1\|_2, g) > 0$ uma constante. Logo,

$$(g * u^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; \mathcal{V}_0) = [L^1(0, T; \mathcal{V}_0')]'. \tag{2.62}$$

Assim, pelo Lema 5.24, existe uma subsequência de $(g * u^m)$, que continuará sendo denotada por $(g * u^m)$, e uma função $v \in L^\infty(0, T; \mathcal{V}_0)$, tais que

$$g * u^m \overset{*}{\rightharpoonup} v \text{ em } L^\infty(0, T; \mathcal{V}_0), \tag{2.63}$$

quando $m \longrightarrow \infty$. Provemos que

$$v = g * u \text{ em } L^\infty(0, T; \mathcal{V}_0).$$

Consideremos o espaço reflexivo

$$\mathcal{W} = \left\{ u \in L^2(0, T; \mathcal{V}_2); u_t \in L^2(0, T; \mathcal{V}_0) \right\}, \tag{2.64}$$

munido da norma
$$\|u\|_{\mathcal{W}} = \|u\|_{L^2(0,T;\mathcal{V}_2)} + \|u_t\|_{L^2(0,T;\mathcal{V}_0)}. \tag{2.65}$$

Pela estimativa (2.45), segue que (u^m) é limitada em tal espaço. Logo, pelo Lema da Compacidade Fraca (ver Apêndice, Lema 5.23), existe uma subsequência de (u^m), também denotada por (u^m), tal que
$$u^m \rightharpoonup u \text{ em } \mathcal{W} \text{ quando } m \to \infty.$$

Como $\mathcal{V}_2 \overset{c}{\hookrightarrow} \mathcal{V}_0$, segue pelo Teorema de Aubin-Lions (ver Apêndice, Teorema 5.14) que
$$\mathcal{W} \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(0,T;\mathcal{V}_0).$$

Deste modo,
$$u^m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \ \text{ em } \ L^2(0,T;\mathcal{V}_0). \tag{2.66}$$

Provaremos que
$$\|g * u^m - g * u\|^2_{L^2(0,T;\mathcal{V}_0)} \leq \|g\|^2_{L^1(\mathbb{R}^+)} \|u^m - u\|^2_{L^2(0,T;\mathcal{V}_0)}. \tag{2.67}$$

De fato, para cada $t \in [0,T]$, temos que
$$\begin{aligned}\int_0^t \int_0^T g(t-s)\|u^m(s) - u(s)\|_2^2 dtds &= \int_0^t \left(\int_0^T g(t-s)dt\right) \|u^m(s) - u(s)\|_2^2 ds \\ &\leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \int_0^t \|u^m(s) - u(s)\|_2^2 ds \\ &\leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \|u^m - u\|^2_{L^2(0,T;\mathcal{V}_0)} < \infty.\end{aligned}$$

Logo,
$$\int_0^T g(t-s)\|u^m(s) - u(s)\|_2^2 dt < \infty.$$

Pelo Teorema de Fubini,
$$\int_0^T \int_0^t g(t-s)\|u^m(s) - u(s)\|_2^2 dsdt \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \|u^m - u\|^2_{L^2(0,T;\mathcal{V}_0)}$$

Assim, a função $h(s) = \sqrt{g(t-s)}\|u^m(s) - u(s)\|_2 \in L^2(0,t)$. Pela desigualdade de Hölder e pelo Teorema 5.16, temos

$$
\begin{aligned}
\|(g * u^m)(t) - (g * u)(t)\|_2 &= \left\| \int_0^t g(t-s)(u^m(s) - u(s))ds \right\|_2 \\
&\leq \int_0^t g(t-s)\|u^m(s) - u(s)\|_2 ds \\
&\leq \int_0^t \sqrt{g(t-s)}\sqrt{g(t-s)}\|u^m(s) - u(s)\|_2 ds \\
&\leq \left(\int_0^t g(t-s)\, ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t g(t-s)\|u^m(s) - u(s)\|_2^2 ds \right)^{1/2} \\
&\leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t g(t-s)\|u^m(s) - u(s)\|_2^2 \, ds \right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Logo, elevando ambos os membros da desigualdade ao quadrado e integrando sobre $[0, T]$,

$$
\begin{aligned}
\|g * u^m - g * u^m\|_{L^2(0,T;\mathcal{V}_0)}^2 &\leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \int_0^T \int_0^t g(t-s)\|u^m(s) - u(s)\|_2^2 ds dt \\
&\leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \left(\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \|u^m - u\|_{L^2(0,T;\mathcal{V}_0)}^2 \right) \\
&\leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^2 \|u^m - u\|_{L^2(0,T;\mathcal{V}_0)}^2,
\end{aligned}
$$

o que prova (2.67).

Por (2.66) e (2.67), temos que

$$g * u^m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} g * u \;\text{ em }\; L^2(0, T; \mathcal{V}_0).$$

Por conseguinte,

$$g * u^m \overset{*}{\rightharpoonup} g * u \;\text{ em }\; L^2(0, T; \mathcal{V}_0),$$

quando $m \to \infty$. Contudo, pela imersão $L^\infty(0, T; \mathcal{V}_0) \hookrightarrow L^2(0, T; \mathcal{V}_0)$ e por (2.63),

$$g * u^m \overset{*}{\rightharpoonup} v \;\text{ em }\; L^2(0, T; \mathcal{V}_0),$$

quando $m \longrightarrow \infty$. Assim, pela unicidade do limite fraco estrela, segue que $v = g * u$ em $L^2(0, T; \mathcal{V}_0)$. O que implica que

$$g * u^m \overset{*}{\rightharpoonup} g * u \;\text{ em }\; L^\infty(0, T; \mathcal{V}_0),$$

quando $m \to \infty$, ou seja,

$$\int_0^T \langle (g * u^m)(t), \xi(t) \rangle \, dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \langle (g * u)(t), \xi(t) \rangle \, dt, \;\; \forall \;\; \xi \in L^1(0, T; \mathcal{V}_0).$$

Afirmamos que $\Delta^2 w_j \theta \in L^1(0,T;\mathcal{V}_0)$. De fato, seja $\sigma \in \mathcal{V}_0$, então

$$\begin{aligned}\left\langle \Delta^2 w_j \theta(t), \sigma \right\rangle| &= |\theta(t)|\left|\left\langle \Delta^2 w_j, \sigma \right\rangle\right| \\ &\leq \max_{t\in[0,T]} |\theta(t)|\|\Delta^2 w_j\|_2 \|\sigma\|_2.\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\Delta^2 w_j \theta(t)\|_2 \leq \max_{t\in[0,T]} |\theta(t)|\|w_j\|_2.$$

Definindo $G_j := \max\limits_{t\in[0,T]} |\theta(t)|\|w_j\|_2$, temos

$$\int_0^T \|\Delta^2 w_j \theta(t)\|_2 dt \leq \int_0^T G_j dt = G_j T < \infty,$$

provando o desejado. Deste modo, se em particular tomarmos $\xi(t) = \Delta^2 w_j \theta(t)$, temos que

$$\int_0^T \left((g * u^m)(t), \Delta^2 w_j\right) \theta(t) dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \left((g * u)(t), \Delta^2 w_j\right) \theta(t) dt,$$

isto é,

$$\int_0^T \int_0^t g(t-s)\left(u^m(s), \Delta^2 w_j\right) \theta(t) ds dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \int_0^t g(t-s)\left(u(s), \Delta^2 w_j\right) \theta(t) ds dt.$$

Pelo Teorema 5.13,

$$\int_0^T \int_0^t g(t-s)\left(\Delta u^m(s), \Delta w_j\right) \theta(t) ds dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \int_0^t g(t-s)\left(\Delta u(s), \Delta w_j\right) \theta(t) ds dt.$$

O que demonstra (2.59).

Para provarmos (2.60), vamos considerar o espaço de Banach $\mathcal{W}$ definido em (2.64), munido da norma (2.65). Pelo mesmo argumento, existe uma subsequência de (u^m), ainda denotada por (u^m), tal que

$$u^m \rightharpoonup u \text{ em } \mathcal{W} \text{ quando } m \to \infty.$$

Como $\mathcal{V}_2 \overset{c}{\hookrightarrow} \mathcal{V}_1 \hookrightarrow \mathcal{V}_0$, segue pelo Teorema 5.14 que

$$\mathcal{W} \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(0,T;\mathcal{V}_1).$$

Deste modo,

$$u^m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \text{ em } L^2(0,T;\mathcal{V}_1), \tag{2.68}$$

isto é,

$$\int_0^T \|\nabla u^m(t) - \nabla u(t)\|_2^2 dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.69}$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
\left|\|\nabla u^m(t)\|_2^2 - \|\nabla u(t)\|_2^2\right|^2 &= \left|(\|\nabla u^m(t)\|_2 + \|\nabla u(t)\|_2)\,(\|\nabla u^m(t)\|_2 - \|\nabla u(t)\|_2)\right|^2 \\
&= \left|\|\nabla u^m(t)\|_2 + \|\nabla u(t)\|_2\right|^2 \left|\|\nabla u^m(t)\|_2 - \|\nabla u(t)\|_2\right|^2 \\
&\leq (\|\nabla u^m(t)\|_2 + \|\nabla u(t)\|_2)^2 \|\nabla u^m(t) - \nabla u(t)\|_2^2 \\
&\leq 2\left(\|\nabla u^m(t)\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2\right) \|\nabla u^m(t) - \nabla u(t)\|_2^2 \\
&\leq C\, \|\nabla u^m(t) - \nabla u(t)\|_2^2 .
\end{aligned}$$

onde, pela *Estimativa a priori I*, $C = C(\|\Delta u_0\|_2, \|u_1\|_2) > 0$. Logo,

$$\int_0^T \left|\|\nabla u^m(t)\|_2^2 - \|\nabla u(t)\|_2^2\right|^2 dt \leq C \int_0^T \|\nabla u^m(t) - \nabla u(t)\|_2^2 dt,$$

onde $C = C(\|\Delta u_0\|_2, \|u_1\|_2) > 0$. Então, por (2.69),

$$\int_0^T \left|\|\nabla u^m(t)\|_2^2 - \|\nabla u(t)\|_2^2\right|^2 dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Deste modo,

$$\|\nabla u^m(t)\|_2^2 \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \|\nabla u(t)\|_2^2 \text{ em } L^2(0,T). \tag{2.70}$$

Afirmamos que

$$M\left(\|\nabla u^m(t)\|_2^2\right) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right) \text{ em } L^2(0,T). \tag{2.71}$$

Com efeito, pela imersão $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_1$ e por pela estimativa (2.44), como $M \in C^1([0,\infty))$, para quase todo $t \in [0,T]$ temos que

$$M\left(\|\nabla u^m(t)\|_2^2\right) - M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right) = \int_{\|\nabla u(t)\|_2^2}^{\|\nabla u^m(t)\|_2^2} M'(s)ds. \tag{2.72}$$

Sendo $M' \in C([0,\infty))$, existe $L > 0$ tal que $|M'(s)| \leq L$ para todo $s \in [0, K_1]$, sendo K_1 como em (2.44). Logo, da equação (2.72) resulta que

$$|M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2) - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)| \leq L\left|\|\nabla u^m(t)\|_2^2 - \|\nabla u(t)\|_2^2\right|,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e $t \in [0,T]$. Ou ainda, como a função quadrática é crescente para valores positivos,

$$\left|M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2) - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\right|^2 \leq L^2 \left|\|\nabla u^m(t)\|_2^2 - \|\nabla u(t)\|_2^2\right|^2 \tag{2.73}$$

Integrando a expressão anterior sobre $[0, T]$, temos

$$\int_0^T \left|M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2) - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\right|^2 dt \leq L^2 \int_0^T \left|\|\nabla u^m(t)\|_2^2 - \|\nabla u(t)\|_2^2\right|^2 dt.$$

Logo, por (2.70),

$$\int_0^T \left|M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2) - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\right|^2 dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

O que demonstra a (2.71).

Por outro lado, como convergência forte implica em convergência fraca, por (2.68) temos que

$$u^m \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0, T; \mathcal{V}_1), \text{ quando } m \to \infty. \tag{2.74}$$

Deste modo,

$$\langle \mu, u^m \rangle \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \langle \mu, u \rangle, \text{ para todo } \mu \in [L^2(0, T; \mathcal{V}_1)]' = L^2(0, T; \mathcal{V}_1'). \tag{2.75}$$

Seja $\mu_j = w_j \theta'$. Observe que $\mu_j \in L^2(0, T; \mathcal{V}_1')$. Com efeito, dada $\phi \in \mathcal{V}_1$,

$$\begin{aligned} |\langle \mu_j(t), \phi \rangle| = |\theta'(t)||\langle w_j, \phi \rangle| &\leq \max_{t\in[0,T]} |\theta'(t)|\|w_j\|_2\|\phi\|_2 \\ &\leq \mu_0 \left(\max_{t\in[0,T]} |\theta'(t)|\right) \|w_j\|_2\|\nabla\phi\|_2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\mu_j(t)\|_{\mathcal{V}_1'} \leq \mu_0 \left(\max_{t\in[0,T]} |\theta'(t)|\right) \|w_j\|_2.$$

Definindo $C_j := \mu_0 \left(\max\limits_{t\in[0,T]} |\theta'(t)|\right) \|w_j\|_2$, temos

$$\int_0^T \|\mu_j(t)\|_{\mathcal{V}_1'}^2 dt \leq \int_0^T C_j^2 dt = C_j^2 T < \infty.$$

provando o desejado.

Deste modo, por (2.75), para cada $j \in \mathbb{N}$ fixado, $j \leq m$,

$$\langle \mu_j, u^m \rangle \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \langle \mu_j, u \rangle,$$

isto é,

$$\int_0^T (u^m(t), w_j)\theta'(t)dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)dt.$$

Integrando por partes,

$$\int_0^T (u_t^m(t), w_j)\theta(t)dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (u_t(t), w_j)\theta(t)dt,$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m > m_0$, então

$$\left|\int_0^T (u_t^m(t) - u_t(t), w_j)\, \theta(t)\, dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considere $\varphi \in [L^2(0,T)]' = L^2(0,T)$. Por $\mathcal{D}(0,T)$ ser denso em $L^2(0,T)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ de modo que

$$\|\varphi - \theta\|_{L^2(0,T)} < \frac{\varepsilon}{4K_1\sqrt{T}\|w_j\|_2}.$$

Assim, pelas desigualdades de Cauchy-Schwartz e de Hölder e por (2.44),

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^T (u_t^m(t) - u_t(t), w_j)\, (\varphi(t) - \theta(t))\, dt\right| &\leq \int_0^T |(u_t^m(t) - u_t(t), w_j)|\, |\varphi(t) - \theta(t)|\, dt \\
&\leq \|w_j\|_2 \int_0^T \|u_t^m(t) - u_t(t)\|_2\, |\varphi(t) - \theta(t)|\, dt \\
&\leq \|w_j\|_2 \int_0^T 2K_1\, |\varphi(t) - \theta(t)|\, dt \\
&\leq \|w_j\|_2 \left(\int_0^T 4C^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi - \theta\|_{L^2(0,T)} \\
&< \|w_j\|_2 \left(2C\sqrt{T}\right) \frac{\varepsilon}{4C\|w_j\|_2\sqrt{T}} < \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe m_0 tal que, se $m > m_0$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^T (u_t^m(t) - u_t(t), w_j)\, \varphi(t)dt\right| &= \left|\int_0^T (u_t^m(t) - u_t(t), w_j)\, (\varphi(t) - \theta(t) + \theta(t))\, dt\right| \\
&\leq \left|\int_0^T (u_t^m(t) - u_t(t), w_j)\, (\varphi(t) - \theta(t))\, dt\right| + \left|\int_0^T (u_t^m(t) - u_t(t), w_j)\, \theta(t)dt\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_0^T (u_t^m(t), w_j)\, \varphi(t)dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (u_t(t), w_j)\, \varphi(t)dt,$$

para toda $\varphi \in L^2(0,T)$. O que implica que

$$(u_t^m(t), w_j) \rightharpoonup (u_t(t), w_j) \ \text{ em } \ L^2(0,T), \tag{2.76}$$

quando $m \to \infty$.

Agora, considere $w \in L^\infty(0,T)$. Por (2.71) e (2.76), segue pelo item (ii), do Lema 5.28, que

$$\left(wM\left(\|\nabla u^m(t)\|_2^2\right), (u_t^m(t), w_j)\right) \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} \left(wM\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right), (u_t(t), w_j)\right), \ \forall\, w \in L^\infty(0,T).$$

Em particular, se tomarmos $w = \theta \in \mathcal{D}(0,T)$, obtemos

$$\left(\theta M\left(\|\nabla u^m(t)\|_2^2\right), (u^m(t), w_j)\right) \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} \left(\theta M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right), (u(t), w_j)\right), \ \forall\, \theta \in \mathcal{D}(0,T),$$

isto é,

$$\int_0^T M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(u_t^m(t), w_j)\theta(t)dt \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(u_t(t), w_j)\theta(t)dt, \tag{2.77}$$

provando (2.60), como desejado.

Para mostrarmos (2.61), consideremos $\varphi \in \mathcal{V}_2$. Segue de (2.10) (Observação 2.2), da desigualdade de Hölder generalizada com $\dfrac{\rho}{2(\rho+2)} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\rho+2} = 1$ e da imersão $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$ que

$$\begin{aligned}
|(f(u^m(t)) - f(u(t)), \varphi)| &\le \int_\Omega |f(u^m(t)) - f(u(t))||\varphi| dx \\
&\le k_2 \int_\Omega (1 + |u^m(t)|^{\frac{\rho}{2}} + |u(t)|^{\frac{\rho}{2}})|u^m(t) - u(t)||\varphi| dx \\
&\le k_2 \|1 + |u^m(t)|^{\frac{\rho}{2}} + |u(t)|^{\frac{\rho}{2}}\|_{\frac{2(\rho+2)}{\rho}} \|u^m(t) - u(t)\|_2 \|\varphi\|_{\rho+2} \\
&\le k_2 \left(|\Omega|^{\frac{\rho}{2(\rho+2)}} + \|u^m(t)\|_{\rho+2}^{\frac{\rho}{2}} + \|u(t)\|_{\rho+2}^{\frac{\rho}{2}}\right) \|u^m(t) - u(t)\|_2 \|\varphi\|_{\rho+2} \\
&\le \overline{C} \left(|\Omega|^{\frac{\rho}{2(\rho+2)}} + \|\Delta u^m(t)\|_2^{\frac{\rho}{2}} + \|\Delta u(t)\|_2^{\frac{\rho}{2}}\right) \|u^m(t) - u(t)\|_2 \|\Delta\varphi\|_2,
\end{aligned}$$

com $\overline{C} = k_2 C_\rho > 0$, sendo $C_\rho = \mu_\rho \max\{1, \mu_\rho\}$. Entretanto, pela convergência fraco estrela $(2.56)_1$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(|\Omega|^{\frac{\rho}{2(\rho+2)}} + \|\Delta u^m(t)\|_2^{\frac{\rho}{2}} + \|\Delta u(t)\|_2^{\frac{\rho}{2}}\right) \le C.$$

Ou seja, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|(f(u^m(t)) - f(u(t)), \varphi)| \le C\|u^m(t) - u(t)\|_2 \|\Delta\varphi\|_2, \ \forall\, t \in [0,T]. \tag{2.78}$$

Logo, por (2.78), temos para $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T (f(u^m(t)) - f(u(t)), w_j)\,\theta(t)dt\right| &\leq \int_0^T |(f(u^m(t)) - f(u(t)), w_j)|\,|\theta(t)|dt \\ &\leq \max_{t\in[0,T]}(|\theta(t)|)\int_0^T C\|u^m(t) - u(t)\|_2\|\Delta w_j\|_2 dt \\ &\leq C\int_0^T \|u^m(t) - u(t)\|_2 dt.\end{aligned}$$

O que, devido à imersão $L^2(0,T;\mathcal{V}_0) \hookrightarrow L^1(0,T;\mathcal{V}_0)$ e à convergência (2.66), demonstra o limite (2.61).

Em posse das convergências (2.58)-(2.61), estamos aptos a proceder o limite em (2.55), quando $m \to \infty$, o que resulta em

$$\begin{aligned}-\int_0^T (u_t(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T (\Delta u(t), \Delta w_j)\theta(t)dt - \int_0^T\int_0^t g(t-s)(\Delta u(s), \Delta w_j)ds\theta(t)dt \\ + \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(u_t(t), w_j)\theta(t)\,dt + \int_0^T (f(u(t)), w_j)\theta(t)\,dt = 0.\end{aligned}$$

Integrando a primeira parcela por partes, segue que

$$\begin{aligned}\int_0^T \frac{d}{dt}((u_t(t), w_j))\theta(t)dt + \int_0^T (\Delta u(t), \Delta w_j)\theta(t)dt \\ - \int_0^T\int_0^t g(t-s)(\Delta u(s), \Delta w_j)ds\theta(t)dt \\ + \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(u_t(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (f(u(t)), w_j)\theta(t)dt = 0,\end{aligned} \tag{2.79}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Como (w_j) é base ortogonal para $\mathcal{V}_4$, temos que

$$\begin{aligned}\int_0^T \frac{d}{dt}((u_t(t), v))\theta(t)dt + \int_0^T (\Delta u(t), \Delta v)\theta(t)dt - \int_0^T\int_0^t g(t-s)(\Delta u(s), \Delta v)ds\theta(t)dt \\ + \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(u_t(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T (f(u(t)), v)\theta(t)dt = 0,\end{aligned}$$

ou ainda, aplicando o Teorema 5.13

$$\begin{aligned}\int_0^T \frac{d}{dt}((u_t(t), v))\theta(t)dt + \int_0^T (\Delta^2 u(t), v)\theta(t)dt \\ - \int_0^T\int_0^t g(t-s)(\Delta^2 u(s), v)ds\theta(t)dt \\ + \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(u_t(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T (f(u(t)), v)\theta(t)dt = 0,\end{aligned} \tag{2.80}$$

para cada $v \in \mathcal{V}_4$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Deste modo, dadas $v \in \mathcal{V}_4$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, temos que

$$\begin{gathered}\left\langle \frac{d}{dt}(u_t(t),v),\theta \right\rangle + \left\langle (\Delta^2 u(t),v),\theta \right\rangle - \left\langle \int_0^t g(t-s)(\Delta^2 u(s),v)ds,\theta \right\rangle \\ - \left\langle \left(M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right) u_t(t),v \right),\theta \right\rangle + \left\langle (f(u(t)),v),\theta \right\rangle = 0.\end{gathered}$$

isso implica que a função

$$u \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_4),\ u_t \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2)$$

satisfaz, para cada $v \in \mathcal{V}_4$, a equação

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}(u_t(t),v) + (\Delta^2 u(t),v) - \int_0^t g(t-s)(\Delta^2 u(s),v)ds \\ + \left(M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right) u_t(t),v \right) + (f(u(t)),v) = 0,\end{gathered}$$

para toda $\theta \in \mathcal{D}'(0,T)$.

Como $\mathcal{V}_4 \hookrightarrow \mathcal{V}_1 \hookrightarrow \mathcal{V}_0 \hookrightarrow \mathcal{V}_1' \hookrightarrow \mathcal{V}_4'$, cada termo de (2.80) pode ser reescrito como segue

$$\begin{aligned}\int_0^T \frac{d}{dt}(u_t(t),v)\theta(t)dt &= -\int_0^T (u_t(t),v)\theta'(t)dt \\ &= \left\langle -\int_0^T u_t(t)\theta'(t)dt, v \right\rangle \\ &= \langle \langle u_{tt}(t),\theta\rangle, v\rangle, \\ \int_0^T (\Delta^2 u(t),v)\theta(t)dt &= \left\langle \int_0^T \Delta^2 u(t)\theta(t)dt, v \right\rangle \\ &= \left\langle \langle \Delta^2 u(t),\theta\rangle, v \right\rangle, \\ \int_0^T \int_0^t g(t-s)(\Delta^2 u(s),v)ds\theta(t)dt &= \int_0^T \left((g*\Delta^2 u)(t),v \right)\theta(t)dt \\ &= \left\langle \int_0^T (g*\Delta^2 u)(t)\theta(t)dt, v \right\rangle \\ &= \left\langle \langle (g*\Delta^2 u)(t),\theta\rangle, v \right\rangle, \\ \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(u_t(t),v)\theta(t)dt &= \int_0^T (M(\|\nabla u(t)\|_2^2)u_t(t),v)\theta(t)dt \\ &= \left\langle \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)u_t(t)\theta(t)dt, v \right\rangle \\ &= \left\langle \langle M(\|\nabla u(t)\|_2^2)u_t(t),\theta\rangle, v \right\rangle,\end{aligned}$$

$$\int_0^T (f(u(t)),v)\theta(t)dt = \left\langle \int_0^T f(u(t))\theta(t)dt, v \right\rangle$$
$$= \langle\langle f(u(t)),\theta\rangle, v\rangle .$$

Assim, podemos reescrever (2.80) como

$$\langle\langle u_{tt}(t),\theta\rangle, v\rangle + \left\langle\langle\Delta^2 u(t),\theta\rangle, v\right\rangle - \left\langle\langle(g*\Delta^2 u)(t),\theta\rangle, v\right\rangle$$
$$+ \left\langle\langle M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right) u_t(t),\theta\rangle, v\right\rangle + \langle\langle f(u(t)),\theta\rangle, v\rangle = 0$$

ou seja,

$$\left\langle\left\langle u_{tt}(t) + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)\, ds + M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right) u_t(t) + f(u(t)), \theta(t)\right\rangle, v\right\rangle = 0$$

para cada $v \in \mathcal{V}_4$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Assim,

$$u_{tt}(t) + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)\, ds + M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right) u_t(t) + f(u(t)) = 0, \qquad (2.81)$$

em $\mathcal{D}'(0,T;\mathcal{V}_4')$.

Temos que,

$$\Delta^2 u,\ M\left(\|\nabla u(t)\|\right) u_t,\ g*\Delta^2 u,\ f(u) \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0). \qquad (2.82)$$

De fato, pela segunda desigualdade de (2.10) e pelas imersões $\mathcal{V}_4 \hookrightarrow \mathcal{V}_0$ e $\mathcal{V}_4 \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned}
\|f(u(t))\|_2^2 &= \int_\Omega |f(u(t))|^2\, dx \\
&\le \int_\Omega \left[k_2\left(1+|u(t)|^{\rho/2}\right)|u(t)|\right]^2 dx \\
&\le 2k_2 \int_\Omega \left(|u(t)|^2 + |u(t)|^{\rho+2}\right) dx \\
&\le 2k_2 \left(\|u(t)\|_2^2 + \|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2}\right) \\
&\le C\left(\left\|\Delta^2 u(t)\right\|_2^2 + \left\|\Delta^2 u(t)\right\|_2^{\rho+2}\right) < \infty,
\end{aligned}$$

ou seja, $f(u) \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0)$. A limitação dos demais termos segue diretamente.

De (2.81) e (2.82), temos que $u_{tt} \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0)$ e, por conseguinte,

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)\, ds + M(\|\nabla u(t)\|_2^2)u_t + f(u) = 0 \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0),$$

com

$$u \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_4), \quad u_t \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2), \quad u_{tt} \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0). \tag{2.83}$$

Ou ainda, por (2.83) e pelo Lema 5.15, temos que

$$u \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_4) \cap C([0,T];\mathcal{V}_2) \cap C^1([0,T];\mathcal{V}_0).$$

Dados Iniciais: Mostremos que $u(0) = u_0$ e $u_t(0) = u_1$. Primeiramente, vejamos que $u(0) = u_0$. De fato, seja $\theta \in C^1([0,T])$, de tal modo que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Como $u_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} u_t$ em $L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2)$ e $\nu_j = w_j\theta \in L^1(0,T;\mathcal{V}_2')$, temos que

$$\langle \nu_j, u_t^m(t)\rangle \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \langle \nu_j, u_t(t)\rangle,$$

ou ainda,

$$\int_0^T (u_t^m(t), w_j)\theta(t)dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (u_t(t), w_j)\theta(t)dt.$$

Integrando por partes, segue que

$$-(u^m(0), w_j) - \int_0^T (u^m(t), w_j)\theta'(t)dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} -(u(0), w_j) - \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)dt.$$

De maneira análoga, da convergência $u^m \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T;\mathcal{V}_4)$, como $\eta_j = w_j\theta' \in L^1(0,T;\mathcal{V}_4')$, temos que

$$\int_0^T (u^m(t), w_j)\theta'(t)dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)dt.$$

Deste modo,

$$(u^m(0), w_j) = \left((u^m(0), w_j) + \int_0^T (u^m(t), w_j)\theta'(t)dt\right) - \int_0^T (u^m(t), w_j)\theta'(t)dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} (u(0), w_j).$$

Por hipótese, temos que $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é base ortogonal de $\mathcal{V}_4$, temos que

$$(u^m(0), v) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} (u(0), v), \ \forall\, v \in \mathcal{V}_4.$$

Logo, $u^m(0) \rightharpoonup u(0)$ em $\mathcal{V}_4$.

Por outro lado, pela convergência dos dados iniciais, sabemos que

$$u^m(0) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_0 \ \text{ em } \ \mathcal{V}_4.$$

O que implica que $u^m(0) \rightharpoonup u_0$ em $\mathcal{V}_4$, quando $m \to \infty$. Pela unicidade do limite fraco, obtemos que $u(0) = u_0$.

Agora, mostremos que $u_t(0) = u_1$. Seja $\theta \in C^1([0,T])$ definida anteriormente e sejam $j, m \in \mathbb{N}$ tais que $j \leq m$. Multiplicando (2.17) por θ e integrando sobre $[0,T]$, temos que

$$\int_0^T (u_{tt}^m(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (\Delta^2 u^m(t), w_j)\theta(t)dt - \int_0^T \int_0^t g(t-s)(\Delta^2 u^m(s), w_j)ds\theta(t)dt$$
$$+ \int_0^T M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(u_t^m(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (f(u^m(t)), w_j)\theta(t)dt = 0.$$

Integrando a primeira parcela por partes, segue que

$$\int_0^T (u_{tt}^m(t), w_j)\theta(t)dt = (u_t^m(t), w_j)\theta(t)\Big|_0^T - \int_0^T (u_t^m(t), w_j)\theta'(t)dt$$
$$= -(u_t^m(0), w_j) - \int_0^T (u_t^m(t), w_j)\theta'(t)dt.$$

Assim, substituindo na equação anterior, tomando o limite quando $m \longrightarrow \infty$, utilizando (2.19) e que $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é base de $\mathcal{V}_4$, temos que

$$-(u_1, v) - \int_0^T (u_t(t), v)\theta'(t)dt + \int_0^T (\Delta^2 u(t), v)\theta(t)dt - \int_0^T \int_0^t g(t-s)(\Delta^2 u(s), v)ds\theta(t)dt$$
$$+ \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(u_[t](t), v)\theta(t)dt + \int_0^T (f(u(t)), v)\theta(t)dt = 0, \ \forall\, v \in \mathcal{V}_4.$$

Note que, fazendo uso da integração por partes,

$$\int_0^T (u_t(t), v)\theta'(t)dt = -(u_t(0), v) - \int_0^T \frac{d}{dt}((u_t(t), v))\theta(t)dt, \ \forall\, v \in \mathcal{V}_4.$$

Logo,

$$-(u_1, v) + (u_t(0), v) + \int_0^T \frac{d}{dt}((u_t(t), v))\theta(t)dt + \int_0^T (\Delta^2 u(t), v)\theta(t)dt$$
$$+ \int_0^T \int_0^t g(t-s)(\Delta^2 u(s), v)ds\theta(t)dt + \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(u_t(t), v)\theta(t)dt$$
$$+ \int_0^T (f(u(t)), v)\theta(t)dt = 0,$$

para cada $v \in \mathcal{V}_4$. Logo, por (2.80),

$$(u_1, v) = (u_t(0), v), \ \forall\, v \in \mathcal{V}_4.$$

Como $\mathcal{V}_4$ é denso em $\mathcal{V}_2$, segue pela continuidade do produto interno que

$$(u_1, v) = (u_t(0), v), \ \forall\, v \in \mathcal{V}_2.$$

Portanto, $u_t(0) = u_1$.

Dependência Contínua e Unicidade: Consideremos $z^1 = (u, u_t)$ e $z^2 = (v, v_t)$ como sendo duas soluções fortes para o problema (2.1)-(2.4), com dados iniciais correspondentes $z_0^1 = (u_0, u_1)$ e $z_0^2 = (v_0, v_1)$, respectivamente. Definindo $w(t) = u(t) - v(t)$, então $z^1(t) - z^2(t) = (w(t), w_t(t))$ e w é solução forte do problema

$$\begin{aligned} w_{tt}(t) + \Delta^2 w(t) - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 w(s)ds + M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right) u_t(t) \\ -M\left(\|\nabla v(t)\|_2^2\right) v_t(t) + f\left(u(t)\right) - f\left(v(t)\right) = 0, \end{aligned} \tag{2.84}$$

com dados iniciais $(w(0), w_t(0)) = (u_0 - v_0, u_1 - v_1) := (w_0, w_1)$.

Multiplicando (2.84) por w_t e integrando sobre Ω, temos

$$\begin{aligned} (w_{tt}(t), w_t(t)) + (\Delta^2 w(t), w_t(t)) - \int_0^t g(t-s)(\Delta^2 w(s), w_t(t))ds \\ +M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right)(u_t(t), w_t(t)) - M\left(\|\nabla v(t)\|_2^2\right)(v_t(t), w_t(t)) \\ +(f\left(u(t)\right), w_t(t)) - (f\left(v(t)\right), w_t(t)) = 0. \end{aligned} \tag{2.85}$$

Como as seguintes identidades são válidas

$$\begin{aligned} (w_{tt}(t), w_t(t)) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_t(t)\|_2^2 \\ (\Delta w(t), \Delta w_t(t)) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta w(t)\|_2^2, \end{aligned}$$

podemos reescrever (2.85) como segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|w_t(t)\|_2^2 + \|\Delta w(t)\|_2^2\right\} - \int_0^t g(t-s)(\Delta w(s), \Delta w_t(t))ds \\ = M(\|\nabla v(t)\|_2^2)(v_t(t), w_t(t)) - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(u_t(t), w_t(t)) + (f\left(v(t)\right) - f\left(u(t)\right), w_t(t)). \end{aligned}$$

Ao somarmos e subtrairmos $M(\|\nabla v(t)\|_2^2)(u_t(t), w_t(t))$ na expressão anterior e também utilizando (2.28), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|w_t(t)\|_2^2 + \|\Delta w(t)\|_2^2 - \left(\int_0^t g(s)ds\right)\|\Delta w(t)\|_2^2 + (g\Box\Delta w)(t)\right\} \\ = M\left(\|\nabla v(t)\right)\|_2^2\|w_t(t)\|_2^2 + \left[M(\|\nabla v(t)\|_2^2) - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\right](u_t(t), w_t(t)) \\ +(f\left(v(t)\right) - f\left(u(t)\right), w_t(t)) + \frac{1}{2}(g'\Box\Delta w)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\Delta w(t)\|_2^2. \end{aligned} \tag{2.86}$$

Pela imersão $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_1$ e pela estimativa (2.44), segue que

$$\|\nabla v(t)\|_2^2 \leq C.$$

Entretanto, temos por hipótese que $M \in C^1([0,\infty))$. Então,

$$\begin{aligned}
\left|M(\|\nabla v(t)\|_2^2) - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\right| &= \left|\int_{\|\nabla u(t)\|_2^2}^{\|\nabla v(t)\|_2^2} M'(\xi)\, d\xi\right| \\
&\le \int_{\|\nabla u(t)\|_2^2}^{\|\nabla v(t)\|_2^2} |M'(\xi)|\ d\xi. \\
&\le \max_{0\le\xi\le C}|M'(\xi)| \left(\|\nabla v(t)\|_2^2 - \|\nabla u(t)\|_2^2\right).
\end{aligned}$$

Como,

$$\|\nabla v(t)\|_2^2 - \|\nabla u(t)\|_2^2 = (\|\nabla v(t)\|_2 + \|\nabla u(t)\|_2)(\|\nabla v(t)\|_2 - \|\nabla u(t)\|_2),$$

segue

$$\begin{aligned}
\left|M(\|\nabla v(t)\|_2^2) - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\right| &\le C_6(\|\nabla v(t)\|_2 + \|\nabla u(t)\|_2)(\|\nabla v(t)\|_2 - \|\nabla u(t)\|_2) \\
&\le C_6(\|\nabla v(t)\|_2 + \|\nabla u(t)\|_2)(\|\nabla v(t) - \nabla u(t)\|_2) \\
&\le C_6(\|\nabla v(t)\|_2 + \|\nabla u(t)\|_2)\|\nabla w(t)\|_2,
\end{aligned}$$

com $C_6 = \max\limits_{0\le\xi\le C}|M'(\xi)|$. Com isso e a imersão $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_1$ em mente, e lembrando que $\|\nabla u(t)\|_2^2 \le C$, temos

$$\left|M(\|\nabla v(t)\|_2^2) - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\right| \le C\|\Delta w(t)\|_2. \tag{2.87}$$

Pela hipótese (2.5),

$$\frac{1}{2}(g'\square\Delta w)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\Delta w(t)\|_2^2 \le 0.$$

Disto, e substituindo (2.87) em (2.86), segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}&\left\{\|w_t(t)\|_2^2 + \|\Delta w(t)\|_2^2 - \left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\|\Delta w(t)\|_2^2 + (g\square\Delta w)(t)\right\} \\
&\le M\left(\|\nabla v(t)\|_2^2\right)\|w_t(t)\|_2^2 + C\|\Delta w(t)\|_2\,|(u_t(t), w_t(t))| \\
&\quad +(f\left(v(t)\right) - f\left(u(t)\right), w_t(t)).
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Agora, fazendo uso da hipótese (2.10), note que

$$\begin{aligned}
(f\left(v(t)\right) - f\left(u(t)\right), w_t(t)) &\le |(f\left(v(t)\right) - f\left(u(t)\right), w_t(t))| \\
&\le \int_\Omega |f\left(v(t)\right) - f\left(u(t)\right)||w_t(t))|dx \\
&\le k_2\int_\Omega \left(1 + |v(t)|^{\frac{\varrho}{2}} + |u(t)|^{\frac{\varrho}{2}}\right)|w(t)|\,|w_t(t))|\,dx
\end{aligned}$$

Além disso, como $\dfrac{\rho}{2(\rho+2)}+\dfrac{1}{\rho+2}+\dfrac{1}{2}=1$, pela desigualdade de Hölder generalizada e pela imersão $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$,

$$
\begin{aligned}
&(f(v(t))-f(u(t)), w_t(t)) \\
&\qquad \leq\; k_2 \left\| 1+|v(t)|^{\frac{\rho}{2}}+|u(t)|^{\frac{\rho}{2}} \right\|_{\frac{2(\rho+2)}{\rho}} \|w(t)\|_{\rho+2} \|w_t(t))\|_2 \\
&\qquad \leq\; k_2 \left(|\Omega|^{\frac{\rho}{2(\rho+2)}} + \|v(t)\|_{\rho+2}^{\frac{\rho}{2}} + \|u(t)\|_{\rho+2}^{\frac{\rho}{2}} \right) \|w(t)\|_{\rho+2} \|w_t(t))\|_2 \\
&\qquad \leq\; k_3 \left[|\Omega|^{\frac{\rho}{2(\rho+2)}} + \mu_\rho^{\frac{\rho}{2}} \left(\|\Delta v(t)\|_2^{\frac{\rho}{2}} + \|\Delta u(t)\|_2^{\frac{\rho}{2}} \right) \right] \|\Delta w(t)\|_2 \|w_t(t))\|_2 ,
\end{aligned}
$$

com $k_3 = k_2\mu_\rho$. No entanto, pela estimativa (2.41) e pela desigualdade de Young, temos

$$
\begin{aligned}
(f(v(t))-f(u(t)), w_t(t)) \leq\; & k_3 \left(|\Omega|^{\frac{\rho}{2(\rho+2)}} + 2\mu_2^{\frac{\rho}{2}} C \right) \|\Delta w(t)\|_2 \|w_t(t))\|_2 \\
\leq\; & C \|\Delta w(t)\|_2 \|w_t(t))\|_2 \\
\leq\; & C \left(\frac{1}{2} \|\Delta w(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|w_t(t)\|_2^2 \right) \\
\leq\; & C \left(\|\Delta w(t)\|_2^2 + \|w_t(t)\|_2^2 \right).
\end{aligned}
$$

Em tempo, como $[0, C]$ é compacto e $M \in C^1$, existe uma constante $C_7 > 0$ tal que $M(s) \leq C_7$ para todo $s \in [0, C]$. Deste modo, por (2.87), a desigualdade (2.88) pode ser reescrita como

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{ \|w_t(t)\|_2^2 + \|\Delta w(t)\|_2^2 - \left(\int_0^t g(s)ds \right) \|\Delta w(t)\|_2^2 + (g\Box\Delta w)(t) \right\} \\
&\leq C_7 \|w_t(t)\|_2^2 + C\|\Delta w(t)\|_2 |(u_t(t), w_t(t))| + C\left(\|\Delta w(t)\|_2^2 + \|w_t(t)\|_2^2 \right).
\end{aligned}
$$

ou ainda,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{ \|w_t(t)\|_2^2 + \left(1 - \int_0^t g(s)ds \right) \|\Delta w(t)\|_2^2 + (g\Box\Delta w)(t) \right\} \\
&\leq C_7 \|w_t(t)\|_2^2 + C\|\Delta w(t)\|_2 |(u_t(t), w_t(t))| + C\left(\|\Delta w(t)\|_2^2 + \|w_t(t)\|_2^2 \right).
\end{aligned}
$$

Note que, pela desigualdade de Cauchy-Scwhartz e, novamente, pela desigualdade de Young e da estimativa (2.41), segue que

$$
\begin{aligned}
C\|\Delta w(t)\|_2 |(u_t(t), w_t(t))| \leq & C\|\Delta w(t)\|_2 \|u_t(t)\|_2 \|w_t(t)\|_2 \\
\leq & C\|\Delta w(t)\|_2 \|w_t(t)\|_2 \\
\leq & C\left(\frac{1}{2}\|\Delta w(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|w_t(t)\|_2^2 \right) \\
\leq & C\left(\|\Delta w(t)\|_2^2 + \|w_t(t)\|_2^2 \right).
\end{aligned}
$$

Deste modo,

$$\frac{d}{dt}\left\{\|w_t(t)\|_2^2+\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\|\Delta w(t)\|_2^2+(g\Box\Delta w)(t)\right\}\leq C\left(\|\Delta w(t)\|_2^2+\|w_t(t)\|_2^2\right). \tag{2.89}$$

Integrando (2.89) sobre $[0,t]$, obtemos

$$\begin{aligned}\|w_t(t)\|_2^2+\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\|\Delta w(t)\|_2^2+(g\Box\Delta w)(t) &\leq \|w_t(0)\|_2^2+\|\Delta w(0)\|_2^2\\ &+C\int_0^t\left(\|\Delta w(s)\|_2^2+\|w_t(s)\|_2^2\right)ds.\end{aligned}$$

ou ainda, pela hipótese (2.5),

$$\begin{aligned}\|w_t(t)\|_2^2+l\|\Delta w(t)\|_2^2+(g\Box\Delta w)(t) &\leq \|w_1\|_2^2+\|\Delta w_0\|_2^2\\ &+C\int_0^t\left(\|\Delta w(s)\|_2^2+\|w_t(s)\|_2^2\right)ds.\end{aligned}$$

Como $(g\Box\Delta w)(t)\geq 0$ e $l<1$, segue que

$$l\left(\|w_t(t)\|_2^2+\|\Delta w(t)\|_2^2\right)\leq \|w_1\|_2^2+\|\Delta w_0\|_2^2+C\int_0^t\left(\|\Delta w(s)\|_2^2+\|w_t(s)\|_2^2\right)ds.$$

Logo,

$$\|w_t(t)\|_2^2+\|\Delta w(t)\|_2^2\leq \frac{\|w_1\|_2^2}{l}+\frac{\|\Delta w_0\|_2^2}{l}+C\int_0^t\left(\|\Delta w(s)\|_2^2+\|w_t(s)\|_2^2\right)ds.$$

Pelo Lema 5.5, existe uma constante $C_T>0$ tal que

$$\|w_t(t)\|_2^2+\|\Delta w(t)\|_2^2\leq C_T\left(\|w_1\|_2^2+\|\Delta w_0\|_2^2\right),\ \forall\, t\in[0,T],$$

sendo $C_T=\dfrac{\mathrm{e}^{CT}}{l}>0$ uma constante que independe de $m\in\mathbb{N}$, mas dependente de T e dos dados iniciais em $\mathcal{V}$. Lembrando que $w=u-v$ e $(w_0,w_1)=(u_0-v_0,u_1-v_1)$, temos que

$$\|u_t(t)-v_t(t)\|_2^2+\|\Delta u(t)-\Delta v(t)\|_2^2\leq C_T(\|u_1-v_1\|_2^2+\|\Delta u_0-\Delta v_0\|_2^2),\ \forall\, t\in[0,T],$$

ou ainda,

$$\|z^1(t)-z^2(t)\|_{\mathcal{V}}\leq C_T\|z_0^1-z_0^2\|_{\mathcal{V}},\ \ \forall\ \ t\in[0,T],$$

onde $C_T=C_T\left(T,\|z_0^1\|_{\mathcal{V}},\|z_0^2\|_{\mathcal{V}}\right)>0$. Em particular, se consideramos duas soluções fortes, z^1 e z^2, com mesmos dados iniciais, isto é, $z_0^1=z_0^2$, segue a unicidade da solução.

Isto encerra a demonstração do Teorema 2.2. □

2.3 Existência e Dependência Contínua de Solução Fraca

Nesta seção estabeleceremos a existência e dependência contínua de solução fraca para o problema (2.1)-(2.4), utilizando a existência de soluções fortes e argumentos de densidade.

Definição 2.3. *Uma função $u : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ na classe*

$$u \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2) \cap C(0,T;\mathcal{V}_2) \cap C^1(0,T;\mathcal{V}_0),$$

satisfazendo, para cada $v \in \mathcal{V}_2$, a equação

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(u_t(t),v) + (\Delta u(t),\Delta v) - \int_0^t g(t-s)(\Delta u(s),\Delta v)\ ds \\ +M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right)(u_t(t),v) + (f(u(t)),v) = 0\end{aligned}$$

*em $\mathcal{D}'(0,T)$ e as condições iniciais (2.4) é dita **solução fraca** do problema (2.1)-(2.4).*

Teorema 2.4. *Sob as hipóteses (2.5)-(2.9), dado $T > 0$, se $(u_0,u_1) \in \mathcal{V}$, então existe uma solução fraca para o problema (2.1)-(2.4). Além disso, tal solução fraca depende continuamente dos dados iniciais em $\mathcal{V}$. Mais precisamente, se $z^1 = (u,u_t)$ e $z^2 = (v,v_t)$ são duas soluções fracas do problema (2.1)-(2.4) correspondentes aos dados iniciais $z_0^1 = (u_0,u_1)$ e $z_0^2 = (v_0,v_1)$, então existe uma constante $K_T = K_T(T,\|z_0^1\|_{\mathcal{V}},\|z_0^2\|_{\mathcal{V}})$ tal que*

$$\|z^1(t) - z^2(t)\|_{\mathcal{V}} \leq K_T\|z_0^1 - z_0^2\|_{\mathcal{V}},\ \textit{para todo}\ t \in [0,T].$$

Demonstração. Seja $(u_0,u_1) \in \mathcal{V}$. Como $\mathcal{H}$ é denso em $\mathcal{V}$, existe uma sequência $(u_0^n,u_1^n) \in \mathcal{H}$ tal que

$$(u_0^n,u_1^n) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} (u_0,u_1)\ \text{ em }\ \mathcal{V}. \tag{2.90}$$

Entretanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, segue pelo Teorema 2.2 que existe uma única solução forte $(u^n,u_t^n) \in \mathcal{H}$ que satisfaz o problema

$$u_{tt}^n + \Delta u^n - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u^n(s)ds + M(\|\nabla u^n(t)\|_2^2)u_t^n + f(u^n) = 0 \text{ em } \Omega\times(0,\infty) \tag{2.91}$$

com condições de fronteira (2.2) ou (2.3) e condições iniciais

$$u^n(0) = u_0^n\ \text{ e }\ u_t^n(0) = u_1^n\ \text{ em }\ \Omega.$$

Dado $t \in [0,T]$ e $j \in \mathbb{N}$, consideremos o seguinte problema aproximado

$$\begin{aligned} (u_{tt}^n(t), w_j) + (\Delta u^n(t), \Delta w_j) - \int_0^t g(t-s)(\Delta u^n(s), \Delta w_j)ds \\ +M(\|\nabla u^n(t)\|_2^2)(u_t^n(t), w_j) + (f(u^n(t)), w_j) = 0. \end{aligned} \tag{2.92}$$

<u>*Estimativas a priori*</u>: A seguir, faremos estimativas para procedermos o limite na equação (2.92).

• <u>*Estimativa a priori I*</u>: De maneira análoga à utilizada para obter a Estimativa a priori I do Teorema 2.2 (ver (2.44)), segue que

$$\|\Delta u^n(t)\|_2^2 + \|u_t^n(t)\|_2^2 \leq C, \ \forall\, t \in [0,T] \ \text{ e } \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{2.93}$$

onde $C = C\left(\|\Delta u_0\|_2^2, \|u_1\|_2^2\right) > 0$.

• <u>*Estimativa a priori II*</u>: Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, tais que $m \leq n$, e considere duas soluções $z^m = (u^m, u_t^m)$ e $z^n = (u^n, u_t^n)$ do problema (2.92), com dados iniciais correspondentes $z_0^m = (u_0^m, u_1^m)$ e $z_0^n = (u_0^n, u_1^n)$, respectivamente. Definindo $w = u^n - u^m$, procedendo de forma semelhante às etapas (2.84)-(2.2), segue que

$$\|\Delta w(t)\|_2^2 + \|w_t(t)\|_2^2 \leq C_T \left(\|\Delta w(0)\|_2^2 + \|w_t(0)\|_2^2\right), \ \forall\, t \in [0,T], \tag{2.94}$$

sendo $C_T = C_T\left(\|\Delta u_0\|_2^2, \|u_1\|_2^2, T\right) > 0$. Deste modo,

$$\|z^n(t) - z^m(t)\|_{\mathcal{V}} \leq C_T \|z_0^n - z_0^m\|_{\mathcal{V}}, \ \forall\, t \in [0,T].$$

Considerando a norma do supremo,

$$\|z^n - z^m\|_{C([0,T];\mathcal{V})} \leq C_T \|z_0^n - z_0^m\|_{\mathcal{V}}. \tag{2.95}$$

Note que, pela convergêngia (2.90), (z_0^n) é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{V}$. Logo, por (2.95), (z^n) também é uma sequência de Cauchy em $C([0,T];\mathcal{V})$. Por conseguinte, como $C([0,T];\mathcal{V})$ é completo com esta norma, (z^n) é uma sequência convergente neste espaço, isto é, existe $z = (u, u_t) \in C([0,T];\mathcal{V})$ tal que

$$z^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z \text{ em } C([0,T];\mathcal{V}).$$

Ou seja,

$$(u^n, u_t^n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (u, u_t) \text{ em } C([0,T];\mathcal{V}). \tag{2.96}$$

Agora provaremos que (u, u_t) é uma solução fraca de (2.1)-(2.4).

<u>*Passagem ao Limite*</u>: Por (2.93), (2.96) e pelos Lemas 5.23 e 5.24, existe uma subsequência de

(u^n), também denotada por (u^n), tal que

$$\begin{aligned} u^n &\overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \;\; L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2), \\ u_t^n &\overset{*}{\rightharpoonup} u_t \quad \text{em} \;\; L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0), \\ u^n &\to u \quad \text{em} \;\; C([0,T];\mathcal{V}_2), \\ u_t^n &\to u_t \quad \text{em} \;\; C([0,T];\mathcal{V}_0). \end{aligned} \tag{2.97}$$

As convergências em (2.97) são suficientes para passarmos o limite no problema aproximado (2.92). De fato, procedendo de maneira análoga ao feito entre as etapas (2.56)-(2.79), temos que, para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, é válida a igualdade

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{d}{dt}(u_t(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (\Delta u(t), \Delta w_j)\theta(t)dt - \int_0^T \int_0^t g(t-s)(\Delta u(s), \Delta w_j)\theta(t)dsdt \\ + \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(u_t(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (f(u(t)), w_j)\theta(t)\, dt = 0. \end{aligned}$$

Como $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma base para $\mathcal{V}_2$, então

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{d}{dt}(u_t(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T (\Delta u(t), \Delta v)\theta(t)dt - \int_0^T \int_0^t g(t-s)(\Delta u(s), \Delta v)\theta(t)dsdt \\ + \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(u_t(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T (f(u(t)), v)\theta(t)dt = 0, \end{aligned} \tag{2.98}$$

para cada $v \in \mathcal{V}_2$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Reescrevendo (2.98), obtemos que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt}(u_t(t), v), \theta \right\rangle + \langle (\Delta u(t), \Delta v), \theta\rangle - \left\langle \int_0^t g(t-s)(\Delta u(s), \Delta v)ds, \theta \right\rangle \\ + \left\langle \left(M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right) u_t(t), v\right), \theta \right\rangle + \langle (f(u(t)), v), \theta\rangle = 0. \end{aligned} \tag{2.99}$$

O que implica que a função u pertencente à classe

$$u \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2) \cap C([0,T];\mathcal{V}_0)$$

satisfaz, para cada $v \in \mathcal{V}_2$, a equação

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u_t(t), v) + (\Delta u(t), \Delta v) - \int_0^t g(t-s)(\Delta u(s), \Delta v)ds \\ + \left(M\left(\|\nabla u(t)\|_2\right) u_t(t), v\right) + (f(u(t)), v) = 0, \end{aligned} \tag{2.100}$$

para toda $\theta \in \mathcal{D}'(0,T)$.

Por outro lado, uma vez que $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_1 \hookrightarrow \mathcal{V}_0 \hookrightarrow \mathcal{V}_1' \hookrightarrow \mathcal{V}_2'$, podemos reescrever cada termo de (2.98) como

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d}{dt}\left(u_t(t),v\right),\theta\right\rangle &= \int_0^T \frac{d}{dt}(u_t(t),v)\theta(t)dt\\
&= -\int_0^T (u_t(t),v)\theta'(t)dt\\
&= \left\langle -\int_0^T u_t(t)\theta'(t)dt, v\right\rangle\\
&= \left\langle\langle u_{tt}(t),\theta\rangle, v\right\rangle,\\
\left\langle(\Delta u(t),\Delta v),\theta\right\rangle &= \int_0^T (\Delta u(t),\Delta v)\theta(t)dt\\
&= \int_0^T \left\langle \Delta^2 u(t), v\right\rangle \theta(t)dt\\
&= \left\langle \int_0^T \Delta^2 u(t)\theta(t)dt, v\right\rangle\\
&= \left\langle\langle \Delta^2 u(t),\theta\rangle, v\right\rangle,\\
\left\langle \int_0^t g(t-s)(\Delta u(s),\Delta v)ds,\theta\right\rangle &= \int_0^T \int_0^t g(t-s)(\Delta u(s),\Delta v)ds\theta(t)dt\\
&= \int_0^T \left((g*\Delta^2 u)(t), v\right)\theta(t)dt\\
&= \left\langle \int_0^T (g*\Delta^2 u)(t)\theta(t)dt, v\right\rangle\\
&= \left\langle\langle (g*\Delta^2 u)(t),\theta\rangle, v\right\rangle,\\
\left\langle M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(u_t(t),v),\theta\right\rangle &= \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(u_t(t),v)\theta(t)dt\\
&= \int_0^T (M(\|\nabla u(t)\|_2^2)u_t(t),v)\theta(t)dt\\
&= \left\langle \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)u_t(t)\theta(t)dt, v\right\rangle\\
&= \left\langle\langle M(\|\nabla u(t)\|_2^2)u_t(t),\theta\rangle, v\right\rangle,\\
\left\langle (f(u(t)),v),\theta\right\rangle &= \int_0^T (f(u(t)),v)\theta(t)dt\\
&= \left\langle \int_0^T f(u(t))\theta(t)dt, v\right\rangle\\
&= \left\langle\langle f(u(t)),\theta\rangle, v\right\rangle.
\end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever (2.98) como

$$\begin{aligned}
&\left\langle\langle u_{tt}(t),\theta\rangle, v\right\rangle + \left\langle\langle \Delta^2 u(t),\theta\rangle, v\right\rangle - \left\langle\langle (g*\Delta^2 u)(t),\theta\rangle, v\right\rangle\\
&\quad + \left\langle\langle M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right)u_t(t),\theta\rangle, v\right\rangle + \left\langle\langle f(u(t)),\theta\rangle, v\right\rangle = 0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left\langle\left\langle u_{tt}(t) + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)\,ds + M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right) u_t(t) + f(u(t)), \theta(t)\right\rangle, v\right\rangle = 0,$$

para toda $v \in \mathcal{V}_2$ e cada $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Assim,

$$u_{tt}(t) + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)\,ds + M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right) u_t(t) + f(u(t)) = 0 \tag{2.101}$$

em $\mathcal{D}'(0,T;\mathcal{V}_2')$.

Provaremos que

$$\Delta^2 u,\ M\left(\|\nabla u(t)\|\right) u_t,\ g * \Delta^2 u,\ f(u) \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2'). \tag{2.102}$$

Com efeito, seja $\phi \in \mathcal{V}_2$. Temos que

$$\langle \Delta^2 u(t), \phi\rangle = (\Delta u(t), \Delta\phi) \leq \|\Delta u(t)\|_2 \|\Delta\phi\|_2 \leq \|u\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2)} \|\Delta\phi\|_2 .$$

Deste modo,

$$\left\|\Delta^2 u(t)\right\|_{\mathcal{V}_2'} \leq \|u\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2)} < \infty, \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Fazendo uso do Teorema 5.16, também temos que

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(g * \Delta^2 u\right)(t), \phi\right\rangle &= \langle \Delta\left(g * \Delta u\right)(t), \phi\rangle \\
&\leq \left(\left(g * \Delta u\right)(t), \Delta\phi\right) \\
&\leq \left\|\int_0^t g(t-s)\Delta u(s) ds\right\|_2 \|\Delta\phi\|_2 \\
&\leq \int_0^t g(t-s)\|\Delta u(s)\|_2\, ds\, \|\Delta\phi\|_2 \\
&\leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \|u\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2)} \|\Delta\phi\|_2 .
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left\|\left(g * \Delta^2 u\right)(t)\right\|_{\mathcal{V}_2'} \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \|u\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2)} < \infty, \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Portanto,

$$\Delta^2 u,\ g * \Delta^2 u \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2').$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
M\left(\|\nabla u(t)\|\right) u_t \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0) &\hookrightarrow L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2'),\\
f(u) \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0) &\hookrightarrow L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2').
\end{aligned}
$$

De (2.101) e (2.102), concluímos que

$$
u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds + M(\|\nabla u(t)\|_2^2)u_t + f\left(u\right) = 0 \text{ em } L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2'), \tag{2.103}
$$

com

$$
u \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2), \quad u_t \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_0), \quad u_{tt} \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2').
$$

Finalmente, pelas duas primeiras convergências em (2.97), por (2.103) e pelo Lema 5.15, temos que

$$
u \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}_2) \cap C(0,T;\mathcal{V}_2) \cap C^1(0,T;\mathcal{V}_0).
$$

Dados Iniciais: A demonstração é análoga à feita no Teorema 2.2.
Dependência Contínua: Sejam $z_{1,0} = (u_0,u_1), z_{2,0} = (v_0,v_1) \in \mathcal{V}$, respectivamente. Pela densidade de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{V}$, existem sequências $(z_{1,0}^n) = (u_0^n,u_1^n)$ e $(z_{2,0}^n) = (v_0^n,v_1^n)$ em $\mathcal{H}$ tais que

$$
\begin{aligned}
(z_{1,0}^n) &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_{1,0}\\
(z_{2,0}^n) &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_{2,0}.
\end{aligned} \tag{2.104}
$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, sejam $z_1^n = (u^n,u_t^n)$ e $z_2^n = (v^n,v_t^n)$ duas sequências de soluções fortes do problema (2.1)-(2.4), associadas aos dados iniciais $(z_{1,0}^n)$ e $(z_{2,0}^n)$, respectivamente, satisfazendo

$$
\begin{aligned}
(u^n,u_t^n) &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (u,u_t) \;\text{ em }\; C([0,T];\mathcal{V}),\\
(v^n,v_t^n) &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (v,v_t) \;\text{ em }\; C([0,T];\mathcal{V}).
\end{aligned} \tag{2.105}
$$

Pelo Teorema 2.2,

$$
\|z_1^n(t) - z_2^n(t)\|_{\mathcal{V}} \leq K_T\|z_{1,0}^n - z_{2,0}^n\|_{\mathcal{V}}, \; \forall\, t \in [0,T] \text{ e } \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{2.106}
$$

com $K_T = K_T(T,\|z_{1,0}^n\|_{\mathcal{V}},\|z_{2,0}^n\|_{\mathcal{V}}) > 0$. Entretanto,

$$
\begin{aligned}
\left|\|z_{1,0}^n - z_{2,0}^n\|_{\mathcal{V}} - \|z_{1,0} - z_{2,0}\|_{\mathcal{V}}\right| \leq& \|z_{1,0}^n - z_{2,0}^n - z_{1,0} + z_{2,0}\|_{\mathcal{V}}\\
\leq& \|z_{1,0}^n - z_{1,0}\|_{\mathcal{V}} + \|z_{2,0}^n - z_{2,0}\|_{\mathcal{V}}.
\end{aligned}
$$

Pelas convergências (2.104), temos que

$$\big|\|z_{1,0}^n - z_{2,0}^n\|_{\mathcal{V}} - \|z_{1,0} - z_{2,0}\|_{\mathcal{V}}\big| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

O que implica que

$$\|z_{1,0}^n - z_{2,0}^n\|_{\mathcal{V}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|z_{1,0} - z_{2,0}\|_{\mathcal{V}}.$$

Procedendo de maneira análoga,

$$\begin{aligned} |\|z_1^n(t) - z_2^n(t)\|_{\mathcal{V}} - \|z_1(t) - z_2(t)\|_{\mathcal{V}}| &\leq \|z_1^n(t) - z_1(t)\|_{\mathcal{V}} - \|z_2^n(t) - z_2(t)\|_{\mathcal{V}} \\ &\leq \|z_1^n - z_1\|_{C([0,T];\mathcal{V})} - \|z_2^n - z_2\|_{C([0,T];\mathcal{V})}, \end{aligned}$$

para cada $t \in [0,T]$. Pelas convergências (2.105), segue que

$$|\|z_1^n(t) - z_2^n(t)\|_{\mathcal{V}} - \|z_1(t) - z_2(t)\|_{\mathcal{V}}| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \forall\, t \in [0,T],$$

ou seja,

$$\|z_1^n(t) - z_2^n(t)\|_{\mathcal{V}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|z_1(t) - z_2(t)\|_{\mathcal{V}},\ \forall\, t \in [0,T].$$

Deste modo, procedendo o limite quando $n \longrightarrow \infty$ em (2.106), temos que

$$\|z_1(t) - z_2(t)\|_{\mathcal{V}} \leq K_T\|z_{1,0} - z_{2,0}\|_{\mathcal{V}},,\ \forall\, t \in [0,T].$$

O que demonstra a dependência contínua de soluções fracas em $\mathcal{V}$ e encerra a demonstração deste resultado. $\square$

2.4 EXEMPLOS DE f

Nesta seção iremos exemplificar funções que satisfaçam as condições (2.7) e (2.9). De maneira mais geral, serão expostos alguns exemplos de funções tais que

$$|f'(s)| \leq k\,(1 + |s|^q)\,,\ \ \forall\, s \in \mathbb{R}, \tag{2.107}$$

$$-a_1 s^2 \leq \widehat{f}(s) \leq f(s)s + a_2 s^2,\ \ \forall\, s \in \mathbb{R}, \tag{2.108}$$

para constantes $k, q > 0$ e $a_1, a_2 \geq 0$. Sem perda de generalidade, consideraremos $f(0) = 0$. Do contrário, se $f(0) = f_0 \neq 0$, basta definirmos $f_1(s) = f(s) - f_0$ e, assim, teremos $f_1(0) = 0$. Note ainda que $|f_1'(s)| = |f'(s)|$ e $\widehat{f_1}(s) = \widehat{f}(s) - sf_0$.

Exemplo 2.1. A função

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto f(s) = |s|^q\, s, \quad q > 0, \end{aligned}$$

satisfaz as hipóteses (2.107) e (2.108) para qualquer $s \in \mathbb{R}$.

De fato, como $f'(s) = (q+1)\,|s|^q$, considerando $k = q+1 > 0$, temos

$$\begin{aligned} |f'(s)| &= k\,|s|^q \\ &\leq k\,(1 + |s|^q)\,, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por $\widehat{f}(s) = \dfrac{1}{q+2}\,|s|^{q+2} \geq 0$, temos

$$-a_1 s^2 \leq \widehat{f}(s), \quad \forall\, a_1 \geq 0 \ \text{ e } \ \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, como $\dfrac{1}{q+2} \leq 1$,

$$\begin{aligned} \widehat{f}(s) &\leq |s|^{q+2} \\ &\leq |s|^q\,|s|^2 \\ &\leq |s|^q\, s^2 \\ &\leq f\,(s)\, s \\ &\leq f\,(s)\, s + a_2 s^2, \quad \forall\, a_2 \geq 0 \ \text{ e } \ \forall\, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

O que mostra que as condições (2.107) e (2.108) são satisfeitas.

Exemplo 2.2. Consideremos a função

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto f(s) = a\,|s|^q\, s + bs, \quad a, q > 0 \ \text{ e } \ b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Mostraremos que as hipóteses (2.107) e (2.108) são satisfeitas.

Com efeito, por $f'(s) = a\,(q+1)\,|s|^q + b$, temos que

$$\begin{aligned} |f'(s)| &\leq a\,(q+1)\,|s|^q + |b| \\ &\leq \max\{a\,(q+1)\,, |b|\}\,(|s|^q + 1) \\ &\leq k\,(1 + |s|^q)\,, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

sendo $k = \max\{a\,(q+1)\,, |b|\} > 0$, ou seja, a condição (2.107) é satisfeita.

Agora, observe que $\widehat{f}(s) = \dfrac{a}{q+2}|s|^{q+2} + \dfrac{b}{2}s^2 \geq 0$. Assim,

$$-a_1 s^2 \leq \widehat{f}(s), \ \ \forall\, a_1 \geq 0 \ \text{ e } \ \forall\, s \in \mathbb{R}. \tag{2.109}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\widehat{f}(s) &\leq a\,|s|^q\, s^2 + bs^2 \\ &\leq \left(a\,|s|^q\, s + bs\right) s \\ &\leq f(s)s \\ &\leq f(s)s + a_2 s^2, \ \ \forall\, a_2 \geq 0 \ \text{ e } \ \forall\, s \in \mathbb{R}.\end{aligned} \tag{2.110}$$

Logo, por (2.109) e (2.110), a condição (2.108) é satisfeita.

Exemplo 2.3. Consideremos

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto f(s) = \frac{s}{|s|^2+1}.\end{aligned}$$

Temos que

$$f'(s) = \frac{1-s^2}{\left(|s|^2+1\right)^2} \ \text{ e } \ \widehat{f}(s) = \frac{1}{2}\ln\left(s^2+1\right).$$

Note que

$$f'(s) \leq \frac{1}{\left(1+|s|^2\right)^2} \leq \frac{\left(1+|s|^2\right)^3}{\left(1+|s|^2\right)^2} \leq 1+|s|^2.$$

Isto é, f satisfaz a condição (2.107), com $k = 1$ e $q = 2$. Como $\ln\left(|s|^2+1\right) \geq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$, então

$$-a_1 s^2 \leq \widehat{f}(s), \ \ \forall\, a_1 \geq 0 \ \text{ e } \ \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, para provarmos a segunda desigualdade de (2.108), definamos

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto h(s) = \frac{1}{2}\ln\left(s^2+1\right) - \frac{s^2}{s^2+1} - s^2\end{aligned}$$

Como

$$f_1'(s) = -\frac{s\left(2s^4+3s^2+3\right)}{\left(s^2+1\right)^2},$$

temos que

$$\begin{cases} f_1'(s) > 0, & \text{se } \ s < 0; \\ f_1'(s) = 0, & \text{se } \ s = 0; \\ f_1'(s) < 0, & \text{se } \ s > 0. \end{cases}$$

Consequentemente, pelo Teste da Primeira Derivada, $s = 0$ é um máximo local de f_1. Além disso, f_1 é crescente em $(-\infty, 0)$, uma vez que possui derivada positiva neste intervalo, e decrescente em $(0, \infty)$, pois possui derivada negativa neste intervalo. Portanto, $s = 0$ é um máximo global de f_1. Assim,

$$\frac{1}{2}\ln(s^2+1) - s^2 - \frac{s^2}{s^2+1} = f_1(s) \leq f_1(0) = 0, \ \ \forall\, s \in \mathbb{R},$$

ou ainda,

$$\frac{1}{2}\ln(|s|^2+1) \leq \frac{s^2}{|s|^2+1} + s^2, \ \ \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Deste modo,

$$\frac{1}{2}\ln(|s|^2+1) \leq \frac{s^2}{|s|^2+1} + a_2 s^2, \ \ \forall\, a_2 \geq 1 \ \text{ e } \ \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Portanto, f satisfaz a condição (2.108) para cada $a_1 \geq 0$ e $a_2 \geq 1$.

3 ESTABILIDADE DE ENERGIA

Neste capítulo mostraremos que o funcional energia associado ao problema (2.1)-(2.4) decai de forma geral, incluindo taxas como exponencial e polinomial, entre outras.

3.1 O FUNCIONAL DE ENERGIA

Seja u uma solução forte de (2.1)-(2.4) com dados iniciais (u_0, u_1). Multiplicando (2.1) por u_t e integrando sobre Ω, temos

$$\begin{aligned} (u_{tt}(t), u_t(t)) + (\Delta^2 u(t), u_t(t)) - \int_0^t g(t-s)(\Delta^2 u(s), u_t(t))ds \\ +M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right)\|u_t(t)\|_2^2 + (f(u(t)), u_t(t)) = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Definindo o funcional energia correspondente ao problema (2.1)-(2.4) por

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\left\{\|u_t(t)\|_2^2 + \left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|\Delta u(t)\|_2^2 + (g\square\Delta u)(t)\right\} + \int_\Omega \widehat{f}(u(t))dx, \tag{3.2}$$

podemos reescrever (3.1) como

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) + M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right)\|u_t(t)\|_2^2 = \frac{1}{2}\left(g'\square\Delta u\right)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\Delta u(t)\|_2^2. \tag{3.3}$$

Entretanto, sabemos que

$$M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right)\|u_t(t)\|_2^2 \geq 0,\ \frac{1}{2}g(t)\|\Delta u(t)\|_2^2 > 0 \text{ e } \frac{1}{2}\left(g'\square\Delta u\right)(t) < 0,\ \forall\, t > 0,$$

temos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) \leq 0,\ \forall\, t > 0, \tag{3.4}$$

ou seja, $\mathcal{E}(t)$ é decrescente.

Antes de prosseguirmos, vejamos um resultado que nos garante que $\mathcal{E}(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$.

Lema 3.1. *O funcional energia $\mathcal{E}(t)$ satisfaz*

$$\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 \leq \frac{\mathcal{E}(t)}{\beta_1}, \quad \forall\, t \geq 0. \tag{3.5}$$

Demonstração. Pelas hipóteses (2.5), (2.9) e pela imersão $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_0$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(t) =& \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g\square\Delta u(t)) + \int_\Omega \widehat{f}(u(t))dx \\
\geq& \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g\square\Delta u(t)) - \frac{l\beta}{2}\|u(t)\|_2^2 \\
\geq& \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{l}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 - \frac{l\beta}{2\mu_1}\|\Delta u(t)\|_2^2 \\
\geq& \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}l\left(1 - \frac{\beta}{\mu_1}\right)\|\Delta u(t)\|_2^2 \\
\geq& \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\beta_1}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 \\
\geq& \beta_1\left(\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2\right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 \leq \frac{\mathcal{E}(t)}{\beta_1}, \quad \forall\, t \geq 0,$$

como desejado. $\square$

Nas próximas duas seções, mostraremos que o funcional energia $\mathcal{E}(t)$ associado ao problema (2.1)-(2.4) decai ao menos a uma de taxa de decaimento exponencial analisando os casos em que

$$g(0) = 0 \text{ e } M(s) > 0, \quad \forall\, s \geq 0$$

ou

$$g(0) > 0 \text{ e } M(s) \geq 0, \quad \forall\, s \geq 0.$$

3.2 Decaimento Geral de Energia - Caso I

Nesta seção, analisaremos o decaimento geral de energia quando $g(0) = 0$ e $M(s) > 0$ para todo $s \in [0, \infty)$.

Primeiramente, note que se $g(0) = 0$, então $g \equiv 0$, uma vez que por hipótese g é uma função não negativa e decrescente. Como consequências, na hipótese (2.5) temos que $l = 1$ e o problema (2.1)-(2.4) se reduz a

$$u_{tt} + \Delta^2 u + M(\|\nabla u(t)\|_2^2)u_t + f(u) = 0 \text{ em } \Omega \times (0, \infty), \tag{3.6}$$

sujeita à uma das seguintes condições de fronteira

$$u = \Delta u = 0 \text{ sobre } \Gamma \times [0, \infty) \tag{3.7}$$

ou

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma \times [0, \infty), \tag{3.8}$$

sendo ν vetor unitário normal, com as seguintes condições iniciais

$$u(\cdot, 0) = u_0, \; u_t(\cdot, 0) = u_1 \text{ em } \Omega. \tag{3.9}$$

Definição 3.2. *Uma função $u : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}$ na classe*

$$u \in C\left([0, T]; \mathcal{V}_2\right) \cap C^1\left([0, T]; \mathcal{V}_0\right) \cap L^\infty\left(0, T; \mathcal{V}_4\right),$$

*satisfazendo (3.6) quase sempre em $\Omega \times (0, T)$ e as condições iniciais (3.9) quase sempre sobre Ω é dita **solução forte** do problema (3.6)-(3.9).*

Definição 3.3. *Uma função $u : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}$ na classe*

$$u \in C\left([0, T]; \mathcal{V}_0\right) \cap C^1\left([0, T]; \mathcal{V}_0\right) \cap L^\infty\left(0, T; \mathcal{V}_2\right),$$

satisfazendo, para cada $v \in \mathcal{V}_2$, a equação

$$\frac{d}{dt}\left(u_t(t), v\right) + \left(\Delta u(t), \Delta v\right) + M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right)\left(u_t(t), v\right) + \left(f(u(t)), v\right) = 0$$

*em $\mathcal{D}'(0, T)$ é dita **solução fraca** do problema (3.6)-(3.9).*

Teorema 3.4. *Dado $T > 0$ arbitrário, sob as hipóteses (2.6)-(2.9), se $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$, então existe uma solução forte u para o problema (3.6)-(3.9). Além disso, tal solução depende continuamente dos dados iniciais em $\mathcal{V}$. Mais precisamente, se $z^1 = (u, u_t)$ e $z^2 = (v, v_t)$ são duas soluções do problema (3.6) correspondentes aos dados iniciais $z_0^1 = (u_0, u_1)$ e $z_0^2 = (v_0, v_1)$, respectivamente, então existe uma constante $C_T = C_T(T, \|z_0^1\|_{\mathcal{V}}, \|z_0^2\|_{\mathcal{V}})$ tal que*

$$\|z^1(t) - z^2(t)\|_{\mathcal{V}} \leq C_T \|z_0^1 - z_0^2\|_{\mathcal{V}}.$$

Em particular, a solução forte é única.

Demonstração. A prova segue de maneira análoga à do Teorema 2.2, considerando a função núcleo da memória $g \equiv 0$. □

Note que podemos reescrever (3.1) e o funcional energia (3.2) como segue

$$(u_{tt}(t), u_t(t)) + (\Delta^2 u(t), u_t(t)) + M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\,\|u_t(t)\|_2^2 + (f(u(t)), u_t(t)) = 0, \tag{3.10}$$

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \int_\Omega \widehat{f}(u(t))dx. \tag{3.11}$$

Deste modo, podemos reduzir (3.10) a

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) + M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right)\|u_t(t)\|_2^2 = 0,\ \forall\, t > 0. \tag{3.12}$$

Por $M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right)\|u_t(t)\|_2^2 > 0$ para cada $t \in (0,\infty)$, temos que (3.4) continua válida, isto é,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) \leq 0,\ \forall\, t > 0. \tag{3.13}$$

Logo, como o Lema 3.1 continua válido mesmo quando $g \equiv 0$, temos que

$$0 \leq \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0). \tag{3.14}$$

Por outro lado, pelas hipóteses (2.10) e (2.9), pelas desigualdades de Hölder e de Young e pelas imersões $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_0$ e $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(0) &= \frac{1}{2}\|u_1\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u_0\|_2^2 + \int_\Omega \widehat{f}(u_0)dx \\
&\leq \frac{1}{2}\|u_1\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u_0\|_2^2 + \int_\Omega |f(u_0)u_0|dx + \frac{l\beta}{2}\|u_0\|_2^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\|u_1\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u_0\|_2^2 + \|f(u_0)\|_2\|u_0\|_2 + \frac{l\beta}{2}\|u_0\|_2^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\|u_1\|_2^2 + \frac{1}{2}\|f(u_0)\|_2^2 + \frac{(2+l\beta)}{2\mu_1}\|\Delta u_0\|_2^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\|u_1\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u_0\|_2^{\rho+2} + \frac{(2+l\beta)}{2\mu_1}\|\Delta u_0\|_2^2 \\
&\leq C
\end{aligned} \tag{3.15}$$

sendo $C = C\left(\|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{V}}\right) > 0$.

Antes de enunciarmos o principal resultado desta seção, vejamos um lema que nos auxiliará a demonstrá-lo.

Lema 3.5. *Existe uma constante $m_1 > 0$ tal que o funcional energia $\mathcal{E}(t)$ satisfaz*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) \leq -m_1\|u_t(t)\|_2^2,\ \forall\, t > 0.$$

Demonstração. Como $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_1$, pelo Lema 3.1 temos

$$\|\nabla u(t)\|_2^2 \leq \frac{1}{\mu_2}\|\Delta u(t)\|_2^2 \leq \frac{2}{\mu_2\beta_1}\mathcal{E}(t) \leq \frac{2}{\mu_2\beta_1}\mathcal{E}(0),\ \forall\, t > 0,$$

isto é, existe uma constante $L := \dfrac{2}{\mu_2\beta_1} > 0$ tal que $\|\nabla u(t)\|_2^2 \in [0, L\mathcal{E}(0)]$, qualquer que seja $t \in (0,\infty)$. Como $M(s) > 0$, para cada $s \in [0,\infty)$, e M é uma função de classe C^1, existe uma constante $m_1 > 0$ tal que

$$M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right) \geq \min_{s\in[0,L\mathcal{E}(0)]} M(s) \geq m_1 > 0.$$

Portanto, por (3.12),

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) \leq -m_1\|u_t(t)\|_2^2, \ \forall\, t > 0.$$

$\square$

Finalmente, vamos enunciar e provar o principal resultado desta seção.

Teorema 3.6. *Sob as hipóteses do Teorema 3.4, o funcional energia satisfaz*

$$\mathcal{E}(t) \leq 3\mathcal{E}(0)\mathrm{e}^{-\gamma t}, \ \forall\, t \geq 0, \tag{3.16}$$

sendo

$$\gamma \sim \frac{m_1}{c_0 + c_1 M^2_{\mathcal{E}(0)}}, \ \textit{com } c_0, c_1, m_1 > 0.$$

Demonstração. A demonstração será dada em várias etapas, como segue.
Etapa 1 - Definindo Funcionais. Vamos definir a energia perturbada

$$\mathcal{E}_\varepsilon(t) = \mathcal{E}(t) + \varepsilon\Phi_1(t), \ \forall\, t \geq 0, \tag{3.17}$$

sendo $\varepsilon > 0$ a ser fixado posteriormente e

$$\Phi_1(t) = \int_\Omega u_t(t)u(t)dx. \tag{3.18}$$

Etapa 2 - Estimativas. A respeito do funcional energia perturbada definido na *Etapa 1*, existe uma constante $C_8 > 0$ tal que se $\varepsilon \leq \dfrac{1}{2C_8}$, temos

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}_\varepsilon(t) \leq \frac{3}{2}\mathcal{E}(t), \ \forall\, t \geq 0. \tag{3.19}$$

De fato, dado $t \in [0, \infty)$,

$$|\mathcal{E}_\varepsilon(t) - \mathcal{E}(t)| = \varepsilon\,|\Phi_1(t)| = \varepsilon\,|(u_t(t), u(t))|\,.$$

Pelas desigualdades de Hölder e de Young, pela imersão $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_0$ e pelo Lema 3.1

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}_\varepsilon(t) - \mathcal{E}(t)| &\leq \varepsilon \|u_t(t)\|_2 \|u(t)\|_2 \\
&\leq \varepsilon \left(\frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u(t)\|_2^2 \right) \\
&\leq \varepsilon \left(\frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2\mu_1} \|\Delta u(t)\|_2^2 \right) \\
&\leq \varepsilon \max \left\{ 1, \frac{1}{\mu_1} \right\} \left(\frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u(t)\|_2^2 \right) \\
&\leq \varepsilon C_8 \mathcal{E}(t), \ \forall\, t \geq 0,
\end{aligned}$$

onde $C_8 := \dfrac{1}{\beta_1} \max \left\{ 1, \dfrac{1}{\mu_1} \right\} > 0$. Logo,

$$(1 - \varepsilon C_8)\, \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}_\varepsilon(t) \leq (1 + \varepsilon C_8)\, \mathcal{E}(t), \ \forall\, t \geq 0 \text{ e } \forall\, \varepsilon > 0.$$

Escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de tal modo que $\varepsilon \leq \dfrac{1}{2C_8}$, temos

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}_\varepsilon(t) \leq \frac{3}{2}\mathcal{E}(t), \ \forall\, t \geq 0.$$

Etapa 3 - Derivada de Φ_1. Existem constantes $c_0,\ c_1 > 0$, que independem dos dados iniciais, tais que

$$\frac{d}{dt}\Phi_1(t) \leq \left(c_0 + c_1 M_{\mathcal{E}(0)}^2 \right) \|u_t(t)\|_2^2 - \frac{\beta_2}{2} \|\Delta u(t)\|_2^2 - \mathcal{E}(t), \ \forall\, t > 0, \tag{3.20}$$

onde $M_{\mathcal{E}(0)} := \max\limits_{s \in [0, L\mathcal{E}(0)]} M(s)$ e $\beta_2 = \dfrac{\beta_1}{2} > 0$.

De fato, diferenciando o funcional Φ_1, fazendo uso da equação (3.6) e do Teorema 5.13, temos que

$$\frac{d}{dt}\Phi_1(t) = \|u_t(t)\|_2^2 - \|\Delta u(t)\|_2^2 - (u(t), f\,(u(t))) + L_1, \tag{3.21}$$

sendo

$$L_1 = -M \left(\|\nabla u(t)\|_2^2 \right) (u(t), u_t(t)) \,,$$

Temos que $M(\|\nabla u(t)\|_2^2) \leq M_{\mathcal{E}(0)}$, para todo $t \in [0, \infty)$. Segue pelas desigualdades de Hölder, de Young e pela imersão $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_0$ que

$$\begin{aligned}|L_1| &\leq M_{\mathcal{E}(0)} \left|(u(t), u_t(t))\right| \\ &\leq \|u(t)\|_2 \, M_{\mathcal{E}(0)} \, \|u_t(t)\|_2 \\ &\leq \eta \, \|u(t)\|_2^2 + \frac{M_{\mathcal{E}(0)}^2}{4\eta} \, \|u_t(t)\|_2^2 \\ &\leq \frac{\eta}{\mu_1} \, \|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{M_{\mathcal{E}(0)}^2}{4\eta} \, \|u_t(t)\|_2^2 .\end{aligned}$$

Deste modo, por (3.21),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi_1(t) \leq & \left(1 + \frac{M_{\mathcal{E}(0)}^2}{4\eta}\right) \|u_t(t)\|_2^2 + \left(\frac{\eta}{\mu_1} - 1\right) \|\Delta u(t)\|_2^2 \\ & - (u(t), f\,(u(t))) + \mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t),\end{aligned}$$

ou ainda, de (2.9),

$$\frac{d}{dt}\Phi_1(t) \leq -\mathcal{E}(t) + \left(\frac{3}{2} + \frac{M_{\mathcal{E}(0)}^2}{4\eta}\right) \|u_t(t)\|_2^2 + \left(\frac{\eta}{\mu_1} - \frac{1}{2}\right) \|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{\beta}{2}\|u(t)\|_2^2.$$

Como $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_0$, segue que

$$\frac{d}{dt}\Phi_1(t) \leq -\mathcal{E}(t) + \left(\frac{3}{2} + \frac{M_{\mathcal{E}(0)}^2}{4\eta}\right) \|u_t(t)\|_2^2 + \left(\frac{\eta}{\mu_1} + \frac{\beta}{2\mu_1} - \frac{1}{2}\right) \|\Delta u(t)\|_2^2,$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt}\Phi_1(t) \leq -\mathcal{E}(t) + \left(\frac{3}{2} + \frac{M_{\mathcal{E}(0)}^2}{4\eta}\right) \|u_t(t)\|_2^2 + \left(\frac{\eta}{\mu_1} - \frac{\beta_1}{2}\right) \|\Delta u(t)\|_2^2, \ \forall \ t > 0.$$

Se tomarmos $\eta < \dfrac{\beta_1 \mu_1}{4}$, temos que

$$\frac{d}{dt}\Phi_1(t) \leq -\mathcal{E}(t) + \left(c_0 + c_1 M_{\mathcal{E}(0)}^2\right) \|u_t(t)\|_2^2 - \frac{\beta_2}{2} \, \|\Delta u(t)\|_2^2 \, , \ \forall \ t > 0,$$

sendo $\beta_2 = \dfrac{\beta_1}{2}$, $c_0 = \dfrac{3}{2}$ e $c_1 = \dfrac{1}{4\eta}$.

Etapa 4 - Derivada de $\mathcal{E}_\varepsilon$. Existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_\varepsilon(t) \leq -\varepsilon\mathcal{E}(t), \ \forall \ t > 0 \text{ e } \forall \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_1]. \tag{3.22}$$

Com efeito, por (3.17), pelo Lema 3.5 e por (3.20), temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{E}_\varepsilon(t) &= \frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) + \varepsilon\frac{d}{dt}\Phi_1(t)\\
&\leq -m_1\|u_t(t)\|_2^2 - \varepsilon\mathcal{E}(t) + \varepsilon\left(c_0 + c_1 M_{\mathcal{E}(0)}^2\right)\|u_t(t)\|_2^2 - \varepsilon\frac{\beta_2}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2\\
&\leq -\varepsilon\mathcal{E}(t) + \left[\varepsilon\left(c_0 + c_1 M_{\mathcal{E}(0)}^2\right) - m_1\right]\|u_t(t)\|_2^2 - \varepsilon\frac{\beta_2}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2,\ \forall\, t > 0,
\end{aligned}
$$

ou ainda,

$$
\frac{d}{dt}\mathcal{E}_\varepsilon(t) \leq -\varepsilon\mathcal{E}(t) - \left[m_1 - \varepsilon\left(c_0 + c_1 M_{\mathcal{E}(0)}^2\right)\right]\|u_t(t)\|_2^2,\ \forall\, t > 0.
$$

Definindo $\varepsilon_1 := \dfrac{m_1}{\left(c_0 + c_1 M_{\mathcal{E}(0)}^2\right)}$, segue que para todo $\varepsilon < \varepsilon_1$ vale

$$
\frac{d}{dt}\mathcal{E}_\varepsilon(t) \leq -\varepsilon\mathcal{E}(t),\ \ \forall\, t > 0.
$$

Etapa 5 - Conclusão. Definindo $\varepsilon_0 := \min\left\{\dfrac{1}{2C_8}, \varepsilon_1\right\}$, então, para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, a desigualdade (3.19) permanece válida, qualquer que seja $t \in [0, \infty)$.

Por outro lado, uma vez que $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1$, se $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, por (3.22) obtemos que

$$
\frac{d}{dt}\mathcal{E}_\varepsilon(t) \leq -\varepsilon\mathcal{E}(t),\ \forall\, t > 0.
$$

Ou ainda, por (3.19),

$$
\frac{d}{dt}\mathcal{E}_\varepsilon(t) \leq -\frac{2\varepsilon}{3}\mathcal{E}_\varepsilon(t),\ \forall\, t > 0,
$$

isto é,

$$
\frac{d}{dt}\mathcal{E}_\varepsilon(t) + \frac{2\varepsilon}{3}\mathcal{E}_\varepsilon(t) \leq 0,\ \forall\, t > 0.
$$

Logo,

$$
\frac{d}{dt}\mathcal{E}_\varepsilon(t)\mathrm{e}^{\frac{2\varepsilon}{3}t} + \frac{2\varepsilon}{3}\mathcal{E}_\varepsilon(t)\mathrm{e}^{\frac{2\varepsilon}{3}t} \leq 0,\ \forall\, t > 0.
$$

Daí,

$$
\frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}_\varepsilon(t)\mathrm{e}^{\frac{2\varepsilon}{3}t}\right) \leq 0,\ \forall\, t > 0.
$$

Deste modo, integrando a expressão anterior sobre $[0, t]$,

$$
\mathcal{E}_\varepsilon(t)\mathrm{e}^{\frac{2\varepsilon}{3}t} \leq \mathcal{E}_\varepsilon(0),\ \forall\, t > 0.
$$

Então,

$$\mathcal{E}_\varepsilon(t) \leq \mathcal{E}_\varepsilon(0)\mathrm{e}^{-\frac{2\varepsilon}{3}t}, \ \forall \, t > 0. \tag{3.23}$$

Novamente, por (3.19), segue de (3.23) que

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}(t) \leq \frac{3}{2}\mathcal{E}(0)\mathrm{e}^{-\frac{2\varepsilon}{3}t}, \ \forall \, t > 0,$$

ou seja,

$$\mathcal{E}(t) \leq 3\mathcal{E}(0)\mathrm{e}^{-\frac{2\varepsilon}{3}t}, \ \forall \, t > 0.$$

Portanto, existe $\gamma > 0$ tal que

$$\mathcal{E}(t) \leq 3\mathcal{E}(0)\mathrm{e}^{-\gamma t}, \ \forall \, t > 0, \tag{3.24}$$

sendo $\gamma = \dfrac{2\varepsilon}{3} > 0$ independente de M, porém

$$\gamma \sim \frac{m_1}{c_0 + c_1 M^2_{\mathcal{E}(0)}} > 0,$$

com $c_0, c_1, m_1 > 0$. $\square$

3.3 Decaimento Geral de Energia - Caso II

Nesta seção analisaremos o decaimento geral de energia para o caso em que $g(0) > 0$ e $M(s) \geq 0$ para todo $s \in [0, \infty)$.

Neste caso, por (3.4) temos que

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0), \ \forall \, t > 0.$$

Por outro lado, sabemos que

$$\mathcal{E}(0) \leq C < \infty,$$

sendo $C = C\left(\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{H}}\right) > 0$. Por hipótese, $M(s) \geq 0$, para todo $s \in [0, \infty)$. Logo, por (3.3),

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) \leq \frac{1}{2}\left(g' \Box \Delta u\right)(t), \ \forall \, t > 0, \tag{3.25}$$

uma vez que podemos ter $M \equiv 0$. Sendo assim, consideramos a seguinte hipótese adicional g.

Decaimento do núcleo da memória. Sejam $\xi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função de classe C^1 e $\xi_1 \geq 0$ uma constante tais que

$$g'(t) \leq -\xi(t)g(t), \quad \forall\, t > 0; \tag{G1}$$

$$\xi(t) > 0, \quad \xi'(t) \leq 0, \quad \left|\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\right| \leq \xi_1, \quad \forall\, t \geq 0. \tag{G2}$$

Note que pela hipótese (G1)

$$g'(t)\mathrm{e}^{\int_0^t \xi(s)ds} + \xi(t)g(t)\mathrm{e}^{\int_0^t \xi(s)ds} \leq 0,$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt}\left(g(t)\mathrm{e}^{\int_0^t \xi(s)ds}\right) \leq 0.$$

Logo,

$$g(t)\mathrm{e}^{\int_0^t \xi(s)ds} \leq g(0) \implies g(t) \leq \mathrm{e}^{-\int_0^t \xi(s)ds}g(0), \quad \forall\, t \geq 0.$$

Teorema 3.7. *Sob as hipóteses do Teorema 2.2, juntamente com as adicionais (G1) e (G2) sobre a função g, o funcional energia satisfaz*

$$\mathcal{E}(t) \leq K\mathrm{e}^{-\gamma\int_0^t \xi(s)ds}, \ \forall\, t \geq 0, \tag{3.26}$$

sendo $K = 3\mathcal{E}(0)\mathrm{e}^{\gamma\int_0^1 \xi(s)ds} > 0$ e

$$\gamma \sim \frac{c_4}{\left(1 + M_{\mathcal{E}(0)}^2 + \mathcal{E}(0)^{\frac{\varrho}{2}}\right)}, \textit{ para algum } c_4 > 0. \tag{3.27}$$

Demonstração. A demonstração será dada em etapas, como feito na seção anterior.
Etapa 1 - Definindo Funcionais. Primeiramente, vamos definir o funcional energia perturbada por

$$\mathcal{F}(t) := \mathcal{E}(t) + \varepsilon_1\Phi(t) + \varepsilon_2\Psi(t), \ \forall\, t \geq 0, \tag{3.28}$$

sendo $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ fixados posteriormente e

$$\Phi(t) = \xi(t)\int_\Omega u_t(t)u(t)dx \tag{3.29}$$

e

$$\Psi(t) = -\xi(t)\int_\Omega u_t(t)\left(\int_0^t g(t-s)\left[u(t) - u(s)\right]dt\right)dx. \tag{3.30}$$

<u>*Etapa 2 - Estimativa.*</u> Dos funcionais definidos acima, temos que existe uma constante $C_{11} > 0$ tal que se $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \dfrac{1}{2C_{11}}$,

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{F}(t) \leq \frac{3}{2}\mathcal{E}(t), \ \forall \, t > 0. \tag{3.31}$$

Com efeito, inicialmente note que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(t) &\geq \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(g\Box\Delta u(t)\right) - \frac{l\beta}{2}\|u(t)\|_2^2 \\
&\geq \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{l}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(g\Box\Delta u(t)\right) - \frac{l\beta}{2\mu_1}\|\Delta u(t)\|_2^2 \\
&\geq \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}l\left(1 - \frac{\beta}{\mu_1}\right)\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(g\Box\Delta u(t)\right) \\
&\geq \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\beta_1}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(g\Box\Delta u(t)\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{E}(t) \geq \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\beta_1}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(g\Box\Delta u(t)\right), \ \ \forall \, t > 0. \tag{3.32}$$

Observe também que, pelas desigualdades de Hölder e de Young e pela hipótes (G2),

$$\begin{aligned}
|\Phi(t)| &\leq \xi(t)\left|\left(u_t(t), u(t)\right)\right| \\
&\leq \xi(t)\|u_t(t)\|_2\|u(t)\|_2 \\
&\leq \frac{1}{\mu_1}\xi_0\|u_t(t)\|_2\|\Delta u(t)\|_2 \\
&\leq \frac{\xi_0}{\mu_1}\left(\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2\right) \\
&\leq C_9\left(\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2\right), \ \ \forall \, t > 0,
\end{aligned}$$

onde $C_9 := \dfrac{\xi_0}{\mu_1}$, sendo $\xi_0 := \xi(0) \leq \xi(t),$ para todo $t \geq 0$. Como pela hipótese (2.5) temos

$$\int_0^t g(t-s)ds \leq \int_0^\infty g(t-s)ds \leq 1,$$

segue, pelas desigualdades de Hölder e de Young, que

$$
\begin{aligned}
|\Psi(t)| &\leq \xi(t) \int_0^t g(t-s)\, |(u_t(t), u(t)-u(s))|\, ds \\
&\leq \xi_0 \int_0^t g(t-s) \|u_t(t)\|_2 \|u(t)-u(s)\|_2 ds \\
&\leq \frac{\xi_0}{\mu_1} \int_0^t g(t-s) \|u_t(t)\|_2 \|\Delta u(t) - \Delta u(s)\|_2 ds \\
&\leq C_9 \int_0^t g(t-s) \left(\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u(t) - \Delta u(s)\|_2^2 \right) ds \\
&\leq C_9 \left(\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 \int_0^t g(t-s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t g(t-s) \|\Delta u(t) - \Delta u(s)\|_2^2 ds \right) \\
&\leq C_9 \left(\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \left(g \Box \Delta u \right)(t) \right), \quad \forall\, t > 0.
\end{aligned}
$$

Deste modo,

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{F}(t) - \mathcal{E}(t)| &\leq \varepsilon_1 |\Phi(t)| + \varepsilon_2 |\Psi(t)| \\
&\leq \varepsilon_1 C_9 \left(\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 \right) + \varepsilon_2 C_9 \left(\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \left(g \Box \Delta u \right)(t) \right) \\
&\leq C_9 \left(\frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\varepsilon_1 \beta_1}{2\beta_1} \|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{\varepsilon_2}{2} \left(g \Box \Delta u \right)(t) \right) \\
&\leq C_9 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\beta_1}{2\beta_1} \|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \left(g \Box \Delta u \right)(t) \right), \quad \forall\, t > 0,
\end{aligned}
$$

ou ainda, definindo $C_{10} = \max \left\{ 1, \frac{1}{\beta_1} \right\}$,

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{F}(t) - \mathcal{E}(t)| &\leq C_9 C_{10} \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \right) \left(\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\beta_1}{2} \|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \left(g \Box \Delta u \right)(t) \right) \\
&\leq C_{11} \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \right) \mathcal{E}(t), \quad \forall\, t > 0,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\left[1 - C_{11} \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \right) \right] \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{F}(t) \leq \left[1 + C_{11} \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \right) \right] \mathcal{E}(t), \quad \forall\, t > 0.
$$

Considerando $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tais que

$$
\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \frac{1}{2C_{11}},
$$

temos que

$$
\frac{1}{2}\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{F}(t) \leq \frac{3}{2}\mathcal{E}(t), \ \forall\, t > 0.
$$

Etapa 3 - Derivada da Φ. Existem constantes $c_0, c_1, c_2 > 0$, que não dependem dos dados iniciais, tais que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(t) \leq &- \xi(t)\mathcal{E}(t) + \left(c_0 + c_1 M_{\mathcal{E}(0)}^2\right)\xi(t)\,\|u_t(t)\|_2^2 \\ &+ c_2\xi(t)\left(g\Box\Delta u\right)(t) - \frac{\beta_2}{2}\xi(t)\,\|\Delta u(t)\|_2^2\,,\ \forall\, t > 0.\end{aligned} \tag{3.33}$$

onde $M_{\mathcal{E}(0)}$ é definido como na seção anterior.
De fato, diferenciando (3.29), fazendo uso da equação (2.1) e do Teorema 5.13, temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(t) = &\ \xi(t)\|u_t(t)\|_2^2 - \xi(t)\|\Delta u(t)\|_2^2 - \xi(t)\left(u(t), f\left(u(t)\right)\right) + \xi'(t)\left(u(t), u_t(t)\right) \\ &+\xi(t)\int_0^t g(t-s)\left(\Delta u(t), \Delta u(s)\right)ds - \xi(t)M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right)\left(u(t), u_t(t)\right).\end{aligned}$$

Mais ainda, somando e subtraindo $\xi(t)\mathcal{E}(t)$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(t) = &-\xi(t)\mathcal{E}(t) + \frac{3}{2}\xi(t)\|u_t(t)\|_2^2 - \frac{\xi(t)}{2}\left(1 + \int_0^t g(s)ds\right)\|\Delta u(t)\|_2^2 \\ &+\frac{\xi(t)}{2}\left(g\Box\Delta u\right)(t) + I_1 + \xi(t)I_2 + \xi(t)I_3 + \xi(t)I_f,\end{aligned} \tag{3.34}$$

onde

$$\begin{aligned}I_1 &= \xi'(t)\left(u(t), u_t(t)\right);\\ I_2 &= \int_0^t g(t-s)\left(\Delta u(t), \Delta u(s)\right)ds;\\ I_3 &= -M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right)\left(u(t), u_t(t)\right);\\ I_f &= \int_\Omega \left(\widehat{f}(u(t)) - f(u(t))u(t)\right)dx.\end{aligned}$$

Vamos estimar I_1, I_2, I_3 e I_f.

- Estimativa de I_1. Segue pelas desigualdades de Hölder e de Young, com $\eta > 0$, pela imersão $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_0$ e pela hipótese (G2) que

$$\begin{aligned}|I_1| &\leq |\xi'(t)|\,\|u(t)\|_2\|u_t(t)\|_2\\ &\leq \xi_1\xi(t)\left(\eta\|u(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\eta}\|u_t(t)\|_2^2\right)\\ &\leq \xi_1\xi(t)\left(\frac{\eta}{\mu_1}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\eta}\|u_t(t)\|_2^2\right),\ \ \forall\, t > 0.\end{aligned}$$

- <u>Estimativa de I_2</u>. Pela desigualdade de Hölder, também temos,

$$
\begin{aligned}
|I_2| &\leq \int_0^t g(t-s)\,|(\Delta u(t), \Delta u(s))|\,ds \\
&\leq \int_0^t g(t-s)\,\|\Delta u(t)\|_2\,\|\Delta u(s)\|_2\,ds \\
&\leq \int_0^t g(t-s)\,\|\Delta u(t)\|_2\,(\|\Delta u(s)\|_2 - \|\Delta u(t)\|_2 + \|\Delta u(t)\|_2)\,ds \\
&\leq \int_0^t g(t-s)\,\|\Delta u(t)\|_2^2\,ds + \int_0^t g(t-s)\,\|\Delta u(t)\|_2\,\|\Delta u(s) - \Delta u(t)\|_2\,ds.
\end{aligned}
$$

Deste modo, pela desigualdade de Young, com $\eta > 0$,

$$
\begin{aligned}
|I_2| &\leq \|\Delta u(t)\|_2^2 \int_0^t g(\tau)d\tau + \int_0^t g(t-s)\left(\eta\,\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\eta}\,\|\Delta u(s) - \Delta u(t)\|_2^2\right) ds \\
&\leq \|\Delta u(t)\|_2^2 \int_0^t g(\tau)d\tau + \eta\,\|\Delta u(t)\|_2^2 \int_0^t g(\tau)d\tau + \frac{1}{4\eta}\,(g\Box\Delta u)\,(t) \\
&\leq \|\Delta u(t)\|_2^2 \int_0^t g(\tau)d\tau + \eta\,\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\eta}\,(g\Box\Delta u)\,(t),\ \forall\, t > 0.
\end{aligned}
$$

- <u>Estimativa de I_3</u>. Para estimarmos I_3, temos que $M(\|\nabla u(t)\|_2^2) \leq M_{\mathcal{E}(0)}$, para todo $t \geq 0$, onde

$$
M_{\mathcal{E}(0)} := \max_{s\in[0,L\mathcal{E}(0)]} M(s).
$$

Assim, pelas desigualdades de Hölder e de Young, com $\eta > 0$, e por $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_0$,

$$
\begin{aligned}
|I_3| &\leq \|u(t)\|_2\,M_{\mathcal{E}(0)}\,\|u_t(t)\|_2 \\
&\leq \eta\,\|u(t)\|_2^2 + \frac{M_{\mathcal{E}(0)}^2}{4\eta}\,\|u_t(t)\|_2^2 \\
&\leq \frac{\eta}{\mu_1}\,\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{M_{\mathcal{E}(0)}^2}{4\eta}\,\|u_t(t)\|_2^2\,,\ \ \forall\, t > 0.
\end{aligned}
$$

- <u>Estimativa de I_f</u>. Agora, pela hipótese (2.9) e pela imersão $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_0$, temos que

$$
\begin{aligned}
I_f &\leq \frac{l\beta}{2}\|u(t)\|_2^2 \\
&\leq \frac{l\beta}{2\mu_1}\|\Delta u(t)\|_2^2,\ \ \forall\, t > 0.
\end{aligned}
$$

Substituindo tais estimativas em (3.34),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(t) \leq & -\xi(t)\mathcal{E}(t) + \left(\frac{3}{2} + \frac{\xi_1}{4\eta} + \frac{M^2_{\mathcal{E}(0)}}{4\eta}\right)\xi(t)\left\|u_t(t)\right\|_2^2 + \left(\frac{1}{4\eta} + \frac{1}{2}\right)\xi(t)\left(g\Box\Delta u\right)(t) \\ & + \left[\eta\left(1 + \frac{\xi_1 + 1}{\mu_1}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(\tau)d\tau\right) + \frac{l\beta}{2\mu_1}\right]\xi(t)\left\|\Delta u(t)\right\|_2^2.\end{aligned}$$

Pela hipótese (2.5) temos

$$-\left(1 - \int_0^t g(\tau)d\tau\right) \leq -l,$$

o que implica que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(t) \leq & -\xi(t)\mathcal{E}(t) + \left(\frac{3}{2} + \frac{\xi_1}{4\eta} + \frac{M^2_{\mathcal{E}(0)}}{4\eta}\right)\xi(t)\left\|u_t(t)\right\|_2^2 + \left(\frac{1}{4\eta} + \frac{1}{2}\right)\xi(t)\left(g\Box\Delta u()(t)\right. \\ & + \left[\eta\left(1 + \frac{\xi_1 + 1}{\mu_1}\right) - \frac{l}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\mu_1}\right)\right]\xi(t)\left\|\Delta u(t)\right\|_2^2, \quad \forall\, t > 0,\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(t) \leq & -\xi(t)\mathcal{E}(t) + \left(c_0 + c_1 M^2_{\mathcal{E}(0)}\right)\xi(t)\left\|u_t(t)\right\|_2^2 + c_2\xi(t)\left(g\Box\Delta u\right)(t) \\ & + \left[\eta\left(1 + \frac{\xi_1 + 1}{\mu_1}\right) - \frac{\beta_1}{2}\right]\xi(t)\left\|\Delta u(t)\right\|_2^2 \\ \leq & -\xi(t)\mathcal{E}(t) + \left(c_0 + c_1 M^2_{\mathcal{E}(0)}\right)\xi(t)\left\|u_t(t)\right\|_2^2 + c_2\xi(t)\left(g\Box\Delta u\right)(t) \\ & - \frac{\beta_1}{4}\xi(t)\left\|\Delta u(t)\right\|_2^2 + \left[\eta\left(1 + \frac{\xi_1 + 1}{\mu_1}\right) - \frac{\beta_1}{4}\right]\xi(t)\left\|\Delta u(t)\right\|_2^2, \quad \forall\, t > 0,\end{aligned}$$

sendo $c_0 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\xi_1}{4\eta}$, $c_1 = \dfrac{1}{4\eta}$ e $c_2 = \dfrac{1}{4\eta} + \dfrac{1}{2}$. Se tomarmos $\eta < \dfrac{\beta_1\mu_1}{4\left(\mu_1 + 1 + \xi_1\right)}$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(t) \leq & -\xi(t)\mathcal{E}(t) + \left(c_0 + c_1 M^2_{\mathcal{E}(0)}\right)\xi(t)\left\|u_t(t)\right\|_2^2 \\ & + c_2\xi(t)\left(g\Box\Delta u\right)(t) - \frac{\beta_2}{2}\xi(t)\left\|\Delta u(t)\right\|_2^2, \quad \forall\, t > 0,\end{aligned}$$

onde $\beta_2 = \dfrac{\beta_1}{2}$, $c_0 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\xi_1}{4\eta}$, $c_1 = \dfrac{1}{4\eta}$ e $c_2 = \dfrac{1}{4\eta} + \dfrac{1}{2}$.

Etapa 4 - Derivada da Ψ. Dado $\delta > 0$, existem constantes a_1, $c_{\delta,1}, c_{\delta,2}, c_{\delta,3} > 0$, que não dependem dos dados iniciais, tais que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Psi(t) \leq & \left(\delta a_1 - \int_0^t g(s)ds\right)\xi(t)\|u_t(t)\|_2^2 + 3\delta\xi(t)\|\Delta u(t)\|_2^2 + c_{\delta,1}\left(-g'\Box\Delta u\right)(t) \\ & + \left[c_{\delta,2} + c_{\delta,3}\left(M^2_{\mathcal{E}(0)} + \mathcal{E}^{\frac{\varrho}{2}}(0)\right)\right]\xi(t)\left(g\Box\Delta u\right)(t), \quad \forall\, t > 0,\end{aligned} \tag{3.35}$$

sendo $M_{\mathcal{E}(0)}$ definido como anteriormente.

Com efeito, diferenciando (3.30), utilizando (2.1) e o Teorema 5.13, obtemos

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) = -\xi(t)\left\|u_t(t)\right\|_2^2 \int_0^t g(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{6} J_i, \tag{3.36}$$

onde

$$J_1 = -\xi'(t)\int_\Omega u_t(t)\left(\int_0^t g(t-s)\left(u(t)-u(s)\right)ds\right)dx,$$

$$J_2 = -\xi(t)\int_\Omega u_t(t)\left(\int_0^t g'(t-s)\left(u(t)-u(s)\right)ds\right)dx,$$

$$J_3 = \xi(t)\int_\Omega \Delta u(t)\left(\int_0^t g(t-s)\left(\Delta u(t)-\Delta u(s)\right)ds\right)dx,$$

$$J_4 = -\xi(t)\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds\right)\left(\int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta u(t)-\Delta u(\tau)\right)d\tau\right)dx,$$

$$J_5 = \xi(t)M\left(\left\|\nabla u(t)\right\|_2^2\right)\int_\Omega u_t(t)\left(\int_0^t g(t-s)\left(u(t)-u(s)\right)ds\right)dx,$$

$$J_6 = \xi(t)\int_\Omega f(u(t))\left(\int_0^t g(t-s)\left(u(t)-u(s)\right)ds\right)dx.$$

Vamos estimar J_i, com $i = 1, ..., 6$:

- Estimativa de J_1. Pelas desigualdades de Hölder, de Young com $\delta > 0$, por (G2) e pela imersão $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_0$, temos que

$$\begin{aligned}
|J_1| &\leq \frac{|\xi'(t)|}{|\xi(t)|}\xi(t)\int_0^t g(t-s)\left|\left(u_t(t), u(t)-u(s)\right)\right| ds \\
&\leq \xi_1\xi(t)\int_0^t g(t-s)\left\|u_t(t)\right\|_2 \left\|u(t)-u(s)\right\|_2 ds \\
&\leq \xi_1\delta\xi(t)\left\|u_t(t)\right\|_2^2 \int_0^t g(t-s)ds + \xi_1\frac{1}{4\delta}\xi(t)\int_0^t g(t-s)\left\|u(t)-u(s)\right\|_2^2 ds \\
&\leq \xi_1\delta\xi(t)\left\|u_t(t)\right\|_2^2 \int_0^t g(\tau)d\tau + \xi_1\frac{1}{4\delta\mu_1}\xi(t)\int_0^t g(t-s)\left\|\Delta u(t)-\Delta u(s)\right\|_2^2 ds \\
&\leq \xi_1\delta\xi(t)\left\|u_t(t)\right\|_2^2 + \xi_1\frac{1}{4\delta\mu_1}\xi(t)\left(g\Box\Delta u\right)(t), \quad \forall\, t > 0.
\end{aligned}$$

- Estimativa de J_2. Analogamente, segue que

$$
\begin{aligned}
|J_2| &\leq \xi(t)\int_0^t (-g'(t-s))\,|(u_t(t),u(t)-u(s))|\,ds\\
&\leq \xi(t)\int_0^t (-g'(t-s))\,\|u_t(t)\|_2\,\|u(t)-u(s)\|_2\,ds\\
&\leq \delta\xi(t)\,\|u_t(t)\|_2^2\int_0^t (-g'(t-s))\,ds+\xi_1\frac{1}{4\delta}\xi(t)\int_0^t (-g'(t-s))\,\|u(t)-u(s)\|_2^2\,ds\\
&\leq \delta\xi(t)\,\|u_t(t)\|_2^2\int_0^t (-g'(\tau))\,d\tau+\frac{1}{4\delta\mu_1}\xi(t)\left(-g'\Box\Delta u\right)(t),\quad \forall\, t>0,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
|J_2|\leq g(0)\delta\xi(t)\,\|u_t(t)\|_2^2+\frac{1}{4\delta\mu_1}\xi(t)\left(-g'\Box\Delta u\right)(t),\quad \forall\, t>0.
$$

- Estimativa de J_3. De modo análogo,

$$
\begin{aligned}
|J_3| &\leq \xi(t)\int_0^t g(t-s)\,|(\Delta u(t),\Delta u(t)-\Delta u(s))|\,ds\\
&\leq \xi(t)\int_0^t g(t-s)\,\|\Delta u(t)\|_2\,\|\Delta u(t)-\Delta u(s)\|_2\,ds\\
&\leq \delta\xi(t)\,\|\Delta u(t)\|_2^2\int_0^t g(\tau)d\tau+\frac{1}{4\delta}\xi(t)\int_0^t g(t-s)\,\|\Delta u(t)-\Delta u(s)\|_2^2\,ds\\
&\leq \delta\xi(t)\,\|\Delta u(t)\|_2^2+\frac{1}{4\delta}\xi(t)\left(g\Box\Delta u\right)(t),\quad \forall\, t>0.
\end{aligned}
$$

- Estimativa de J_4.

$$
\begin{aligned}
|J_4| &\leq \xi(t)\left|\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds\right)\left(\int_0^t g(t-\tau)\left(\Delta u(t)-\Delta u(\tau)\right)d\tau\right)dx\right|\\
&\leq \xi(t)\left|\int_\Omega\left(\int_0^t\int_0^t g(t-s)g(t-\tau)\Delta u(s)\left(\Delta u(t)-\Delta u(\tau)\right)dsd\tau\right)dx\right|\\
&\leq \xi(t)\left|\int_0^t\int_0^t g(t-s)g(t-\tau)\left(\Delta u(s),\Delta u(t)-\Delta u(\tau)\right)dsd\tau\right|\\
&\leq \xi(t)\int_0^t\int_0^t g(t-s)g(t-\tau)\,|(\Delta u(s),\Delta u(t)-\Delta u(\tau))|\,dsd\tau\\
&\leq \xi(t)\int_0^t\int_0^t g(t-s)g(t-\tau)\,\|\Delta u(t)-\Delta u(\tau)\|_2\,\|\Delta u(s)\|_2\,dsd\tau,\quad \forall\, t>0,
\end{aligned}
$$

ou ainda, pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned}|J_4| \leq & \underbrace{\xi(t)\int_0^t\int_0^t g(t-s)g(t-\tau)\left\|\Delta u(t)-\Delta u(\tau)\right\|_2\left\|\Delta u(s)-\Delta u(t)\right\|_2 dsd\tau}_{J_{4,1}} \\ & + \underbrace{\xi(t)\int_0^t\int_0^t g(t-s)g(t-\tau)\left\|\Delta u(t)-\Delta u(\tau)\right\|_2\left\|\Delta u(t)\right\|_2 dsd\tau}_{J_{4,2}} \\ \leq & \delta\xi(t)\left\|\Delta u(t)\right\|_2^2 + \left(\delta+\frac{1}{2\delta}\right)\xi(t)\left(g\Box\Delta u\right)(t), \quad \forall\, t>0,\end{aligned}$$

uma vez que

$$\begin{aligned}J_{4,1} \leq & \delta\xi(t)\int_0^t\int_0^t g(t-s)g(t-\tau)\left\|\Delta u(t)-\Delta u(s)\right\|_2^2 dsd\tau \\ & + \frac{1}{4\delta}\xi(t)\int_0^t\int_0^t g(t-s)g(t-\tau)\left\|\Delta u(t)-\Delta u(\tau)\right\|_2^2 dsd\tau \\ \leq & \delta\xi(t)\int_0^t g(t-\tau)d\tau\int_0^t g(t-s)\left\|\Delta u(t)-\Delta u(s)\right\|_2^2 ds \\ & + \frac{1}{4\delta}\xi(t)\int_0^t g(t-s)ds\int_0^t g(t-\tau)\left\|\Delta u(t)-\Delta u(\tau)\right\|_2^2 d\tau \\ \leq & \delta\xi(t)\left(g\Box\Delta u\right)(t) + \frac{1}{4\delta}\xi(t)\left(g\Box\Delta u\right)(t) \leq \left(\delta+\frac{1}{4\delta}\right)\xi(t)\left(g\Box\Delta u\right)(t), \quad \forall\, t>0.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}J_{4,2} \leq & \delta\xi(t)\int_0^t\int_0^t g(t-s)g(t-\tau)\left\|\Delta u(t)\right\|_2^2 dsd\tau \\ & + \frac{1}{4\delta}\xi(t)\int_0^t\int_0^t g(t-s)g(t-\tau)\left\|\Delta u(t)-\Delta u(\tau)\right\|_2^2 dsd\tau \\ \leq & \delta\xi(t)\left\|\Delta u(t)\right\|_2^2\int_0^t g(t-s)ds\int_0^t g(t-\tau)d\tau \\ & + \frac{1}{4\delta}\xi(t)\int_0^t g(t-s)ds\int_0^t g(t-\tau)\left\|\Delta u(t)-\Delta u(\tau)\right\|_2^2 d\tau \\ \leq & \delta\xi(t)\left\|\Delta u(t)\right\|_2^2 + \frac{1}{4\delta}\xi(t)\left(g\Box\Delta u\right)(t), \quad \forall\, t>0.\end{aligned}$$

- <u>Estimativa de J_5</u>. Considerando $M_{\mathcal{E}(0)}$ como anteriormente e aplicando a Desigualdade de Young, temos

$$
\begin{aligned}
|J_5| \leq & M_{\mathcal{E}(0)}\xi(t)\int_0^t g(t-s)\left|(u_t(t),u(t)-u(s))\right| ds \\
\leq & \xi(t)\int_0^t g(t-s)\left\|u_t(t)\right\|_2 M_{\mathcal{E}(0)}\left\|u(t)-u(s)\right\|_2 ds \\
\leq & \delta\xi(t)\left\|u_t(t)\right\|_2^2\int_0^t g(t-s)ds+\frac{M_{\mathcal{E}(0)}^2}{4\delta}\xi(t)\int_0^t g(t-s)\left\|u(t)-u(s)\right\|_2^2 ds \\
\leq & \delta\xi(t)\left\|u_t(t)\right\|_2^2\int_0^t g(\tau)d\tau+\frac{M_{\mathcal{E}(0)}^2}{4\delta\mu_1}\xi(t)\int_0^t g(t-s)\left\|\Delta u(t)-\Delta u(s)\right\|_2^2 ds \\
\leq & \delta\xi(t)\left\|u_t(t)\right\|_2^2+\frac{M_{\mathcal{E}(0)}^2}{4\delta\mu_1}\xi(t)\left(g\Box\Delta u\right)(t), \quad \forall\, t>0.
\end{aligned}
$$

- Estimativa de J_6. Pela hipótese (2.10), pela desigualdade de Hölder generalizada com $\dfrac{\rho}{\rho+2}+\dfrac{1}{\rho+2}+\dfrac{1}{\rho+2}=1$ e pelo Lema 5.29,

$$
\begin{aligned}
\|f(u(t))\|_2^2 = & \int_\Omega |f(u(t))|^2 dx \\
\leq & \int_\Omega \left[k_2\left(1+|u(t)|^{\frac{\rho}{2}}\right)|u(t)|\right]^2 dx \\
\leq & k_2^2\int_\Omega \left(1+|u(t)|^{\frac{\rho}{2}}\right)^2 |u(t)|\,|u(t)|\,dx \\
\leq & 2k_2^2\int_\Omega \left(1+|u(t)|^{\rho}\right)|u(t)|\,|u(t)|\,dx \\
\leq & 2k_2^2\left\|1+|u(t)|^{\rho}\right\|_{\frac{\rho+2}{\rho}}\left\|u(t)\right\|_{\rho+2}\left\|u(t)\right\|_{\rho+2},
\end{aligned}
$$

ou ainda, pela imersão $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$ e pelo Lema 3.1, temos

$$
\begin{aligned}
\|f(u(t))\|_2^2 \leq & 2k_2^2\mu_\rho\left(|\Omega|^{\frac{\rho}{\rho+2}}+\|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho}\right)\|\Delta u(t)\|_2^2 \\
\leq & 2k_2^2\mu_\rho\left[|\Omega|^{\frac{\rho}{\rho+2}}+\left(\|u(t)\|_{\rho+2}^2\right)^{\frac{\rho}{2}}\right]\|\Delta u(t)\|_2^2 \\
\leq & 2k_2^2\mu_\rho\left[|\Omega|^{\frac{\rho}{\rho+2}}+\left(\mu_\rho\|\Delta u(t)\|_2^2\right)^{\frac{\rho}{2}}\right]\|\Delta u(t)\|_2^2 \\
\leq & 2k_2^2\mu_\rho\left[|\Omega|^{\frac{\rho}{\rho+2}}+\left(\mu_\rho C_2\mathcal{E}(0)\right)^{\frac{\rho}{2}}\right]\|\Delta u(t)\|_2^2 \\
\leq & 2\kappa_0\left(|\Omega|^{\frac{\rho}{\rho+2}}+\kappa_1\mathcal{E}(0)^{\frac{\rho}{2}}\right)\|\Delta u(t)\|_2^2,
\end{aligned}
$$

sendo $\kappa_0 = k_2^2 \mu_\rho$ e $\kappa_1 = (\mu_\rho C_2)^{\frac{\rho}{2}}$. Deste modo,

$$
\begin{aligned}
|J_6| \leq & \xi(t) \int_0^t g(t-s) \left| (f(u(t)), u(t) - u(s)) \right| ds \\
\leq & \xi(t) \int_0^t g(t-s) \left\| f(u(t)) \right\|_2 \left\| u(t) - u(s) \right\|_2 ds \\
\leq & \xi(t) \int_0^t g(t-s) \sqrt{2\kappa_0 \left(|\Omega|^{\frac{\rho}{\rho+2}} + \kappa_1 \mathcal{E}(0)^{\frac{\rho}{2}} \right)} \left\| \Delta(t) \right\|_2 \left\| u(t) - u(s) \right\|_2 ds \\
\leq & \delta \xi(t) \left\| \Delta u(t) \right\|_2^2 \int_0^t g(\tau) d\tau \\
& + \frac{\kappa_0 \left(|\Omega|^{\frac{\rho}{\rho+2}} + \kappa_1 \mathcal{E}(0)^{\frac{\rho}{2}} \right)}{2\delta} \xi(t) \int_0^t g(t-s) \left\| u(t) - u(s) \right\|_2^2 ds \\
\leq & \delta \xi(t) \left\| \Delta u(t) \right\|_2^2 \int_0^t g(\tau) d\tau \\
& + \frac{\kappa_0 \left(|\Omega|^{\frac{\rho}{\rho+2}} + \kappa_1 \mathcal{E}(0)^{\frac{\rho}{2}} \right)}{2\delta \mu_1} \xi(t) \int_0^t g(t-s) \left\| \Delta u(t) - \Delta u(s) \right\|_2^2 ds \\
\leq & \delta \xi(t) \left\| \Delta u(t) \right\|_2^2 + \frac{\kappa_0 \left(|\Omega|^{\frac{\rho}{\rho+2}} + \kappa_1 \mathcal{E}(0)^{\frac{\rho}{2}} \right)}{2\delta \mu_1} \xi(t) \left(g \Box \Delta u \right)(t).
\end{aligned}
$$

Logo, em (3.36),

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \Psi(t) \leq & - \xi(t) \left\| u_t(t) \right\|_2^2 \int_0^t g(\tau) d\tau + \xi_1 \delta \xi(t) \left\| u_t(t) \right\|_2^2 + \xi_1 \frac{1}{4\delta} \xi(t) \left(g \Box \Delta u \right)(t) \\
& + g(0) \delta \xi(t) \left\| u_t(t) \right\|_2^2 + \frac{1}{4\delta \mu_1} \left(-g' \Box \Delta u \right)(t) + \delta \xi(t) \left\| \Delta u(t) \right\|_2^2 \\
& + \frac{1}{4\delta} \xi(t) \left(g \Box \Delta u \right)(t) + \delta \xi(t) \left\| \Delta u(t) \right\|_2^2 + \left(\delta + \frac{1}{2\delta} \right) \xi(t) \left(g \Box \Delta u \right)(t) \\
& + \delta \xi(t) \left\| u_t(t) \right\|_2^2 + \frac{M_{\mathcal{E}(0)}^2}{4\delta \mu_1} \xi(t) \left(g \Box \Delta u \right)(t) + \delta \xi(t) \left\| \Delta u(t) \right\|_2^2 \\
& + \frac{\kappa_0 |\Omega|^{\frac{\rho}{\rho+2}}}{2\delta \mu_1} \xi(t) \left(g \Box \Delta u \right)(t) + \frac{2\kappa_0 \kappa_1 \mathcal{E}(0)^{\frac{\rho}{2}}}{4\delta \mu_1} \xi(t) \left(g \Box \Delta u \right)(t),
\end{aligned}
$$

ou ainda,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \Psi(t) \leq & \left[\delta \left(\xi_1 + g(0) + 1 \right) - \int_0^t g(\tau) d\tau \right] \xi(t) \left\| u_t(t) \right\|_2^2 + 3\delta \xi(t) \left\| \Delta u(t) \right\|_2^2 \\
& \left(\frac{\xi_1}{4\delta} + \frac{1}{4\delta} + \delta + \frac{1}{2\delta} + \frac{\kappa_0 |\Omega|^{\frac{\rho}{\rho+2}}}{2\delta \mu_1} + \frac{M_{\mathcal{E}(0)}^2 + 2\kappa_0 \kappa_1 \mathcal{E}(0)^{\frac{\rho}{2}}}{4\delta \mu_1} \right) \xi(t) \left(g \Box \Delta u \right)(t) \\
& + \frac{1}{4\delta \mu_1} \left(-g' \Box \Delta u \right)(t), \quad \forall\, t > 0.
\end{aligned}
$$

Tomando

$$a_1 := \xi_1 + g(0) + 1,\ c_{\delta,1} = \frac{1}{4\delta\mu_1},$$

$$c_{\delta,2} = \frac{\xi_1}{4\delta} + \frac{1}{4\delta} + \delta + \frac{1}{2\delta} + \frac{\kappa_0|\Omega|^{\frac{\rho}{\rho+2}}}{2\delta\mu_1} \text{ e } c_{\delta,3} = \max\left\{\frac{1}{4\delta\mu_1}, \frac{\kappa_0\kappa_1}{2\delta\mu_1}\right\},$$

temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Psi(t) \leq & \left(\delta a_1 - \int_0^t g(\tau)d\tau\right)\xi(t)\left\|u_t(t)\right\|_2^2 + 3\delta\xi(t)\left\|\Delta u(t)\right\|_2^2 + c_{\delta,1}\left(-g'\Box\Delta u\right)(t) \\ & + \left[c_{\delta,2} + c_{\delta,3}\left(M^2_{\mathcal{E}(0)} + \mathcal{E}(0)^{\frac{\rho}{2}}\right)\right]\xi(t)\left(g\Box\Delta u\right)(t),\ \ \forall\, t > 0.\end{aligned}$$

Etapa 5 - Derivada de $\mathcal{F}$. Para qualquer $t_0 > 0$ fixado, temos que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t) \leq -\varepsilon_1\xi(t)\mathcal{E}(t),\ \ \forall\, t > t_0, \tag{3.37}$$

para alguma constante positiva $\varepsilon_1 \sim \dfrac{c_3}{\left(1 + M^2_{\mathcal{E}(0)} + \mathcal{E}(0)^{\frac{\rho}{2}}\right)}$, com $c_3 > 0$ independente dos dados iniciais.

De fato, por (3.28), (3.33) e (3.35) segue que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t) \leq & -\varepsilon_1\xi(t)\mathcal{E}(t) + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_2 c_{\delta,1}\right)\left(g'\Box\Delta u\right)(t) + \left(3\varepsilon_2\delta - \varepsilon_1\frac{\beta_2}{2}\right)\xi(t)\|\Delta u(t)\|_2^2 \\ & + \left\{\varepsilon_1 c_2 + \varepsilon_2\left[c_{\delta,2} + c_{\delta,3}\left(M^2_{\mathcal{E}(0)} + \mathcal{E}(0)^{\frac{\rho}{2}}\right)\right]\right\}\xi(t)\left(g\Box\Delta u\right)(t) \\ & + \left[\varepsilon_1\left(c_0 + c_1 M^2_{\mathcal{E}(0)}\right) + \varepsilon_2\left(\delta a_1 - \int_0^t g(\tau)d\tau\right)\right]\xi(t)\|u_t(t)\|_2^2,\ \ \forall\, \delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0.\end{aligned} \tag{3.38}$$

Fixando $t_0 > 0$, note que

$$\int_0^t g(\tau)d\tau \geq \int_0^{t_0} g(\tau)d\tau := g_0 > 0,\ \ \forall\, t \geq t_0.$$

Deste modo, podemos reescrever (3.38) como

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t) \leq & -\varepsilon_1\xi(t)\mathcal{E}(t) - \left[-\varepsilon_1\left(c_0 + c_1 M^2_{\mathcal{E}(0)}\right) + \varepsilon_2\left(g_0 - \delta a_1\right)\right]\xi(t)\|u_t(t)\|_2^2 \\ & - \left(\varepsilon_1\frac{\beta_2}{2} - 3\varepsilon_2\delta\right)\xi(t)\|\Delta u(t)\|_2^2 + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_2 c_{\delta,1}\right)\left(g'\Box\Delta u\right)(t) \\ & + \left[\varepsilon_1 c_2 + \varepsilon_2 c_{\delta,2} + \varepsilon_2 c_{\delta,3}\left(M^2_{\mathcal{E}(0)} + \mathcal{E}(0)^{\frac{\rho}{2}}\right)\right]\xi(t)\left(g\Box\Delta u\right)(t),\ \ \forall\, t \geq t_0,\end{aligned}$$

quaisquer que sejam $\delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Pela hipótese (G1) e por (3.14) termos que $\mathcal{E}(0) \geq 0$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t) \leq & -\varepsilon_1\xi(t)\mathcal{E}(t) - \left(\varepsilon_1\frac{\beta_2}{2} - 3\varepsilon_2\delta\right)\xi(t)\|\Delta u(t)\|_2^2 \\ & - \left[-\varepsilon_1\left(c_0 + c_1 M_{\mathcal{E}(0)}^2 + \mathcal{E}(0)^{\frac{\rho}{2}}\right) + \varepsilon_2\left(g_0 - \delta a_1\right)\right]\xi(t)\|u_t(t)\|_2^2 \\ & + \left\{\frac{1}{2} - \varepsilon_1 c_2 - \varepsilon_2\left[c_{\delta,1} + c_{\delta,2} + c_{\delta,3}\left(M_{\mathcal{E}(0)}^2 + \mathcal{E}(0)^{\frac{\rho}{2}}\right)\right]\right\}\left(g'\Box\Delta u\right)(t).\end{aligned}$$

Definindo $c_\delta := \min\{c_{\delta,1} + c_{\delta,2}, c_{\delta,3}\}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t) \leq & -\varepsilon_1\xi(t)\mathcal{E}(t) - \left(\varepsilon_1\frac{\beta_2}{2} - 3\varepsilon_2\delta\right)\xi(t)\|\Delta u(t)\|_2^2 \\ & - \left[-\varepsilon_1\left(c_0 + c_1 M_{\mathcal{E}(0)}^2 + \mathcal{E}(0)^{\frac{\rho}{2}}\right) + \varepsilon_2\left(g_0 - \delta a_1\right)\right]\xi(t)\|u_t(t)\|_2^2 \\ & + \left[\frac{1}{2} - \varepsilon_1 c_2 - \varepsilon_2 c_\delta\left(1 + M_{\mathcal{E}(0)}^2 + \mathcal{E}(0)^{\frac{\rho}{2}}\right)\right]\left(g'\Box\Delta u\right)(t).\end{aligned} \tag{3.39}$$

Seja $0 < \delta < \min\left\{\dfrac{g_0}{2a_1}, \dfrac{g_0\beta_2}{24\left(c_0 + c_1 M_{\mathcal{E}(0)}^2 + \mathcal{E}(0)^{\frac{\rho}{2}}\right)}\right\}$. Então,

$$g_0 - \delta a_1 > \frac{g_0}{2} \ \text{ e } \ 3\delta < \frac{g_0\beta_2}{4\left(c_0 + c_1 M_{\mathcal{E}(0)}^2 + \mathcal{E}(0)^{\frac{\rho}{2}}\right)}. \tag{3.40}$$

Uma vez que $\delta > 0$ seja fixado, podemos escolher $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ suficientemente pequenos tais que

$$\frac{g_0}{4c_0}\varepsilon_2 < \varepsilon_1 < \frac{g_0}{2c_0}\varepsilon_2 \tag{3.41}$$

e

$$0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < \min\left\{\frac{1}{4c_2}, \frac{1}{4c_\delta\left(1 + M_{\mathcal{E}(0)}^2 + \mathcal{E}(0)^{\frac{\rho}{2}}\right)}\right\}. \tag{3.42}$$

As condições (3.40), (3.41) e (3.42) implicam que

$$\begin{gathered}-\varepsilon_1\left(c_0 + c_1 M_{\mathcal{E}(0)}^2 + \mathcal{E}(0)^{\frac{\rho}{2}}\right) + \varepsilon_2\left(g_0 - \delta a_1\right) > 0, \ \varepsilon_1\frac{\beta_2}{2} - 3\varepsilon_2\delta > 0 \\ \frac{1}{2} - \varepsilon_1 c_2 - \varepsilon_2 c_\delta\left(1 + M_{\mathcal{E}(0)}^2 + \mathcal{E}(0)^{\frac{\rho}{2}}\right) > 0.\end{gathered}$$

Portanto, de (3.39),

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t) \leq -\varepsilon_1\xi(t)\mathcal{E}(t), \ \ \forall \ \ t \geq t_0,$$

para alguma constante positiva $\varepsilon_1 \sim \dfrac{c_3}{\left(1 + M^2_{\mathcal{E}(0)} + \mathcal{E}(0)^{\frac{\varrho}{2}}\right)}$, sendo $c_3 := \dfrac{g_0}{8c_0c_\delta} > 0$ independente dos dados iniciais.

<u>*Etapa 6 - Conclusão.*</u> Primeiramente, vamos fixar $t_0 = 1$ e considerar $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ suficientemente pequenos tais que (3.31) e (3.37) sejam satisfeitas. Então,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t) \leq -\frac{2}{3}\varepsilon_1\xi(t)\mathcal{F}(t), \ \ \forall\, t \geq 1,$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t)\mathrm{e}^{\frac{2\varepsilon_1}{3}\int_1^t \xi(s)ds} \leq -\frac{2}{3}\varepsilon_1\xi(t)\mathcal{F}(t)\mathrm{e}^{\frac{2\varepsilon_1}{3}\int_1^t \xi(s)ds},$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{F}(t)\mathrm{e}^{\frac{2\varepsilon_1}{3}\int_1^t \xi(s)ds}\right) \leq 0,$$

Logo, integrando sobre $[1, t]$,

$$\mathcal{F}(t)\mathrm{e}^{\frac{2\varepsilon_1}{3}\int_1^t \xi(s)ds} \leq \mathcal{F}(1), \ \ \forall\, t \geq 1.$$

Ou seja,

$$\mathcal{F}(t) \leq \mathcal{F}(1)\mathrm{e}^{-\gamma\int_1^t \xi(s)ds}, \ \ \forall\, t \geq 1.$$

onde $\gamma = \dfrac{2\varepsilon_1}{3} \sim \dfrac{c_4}{\left(1 + M^2_{\mathcal{E}(0)} + \mathcal{E}(0)^{\frac{\varrho}{2}}\right)}$, para algum $c_4 > 0$.

Novamente por (3.31), pelo fato de que o funcional $\mathcal{E}$ é não-crescente e ξ ser contínua,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(t) &\leq 3\mathcal{E}(1)\mathrm{e}^{-\gamma\int_1^t \xi(s)ds} \\
&\leq 3\mathcal{E}(0)\mathrm{e}^{-\gamma\int_1^t \xi(s)ds - \gamma\int_0^1 \xi(s)ds + \gamma\int_0^1 \xi(s)ds} \\
&\leq \left(3\mathcal{E}(0)\mathrm{e}^{\gamma\int_0^1 \xi(s)ds}\right)\mathrm{e}^{-\gamma\int_0^t \xi(s)ds}, \ \ \forall\, t \geq 1.
\end{aligned}$$

Então,

$$\mathcal{E}(t) \leq K\mathrm{e}^{-\gamma\int_0^t \xi(s)ds}, \ \ \forall\, t \geq 1, \tag{3.43}$$

sendo $K = 3\mathcal{E}(0)\mathrm{e}^{\gamma\int_0^1 \xi(s)ds} > 0$.

Por outro lado, definindo $\xi(0) := \xi_0$, segue da hipótese (G2) que $0 \leq \xi(t) \leq \xi_0$ para todo $t \in [0,\infty)$. Logo,

$$1 < \mathrm{e}^{\gamma \int_t^1 \xi(s)ds} = \left(\mathrm{e}^{\gamma \int_0^1 \xi(s)ds}\right) \mathrm{e}^{-\gamma \int_0^t \xi(s)ds} \leq \mathrm{e}^{\gamma \xi_0}\mathrm{e}^{0} = \mathrm{e}^{\gamma\xi_0} < \infty, \ \ \forall\, t \in [0,1].$$

Logo,

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) < \left(\mathcal{E}(0)\mathrm{e}^{\gamma \int_0^1 \xi(s)ds}\right) \mathrm{e}^{-\gamma \int_0^t \xi(s)ds}, \ \ \forall\, t \in [0,1],$$

ou ainda,

$$\mathcal{E}(t) < K\mathrm{e}^{-\gamma \int_0^t \xi(s)ds}, \ \ \forall\, t \in [0,1].$$

Portanto,

$$\mathcal{E}(t) < K\mathrm{e}^{-\gamma \int_0^t \xi(s)ds}, \ \ \forall\, t \geq 0,$$

sendo $K = 3\mathcal{E}(0)\mathrm{e}^{\gamma \int_0^1 \xi(s)ds} > 0$ e

$$\gamma \sim \frac{c_4}{\left(1 + M^2_{\mathcal{E}(0)} + \mathcal{E}(0)^{\frac{\varrho}{2}}\right)}, \ \ \text{para algum } c_4 > 0,$$

como desejado. □

O próximo resultado nos fornece o caso particular em que existe $\xi_2 > 0$ tal que $\xi(t) \geq \xi_2$ para todo $t \in [0,\infty)$.

Corolário 3.8. *Sob as hipóteses do Teorema 3.7, se $\xi(t) \geq \xi_2$, para alguma constante $\xi_2 > 0$ e todo $t \in [0,\infty)$, por (3.26), segue que o funcional energia decai a uma taxa melhor, ou igual, que a taxa exponencial.*

Demonstração. De fato, primeiramente note que $-\xi(t) \leq -\xi_2$ para cada $t \in [0,\infty)$. Em particular, essa desigualdade permanece válida para todo $s \in [0,t]$. Logo, em (3.26), temos

$$K\mathrm{e}^{-\gamma \int_0^t \xi(s)ds} \leq \mathrm{e}^{-\gamma \int_0^t \xi_2 ds} \leq \mathrm{e}^{-\gamma\xi_2 t}, \ \ \forall\, t \geq 0,$$

ou seja,

$$\mathcal{E}(t) \leq K\mathrm{e}^{-\gamma_1 t}, \ \ \forall\, t \geq 0,$$

sendo $K = 3\mathcal{E}(0)\mathrm{e}^{\gamma \int_0^1 \xi(s)ds} > 0$, $\gamma_1 = \gamma\xi_2 > 0$ e

$$\gamma_1 \sim \frac{c_5}{\left(1 + M^2_{\mathcal{E}(0)} + \mathcal{E}(0)^{\frac{\varrho}{2}}\right)}, \ \ \text{para algum } c_5 = \xi_2 c_4 > 0.$$

$\square$

Observação 3.1. Vale notar que (3.26)-(3.27), além de nos mostrar que o decaimento geral de energia associado ao problema (2.1)-(2.4) depende dos dados iniciais, também nos mostra de que maneira ocorre essa dependência. Por exemplo, se os dados iniciais forem muito grandes, a desigualdade (3.26) indica que a energia decairá lentamente, mesmo se o núcleo de memória decair muito rápido. Ou ainda o contrário, se os dados iniciais forem pequenos, podendo ser a taxa de decaimento melhor do que exponencial.

Agora, vamos analisar o caso particular em que $M(s) > 0$ para todo $s \in [0, \infty)$. Neste caso, vamos relembrar que por $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_1$ e pelo Lema 3.1 temos

$$\|\nabla u(t)\|_2^2 \leq \frac{1}{\mu_2}\|\Delta u(t)\|_2^2 \leq \frac{2}{\mu_2\beta_1}\mathcal{E}(t) \leq \frac{2}{\mu_2\beta_1}\mathcal{E}(0), \ \ \forall\, t > 0,$$

isto é, existe uma constante $L := \dfrac{2}{\mu_2\beta_1} > 0$ tal que $\|\nabla u(t)\|_2^2 \in [0, L\mathcal{E}(0)]$, qualquer que seja $t \in (0, \infty)$. Deste modo, se, em particular, tivermos $M(s) > 0$ para cada $s \in [0, \infty)$, por M ser uma função de classe C^1, existe uma constante $m_1 > 0$ tal que

$$M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right) \geq \min_{s\in[0, L\mathcal{E}(0)]} M(s) \geq m_1 > 0, \ \ \forall\, t > 0.$$

Assim, por (3.3),

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) \leq -m_1\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(g'\square\Delta u\right)(t), \ \ \forall\, t \in [0, L]. \tag{3.44}$$

Com estas considerações em mente, o seguinte resultado nos mostra que (3.26) independe de M.

Corolário 3.9. *Sob as hipóteses do Teorema 3.7, a desigualdade (3.26) permanece válida mesmo quando $M(s) > 0$ para todo $s \in [0, \infty)$.*

Demonstração. A demonstração deste Corolário será feita em etapas.
Etapa 1 - Definindo Funcionais. Vamos definir o seguinte funcional

$$\mathcal{F}_\varepsilon(t) = \mathcal{E}(t) + \varepsilon\Phi(t), \tag{3.45}$$

sendo $\varepsilon > 0$ e

$$\Phi(t) = \xi(t)\int_\Omega u_t(t)u(t)dx. \tag{3.46}$$

Etapa 2 - Estimativas. Existe uma constante $C_{12} > 0$ tal que se $\varepsilon \leq \dfrac{1}{2C_{12}}$

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{F}_\varepsilon(t) \leq \frac{3}{2}\mathcal{E}(t), \ \forall\, t \geq 0. \tag{3.47}$$

De fato, note que, dado $t \geq 0$

$$|\mathcal{F}_\varepsilon(t) - \mathcal{E}(t)| = \varepsilon\, |\Phi(t)| = \varepsilon\, |\xi(t)|\, |(u_t(t), u(t))| = \varepsilon \xi(t)\, |(u_t(t), u(t))|$$

Pela hipótese (G2), temos que $\xi(t) \leq \xi_0$ para todo $t \geq 0$. Logo, pelas desigualdades de Hölder e de Young, pela imersão $\mathcal{V}_2 \hookrightarrow \mathcal{V}_0$ e pelo Lema 3.1,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}_\varepsilon(t) - \mathcal{E}(t)| &\leq \varepsilon \xi_0 \left\| u_t(t) \right\|_2 \left\| u(t) \right\|_2 \\
&\leq \frac{\varepsilon \xi_0}{\mu_1} \left\| u_t(t) \right\|_2 \left\| \Delta u(t) \right\|_2 \\
&\leq \frac{\varepsilon \xi_0}{\mu_1} \left(\frac{1}{2} \left\| u_t(t) \right\|_2^2 + \frac{1}{2} \left\| \Delta u(t) \right\|_2^2 \right) \\
&\leq \frac{\varepsilon \xi_0}{\mu_1 \beta_1} \mathcal{E}(t) \\
&\leq \varepsilon C_{12} \mathcal{E}(t), \quad \forall\, t \geq 0.
\end{aligned}$$

onde $C_{12} := \dfrac{\xi_0}{\mu_1 \beta_1} > 0$. Logo,

$$\left(1 - \varepsilon C_{12}\right) \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{F}_\varepsilon(t) \leq \left(1 + \varepsilon C_{12}\right) \mathcal{E}(t), \ \forall\, t \geq 0 \text{ e } \varepsilon > 0.$$

Escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\varepsilon \leq \dfrac{1}{2C_{12}}$, temos

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{F}_\varepsilon(t) \leq \frac{3}{2}\mathcal{E}(t), \ \forall\, t \geq 0. \tag{3.48}$$

Etapa 3 - Derivada da Φ. Na demonstração do Teorema 3.7 foi provado em (3.33) que existem constantes $c_0, c_1, c_2 > 0$, que não dependem dos dados iniciais, tais que

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) \leq -\, \xi(t)\mathcal{E}(t) + \left(c_0 + c_1 M_{\mathcal{E}(0)}^2\right) \xi(t) \left\| u_t(t) \right\|_2^2 \tag{3.49}$$

$$+\, c_2 \xi(t) \left(g \Box \Delta u\right)(t) - \frac{\beta_2}{2} \xi(t) \left\| \Delta u(t) \right\|_2^2, \quad \forall\, t > 0. \tag{3.50}$$

Etapa 4 - Derivada de $\mathcal{F}_\varepsilon$. Existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}_\varepsilon(t) \leq -\varepsilon \xi(t) \mathcal{E}(t), \quad \forall\, t > 0 \text{ e } \varepsilon \in (0, \varepsilon_1]. \tag{3.51}$$

De fato, por (3.44) e (3.49), temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{F}_\varepsilon(t) =& \frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) + \frac{d}{dt}\varepsilon\Phi(t) \\
\leq & - m_1 \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(g'\Box\Delta u\right)(t) - \varepsilon\xi(t)\mathcal{E}(t) + \varepsilon\left(c_0 + c_1 M_{\mathcal{E}(0)}^2\right)\xi(t)\|u_t(t)\|_2^2 \\
& + \varepsilon c_2 \xi(t)\left(g\Box\Delta u\right)(t) - \varepsilon\frac{\beta_2}{2}\xi(t)\|\Delta u(t)\|_2^2
\end{aligned}
$$

ou ainda, pelas hipóteses (G1) e (G2) e como $\dfrac{\beta_2\varepsilon}{2} > 0$,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{F}_\varepsilon(t) \leq & - \varepsilon\xi(t)\mathcal{E}(t) - m_1\frac{\xi_0}{\xi_0}\|u_t(t)\|_2^2 + \varepsilon\xi(t)\left(c_0 + c_1 M_{\mathcal{E}(0)}^2\right)\|u_t(t)\|_2^2 \\
& + \varepsilon c_2 \xi(t)\left(g\Box\Delta u\right)(t) - \frac{1}{2}\xi(t)\left(g\Box\Delta u\right)(t) \\
\leq & - \varepsilon\xi(t)\mathcal{E}(t) - \frac{m_1}{\xi_0}\xi(t)\|u_t(t)\|_2^2 + \varepsilon\xi(t)\left(c_0 + c_1 M_{\mathcal{E}(0)}^2\right)\|u_t(t)\|_2^2 \\
& + \varepsilon\xi(t) c_2 \left(g\Box\Delta u\right)(t) - \frac{1}{2}\xi(t)\left(g\Box\Delta u\right)(t) \\
\leq & - \varepsilon\xi(t)\mathcal{E}(t) - \left[\frac{m_1}{\xi_0} - \varepsilon\left(c_0 + c_1 M_{\mathcal{E}(0)}^2\right)\right]\xi(t)\|u_t(t)\|_2^2 \\
& - \left[\frac{1}{2} - \varepsilon c_2\right]\xi(t)\left(g\Box\Delta u\right)(t), \quad \forall\, t > 0.
\end{aligned}
$$

Definindo $\varepsilon_1 := \min\left\{\dfrac{m_1}{\xi_0\left(c_0 + c_1 M_{\mathcal{E}(0)}^2\right)}, \dfrac{1}{2c_2}\right\} > 0$, temos que para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_1$

$$
\frac{m_1}{\xi_0} - \varepsilon\left(c_0 + c_1 M_{\mathcal{E}(0)}^2\right) > 0 \ \text{ e } \ \frac{1}{2} - \varepsilon c_2 > 0.
$$

Portanto, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$
\frac{d}{dt}\mathcal{F}_\varepsilon(t) \leq -\varepsilon\xi(t)\mathcal{F}(t), \ \forall\, \varepsilon \leq \varepsilon_1, \ \ \forall\, t > 0.
$$

como queríamos.

Etapa 6 - Conclusão. Definindo $\varepsilon_0 := \min\left\{\dfrac{1}{2C_{12}}, \varepsilon_1\right\}$, então, para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, a desigualdade (3.48) permanece válida, qualquer que seja $t \geq 0$. Entretanto, se $\varepsilon \leq \varepsilon_0 \leq \varepsilon_1$, obtemos de (3.51) que

$$
\frac{d}{dt}\mathcal{F}_\varepsilon(t) \leq -\varepsilon\xi(t)\mathcal{E}(t), \ \ \forall\, t > 0.
$$

Ou ainda, por (3.48),

$$
\frac{d}{dt}\mathcal{F}_\varepsilon(t) \leq -\frac{2\varepsilon}{3}\xi(t)\mathcal{F}_\varepsilon(t), \ \ \forall\, t > 0,
$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}_\varepsilon(t) + \frac{2\varepsilon}{3}\xi(t)\mathcal{F}_\varepsilon(t) \leq 0, \ \ \forall\, t > 0.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}_\varepsilon(t)\mathrm{e}^{\frac{2\varepsilon}{3}\int_0^t \xi(s)ds} + \frac{2\varepsilon}{3}\xi(t)\mathcal{F}_\varepsilon(t)\mathrm{e}^{\frac{2\varepsilon}{3}\int_0^t \xi(s)ds} \leq 0,$$

o que implica que

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{F}_\varepsilon(t)\mathrm{e}^{\gamma\int_0^t \xi(s)ds}\right) \leq 0, \ \ \forall\, t > 0,$$

onde $\gamma = \dfrac{2\varepsilon}{3} \sim \dfrac{m_1}{\xi_0\left(c_0 + c_1 M^2_{\mathcal{E}(0)}\right)}$. Deste modo, integrando a expressão anterior sobre $[0, t]$,

$$\mathcal{F}_\varepsilon(t)\mathrm{e}^{\gamma\int_0^t \xi(s)ds} \leq \mathcal{F}_\varepsilon(0), \ \ \forall\, t > 0.$$

Então,

$$\mathcal{F}_\varepsilon(t) \leq \mathcal{F}_\varepsilon(0)\mathrm{e}^{-\gamma\int_0^t \xi(s)ds}, \ \ \forall\, t > 0. \tag{3.52}$$

Novamente, por (3.48), segue de (3.52) que

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}(t) \leq \frac{3}{2}\mathcal{E}(0)\mathrm{e}^{-\gamma\int_0^t \xi(s)ds}, \ \ \forall\, t > 0,$$

ou seja,

$$\mathcal{E}(t) \leq K\mathrm{e}^{-\gamma\int_0^t \xi(s)ds}, \ \ \forall\, t > 0,$$

onde $K = 3\mathcal{E}(0) > 0$ e $\gamma = \dfrac{2\varepsilon}{3} \sim \dfrac{m_1}{\xi_0\left(c_0 + c_1 M^2_{\mathcal{E}(0)}\right)} > 0.$ □

3.4 Algumas Taxas de Decaimento

Nesta seção, veremos exemplos de taxas de decaimento. Para este intuito, consideraremos o Caso II, visto que é o caso mais geral, com $\gamma > 0$ e $K > 0$ como em (3.26).

Exemplo 3.1. Seja $\xi(t) = \dfrac{\kappa}{\gamma}$, com $\kappa > 0$. Então, é fácil ver que $\xi(t) > 0$ e satisfaz (G2), visto que

$$\xi'(t) = 0, \ \ \left|\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\right| = 0 < \xi_1,$$

qualquer que seja $\xi_1 > 0$, para todo $t \geq 0$. Neste caso, de (3.26), obtemos

$$\mathcal{E}(t) \leq K\mathrm{e}^{-\gamma \int_0^t \frac{\kappa}{\gamma} ds} = K\mathrm{e}^{-\kappa t}, \ \forall \ t \geq 0.$$

Exemplo 3.2. Consideremos a função racional $\xi(t) = \dfrac{\kappa}{\gamma\,(t+1)}$, com $\kappa > 0$. Assim, para todo $t \geq 0$,

$$\xi(t) > 0, \ \ \xi'(t) = \frac{-\kappa}{(t+1)^2} \leq 0 \ \text{ e } \ \left|\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\right| = \left|\frac{\frac{-\kappa}{\gamma(t+1)^2}}{\frac{\kappa}{\gamma(t+1)}}\right| = \frac{1}{t+1} < 1 := \xi_1,$$

ou seja, a condição (G2) é satisfeita. De (3.26), temos

$$\mathcal{E}(t) \leq K\mathrm{e}^{-\gamma \int_0^t \frac{\kappa}{\gamma(s+1)} ds} = K\mathrm{e}^{-\kappa \int_0^t \frac{1}{(s+1)} ds} = K\mathrm{e}^{\ln(t+1)^{-\kappa}} = K\,(t+1)^{-\kappa}, \ \ \forall \ \ t \geq 0.$$

Exemplo 3.3. Seja $\xi(t) = \gamma^{-1}\kappa \ln(a+1)$, onde $a > 0$ e $\kappa > 0$. Segue que $\xi(t) > 0$ e também satisfaz (G2), pois

$$\xi'(t) = 0, \ \ \left|\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\right| = 0 < \xi_1, \ \ \forall \ t \geq 0, \ \ \forall \ \ \xi_1 > 0.$$

Mais ainda, de (3.26),

$$\mathcal{E}(t) \leq K\mathrm{e}^{-\gamma \int_0^t \gamma^{-1}\kappa \ln(a+1) ds} = K\mathrm{e}^{\ln(a+1)^{-\kappa t}} = K(a+1)^{-\kappa t}, \ \forall \ t \geq 0.$$

Exemplo 3.4. Seja $\xi(t) = \dfrac{\kappa}{\gamma\,(t+\mathrm{e})\ln(t+\mathrm{e})}$, com $\kappa > 0$. Então, para cada $t \geq 0$,

$$\xi(t) > 0, \ \ \xi'(t) = -\frac{\kappa\left[\ln(t+\mathrm{e}) + (t+\mathrm{e})\,/\,(t+\mathrm{e})\right]}{\gamma\left[(t+\mathrm{e})\ln(t+\mathrm{e})\right]^2} = -\frac{\kappa\left[\ln(t+\mathrm{e}) + 1\right]}{\gamma\left[(t+\mathrm{e})\ln(t+\mathrm{e})\right]^2} < 0$$

e

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\right| &= \frac{\kappa\left[\ln(t+\mathrm{e}) + 1\right]}{\gamma\left[(t+\mathrm{e})\ln(t+\mathrm{e})\right]^2}\frac{\gamma\,(t+\mathrm{e})\ln(t+\mathrm{e})}{\kappa} \\
&= \frac{1}{(t+\mathrm{e})\ln(t+\mathrm{e})} + \frac{1}{t+\mathrm{e}} \\
&= \frac{1}{(t+\mathrm{e})}\frac{1}{\ln(t+\mathrm{e})} + \frac{1}{t+\mathrm{e}} \\
&< \frac{1}{t+\mathrm{e}} + \frac{1}{t+\mathrm{e}} \\
&< \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{\mathrm{e}} = \frac{2}{\mathrm{e}} < 2 := \xi_1.
\end{aligned}$$

Portanto, $\xi(t)$ satisfaz a condição (G2). De (3.26) obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(t) &\leq K\exp\left(-\gamma\int_0^t \frac{\kappa}{\gamma\,(s+\mathrm{e})\ln\,(s+\mathrm{e})}ds\right)\\
&\leq K\exp\left(-\kappa\int_0^t \frac{1}{(s+\mathrm{e})\ln\,(s+\mathrm{e})}ds\right)\\
&\leq K\exp\left(\ln\,(\ln\,(t+\mathrm{e}))^{-\kappa}\right)\\
&\leq \frac{K}{[\ln\,(t+\mathrm{e})]^{\kappa}},\ \ \forall\ \ t\geq 0.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.5. Consideremos, agora, $\xi(t)=\kappa\gamma^{-1}\mathrm{cotgh}\,(t+\theta)$, com $t\geq 0$, onde $\kappa>0$ e $\theta=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. Então,

$$\xi(t)>0,\ \ \xi'(t)=-\kappa\gamma^{-1}\left[\mathrm{cossech}\,(t+\theta)\right]^2<0$$

e

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\right| &= \left|\frac{-\kappa\gamma^{-1}\left[\mathrm{cossech}\,(t+\theta)\right]^2}{\kappa\gamma^{-1}\mathrm{cotgh}\,(t+\theta)}\right|\\
&= \left|\left[\mathrm{cossech}\,(t+\theta)\right]^2\frac{1}{\mathrm{cotgh}\,(t+\theta)}\right|\\
&= \left|\frac{1}{\left[\mathrm{senh}\,(t+\theta)\right]^2}\frac{\mathrm{senh}\,(t+\theta)}{\cosh\,(t+\theta)}\right|\\
&= \left|\frac{1}{\mathrm{senh}\,(t+\theta)\cosh\,(t+\theta)}\right|\\
&= \frac{1}{\mathrm{senh}\,(t+\theta)\cosh\,(t+\theta)}<1:=\xi_1,
\end{aligned}$$

para todo $t\geq 0$, ou seja, $\xi(t)$ satisfaz a condição (G2). Além disso, de (3.26) obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(t) &\leq K\exp\left(-\gamma\int_0^t \kappa\gamma^{-1}\mathrm{cotgh}\,(t+\theta)\,ds\right)\\
&\leq K\exp\left(-\kappa\int_0^t \mathrm{cotgh}\,(t+\theta)\,ds\right)\\
&\leq K\exp\left(\ln\left|\mathrm{senh}\,(t+\theta)\right|^{-\kappa}+\ln\left|\mathrm{senh}\,(\theta)\right|^{\kappa}\right)\\
&\leq \frac{K}{\left[\mathrm{senh}\,(t+\theta)\right]^{\kappa}},\ \ \forall\, t\geq 0.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.6. Seja, agora, $\xi(t)=\dfrac{\kappa\left[\mathrm{e}+2\ln\,(t+1)\right]}{\gamma\,(t+1)}$, $t\geq 0$, com $\kappa>0$. Temos que $\xi(t)$

satisfaz a condição (G2), pois $\xi(t) > 0$ para todo $t \geq 0$ e

$$\begin{aligned}
\xi'(t) &= \left(\frac{\kappa}{\gamma}\right) \frac{\frac{2}{(t+1)}\,(t+1) - (\mathrm{e} + 2\ln(t+1))}{(t+1)^2} \\
&= \frac{\kappa\,[2 - \mathrm{e} - 2\ln(t+1)]}{\gamma\left[(t+1)^2\right]} \leq 0, \quad \forall\, t \geq 0.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\right| &= \left|\frac{\kappa\,[2 - \mathrm{e} - 2\ln(t+1)]}{\gamma\left[(t+1)^2\right]} \frac{\gamma\,(t+1)}{\kappa\,[\mathrm{e} + 2\ln(t+1)]}\right| \\
&= \frac{1}{t+1}\left(1 - \frac{2}{e + 2\ln(t+1)}\right) \\
&\leq \frac{1}{t+1} \leq 1 := \xi_1, \quad \forall\, t \geq 0.
\end{aligned}$$

De (3.26), temos ainda que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(t) &\leq K\exp\left(-\gamma \int_0^t \frac{\kappa\,[\mathrm{e} + 2\ln(t+1)]}{\gamma\,(t+1)} ds\right) \\
&\leq K\exp\left(-\kappa \int_0^t \frac{[\mathrm{e} + 2\ln(t+1)]}{(t+1)} ds\right) \\
&\leq K\exp\left(\ln(t+1)^{-\kappa[\mathrm{e}+\ln(t+1)]}\right) \\
&\leq \frac{K}{(t+1)^{\kappa[\mathrm{e}+\ln(t+1)]}}, \quad \forall\, t \geq 0.
\end{aligned}$$

4 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi estudado um modelo viscoelástico de placas no que diz respeito a existência, dependência contínua e taxas de decaimento de soluções. No Capítulo 2 obtemos a existência de soluções forte e fraca via método de Faedo-Galerkin, sendo a solução fraca obtida por argumentos de densidade. No Capítulo 3, determinamos taxas de decaimento de soluções por perturbação da energia (funcionais de Lyapunov) e método dos multiplicadores.

A principal contribuição deste trabalho foi estudar o problema (1.1)-(1.4) considerando duas condições de fronteira, hipóteses menos restritivas sobre g e M e uma perturbação não linear $f(u)$, complementando os resultados obtidos em [6]. Ao analisarmos o primeiro caso do decaimento, em que $g(0) = 0$ e $M(s) > 0$ para todo $s \geq 0$, concluímos que tal termo de dissipação friccional fez com que a taxa de decaimento dependesse dos dados iniciais. Já no segundo caso, $g(0) > 0$ e $M(s) \geq 0$ para todo $s \geq 0$, constatamos que o decaimento de energia independe da dissipação friccional, sendo o núcleo da memória o fator que determina a taxa de decaimento do funcional energia mesmo quando $M(s) > 0$ para todo $s \geq 0$, ou seja, provamos que o termo $M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right) u_t$ não é necessário para obter o decaimento exponencial, como em [6].

5 APÊNDICE

5.1 Distribuições e Espaços Funcionais

5.1.1 Espaços das Funções Testes

Dado um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ e um ponto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ $\in \mathbb{R}^N$, define-se $|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$ a ordem do multi-índice e representaremos por D^α operador de Derivação de ordem α, definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Para $\alpha = (0, \ldots, 0)$, temos por definição $D^0\varphi = \varphi$ para toda função φ.

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$. Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções φ : $\Omega \to \mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que tem suporte compacto, onde suporte φ é o fecho do conjunto $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$ em Ω, ou seja, $supp\,(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^{\Omega}$.

Dizemos que uma sequência $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero, denotando $\varphi_n \to 0$, se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω, tal que

i) $supp\,(\varphi_n) \subset K, \forall\, n \in \mathbb{N}$;

ii) $D^\alpha\varphi_n \to D^\alpha\varphi$ uniformemente sobre $K, \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n$.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido desta noção de convergência, é denominado espaço das funções testes, e denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Com o intuito de generalizar o conceito de funções sobre Ω define-se o conceito de distribuições a valores reais sobre Ω a toda forma linear T sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$, chamado espaço das distribuições sobre Ω, munido da seguinte noção de convergência: Seja (T_n) uma sucessão em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Diremos que $T_n \to T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se a sequência $\langle T_n\varphi\rangle$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}, \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Seja T uma distribuição sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T, no sentido das distribuições, é definida por:

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\varphi\rangle; \ \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Verifica-se que $D^\alpha T$ é ainda um distribuição e que o operador

$$D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega),$$

associa cada $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ uma forma linear e contínua $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

5.1.2 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$. Denotamos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, o espaço das funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, mensuráveis a Lebesgue e tais que $|u|^p$ são Lebesgue integráveis em Ω. O Espaço $L^p(\Omega)$, é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad \text{para } 1 \leq p < +\infty,$$

e

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u(x)|, \quad \text{para } p = +\infty.$$

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno,

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x) \, dx.$$

Proposição 5.1. (Desigualde de Young) *Se a, b são números reais não negativos, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

sempre que $1 < p < \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Demonstração. Ver [17], p. 85, Proposição 4.4. □

Observação 5.1. No caso particular em que $p = q = 2$, a desigualdade de Young com $\epsilon > 0$ se resume em

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2, \quad \forall\, a, b \geq 0,$$

Teorema 5.2. (Desigualdade de Poincaré) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e $1 \leq p < \infty$. Então, existe um constante $C = C(p, |\Omega|) > 0$ tal que*

$$\|u\|_p \leq C \|\nabla u\|_p, \; \forall \; u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. Ver [**?**], p. 290, Corolário 9.19. □

Proposição 5.3. (Desigualdade de Hölder) *Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, então $uv \in L^1(\Omega)$ e tem-se a desigualdade*

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

onde $1 \leq p < \infty$.

Demonstração. Ver [17], p. 85, Proposição 4.5. □

Teorema 5.4. **(Teorema da Representação de Riesz-Fréchet)** *Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $(.,.)$ e norma $\|\cdot\|$. Dado $\varphi \in H'$, existe um único $f \in H$ tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle_{H',H} = (f, v), \ \forall \, v \in H.$$

Além disso,

$$\|f\| = \|\varphi\|_{H'}.$$

Demonstração. Ver [8], p. 171, Teorema 4.10. □

Lema 5.5. **(Lema de Gronwall)** *Sejam $m \in L^1(a,b)$ tal que $m \geq 0$ q.s em (a,b) e seja $c \geq 0$. Consideremos $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua verificando*

$$\varphi(t) \leq c + \int_a^t m(\xi)\varphi(\xi)\, d\xi \quad \forall \, t \in [a,b].$$

Então

$$\varphi(t) \leq c e^{\int_a^t m(\xi)\, d\xi}, \quad \forall \, t \in [a,b].$$

Demonstração: Ver [20], p. 16, Corolário 1.5.1.

Lema 5.6. *Seja Ω um domínio de $\mathbb{R}^N$. Se $1 < p < \infty$, então $L^p(\Omega)$ é reflexivo. Entretanto, $L^1(\Omega)$ e $L^\infty(\Omega)$ não são reflexivos.*

Demonstração. Ver [4], p. 95, Teorema 4.10. □

Lema 5.7. *Seja Ω um domínio de $\mathbb{R}^N$. Se $1 \leq p < \infty$, então $L^p(\Omega)$ é separável. No entanto, $L^\infty(\Omega)$ não é separável.*

Demonstração. Ver [4], p. 98, Teorema 4.13. □

Definição 5.8. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, com $1 \leq p \leq +\infty$. Definimos a convolução de f por g por*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y)\, dy.$$

Teorema 5.9. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, com $1 \leq p \leq +\infty$. Então*

$$(f * g) \in L^p(\mathbb{R}^N) \quad e \quad \|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p. \tag{5.1}$$

Demonstração. Ver [4], p. 104, Teorema 4.15. □

5.1.3 Espaço de Sobolev

Seja um aberto do $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p < +\infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $u \in L^p(\Omega)$ sabemos que u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, mas não é verdade, em geral, que $D^\alpha u$ seja uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Quando $D^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$ define-se um novo espaço denominado espaço de Sobolev. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence à $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p} \quad \text{para} \quad 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \mathrm{ess} |D^\alpha u| \quad \text{para} \quad p = \infty$$

é um espaço de Banach. Além disso, definimos o conjunto $W_0^{m,p}(\Omega)$ como o subespaço de $W^{m,p}(\Omega)$ constituído pelo fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, ou seja,

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}}.$$

Representa-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ devido a sua estrutura hilbertiana, ou seja, os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert. Neste caso a estrutura do produto interno vem dada por

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

Além disso, $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$.

Teorema 5.10. (Imersão de Sobolev) *Seja Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^N$ ou do $\mathbb{R}_+^N$. Para $N \geq 2$, temos*

(i) Se $mp < N$, $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, com $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N}$;

(ii) Se $mp = N$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q \in [p, +\infty)$;

(iii) Se $mp > N$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $k < m - \dfrac{n}{p} \leq k + 1$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\lambda}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Demonstração. Ver [7], p. 208, Teorema 1. □

Teorema 5.11. *Seja Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$. Então as seguintes imersões são compactas:*

(i) Se $mp < N$, $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, com $1 \leq q < \dfrac{Np}{N - mp}$;

(ii) Se $mp = N$, $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, com $1 \leq q < +\infty$;

(iii) Se $mp > N$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $k < m - \dfrac{N}{p} \leq k + 1$, $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^k\left(\overline{\Omega}\right)$.

Demonstração. Ver [7], p. 217, Teorema 4. □

Teorema 5.12. *Seja Ω um subconjunto aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Então, as seguintes imersões são compactas*

(i) Se $p < N$, $W^{m+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m,q}(\Omega)$, com $1 \leq q < \dfrac{Np}{N-p}$;

(ii) Se $p = N$, $W^{m+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m,q}(\Omega)$, com $1 \leq q < +\infty$;

(iii) Se $p > N$, $W^{m+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^m\left(\overline{\Omega}\right)$.

Demonstração. Ver [7], p. 214, Corolário 1. □

Teorema 5.13. (Fórmula de Green) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado. Se $u, v \in H^2(\Omega)$, então*

$$-\int_\Omega (\Delta u)v\, dx = \int_\Omega \nabla u.\nabla v\, dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v\, dS,$$

onde ν representa o vetor normal unitário exterior a Γ e $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} := \nabla u \cdot \nu$ a derivada normal de u.

Demonstração. Ver [**?**], p. 316, propriedade (iii). □

5.1.4 Espaços Funcionais a Valores Vetoriais

Considere um intervalo aberto $]0, T[$, com $T > 0$, da reta real $\mathbb{R}$ e um espaço de Banach X. O espaço vetorial representado por $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p \leq +\infty$, consiste das funções (classes) mensuráveis $u :]0,T[\to X$ tais que, para todo $s \in]0,T[$, $\|u(s)\|_X \in L^p(0,T)$. Em tal espaço, definimos a norma

$$\|u\|^p_{L^p(0,T;X)} := \int_0^T \|u(s)\|^p_X ds,$$

para $1 \leq p < +\infty$, e

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} := \sup_{0<s<T} \text{ess}\|u(s)\|_X.$$

Com esta norma, $L^p(0,T;X)$ é um espaço de Banach, qualquer que seja $1 \leq p \leq +\infty$. O espaço $C^m([a,b];X)$, consiste de todas as funções contínuas $u : [a,b] \to X$ que possuem derivadas contínuas até a ordem m sobre $[0,T]$. A norma é dada por

$$\|u\|_{C^m([a,b],X)} := \sum_{i=0}^m \max_{t\in[a,b]} |u^{(i)}(t)|_X.$$

O espaço das distribuições sobre $(0,T)$ com imagem em X, será denotado por

$$\mathcal{D}'(0,T;X).$$

Logo, $\mathcal{D}'(0,T;X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T);X)$, ou seja, é o conjunto de todas as aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X. Para $f \in \mathcal{D}'(0,T;X)$, sua derivada de ordem n no sentido das distribuições vetoriais é definida por

$$\left\langle \frac{d^n f}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1) \left\langle f, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(0,T). \tag{5.2}$$

Além disso, se f é derivável no sentido das distribuições vetoriais, então podemos enxergar $\frac{df}{dt}$ como um elemento de $\mathcal{D}'(0,T;X)$, valendo a relação (5.2). Agora se $f \in L^p(0,T;X)$, então pode-se identificar f com uma distribuição vetorial (que aqui denotaremos por f), de modo que

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_0^T f(t)\varphi(t)\, dt, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Com isso, podemos dizer com um certo abuso de notação que

$$L^p(0,T;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T;X).$$

Teorema 5.14. (Teorema de Aubin-Lions) *Sejam B_0, B, B_1 três espaços de Banach tais que $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$, onde B_0 e B_1 são reflexivos. Definamos*

$$\mathcal{W} = \{v; v \in L^{p_0}(0,T;B_0),\ v_t \in L^{p_1}(0,T;B_1)\},$$

onde $1 < p_0, p_1 < \infty$, e consideremos $\mathcal{W}$ munido da norma

$$\|v\|_{\mathcal{W}} = \|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|v_t\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)},$$

o que o torna um espaço de Banach. Então, a imersão de $\mathcal{W}$ em $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.

Demonstração. Ver [14], p. 57. □

Lema 5.15. *Sejam X e Y dois espaços de Banach, tais que $X \hookrightarrow Y$. Se*

$$u \in L^1(0,T;X) \text{ e } \frac{du}{dt} \in L^1(0,T;Y),$$

então $u \in C([0,T];Y)$.

Demonstração. Ver [15], p. 11, Corolário 1. □

Teorema 5.16. *Seja X um espaço de Banach. Uma função $f : [0,T] \mapsto X$ fortemente mensurável é Bochner-integrável se, e somente se, $t \mapsto \|f(t)\|_X$ é Lebesgue-integrável. São válidas,*

$$\left\| \int_0^T f(t)dt \right\|_X \leq \int_0^T \|f(t)\|_X\, dt,$$

e

$$\left\langle u^*, \int_0^T f(t)dt \right\rangle = \int_0^T \langle u^*, f(t) \rangle \, dt$$

para cada $u^* \in X'$.

Demonstração. Ver [23], p. 133, Teorema 1 e Corolários 1 e 2. □

5.2 Topologia Fraca $\sigma(E, E')$ e Topologia Fraco Estrela $\sigma(E', E)$

Seja E um espaço de Banach, E' o seu dual topológico e consideremos $f \in E'$. Designaremos por $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$, a aplicação dada por $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$, para todo $x \in E$. Conforme f percorre E', obtemos uma família $\{\varphi_f\}_{f \in E'}$ de aplicações de E em $\mathbb{R}$.

Definição 5.17. *Seja E um espaço de Banach. A topologia fraca $\sigma(E, E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E para a qual são contínuas todas as aplicações $\varphi_f,\ f \in E'$.*

Definição 5.18. *Diremos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge fraco para $x \in E$ quando (x_n) converge a x na topologia fraca $\sigma(E, E^{'})$, isto é, para todo funcional $f \in E'$ temos*

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \, .$$

Denotaremos a convergência fraca de (x_n) a x por $x_n \rightharpoonup x$.

Proposição 5.19. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de E. Então:*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(E, E')$ *se, e somente se,* $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle,\ \forall\, f \in E'$.

(ii) *Se* $x_n \to x$ *em* E*, então* $x_n \rightharpoonup x$ *em* E.

(iii) *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(E, E')$*, então* $\|x_n\|_E$ *é limitada e* $\|x\|_E \leq \liminf \|x_n\|$.

(iv) *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(E, E')$ *e se* $f_n \to f$ *fortemente em* E'*, então* $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$ *em* $\mathbb{R}$.

Demonstração. Ver [8], p. 112, Proposição 3.12. □

Seja E um espaço de Banach e seja $x \in E$ fixo. Definamos $J_x : E' \to \mathbb{R}$ por

$$\langle J_x, f \rangle = \langle f, x \rangle.$$

As aplicações J_x são lineares e contínuas, portanto $J_x \in E'',\ \forall\, x \in E$. Definamos, agora, $J : E \to E''$ tal que $J(x) = J_x$.

Definição 5.20. *A topologia fraco estrela também designada por $\sigma(E', E)$, é a topologia menos fina sobre E' que torna contínuas todas as aplicações J_x.*

Definição 5.21. *Diremos que uma sequência* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$ *converge fraco estrela para* $f \in E'$ *quando* (f_n) *converge a* f *na topologia fraca estrela* $\sigma(E^{'}, E)$*, isto é, para todo* $x \in E$ *temos*

$$\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle \,.$$

Proposição 5.22. *Seja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* E'*, então:*

(i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E', E)$ *se, e somente se,* $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle,\ \forall x \in E$.

(ii) Se $f_n \to f$ *forte em* E'*, então* $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(E', E'')$.
Se $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(E', E'')$*, então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E', E)$.

(iii) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E', E)$*, então* $\|f_n\|_{E'}$ *é limitada e* $\|f\|_{E'} \leq \liminf \|f_n\|_{E'}$.

(iv) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E', E)$ *e* $x_n \to x$ *forte em* E*, então* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração. Ver [8], p. 123, Proposição 3.30. □

Lema 5.23. (Compacidade Fraca) *Sejam* E *um espaço de Banach reflexivo e* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência limitada de* E*. Então, existe uma subsequência* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $x \in E$*, tal que*

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

Demonstração. Ver [8], p. 153, Teorema 3.63. □

Lema 5.24. (Compacidade Fraca Estrela) *Sejam* E *um espaço de Banach separável e* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência limitada de* E'*. Então, existe uma subsequência* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $f \in E'$*, tal que*

$$f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ em } E'.$$

Demonstração. Ver [8], p. 152, Corolário 3.61. □

5.3 Teorema de Carathéodory

Dado um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$, no qual seus elementos são denotados por (t, x), $t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^N$, seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ uma função. Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{5.3}$$

diremos que $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ satisfaz as condições de Carathéodory sobre Ω se:

(i) $f(t, x)$ é mensurável em t para cada x fixado;

(ii) $f(t,x)$ é contínua em x para quase todo t fixado;

(iii) para cada compacto $K \subset \Omega$, existe uma função real $m_K(t)$, integrável, tal que

$$\|f(t,x)\|_{\mathbb{R}^N} \leq m_K(t), \quad \forall\ (t,x) \in K.$$

Teorema 5.25. (Teorema de Carathéodory) *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre Ω. Então existe uma solução $x = x(t)$ de (5.3) sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta,\ \beta > 0$.*

Demonstração. Ver [9], p. 43, Teorema 1.1. □

Corolário 5.26. *Sejam $\Omega = [0,T) \times B$ com $T > 0$, $B = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| \leq b\}$ onde $b > 0$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ nas condições de Carathéodory sobre Ω. Suponhamos que $x = x(t)$ é uma solução de (5.3) tal que $|x_0| \leq b$ e que em qualquer intervalo I, onde $x(t)$ está definida, se tenha $|x(t)| \leq M$, para todo $t \in I$, M independente de I e $M < b$. Então $x(t)$ possui um prolongamento à todo $[0,T]$.*

Demonstração. Ver [9], p. 47, Teorema 1.3. □

5.4 Resultados Auxiliares

Lema 5.27. *Sejam $(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot), \|\cdot\|)$ um espaço de Hilbert e (u_n), $(\phi_n) \subset \mathcal{H}$. Se $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ em $\mathcal{H}$ e $\phi_n \rightharpoonup \phi$ em $\mathcal{H}$, então $(u_n, \phi_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (u, \phi)$.*

Demonstração. Como $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, segue do Teorema de Representação de Riesz que $\phi_n \rightharpoonup \phi$ implica

$$(\phi_n - \phi, v) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

para todo $v \in \mathcal{H}$, quando n tende para infinito. Mais ainda, existe uma constante positiva C tal que

$$\|\phi_n\| \leq C,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\begin{aligned}
|(u_n, \phi_n) - (u, \phi)| &= |(u_n, \phi_n) - (u, \phi_n) + (u, \phi_n) - (u, \phi)| \\
&\leq |(u_n - u, \phi_n)| + |(u, \phi_n - \phi)| \\
&\leq \|u_n - u\| \|\phi_n\| + |(u, \phi_n - \phi)| \\
&\leq C\|u_n - u\| + |(u, \phi_n - \phi)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $(u_n, \phi_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (u, \phi)$. □

Lema 5.28. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e considere o espaço $L^2(\Omega)$ com produto interno $(\cdot,\cdot)_2$ e norma $\|\cdot\|_2$. Se $w \in L^\infty(\Omega)$, $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ em $L^2(\Omega)$ e $\phi_n \rightharpoonup \phi$ em $L^2(\Omega)$, então:*

(i) $wu_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} wu$ *em* $L^2(\Omega)$.

(ii) $(wu_n, \phi_n)_2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (wu, \phi)_2$.

Demonstração. (i) Primeiramente, note que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |w(x)u_n(x) - w(x)u(x)|^2\, dx &\leq \int_\Omega |w(x)\left(u_n(x) - u(x)\right)|^2\, dx\\ &\leq \int_\Omega |w(x)|^2|u_n(x) - u(x)|^2\, dx\\ &\leq \|w\|^2_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |u_n(x) - u(x)|^2\, dx \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

quando $n \longrightarrow \infty$, visso que $u_n \longrightarrow u$ em $L^2(\Omega)$. Logo, $wu_n \longrightarrow wu$ em $L^2(\Omega)$.
(ii) Pelo item (i) temos que $wu_n \longrightarrow wu$ em $L^2(\Omega)$ e, por hipótese, $\phi_n \rightharpoonup \phi$ em $L^2(\Omega)$. Pelo Lema 5.27, segue o desejado. □

Lema 5.29. *Para quaisquer* $a, b \in \mathbb{R}$*, a seguinte desigualdade é válida* $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$.

Demonstração. Trivial. □

REFERÊNCIAS

[1] ADAMS, R. A., AND FOURNIER, J. J. F. *Sobolev Spaces*. Academic Press, Amsterdam, The Netherlands, 2003.

[2] ANDRADE, D., JORGE SILVA, M. A., AND MA, T. F. Exponential stability for a plate equation with p-laplacian and memory terms. *Math. Methods Appl. Sci. 35* (2012), 417–426.

[3] BOTELHO, G., PELLEGRINO, D., AND TEIXEIRA, E. *Fundamentos de Análise Funcional*. SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[4] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York, NY, 2011.

[5] CAPOBIANCO, R. Decaimento de energia para um modelo viscoelástico de placas. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Londrina, 2014.

[6] CAVALCANTI, M. M., CAVALCANTI, V. N. D., AND MA, T. F. Exponential decay of the viscoelastic euler-bernoulli equation with a nonlocal dissipation in general domains. *Differential Integral Equations 17* (2004), 495–510.

[7] CAVALCANTI, M. M., AND DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*. Eduem - UEM, Maringá, PR, 2009.

[8] CAVALCANTI, M. M., DOMINGOS CAVALCANTI, V. N., AND KOMORNIK, V. *Introdução à Análise Funcional*. Eduem - UEM, Maringá, PR, 2011.

[9] CODDINGTON, E. A., AND LEVINSON, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill Book Company, Massachusetts, 1955.

[10] DAFERMOS, C. M. Asymptotic stability in viscoelasticity. *Arch. Rational Mech 37* (1970), 297–308.

[11] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[12] JORGE SILVA, M. A. *Estabilidade Assintótica para alguns Modelos Dissipativos de Equações de Placas*. Tese de doutorado, Universidade de São Paulo - ICMC, São Carlos, 2012.

[13] JORGE SILVA, M. A., AND NARCISO, V. Long-time behavior for a plate equation with nonlocal weak damping. *Differential and Integral Equations 27*, 9/10 (2014), 931–948.

[14] LIONS, J. L. *Quelques Méthodes de Résolution des Problémes Aux Limites Non Linéaires*. Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[15] MEDEIROS, L. A. *Tópicos em Equações Diferenciais Parciais - Parte I*. IM - UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 2006.

[16] MEDEIROS, L. A., AND MELLO, E. A. *Espaços de Sobolev: Iniciação aos Problemas Elípticos não Homogêneos*. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 2000.

[17] MEDEIROS, L. A., AND MELLO, E. A. *A Integral de Lebesgue*. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 2008.

[18] MESSAOUDI, S. A. General decay of solutions of a viscoelastic equation. *J. Math. Anal. Appl. 341* (2008), 1457–1467.

[19] MESSAOUDI, S. A. General decay of the solution energy in a viscoelastic equation with a nonlinear source. *Nonlinear Anal. 69* (2008), 2589–2598.

[20] RIVERA, J. E. M. *Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais*. LNCC, Petrópolis, RJ, 2004.

[21] RIVERA, J. E. M., LAPA, E. C., AND BARRETO, R. Decay rates for viscoelastic plates with memory. *Journal of Elasticity 44* (1996), 61–87.

[22] RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, New York, NY, 1987.

[23] YOSIDA, K. *Functional Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1980.