



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

ALESSANDRA NEGRINI DALLA BARBA

**ESTUDO E IMPLEMENTAÇÃO DE ESQUEMA UPWIND NA  
RESOLUÇÃO DE UM MODELO DE DINÂMICA DOS  
FLUIDOS COMPUTACIONAL EM COORDENADAS  
GENERALIZADAS**

---

Londrina  
2015

ALESSANDRA NEGRINI DALLA BARBA

**ESTUDO E IMPLEMENTAÇÃO DE ESQUEMA UPWIND NA  
RESOLUÇÃO DE UM MODELO DE DINÂMICA DOS  
FLUIDOS COMPUTACIONAL EM COORDENADAS  
GENERALIZADAS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Eliandro Rodrigues Cirilo

Londrina  
2015

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da  
Universidade Estadual de Londrina**

**Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)**

B228e Barba, Alessandra Negrini Dalla.

Estudo e implementação de esquema *upwind* na  
resolução de um modelo de dinâmica dos fluidos  
computacional em coordenadas generalizadas /  
Alessandra Negrini Dalla Barba. – Londrina, 2015.  
114 f. : il.

Orientador: Eliandro Rodrigues Cirilo.

Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) –  
Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de  
Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2015.

Inclui bibliografia.

1. Análise numérica – Teses. 2. Dinâmica dos fluidos – Teses. 3.  
Matemática aplicada – Teses. 4. Equações diferenciais parciais – Teses.  
5. Navier-Stokes, Equações de – Teses. I. Cirilo, Eliandro Rodrigues. II.  
Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de  
Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

CDU 517.1

ALESSANDRA NEGRINI DALLA BARBA

**ESTUDO E IMPLEMENTAÇÃO DE ESQUEMA UPWIND NA  
RESOLUÇÃO DE UM MODELO DE DINÂMICA DOS FLUIDOS  
COMPUTACIONAL EM COORDENADAS GENERALIZADAS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Orientador: Prof. Dr. Eliandro Rodrigues Cirilo  
Universidade Estadual de Londrina – UEL

---

Profa. Dra. Neyva Maria Lopes Romeiro  
Universidade Estadual de Londrina – UEL

---

Prof. Dr. Mateus Bernardes  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná –  
UTFPR

Londrina, 13 de fevereiro de 2015.

*Dedico este trabalho à minha família*

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à Deus, pelo dom da vida e por todas as oportunidades que me foram concedidas.

Aos meus pais, Elcio e Solange, por sempre me apoiarem em todas as minhas escolhas e em todos os momentos de minha vida, por estarem sempre ao meu lado. Sem vocês eu não estaria conquistando mais esta etapa em minha vida.

Aos meus avós, José, Helena e Cely, que sempre me incentivaram e me deram carinho para continuar seguindo em frente em meus estudos e em minha vida.

Aos meus tios Vitamar e Silvana, pelo carinho, apoio e por estarem sempre torcendo por mim.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Eliandro, por seu apoio, amizade, dedicação e pelo constante incentivo nos momentos mais difíceis desta trajetória. Sem o seu auxílio na condução dos trabalhos seria impossível a conclusão desta dissertação.

Aos integrantes da banca, pela disponibilidade, colaboração, contribuição com a transmissão de conhecimentos e pelo estímulo para o aperfeiçoamento deste trabalho.

Aos professores do PGMAC, pela competência e disposição em compartilhar experiências.

Aos demais professores do departamento de matemática da UEL, por todo o apoio durante a graduação e o mestrado.

Aos meus colegas que fizeram parte do processo de elaboração deste trabalho, compartilhando os momentos de dificuldades e ajudando uns aos outros a atingir os objetivos.

À CAPES, pelo apoio financeiro para o desenvolvimento deste trabalho.

Enfim, a todos aqueles que de uma maneira ou de outra contribuíram para a conclusão de mais uma etapa em minha vida.

*"Os homens da ciência só ajudarão realmente a  
humanidade se conservarem o sentido da  
transcendência do homem sobre o mundo e de  
Deus sobre o homem."  
**São João Paulo II***

BARBA, Alessandra Negrini Dalla. *Estudo e implementação de esquema upwind na resolução de um modelo de dinâmica dos fluidos computacional em coordenadas generalizadas*. 2015. 114. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

## RESUMO

Desde a Antiguidade a humanidade sempre teve interesse em estudar o comportamento dos fluidos, mas foi a partir do século XVIII, com os estudos desenvolvidos por Leonhard Euler, Claude Navier, Simeon Poisson e George Stokes, é que as expressões matemáticas que regem o movimento de fluidos foram deduzidas, sendo resolvidas de forma mais expressiva a partir do desenvolvimento da computação científica, com o advento da área chamada de Dinâmica dos Fluidos Computacional. No presente trabalho nosso objetivo é estudar o escoamento de fluidos incompressíveis, sem superfície livre, utilizando o sistema de coordenadas generalizadas. Assim, abordaremos a geração de malhas e a representação das equações de Navier-Stokes e da continuidade neste sistema de coordenadas. Discretizaremos as equações da quantidade de movimento por meio do método de diferenças finitas e aplicaremos um esquema *upwind* para aproximação dos termos convectivos. Dentre vários esquemas existentes, trabalharemos com o de primeira ordem FOU (*First Order Upwind*). Por fim, será estabelecido um método numérico – uma versão simplificada do método MAC (*Marker and cell*) – com o objetivo de resolver problemas de escoamentos incompressíveis, comparando os resultados obtidos com os apresentados na literatura.

**Palavras-chave:** Navier-Stokes. *Upwind*. Sistema de Coordenadas Generalizadas. Escoamento Incompressível. Mecânica dos Fluidos.

BARBA, Alessandra Negrini Dalla. *Study and implementation of upwind scheme in solving a model of computational fluid dynamics in generalized coordinates*. 2015. 114. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

## ABSTRACT

Since ancient times the humanity has always been interested in studying the behavior of fluids, but it was from the eighteenth century, with studies developed by Leonhard Euler, Claude Navier, Simeon Poisson and George Stokes, that the mathematical equations of the fluid dynamics were deduced, being resolved more significantly from the development of scientific computing, with the advent of the area called Computational Fluid Dynamics. In this work our objective is to study the incompressible fluids flow, without free surface, using the curvilinear coordinate system. Therefore, we'll discuss the grid generation in this type of coordinate system and the representation of the Navier-Stokes and continuity equations in this system. The discretization of the momentum equations will be made by the finite difference method and apply a scheme upwind to approximation of the convective terms. Among these schemes, we will work with the first order scheme FOU (First Order Upwind). Finally, a numerical method will be established - a simplified version of MAC (Marker and cell) method - in order to solve specific problems of incompressible flows, comparing the results with those presented in the literature.

**Keywords:** Navier-Stokes. Upwind. Curvilinear Coordinate System. Incompressible Flow. Fluid Mechanics.

# Lista de Figuras

2.1	Representação dos elementos de uma malha [50]	21
2.2	Exemplos de malhas	22
2.3	Representação da região R	23
2.4	Contorno inferior obtido por spline cúbico parametrizado [7]	26
3.1	Componentes cartesianas do vetor velocidade em um sistema ortogonal	38
3.2	Componentes cartesianas do vetor velocidade em um sistema não-ortogonal	39
4.1	Células	41
4.2	Discretização do termo temporal	43
4.3	Discretização do termo convectivo $\mathcal{C}(u)$ na face $e$	44
4.4	<i>Upwind</i>	46
4.5	Discretização do termo convectivo $\mathcal{C}(v)$ na face $n$	47
4.6	Discretização do termo de pressão	49
4.7	Discretização do termo difusivo $\mathcal{V}(u)$ na face $e$	50
4.8	Discretização do termo difusivo $\mathcal{V}(v)$ na face $n$	50
4.9	Condição CNEI	58
4.10	Condição CLES	59
4.11	Condição CSIM	61
4.12	Condição CIPR	62
4.13	Condição CEPR	63
4.14	Condição CECO	64
4.15	Condição de contorno para a pressão	65
6.1	Dimensões da geometria do problema do escoamento laminar entre duas placas paralelas [5]	73
6.2	Malha $P1$	74
6.3	Perfis obtidos na resolução do problema de escoamento entre duas placas paralelas para alguns valores de $\tau$	75
6.4	Perfil de velocidade na seção de saída para o escoamento entre duas placas paralelas	76
6.5	Escoamento em cavidade com parede superior em movimento	78
6.6	Campos de velocidades obtidos na resolução do problema da cavidade no regime permanente	79
6.7	Campos de velocidades, indicando o sentido do escoamento, obtidos na resolução do problema da cavidade no regime permanente	80
6.8	Campos de velocidades, indicando o sentido do escoamento, para $Re = 1000$	81
6.9	Variação da pressão de um fluido escoando em tubulação contendo placa de orifício [47]	82

6.10	Geometria e dimensões referente ao problema envolvendo placa de orifício . . .	83
6.11	Malha considerada na primeira simulação referente ao problema envolvendo placa de orifício . . . . .	83
6.12	Perfis obtidos para a pressão na resolução do problema envolvendo placa de orifício no regime permanente . . . . .	84
6.13	Gráfico relacionando o valor da pressão em função da coordenada espacial $x$ . . .	85
6.14	Campos de velocidade obtidos na resolução do problema envolvendo placa de orifício no regime permanente . . . . .	86
6.15	Gráfico relacionando o valor da velocidade em função da coordenada espacial $x$	87
6.16	Dimensões da geometria considerada no problema referente à aterosclerose . . .	88
6.17	Malha considerada na resolução do problema referente à aterosclerose . . . . .	88
6.18	Campo de velocidades obtido a partir da simulação do problema referente à aterosclerose . . . . .	89
6.19	Campo de velocidades com destaque para a região próxima à estenose . . . . .	89
6.20	Campo de velocidades para a componente $u$ . . . . .	90
6.21	Campo de velocidades para a componente $v$ . . . . .	90
A.1	Velocidade do fluido em um ponto $C$ de um volume de controle dada a partir da velocidade instantânea $V$ de uma partícula $a$ . . . . .	94
A.2	Esquema de um escoamento dito laminar [29] . . . . .	95
B.1	Representação dos pontos $D$ , $U$ e $R$ em uma molécula computacional (Adaptada de [14], p.16) . . . . .	96
B.2	Representação dos esquemas FOU (em verde) e QUICK (em vermelho) (Adaptada de [8], p.17) . . . . .	97
B.3	Região determinada pelo critério CBC (Adaptada de [14], p.19) . . . . .	98
B.4	Região determinada pelas restrições TVD (Adaptada de [14], p.21) . . . . .	99
B.5	Representação da região TVD no plano $\psi \perp r$ (Adaptada de [8], p.21) . . . . .	100
C.1	Representação do esquema CUBISTA, no diagrama de variáveis normalizadas, contido na região TVD . . . . .	102
C.2	Representação do limitador de fluxo do esquema CUBISTA e da região TVD no plano $\psi \perp r$ . . . . .	102
C.3	Discretização do termo convectivo $\mathcal{C}(u)$ na face $e$ . . . . .	103
C.4	Pontos da malha utilizados para a aproximação de $u _E^k$ por meio do esquema CUBISTA . . . . .	104
C.5	Pontos da malha utilizados para a aproximação de $u _P^k$ por meio do esquema CUBISTA . . . . .	105
C.6	Pontos da malha utilizados para a aproximação de $u _{ne}^k$ por meio do esquema CUBISTA . . . . .	106
C.7	Pontos da malha utilizados para a aproximação de $u _{se}^k$ por meio do esquema CUBISTA . . . . .	107

# Lista de Tabelas

2.1	Coordenadas de $n + 1$ pontos do contorno $\partial R$ . . . . .	25
6.1	Descrição da quantidade de linhas consideradas na construção das malhas utilizadas . . . . .	74
6.2	Indicativo de convergência via velocidade da corrente livre numérica $V_{lnum}$ . .	77
6.3	Comparações com resultados da literatura . . . . .	81

# Lista de Símbolos e Notações

$x, y$  - variáveis espaciais referente ao sistema de coordenadas cartesianas

$t$  - tempo, relativo ao sistema de coordenadas cartesianas

$\xi, \eta$  - variáveis espaciais referente ao sistema de coordenadas generalizadas

$\tau$  - tempo, relativo ao sistema de coordenadas generalizadas

$\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}$  - métricas de transformação

$J$  - jacobiano

$\alpha, \beta, \gamma$  - coeficientes de acoplamento

$\partial R$  - fronteira da região  $R$

$u, v$  - componentes cartesianas da velocidade nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente

$U, V$  - componentes contravariantes da velocidade nas direções  $\xi$  e  $\eta$ , respectivamente

$p$  - pressão

$\rho$  - massa específica

$\mu$  - viscosidade dinâmica

$\nu$  - viscosidade cinemática

$Re$  - número de Reynolds

$\bar{V}$  - velocidade média do escoamento

$d$  - diâmetro do duto

$g$  - força gravitacional

$R_1, R_2$  - termos fonte

$P$  - centro da célula

$E$  - posição leste tendo como base o centro  $P$

$W$  - posição oeste tendo como base o centro  $P$

$N$  - posição norte tendo como base o centro  $P$

$S$  - posição sul tendo como base o centro  $P$

$NE$  - posição nordeste tendo como base o centro  $P$

$SE$  - posição sudeste tendo como base o centro  $P$

$NW$  - posição noroeste tendo como base o centro  $P$

$SW$  - posição sudoeste tendo como base o centro  $P$

$\mathcal{C}(u), \mathcal{C}(v)$  - termos convectivos das equações de Navier-Stokes escritas em coordenadas cartesianas

$\mathcal{P}^u, \mathcal{P}^v$  - termos de pressão das equações de Navier-Stokes escritas em coordenadas cartesianas  
 $\mathcal{V}(u), \mathcal{V}(v)$  - termos difusivos das equações de Navier-Stokes escritas em coordenadas cartesianas

$\mathcal{C}(u), \mathcal{C}(v)$  - termos convectivos das equações de Navier-Stokes escritas em coordenadas generalizadas

$\mathcal{P}^u, \mathcal{P}^v$  - termos de pressão das equações de Navier-Stokes escritas em coordenadas generalizadas

$\mathcal{V}(u), \mathcal{V}(v)$  - termos difusivos das equações de Navier-Stokes escritas em coordenadas generalizadas

$vel_t$  - velocidade tangencial à fronteira

$vel_n$  - velocidade normal à fronteira

$vel_{\bullet}$  - velocidade prescrita

$vel_I$  - velocidade de injeção prescrita

$vel_E$  - velocidade de ejeção prescrita

$D$  - posição *Downstream*

$U$  - posição *Upstream*

$R$  - posição *Remote-upstream*

$\phi$  - variável genérica não normalizada

$\hat{\phi}$  - variável genérica normalizada

$\psi$  - função limitadora de fluxo

$V_f$  - velocidade de convecção

$f$  - face da célula computacional

# Lista de Abreviaturas

EDPs – Equações Diferenciais Parciais

1D – Unidimensional

2D – Bidimensional

DFC – Dinâmica dos Fluidos Computacional

CFD – *Computational Fluids Dynamics*

SPH – *Smoothed Particles Hydrodynamics*

FOU – *First Order Upwinding*

SOU – *Second Order Upwinding*

QUICK – *Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics*

CUBISTA – *Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for the Treatment of Advection*

MAC – *Marker and cell*

CNEI - Condição de não escorregamento e impermeabilidade

CLES - Condição de livre escorregamento

CSIM - Condição de simetria

CIPR - Condição de injeção prescrita

CEPR - Condição de ejeção prescrita

CECO - Condição de ejeção contínua

NVF - *Normalized Variable Formulation*

CBC - *Convection Boundedness Criterion*

TVD - *Total Variation Diminishing*

NVD - *Normalized Variable Diagram*

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>GERAÇÃO DE MALHAS 2D</b>	<b>21</b>
<b>3</b>	<b>EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS</b>	<b>28</b>
3.1	EQUAÇÕES GOVERNANTES . . . . .	28
3.2	TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES . . . . .	30
3.3	CONDIÇÕES AUXILIARES . . . . .	39
<b>4</b>	<b>DISCRETIZAÇÃO DOS TERMOS DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES</b>	<b>41</b>
4.1	DISCRETIZAÇÃO EM COORDENADAS CARTESIANAS . . . . .	42
4.1.1	Termo temporal . . . . .	43
4.1.2	Termo convectivo . . . . .	43
4.1.3	Termo de pressão . . . . .	48
4.1.4	Termo difusivo . . . . .	49
4.2	DISCRETIZAÇÃO EM COORDENADAS GENERALIZADAS . . . . .	51
4.2.1	Termo temporal . . . . .	52
4.2.2	Termo convectivo . . . . .	52
4.2.3	Termo de pressão . . . . .	54
4.2.4	Termo difusivo . . . . .	56
4.3	CONDIÇÕES DE CONTORNO . . . . .	58
<b>5</b>	<b>MODELO NUMÉRICO PARA ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS</b>	<b>66</b>
<b>6</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS</b>	<b>73</b>
6.1	ESCOAMENTO ENTRE DUAS PLACAS PARALELAS . . . . .	73
6.2	ESCOAMENTO EM CAVIDADE COM PAREDE SUPERIOR EM MOVIMENTO . . . . .	77
6.3	ESCOAMENTO ENVOLVENDO PLACA DE ORIFÍCIO . . . . .	82
6.4	ATEROSCLEROSE . . . . .	87
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>91</b>
<b>A</b>	<b>CONCEITOS BÁSICOS SOBRE FLUIDOS</b>	<b>94</b>
<b>B</b>	<b>FORMULAÇÃO DE VARIÁVEIS NORMALIZADAS, CRITÉRIO CBC E RESTRIÇÕES TVD</b>	<b>96</b>
<b>C</b>	<b>ESQUEMA <i>UPWIND</i> CUBISTA</b>	<b>101</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>109</b>

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

O homem, desde a Antiguidade, interessou-se pelo comportamento dos fluidos. As antigas civilizações, por meio de tentativa e erro, buscavam o desenvolvimento de sistemas de distribuição de água, a construção de barcos e navios, a elaboração de dispositivos para serem usados nas guerras, entre outros. Neste período, não existia uma grande preocupação com o estudo e a aplicação de conceitos matemáticos ou da mecânica na elaboração destes projetos, somente a partir da civilização Grega antiga e do Império Romano é que houve interesse em estudar a mecânica dos fluidos como uma ciência, visando o desenvolvimento das civilizações [58].

Com o Renascimento, ocorrido por volta do século XV, começou-se a fundamentar a ciência da mecânica dos fluidos. Entre os séculos XVI e XVIII muitos cientistas desenvolveram estudos que contribuíram para a estruturação desta área de conhecimento como ciência. Dentre estes podemos citar Leonardo da Vinci (1452-1519), Galileu Galilei (1564-1642), Isaac Newton (1642-1727) e Daniel Bernoulli (1700-1782).

A partir do século XVIII as equações que regem o movimento de fluidos começaram a ser deduzidas. A formulação matemática para o escoamento de fluidos invíscidos<sup>1</sup> foi atribuída a Leonard Euler (1707-1783) e as expressões deduzidas por ele foram chamadas de equações de Euler. Os estudos de Claude Navier (1785-1836) e Simeon Poisson (1781-1840), cujos objetivos eram incluir o efeito da viscosidade nas equações de Euler e analisar as forças intermoleculares em um escoamento de fluido, no século XIX, impulsionaram o desenvolvimento de representações matemáticas para o escoamento de fluidos. George Stokes (1819-1903) avaliou de forma macroscópica o movimento do fluido, inserindo os conceitos de tensão de cisalhamento<sup>2</sup> e pressão termodinâmica. Desta forma, obteve a equação vetorial que descreve a conservação da quantidade de movimento e que origina as chamadas equações de Navier-Stokes [6].

Dependendo das características do escoamento e do fluido estudados, as equações de Navier-Stokes são apresentadas de diferentes formas. Podemos utilizá-las, por exemplo, na

---

<sup>1</sup>Fluidos com viscosidades teoricamente iguais a zero [56].

<sup>2</sup>A tensão de cisalhamento (força por unidade de área) surge quando uma força atua de modo tangencial a uma superfície [58].

descrição de escoamentos laminares ou turbulentos de fluidos compressíveis ou incompressíveis, sendo necessários alguns ajustes de acordo com o tipo de fenômeno estudado. Porém, independente de quais as características consideradas, o fluido, que é definido como uma substância que pode ser deformada continuamente quando submetida a uma tensão de cisalhamento de qualquer valor [58], sempre será considerado macroscopicamente como um contínuo, no qual podem ser desprezados a estrutura discreta da matéria e os movimentos das moléculas [10].

As equações de Navier-Stokes são classificadas como equações diferenciais parciais (EDPs) não lineares. Pelo fato da teoria matemática relativa a esta área não estar suficientemente desenvolvida, não é possível encontrar soluções analíticas para estas equações quando consideramos regiões arbitrárias e condições de fronteira genéricas [22]. No entanto, em alguns casos, quando consideramos versões simplificadas para estas equações, com condições iniciais e de contorno específicas, podemos encontrar soluções analíticas. Podemos citar, por exemplo, a equação de Burgers 1D adimensional – uma simplificação das equações de Navier-Stokes –, a qual possui solução analítica obtida por meio da aplicação da transformação de Hopf-Cole [53] e também em alguns casos a partir das condições iniciais e de contorno consideradas [4]. Além desta, outros problemas envolvendo equações de Navier-Stokes que possuem soluções analíticas podem ser encontrados em [39, 58, 66].

Nos casos em que não era possível encontrar soluções analíticas para as equações de Navier-Stokes, os cientistas utilizavam-se de experimentos para simular o fenômeno estudado. Porém, como não era possível reproduzir o fenômeno com exatidão nos laboratórios, nem realizar medições em todos os pontos da região onde o fenômeno estudado ocorre naturalmente, por limitações relativas a equipamentos, custo e tempo, geralmente os resultados experimentais também não eram satisfatórios [6].

A partir da década de 1940, com o desenvolvimento dos computadores digitais, começou-se a estudar a obtenção de solução numérica para as equações de Navier-Stokes a partir de técnicas computacionais. A Dinâmica dos Fluidos Computacional<sup>3</sup> (DFC), parte integrante da computação científica, surgiu para complementar os estudos teóricos e experimentais relacionados à dinâmica dos fluidos [62]. Sua função é estudar métodos computacionais que podem ser utilizados na simulação de fenômenos que envolvem fluidos em movimento, considerando ou não as trocas de calor, além de auxiliar no estudo de fenômenos que não poderiam ser reproduzidos adequadamente em laboratórios e na redução da quantidade de experimentos a serem realizados, quando estes fazem parte do estudo [22].

Para que uma solução numérica de um problema físico possa ser obtida é necessário, inicialmente, a criação de um modelo matemático que represente a situação estudada. Além disso, as equações e o domínio físico do problema em questão devem ser expressos adequadamente. De acordo com Maliska [46], o modelo deve ser construído de tal forma que possa ser resolvido em um tempo computacional adequado e que os resultados obtidos representem o

---

<sup>3</sup>Em inglês, *Computational Fluids Dynamics (CFD)*

fenômeno físico adequadamente.

Ao trabalharmos com métodos numéricos devemos discretizar o domínio físico, pois tais métodos não permitem que encontremos uma solução para todos os pontos do mesmo, mas apenas para alguns pontos discretos. Ao conjunto dos pontos utilizados na discretização do domínio damos o nome de malha [22], cuja unidade fundamental é a célula, limitada por faces e contendo vértices chamados de nós, representando os pontos considerados na discretização do domínio físico [50]. O estudo do processo de escolha dos pontos discretos é fundamental, sendo realizado na subárea da DFC denominada geração de malhas.

As malhas podem ser classificadas como uniformes ou não uniformes, de acordo com o espaçamento entre os pontos, e também em estruturada ou não estruturada, em função da distribuição espacial dos mesmos. Em alguns casos a malha coincide com a fronteira do domínio físico, mas, geralmente, para que isso ocorra, é necessário trabalhar com o sistema de coordenadas generalizadas ou elementos finitos, porque a maioria dos problemas físicos são representados por meio de geometrias irregulares. Porém, independentemente das características da malha, esta deve representar adequadamente o domínio para que a solução encontrada possa estar de acordo com o fenômeno estudado [22].

O sistema de coordenadas generalizadas começou a ser empregado por volta de 1970, principalmente pelos pesquisadores do método de diferenças finitas, mas foi a partir dos trabalhos desenvolvidos por Thompson e seus colaboradores [68, 69, 70] que este sistema difundiu-se, pois os trabalhos pioneiros na área [2, 3, 28] não tiveram uma repercussão suficiente entre os cientistas. Este sistema foi desenvolvido visando a representação de geometrias complexas, nestes casos o sistema de coordenadas cartesianas não representa a fronteira adequadamente, pois o domínio físico não coincide com o domínio da malha [71]. Além de descrever o domínio, as equações governantes também podem ser representadas neste mesmo sistema, o que é fundamental para a resolução numérica dos problemas.

Para que seja possível encontrar solução numérica para uma equação diferencial, é necessário discretizá-la por meio de uma metodologia matemática que possa ser operacionalizada pelos computadores. Existem alguns métodos utilizados com este fim, dentre os quais podemos citar volumes finitos, elementos finitos, SPH (*Smoothed Particles Hydrodynamics*), diferenças finitas e outros.

O método dos volumes finitos foi desenvolvido com a finalidade de tratar numericamente os termos não-lineares das EDPs em geometrias coincidentes com a fronteira do domínio físico do problema, com a possibilidade de utilizar malhas mais grossas na análise dos resultados, o que não é possível quando consideramos outros métodos [50].

Um método que permite aproximações com precisão aceitável é o de elementos finitos, cujas ideias principais são a transformação da formulação diferencial para uma formulação variacional ou fraca [64] e a divisão do domínio físico em um conjunto de pequenas regiões, chamadas elementos finitos, o que permite convertê-lo em um domínio discreto [30]. Para a resolução de um problema utilizando este método é necessária a construção de matrizes dos

elementos utilizados na discretização do domínio e a geração de sistemas, geralmente esparsos, de equações algébricas lineares e, a partir desse processo, é obtida a solução algébrica/numérica do sistema resultante [60].

O método SPH foi desenvolvido visando a modelagem da interação entre fluidos diferentes. São utilizadas partículas na representação de detalhes do fluido de tal forma que as regiões podem ser refinadas ou compactadas de acordo com a quantidade de partículas utilizadas para representação do fluido. Este método baseia-se na aproximação local de funções, e é originário de dois tipos de aproximação: da função núcleo e de partículas [62].

Por fim, a aproximação por diferenças finitas, que é utilizada no desenvolvimento deste trabalho, tem sido amplamente utilizada no estudo de fluidos, principalmente no que se refere ao controle das não-linearidades de modelos e acoplamento das equações que são resolvidas separadamente [59]. De acordo com Fortuna [22], este tipo de aproximação pode ser obtida de diversas formas, sendo as mais utilizadas a interpolação polinomial e a expansão em série de Taylor, sendo esta última considerada no decorrer deste estudo. No entanto, por ser uma aproximação, as equações obtidas por meio deste processo, as chamadas equações de diferenças finitas, estão sujeitas a erros, dentre os quais podemos citar àqueles intrínsecos ao processo de discretização, os de arredondamento nos cálculos feitos pelos computadores e os relativos à aproximação numérica das condições auxiliares.

Quando EDPs são consideradas na formulação do modelo matemático de um problema específico, é relevante conhecermos os termos presentes nas equações. Tais termos podem ser do tipo temporal, convectivo, difusivo e outros. A maneira adequada de se discretizar tais termos, respeitando a física inerente ao problema, é necessária para o sucesso de obtenção da solução numérica.

Em particular, o desenvolvimento de métodos aproximativos dos termos convectivos tem sido objeto de estudo de pesquisas nos últimos anos. A precisão dos resultados obtidos a partir das soluções numéricas é influenciada diretamente pela escolha do esquema de convecção [61]. O esquema *upwind* é uma estratégia que pode ser utilizada na aproximação de termos convectivos. A aproximação é feita de acordo com o sinal da velocidade de convecção local [8].

Os esquemas *upwind* são classificados como de primeira ordem ou de alta ordem. Da primeira categoria podemos citar o esquema FOU (*First Order Upwinding*), que é estável incondicionalmente e produz um caráter difusivo que geralmente suaviza a solução. Dentre os de alta ordem podemos citar o SOU (*Second Order Upwinding*), o QUICK (*Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics*) e o CUBISTA (*Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for the Treatment of Advection*), que auxiliam no aumento da precisão do método numérico, apesar da possibilidade de introduzirem oscilações não físicas que podem comprometer a convergência [61].

Dentre os métodos disponíveis para a resolução numérica dos problemas envolvendo dinâmica dos fluidos, para este trabalho foi selecionado o chamado MAC (*Marker and cell*), formulado por Harlow e Welch por volta de 1965 com o objetivo de simular escoamen-

tos bidimensionais com superfície livre, mas podendo ser ajustado para aplicação no estudo de outras situações [52]. Nesta dissertação apresentamos uma versão simplificada deste método, uma vez que não consideramos escoamentos com superfície livre, tendo como base o sistema de coordenadas generalizadas.

Nosso objetivo é expandir um pouco mais, na medida do possível, as fronteiras do conhecimento da DFC, explorando a versatilidade de tratamento de geometrias não triviais, por meio do sistema de coordenadas generalizadas, como descrito em [12, 57], aliado a uma variação do método MAC [52]. Consideramos a discretização via diferenças finitas com aplicação do esquema *upwind* FOU, no estudo de problemas relacionados ao escoamento laminar, isotérmico de fluidos Newtonianos incompressíveis.

Em resumo, o objetivo deste trabalho é o desenvolvimento e a aplicação de um método numérico – uma simplificação do MAC –, baseado no sistema de coordenadas generalizadas, cujas discretizações são obtidas por diferenças finitas e a aproximação dos termos convectivos realizadas a partir da aplicação do esquema *upwind* FOU, visando a simulação de escoamentos laminares, incompressíveis, isotérmicos, no caso bidimensional, de fluidos Newtonianos, relacionados aos seguintes problemas: escoamento entre duas placas paralelas, escoamento em cavidade quadrada com parede superior em movimento, escoamento em duto contendo placa de orifício e aterosclerose. Para este fim organizamos a dissertação como segue.

No capítulo 2 discutimos resumidamente sobre a geração de malhas em coordenadas generalizadas. O capítulo 3 trata das EDPs que governam os problemas estudados considerando-as também neste sistema de coordenadas, além das condições iniciais e de contorno. No capítulo 4 apresentamos a discretização da equação de Navier-Stokes, destacando os pormenores das aproximações para cada termo da equação em coordenadas cartesianas e por conseguinte no sistema de coordenadas generalizadas. No capítulo 5 descrevemos a metodologia numérica, apresentando uma versão simplificada para o método MAC. O capítulo 6 destina-se à apresentação dos resultados numéricos obtidos para os problemas em estudo, visando a validação do método numérico. A conclusão é apresentada no capítulo 7 com indicações para possíveis trabalhos futuros tendo como base os estudos apresentados nesta dissertação.

## Capítulo 2

# GERAÇÃO DE MALHAS 2D

Em muitos casos, quando desejamos obter soluções analíticas para os problemas de interesse são necessárias muitas simplificações, o que pode afastá-lo do fenômeno real. Quando nosso objetivo é estudar um determinado fenômeno físico de forma mais realística possível precisamos, inicialmente, modelar a física do problema. Como, geralmente, as equações obtidas nesse processo de modelagem não possuem solução analítica, então são utilizados métodos numéricos para a obtenção da solução do problema estudado.

De acordo com Maliska [46], para estudarmos o modelo por meio de métodos numéricos é fundamental expressarmos adequadamente as equações e a região considerada, ou também chamada de domínio físico. Como não é possível obter soluções numéricas sobre uma região contínua, pois esta envolve infinitos pontos, devemos inicialmente discretizar o domínio, isto é, dividi-lo em pontos e somente nestes é que encontraremos a solução do problema. O conjunto destes pontos é denominado malha. É importante que os pontos estejam distribuídos adequadamente para que a solução numérica represente de modo satisfatório os gradientes de interesse do problema estudado.

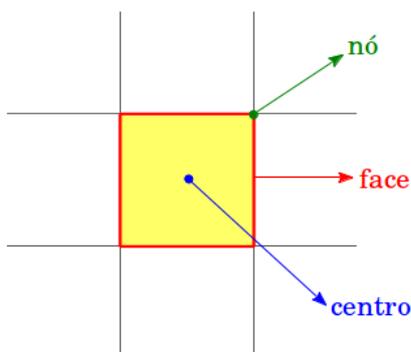


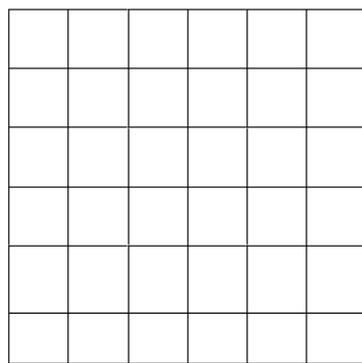
Figura 2.1: Representação dos elementos de uma malha [50]

Outro aspecto importante a ser considerado é a quantidade de pontos utilizados na discretização do domínio. Quanto maior a quantidade de pontos discretos selecionados, ou seja, quanto mais fina for a malha, o resultado numérico deverá ser mais fiel ao modelo. Mas

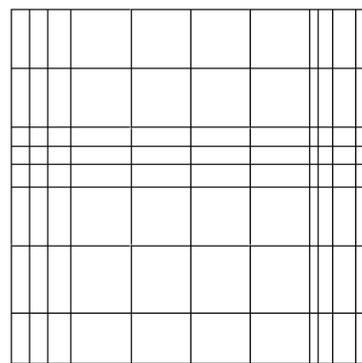
o custo computacional será maior, além de exigir maiores custos adicionais que envolvem o armazenamento de dados em memória e em disco [22].

A unidade fundamental da malha é chamada de célula – região destacada em amarelo na Figura 2.1. Os limites de cada célula são denominados faces e os vértices representam os nós, sendo estes os pontos considerados na discretização do domínio físico. Neste trabalho estamos estudando apenas problemas bidimensionais, então a representação de uma célula pode ser dada conforme a Figura 2.1 [50].

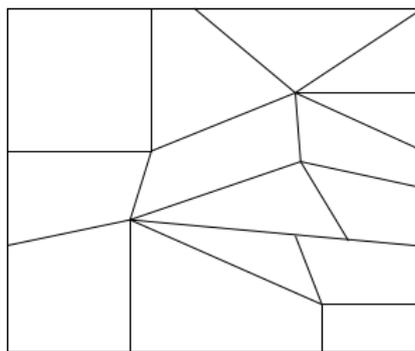
Podemos classificar as malhas segundo alguns aspectos. Se tivermos pontos uniformemente espaçados, a malha será chamada de uniforme – que pode ser observado na Figura 2.2(a) –, e quando o espaçamento entre os pontos for variável, ela será denominada não uniforme – conforme representado na Figura 2.2(b). Uma malha será dita estruturada quando houver regularidade na disposição dos pontos – Figuras 2.2(a) e 2.2(b) –, e não estruturada quando não possuir regularidade na distribuição espacial destes – Figura 2.2(c).



(a) Malha uniforme



(b) Malha não uniforme



(c) Malha não estruturada

Figura 2.2: Exemplos de malhas

Geralmente, os problemas de nosso cotidiano não são estudados segundo malhas retangulares, sendo, na maior parte dos casos, representados por geometrias irregulares. Por causa desta peculiaridade foi desenvolvido o sistema de coordenadas generalizadas. Sua principal função é a representação de geometrias complexas, nestes casos o sistema de coordenadas

cartesianas não representa a fronteira de forma adequada, já que o domínio físico não coincide com o domínio da malha [71].

Por meio de uma transformação – neste trabalho, numérica – entre o sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y)$  e o de coordenadas generalizadas  $(\xi, \eta)$  podemos mapear um domínio com geometria irregular ou regular escrito no sistema  $(x, y)$  para uma geometria regular escrita em  $(\xi, \eta)$ . O sistema  $(x, y)$  é denominado domínio físico enquanto que o  $(\xi, \eta)$  é chamado de domínio transformado ou computacional.

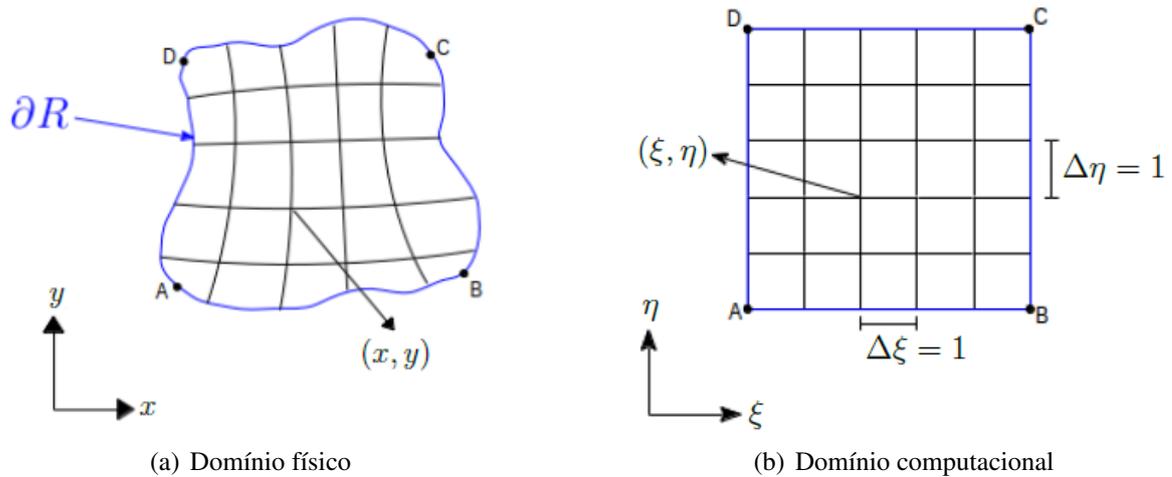


Figura 2.3: Representação da região R

No caso 2D o domínio computacional é tomado em formato retangular. Admitindo um domínio físico como o exibido na Figura 2.3(a), a sua representação computacional será conforme se observa na Figura 2.3(b). A fronteira irregular do domínio físico será transformada de tal forma que no domínio computacional seja regular e linear. Uma vez discretizado o domínio, por conveniência assume-se os volumes elementares com dimensões unitárias ( $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ ), isto implica em importantes simplificações na programação de códigos computacionais. Portanto, por mais que as linhas coordenadas assumam espaçamentos arbitrários no plano físico, no computacional as dimensões ficam fixadas.

As coordenadas de um ponto arbitrário no sistema de coordenadas generalizadas  $(\xi, \eta)$  estão relacionadas às coordenadas no sistema cartesiano  $(x, y)$  por meio de equações de transformação da seguinte forma

$$\xi = \xi(x, y); \quad \eta = \eta(x, y). \quad (2.1)$$

De acordo com Maliska [46], as métricas de transformação de coordenadas são dadas por

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = J \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -J \frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -J \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = J \frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad (2.2)$$

onde

$$J = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^{-1} \quad (2.3)$$

é o jacobiano da transformação.

Admitindo-se a existência de inversa para as equações apresentadas em (2.1), podemos, por meio do teorema da função inversa, definir também as equações de transformação da seguinte forma

$$x = x(\xi, \eta); \quad y = y(\xi, \eta).$$

As equações utilizadas para a geração das linhas  $\xi$  e  $\eta$  no interior da malha, em um caso bidimensional, considerando as métricas de transformação apresentadas em (2.2), são dadas por

$$\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \left( \frac{1}{J^2} \right) \left( P \frac{\partial x}{\partial \xi} + Q \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (2.4)$$

$$\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + \left( \frac{1}{J^2} \right) \left( P \frac{\partial y}{\partial \xi} + Q \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (2.5)$$

onde

$$\alpha = \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \quad (2.6)$$

$$\beta = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (2.7)$$

$$\gamma = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \quad (2.8)$$

representam os coeficientes de acoplamento entre as equações (2.4) e (2.5) [13].

As funções  $P(\xi, \eta)$  e  $Q(\xi, \eta)$  são responsáveis pelo aumento ou redução na concentração de linhas coordenadas em um determinado ponto da malha de acordo com as características do problema estudado [55], sendo dadas por

$$P(\xi, \eta) = - \sum_{j=1}^{n_j} a_j \text{sign}(\xi - \xi_j) e^{-c_j |\xi - \xi_j|} - \sum_{i=1}^{n_i} b_i \text{sign}(\xi - \xi_i) e^{-d_i \sqrt{(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2}},$$

$$Q(\xi, \eta) = - \sum_{j=1}^{n_j} a_j \text{sign}(\eta - \eta_j) e^{-c_j |\eta - \eta_j|} - \sum_{i=1}^{n_i} b_i \text{sign}(\eta - \eta_i) e^{-d_i \sqrt{(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2}},$$

onde os termos  $n_i$  e  $n_j$ , presentes nos somatórios, representam o número total de linhas nas direções  $\xi$  e  $\eta$  respectivamente, e os números reais  $a_j, b_i, c_j, d_i$  são ajustados via experimentação numérica com a função de atrair as linhas  $\xi$  e  $\eta$  para  $\xi_i$  e  $\eta_i$  [7]. A dedução destas expressões, utilizadas na geração das linhas  $\xi$  e  $\eta$  em uma malha computacional, podem ser encontradas em Maliska [46].

As equações diferenciais parciais (2.4) e (2.5) são resolvidas quando submetidas a condições de contorno, que consistem no conhecimento *a priori* da localização espacial do bordo da malha, nomeado  $\partial R$  – ver Figura 2.3(a).

Existem inúmeras técnicas de construção/determinação de bordos de malhas. Um método muito utilizado é a interpolação polinomial de Lagrange, pois tanto a implementação quanto a matemática envolvida são relativamente simples. Porém, caso haja um aumento da quantidade de pontos a serem interpolados podem surgir oscilações, afetando o contorno a ser modelado de tal modo que o mesmo pode não representar o contorno real adequadamente. Uma maneira de contornar esse problema é a utilização da interpolação polinomial *spline* cúbica parametrizada, pois as oscilações são minimizadas por meio da imposição de condições sobre o polinômio interpolador, além de ser uma técnica relativamente simples, tanto do ponto de vista matemático quanto da implementação computacional, capaz de representar adequadamente o contorno desejado [7]. Outra vantagem é o fato dos polinômios de grau 3, considerados neste tipo de interpolação, garantirem a continuidade da função de interpolação e de suas duas primeiras derivadas [21].

Para o método de interpolação *spline* cúbica parametrizada consideramos inicialmente que são conhecidas as coordenadas de  $n + 1$  pontos do contorno  $\partial R$  por meio de pares ordenados  $(x_l, y_l)$ , onde  $l = 1, 2, \dots, n, n + 1$ . A partir destes pontos, podemos construir a Tabela 2.1.

$l$	1	2	3	$\dots$	$n$	$n + 1$
$x$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$	$x_n$	$x_{n+1}$
$y$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\dots$	$y_n$	$y_{n+1}$

Tabela 2.1: Coordenadas de  $n + 1$  pontos do contorno  $\partial R$

Como as coordenadas  $x$  dos pontos que compõem o contorno são obtidas utilizando apenas os valores conhecidos  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ , e o mesmo ocorre com as coordenadas  $y$ , obtidas com base apenas nos dados  $\{y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}\}$ , então o cálculo de cada coordenada de

um ponto de  $\partial R$  será obtida de forma independente a partir dos seguintes polinômios cúbicos parametrizados em  $l$

$$X(h) = m_{0_i} + m_{1_i}(h-l) + m_{2_i}(h-l)^2 + m_{3_i}(h-l)^3, \quad (2.9)$$

$$Y(h) = n_{0_i} + n_{1_i}(h-l) + n_{2_i}(h-l)^2 + n_{3_i}(h-l)^3, \quad (2.10)$$

onde  $h$  é um número real, ajustado de acordo com a necessidade de concentração de pontos nos intervalos  $[k, k+1]$ , com  $k = 1, 2, \dots, n$ , em torno de algum dos pontos utilizados como base. Por exemplo, conforme apresentado na Figura 2.4, há concentração de pontos nos intervalos  $[3, 4]$  e  $[4, 5]$  em torno do ponto 20 em comparação aos demais intervalos.

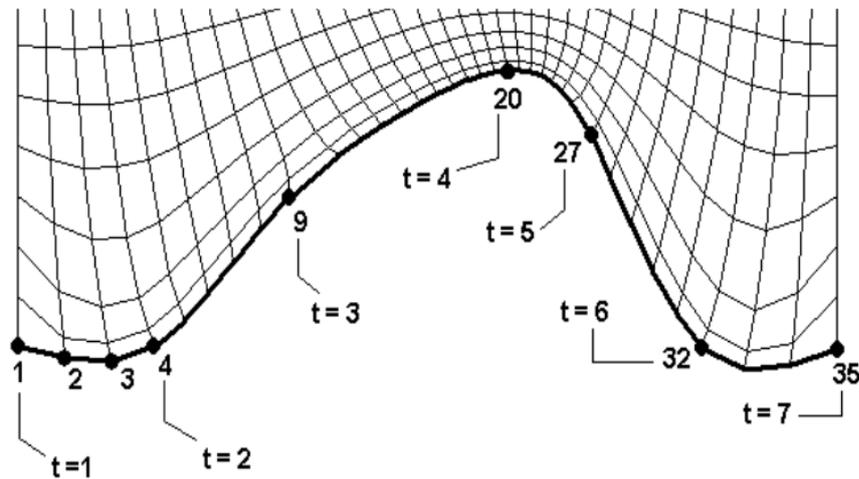


Figura 2.4: Contorno inferior obtido por spline cúbico parametrizado [7]

Conforme apresentado por Ruggiero e Lopes [63], de acordo com o método spline cúbico, para determinarmos os coeficientes presentes nas expressões (2.9) e (2.10) devemos resolver os seguintes sistemas lineares

$$\begin{aligned} g_{r-1}^X + 4g_r^X + g_{r+1}^X &= 6(x_{r+1} - 2x_r + x_{r-1}), \\ g_{r-1}^Y + 4g_r^Y + g_{r+1}^Y &= 6(y_{r+1} - 2y_r + y_{r-1}), \end{aligned}$$

para  $r = 2, \dots, n$ . Assim, podemos obter que

$$\begin{aligned} m_{0_r} &= x_r, & n_{0_r} &= y_r, \\ m_{1_r} &= x_r - x_{r-1} + \frac{1}{3}g_r^X + \frac{1}{6}g_{r-1}^X, & n_{1_r} &= y_r - y_{r-1} + \frac{1}{3}g_r^Y + \frac{1}{6}g_{r-1}^Y, \\ m_{2_r} &= \frac{1}{2}g_r^X, & n_{2_r} &= \frac{1}{2}g_r^Y, \\ m_{3_r} &= \frac{1}{6}(g_r^X - g_{r-1}^X), & n_{3_r} &= \frac{1}{6}(g_r^Y - g_{r-1}^Y). \end{aligned}$$

Uma vez que a malha computacional dos problemas a serem estudados são encontradas no sistema de coordenadas generalizadas, precisamos que as equações governantes consideradas na modelagem dos problemas em estudo também estejam escritas neste mesmo sistema. O próximo capítulo trata das equações governantes e dos detalhes referentes à transformação entre os sistemas de coordenadas cartesianas e generalizadas, além das condições auxiliares consideradas para a resolução dos problemas de interesse.

# Capítulo 3

## EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

### 3.1 EQUAÇÕES GOVERNANTES

As equações de Navier-Stokes são utilizadas para modelar o escoamento de fluidos, e dependendo das características do fluido e do escoamento estudados as mesmas podem ser simplificadas, facilitando a obtenção de solução numérica. Mais informações sobre fluidos, escoamentos e suas propriedades podem ser encontradas no apêndice A.

Na descrição de escoamentos laminares, incompressíveis e isotérmicos, no caso bi-dimensional, as equações de Navier-Stokes são dadas por

Direção  $x$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + R_1 \quad (3.1)$$

Direção  $y$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + R_2 \quad (3.2)$$

onde

- $t$  representa o tempo;
- $x$  e  $y$  correspondem às variáveis espaciais;
- $u = u(x, y, t)$  e  $v = v(x, y, t)$  descrevem as componentes da velocidade em  $x$  e  $y$ , respectivamente;
- $\rho^1$  representa a massa específica;
- $p = p(x, y, t)$  descreve a pressão em função de  $x, y$  e  $t$ ;

---

<sup>1</sup>Como estamos trabalhando com fluidos incompressíveis,  $\rho$  é constante.

- $\mu$  corresponde à viscosidade dinâmica;
- $R_1$  e  $R_2$  são os termos fonte<sup>2</sup> nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Os escoamentos de fluidos podem ser uni-, bi- ou tridimensionais de acordo com o número de coordenadas necessárias para a descrição do seu campo de velocidades. Quanto maior o número de coordenadas consideradas, mais complexo se torna o estudo do escoamento em questão. Dado um escoamento bidimensional, caso a velocidade seja constante em todos os pontos da seção normal ao sentido do escoamento, o estudo pode ser restringido à uma única dimensão, convertendo o problema original em um unidimensional. Analogamente podemos simplificar o estudo de um problema tridimensional em um bidimensional desde que em uma determinada seção o escoamento tenha velocidade constante [23]. Por isso, nesse trabalho, estamos estudando problemas bidimensionais ao invés de tridimensionais, sem prejuízos às situações apresentadas, mesmo estas sendo dadas originalmente em três dimensões. Com essa hipótese, há uma redução do número de equações a serem consideradas [58].

Admitindo que não existam termos fonte, podemos reescrever as equações (3.1) e (3.2) da seguinte forma

Direção  $x$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho u u - \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho u v - \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.3)$$

Direção  $y$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho u v - \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho v v - \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.4)$$

que correspondem às versões conservativas para as equações (3.1) e (3.2), respectivamente, escritas em coordenadas cartesianas. Uma equação diferencial parcial é apresentada em sua forma conservativa quando os coeficientes das derivadas são constantes ou quando os coeficientes são apresentados em função de variáveis cujas derivadas não são representadas na equação. De acordo com muitos pesquisadores da área de DFC, as versões conservativas das equações devem ser usadas sempre que possível, pois a qualidade dos resultados numéricos obtidos são superiores em relação às versões não-conservativas [22]. Por isso, apesar de no caso incompressível a massa específica  $\rho$  ser constante e permitir simplificações, neste capítulo trabalhamos com as equações em sua forma conservativa, ou seja, com  $\rho$  dentro do operador de derivação.

O princípio de conservação da massa, premissa física de extrema importância, afirma que na ausência de fontes de massa (ou apenas fontes) ou de locais pelos quais a massa possa desaparecer (sorvedouros), toda a massa que entra em um volume de controle deve sair e/ou se acumular neste [22]. A equação de conservação da massa bidimensional é dada por

<sup>2</sup>Os termos fonte indicam, dentre outros aspectos, a perda ou ganho de determinada quantidade [9].

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (3.5)$$

sendo amplamente conhecida no meio científico como equação da continuidade. Tomando  $\rho$  constante em (3.5), por causa da incompressibilidade do fluido, podemos simplificar a equação da conservação da massa, obtendo

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.6)$$

Portanto se desejamos resolver, em coordenadas cartesianas, um problema de mecânica dos fluidos bidimensional, incompressível, Newtoniano, laminar, transiente, isotérmico, sem termos fonte, as equações requeridas são (3.3), (3.4) e (3.6). Esta metodologia limita-nos grandemente no desenvolvimento das pesquisas em DFC. Como já comentado anteriormente estamos interessados em geometrias complexas, então passamos a descrição do procedimento de transformação destas equações para o sistema de coordenadas generalizadas como segue.

## 3.2 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

As coordenadas de um ponto arbitrário no sistema de coordenadas generalizadas  $(\xi, \eta)$  estão relacionadas às coordenadas no sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y)$  por meio de equações de transformação da seguinte forma

$$\xi = \xi(x, y, t), \quad \eta = \eta(x, y, t), \quad \tau = \tau(t). \quad (3.7)$$

Consideramos  $\tau$  como uma função apenas de  $t$ , pois não estamos admitindo movimento de malha<sup>3</sup>, assim  $\tau = t$ .

Definamos as seguintes variáveis

$$A = \rho u, \quad B = \rho u u - \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad C = \rho u v - \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad S^u = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3.8)$$

assim, substituindo (3.8) em (3.3) temos a seguinte igualdade

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} = S^u. \quad (3.9)$$

---

<sup>3</sup>Malhas móveis são àquelas nas quais existe movimento dos pontos da malha inicial no decorrer do tempo [15].

Temos

$$A = A(\xi(x, y, t), \eta(x, y, t), \tau(t)),$$

$$B = B(\xi(x, y, t), \eta(x, y, t), \tau(t)),$$

$$C = C(\xi(x, y, t), \eta(x, y, t), \tau(t)),$$

mas como  $\frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$ , pela regra da cadeia obtemos

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial \tau}, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}. \quad (3.12)$$

Substituindo as expressões (3.10)-(3.12) em (3.9) segue que

$$\left( \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial \tau} \right) + \left( \frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial C}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = S^u \quad (3.13)$$

e multiplicando a equação (3.13) por  $\frac{1}{J}$ , onde  $J$  é dado pela expressão (2.3), obtemos

$$\frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{1}{J} + \frac{\partial A}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{1}{J} + \frac{\partial A}{\partial \tau} \frac{1}{J} + \frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{1}{J} + \frac{\partial B}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{1}{J} + \frac{\partial C}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{1}{J} + \frac{\partial C}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{1}{J} = \frac{S^u}{J} \quad (3.14)$$

Observando o primeiro termo de (3.14) temos

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( A \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{1}{J} \right) = \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{1}{J} + A \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{1}{J} \right) \right)$$

o que equivale a

$$\frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{1}{J} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( A \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{1}{J} \right) - A \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{1}{J} \right) \right). \quad (3.15)$$

Procedendo de modo análogo com os demais termos de (3.14) obtemos

$$\frac{\partial A}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{1}{J} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( A \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{1}{J} \right) - A \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{1}{J} \right) \right), \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} \frac{1}{J} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left( A \frac{1}{J} \right) - A \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{J} \right) \right), \quad (3.17)$$



Tendo em vista as expressões apresentadas em (3.7), pela regra da cadeia temos

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad (3.24)$$

mas  $\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = 0$ , por não considerarmos malhas móveis, e  $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 1$ , então de (3.23) e (3.24) segue que

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0,$$

ou ainda

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau}, \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau}. \quad (3.26)$$

Substituindo as métricas apresentadas em (2.2) nas expressões (3.25) e (3.26) temos

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -J \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \tau} + J \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \tau}, \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = J \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \tau} - J \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \tau}. \quad (3.28)$$

Considerando novamente as métricas, (2.2), juntamente com (3.27), obtemos que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{1}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{1}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{J} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \tau} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \\ &= -\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \tau} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \tau} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \tau} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ &\quad - \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \tau} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 x}{\partial \tau \partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 y}{\partial \tau \partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 x}{\partial \tau \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 y}{\partial \tau \partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{1}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{1}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( -\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{1}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{1}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) = -\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

isto é,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{1}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{1}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{J} \right) = 0 \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{1}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{1}{J} \right) = 0 \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{1}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{1}{J} \right) = 0. \quad (3.31)$$

Substituindo (3.29)-(3.31) em (3.22) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{A}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{A}{J} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{B}{J} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{C}{J} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{A}{J} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{B}{J} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{C}{J} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = \frac{S^u}{J}. \quad (3.32)$$

Considerando as expressões definidas em (3.8) e substituindo-as em (3.32) segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\rho u}{J} \right) &+ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\rho u}{J} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \left( \frac{\rho u u}{J} - \frac{\mu}{J} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \left( \frac{\rho u v}{J} - \frac{\mu}{J} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\rho u}{J} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left( \frac{\rho u u}{J} - \frac{\mu}{J} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left( \frac{\rho u v}{J} - \frac{\mu}{J} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{1}{J} \frac{\partial p}{\partial x}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\rho u}{J} \right) &+ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\rho u}{J} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) - \frac{\mu}{J} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\rho u}{J} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) - \frac{\mu}{J} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{J} \frac{\partial p}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Consideremos

$$U = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \quad (3.34)$$

$$V = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \quad (3.35)$$

definidas como componentes contravariantes do vetor velocidade.

Assim, de (3.33)-(3.35) temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\rho u}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U u) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V u) &= -\frac{1}{J} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\mu}{J} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\mu}{J} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Sendo

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, t) = u(\xi(x, y, t), \eta(x, y, t), \tau(t)) \\ p &= p(x, y, t) = p(\xi(x, y, t), \eta(x, y, t), \tau(t)) \end{aligned}$$

pela regra da cadeia obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} \end{aligned}$$

mas como  $\tau = \tau(t)$ , então  $\frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$ , o que implica em

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (3.39)$$

De (2.2), (3.37)-(3.39) temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial \xi}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \left( \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{\partial u}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial \eta}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial \eta} \left( \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \left( J \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial p}{\partial \eta} \left( -J \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) = J \left[ \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right] \quad (3.42)$$

Pelas métricas de transformação apresentadas em (2.2) observe que

$$\left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = \left( J \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \left( -J \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 = J^2 \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right], \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \left( J \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \left( -J \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + \left( -J \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \left( J \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \\ &= -J^2 \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right), \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = \left( -J \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \left( J \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 = J^2 \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right]. \quad (3.45)$$

Substituindo os coeficientes dados por (2.6)-(2.8) em (3.43)-(3.45) segue que

$$\left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = J^2 \alpha, \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = -J^2 \beta, \quad (3.47)$$

$$\left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = J^2 \gamma. \quad (3.48)$$

Assim, de (3.40), (3.41), (3.46)-(3.48) obtemos

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = J^2 \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - J^2 \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = -J^2 \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} + J^2 \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (3.50)$$

Logo, de (3.36), (3.42), (3.49) e (3.50) segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\rho u}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U u) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V u) &= -\frac{1}{J} J \left[ \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\mu}{J} \left( J^2 \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - J^2 \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\mu}{J} \left( -J^2 \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} + J^2 \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right), \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\rho u}{J} \right)}_{\text{termo temporal}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U u) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V u)}_{\text{termo convectivo}} &= \underbrace{\left[ \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right]}_{\text{termo de pressão}} \\ &+ \underbrace{\mu \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right) \right]}_{\text{termo difusivo}}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

no qual a viscosidade  $\mu$  é admitida constante. A equação (3.51) corresponde à equação de Navier-Stokes na direção  $x$  escrita para o sistema de coordenadas generalizadas. Utilizando o mesmo procedimento adotado para a obtenção da equação (3.51) a partir de (3.3), podemos

reescrever a equação (3.4), em coordenadas generalizadas, da seguinte forma

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\rho v}{J} \right)}_{\text{termo temporal}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U v) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V v)}_{\text{termo convectivo}} = \underbrace{\left[ \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right]}_{\text{termo de pressão}} + \underbrace{\mu \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial v}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial v}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \right) \right]}_{\text{termo difusivo}}. \quad (3.52)$$

Logo, as equações de Navier-Stokes em coordenadas generalizadas são dadas por (3.51) e (3.52), sendo apresentadas em função das componentes cartesianas da velocidade  $u$  e  $v$ , da pressão  $p$  – assim como as equações em coordenadas cartesianas –, mas também em função das componentes contravariantes  $U$  e  $V$  com as derivadas apresentadas em termos de  $\xi, \eta$  e  $\tau$ . As componentes contravariantes  $U$  e  $V$  tem um papel de destaque na formulação generalizada.

Inicialmente, considerando que em nosso modelo não exista movimento de malha, então  $\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$  e  $\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$ . Lembrando que a componente contravariante  $U$  é dada pela equação (3.34) e substituindo as devidas métricas apresentadas em (2.2), obtemos

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{J} \left( u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) = \frac{1}{J} \left( u \left( J \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) + v \left( -J \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right) \\ &= u \frac{\partial y}{\partial \eta} - v \frac{\partial x}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

De modo análogo podemos verificar a partir de (2.2) e (3.35) que a componente contravariante  $V$  pode ser transformada em

$$V = -u \frac{\partial y}{\partial \xi} + v \frac{\partial x}{\partial \xi}. \quad (3.54)$$

Em um sistema coordenado podemos representar os vetores a partir de suas componentes contravariantes e covariantes. As componentes contravariantes são normais às linhas coordenadas, enquanto que as covariantes tangenciam estas linhas [46].

Quando estamos trabalhando com um sistema ortogonal, como é o caso do sistema de coordenadas cartesianas, as respectivas componentes cartesianas  $u, v$  e contravariantes  $U, V$  do vetor velocidade possuem as mesmas direções. Para exemplificar, consideremos então este sistema com a base canônica formada pelos vetores  $\vec{e}_1 = (1, 0)$  e  $\vec{e}_2 = (0, 1)$ . A partir da Figura 3.1 podemos calcular as componentes contravariantes do vetor velocidade tendo como base os pontos  $A_1 = (1, 0)$  e  $B_1 = (1, 1)$  no cálculo de  $U$ , e  $B_1 = (1, 1)$  e  $C_1 = (0, 1)$  para o cálculo de  $V$ . Logo considerando as expressões (3.53) e (3.54), e aproximações por diferenças

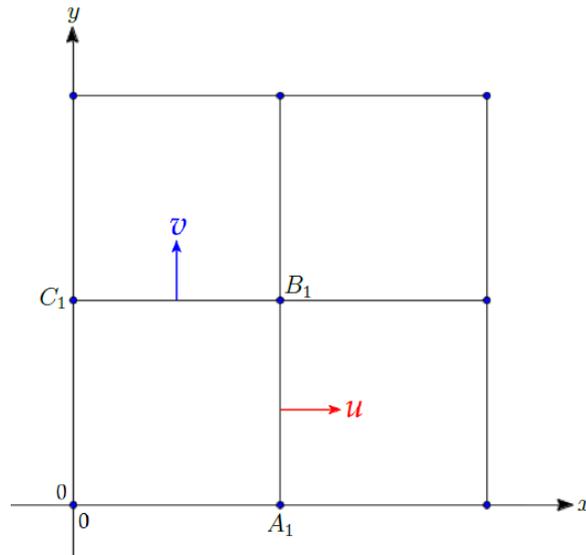


Figura 3.1: Componentes cartesianas do vetor velocidade em um sistema ortogonal

finitas centrais para as derivadas, temos

$$U = u \left( \frac{1-0}{\Delta\eta} \right) - v \left( \frac{1-1}{\Delta\eta} \right) = u$$

$$V = -u \left( \frac{1-1}{\Delta\xi} \right) + v \left( \frac{1-0}{\Delta\xi} \right) = v$$

ou seja, as componentes cartesianas e contravariantes são coincidentes e, em particular,  $u$  e  $U$  possuem mesmas direções, assim como  $v$  e  $V$ .

Por outro lado, consideremos um sistema de coordenadas não ortogonal – por exemplo, o apresentado pela Figura 3.2. Neste caso, os pontos  $A_2 = (0.5, 0.2)$  e  $B_2 = (0.1, 0.6)$  são utilizados no cálculo de  $U$ , enquanto que  $B_2 = (0.1, 0.6)$  e  $C_2 = (-0.2, 0.35)$  são necessários para o cálculo de  $V$ , logo

$$U = u \left( \frac{0.6-0.2}{\Delta\eta} \right) - v \left( \frac{0.1-0.5}{\Delta\eta} \right) = 0.4u + 0.4v$$

$$V = -u \left( \frac{0.6-0.35}{\Delta\xi} \right) + v \left( \frac{0.1-(-0.2)}{\Delta\xi} \right) = -0.25u + 0.3v$$

ou seja, as componentes cartesianas e contravariantes não coincidem (supondo que  $U = u$  e  $V = v$ , com as expressões obtidas anteriormente, temos um sistema formado por duas equações com duas incógnitas que não possui solução, o que nos mostra que  $U \neq u$  e  $V \neq v$ ).

Assim, ao trabalharmos com sistemas de coordenadas sem caráter ortogonal, como é o caso do sistema de coordenadas generalizadas<sup>4</sup> – quando estamos tratando do seu domínio físico e não do computacional, já que este último tem caráter ortogonal [55] –, as componentes

<sup>4</sup>Estamos considerando o caso em que este sistema não coincide com o sistema de coordenadas cartesianas, já que este último pode ser considerado um caso particular do sistema de coordenadas generalizadas.

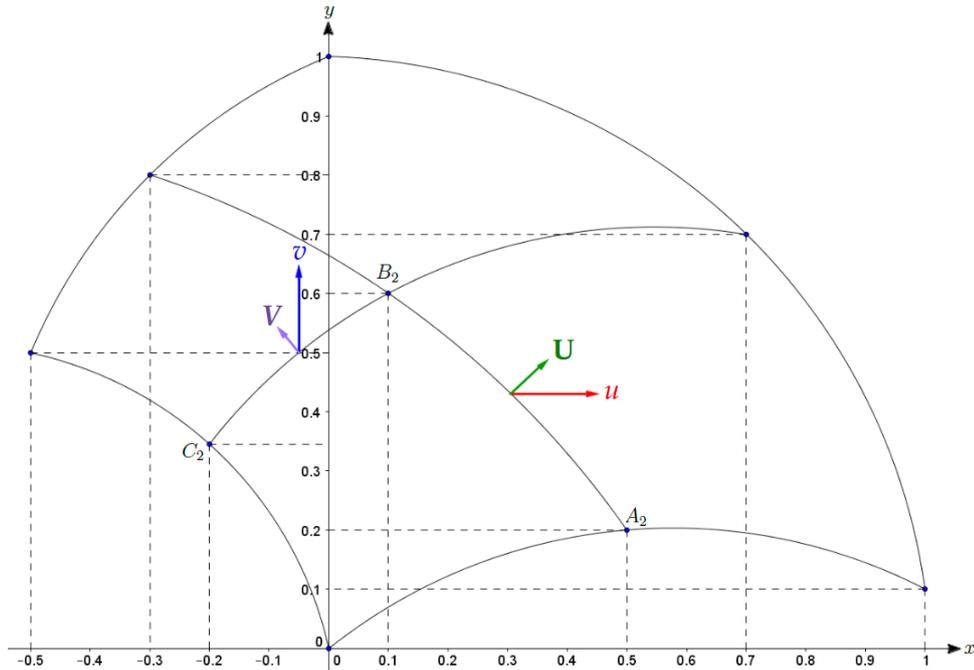


Figura 3.2: Componentes cartesianas do vetor velocidade em um sistema não-ortogonal

cartesianas e contravariantes do vetor velocidade podem não ser coincidentes.

No entanto, como as componentes contravariantes do vetor velocidade  $U$  e  $V$  são normais às linhas coordenadas  $\xi$  e  $\eta$ , então estas são responsáveis pela modelagem da preservação de massa ao invés das cartesianas  $u$  e  $v$  [55].

Portanto, em coordenadas generalizadas, mantendo a mesma hipótese de incompressibilidade do fluido, a equação de conservação da massa é escrita como

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0, \quad (3.55)$$

descrevendo, assim como em coordenadas cartesianas, o fato de que a quantidade de massa que entra em um determinado volume de controle deve sair e/ou se acumular no mesmo.

### 3.3 CONDIÇÕES AUXILIARES

A seleção adequada das condições auxiliares é de fundamental importância para a formulação de problemas modelados por equações diferenciais [22]. Como as equações de Navier-Stokes podem ser utilizadas para descrever o escoamento de fluidos em diversas situações, é importante definir adequadamente as condições iniciais e de contorno do problema em estudo.

As condições iniciais dizem respeito ao estado inicial do problema, indicando a partir de qual valor a solução irá se propagar. Assim, tomamos um campo de velocidades – que

deve ser especificado para todo o domínio – que satisfaça a equação da continuidade, sendo isto necessário para que não haja prejuízos à convergência do método numérico utilizado [22].

As condições de contorno são responsáveis por retratar o comportamento da solução no contorno da região onde está definido o problema e podem ser classificadas em

- condição de não escorregamento e impermeabilidade (CNEI);
- condição de livre escorregamento (CLES);
- condição de simetria (CSIM);
- condição de injeção prescrita (CIPR);
- condição de ejeção prescrita (CEPR);
- condição de ejeção contínua (CECO).

A condição de não escorregamento e impermeabilidade diz respeito ao fato de que as fronteiras, em geral, são representadas por meio de paredes sólidas impermeáveis, ou seja, paredes nas quais o fluido não pode penetrar, e não escorregadias, isto é, a camada de fluido imediatamente adjacente à superfície da parede está em repouso em relação à mesma [22].

A condição de livre escorregamento está relacionada ao livre deslizamento do fluido sobre a fronteira sólida, sem estar submetido às forças de atrito. Esta condição também é aplicada nos problemas que envolvem eixos de simetria [18].

A condição de simetria é uma hipótese que impede que haja fluxo de massa através da fronteira de simetria [22].

A condição de injeção prescrita é aplicada em fronteiras responsáveis pela injeção de fluido no domínio e a condição de ejeção prescrita é utilizada para fronteiras pelas quais existe a saída de fluido. Ambas são também denominadas condições de Dirichlet.

A condição de ejeção contínua diz respeito aos locais, pertencentes ao domínio da solução, pelos quais o fluido pode sair de modo espontâneo do domínio computacional [51].

Para a pressão, tendo em vista o fato de que o fluido não pode escoar através das fronteiras rígidas do domínio, a condição de contorno é tomada como

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0,$$

ou seja, não existe evolução da pressão na parede.

## Capítulo 4

# DISCRETIZAÇÃO DOS TERMOS DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

Neste momento apresentamos os detalhes relacionados à discretização das equações governantes, tendo como principal objetivo a aproximação dos termos convectivos presentes nas equações de Navier-Stokes, para posterior utilização de um método numérico – obtido a partir de uma simplificação do MAC – de modo a obter soluções numéricas para as equações de Navier-Stokes.

Neste trabalho consideramos malhas do tipo deslocada, nas quais as incógnitas são armazenadas em posições diferentes umas das outras [22, 29]. O armazenamento deslocado, para as componentes do vetor velocidade e pressão, tem impacto positivo no cálculo numérico devido ao fato de reduzir a instabilidade numérica [19]. Desta forma, utilizamos esta abordagem de armazenamento em nossas simulações.

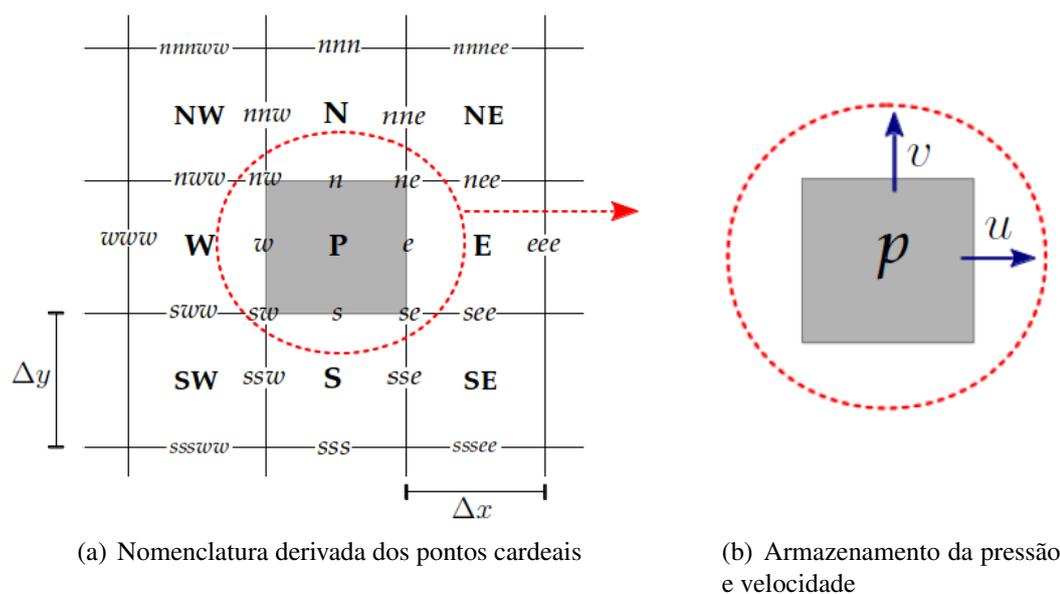


Figura 4.1: Células

Considerando a Figura 4.1(a) temos que a malha é composta por células com faces

de comprimento  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , em que as relações topológicas são organizadas e rotuladas a partir dos pontos cardeais. Os rótulos  $P, E, W, N, S, NE, SE, NW, SW$  significam centro, leste, oeste, norte, sul, nordeste, sudeste, noroeste, sudoeste, respectivamente. As siglas em minúsculo, posicionadas sobre as faces, são variações cardinais a partir do centro da célula rotulada por  $P$ .

Conforme mostra a Figura 4.1(b), a pressão  $p$  é localizada no centro da célula<sup>1</sup> e as componentes do vetor velocidade nos centros das faces, com  $u$  localizada na lateral, distanciando-se  $\Delta x/2$  do centro, e  $v$  na face superior, distanciando-se  $\Delta y/2$  do centro. Esta nomenclatura é consagradamente utilizada pela comunidade científica, logo mantivemos as mesmas denominações. Ressaltamos ainda que para a resolução dos problemas em estudo, em muitos casos, precisamos calcular o valor da componente cartesiana  $u$ , por exemplo, em faces superiores. No entanto, como esta componente está armazenada apenas nas faces laterais, é preciso fazer uma inferência, geralmente por meio de médias aritméticas, a partir dos valores conhecidos em torno do ponto considerado. Assim, os valores de  $u, v$  e  $p$  são armazenados nos locais já citados, mas podem ser realizadas aproximações para os valores destas em outros pontos das células conforme a necessidade.

Para facilitar a compreensão, inicialmente discretizamos as equações de Navier-Stokes (3.1) e (3.2), escritas em coordenadas cartesianas. O procedimento utilizado, tendo como base a célula de centro  $P$ , é descrito como segue.

## 4.1 DISCRETIZAÇÃO EM COORDENADAS CARTESIANAS

Considere inicialmente as equações (3.1) e (3.2). Como estamos trabalhando com fluido incompressível,  $\rho$  é constante. Além disso, foi admitido, no capítulo 3, que não existem termos fonte, o que exclui  $R_1$  e  $R_2$  das referidas equações. Assim, podemos reescrevê-las da seguinte forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uu) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(vv) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4.2)$$

onde  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  representa a viscosidade cinemática. O primeiro termo, do lado esquerdo da igualdade, é de característica temporal, para tanto faremos aproximações de primeira ordem para os mesmos. Já para os segundo e terceiro termos do primeiro membro das mesmas equações, de característica convectiva, aplicaremos aproximações *upwind*. Os termos de pressão do segundo membro das equações governantes serão aproximados por diferenças centrais, que são

<sup>1</sup>É importante destacar que  $p$  refere-se à pressão e  $P$  ao centro da célula.

aproximações de segunda ordem. Finalmente, os termos difusivos, àqueles multiplicados pela viscosidade  $\nu$ , serão aproximados também por diferenças centrais. As aproximações são dadas a seguir.

### 4.1.1 Termo temporal

Iniciando com o tempo  $t = 0$ , condições iniciais são assumidas para a velocidade e pressão. Incrementando o tempo por  $\Delta t$  as variáveis serão calculadas para o novo tempo, e o procedimento de avanço no tempo segue até que um tempo final seja alcançado. Ou seja, conhecidas as variáveis no nível  $k$ , as mesmas são calculadas no nível  $k + 1$ .

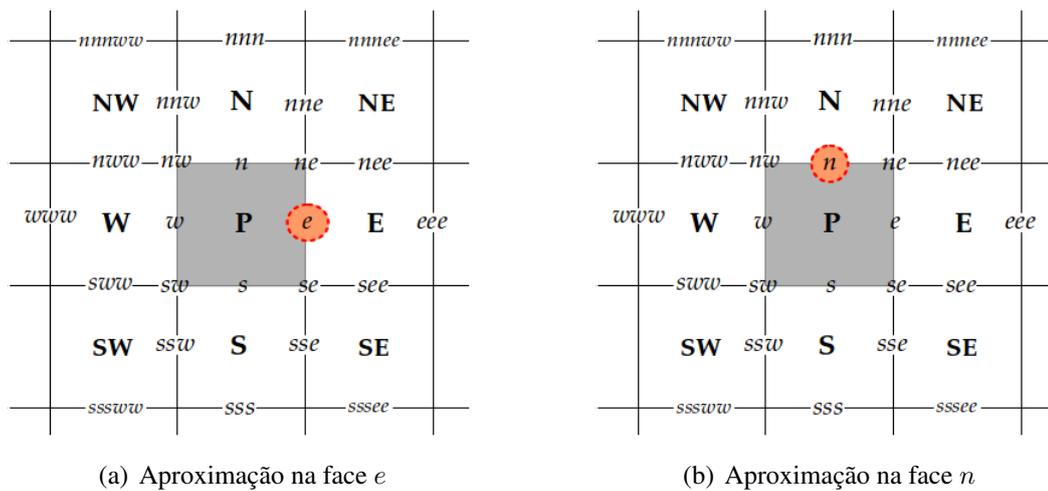


Figura 4.2: Discretização do termo temporal

As discretizações das derivadas parciais  $\frac{\partial u}{\partial t}$  e  $\frac{\partial v}{\partial t}$  nas faces  $e$  e  $n$ , nesta ordem – conforme destacado nas Figuras 4.2(a) e 4.2(b), respectivamente –, utilizando o método de aproximação por diferenças finitas progressivas de primeira ordem, são dadas por

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_e^k \approx \frac{u|_e^{k+1} - u|_e^k}{\Delta t},$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_n^k \approx \frac{v|_n^{k+1} - v|_n^k}{\Delta t}.$$

### 4.1.2 Termo convectivo

Uma das grandes dificuldades em se resolver numericamente as equações de Navier-Stokes está na forma como se discretiza os termos convectivos, por serem os termos não-lineares das EDPs. Muitos autores já mostraram que, adotando-se aproximações centradas, o método numérico não fornecerá soluções consistentes com a física do problema ou muitas vezes o

código computacional poderá não convergir. Para mais detalhes desta questão o leitor pode consultar [14, 19].

Um modo de discretizar os termos convectivos das equações de Navier-Stokes baseia-se na diferença entre as velocidades de convecção  $u$  e  $v$ , e a propriedade  $u$  ou  $v$  sendo transportada [22]. A concepção do esquema *upwind* de primeira ordem FOU (*First Order Upwinding*) vai na linha de avaliação sobre a velocidade de convecção e a propriedade transportada, tendo origem no comportamento de fluidos cujo transporte de propriedades físicas se dá predominantemente pelo mecanismo da convecção [20].

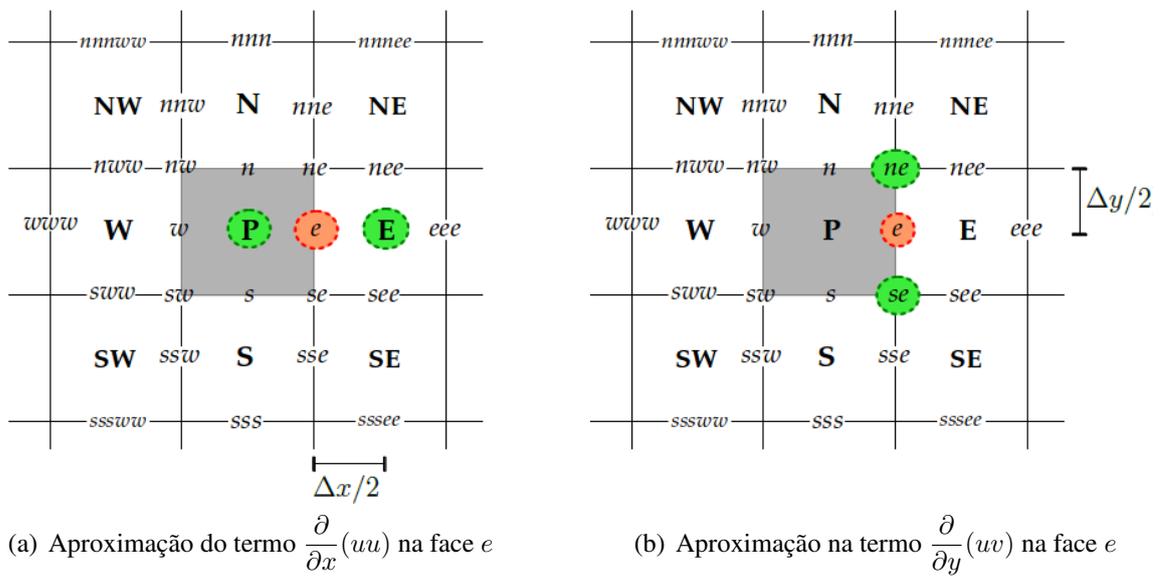


Figura 4.3: Discretização do termo convectivo  $\mathcal{C}(u)$  na face  $e$

Considerando as seguintes expressões

$$\mathcal{C}(u) = \frac{\partial}{\partial x}(uu) + \frac{\partial}{\partial y}(uv), \quad (4.3)$$

$$\mathcal{C}(v) = \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(vv), \quad (4.4)$$

que correspondem aos termos convectivos das equações (4.1) e (4.2), respectivamente, a discretização de  $\mathcal{C}(u)$  por diferença central, na face  $e$  da célula hachurada – conforme destacado nas figuras 4.3(a) e 4.3(b) –, no nível de tempo  $k$ , é

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(u)|_e^k &= \frac{\partial}{\partial x}(uu)|_e^k + \frac{\partial}{\partial y}(uv)|_e^k \\
&\approx \frac{(uu)|_E^k - (uu)|_P^k}{2(\Delta x/2)} + \frac{(uv)|_{ne}^k - (uv)|_{se}^k}{2(\Delta y/2)} \\
&= \frac{\bar{u}|_E^k u|_E^k - \bar{u}|_P^k u|_P^k}{\Delta x} + \frac{\bar{v}|_{ne}^k u|_{ne}^k - \bar{v}|_{se}^k u|_{se}^k}{\Delta y}. \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Na discretização do termo  $\mathcal{C}(u)$  foi aplicada linearização ao termo  $(uu)|_E^k$ , por isso houve mudança na notação pois é admitido por hipótese que  $(uu)|_E^k = \bar{u}|_E^k u|_E^k$  (o mesmo ocorre para os demais termos que compõem as expressões para  $\mathcal{C}(u)$  e  $\mathcal{C}(v)$  onde houver alteração na notação). Além disto, usamos o símbolo de barra porque a aproximação efetuada é através de média aritmética para a primeira variável –  $\bar{u}|_E^k$  –, que corresponde à velocidade de convecção –, enquanto que para a segunda –  $u|_E^k$  –, que representa a propriedade sendo transportada, aplicamos o esquema FOU.

Analisando a discretização das derivadas separadamente em (4.5), considere o termo

$$\frac{\partial}{\partial x}(uu)|_e^k \approx \frac{\bar{u}|_E^k u|_E^k - \bar{u}|_P^k u|_P^k}{\Delta x},$$

temos que o valor da velocidade de convecção  $u$ , calculada por meio de média aritmética simples, fica da seguinte forma

$$\bar{u}|_E^k = \frac{u|_e^k + u|_{eee}^k}{2}, \quad \bar{u}|_P^k = \frac{u|_w^k + u|_e^k}{2}.$$

Considerando agora  $V_f$  a velocidade de convecção, o esquema *upwind* FOU, para uma variável genérica  $\phi$ , calculada na face  $e$  de uma célula de centro  $P$ , é dada por

$$\phi|_e = \begin{cases} \phi|_P, & V_f \geq 0, \\ \phi|_E, & V_f < 0. \end{cases}$$

Os valores assumidos por  $\phi|_e$  são selecionados de acordo o sinal da velocidade  $V_f$  que, por sua vez, depende diretamente da orientação do sistema cartesiano. Sendo a função sinal dada por

$$S_e = \begin{cases} 1, & V_f \geq 0 \\ -1, & V_f < 0 \end{cases}$$

podemos escrever a definição do esquema FOU da seguinte forma

$$\phi|_e = \left(\frac{1+S_e}{2}\right)\phi|_P + \left(\frac{1-S_e}{2}\right)\phi|_E. \tag{4.6}$$

Ainda sobre a variável  $\phi$ , sua expansão em série de Taylor em torno do ponto  $x|_P$ , avaliada em  $x|_e$ , é dada por

$$\phi|_e = \phi|_P + \frac{(x|_e - x|_P)}{1!} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Big|_P + \frac{(x|_e - x|_P)^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \Big|_P + H,$$

onde  $H$  denota os termos de ordem superior a 2. Desta forma, podemos observar que, independente da malha, este esquema possui um erro de truncamento de primeira ordem [65], por ser obtido do truncamento da série de Taylor após o primeiro termo.

Considerando a formulação para variáveis normalizadas, tratada no apêndice B, o esquema FOU pode ser definido como

$$\hat{\phi}|_f = \hat{\phi}|_U,$$

sendo  $f$  e  $U$  dados conforme a molécula computacional considerada na abordagem de variáveis normalizadas. Assim, o valor atribuído para a variável  $\phi$  depende diretamente do sinal da velocidade de convecção, pois este é responsável pela definição das posições  $D$ ,  $f$ ,  $U$  e  $R$ .

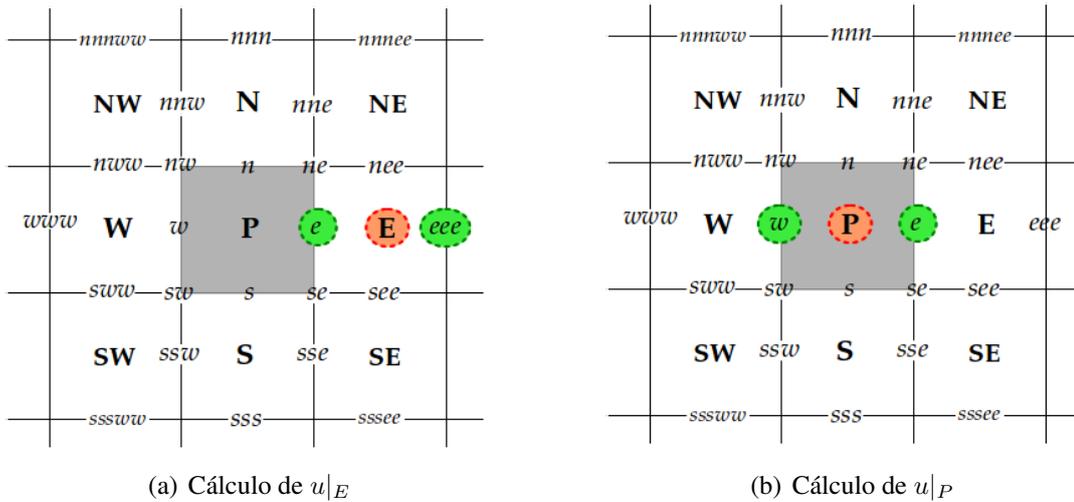


Figura 4.4: *Upwind*

Tendo como base as Figuras 4.4(a) e 4.4(b), aplicando o esquema FOU – conforme expressão (4.6) – na aproximação dos termos que envolvem a propriedade a ser transportada – que neste caso é a velocidade  $u$  –, o esquema nos fornece as seguintes expressões

$$u|_E^k = \left( \frac{1 + R_E^k}{2} \right) u|_e^k + \left( \frac{1 - R_E^k}{2} \right) u|_{eee}^k, \quad R_E^k = \begin{cases} 1, \bar{u}|_E^k \geq 0 \\ -1, \bar{u}|_E^k < 0 \end{cases}$$

e

$$u|_P^k = \left(\frac{1+R_P^k}{2}\right)u|_w^k + \left(\frac{1-R_P^k}{2}\right)u|_e^k, \quad R_P^k = \begin{cases} 1, \bar{u}|_P^k \geq 0 \\ -1, \bar{u}|_P^k < 0. \end{cases}$$

Da mesma forma para o segundo termo de  $\mathcal{C}(u)$  em (4.5)

$$\frac{\partial}{\partial y}(uv)\Big|_e^k \approx \frac{\bar{v}|_{ne}^k u|_{ne}^k - \bar{v}|_{se}^k u|_{se}^k}{\Delta y},$$

segue que

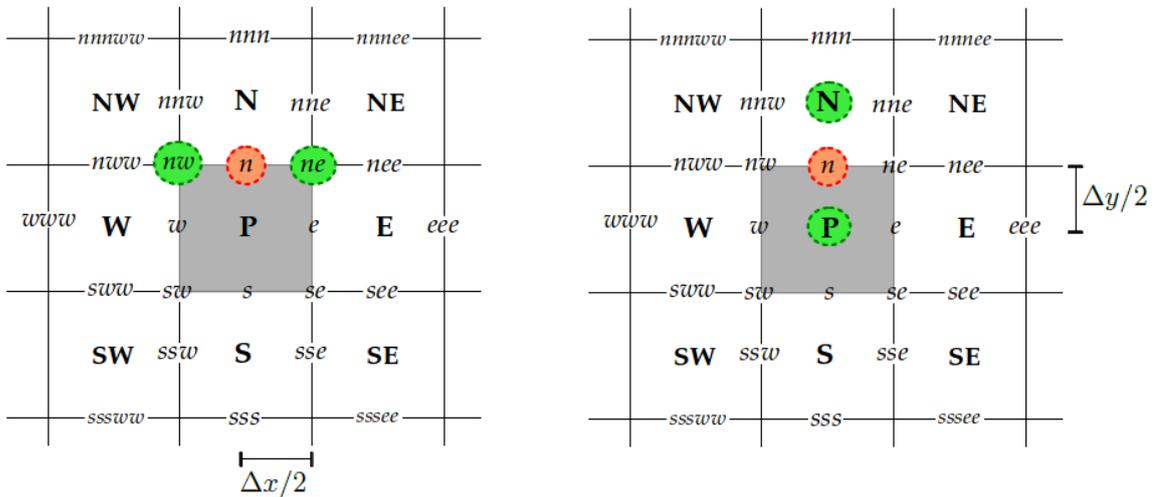
$$\bar{v}|_{ne}^k = \frac{v|_n^k + v|_{nee}^k}{2}, \quad \bar{v}|_{se}^k = \frac{v|_s^k + v|_{see}^k}{2}$$

e segundo o esquema FOU

$$u|_{ne}^k = \left(\frac{1+R_{ne}^k}{2}\right)u|_e^k + \left(\frac{1-R_{ne}^k}{2}\right)u|_{nne}^k, \quad R_{ne}^k = \begin{cases} 1, \bar{v}|_{ne}^k \geq 0 \\ -1, \bar{v}|_{ne}^k < 0 \end{cases}$$

e

$$u|_{se}^k = \left(\frac{1+R_{se}^k}{2}\right)u|_{sse}^k + \left(\frac{1-R_{se}^k}{2}\right)u|_e^k, \quad R_{se}^k = \begin{cases} 1, \bar{v}|_{se}^k \geq 0 \\ -1, \bar{v}|_{se}^k < 0. \end{cases}$$



(a) Aproximação do termo  $\frac{\partial}{\partial x}(uv)$  na face  $n$

(b) Aproximação na termo  $\frac{\partial}{\partial y}(vv)$  na face  $n$

Figura 4.5: Discretização do termo convectivo  $\mathcal{C}(v)$  na face  $n$

Agora consideremos o termo convectivo da equação da expressão (4.2). A discretização de  $\mathcal{C}(v)$  na face  $n$ , da célula hachurada – conforme Figuras 4.5(a) e 4.5(b) –, no nível de tempo  $k$ , é

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(v)|_n^k &= \frac{\partial}{\partial x}(uv)\Big|_n^k + \frac{\partial}{\partial y}(v\bar{v})\Big|_n^k \\
&\approx \frac{(uv)_{ne}^k - (uv)_{nw}^k}{2(\Delta x/2)} + \frac{(v\bar{v})_N^k - (v\bar{v})_P^k}{2(\Delta y/2)} \\
&= \frac{\bar{u}|_{ne}^k v|_{ne}^k - \bar{u}|_{nw}^k v|_{nw}^k}{\Delta x} + \frac{\bar{v}|_N^k v|_N^k - \bar{v}|_P^k v|_P^k}{\Delta y}.
\end{aligned}$$

Utilizando um procedimento análogo podemos aproximar as velocidades de convecção  $u$  e  $v$  da seguinte forma

$$\bar{u}|_{ne}^k = \frac{u|_e^k + u|_{nne}^k}{2}, \quad \bar{u}|_{nw}^k = \frac{u|_w^k + u|_{nnw}^k}{2}, \quad \bar{v}|_N^k = \frac{v|_n^k + v|_{nnn}^k}{2}, \quad \bar{v}|_P^k = \frac{v|_n^k + v|_s^k}{2},$$

e do esquema FOU podemos obter as seguintes expressões

$$\begin{aligned}
v|_{ne}^k &= \left(\frac{1+R_{ne}^k}{2}\right)v|_n^k + \left(\frac{1-R_{ne}^k}{2}\right)v|_{nee}^k, & R_{ne}^k &= \begin{cases} 1, \bar{u}|_{ne}^k \geq 0 \\ -1, \bar{u}|_{ne}^k < 0, \end{cases} \\
v|_{nw}^k &= \left(\frac{1+R_{nw}^k}{2}\right)v|_{nww}^k + \left(\frac{1-R_{nw}^k}{2}\right)v|_n^k, & R_{nw}^k &= \begin{cases} 1, \bar{u}|_{nw}^k \geq 0 \\ -1, \bar{u}|_{nw}^k < 0, \end{cases} \\
v|_N^k &= \left(\frac{1+R_N^k}{2}\right)v|_n^k + \left(\frac{1-R_N^k}{2}\right)v|_{nnn}^k, & R_N^k &= \begin{cases} 1, \bar{v}|_N^k \geq 0 \\ -1, \bar{v}|_N^k < 0, \end{cases} \\
v|_P^k &= \left(\frac{1+R_P^k}{2}\right)v|_s^k + \left(\frac{1-R_P^k}{2}\right)v|_n^k, & R_P^k &= \begin{cases} 1, \bar{v}|_P^k \geq 0 \\ -1, \bar{v}|_P^k < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

### 4.1.3 Termo de pressão

Considere  $\mathcal{P}^u = \frac{\partial p}{\partial x}$  e  $\mathcal{P}^v = \frac{\partial p}{\partial y}$ , que correspondem aos termos de pressão das equações (4.1) e (4.2), respectivamente.

A discretização dos termos de pressão nas faces  $e$  e  $n$ , respectivamente, – conforme destacado, nesta ordem, nas Figuras 4.6(a) e 4.6(b) – em um nível de tempo  $k+1$ , utilizando o método de aproximação por diferenças finitas do tipo central é tal que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x}\Big|_e^{k+1} &\approx \frac{p|_E^{k+1} - p|_P^{k+1}}{2(\Delta x/2)} = \frac{p|_E^{k+1} - p|_P^{k+1}}{\Delta x}, \\
\frac{\partial p}{\partial y}\Big|_n^{k+1} &\approx \frac{p|_N^{k+1} - p|_P^{k+1}}{2(\Delta y/2)} = \frac{p|_N^{k+1} - p|_P^{k+1}}{\Delta y}.
\end{aligned}$$

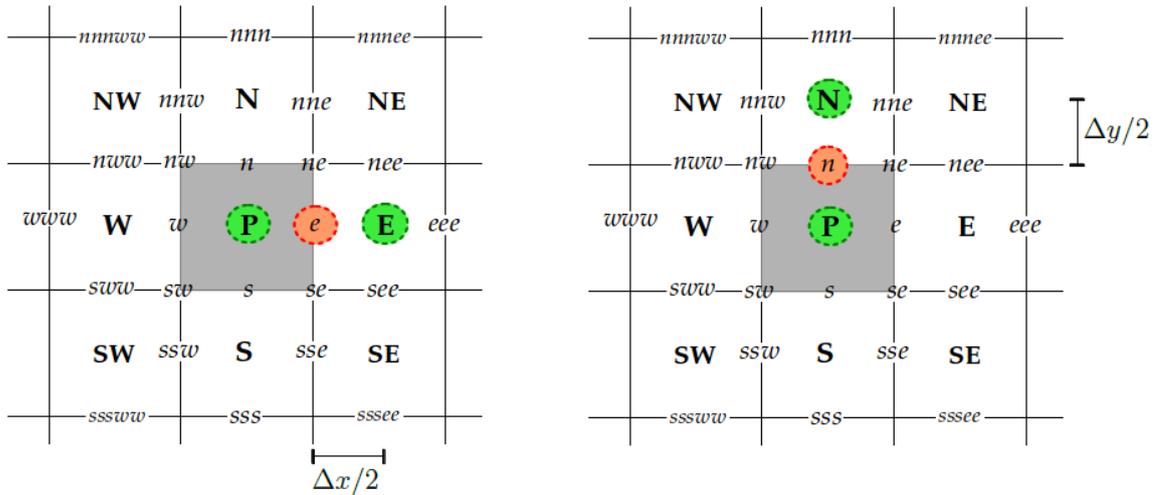
(a) Aproximação na face  $e$ (b) Aproximação na face  $n$ 

Figura 4.6: Discretização do termo de pressão

Logo,

$$\left( -\frac{1}{\rho} \mathcal{P}^u \right) \Big|_e^{k+1} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_e^{k+1} \approx -\frac{1}{\rho} \left( \frac{p|_E^{k+1} - p|_P^{k+1}}{\Delta x} \right), \quad (4.7)$$

$$\left( -\frac{1}{\rho} \mathcal{P}^v \right) \Big|_n^{k+1} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_n^{k+1} \approx -\frac{1}{\rho} \left( \frac{p|_N^{k+1} - p|_P^{k+1}}{\Delta y} \right). \quad (4.8)$$

#### 4.1.4 Termo difusivo

Considere as igualdades

$$\mathcal{V}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\mathcal{V}(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

que correspondem aos termos difusivos das equações (4.1) e (4.2), respectivamente.

A discretização dos termos difusivos nas faces  $e$  e  $n$ , respectivamente, – destacada nas Figuras 4.7(a) e 4.7(b), para  $\mathcal{V}(u)$ , e nas Figuras 4.8(a) e 4.8(b), para  $\mathcal{V}(v)$  – no nível de tempo  $k$ , utilizando o método de aproximação por diferenças finitas do tipo central, é obtida por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_e^k + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_e^k \approx \frac{u|_w^k - 2u|_e^k + u|_{eee}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{u|_{sse}^k - 2u|_e^k + u|_{nne}^k}{(\Delta y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_n^k + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Big|_n^k \approx \frac{v|_{nww}^k - 2v|_n^k + v|_{nee}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{v|_s^k - 2v|_n^k + v|_{nnn}^k}{(\Delta y)^2}$$

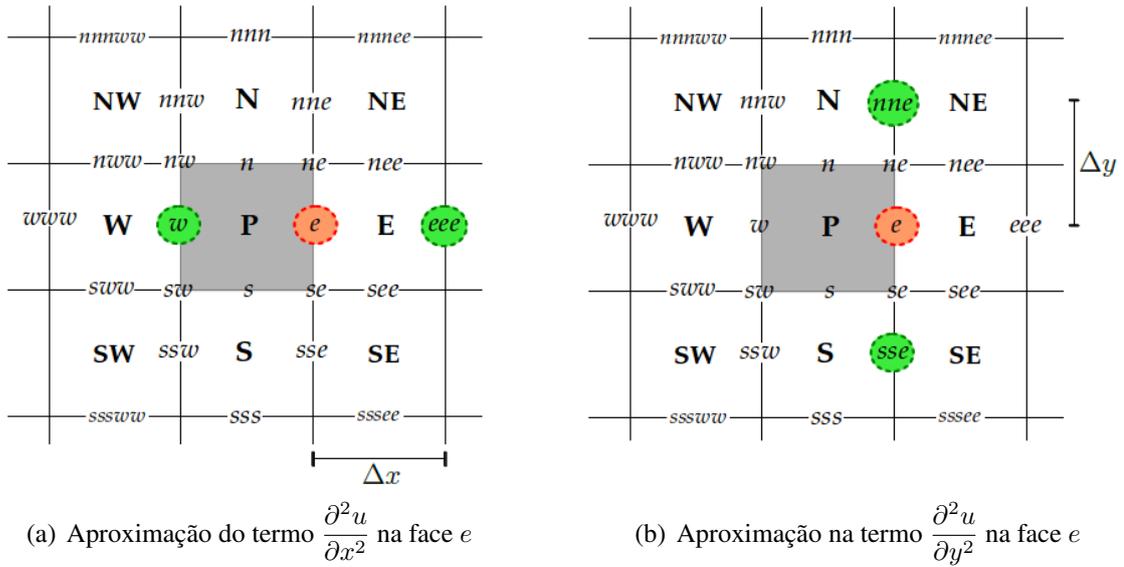


Figura 4.7: Discretização do termo difusivo  $\mathcal{V}(u)$  na face  $e$

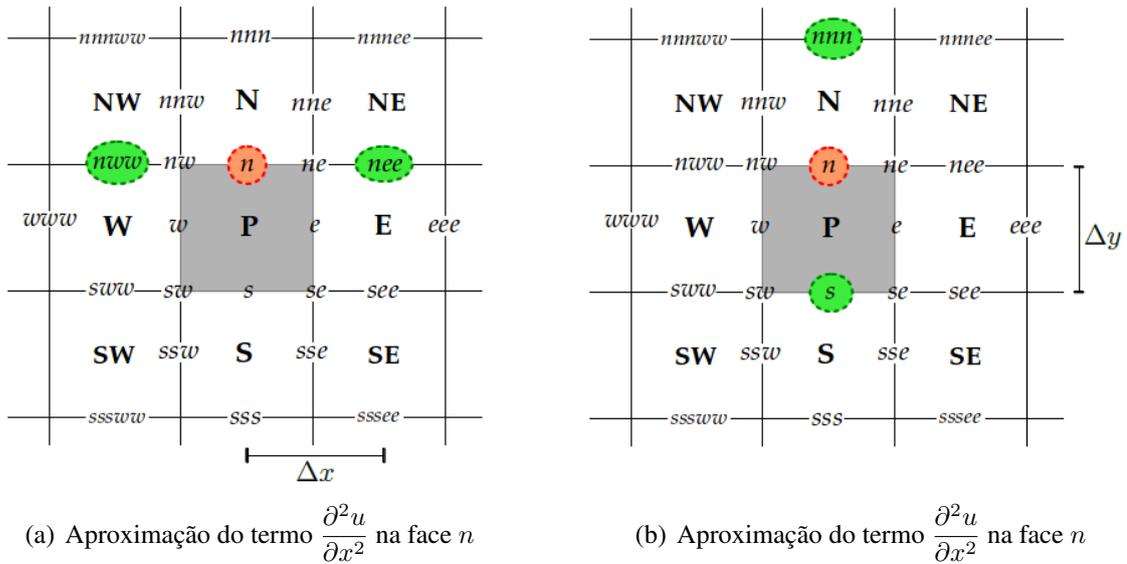


Figura 4.8: Discretização do termo difusivo  $\mathcal{V}(v)$  na face  $n$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 (\nu \mathcal{V}(u))|_e^k &= \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \Big|_e^k = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_e^k + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_e^k \right) \\
 &\approx \nu \left( \frac{u|_w^k - 2u|_e^k + u|_{eee}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{u|_{sse}^k - 2u|_e^k + u|_{nne}^k}{(\Delta y)^2} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nu \mathcal{V}(v))|_n^k &= \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \Big|_n^k = \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_n^k + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Big|_n^k \right) \\
&\approx \nu \left( \frac{v|_{nww}^k - 2v|_n^k + v|_{nee}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{v|_s^k - 2v|_n^k + v|_{nnn}^k}{(\Delta y)^2} \right).
\end{aligned}$$

É importante ressaltar que as aproximações (4.7) e (4.8) utilizam valores de pressão centrados nas células adjacentes à célula centrada no ponto cardinal  $P$ , ou seja, não necessita-se de interpolações para o cálculo do gradiente de pressão. Analogamente, os termos viscosos também são aproximados por variáveis de velocidade localizadas nas faces de células adjacentes àquela centrada em  $P$ . Com este detalhe quanto às aproximações, temos ganhos numéricos quanto a estabilidade do esquema aplicado sobre as equações governantes. Para mais detalhes consultar [29].

Na próxima seção estudamos a discretização dos termos das equações de Navier-Stokes no caso em que estas são escritas em coordenadas generalizadas.

## 4.2 DISCRETIZAÇÃO EM COORDENADAS GENERALIZADAS

Reportando-nos à Figura 2.3(a), uma vez que a geometria é referenciada no sistema de coordenadas generalizadas, temos que a sua representação topológica no domínio computacional é cartesiana. Desta forma, toda a abordagem matemática desenvolvida na seção anterior com fins didáticos é aplicada nessa seção para as equações (3.51) e (3.52), equações de Navier-Stokes em coordenadas generalizadas, com as métricas envolvidas no esquema numérico tendo o papel de realizar as devidas compensações por conta da mudança do sistema de coordenadas.

Quando trabalhamos com o plano transformado, temos uma malha cujas células podem ser representadas também pela Figura 4.1(a). A diferença é que, em coordenadas cartesianas, a dimensão das células é de  $\Delta x$  por  $\Delta y$ , enquanto que no sistema de coordenadas generalizadas é de  $\Delta \xi$  por  $\Delta \eta$ . Por conveniência consideramos  $\Delta \xi = \Delta \eta = 1$ , assim como foi estudado no capítulo 2. As figuras apresentadas na seção 4.1 podem ser utilizadas para melhor compreensão das aproximações realizadas nesta seção, considerando a análise relativa às dimensões das células.

Das equações (3.51) e (3.52), considerando fluidos incompressíveis, onde  $\rho$  é constante, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{u}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} (Uu) + \frac{\partial}{\partial \eta} (Vu) &= \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right] \\
+ \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{v}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} (Uv) + \frac{\partial}{\partial \eta} (Vv) &= \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right] \\ &+ \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial v}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial v}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \right) \right], \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{u}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} (Uu) + \frac{\partial}{\partial \eta} (Vu) &= \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right] \\ &+ \nu \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right) \right], \quad (4.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{v}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} (Uv) + \frac{\partial}{\partial \eta} (Vv) &= \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right] \\ &+ \nu \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial v}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial v}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \right) \right]. \quad (4.10) \end{aligned}$$

As aproximações numéricas dos termos temporal, convectivo, de pressão e difusivo, tomando por base a mesma nomenclatura apresentada na Figura 4.1(a), são apresentadas na sequência.

#### 4.2.1 Termo temporal

Sejam  $\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{u}{J} \right)$  e  $\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{v}{J} \right)$  os termos temporais de (4.9) e (4.10), respectivamente. A discretização dos mesmos nas faces  $e$  e  $n$ , nesta ordem, utilizando aproximação por diferenças finitas progressivas de primeira ordem no nível de tempo  $k$  são

$$\left. \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{u}{J} \right) \right|_e^k \approx \frac{\left( \frac{u}{J} \right)|_e^{k+1} - \left( \frac{u}{J} \right)|_e^k}{\Delta \tau} = \frac{1}{J_e} \left( \frac{u|_e^{k+1} - u|_e^k}{\Delta \tau} \right), \quad (4.11)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{v}{J} \right) \right|_n^k \approx \frac{\left( \frac{v}{J} \right)|_n^{k+1} - \left( \frac{v}{J} \right)|_n^k}{\Delta \tau} = \frac{1}{J_n} \left( \frac{v|_n^{k+1} - v|_n^k}{\Delta \tau} \right). \quad (4.12)$$

#### 4.2.2 Termo convectivo

Considere

$$\mathcal{C}(u) = \frac{\partial}{\partial \xi} (Uu) + \frac{\partial}{\partial \eta} (Vu) \quad (4.13)$$

$$\mathcal{C}(v) = \frac{\partial}{\partial \xi} (Uv) + \frac{\partial}{\partial \eta} (Vv) \quad (4.14)$$

como os termos convectivos das equações (4.9) e (4.10), respectivamente.

A discretização de  $\mathcal{C}(u)$  – equação (4.13) – na face  $e$  da célula centrada no ponto

cardinal  $P$ , de acordo com a Figura 4.1(a), em um nível de tempo  $k$ , utilizando diferenças centrais, é

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(u)|_e^k &= \frac{\partial}{\partial \xi}(Uu)|_e^k + \frac{\partial}{\partial \eta}(Vu)|_e^k \\ &\approx \frac{(Uu)|_E^k - (Uu)|_P^k}{\Delta \xi} + \frac{(Vu)|_{ne}^k - (Vu)|_{se}^k}{\Delta \eta} \\ &= \bar{U}|_E^k u|_E^k - \bar{U}|_P^k u|_P^k + \bar{V}|_{ne}^k u|_{ne}^k - \bar{V}|_{se}^k u|_{se}^k\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(Uu)|_e^k \approx \bar{U}|_E^k u|_E^k - \bar{U}|_P^k u|_P^k,$$

as velocidades de convecção são as componentes contravariantes dadas na forma

$$\bar{U}|_E^k = \frac{U|_e^k + U|_{eee}^k}{2}, \quad \bar{U}|_P^k = \frac{U|_w^k + U|_e^k}{2}, \quad (4.15)$$

e aplicando o esquema FOU na propriedade a ser transportada - no caso a velocidade  $u$  - obtemos

$$u|_E^k = \left( \frac{1 + S_E^k}{2} \right) u|_e^k + \left( \frac{1 - S_E^k}{2} \right) u|_{eee}^k, \quad S_E^k = \begin{cases} 1, \bar{U}|_E^k \geq 0 \\ -1, \bar{U}|_E^k < 0 \end{cases}$$

e

$$u|_P^k = \left( \frac{1 + S_P^k}{2} \right) u|_w^k + \left( \frac{1 - S_P^k}{2} \right) u|_e^k, \quad S_P^k = \begin{cases} 1, \bar{U}|_P^k \geq 0 \\ -1, \bar{U}|_P^k < 0. \end{cases}$$

Utilizando procedimento análogo para a outra derivada temos

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(Vu)|_e^k \approx \bar{V}|_{ne}^k u|_{ne}^k - \bar{V}|_{se}^k u|_{se}^k,$$

então as velocidades de convecção (componentes contravariantes) são dadas por

$$\bar{V}|_{ne}^k = \frac{V|_n^k + V|_{nee}^k}{2}, \quad \bar{V}|_{se}^k = \frac{V|_s^k + V|_{see}^k}{2}, \quad (4.16)$$

e do esquema FOU obtemos

$$u|_{ne}^k = \left( \frac{1 + S_{ne}^k}{2} \right) u|_e^k + \left( \frac{1 - S_{ne}^k}{2} \right) u|_{nee}^k, \quad S_{ne}^k = \begin{cases} 1, \bar{V}|_{ne}^k \geq 0 \\ -1, \bar{V}|_{ne}^k < 0, \end{cases}$$

$$u|_{se}^k = \left( \frac{1 + S_{se}^k}{2} \right) u|_{sse}^k + \left( \frac{1 - S_{se}^k}{2} \right) u|_e^k, \quad S_{se}^k = \begin{cases} 1, \bar{V}|_{se}^k \geq 0 \\ -1, \bar{V}|_{se}^k < 0. \end{cases}$$

Agora consideremos a expressão (4.14), que corresponde ao termo convectivo da equação (4.10). A discretização de  $\mathcal{C}(v)$  na face  $n$  da célula centrada no ponto cardinal  $P$  no nível de tempo  $k$  segue como

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(v)|_n^k &= \frac{\partial}{\partial \xi}(Uv)|_n^k + \frac{\partial}{\partial \eta}(Vv)|_n^k \\ &\approx \frac{(Uv)|_{ne}^k - (Uv)|_{nw}^k}{\Delta \xi} + \frac{(Vv)|_N^k - (Vv)|_P^k}{\Delta \eta} \\ &= \bar{U}|_{ne}^k v|_{ne}^k - \bar{U}|_{nw}^k v|_{nw}^k + \bar{V}|_N^k v|_N^k - \bar{V}|_P^k v|_P^k. \end{aligned}$$

As velocidades de convecção ficam na forma

$$\bar{U}|_{ne}^k = \frac{U|_e^k + U|_{nne}^k}{2}, \quad \bar{U}|_{nw}^k = \frac{U|_w^k + U|_{nnw}^k}{2}, \quad \bar{V}|_N^k = \frac{V|_n^k + V|_{nnn}^k}{2}, \quad \bar{V}|_P^k = \frac{V|_n^k + V|_s^k}{2},$$

e do esquema *upwind* obtemos

$$v|_{ne}^k = \left( \frac{1 + S_{ne}^k}{2} \right) v|_n^k + \left( \frac{1 - S_{ne}^k}{2} \right) v|_{nee}^k, \quad S_{ne}^k = \begin{cases} 1, \bar{U}|_{ne}^k \geq 0 \\ -1, \bar{U}|_{ne}^k < 0, \end{cases}$$

$$v|_{nw}^k = \left( \frac{1 + S_{nw}^k}{2} \right) v|_{nww}^k + \left( \frac{1 - S_{nw}^k}{2} \right) v|_n^k, \quad S_{nw}^k = \begin{cases} 1, \bar{U}|_{nw}^k \geq 0 \\ -1, \bar{U}|_{nw}^k < 0, \end{cases}$$

$$v|_N^k = \left( \frac{1 + S_N^k}{2} \right) v|_n^k + \left( \frac{1 - S_N^k}{2} \right) v|_{nnn}^k, \quad S_N^k = \begin{cases} 1, \bar{V}|_N^k \geq 0 \\ -1, \bar{V}|_N^k < 0, \end{cases}$$

$$v|_P^k = \left( \frac{1 + S_P^k}{2} \right) v|_s^k + \left( \frac{1 - S_P^k}{2} \right) v|_n^k, \quad S_P^k = \begin{cases} 1, \bar{V}|_P^k \geq 0 \\ -1, \bar{V}|_P^k < 0. \end{cases}$$

### 4.2.3 Termo de pressão

Sejam

$$\mathcal{P}^u = \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (4.17)$$

$$\mathcal{P}^v = \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad (4.18)$$

os termos de pressão das equações (4.9) e (4.10), respectivamente. A discretização dos termos nas faces  $e$  e  $n$ , respectivamente, no nível de tempo  $k + 1$ , utilizando o método de aproximação

por diferenças finitas do tipo central, são realizadas da seguinte forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial \eta}\Big|_e^{k+1} &\approx \frac{p|_{ne}^{k+1} - p|_{se}^{k+1}}{2(\Delta\eta/2)} = p|_{ne}^{k+1} - p|_{se}^{k+1}, \\ \frac{\partial p}{\partial \xi}\Big|_e^{k+1} &\approx \frac{p|_E^{k+1} - p|_P^{k+1}}{2(\Delta\xi/2)} = p|_E^{k+1} - p|_P^{k+1}, \\ \frac{\partial p}{\partial \xi}\Big|_n^{k+1} &\approx \frac{p|_{ne}^{k+1} - p|_{nw}^{k+1}}{2(\Delta\xi/2)} = p|_{ne}^{k+1} - p|_{nw}^{k+1}, \\ \frac{\partial p}{\partial \eta}\Big|_n^{k+1} &\approx \frac{p|_N^{k+1} - p|_P^{k+1}}{2(\Delta\eta/2)} = p|_N^{k+1} - p|_P^{k+1}.\end{aligned}$$

Note que  $p|_{ne}^{k+1}$ ,  $p|_{nw}^{k+1}$ ,  $p|_{se}^{k+1}$  e  $p|_{sw}^{k+1}$  não são conhecidas nos respectivos pontos cardinais, pois a pressão é armazenada no centro da célula. Logo, temos que estes valores de pressão são dados pelas respectivas médias

$$\begin{aligned}p|_{ne}^{k+1} &= \frac{p|_P^{k+1} + p|_E^{k+1} + p|_{NE}^{k+1} + p|_N^{k+1}}{4}, & p|_{nw}^{k+1} &= \frac{p|_W^{k+1} + p|_P^{k+1} + p|_N^{k+1} + p|_{NW}^{k+1}}{4}, \\ p|_{se}^{k+1} &= \frac{p|_S^{k+1} + p|_{SE}^{k+1} + p|_E^{k+1} + p|_P^{k+1}}{4}, & p|_{sw}^{k+1} &= \frac{p|_{SW}^{k+1} + p|_S^{k+1} + p|_P^{k+1} + p|_W^{k+1}}{4}.\end{aligned}$$

Como não consideramos malhas móveis neste estudo, então as métricas ficam especificadas por

$$\frac{\partial y}{\partial \xi}\Big|_e^{k+1} = \frac{\partial y}{\partial \xi}\Big|_e, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta}\Big|_e^{k+1} = \frac{\partial y}{\partial \eta}\Big|_e, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta}\Big|_n^{k+1} = \frac{\partial x}{\partial \eta}\Big|_n, \quad \frac{\partial x}{\partial \xi}\Big|_n^{k+1} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\Big|_n$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\rho} \mathcal{P}u\right)\Big|_e^{k+1} &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)\Big|_e^{k+1} \\ &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial \eta}\Big|_e^{k+1} \frac{\partial y}{\partial \xi}\Big|_e^{k+1} - \frac{\partial p}{\partial \xi}\Big|_e^{k+1} \frac{\partial y}{\partial \eta}\Big|_e^{k+1} \right) \\ &\approx \frac{1}{\rho} \left[ (p|_{ne}^{k+1} - p|_{se}^{k+1}) \frac{\partial y}{\partial \xi}\Big|_e - (p|_E^{k+1} - p|_P^{k+1}) \frac{\partial y}{\partial \eta}\Big|_e \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\rho} \mathcal{P}^v\right)\Big|_n^{k+1} &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)\Big|_n^{k+1} \\
&= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial \xi}\Big|_n^{k+1} \frac{\partial x}{\partial \eta}\Big|_n^{k+1} - \frac{\partial p}{\partial \eta}\Big|_n^{k+1} \frac{\partial x}{\partial \xi}\Big|_n^{k+1} \right) \\
&\approx \frac{1}{\rho} \left[ (p|_{ne}^{k+1} - p|_{nw}^{k+1}) \frac{\partial x}{\partial \eta}\Big|_n - (p|_N^{k+1} - p|_P^{k+1}) \frac{\partial x}{\partial \xi}\Big|_n \right]
\end{aligned}$$

#### 4.2.4 Termo difusivo

Considere

$$\mathcal{V}(u) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right), \quad (4.19)$$

$$\mathcal{V}(v) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial v}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial v}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \right), \quad (4.20)$$

que correspondem aos termos difusivos das equações (4.9) e (4.10), respectivamente. A discretização do primeiro termo de (4.19) na face  $e$ , no nível de tempo  $k$ , utilizando o método de aproximação por diferenças finitas do tipo central, é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right)\Big|_e^k &\approx \frac{\left( J \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right)\Big|_E^k - \left( J \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right)\Big|_P^k}{\Delta \xi} \\
&= \left( J \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right)\Big|_E^k - \left( J \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right)\Big|_P^k \\
&= J_E \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)\Big|_E^k - J_P \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)\Big|_P^k \\
&= (J\alpha)|_E \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)\Big|_E^k - (J\beta)|_E \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)\Big|_E^k \\
&\quad - (J\alpha)|_P \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)\Big|_P^k + (J\beta)|_P \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)\Big|_P^k \\
&\approx (J\alpha)|_E \left( \frac{u|_{eee}^k - u|_e^k}{2(\Delta \xi/2)} \right) - (J\beta)|_E \left( \frac{u|_{nee}^k - u|_{see}^k}{2(\Delta \eta/2)} \right) \\
&\quad - (J\alpha)|_P \left( \frac{u|_e^k - u|_w^k}{2(\Delta \xi/2)} \right) + (J\beta)|_P \left( \frac{u|_n^k - u|_s^k}{2(\Delta \eta/2)} \right),
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right) \Big|_e^k &\approx (J\alpha)|_E (u|_{eee}^k - u|_e^k) - (J\beta)|_E (u|_{nee}^k - u|_{see}^k) \\ &- (J\alpha)|_P (u|_e^k - u|_w^k) + (J\beta)|_P (u|_n^k - u|_s^k) \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde

$$\begin{aligned} u|_{nee}^k &= \frac{u|_e^k + u|_{eee}^k + u|_{nnnee}^k + u|_{nne}^k}{4}, & u|_{see}^k &= \frac{u|_{sse}^k + u|_{ssee}^k + u|_{eee}^k + u|_e^k}{4}, \\ u|_n^k &= \frac{u|_w^k + u|_e^k + u|_{nne}^k + u|_{nnw}^k}{4}, & u|_s^k &= \frac{u|_{ssw}^k + u|_{sse}^k + u|_e^k + u|_w^k}{4}. \end{aligned}$$

Utilizando o mesmo procedimento, a discretização do segundo termo de (4.19) na face  $e$  e do primeiro e segundo termos de (4.20) na face  $n$ , ambos no nível de tempo  $k$ , são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right) \Big|_e^k &\approx (J\gamma)|_{ne}^k (u|_{nne}^k - u|_e^k) - (J\beta)|_{ne}^k (u|_{nee}^k - u|_n^k) \\ &- (J\gamma)|_{se}^k (u|_e^k - u|_{sse}^k) + (J\beta)|_{se}^k (u|_{see}^k - u|_s^k) \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial v}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right) \Big|_n^k &\approx (J\alpha)|_{ne}^k (v|_{nee}^k - v|_n^k) - (J\beta)|_{ne}^k (v|_{nne}^k - v|_e^k) \\ &- (J\alpha)|_{nw}^k (v|_n^k - v|_{nww}^k) + (J\beta)|_{nw}^k (v|_{nnw}^k - v|_w^k) \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial v}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \right) \Big|_n^k &\approx (J\gamma)|_N^k (v|_{nnn}^k - v|_n^k) - (J\beta)|_N^k (v|_{nne}^k - v|_{nnw}^k) \\ &- (J\gamma)|_P^k (v|_n^k - v|_s^k) + (J\beta)|_P^k (v|_e^k - v|_w^k), \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde

$$\begin{aligned} v|_{nne}^k &= \frac{v|_n^k + v|_{nee}^k + v|_{nnnee}^k + v|_{nnn}^k}{4}, & v|_e^k &= \frac{v|_s^k + v|_{see}^k + v|_{nee}^k + v|_n^k}{4}, \\ v|_{nnw}^k &= \frac{v|_{nww}^k + v|_n^k + v|_{nnn}^k + v|_{nnnw}^k}{4}, & v|_w^k &= \frac{v|_{sww}^k + v|_s^k + v|_n^k + v|_{nww}^k}{4}. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} (\nu \mathcal{V}(u))|_e^k &= \nu_e \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right) \right] \Big|_e^k \\ &= \nu_e \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right) \right] \Big|_e^k + \nu_e \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right) \right] \Big|_e^k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nu \mathcal{V}(v))|_n^k &= \nu_n \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial v}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial v}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \right) \right] \Big|_n^k \\
&= \nu_n \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial v}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right) \right] \Big|_n^k + \nu_n \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial v}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \right) \right] \Big|_n^k,
\end{aligned}$$

considerando as aproximações apresentadas em (4.21)-(4.24), com as respectivas médias listadas.

### 4.3 CONDIÇÕES DE CONTORNO

As condições de contorno, tratadas na seção 3.4, também são discretizadas para sua posterior aplicação na resolução dos problemas em estudo. Assim como foi observado na página 51, o domínio computacional de uma geometria em coordenadas generalizadas possui sua representação topológica cartesiana, por isso, para melhor compreensão, as figuras utilizadas como base para a análise das condições de contorno, nesta seção, estão retratadas no sistema de coordenadas cartesianas, pois referem-se ao domínio computacional de uma geometria escrita no sistema de coordenadas generalizadas.

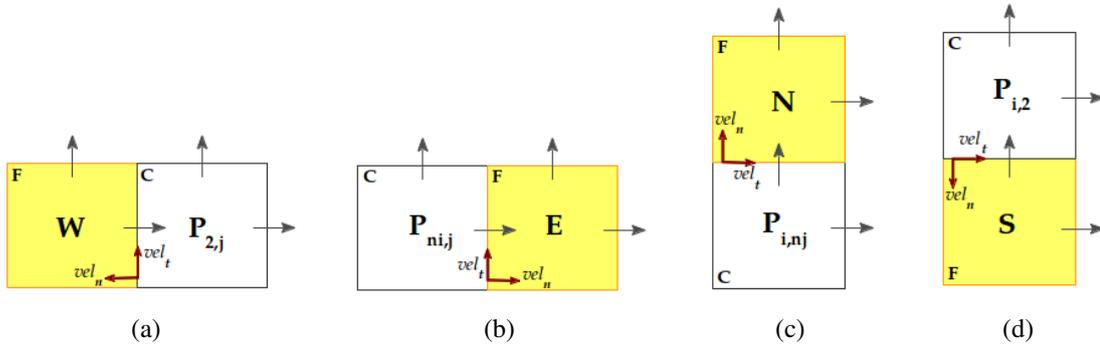


Figura 4.9: Condição CNEI

A condição de não escorregamento e impermeabilidade é definida pelas seguintes expressões

$$vel_t = 0 \quad e \quad vel_n = 0, \quad (4.25)$$

onde  $vel_t$  representa a velocidade tangencial à fronteira e  $vel_n$  a velocidade normal à fronteira. Alguns dos casos possíveis de serem encontrados em uma malha são retratados na Figura 4.9 (as células de fundo amarelo, indicadas por um índice  $F$ , representam células de fronteira, enquanto que as de fundo branco, com índice  $C$ , representam células cheias de fluido). Assim, a discretização, considerando os possíveis casos destacados na Figura 4.9, da condição CNEI é

(a)

$$vel_t = \frac{v|_{nww} + v|_n}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad v|_{nww} = -v|_n$$

$$vel_n = u|_w = 0 \quad \Rightarrow \quad u|_w = 0$$

(b)

$$vel_t = \frac{v|_n + v|_{nee}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad v|_{nee} = -v|_n$$

$$vel_n = u|_e = 0 \quad \Rightarrow \quad u|_e = 0$$

(c)

$$vel_t = \frac{u|_e + u|_{nne}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad u|_{nne} = -u|_e$$

$$vel_n = v|_n = 0 \quad \Rightarrow \quad v|_n = 0$$

(d)

$$vel_t = \frac{u|_e + u|_{sse}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad u|_{sse} = -u|_e$$

$$vel_n = v|_s = 0 \quad \Rightarrow \quad v|_s = 0$$

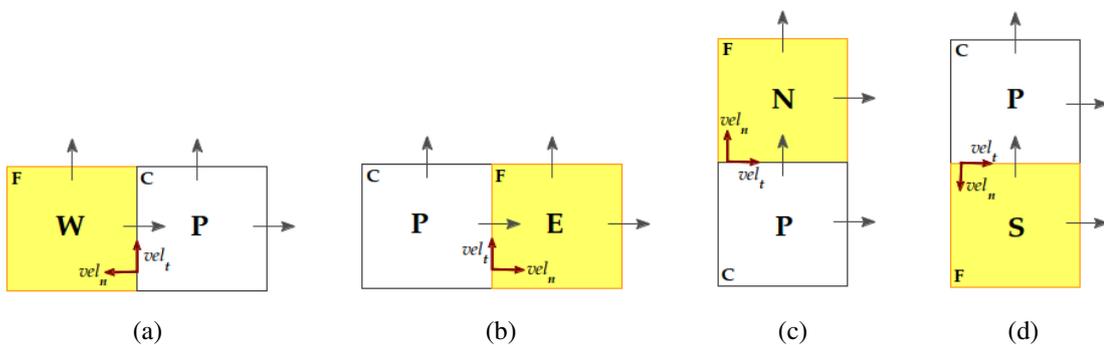


Figura 4.10: Condição CLES

A condição de livre escorregamento é definida pelas seguintes expressões

$$vel_t = vel_{\bullet} \quad e \quad vel_n = 0, \quad (4.26)$$

onde  $vel_{\bullet}$  representa a velocidade prescrita. Os casos possíveis observados para esta condição são retratados na Figura 4.10, e a partir destes, a discretização da condição CLES é

(a)

$$\begin{aligned} vel_t = \frac{v|_{nww} + v|_n}{2} = vel_{\bullet} & \Rightarrow v|_{nww} = 2vel_{\bullet} - v|_n \\ vel_n = u|_w = 0 & \Rightarrow u|_w = 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} vel_t = \frac{v|_n + v|_{nee}}{2} = vel_{\bullet} & \Rightarrow v|_{nee} = 2vel_{\bullet} - v|_n \\ vel_n = u|_e = 0 & \Rightarrow u|_e = 0 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} vel_t = \frac{u|_e + u|_{nne}}{2} = vel_{\bullet} & \Rightarrow u|_{nne} = 2vel_{\bullet} - u|_e \\ vel_n = v|_n = 0 & \Rightarrow v|_n = 0 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} vel_t = \frac{u|_e + u|_{sse}}{2} = vel_{\bullet} & \Rightarrow u|_{sse} = 2vel_{\bullet} - u|_e \\ vel_n = v|_s = 0 & \Rightarrow v|_s = 0 \end{aligned}$$

A condição de simetria é dada por

$$\frac{\partial}{\partial n}(vel_t) = 0 \quad \text{e} \quad vel_n = 0. \quad (4.27)$$

Na Figura 4.11 são apresentados os possíveis casos identificados para esta condição ( $T$  é a fronteira de simetria). A discretização da condição CSIM, tendo em vista os casos retratados na Figura 4.11, é

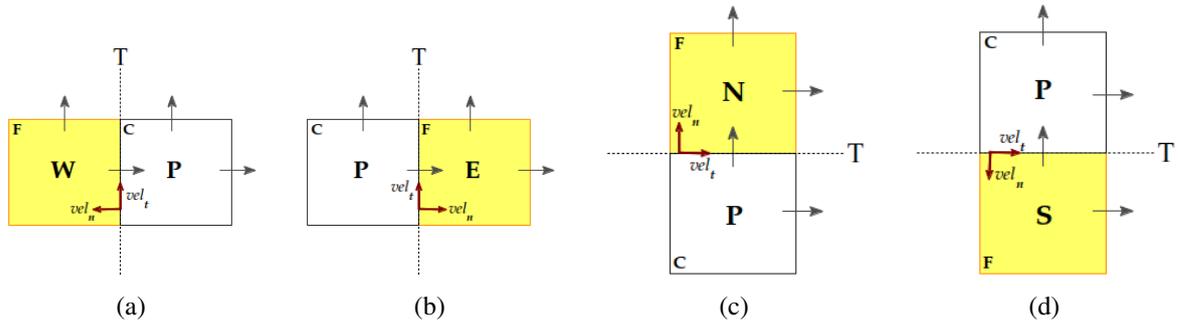


Figura 4.11: Condição CSIM

(a)

$$\frac{\partial}{\partial n}(vel_t) = \frac{v|_{nww} - v|_n}{\Delta\xi} = 0 \quad \Rightarrow \quad v|_{nww} = v|_n$$

$$vel_n = u|_w = 0 \quad \Rightarrow \quad u|_w = 0$$

(b)

$$\frac{\partial}{\partial n}(vel_t) = \frac{v|_{nee} - v|_n}{\Delta\xi} = 0 \quad \Rightarrow \quad v|_{nee} = v|_n$$

$$vel_n = u|_e = 0 \quad \Rightarrow \quad u|_e = 0$$

(c)

$$\frac{\partial}{\partial n}(vel_t) = \frac{u|_{nne} - u|_e}{\Delta\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad u|_{nne} = u|_e$$

$$vel_n = v|_n = 0 \quad \Rightarrow \quad v|_n = 0$$

(d)

$$\frac{\partial}{\partial n}(vel_t) = \frac{u|_{sse} - u|_e}{\Delta\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad u|_{sse} = u|_e$$

$$vel_n = v|_s = 0 \quad \Rightarrow \quad v|_s = 0$$

A condição de injeção prescrita é dada por

$$vel_t = 0 \quad \text{e} \quad vel_n = vel_I, \quad (4.28)$$

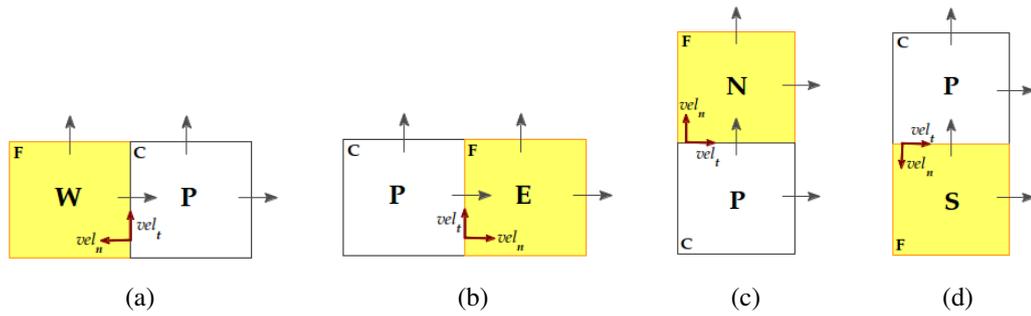


Figura 4.12: Condição CIPR

onde  $vel_I$  representa a velocidade de injeção prescrita. As possíveis situações a serem observadas são apresentadas na Figura 4.12, e com base nestes, a discretização da condição CIPR é

(a)

$$vel_t = \frac{v|_{nww} + v|_n}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad v|_{nww} = -v|_n$$

$$vel_n = u|_w = vel_I \quad \Rightarrow \quad u|_w = vel_I$$

(b)

$$vel_t = \frac{v|_n + v|_{nee}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad v|_{nee} = -v|_n$$

$$vel_n = u|_e = vel_I \quad \Rightarrow \quad u|_e = vel_I$$

(c)

$$vel_t = \frac{u|_e + u|_{nne}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad u|_{nne} = -u|_e$$

$$vel_n = v|_n = vel_I \quad \Rightarrow \quad v|_n = vel_I$$

(d)

$$vel_t = \frac{u|_e + u|_{sse}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad u|_{sse} = -u|_e$$

$$vel_n = v|_s = vel_I \quad \Rightarrow \quad v|_s = vel_I$$

A condição de ejeção prescrita é dada por

$$vel_t = 0 \quad \text{e} \quad vel_n = vel_E, \quad (4.29)$$

com  $vel_E$  representando a velocidade de ejeção prescrita. Os casos possíveis são representados na Figura 4.13. A discretização da condição CEPR é

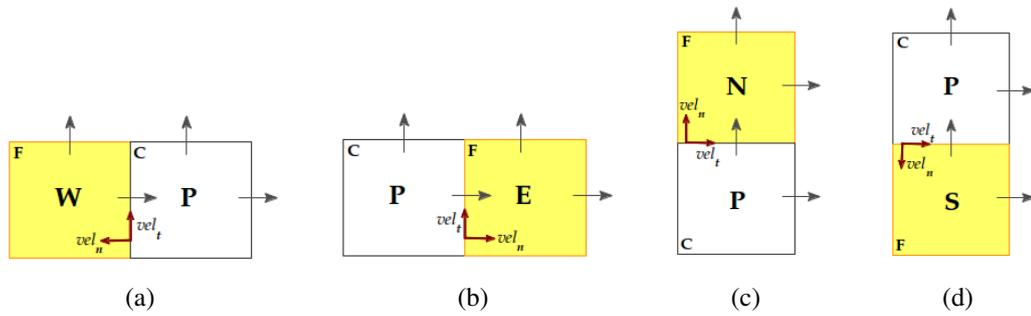


Figura 4.13: Condição CEPR

(a)

$$vel_t = \frac{v|_{nww} + v|_n}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad v|_{nww} = -v|_n$$

$$vel_n = u|_w = vel_E \quad \Rightarrow \quad u|_w = vel_E$$

(b)

$$vel_t = \frac{v|_n + v|_{nee}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad v|_{nee} = -v|_n$$

$$vel_n = u|_e = vel_E \quad \Rightarrow \quad u|_e = vel_E$$

(c)

$$vel_t = \frac{u|_e + u|_{nne}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad u|_{nne} = -u|_e$$

$$vel_n = v|_n = vel_E \quad \Rightarrow \quad v|_n = vel_E$$

(d)

$$vel_t = \frac{u|_e + u|_{sse}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad u|_{sse} = -u|_e$$

$$vel_n = v|_s = vel_E \quad \Rightarrow \quad v|_s = vel_E$$

A condição de ejeção contínua é indicada por

$$\frac{\partial}{\partial n}(vel_t) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial n}(vel_n) = 0. \quad (4.30)$$

Na Figura 4.14 são apresentados os possíveis casos identificados para esta condição.

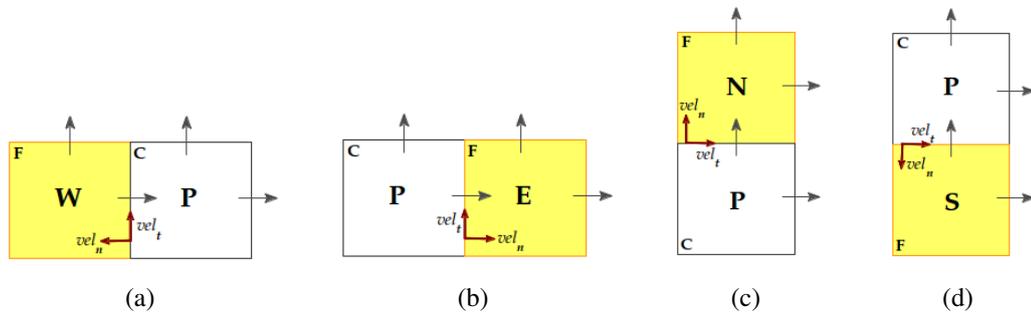


Figura 4.14: Condição CECO

Assim, a discretização da condição CECO é dada por

(a)

$$\frac{\partial}{\partial n}(vel_t) = \frac{v|_{mww} - v|_n}{\Delta\xi} = 0 \quad \Rightarrow \quad v|_{mww} = v|_n$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(vel_n) = \frac{u|_e - u|_w}{\Delta\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad u|_e = u|_w$$

(b)

$$\frac{\partial}{\partial n}(vel_t) = \frac{v|_{nee} - v|_n}{\Delta\xi} = 0 \quad \Rightarrow \quad v|_{nee} = v|_n$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(vel_n) = \frac{u|_{eee} - u|_e}{\Delta\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad u|_{eee} = u|_w$$

(c)

$$\frac{\partial}{\partial n}(vel_t) = \frac{u|_{nne} - u|_e}{\Delta\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad u|_{nne} = u|_e$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(vel_n) = \frac{v|_{nnn} - v|_n}{\Delta\xi} = 0 \quad \Rightarrow \quad v|_{nnn} = v|_n$$

(d)

$$\frac{\partial}{\partial n}(vel_t) = \frac{u|_{sse} - u|_e}{\Delta\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad u|_{sse} = u|_e$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(vel_n) = \frac{v|_n - v|_s}{\Delta\xi} = 0 \quad \Rightarrow \quad v|_n = v|_s$$

Para a pressão, a condição de contorno é tomada como

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad (4.31)$$

que, conforme apresentado na Figura 4.15, pode ser interpretada da seguinte forma

$$P_W = P_P \text{ em } \Gamma_1, \quad P_E = P_P \text{ em } \Gamma_2, \quad P_S = P_P \text{ em } \Gamma_3, \quad P_N = P_P \text{ em } \Gamma_4.$$

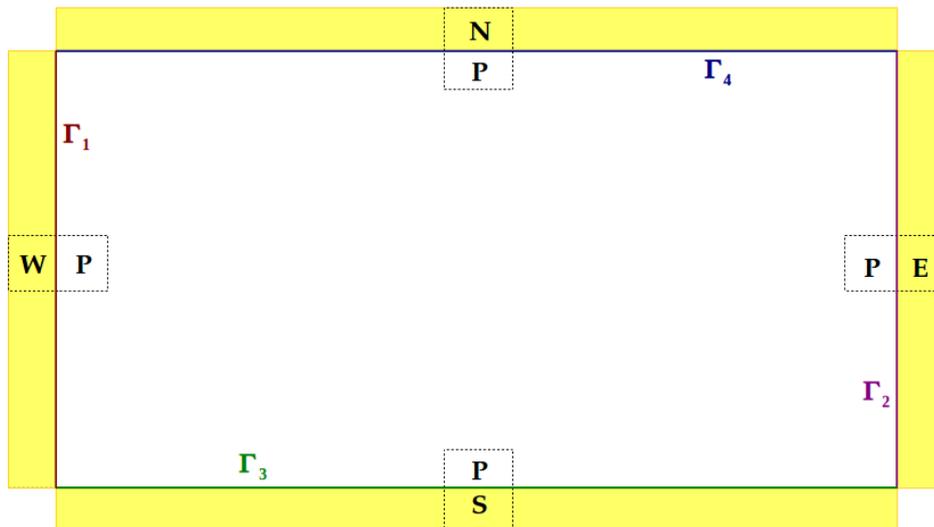


Figura 4.15: Condição de contorno para a pressão

## Capítulo 5

# MODELO NUMÉRICO PARA ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS

Considerando as aproximações por diferenças finitas, efetuadas nos termos das equações de Navier-Stokes – equações (4.9) e (4.10) –, dedicamos especial atenção nesse capítulo ao procedimento numérico de cálculos do escoamento de fluidos incompressíveis.

Entre as várias técnicas numéricas existentes, tais como método dos painéis [34], método de vórtices [37], formulação vorticidade-velocidade [54] e MAC, escolhemos esta última – *Marker and cell* –, formulada por Harlow e Welch por volta de 1965. Originalmente esta técnica foi desenvolvida para a simulação de escoamentos bidimensionais com superfície livre, mas com a ressalva de poder ser utilizada no estudo de uma ampla variedade de problemas bidimensionais em coordenadas cartesianas, com a possibilidade de ser adaptada para outros sistemas de coordenadas e situações tridimensionais [52].

Em nosso trabalho deduzimos o método MAC simplificado para escoamentos confinados, ou seja, sem a existência de superfície livre. Com esta ação, desconsideramos toda a dedução de movimento de partículas marcadoras inerentes ao método, o que resulta na simplificação dos cálculos numéricos. A dedução do método MAC é apresentada no que segue.

Partindo da equação de quantidade de movimento na direção  $\xi$ , equação (4.9), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{u}{J} \right) = & - \underbrace{\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (Uu) + \frac{\partial}{\partial \eta} (Vu) \right\}}_{\mathcal{E}(u)} + \frac{1}{\rho} \underbrace{\left\{ \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right\}}_{\mathcal{P}^u} \\ & + \underbrace{\nu \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right) \right\}}_{\mathcal{V}(u)}, \quad (5.1) \end{aligned}$$

então a discretização da mesma na aresta  $e$ , para toda célula no interior do domínio, no nível de tempo  $k$ , tendo em vista a expressão (4.11), é dada por

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{u}{J} \right) \Big|_e^k \approx \frac{1}{J_e} \left( \frac{u|_e^{k+1} - u|_e^k}{\Delta \tau} \right) = -\mathcal{C}(u)|_e^k + \frac{1}{\rho} \mathcal{P}^u|_e^{k+1} + \nu \mathcal{V}(u)|_e^k$$

ou seja, a componente cartesiana  $u$  do vetor velocidade fica

$$u|_e^{k+1} = J_e \Delta \tau [-\mathcal{C}(u)|_e^k + \nu \mathcal{V}(u)|_e^k] + \frac{J_e \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^u|_e^{k+1} + u|_e^k,$$

que pode ser escrita por

$$u|_e^{k+1} = F|_e^k + \frac{J_e \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^u|_e^{k+1} \quad (5.2)$$

onde

$$F|_e^k = J_e \Delta \tau [-\mathcal{C}(u)|_e^k + \nu \mathcal{V}(u)|_e^k] + u|_e^k. \quad (5.3)$$

Procedendo de modo análogo para as demais arestas, a discretização de (5.1) resulta em

$$u|_w^{k+1} = F|_w^k + \frac{J_w \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^u|_w^{k+1}, \quad (5.4)$$

$$u|_n^{k+1} = F|_n^k + \frac{J_n \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^u|_n^{k+1}, \quad (5.5)$$

$$u|_s^{k+1} = F|_s^k + \frac{J_s \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^u|_s^{k+1}, \quad (5.6)$$

com

$$F|_w^k = J_w \Delta \tau [-\mathcal{C}(u)|_w^k + \nu \mathcal{V}(u)|_w^k] + u|_w^k, \quad (5.7)$$

$$F|_n^k = J_n \Delta \tau [-\mathcal{C}(u)|_n^k + \nu \mathcal{V}(u)|_n^k] + u|_n^k, \quad (5.8)$$

$$F|_s^k = J_s \Delta \tau [-\mathcal{C}(u)|_s^k + \nu \mathcal{V}(u)|_s^k] + u|_s^k. \quad (5.9)$$

Analogamente, para a equação da quantidade de movimento na direção  $\eta$ , equação (4.10), reescrita como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{v}{J} \right) &= - \underbrace{\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (Uv) + \frac{\partial}{\partial \eta} (Vv) \right\}}_{\mathcal{E}(v)} + \frac{1}{\rho} \underbrace{\left\{ \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right\}}_{\mathcal{P}^v} \\
&+ \underbrace{\nu \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial v}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial v}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \right) \right\}}_{\mathcal{V}(v)} \quad (5.10)
\end{aligned}$$

a discretização na aresta  $n$  no nível de tempo  $k$  considerando a expressão (4.12) é dada por

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{v}{J} \right) \Big|_n^k = \frac{1}{J_n} \left( \frac{v|_n^{k+1} - v|_n^k}{\Delta \tau} \right) = -\mathcal{E}(v)|_n^k + \frac{1}{\rho} \mathcal{P}^v|_n^{k+1} + \nu \mathcal{V}(v)|_n^k$$

de onde podemos escrever

$$v|_n^{k+1} = J_n \Delta \tau \left[ -\mathcal{E}(v)|_n^k + \nu \mathcal{V}(v)|_n^k \right] + \frac{J_n \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^v|_n^{k+1} + v|_n^k,$$

que na forma compacta torna-se

$$v|_n^{k+1} = G|_n^k + \frac{J_n \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^v|_n^{k+1} \quad (5.11)$$

sendo

$$G|_n^k = J_n \Delta \tau \left[ -\mathcal{E}(v)|_n^k + \nu \mathcal{V}(v)|_n^k \right] + v|_n^k. \quad (5.12)$$

Da mesma forma, segue para as demais arestas que

$$v|_s^{k+1} = G|_s^k + \frac{J_s \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^v|_s^{k+1}, \quad (5.13)$$

$$v|_e^{k+1} = G|_e^k + \frac{J_e \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^v|_e^{k+1}, \quad (5.14)$$

$$v|_w^{k+1} = G|_w^k + \frac{J_w \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^v|_w^{k+1}, \quad (5.15)$$

sendo

$$G|_s^k = J_s \Delta \tau \left[ -\mathcal{E}(v)|_s^k + \nu \mathcal{V}(v)|_s^k \right] + v|_s^k, \quad (5.16)$$

$$G|_e^k = J_e \Delta \tau \left[ -\mathcal{E}(v)|_e^k + \nu \mathcal{V}(v)|_e^k \right] + v|_e^k, \quad (5.17)$$

$$G|_w^k = J_w \Delta \tau [-\mathcal{C}(v)|_w^k + \nu \mathcal{V}(v)|_w^k] + v|_w^k. \quad (5.18)$$

Neste trabalho o nosso foco não é o estudo de aproximações temporais, por isso selecionamos o método Euler explícito para esse fim por ser eficiente e por sua implementação ser mais simples, pois utiliza apenas soluções obtidas em um passo de tempo anterior para o cálculo da solução no tempo atual [16].

Considerando as expressões (3.53) e (3.54) que caracterizam as componentes contravariantes  $U$  e  $V$ , respectivamente, e tendo em vista as expressões (5.2), (5.4)-(5.6), (5.11) e (5.13)-(5.15), obtemos

$$\begin{aligned} U|_e^{k+1} &= u|_e^{k+1} \frac{\partial y}{\partial \eta}|_e - v|_e^{k+1} \frac{\partial x}{\partial \eta}|_e \\ &= \left( F|_e^k + \frac{J_e \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^u|_e^{k+1} \right) \frac{\partial y}{\partial \eta}|_e - \left( G|_e^k + \frac{J_e \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^v|_e^{k+1} \right) \frac{\partial x}{\partial \eta}|_e, \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} U|_w^{k+1} &= u|_w^{k+1} \frac{\partial y}{\partial \eta}|_w - v|_w^{k+1} \frac{\partial x}{\partial \eta}|_w \\ &= \left( F|_w^k + \frac{J_w \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^u|_w^{k+1} \right) \frac{\partial y}{\partial \eta}|_w - \left( G|_w^k + \frac{J_w \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^v|_w^{k+1} \right) \frac{\partial x}{\partial \eta}|_w, \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} V|_n^{k+1} &= -u|_n^{k+1} \frac{\partial y}{\partial \xi}|_n + v|_n^{k+1} \frac{\partial x}{\partial \xi}|_n \\ &= - \left( F|_n^k + \frac{J_n \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^u|_n^{k+1} \right) \frac{\partial y}{\partial \xi}|_n + \left( G|_n^k + \frac{J_n \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^v|_n^{k+1} \right) \frac{\partial x}{\partial \xi}|_n, \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} V|_s^{k+1} &= -u|_s^{k+1} \frac{\partial y}{\partial \xi}|_s + v|_s^{k+1} \frac{\partial x}{\partial \xi}|_s \\ &= - \left( F|_s^k + \frac{J_s \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^u|_s^{k+1} \right) \frac{\partial y}{\partial \xi}|_s + \left( G|_s^k + \frac{J_s \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^v|_s^{k+1} \right) \frac{\partial x}{\partial \xi}|_s. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Destacamos que a formulação  $UV$  para a velocidade é dada pelo conjunto de equações (5.19)-(5.22), sendo necessária para que possamos fazer o balanço de massa para cada célula do domínio. O balanço de massa decorre da equação da continuidade (3.55), com a mesma estando escrita no sistema de coordenadas generalizadas.

Agora observe que do produto do termo de pressão pela métrica, encontrado no segundo membro de (5.19), juntamente com as expressões (4.17) e (4.18), resulta que

$$\begin{aligned}
& \mathcal{P}^u|_e^{k+1} \frac{\partial y}{\partial \eta}|_e - \mathcal{P}^v|_e^{k+1} \frac{\partial x}{\partial \eta}|_e \\
&= \left\{ \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right\} \Big|_e^{k+1} \frac{\partial y}{\partial \eta}|_e - \left\{ \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right\} \Big|_e^{k+1} \frac{\partial x}{\partial \eta}|_e \\
&= - \frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_e^{k+1} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \Big|_e^2 + \frac{\partial x}{\partial \eta} \Big|_e^2 \right) + \frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_e^{k+1} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \Big|_e \frac{\partial y}{\partial \eta} \Big|_e + \frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_e \frac{\partial x}{\partial \eta} \Big|_e \right) \\
&= - \frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_e^{k+1} \alpha|_e + \frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_e^{k+1} \beta|_e,
\end{aligned}$$

com  $\alpha$  e  $\beta$  dados por (2.6) e (2.7), respectivamente. Para as demais arestas, considerando (2.6)-(2.8) e (4.17)-(4.18), segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^u|_w^{k+1} \frac{\partial y}{\partial \eta}|_w - \mathcal{P}^v|_w^{k+1} \frac{\partial x}{\partial \eta}|_w &= - \frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_w^{k+1} \alpha|_w + \frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_w^{k+1} \beta|_w, \\
- \mathcal{P}^u|_n^{k+1} \frac{\partial y}{\partial \xi}|_n + \mathcal{P}^v|_n^{k+1} \frac{\partial x}{\partial \xi}|_n &= \frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_n^{k+1} \beta|_n - \frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_n^{k+1} \gamma|_n, \\
- \mathcal{P}^u|_s^{k+1} \frac{\partial y}{\partial \xi}|_s + \mathcal{P}^v|_s^{k+1} \frac{\partial x}{\partial \xi}|_s &= \frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_s^{k+1} \beta|_s - \frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_s^{k+1} \gamma|_s.
\end{aligned}$$

Portanto, a forma compacta para as componentes contravariantes é dada por

$$U|_e^{k+1} = F|_e^k \frac{\partial y}{\partial \eta}|_e - G|_e^k \frac{\partial x}{\partial \eta}|_e + \frac{J_e \Delta \tau}{\rho} \left\{ - \frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_e^{k+1} \alpha|_e + \frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_e^{k+1} \beta|_e \right\}, \quad (5.23)$$

$$U|_w^{k+1} = F|_w^k \frac{\partial y}{\partial \eta}|_w - G|_w^k \frac{\partial x}{\partial \eta}|_w + \frac{J_w \Delta \tau}{\rho} \left\{ - \frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_w^{k+1} \alpha|_w + \frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_w^{k+1} \beta|_w \right\}, \quad (5.24)$$

$$V|_n^{k+1} = -F|_n^k \frac{\partial y}{\partial \xi}|_n + G|_n^k \frac{\partial x}{\partial \xi}|_n + \frac{J_n \Delta \tau}{\rho} \left\{ \frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_n^{k+1} \beta|_n - \frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_n^{k+1} \gamma|_n \right\}, \quad (5.25)$$

$$V|_s^{k+1} = -F|_s^k \frac{\partial y}{\partial \xi}|_s + G|_s^k \frac{\partial x}{\partial \xi}|_s + \frac{J_s \Delta \tau}{\rho} \left\{ \frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_s^{k+1} \beta|_s - \frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_s^{k+1} \gamma|_s \right\}. \quad (5.26)$$

Considerando a equação da continuidade em coordenadas generalizadas, apresentada em (3.55), e aproximando-a por diferenças finitas do tipo central no ponto cardinal  $P$ , da célula hachurada da Figura 4.1(a), no nível de tempo  $k + 1$ , obtemos

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} \Big|_P^{k+1} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \Big|_P^{k+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{U|_e^{k+1} - U|_w^{k+1}}{\Delta \xi} + \frac{V|_n^{k+1} - V|_s^{k+1}}{\Delta \eta} = 0$$

ou ainda

$$U|_e^{k+1} - U|_w^{k+1} + V|_n^{k+1} - V|_s^{k+1} = 0. \quad (5.27)$$

Como as expressões para  $U|_e^{k+1}$ ,  $U|_w^{k+1}$ ,  $V|_n^{k+1}$  e  $V|_s^{k+1}$  já foram obtidas – (5.23) à (5.26) –, substituindo estas igualdades em (5.27) e agrupando os termos semelhantes em um mesmo lado da igualdade, encontramos

$$\begin{aligned} & J_e \left\{ -\frac{\partial p}{\partial \xi}|_e^{k+1} \alpha|_e + \frac{\partial p}{\partial \eta}|_e^{k+1} \beta|_e \right\} + J_w \left\{ \frac{\partial p}{\partial \xi}|_w^{k+1} \alpha|_w - \frac{\partial p}{\partial \eta}|_w^{k+1} \beta|_w \right\} \\ & + J_n \left\{ \frac{\partial p}{\partial \xi}|_n^{k+1} \beta|_n - \frac{\partial p}{\partial \eta}|_n^{k+1} \gamma|_n \right\} + J_s \left\{ -\frac{\partial p}{\partial \xi}|_s^{k+1} \beta|_s + \frac{\partial p}{\partial \eta}|_s^{k+1} \gamma|_s \right\} \\ & = \left[ -F|_e^k \frac{\partial y}{\partial \eta}|_e + G|_e^k \frac{\partial x}{\partial \eta}|_e + F|_w^k \frac{\partial y}{\partial \eta}|_w - G|_w^k \frac{\partial x}{\partial \eta}|_w \right] \frac{\rho}{\Delta \tau} \\ & + \left[ F|_n^k \frac{\partial y}{\partial \xi}|_n - G|_n^k \frac{\partial x}{\partial \xi}|_n - F|_s^k \frac{\partial y}{\partial \xi}|_s + G|_s^k \frac{\partial x}{\partial \xi}|_s \right] \frac{\rho}{\Delta \tau} \end{aligned} \quad (5.28)$$

e denotando o segundo membro de (5.28) como

$$\begin{aligned} & -F|_e^k \frac{\partial y}{\partial \eta}|_e + G|_e^k \frac{\partial x}{\partial \eta}|_e + F|_w^k \frac{\partial y}{\partial \eta}|_w - G|_w^k \frac{\partial x}{\partial \eta}|_w \\ & + F|_n^k \frac{\partial y}{\partial \xi}|_n - G|_n^k \frac{\partial x}{\partial \xi}|_n - F|_s^k \frac{\partial y}{\partial \xi}|_s + G|_s^k \frac{\partial x}{\partial \xi}|_s = FG|_k \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} & J_e \left\{ -\frac{\partial p}{\partial \xi}|_e^{k+1} \alpha|_e + \frac{\partial p}{\partial \eta}|_e^{k+1} \beta|_e \right\} + J_w \left\{ \frac{\partial p}{\partial \xi}|_w^{k+1} \alpha|_w - \frac{\partial p}{\partial \eta}|_w^{k+1} \beta|_w \right\} \\ & + J_n \left\{ \frac{\partial p}{\partial \xi}|_n^{k+1} \beta|_n - \frac{\partial p}{\partial \eta}|_n^{k+1} \gamma|_n \right\} + J_s \left\{ -\frac{\partial p}{\partial \xi}|_s^{k+1} \beta|_s + \frac{\partial p}{\partial \eta}|_s^{k+1} \gamma|_s \right\} = FG|_k \frac{\rho}{\Delta \tau}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

A equação (5.29) é a equação da evolução da pressão. Esta equação satisfaz a equação da continuidade (3.55) e, além disso, quando resolvida e inserida nas equações de Navier-Stokes (5.1) e (5.10) permite que as equações do movimento sejam atualizadas.

A seguir é apresentado um algoritmo que caracteriza o método MAC utilizado neste modelo numérico.

---

**Algorithm 1** Algoritmo do método MAC-Generalizado
 

---

Tome  $\tau = 0, \Delta\tau, u = u_0, v = v_0, p = p_0, U = U_0, V = V_0$

**procedure** ALOCAÇÃO DE MEMÓRIA

**end procedure**

**procedure** LEITURA DOS PONTOS DA MALHA

**end procedure**

Inicializa  $k = 0$

**procedure** CONDIÇÕES INICIAIS

**end procedure**

**procedure** CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA A VELOCIDADE  
*equações (4.25), (4.26), (4.27), (4.28), (4.29) e (4.30)*

**end procedure**

**procedure** GRAVAÇÃO =  $(u^0, v^0, p^0)$

**end procedure**

**while**  $\tau < \tau_{final}$  **do**

**procedure** CONVECTIVO =  $(\mathcal{C}(u)|^k, \mathcal{C}(v)|^k)$   
   *equações (4.13) e (4.14)*

**end procedure**

**procedure** DIFUSIVO =  $(\mathcal{V}(u)|^k, \mathcal{V}(v)|^k)$   
   *equações (4.19) e (4.20)*

**end procedure**

**procedure** FG =  $(F|^k, G|^k)$   
   *equações (5.3), (5.7), (5.8), (5.9), (5.12), (5.16), (5.17) e (5.18)*

**end procedure**

$\tau = \tau + \Delta\tau$

**procedure** PRESSÃO =  $(p|^{k+1})$   
   *equação (5.29)*

**procedure** CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA A PRESSÃO  
   *equação (4.31)*

**end procedure**

**end procedure**

**procedure** VELOCIDADE =  $(\mathcal{P}^u|^{k+1}, \mathcal{P}^v|^{k+1}, u|^{k+1}, v|^{k+1}, U|^{k+1}, V|^{k+1})$   
   *equações (4.17) e (4.18)*  
   *equações (5.2), (5.4), (5.5), (5.6), (5.11), (5.13), (5.14) e (5.15)*  
   *equações (5.19), (5.20), (5.21) e (5.22)*

**end procedure**

**procedure** CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA A VELOCIDADE  
   *equações (4.25), (4.26), (4.27), (4.28), (4.29) e (4.30)*

**end procedure**

**procedure** GRAVAÇÃO =  $(u^{k+1}, v^{k+1}, p^{k+1})$

**end procedure**

$k = k + 1$

**end while**

---

## Capítulo 6

# RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo apresentamos os resultados numéricos obtidos a partir da versão simplificada do método MAC – apresentada no capítulo 5 –, com base nas discretizações contidas na seção 4.2 do capítulo 4. Para os problemas estudados consideramos escoamentos laminares, incompressíveis e isotérmicos, de acordo com as expressões (3.51) e (3.52) determinadas no capítulo 3.

O primeiro problema estudado refere-se ao escoamento entre duas placas paralelas, o segundo trata sobre o escoamento em uma cavidade quadrada com parede superior em movimento e o terceiro retrata o problema do escoamento em um duto contendo placas de orifício. Além de validar o método, estes problemas também são utilizados na verificação da capacidade do mesmo em representar situações verificadas teoricamente ou por meio de experimentos, além de indicar que o método pode ser uma alternativa para a resolução de problemas que poderiam ser resolvidos diretamente segundo o sistema de coordenadas cartesianas.

O quarto problema estudado refere-se à aterosclerose. Com este, nosso objetivo é apresentar o funcionamento do método na resolução de problemas cujas geometrias não poderiam ser representadas adequadamente por meio do sistema de coordenadas cartesianas.

### 6.1 ESCOAMENTO ENTRE DUAS PLACAS PARALELAS

Neste problema consideramos uma geometria em formato retangular com altura de medida  $H$  e comprimento  $L = 8H$ , conforme Figura 6.1.

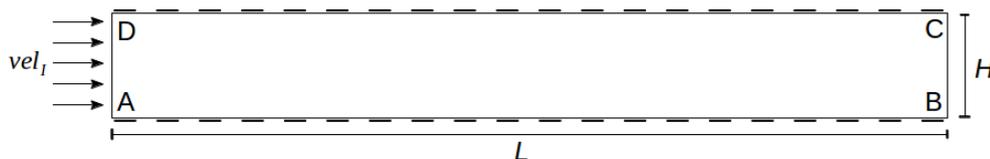


Figura 6.1: Dimensões da geometria do problema do escoamento laminar entre duas placas paralelas [5]

O fluido, com  $Re = 100$ , é injetado para o interior da geometria por meio da aresta

$AD$  com uma velocidade de injeção prescrita dada por  $vel_I = 1.0 \text{ m/s}$  perpendicular à aresta, as placas são indicadas pelas arestas  $AB$  e  $CD$  e há saída do fluido pela aresta  $BC$ . O objetivo é comparar os resultados obtidos com os apresentados por [5] para verificação do método numérico. Note que este problema poderia ser resolvido considerando um método baseado no sistema de coordenadas cartesianas, no entanto utilizamos o método em coordenadas generalizadas para a verificação do funcionamento adequado do mesmo e para observar que ele também pode ser empregado na resolução de problemas em coordenadas cartesianas, já que este pode ser considerado um caso particular do sistema de coordenadas cartesianas.

Como condições iniciais a velocidade e a pressão são tomadas nulas. As condições de contorno consideradas são do tipo CIPR na aresta  $AD$ , CECO na aresta  $BC$  e CNEI nas arestas  $AB$  e  $CD$ .

Para o estudo do problema em questão foram realizadas cinco simulações, tomando  $H = 1 \text{ m}$ , entre as quais há variação da quantidade de linhas consideradas nas direções  $\xi$  e  $\eta$ , ou seja, variação no refinamento das malhas utilizadas. As características consideradas na geração de cada uma das malhas utilizadas são apresentadas na Tabela 6.1.

Malha	Número de linhas na direção $\xi$	Número de linhas na direção $\eta$
$P1$	9	5
$P2$	17	9
$P3$	33	17
$P4$	65	33
$P5$	129	65

Tabela 6.1: Descrição da quantidade de linhas consideradas na construção das malhas utilizadas

Na Figura 6.2 é apresentada a malha  $P1$  como exemplo, sendo as demais construídas buscando manter a mesma proporção entre a quantidade de células nas direções  $\xi$  e  $\eta$  em relação a esta.


Figura 6.2: Malha  $P1$

Para a geração das malhas referentes à este problema foi estipulada a realização de, no máximo, 1000 iterações, considerando um erro inferior a  $10^{-4}$ .

Para as simulações, o tempo final assumido foi igual a 30 (tempo em que o regime permanente foi atingido), considerando a realização de, no máximo,  $10^6$  iterações para

a obtenção da solução, com um erro mínimo de  $10^{-3}$ . Na resolução dos sistemas lineares obtidos utilizamos o método Gauss-Seidel. No estudo das malhas  $P1$  à  $P3$  foi considerado um  $\Delta\tau = 10^{-2}$ , enquanto que para  $P4$  e  $P5$  o  $\Delta\tau$  tomado foi igual a  $5 \cdot 10^{-3}$  para que houvesse convergência do método numérico e a solução pudesse ser obtida.

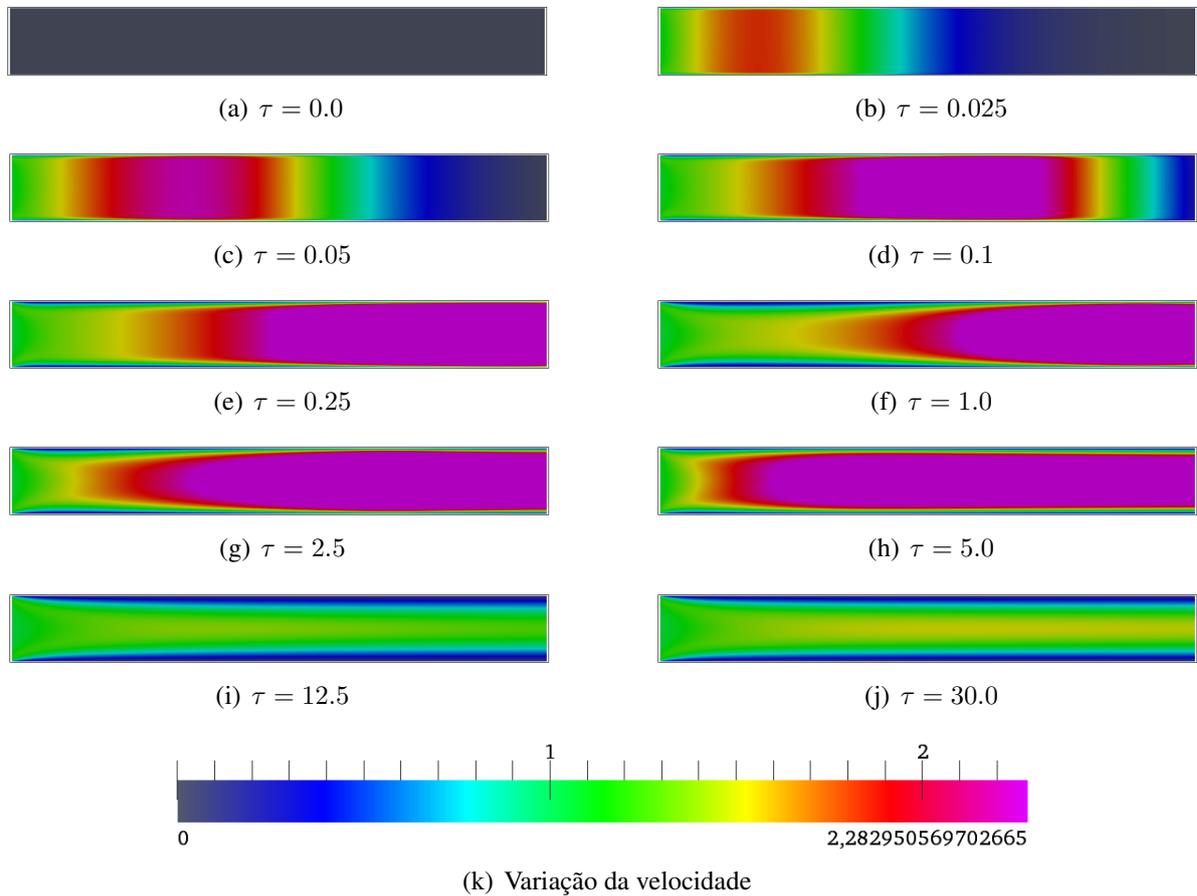
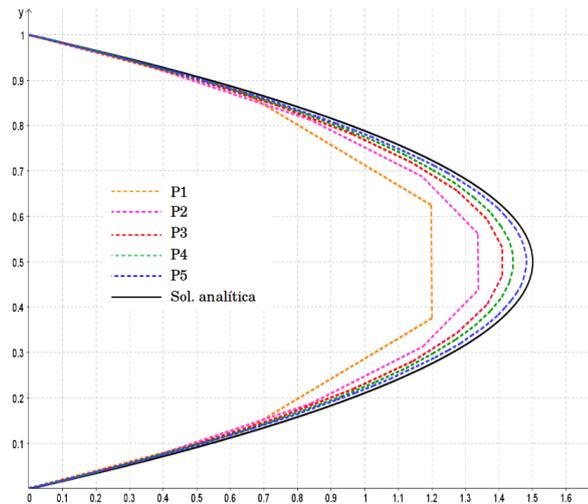


Figura 6.3: Perfis obtidos na resolução do problema de escoamento entre duas placas paralelas para alguns valores de  $\tau$

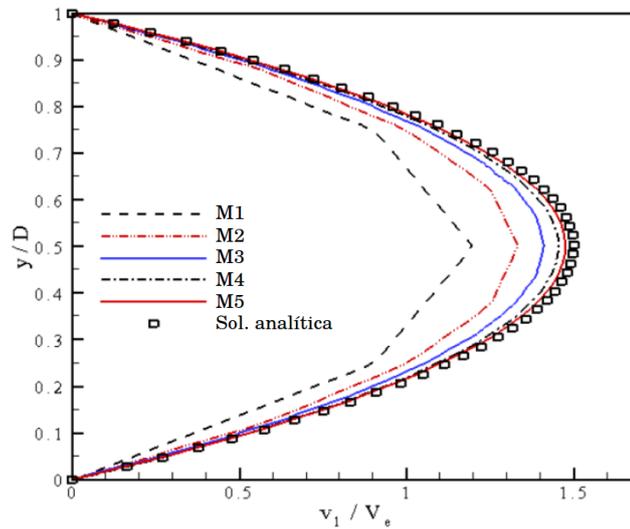
Alguns dos perfis obtidos para o campo de velocidade durante a simulação referente ao problema de escoamento entre duas placas paralelas, considerando a malha  $P5$ , podem ser observados nas Figuras 6.3(a)-(j). Note que no tempo inicial a velocidade em todos os pontos do domínio é igual a zero, por se tratar da condição inicial aplicada. Logo no início da simulação a velocidade assume valores próximos de  $1.5 \text{ m/s}$ , porém, com o decorrer do tempo, nas regiões próximas às placas, ela é reduzida e apenas no centro do duto aproxima-se do valor máximo alcançado. Ao atingir o regime permanente podemos observar que a velocidade máxima é atingida no centro do duto e próximo às fronteiras superior e inferior a velocidade é nula por causa da condição de contorno imposta no início do estudo.

Nas Figuras 6.4(a) e 6.4(b) são apresentados os perfis de velocidade<sup>1</sup> na seção de

<sup>1</sup>Neste caso estamos analisando apenas a componente  $u$  da velocidade por esta ser perpendicular à aresta por onde há saída de fluido do domínio.



(a) Obtido neste trabalho



(b) Apresentado por [5]

Figura 6.4: Perfil de velocidade na seção de saída para o escoamento entre duas placas paralelas

saída, na aresta  $BC$ , para as malhas consideradas na Tabela 6.1, pelo presente trabalho, e por [5], respectivamente. É importante ressaltar que em [5]  $D = 1$ , logo  $y/D = y$  e assim, os valores descritos no eixo das ordenadas em ambos os gráficos correspondem à mesma variável  $y$ . Da mesma forma, como no trabalho tomado como referência  $v_e = 1$  e  $v_l$ , que representa a chamada velocidade da corrente livre, descreve a componente da velocidade na direção  $x$  – que em nosso caso corresponde à componente  $u$  – então os eixos das abscissas também correspondem à mesma variável. Assim, podemos comparar os gráficos apresentados nas figuras 6.4(a) e 6.4(b), pois ambos descrevem uma mesma relação – entre a variação dos valores assumidos pela componente  $u$  da velocidade e os valores assumidos por  $y$ .

A existência de solução analítica, neste caso, permite uma análise mais precisa do funcionamento do método proposto neste trabalho. Analisando o gráfico 6.4(a) podemos observar que quanto maior o refinamento da malha, melhores são os resultados obtidos. Na malha

$P_5$ , por exemplo, o máximo valor encontrado para a velocidade é igual a  $1.4814 \text{ m/s}$ , enquanto que a máxima velocidade analítica encontrada em  $y = 0.5$  é igual a  $1.50 \text{ m/s}$  [5]. Ao compararmos os perfis obtidos pelo método proposto neste trabalho e por [5] é possível observar que houve uma maior aproximação da solução analítica no presente do que em [5], pois neste último a velocidade máxima encontrada foi de  $1.4756 \text{ m/s}$ .

Malhas	$V_{l_{num}}$	$h_x$	$h_y$	$h_x \times h_y$	$Erro =  1.5 - V_{l_{num}} $
$P_1$	1.1999	1.0	0.25	0.25	0.3001
$P_2$	1.3380	0.5	0.125	0.0625	0.1620
$P_3$	1.4158	0.25	0.0625	0.015625	0.0842
$P_4$	1.4498	0.125	0.03125	0.00390625	0.0502
$P_5$	1.5068	0.0625	0.015625	0.0009765625	0.0068

Tabela 6.2: Indicativo de convergência via velocidade da corrente livre numérica  $V_{l_{num}}$

Na Tabela 6.2 é mostrado que o refinamento da malha ( $h_x$  e  $h_y$ ) implica em tomarmos cada vez mais elementos de menor área no domínio ( $h_x \times h_y$ ), que por sua vez, implica em obter diferentes valores para a velocidade da corrente livre calculada numericamente<sup>2</sup> ( $V_{l_{num}}$ ). Com refinamentos sucessivos o erro calculado entre as velocidades  $1.5$  e  $V_{l_{num}}$  tende a zero. Então há evidentemente um processo de convergência para a velocidade teórica, ou seja, a malha não interfere na obtenção da solução, pois a redução na área dos elementos que compõem a malha implica na diminuição do erro de forma monotônica.

## 6.2 ESCOAMENTO EM CAVIDADE COM PAREDE SUPERIOR EM MOVIMENTO

O problema do escoamento de um fluido forçado pelo movimento de uma parede em uma cavidade é muito utilizado para a avaliação de algoritmos numéricos para as equações de Navier-Stokes [22].

Neste problema consideramos uma cavidade quadrada totalmente preenchida por fluido na qual a parede superior está em movimento, com uma velocidade de  $1 \text{ m/s}$ , e as demais fixas. As dimensões da cavidade são iguais a  $1 \text{ m}$  e sua geometria pode ser observada na Figura 6.5(a). Para a construção da malha utilizada neste estudo consideramos a mesma quantidade de linhas nas direções  $\xi$  e  $\eta$ , assim, as células que compõem a malha tem formato quadrado. Por exemplo, para a construção da malha apresentada na Figura 6.5(b) consideramos os números totais de linhas nas direções  $\xi$  e  $\eta$  iguais a 10. Os resultados obtidos para este problema são comparados aos apresentados por [5] e [29].

<sup>2</sup>A velocidade da corrente livre é aquela presente na linha de centro do domínio, em torno de  $y = 0.5$ , sobre a qual podemos considerar que não há influência das condições de contorno impostas sobre as fronteiras inferior e superior.

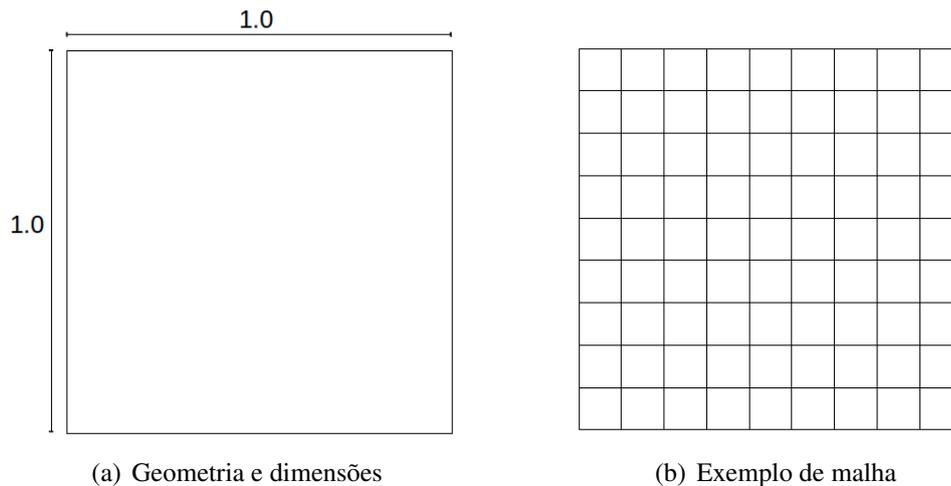


Figura 6.5: Escoamento em cavidade com parede superior em movimento

Neste problema o estudo foi desenvolvido a partir de uma malha com 129 linhas nas direções  $\xi$  e  $\eta$  e, assim como no problema anterior, para a geração da mesma foi estipulada a realização de, no máximo, 1000 iterações, considerando um erro inferior a  $10^{-4}$ .

Foram feitas três simulações considerando números de Reynolds iguais a 100, 400 e 1000. Os dados obtidos a partir dos dois primeiros casos são comparados numericamente aos apresentados em [5] e para o terceiro, comparados graficamente aos obtidos por [29].

Como condições iniciais a velocidade e a pressão são tomadas nulas. As condições de contorno consideradas são do tipo CLES na parede superior, considerando uma velocidade de escorregamento igual a  $1 \text{ m/s}$ , e CNEI nas demais fronteiras.

Para as simulações o tempo final assumido foi igual a 50, considerando a realização de, no máximo,  $10^6$  iterações para a obtenção da solução, com um erro mínimo de  $10^{-3}$ . Na resolução dos sistemas lineares obtidos utilizamos o método Gauss-Seidel. Além disso, consideramos  $\Delta\tau = 10^{-3}$  para que houvesse convergência do método numérico e a solução pudesse ser obtida.

A variação dos módulos da velocidade, obtidos após o regime permanente ser atingido, nas três simulações realizadas, podem ser observados nos campos de velocidades apresentados nas Figuras 6.6(a)-(c). Nas figuras apresentadas podemos verificar a formação de uma região na cor azul escuro próxima ao centro do domínio, na qual a velocidade é próxima ou igual a zero. Ao redor desta, a velocidade atingida é maior que zero. Com a variação do número de Reynolds utilizado há variação na localização da região. Após analisarmos o campo de velocidades considerando a direção do escoamento por meio de vetores, conforme apresentado nas Figuras 6.7(a)-(c), podemos observar que a região na cor azul escuro, próxima ao centro do domínio, representa a formação de um vórtice primário<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Neste estudo estamos considerando o vórtice primário como sendo aquele que possui maiores dimensões, formado próximo ao centro do domínio. Os demais vórtices formados são chamados de vórtices secundários.

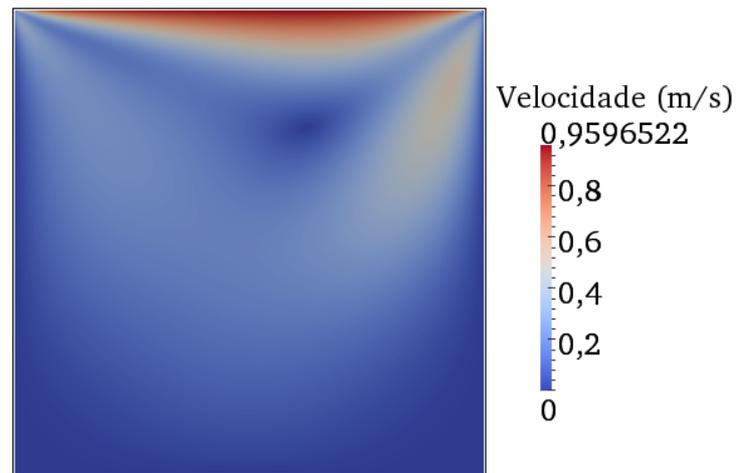
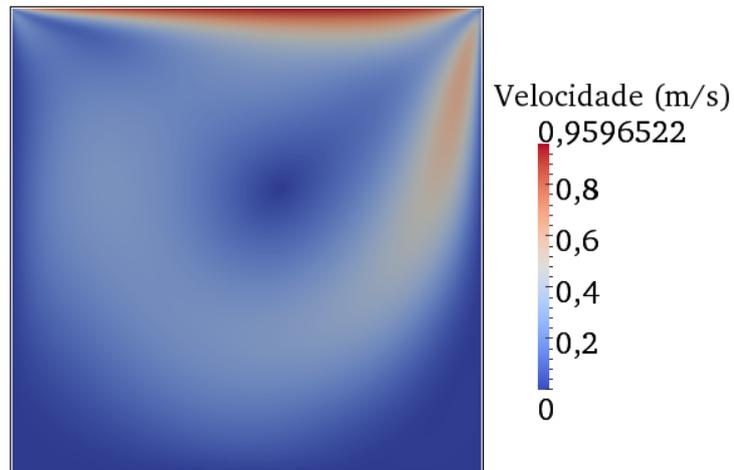
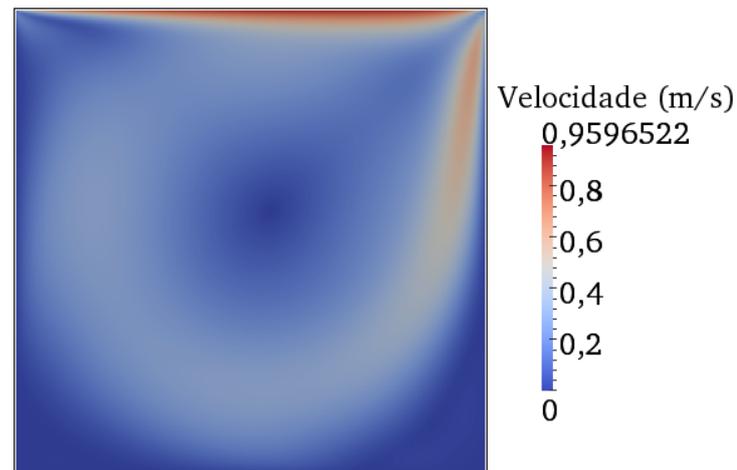
(a)  $Re = 100$ (b)  $Re = 400$ (c)  $Re = 1000$ 

Figura 6.6: Campos de velocidades obtidos na resolução do problema da cavidade no regime permanente

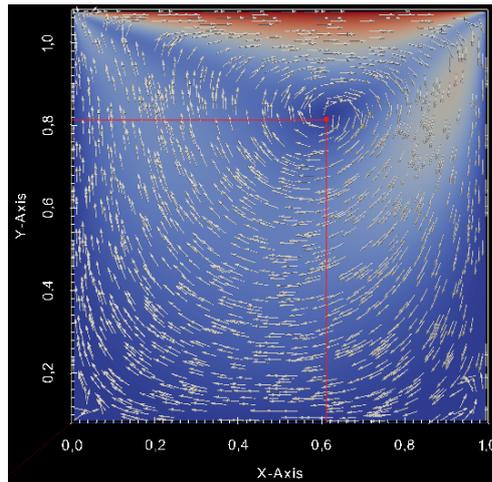
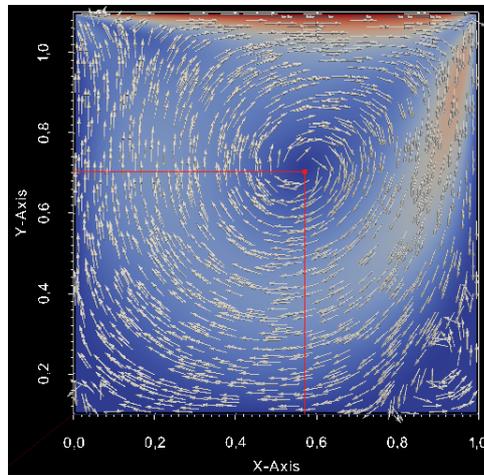
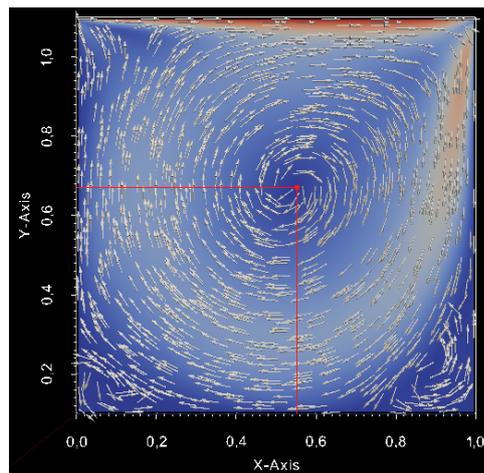
(a)  $Re = 100$ (b)  $Re = 400$ (c)  $Re = 1000$ 

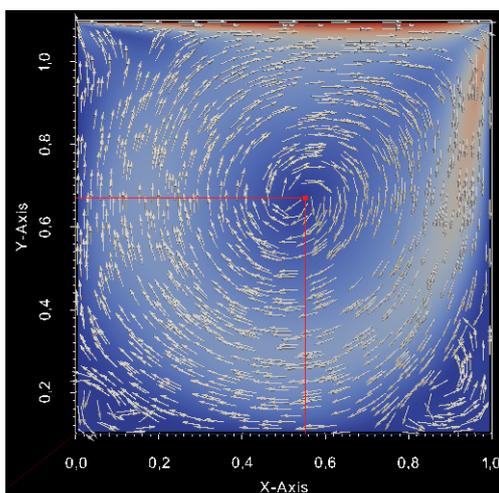
Figura 6.7: Campos de velocidades, indicando o sentido do escoamento, obtidos na resolução do problema da cavidade no regime permanente

Além do vórtice primário, podemos observar a formação de outros dois vórtices menores nas regiões inferiores, próximas às fronteiras esquerda e direita da cavidade. No primeiro caso, onde  $Re = 100$ , há apenas um indício da formação destes vórtices secundários. Para  $Re = 400$  observamos uma melhor estruturação do vórtice do canto inferior direito e apenas o início do vórtice identificado no canto esquerdo. Já no terceiro caso, onde  $Re = 1000$ , os dois vórtices secundários estão mais definidos e há um indício da formação de outro vórtice no canto superior esquerdo.

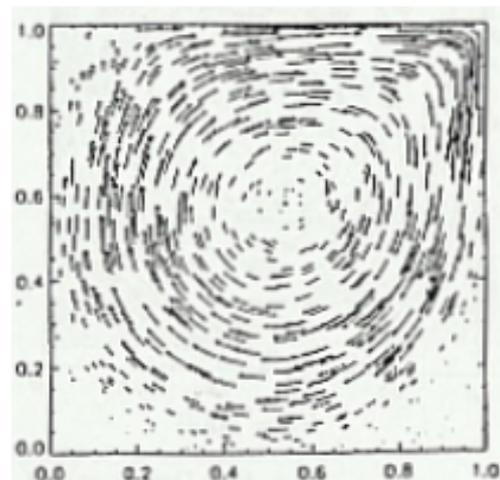
Referência	$Re = 100$	$Re = 400$
Este trabalho	(0.6109, 0.7335)	(0.5699, 0.6033)
Bono et al. [5]	(0.6157, 0.7373)	(0.5613, 0.6123)
Ghia et al. [26]	(0.6172, 0.7344)	(0.5547, 0.6055)
Gupta e Kalita [31]	(0.6125, 0.7375)	(0.5500, 0.6125)
Hou et al. [35]	(0.6196, 0.7373)	(0.5608, 0.6078)
Marchi et al. [49]	(0.6162, 0.7373)	(0.5537, 0.6054)

Tabela 6.3: Comparações com resultados da literatura

A partir da captura dos vórtices em nosso trabalho, nosso interesse foi comparar as coordenadas do centro dos vórtices primários obtidos nas simulações referentes à este problema com outros trabalhos realizados. Na Tabela 6.3 apresentamos as coordenadas do centro do vórtice primário obtido para os casos onde  $Re = 100$  e  $Re = 400$  em comparação com os valores apresentados por outros pesquisadores – os dados obtidos por [26, 31, 35, 49] foram obtidos a partir de [5]. Observe que nossos resultados estão em concordância com a literatura.



(a) Perfil obtido neste trabalho



(b) Perfil apresentado em [29]

Figura 6.8: Campos de velocidades, indicando o sentido do escoamento, para  $Re = 1000$

Para o estudo do caso onde  $Re = 1000$  nosso objetivo foi apenas comparar graficamente os resultados obtidos neste trabalho com os de [29], onde utilizamos os mesmos dados de entrada desta literatura, visando uma análise qualitativa dos perfis obtidos por ambos. Na Figuras 6.8(a) e 6.8(b) podemos observar que o padrão de escoamento é o mesmo em ambos os trabalhos. As coordenadas do vórtice primário obtidas neste trabalho foram (0.5528, 0.5698).

### 6.3 ESCOAMENTO ENVOLVENDO PLACA DE ORIFÍCIO

As placas de orifício são as mais conhecidas tecnologias relacionadas à vazão. Elas apresentam uma medição confiável e precisa para aplicações envolvendo líquidos, gases ou vapor [48].

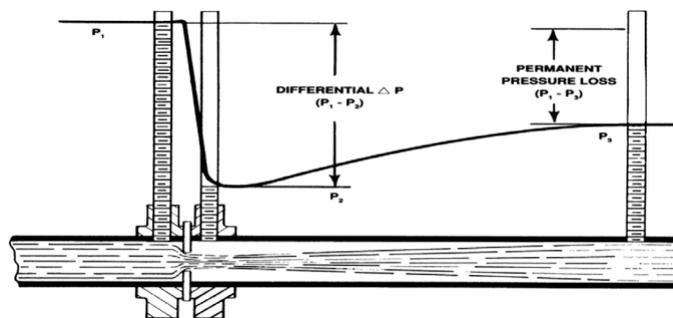


Figura 6.9: Variação da pressão de um fluido escoando em tubulação contendo placa de orifício [47]

De acordo com Kempenich [38] quando há escoamento de fluido em um duto contendo uma restrição, então ocorre um salto na pressão na região em torno da restrição. A partir da Figura 6.9 podemos observar o que ocorre no escoamento em um duto envolvendo placa de orifício. Ao ingressar na tubulação o fluido possui uma determinada pressão, mas ao aproximar-se do orifício há um pequeno aumento seguido de uma queda brusca na pressão do mesmo. Na sequência há um aumento gradual na pressão do fluido, atingindo um valor inferior ao observado na região anterior à placa de orifício [47].

Conhecendo esta informação, nosso objetivo foi verificar se nossa proposta neste trabalho era capaz de captar esta variação na pressão durante o escoamento de um fluido em um duto contendo uma placa de orifício.

Para o estudo do problema do escoamento em uma tubulação contendo a placa de orifício consideramos a geometria com as dimensões apresentada na Figura 6.10. Estes dados foram obtidos a partir da literatura [36].

Neste problema o fluido é injetado para o interior da geometria por meio da aresta  $AD$  com uma velocidade de injeção prescrita dada por  $vel_I$ , perpendicular à aresta. A saída do fluido ocorre através da aresta  $BC$ , e a uma distância de 1,26 do segmento  $AD$  é instalada a placa de orifício.

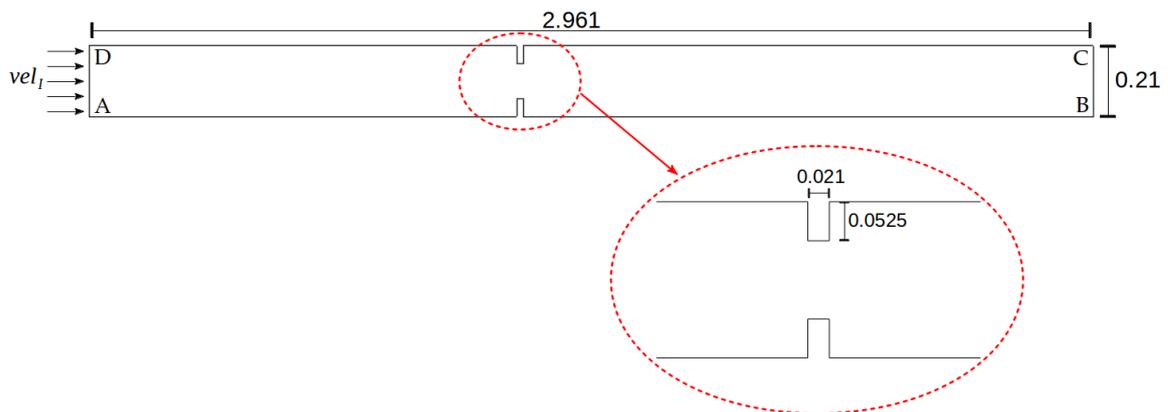


Figura 6.10: Geometria e dimensões referente ao problema envolvendo placa de orifício

Como condições iniciais a velocidade e a pressão são tomadas nulas no interior do domínio. As condições de contorno consideradas são do tipo CIPR na aresta  $AD$ , com  $vel_I$  já citada anteriormente, CECO na aresta  $BC$  e CNEI nas fronteiras superior e inferior.

Para o estudo do problema em questão foram realizadas duas simulações. Na primeira consideramos a malha apresentada na Figura 6.11, construída a partir das dimensões citadas na Figura 6.10, contendo 49 linhas  $\xi$  e 13  $\eta$ . Além disso, tomamos  $vel_I = 0.0025$ . No segundo caso, consideramos um refinamento da primeira malha, contendo 65  $\xi$  e 16  $\eta$ , além de uma velocidade 12% superior à considerada no caso anterior, ou seja,  $vel_I = 0.0028$ . De modo análogo aos problemas anteriores, para a geração destas malhas foi estipulada a realização de, no máximo, 1000 iterações, considerando um erro inferior a  $10^{-4}$ .

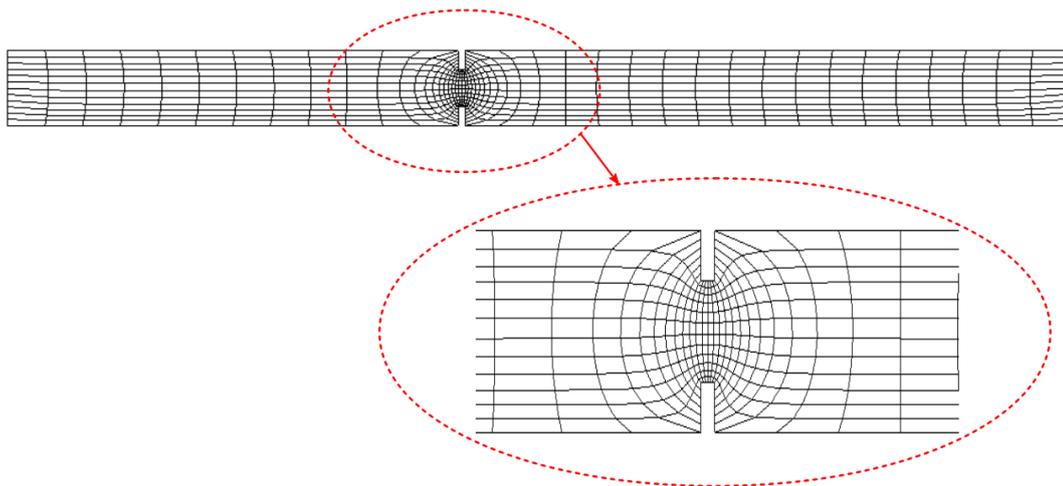
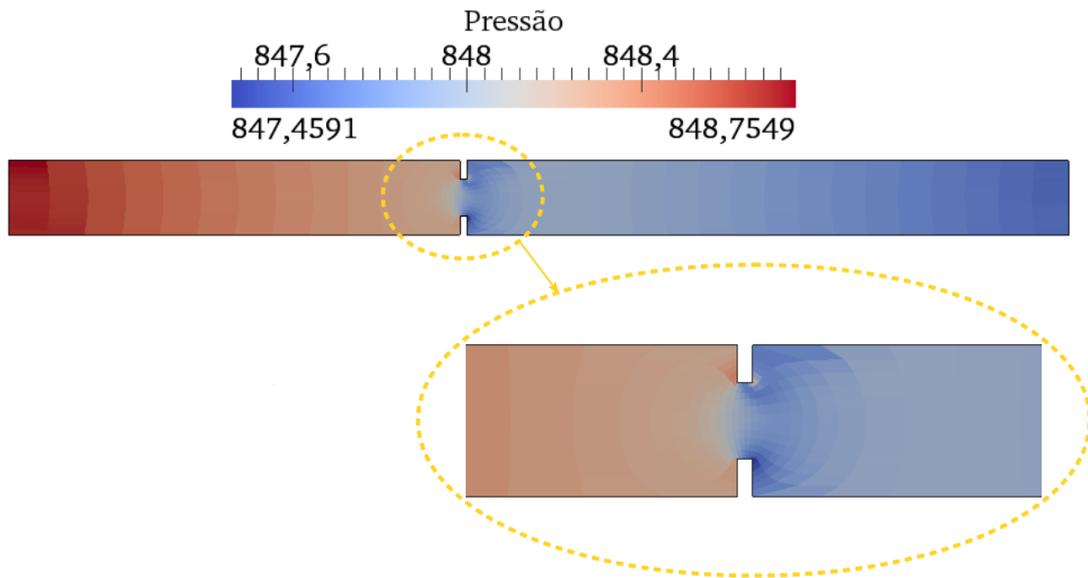


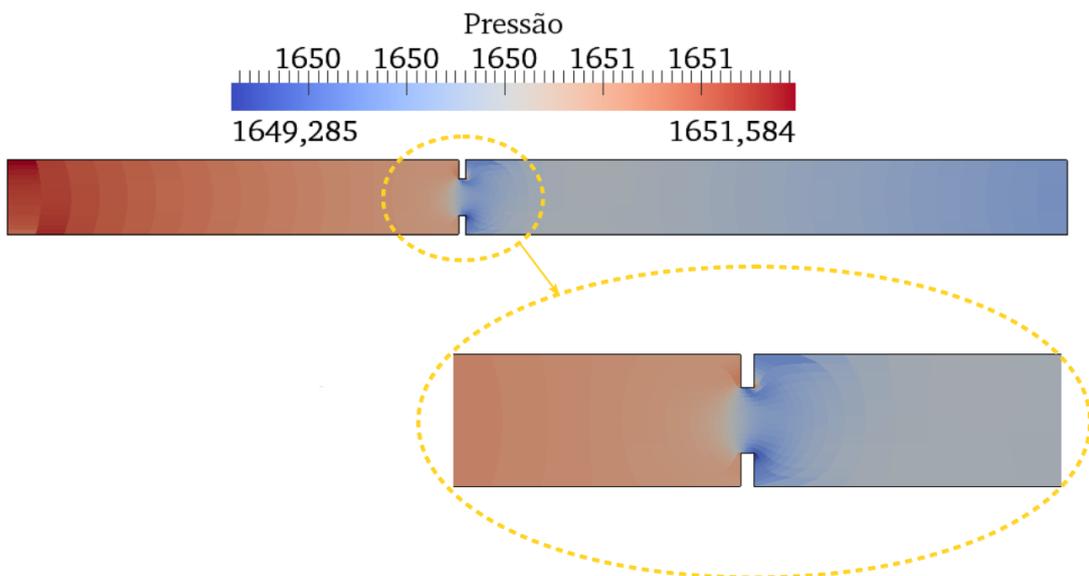
Figura 6.11: Malha considerada na primeira simulação referente ao problema envolvendo placa de orifício

Para as simulações o tempo final assumido foi igual a 100, considerando a realização de, no máximo,  $10^6$  iterações para a obtenção da solução, com um erro mínimo de  $10^{-4}$ . Além disso, consideramos  $\Delta\tau = 3 \cdot 10^{-3}$  na simulação envolvendo a malha  $49 \times 13$  e  $\Delta\tau = 5 \cdot 10^{-3}$  no

caso da malha 65x16 para que houvesse convergência do método numérico e a solução pudesse ser obtida.



(a) Malha com 49 linhas  $\xi$  e 13  $\eta$



(b) Malha com 65 linhas  $\xi$  e 16  $\eta$

Figura 6.12: Perfis obtidos para a pressão na resolução do problema envolvendo placa de orifício no regime permanente

As Figuras 6.12(a) e 6.12(b) descrevem o campo de pressão obtido após o regime permanente ser atingido para as malhas 49x13 e 65x16, respectivamente. Em ambos os casos podemos observar que há uma queda na pressão do fluido ao aproximar-se da região onde está localizado o orifício. A região com maior pressão encontra-se no início do duto, por onde o fluido é injetado para o interior do domínio. Comparando as Figuras 6.12(a) e 6.12(b) é possível verificar que com um aumento na velocidade e no refinamento da malha há uma grande

alteração do valor da pressão, no primeiro caso estando em torno de 848 e no segundo, 1650.

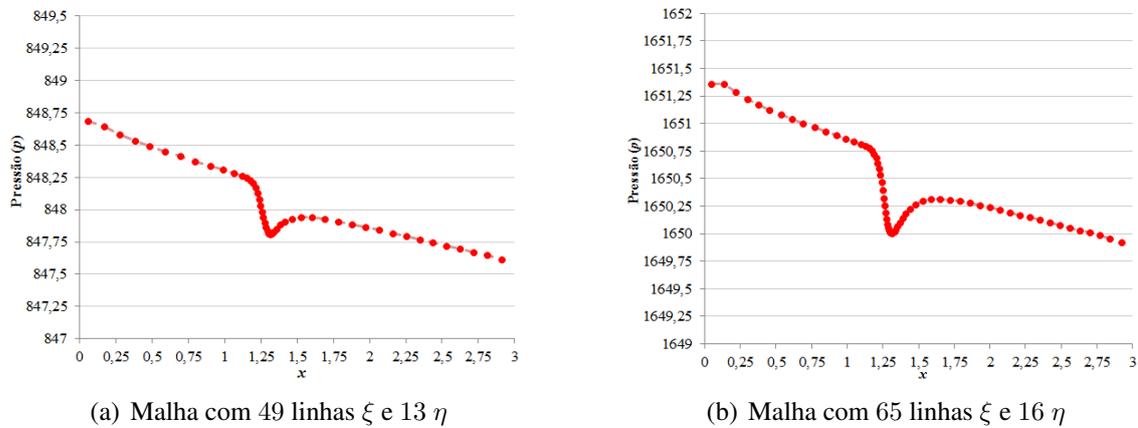


Figura 6.13: Gráfico relacionando o valor da pressão em função da coordenada espacial  $x$

A variação da pressão pode ser melhor analisada a partir dos gráficos apresentados nas Figuras 6.13(a) e 6.13(b). Para a construção do primeiro consideramos os valores da pressão obtidos nos centros das células localizadas entre as linhas  $\eta = 7$  e  $\eta = 8$ , representados no eixo das ordenadas, em função de sua coordenada espacial  $x$ , descrita no eixo das abscissas. Analogamente, no segundo caso, os valores da pressão referentes aos centros das células localizadas entre as linhas  $\eta = 8$  e  $\eta = 9$  são apresentados no eixo das ordenadas também em função da coordenada espacial  $x$ , descrita pelo eixo das abscissas – estas regiões foram selecionadas por serem próximas do centro do domínio.

Note que em ambos há um decaimento da pressão, atingindo ponto de mínimo em  $x = 1.3$  para, em seguida, sofrer aumento e depois iniciar um decaimento novamente. Esta região onde há essa maior variação da pressão corresponde ao local onde encontra-se o orifício. Assim, podemos observar que o método proposto neste trabalho é capaz de captar estas variações na pressão do fluido durante o escoamento, conforme verificado nos estudos teóricos e experimentais.

Na sequência também fizemos uma análise do campo de velocidade obtido após o regime permanente ser atingido. A variação dos módulos da velocidade podem ser observados nos campos de velocidades apresentados nas Figuras 6.14(a) e 6.14(b). Em ambas as figuras podemos verificar a formação de uma região na cor azul escuro nos cantos superior e inferior, após o fluido atravessar a região contendo a placa de orifício. Neste local a velocidade é próxima ou igual a zero, o que indica a formação de vórtices. Outro aspecto interessante a ser observado é o fato de no centro da região contendo o orifício, em ambos os casos, existir um aumento e depois uma redução progressiva na velocidade do fluido. Além disso, podemos verificar que na malha mais refinada a aceleração ocorre por uma distância maior do que na malha com menor refinamento.

O objetivo foi analisar a velocidade por meio de gráficos de modo análogo ao rea-

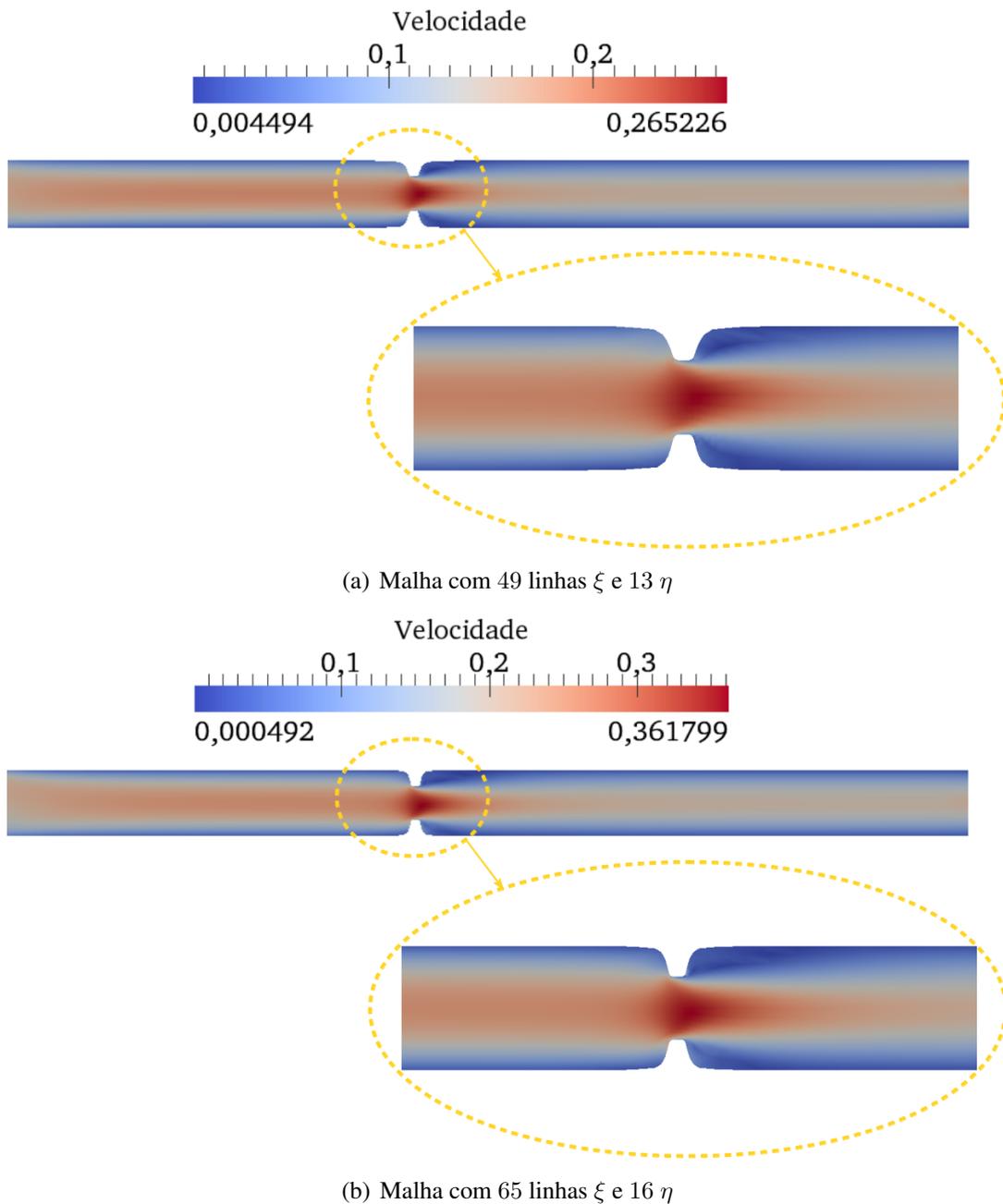


Figura 6.14: Campos de velocidade obtidos na resolução do problema envolvendo placa de orifício no regime permanente

lizado para a pressão. Assim, foram construídos os gráficos apresentados nas Figuras 6.15(a) e 6.15(b). Na construção do primeiro consideramos os valores da componente  $u$  da velocidade obtidos a partir das células localizadas entre as linhas  $\eta = 7$  e  $\eta = 8$ , representados no eixo das ordenadas, em função de sua coordenada espacial  $x$ , descrita no eixo das abscissas. Analogamente, no segundo caso, os valores da componente  $u$  da velocidade referentes às células localizadas entre as linhas  $\eta = 8$  e  $\eta = 9$  são apresentados no eixo das ordenadas também em função da coordenada espacial  $x$ , descrita pelo eixo das abscissas.

Em ambos os gráficos podemos observar um aumento na velocidade, atingindo ponto de máximo em  $x = 1.29$  seguido de um decaimento. Na sequência a velocidade torna-se praticamente constante.

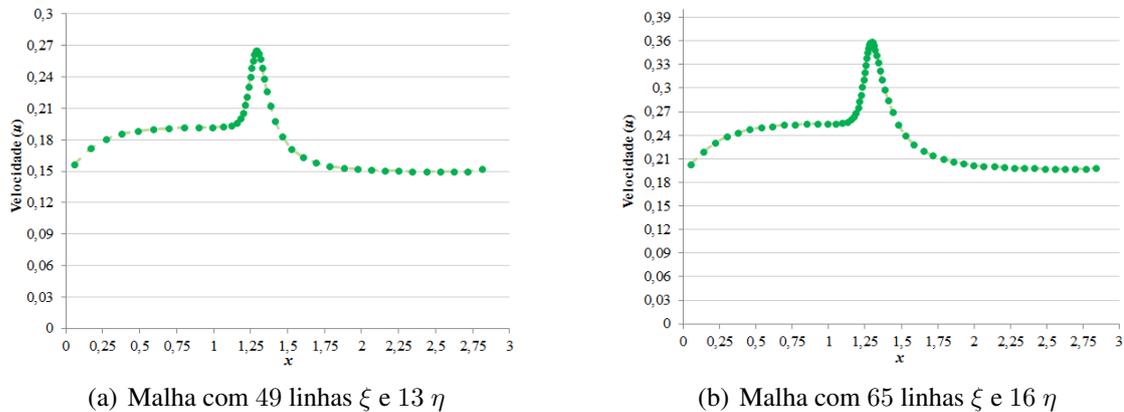


Figura 6.15: Gráfico relacionando o valor da velocidade em função da coordenada espacial  $x$

Observando novamente os gráficos apresentados nas Figuras 6.13(a) e 6.13(b) e comparando-os com os gráficos contidos nas Figuras 6.15(a) e 6.15(b) é possível observar que no local onde há um decrescimento seguido de um aumento na pressão também ocorre um aumento e posteriormente um decréscimo na velocidade. Esse fenômeno é justificado pela chamada equação de Bernoulli

$$p + \rho gy + \frac{\rho V^2}{2} = \text{constante}$$

no caso incompressível – onde  $p$  é a pressão,  $\rho$  a massa específica,  $g$  a força gravitacional,  $y$  a altura do duto e  $V$  a velocidade do fluido –, a qual afirma que se há um aumento na velocidade de um fluido durante um escoamento horizontal ao longo de uma linha de fluxo então a pressão do mesmo diminui e vice-versa [32]. Logo, podemos observar que o método também é capaz de reproduzir este fenômeno, o que prova sua eficiência na simulação deste tipo de problema.

## 6.4 ATEROSCLEROSE

A aterosclerose é uma doença associada à acumulação de lipídios, carboidratos complexos, componentes do sangue, células e outros elementos em artérias de grande e médio calibre, sendo a principal causa de doenças cardíacas e acidentes vasculares cerebrais (AVCs) [17]. Em geral, o desenvolvimento do problema tem início no acúmulo de colesterol do tipo LDL nas paredes das artérias, o que pode ser maior ou menor dependendo da disponibilidade desta substâncias no sangue [45]. O acúmulo dos compostos nas paredes de uma artéria causa

um endurecimento na mesma por meio da formação de placas ateroscleróticas, o que pode gerar estenose, ou seja, estreitamento no vaso sanguíneo, reduzindo o fluxo sanguíneo na artéria [24].

Nosso objetivo foi reproduzir um único caso de fluxo sanguíneo na região de uma artéria de grande calibre contendo uma estenose tal que exista uma constrição na fronteira superior e inferior, ambas com mesmas dimensões e localizadas em um mesmo ponto, conforme apresentado pela Figura 6.16.

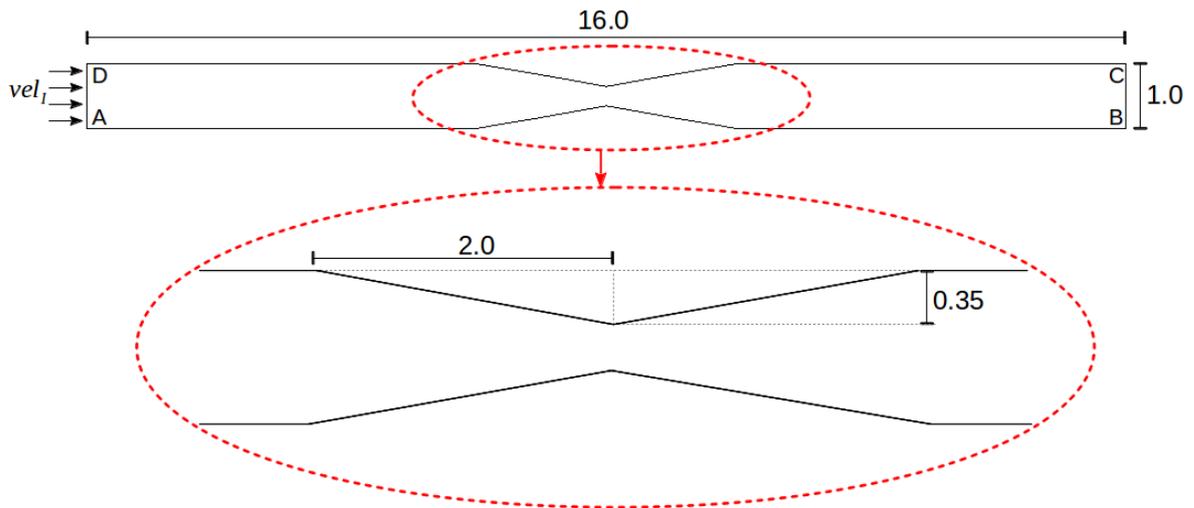


Figura 6.16: Dimensões da geometria considerada no problema referente à aterosclerose

Para o estudo consideramos um fluido com  $Re = 900$ . Ao fazermos esta consideração é aceitável pela comunidade científica que podemos aproximar o sangue por um fluido viscoso Newtoniano incompressível [40]. O fluido é injetado para o interior da geometria por meio da aresta  $AD$  com uma velocidade de injeção prescrita dada por  $vel_I$  perpendicular à aresta, e saída através de  $BC$ .

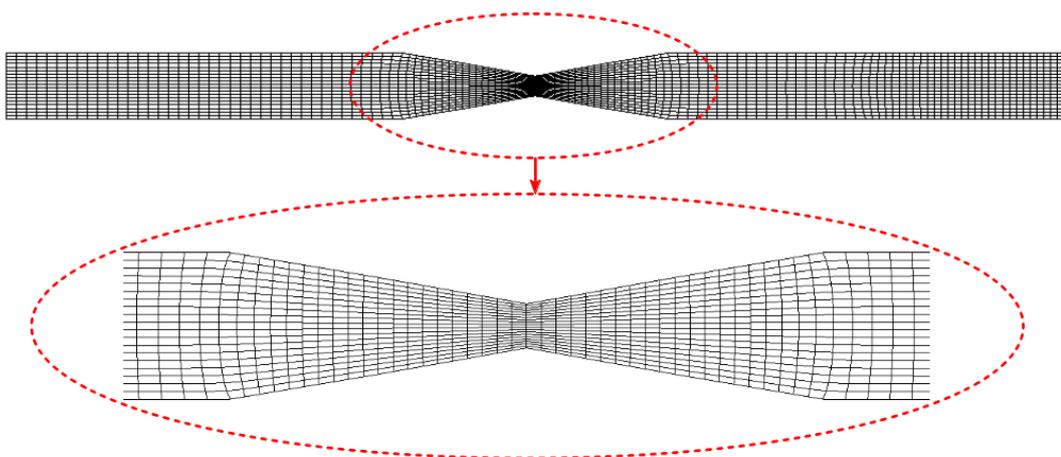


Figura 6.17: Malha considerada na resolução do problema referente à aterosclerose

Como condições iniciais a velocidade e a pressão são tomadas nulas. As condições

de contorno consideradas são do tipo CIPR na aresta  $AD$ , CECO na aresta  $BC$  e CNEI nas fronteiras superior e inferior.

Para o estudo do problema em questão consideramos a malha apresentada na Figura 6.17, construída a partir das dimensões já citadas, contendo 129 linhas na direção  $\xi$  e 20 na direção  $\eta$ . Além disso, consideramos  $vel_I = 0.1467$ . De modo análogo aos problemas anteriores, para a geração destas malhas foi estipulada a realização de, no máximo, 1000 iterações, considerando um erro inferior a  $10^{-4}$ .

Para as simulações assumimos um tempo final igual a 50, considerando a realização de, no máximo,  $10^6$  iterações para a obtenção da solução, com um erro mínimo de  $10^{-3}$  e  $\Delta\tau = 5.10^{-3}$ .

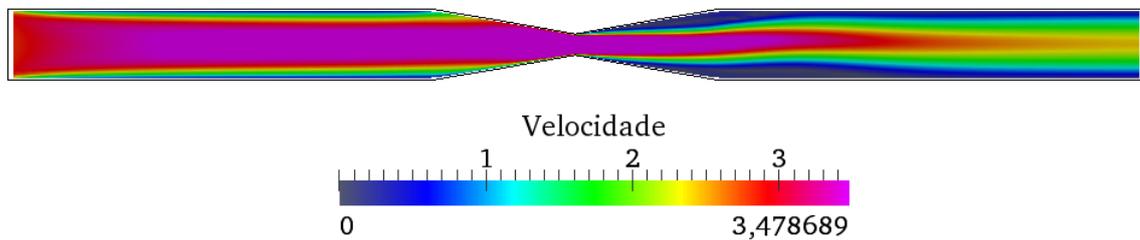


Figura 6.18: Campo de velocidades obtido a partir da simulação do problema referente à aterosclerose

O campo de velocidade verificado após o regime permanente ser atingido pode ser observado na Figura 6.18. A região próxima à estenose foi destacada na Figura 6.19.

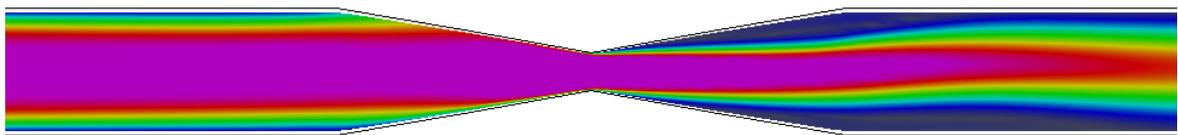


Figura 6.19: Campo de velocidades com destaque para a região próxima à estenose

Note que há uma grande variação na velocidade do fluido ao longo do escoamento, atingindo velocidade nula próxima às fronteiras superior e inferior, e no local onde há a estenose a velocidade encontra-se próxima à 6,2026. Após a região contendo a estenose, próximo às fronteiras superior e inferior, há regiões onde a velocidade aproxima-se de zero, indicando a formação de vórtices.

Nas Figuras 6.20 e 6.21 podemos observar a variação das componentes  $u$  e  $v$  da velocidade, respectivamente, ao longo da geometria considerada. Observe que a componente  $u$  assume valor negativo próximo às fronteiras, o que indica que o fluido está escoando no sentido contrário ao indicado por  $vel_I$ . Além disso, a componente  $v$  assume valor não nulo após a

estenose. Estas duas informações indicam que o fluido, em determinada região, altera o sentido do escoamento, ou seja, há a formação de vórtices próximos às fronteiras inferior e superior.

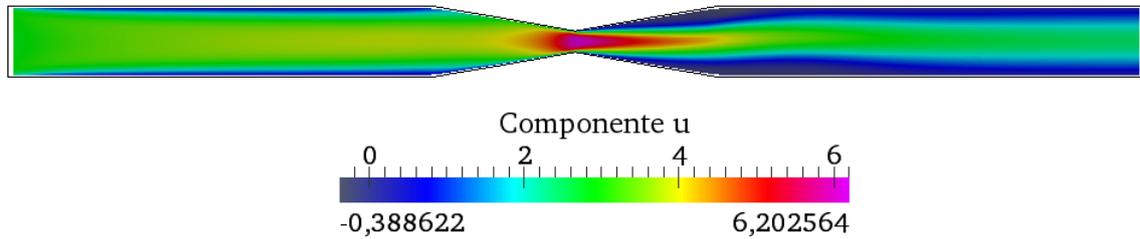


Figura 6.20: Campo de velocidades para a componente  $u$

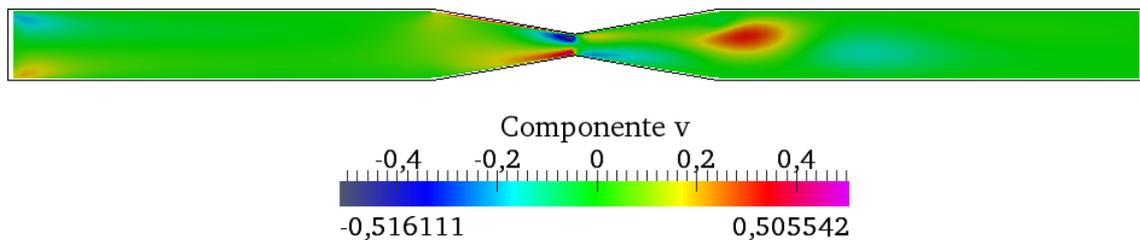


Figura 6.21: Campo de velocidades para a componente  $v$

Ao compararmos os valores mínimos atingidos pelas componentes  $u$  e  $v$  da velocidade nas Figuras 6.20 e 6.21 verificamos que na região superior os valores assumidos, em módulo, são maiores que os da região inferior, o que demonstra que o vórtice formado na região superior é maior que o formado na região inferior, mesmo que as dimensões da constricção em ambos os locais sejam iguais. Este fenômeno é também salientado no artigo [40] e pode ser explicado pelo fato de que, considerando  $Re = 900$  há um princípio de turbulência, e quando há um aumento no valor de Reynolds há a formação desordenada de vórtices tanto na parte superior quanto na inferior.

O estudo da formação desordenada e amplificada desses vórtices além das estenoses é fundamental, pois os mesmos podem dificultar a continuidade do fluxo sanguíneo nas artérias e assim, como captado nas simulações, pode-se agravar os problemas de saúde podendo levar seus portadores à óbito.

## Capítulo 7

# CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi o desenvolvimento e aplicação de um método numérico em coordenadas generalizadas para a simulação de escoamentos laminares, incompressíveis e isotérmicos, no caso bidimensional. Para isto, foi necessário o estudo de determinados conceitos e métodos numéricos necessários para a elaboração desta dissertação.

Conforme apresentado no capítulo 2, estudamos a modelagem numérica visando a resolução de problemas físicos, com destaque para a geração de malhas. Assim, foi necessário caracterizar o que é malha e quais são seus elementos. O estudo do sistema de coordenadas generalizadas, sua importância na resolução de problemas físicos, principalmente no que diz respeito à adequação da malha ao domínio físico dos problemas em questão, além das equações e métricas consideradas na transformação entre este sistema e o de coordenadas cartesianas também foi fundamental para a sequência do trabalho. Aliado a estes conceitos, também foi necessário tratar sobre as equações de geração das malhas, juntamente com a interpolação polinomial, mais especificamente o chamado spline cúbico parametrizado, utilizado na construção do bordo.

A identificação das equações diferenciais parciais que governam os problemas estudados, de acordo com o capítulo 3, fez parte da modelagem dos problemas que seriam tratados. Inicialmente consideramos as equações de quantidade de movimento, também chamadas de equações de Navier-Stokes, e a equação de conservação da massa, conhecida por equação da continuidade, ambas no caso bidimensional, escritas no sistema de coordenadas cartesianas. No entanto, como nosso objetivo era resolver problemas por meio do sistema de coordenadas generalizadas, foi realizada a transformação das equações para o sistema generalizado. Para melhor compreensão das equações, relacionamos as componentes contravariantes do vetor velocidade com as componentes cartesianas. Neste momento também apresentamos as condições iniciais e os tipos de condições de contorno que seriam consideradas neste trabalho.

Para que fosse possível estabelecer o método numérico estudamos a discretização da equação de Navier-Stokes, inicialmente no caso cartesiano para fins didáticos, visando melhor compreensão dos procedimentos realizados, e, em seguida, no sistema de coordenadas generalizadas que era o objetivo. Esta opção foi feita para facilitar a compreensão da discretização neste

último sistema. Em ambos os casos a discretização foi feita separadamente para cada um dos termos das equações: temporal, convectivo, de pressão e difusivo. Aplicamos aproximações de primeira ordem no termo temporal, *upwind* de primeira ordem FOU no convectivo e de segunda ordem nos termos de pressão e difusivo.

O método numérico considerado, conforme apresentado no capítulo 5, é uma versão simplificada para o método MAC, no caso onde não há superfícies livres. Também tratamos sobre a formulação  $UV$  – com o objetivo de fazer o balanço de massa em todas as células do domínio. Descrevemos o método MAC simplificado, com a dedução das expressões necessárias e a obtenção da equação de evolução da pressão, que satisfaz a equação da continuidade.

Os resultados obtidos são apresentados no capítulo 6 e estão relacionados aos seguintes problemas: escoamento entre duas placas paralelas, escoamento em uma cavidade quadrada com parede superior em movimento, escoamento em um duto contendo placas de orifício e aterosclerose, que corresponde ao escoamento em uma artéria contendo um estreitamento em sua parede.

Assim como apresentado, os três primeiros problemas poderiam ser resolvidos por meio de métodos baseados no sistema de coordenadas cartesianas, pois suas geometrias poderiam ser representadas adequadamente por meio deste sistema. No entanto, estes problemas foram estudados para validação do método numérico elaborado, pois o sistema de coordenadas cartesianas pode ser considerado um caso particular do sistema de coordenadas generalizadas. Desta forma, foi possível verificar a eficiência do método proposto, pois as soluções obtidas com a aplicação do mesmo são boas aproximações para soluções analíticas – no caso do escoamento envolvendo placas paralelas –, quando comparadas às obtidas por outros métodos – como é o caso do escoamento em uma cavidade – e também em relação à fundamentos teóricos ou observações experimentais – quando consideramos o escoamento em duto com placa de orifício.

Porém, no caso do quarto problema resolvido – o da aterosclerose – a geometria considerada não pode ser ajustada adequadamente ao sistema de coordenadas cartesianas, o que demonstra uma vantagem do método desenvolvido a partir do sistema de coordenadas generalizadas, pois ele pode ser aplicado na simulação de um conjunto maior de problemas do que o cartesiano. Assim, apesar de serem necessários estudos relacionados à transformação de coordenadas, o método proposto pode ser adaptado para diversos problemas, além da possibilidade de ser estendido para casos tridimensionais [46], o que contribui para a elaboração de outros métodos e para o próprio desenvolvimento da ciência da dinâmica dos fluidos.

Em nossas simulações foi possível obter resultados satisfatórios, quando comparados a literatura, com o uso do esquema FOU. Mas ressaltamos que a medida em que procurávamos aumentar o número de Reynolds em nossas simulações os resultados divergiam ou eram inconsistentes com a física do problema. Sabemos que isto está fortemente relacionado a baixa ordem de precisão do esquema uma vez que muitos pesquisadores já provaram a existência deste fenômeno. Mas por outro lado lembramos também que a estratégia adotada na construção

do algoritmo é eficiente, porque captou adequadamente o salto na pressão e velocidade quando foi simulado o escoamento na placa de orifício. Localizou corretamente os vórtices na cavidade e no problema da aterosclerose.

Como estamos motivados com o desenvolvimento deste trabalho, incluímos no apêndice C a dedução matemática do esquema CUBISTA que é um esquema *upwind* – de ordem maior que um – que inclui em sua fundamentação conceitos relacionados à variáveis normalizadas (destacadas no apêndice B). Portanto como sugestão para trabalhos futuros realizaremos a implementação do esquema CUBISTA para posterior comparação com os resultados apresentados neste e em outros trabalhos.

# Apêndice A

## CONCEITOS BÁSICOS SOBRE FLUIDOS

De acordo com Munson, Young e Okiishi [58], fluido é uma substância que se deforma continuamente quando submetida à uma tensão de cisalhamento de qualquer valor, sendo capaz de escoar e tal que seu volume se adequa ao formato do recipiente em que está contido [27]. Os fluidos podem ser classificados como líquidos ou gases. Como um fluido é composto por diversas moléculas e não é possível descrever seu comportamento por meio da análise individual de cada uma delas, consideramos que o fluido é um meio contínuo [23].

A massa específica de um fluido, representada por  $\rho$ , é definida como a massa contida em uma unidade de volume. A viscosidade do fluido é a propriedade que indica o seu grau de resistência à tensão de cisalhamento. Essa viscosidade é devida, entre outros fatores, à interação entre as moléculas do fluido em questão [58].

Um fluido pode ser classificado em *Newtoniano* ou *não-Newtoniano*. Quando um elemento de fluido é submetido à um esforço tangencial ele sofre deformação à uma determinada taxa. No caso em que as tensões tangenciais são diretamente proporcionais às respectivas taxas de deformação então o fluido é considerado *Newtoniano*, e quando não existe essa proporção o fluido é caracterizado como *não-Newtoniano* [27].

Quando estudamos fluidos em movimento nos interessamos, necessariamente, em

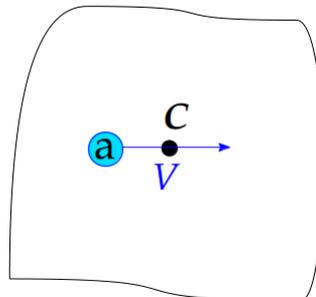


Figura A.1: Velocidade do fluido em um ponto  $C$  de um volume de controle dada a partir da velocidade instantânea  $V$  de uma partícula  $a$

descrever o campo de velocidades. Para este estudo podemos considerar a divisão do domínio em regiões denominadas volumes de controle, que correspondem a um volume arbitrário do espaço através do qual o fluido escoar. Dado um determinado ponto  $C$  em um volume de controle, podemos definir a velocidade do fluido em  $C$  como sendo a velocidade instantânea  $V$  de uma partícula  $a$  do fluido que, em um determinado momento, passa por  $C$  [23], o que pode ser observado na Figura A.1.

O escoamento de fluidos pode ser classificado de diversas formas. Escoamentos nos quais não há variação de temperatura no decorrer do tempo são denominados isotérmicos. Um escoamento é dito laminar quando o movimento das partículas do fluido é dado em camadas ou lâminas em uma trajetória reta e paralela - Figura A.2. Neste caso, macroscopicamente, não se observa a mistura entre camadas de fluido adjacentes. O escoamento turbulento é àquele no qual as partículas do fluido movem-se de modo confuso em todas as direções, sendo impossível determinar o movimento de uma partícula individual [27].



Figura A.2: Esquema de um escoamento dito laminar [29]

Quando as variações da massa específica de um fluido são desprezíveis o escoamento é chamado de incompressível, e quando não podemos desprezar essas variações o fluido é denominado compressível. Ao estudarmos o escoamento de fluidos incompressíveis em dutos, a classificação em laminar ou turbulento é dada em função do número de Reynolds, um parâmetro adimensional dado por

$$Re = \frac{\rho \bar{V} d}{\mu}$$

e que representa a razão das forças de inércia pelas de viscosidade [27], onde  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $\bar{V}$  a velocidade média do escoamento,  $d$  o diâmetro do duto e  $\mu$  a viscosidade do fluido. O escoamento será dito laminar quando  $Re \leq 2300$  e para valores maiores, pode tornar-se turbulento [23].

## Apêndice B

# FORMULAÇÃO DE VARIÁVEIS NORMALIZADAS, CRITÉRIO CBC E RESTRIÇÕES TVD

A formulação de variáveis normalizadas (NVF - *Normalized Variable Formulation*), elaborada por Leonard [42], foi desenvolvida com o objetivo de se obter esquemas convectivos com a capacidade de resolver gradientes elevados e manter a estabilidade nas soluções numéricas [62].

Para a elaboração de um esquema *upwind* de alta ordem tendo como base a teoria de variáveis normalizadas, o critério de limitação CBC (*Convection Boundedness Criterion*) e as restrições TVD (*Total Variation Diminishing*), devemos considerar uma molécula computacional que envolva três pontos, a saber:  $D$  (*Downstream*),  $U$  (*Upstream*) e  $R$  (*Remote-upstream*), definidos a partir da face  $f$  de um dado volume de controle. Estas posições dependem também do sinal da velocidade  $V_f$  de uma variável convectada  $\phi$  em  $f$ , representada por  $\phi_f$  – ver Figura B.1 –, em uma determinada direção [14].

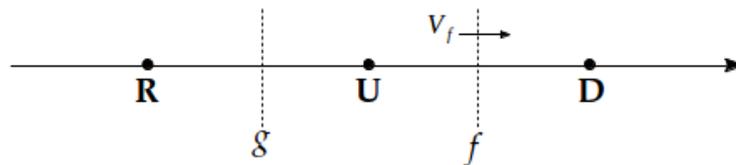


Figura B.1: Representação dos pontos  $D$ ,  $U$  e  $R$  em uma molécula computacional (Adaptada de [14], p.16)

A variável  $\phi$ , transformada em variável normalizada de Leonard [42], é dada por

$$\hat{\phi} = \frac{\phi - \phi_R}{\phi_D - \phi_R} \quad (\text{B.1})$$

onde  $\phi_D$  e  $\phi_R$  são os valores não normalizados assumidos por  $\phi$  em  $D$  e  $R$ , respectivamente

[62]. Se considerarmos, por exemplo, a face  $f$ , teremos

$$\hat{\phi}_f = \frac{\phi_f - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}$$

A partir de (B.1) podemos observar que  $\hat{\phi}_R = 0$  e  $\hat{\phi}_D = 1$ . Além disso, se  $\hat{\phi}_U = 0$  então  $\phi_U = \phi_R$  e no caso em que  $\hat{\phi}_U = 1$  temos  $\phi_U = \phi_D$ .

Tendo como base essa normalização é possível obter uma relação funcional simples entre o valor  $\hat{\phi}_f$  na face de um volume de controle e o valor de  $\phi$  no ponto  $U$  da seguinte forma

$$\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_f(\hat{\phi}_U) \quad (\text{B.2})$$

sendo esta responsável pela definição do esquema *upwind* de alta ordem desejado (LIMA, 2010).

Podemos visualizar o esquema *upwind*, definido a partir da relação funcional (B.2), tendo como base a expressão (B.1), por meio de sua representação no diagrama de variáveis normalizadas (NVD - *Normalized Variable Diagram*), proposto por Leonard [42]. A relação funcional é apresentada no plano  $\hat{\phi}_f \perp \hat{\phi}_U$ . Por exemplo, podemos representar os esquemas FOU [11] e QUICK [41], definidos, em variáveis normalizadas, da seguinte forma

$$\begin{aligned} \text{FOU:} \quad & \hat{\phi}_f = \hat{\phi}_U \\ \text{QUICK:} \quad & \hat{\phi}_f = 0.75\hat{\phi}_U + 0.375 \end{aligned}$$

por meio do diagrama apresentado na Figura B.2.

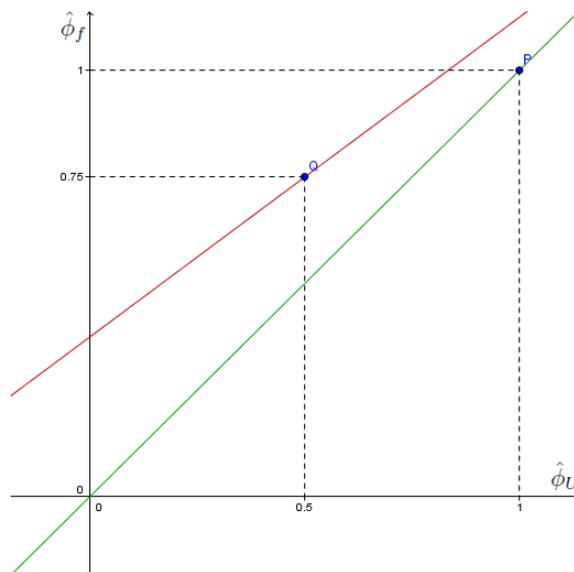


Figura B.2: Representação dos esquemas FOU (em verde) e QUICK (em vermelho) (Adaptada de [8], p.17)

Após estudos e a realização de experimentos numéricos ([42, 43, 44, 72]), Leonard

introduziu quatro condições para que a relação (B.2) defina um esquema *upwind*, no contexto NVF, não-linear, livre de oscilações e difusão numéricas, sendo possível atingir até a terceira ordem de precisão. Essas condições sobre o funcional dado em (B.2), definidas no intervalo  $0 \leq \hat{\phi}_U \leq 1$ , são dadas por [14]

- (a) a relação funcional deve estar definida na origem  $O = (0, 0)$ ;
- (b) a relação funcional deve estar definida em  $P = (1, 1)$ ;
- (c) o esquema, dado por (B.2), deve estar definido em  $Q = (0.5, 0.75)$  para que possa atingir segunda ordem de precisão;
- (d) o esquema, definido por (B.2), deve ter inclinação 0.75 em  $Q = (0.5, 0.75)$  para que possa atingir terceira ordem de precisão.

As condições (a) e (b) são necessárias, enquanto que (c) e (d) são necessárias e suficientes.

A recomendação de Leonard é que para  $\hat{\phi}_U \notin [0, 1]$  os esquemas devem ser construídos de tal forma que coincidam com o esquema FOU. E para evitar os problemas de convergência em malhas grosseiras Lin e Cheng [44] aconselham que a relação funcional (B.2) seja continuamente diferenciável em todo o domínio de  $\hat{\phi}_U$ .

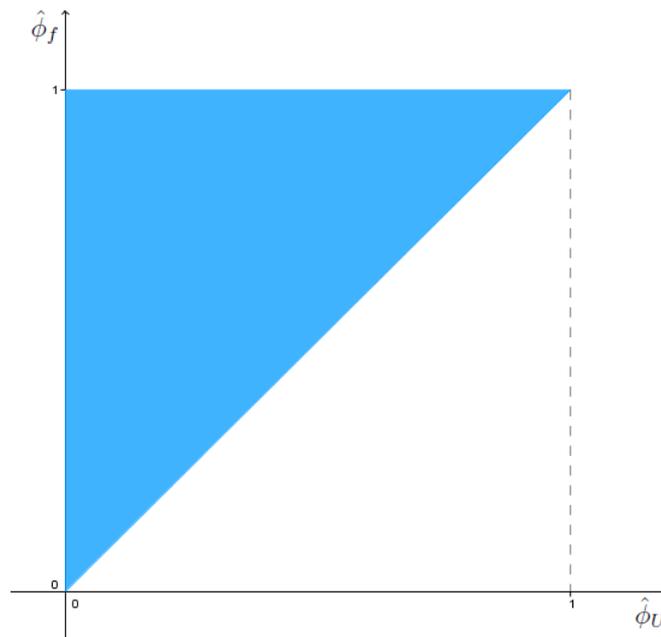


Figura B.3: Região determinada pelo critério CBC (Adaptada de [14], p.19)

As oscilações que não são originadas da física do problema e que influenciam a solução deste podem ser evitadas se o valor de  $\phi_U$  e, conseqüentemente, de  $\phi_f$  forem limitados pelos valores assumidos nos pontos adjacentes a eles, respeitando o critério CBC (*Convection Boundedness Criterion*), proposto por Gaskell e Lau [25]. Segundo este critério, para que o

esquema definido por (B.2) – que corresponde a uma função contínua ou contínua por partes – seja limitado, devemos ter [62]

$$\begin{cases} \hat{\phi}_f \in [\hat{\phi}_U, 1] & \text{se } \hat{\phi}_U \in [0, 1] \\ \hat{\phi}_f = 0 & \text{se } \hat{\phi}_U = 0 \\ \hat{\phi}_f = 1 & \text{se } \hat{\phi}_U = 1 \\ \hat{\phi}_f = \hat{\phi}_U & \text{se } \hat{\phi}_U \notin [0, 1] \end{cases}$$

A região determinada pelo critério CBC pode ser observada na Figura B.3 [14]. O esquema será limitado se a representação da relação funcional que o define estiver inteiramente contida nessa região.

Como o critério CBC trata o problema de estabilidade de forma adequada, mas não garante a convergência da solução numérica, é necessário considerar também as restrições TVD (*Total Variation Diminishing*) de Harten [33] para que sejam geradas soluções numéricas convergentes e fisicamente aceitáveis [62]

As restrições TVD, no contexto de variáveis normalizadas, definidas a partir dos conceitos introduzidos por Harten [33], são dadas por [62]

$$\begin{cases} \hat{\phi}_f \in [\hat{\phi}_U, 2\hat{\phi}_U] \text{ e } \hat{\phi}_f \leq 1 & \hat{\phi}_U \in [0, 1] \\ \hat{\phi}_f = \hat{\phi}_U & \hat{\phi}_U \notin [0, 1] \end{cases}$$

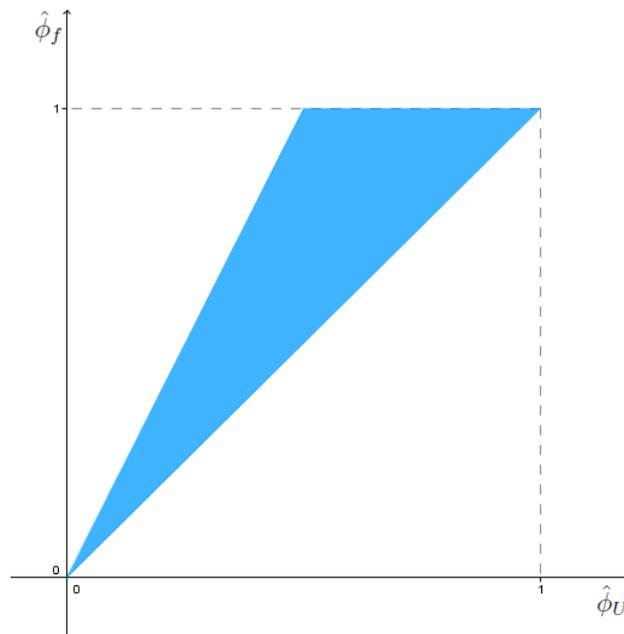


Figura B.4: Região determinada pelas restrições TVD (Adaptada de [14], p.21)

Assim, podemos expressar a região TVD conforme diagrama apresentado na Figura B.4 [14].

De acordo com Sweby (1884), o esquema definido por (B.2) será TVD se, e somente se, sua representação estiver inteiramente contida na região TVD, representada pela região ha-

churada da Figura B.4 juntamente com a reta  $\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_U$  [14].

Após a determinação do esquema *upwind*, definido a partir das condições de Leonard, no critério CBC e na restrição TVD, é preciso determinar o limitador de fluxo que caracteriza o esquema obtido.

A partir dos conceitos apresentados por Harten [33], Sweby [67] definiu o seguinte conjunto de limitações para o comportamento das funções limitadoras de fluxo

$$\begin{cases} \psi(r) = 0, & r \leq 0 \\ 0 \leq \psi(r) \leq \min\{2, 2r\}, & r > 0 \end{cases}$$

onde  $\psi(r)$  é o limitador de fluxo, que indica o nível de antidifusividade, e  $r$  a razão entre dois gradientes consecutivos [14].

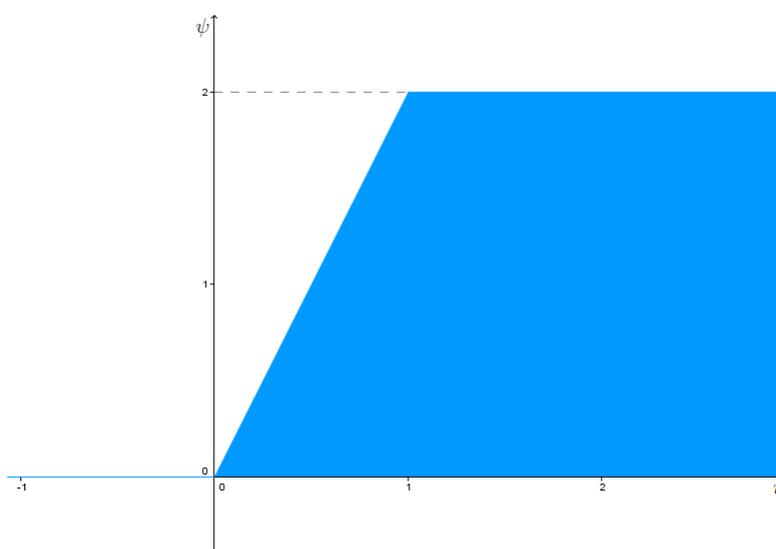


Figura B.5: Representação da região TVD no plano  $\psi \perp r$  (Adaptada de [8], p.21)

Podemos definir a região TVD no plano  $\psi \perp r$ , conforme Figura B.5. De acordo com Sweby [67], o esquema será TVD se o limitador de fluxo  $\psi(r)$  estiver contido nessa região.

# Apêndice C

## ESQUEMA *UPWIND* CUBISTA

Para o estudo do esquema CUBISTA, proposto por Alves, Oliveira e Pinho [1], precisamos considerar a formulação de variáveis normalizadas (NVF - *Normalized Variable Formulation*), o critério CBC e as restrições TVD, apresentados no apêndice B.

A partir destes conceitos, o esquema CUBISTA foi construído no NVF pela união dos segmentos de reta [1]

- (i) na zona suave (onde  $\hat{\phi}_U \approx 0.5$ ) considera-se o esquema QUICK onde  $\hat{\phi}_f = 0.75\hat{\phi}_U + 0.375$ ;
- (ii) na região de ligação com a origem, na qual  $\hat{\phi}_f = 0$  e  $\hat{\phi}_U = 0$ , segue-se a restrição TVD, com  $\hat{\phi}_f = 1.75\hat{\phi}_U$ ;
- (iii) na região de ligação com o ponto  $\hat{\phi}_f = 1$  e  $\hat{\phi}_U = 1$  segue-se a restrição TVD, onde  $\hat{\phi}_f = 0.25\hat{\phi}_U + 0.75$ ;
- (iv) para  $\hat{\phi}_U < 0$  ou  $\hat{\phi}_U > 1$  segue-se o esquema FOU, ou seja,  $\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_U$ .

Portanto, o esquema CUBISTA pode ser apresentado da seguinte forma

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} \frac{7}{4}\hat{\phi}_U, & 0 < \hat{\phi}_U < \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\hat{\phi}_U + \frac{3}{8}, & \frac{3}{8} \leq \hat{\phi}_U \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\hat{\phi}_U + \frac{3}{4}, & \frac{3}{4} < \hat{\phi}_U < 1 \\ \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \leq 0 \text{ ou } \hat{\phi}_U \geq 1 \end{cases}$$

Substituindo a formulação para variáveis normalizadas na definição do esquema CUBISTA, obtemos a definição deste esquema para variáveis não normalizadas da seguinte forma

$$\phi_f = \begin{cases} \frac{7}{4}\hat{\phi}_U(\phi_D - \phi_R) + \phi_R, & 0 < \hat{\phi}_U < \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\hat{\phi}_U(\phi_D - \phi_R) + \frac{3}{8}\phi_D + \frac{5}{8}\phi_R, & \frac{3}{8} \leq \hat{\phi}_U \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\hat{\phi}_U(\phi_D - \phi_R) + \frac{3}{4}\phi_D + \frac{1}{4}\phi_R, & \frac{3}{4} < \hat{\phi}_U < 1 \\ \phi_U, & \hat{\phi}_U \leq 0 \text{ ou } \hat{\phi}_U \geq 1 \end{cases}$$

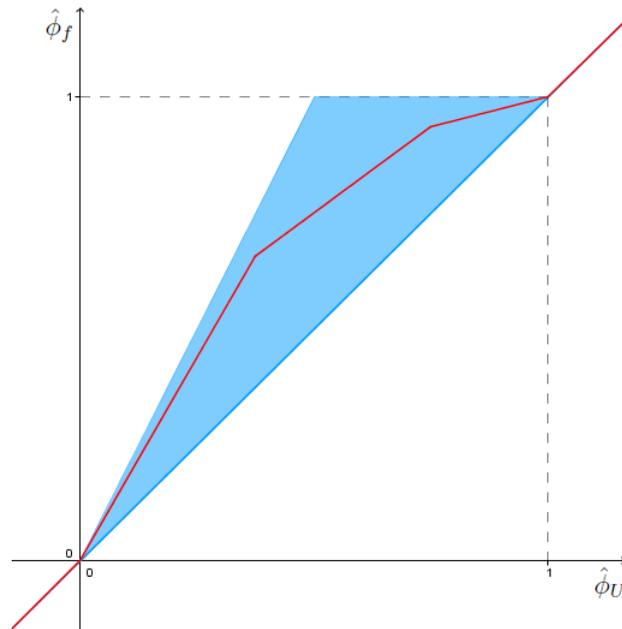


Figura C.1: Representação do esquema CUBISTA, no diagrama de variáveis normalizadas, contido na região TVD

Podemos observar, a partir da Figura C.1, que a representação do esquema CUBISTA está contida na região TVD, como queríamos.

O limitador de fluxo para o esquema CUBISTA é dado por [62]

$$\psi(r) = \max\{0, \min[1.5r, 0.75 + 0.25r, 1.5]\}$$

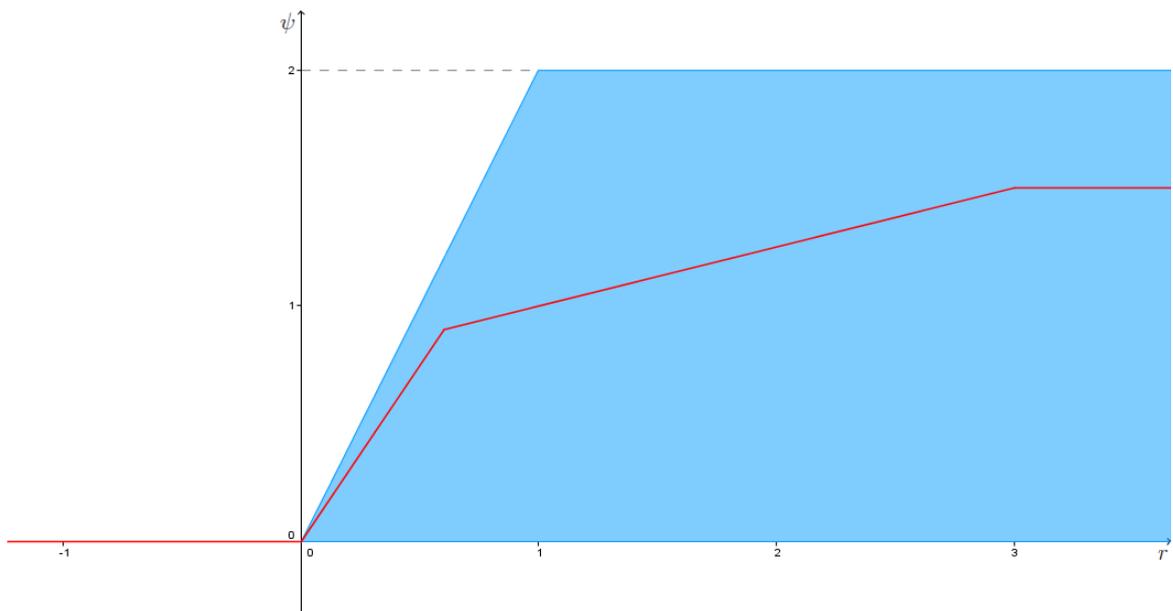


Figura C.2: Representação do limitador de fluxo do esquema CUBISTA e da região TVD no plano  $\psi \perp r$

A representação do limitador, em relação à região TVD, é dado conforme a Figura C.2. A partir desta podemos observar que este esquema é TVD, pois a representação do seu limitador de fluxo está inteiramente contida na região TVD no plano  $\psi \perp r$ .

A partir desta definição, podemos aplicar o esquema CUBISTA na aproximação dos termos convectivos das equações (4.9) e (4.10).

Considere as expressões (4.13) e (4.14), que correspondem aos termos convectivos das equações (4.9) e (4.10), respectivamente.

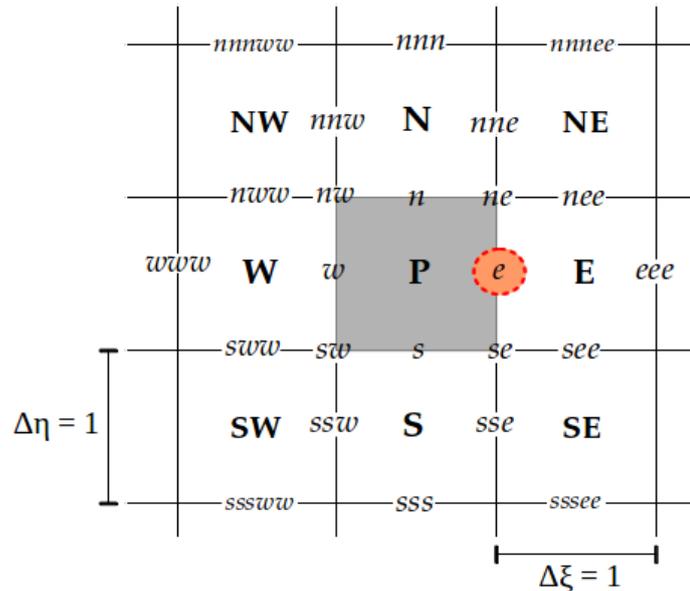


Figura C.3: Discretização do termo convectivo  $\mathcal{C}(u)$  na face  $e$

Temos que a discretização de  $\mathcal{C}(u)$  na face  $e$  da célula centrada no ponto cardinal  $P$ , de acordo com a Figura C.3, em um nível de tempo  $k$ , utilizando diferenças centrais, é

$$\mathcal{C}(u)|_e^k \approx \bar{U}|_E^k u|_E^k - \bar{U}|_P^k u|_P^k + \bar{V}|_{ne}^k u|_{ne}^k - \bar{V}|_{se}^k u|_{se}^k \quad (\text{C.1})$$

conforme observado anteriormente.

As velocidades de convecção  $\bar{U}|_E^k$ ,  $\bar{U}|_P^k$ ,  $\bar{V}|_{ne}^k$  e  $\bar{V}|_{se}^k$  são dadas por (4.15) e (4.16).

O próximo objetivo é aplicar o esquema CUBISTA na aproximação de  $u|_E^k$ ,  $u|_P^k$ ,  $u|_{ne}^k$  e  $u|_{se}^k$ , que são as propriedades a serem transportadas e que são destacadas em (C.1). Para a aplicação deste esquema nos termos em questão iremos considerar um recorte da malha apresentada na Figura C.3 na direção  $\xi$  – para os termos  $u|_E^k$  e  $u|_P^k$  – e na direção  $\eta$  – para  $u|_{ne}^k$  e  $u|_{se}^k$  – tendo como base a célula hachurada de centro  $P$ . A partir deste, destacamos os pontos da malha, que são apresentados na cor preta, relacionando-os com os respectivos pontos considerados na formulação para variáveis normalizadas, apresentados na cor azul, necessários para aplicação do esquema CUBISTA.

Tomando como base a Figura C.4(a), quando tivermos  $\bar{U}|_E^k \geq 0$ , a aproximação

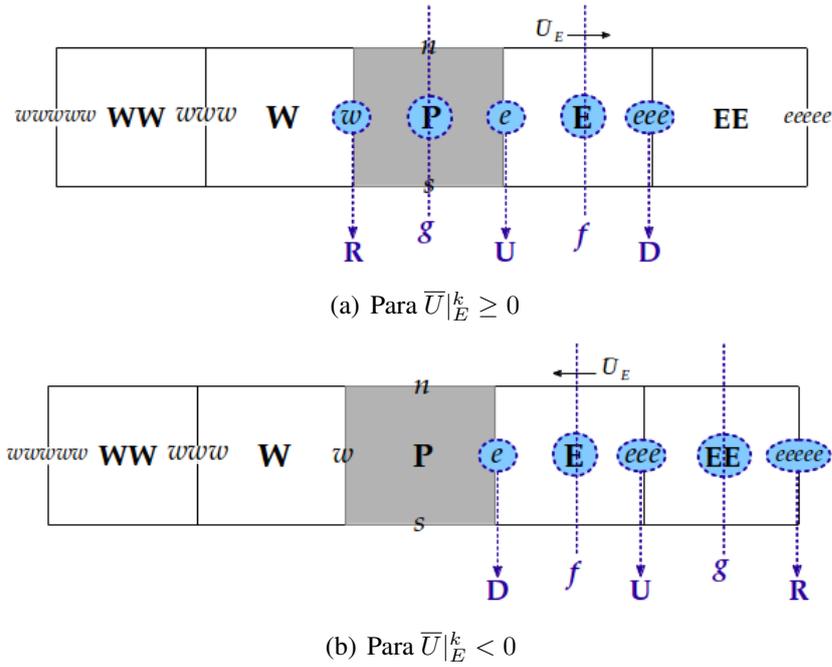


Figura C.4: Pontos da malha utilizados para a aproximação de  $u|_E^k$  por meio do esquema CU-BISTA

para o termo  $u|_E^k$  será dada conforme segue

$$u|_E^k = \begin{cases} \frac{7}{4}\hat{u}|_e^k(u|_{eee}^k - u|_w^k) + u|_w^k, & 0 < \hat{u}|_e^k < \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\hat{u}|_e^k(u|_{eee}^k - u|_w^k) + \frac{3}{8}u|_{eee}^k + \frac{5}{8}u|_w^k, & \frac{3}{8} \leq \hat{u}|_e^k \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\hat{u}|_e^k(u|_{eee}^k - u|_w^k) + \frac{3}{4}u|_{eee}^k + \frac{1}{4}u|_w^k, & \frac{3}{4} < \hat{u}|_e^k < 1 \\ u|_e^k, & \hat{u}|_e^k \leq 0 \text{ ou } \hat{u}|_e^k \geq 1 \end{cases}$$

mas quando  $\bar{U}|_E^k < 0$ , de acordo com a Figura C.4(b), temos a seguinte aproximação

$$u|_E^k = \begin{cases} \frac{7}{4}\hat{u}|_{eee}^k(u|_e^k - u|_{eeee}^k) + u|_{eeee}^k, & 0 < \hat{u}|_{eee}^k < \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\hat{u}|_{eee}^k(u|_e^k - u|_{eeee}^k) + \frac{3}{8}u|_e^k + \frac{5}{8}u|_{eeee}^k, & \frac{3}{8} \leq \hat{u}|_{eee}^k \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\hat{u}|_{eee}^k(u|_e^k - u|_{eeee}^k) + \frac{3}{4}u|_e^k + \frac{1}{4}u|_{eeee}^k, & \frac{3}{4} < \hat{u}|_{eee}^k < 1 \\ u|_{eee}^k, & \hat{u}|_{eee}^k \leq 0 \text{ ou } \hat{u}|_{eee}^k \geq 1 \end{cases}$$

No caso do termo  $u|_P^k$ , conforme apresentado na Figura C.5(a), se  $\bar{U}|_P^k \geq 0$ , sua aproximação é

$$u|_P^k = \begin{cases} \frac{7}{4}\hat{u}|_w^k(u|_e^k - u|_{www}^k) + u|_{www}^k, & 0 < \hat{u}|_w^k < \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\hat{u}|_w^k(u|_e^k - u|_{www}^k) + \frac{3}{8}u|_e^k + \frac{5}{8}u|_{www}^k, & \frac{3}{8} \leq \hat{u}|_w^k \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\hat{u}|_w^k(u|_e^k - u|_{www}^k) + \frac{3}{4}u|_e^k + \frac{1}{4}u|_{www}^k, & \frac{3}{4} < \hat{u}|_w^k < 1 \\ u|_w^k, & \hat{u}|_w^k \leq 0 \text{ ou } \hat{u}|_w^k \geq 1 \end{cases}$$

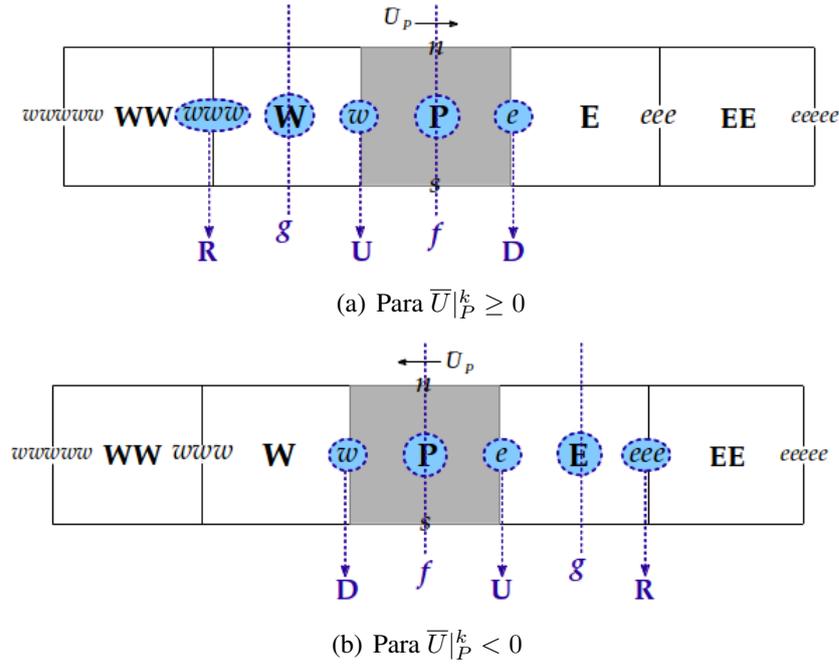


Figura C.5: Pontos da malha utilizados para a aproximação de  $u_P^k$  por meio do esquema CU-BISTA

mas quando  $\bar{U}_P^k < 0$ , com base na Figura C.5(b),

$$u_P^k = \begin{cases} \frac{7}{4}\hat{u}_e^k(u_w^k - u_{eee}^k) + u_{eee}^k, & 0 < \hat{u}_e^k < \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\hat{u}_e^k(u_w^k - u_{eee}^k) + \frac{3}{8}u_w^k + \frac{5}{8}u_{eee}^k, & \frac{3}{8} \leq \hat{u}_e^k \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\hat{u}_e^k(u_w^k - u_{eee}^k) + \frac{3}{4}u_w^k + \frac{1}{4}u_{eee}^k, & \frac{3}{4} < \hat{u}_e^k < 1 \\ u_e^k, & \hat{u}_e^k \leq 0 \text{ ou } \hat{u}_e^k \geq 1 \end{cases}$$

Se  $\bar{V}_{ne}^k \geq 0$  a aproximação para o termo  $u_{ne}^k$ , tendo como base a Figura C.6(a), é dada por

$$u_{ne}^k = \begin{cases} \frac{7}{4}\hat{u}_e^k(u_{nne}^k - u_{sse}^k) + u_{sse}^k, & 0 < \hat{u}_e^k < \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\hat{u}_e^k(u_{nne}^k - u_{sse}^k) + \frac{3}{8}u_{nne}^k + \frac{5}{8}u_{sse}^k, & \frac{3}{8} \leq \hat{u}_e^k \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\hat{u}_e^k(u_{nne}^k - u_{sse}^k) + \frac{3}{4}u_{nne}^k + \frac{1}{4}u_{sse}^k, & \frac{3}{4} < \hat{u}_e^k < 1 \\ u_e^k, & \hat{u}_e^k \leq 0 \text{ ou } \hat{u}_e^k \geq 1 \end{cases}$$

e se  $\bar{V}_{ne}^k < 0$ , conforme Figura C.6(b),

$$u_{ne}^k = \begin{cases} \frac{7}{4}\hat{u}_{nne}^k(u_e^k - u_{nnne}^k) + u_{nnne}^k, & 0 < \hat{u}_{nne}^k < \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\hat{u}_{nne}^k(u_e^k - u_{nnne}^k) + \frac{3}{8}u_e^k + \frac{5}{8}u_{nnne}^k, & \frac{3}{8} \leq \hat{u}_{nne}^k \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\hat{u}_{nne}^k(u_e^k - u_{nnne}^k) + \frac{3}{4}u_e^k + \frac{1}{4}u_{nnne}^k, & \frac{3}{4} < \hat{u}_{nne}^k < 1 \\ u_{nne}^k, & \hat{u}_{nne}^k \leq 0 \text{ ou } \hat{u}_{nne}^k \geq 1 \end{cases}$$

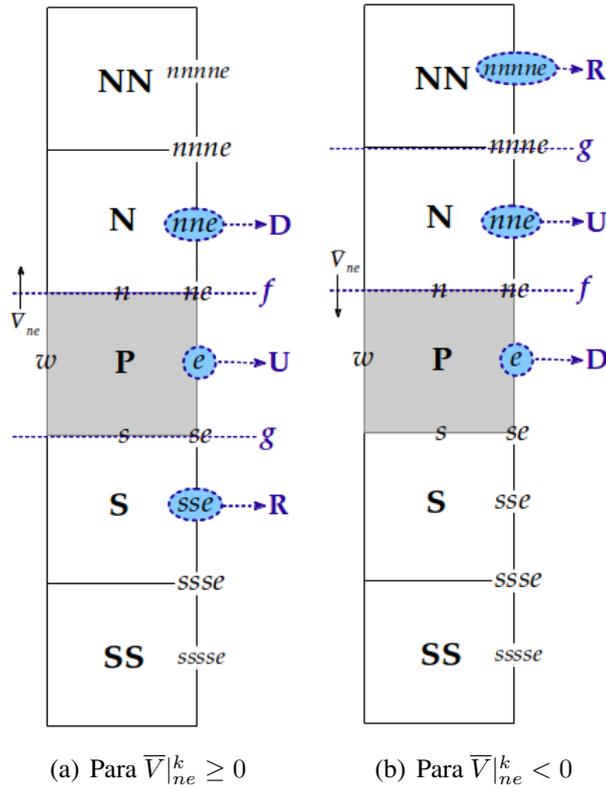


Figura C.6: Pontos da malha utilizados para a aproximação de  $u|_{ne}^k$  por meio do esquema CU-BISTA

Quando  $\bar{V}|_{se}^k \geq 0$  a aproximação do termo  $u|_{se}^k$ , considerando a Figura C.7(a), é dada por

$$u|_{se}^k = \begin{cases} \frac{7}{4}\hat{u}|_{sse}^k(u|_e^k - u|_{sssse}^k) + u|_{sssse}^k, & 0 < \hat{u}|_{sse}^k < \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\hat{u}|_{sse}^k(u|_e^k - u|_{sssse}^k) + \frac{3}{8}u|_e^k + \frac{5}{8}u|_{sssse}^k, & \frac{3}{8} \leq \hat{u}|_{sse}^k \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\hat{u}|_{sse}^k(u|_e^k - u|_{sssse}^k) + \frac{3}{4}u|_e^k + \frac{1}{4}u|_{sssse}^k, & \frac{3}{4} < \hat{u}|_{sse}^k < 1 \\ u|_{sse}^k, & \hat{u}|_{sse}^k \leq 0 \text{ ou } \hat{u}|_{sse}^k \geq 1 \end{cases}$$

e no caso em que  $\bar{V}|_{se}^k < 0$ , conforme Figura C.7(b), temos

$$u|_{se}^k = \begin{cases} \frac{7}{4}\hat{u}|_e^k(u|_{sse}^k - u|_{nne}^k) + u|_{nne}^k, & 0 < \hat{u}|_e^k < \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\hat{u}|_e^k(u|_{sse}^k - u|_{nne}^k) + \frac{3}{8}u|_{sse}^k + \frac{5}{8}u|_{nne}^k, & \frac{3}{8} \leq \hat{u}|_e^k \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\hat{u}|_e^k(u|_{sse}^k - u|_{nne}^k) + \frac{3}{4}u|_{sse}^k + \frac{1}{4}u|_{nne}^k, & \frac{3}{4} < \hat{u}|_e^k < 1 \\ u|_e^k, & \hat{u}|_e^k \leq 0 \text{ ou } \hat{u}|_e^k \geq 1 \end{cases}$$

Agora, considerando a expressão (4.14), a discretização de  $\mathcal{C}(v)$ , por diferenças finitas, na face  $n$  da célula centrada no ponto  $P$ , no nível de tempo  $k$ , é

$$\mathcal{C}(v)|_n^k \approx \bar{U}|_{ne}^k v|_{ne}^k - \bar{U}|_{nw}^k v|_{nw}^k + \bar{V}|_N^k v|_N^k - \bar{V}|_P^k v|_P^k$$



A aproximação do termo  $v|_{nw}^k$ , quando  $\bar{U}|_{nw}^k \geq 0$ , é dada por

$$v|_{nw}^k = \begin{cases} \frac{7}{4}\hat{v}|_{nww}^k(v|_n^k - v|_{nwwww}^k) + v|_{nwwww}^k, & 0 < \hat{v}|_{nww}^k < \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\hat{v}|_{nww}^k(v|_n^k - v|_{nwwww}^k) + \frac{3}{8}v|_n^k + \frac{5}{8}v|_{nwwww}^k, & \frac{3}{8} \leq \hat{v}|_{nww}^k \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\hat{v}|_{nww}^k(v|_n^k - v|_{nwwww}^k) + \frac{3}{4}v|_n^k + \frac{1}{4}v|_{nwwww}^k, & \frac{3}{4} < \hat{v}|_{nww}^k < 1 \\ v|_{nww}^k, & \hat{v}|_{nww}^k \leq 0 \text{ ou } \hat{v}|_{nww}^k \geq 1 \end{cases}$$

mas se  $\bar{U}|_{nw}^k < 0$ ,

$$v|_{nw}^k = \begin{cases} \frac{7}{4}\hat{v}|_n^k(v|_{nww}^k - v|_{nee}^k) + v|_{nee}^k, & 0 < \hat{v}|_n^k < \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\hat{v}|_n^k(v|_{nww}^k - v|_{nee}^k) + \frac{3}{8}v|_{nww}^k + \frac{5}{8}v|_{nee}^k, & \frac{3}{8} \leq \hat{v}|_n^k \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\hat{v}|_n^k(v|_{nww}^k - v|_{nee}^k) + \frac{3}{4}v|_{nww}^k + \frac{1}{4}v|_{nee}^k, & \frac{3}{4} < \hat{v}|_n^k < 1 \\ v|_n^k, & \hat{v}|_n^k \leq 0 \text{ ou } \hat{v}|_n^k \geq 1 \end{cases}$$

Quando  $\bar{V}|_N^k \geq 0$  podemos calcular  $v|_N^k$  a partir da seguinte expressão

$$v|_N^k = \begin{cases} \frac{7}{4}\hat{v}|_n^k(v|_{nnn}^k - v|_s^k) + v|_s^k, & 0 < \hat{v}|_n^k < \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\hat{v}|_n^k(v|_{nnn}^k - v|_s^k) + \frac{3}{8}v|_{nnn}^k + \frac{5}{8}v|_s^k, & \frac{3}{8} \leq \hat{v}|_n^k \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\hat{v}|_n^k(v|_{nnn}^k - v|_s^k) + \frac{3}{4}v|_{nnn}^k + \frac{1}{4}v|_s^k, & \frac{3}{4} < \hat{v}|_n^k < 1 \\ v|_n^k, & \hat{v}|_n^k \leq 0 \text{ ou } \hat{v}|_n^k \geq 1 \end{cases}$$

mas quando  $\bar{V}|_N^k < 0$ ,  $v|_N^k$  é aproximado por

$$v|_N^k = \begin{cases} \frac{7}{4}\hat{v}|_{nnn}^k(v|_n^k - v|_{nnnnn}^k) + v|_{nnnnn}^k, & 0 < \hat{v}|_{nnn}^k < \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\hat{v}|_{nnn}^k(v|_n^k - v|_{nnnnn}^k) + \frac{3}{8}v|_n^k + \frac{5}{8}v|_{nnnnn}^k, & \frac{3}{8} \leq \hat{v}|_{nnn}^k \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\hat{v}|_{nnn}^k(v|_n^k - v|_{nnnnn}^k) + \frac{3}{4}v|_n^k + \frac{1}{4}v|_{nnnnn}^k, & \frac{3}{4} < \hat{v}|_{nnn}^k < 1 \\ v|_{nnn}^k, & \hat{v}|_{nnn}^k \leq 0 \text{ ou } \hat{v}|_{nnn}^k \geq 1 \end{cases}$$

Por fim, quando  $\bar{V}|_P^k \geq 0$  temos

$$v|_P^k = \begin{cases} \frac{7}{4}\hat{v}|_s^k(v|_n^k - v|_{sss}^k) + v|_{sss}^k, & 0 < \hat{v}|_s^k < \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\hat{v}|_s^k(v|_n^k - v|_{sss}^k) + \frac{3}{8}v|_n^k + \frac{5}{8}v|_{sss}^k, & \frac{3}{8} \leq \hat{v}|_s^k \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\hat{v}|_s^k(v|_n^k - v|_{sss}^k) + \frac{3}{4}v|_n^k + \frac{1}{4}v|_{sss}^k, & \frac{3}{4} < \hat{v}|_s^k < 1 \\ v|_s^k, & \hat{v}|_s^k \leq 0 \text{ ou } \hat{v}|_s^k \geq 1 \end{cases}$$

mas se  $\bar{V}|_P^k < 0$ ,

$$v|_P^k = \begin{cases} \frac{7}{4}\hat{v}|_n^k(v|_s^k - v|_{nnn}^k) + v|_{nnn}^k, & 0 < \hat{v}|_n^k < \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\hat{v}|_n^k(v|_s^k - v|_{nnn}^k) + \frac{3}{8}v|_s^k + \frac{5}{8}v|_{nnn}^k, & \frac{3}{8} \leq \hat{v}|_n^k \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\hat{v}|_n^k(v|_s^k - v|_{nnn}^k) + \frac{3}{4}v|_s^k + \frac{1}{4}v|_{nnn}^k, & \frac{3}{4} < \hat{v}|_n^k < 1 \\ v|_n^k, & \hat{v}|_n^k \leq 0 \text{ ou } \hat{v}|_n^k \geq 1 \end{cases}$$

# Referências Bibliográficas

- [1] ALVES, M. A., OLIVEIRA, P. J., AND PINHO, F. T. A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 41 (2003), 47–75.
- [2] AMSDEN, A. A., AND HIRT, C. W. A simple scheme for generating general curvilinear grids. *Journal of Computational Physics* 11 (1973), 348–359.
- [3] BARFIELD, W. D. An optimal mesh generator for lagrangian hydrodynamis calculation is two space dimensions. *Journal of Computational Physics* 6 (1970), 417–429.
- [4] BENTON, E., AND PLATZMAN, G. W. A table of solution of one dimensional burgers equation. *Quarterly of Applied Mathematics*, 30 (1972), 195–212.
- [5] BONO, G., LYRA, P. R. M., AND BONO, G. F. F. Solução numérica de escoamentos incompressíveis com simulação de grandes escalas. *Mecânica Computacional* 30 (2011), 1423–1440.
- [6] CENEDESE, E. Solução das equações de burgers e de navier-stokes bidimensionais utilizando a técnica da transformada integral generalizada. Dissertação, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, fev. 2005.
- [7] CIRILO, E. R., AND DE BORTOLI, A. L. Geração da malha da traquéia e dos tubos bronquiais por spline cúbico. *Semina: Ciências Exatas e Tecnológicas* 27, 2 (2006), 147–155.
- [8] CORRÊA, L. Um novo esquema upwind de alta resolução para equações de conservação não estacionárias dominadas por convecção. Dissertação, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, abr. 2011.
- [9] COSTA, C. G. Leis de conservação hiperbólicas 2d com termos fonte stiff. Dissertação, Faculdade de Ciência e Tecnologia de Presidente Prudente, Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, mar 2013.
- [10] COSTA, L. T., AND RIBEIRO, M. C. C. Propriedades dinâmicas de fluidos por simulação computacional: Métodos híbridos atomístico-contínuo. *Química Nova* 33, 4 (2010), 938–944.
- [11] COURANT, R., ISAACSON, E., AND REES, M. On the solution of non-linear hyperbolic differential equations by finite differences. *Comm. Pure Appl. Maths* 5 (1952).
- [12] DA CUNHA, P. L. Alguns aspectos numéricos e teóricos das equações de navier-stokes na modelagem do escoamento em torno de um vórtice. Dissertação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Instituto de Matemática, Porto Alegre, mar. 2006.

- [13] DE BORTOLI, A. L. *Introdução à Dinâmica de Fluidos Computacional*. UFRGS, Porto Alegre, 2000.
- [14] DE LIMA, G. A. B. Desenvolvimento de estratégias de captura de descontinuidades para leis de conservação e problemas relacionados em dinâmica dos fluidos. Dissertação, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, fev. 2010.
- [15] DE OLIVEIRA, F. S., DE OLIVEIRA, S. L. G., KISCHINHEVSKY, M., AND TAVARES, J. M. R. S. Malhas móveis para solução numérica de equações diferenciais parciais. *Revista de Sistemas de Informação da FSMA*, 11 (2013), 11–16.
- [16] DE SOUZA, D. A. F. Algoritmo adaptativo implícito/explicito por arestas para solução de problemas de transporte tridimensionais. Dissertação, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002.
- [17] DE SOUZA, L. V., DE CASTRO, C. C., AND CERRI, G. G. Avaliação da aterosclerose carotídea por intermédio de ultra-sonografia e ressonância magnética. *Radiol Bras.* 38 (2005), 81–94.
- [18] DOS REIS, G. A. Métodos com passo temporal adaptativo para a simulação de escoamentos com superfícies livres. Dissertação, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.
- [19] FERREIRA, V. G. *Análise e Implementação de Esquemas de Convecção e Modelos de Turbulência para Simulação de Escoamentos Incompressíveis Envolvendo Superfícies Livres*. Tese, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, out. 2001.
- [20] FERREIRA, V. G., KAIBARA, M. K., AND NAVARRO, H. A. *Modelagem Matemática e Simulação Numérica em Dinâmica dos Fluidos*. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, São Carlos, SP, 2005.
- [21] FERZIGER, J. H., AND PERIC, M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [22] FORTUNA, A. O. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos básicos e aplicações*, 2a. ed. EDUSP, São Paulo, 2012.
- [23] FOX, R. W., AND MCDONALD, A. T. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. Guanabara, Rio de Janeiro, 1985.
- [24] FUKUJIMA, M. M., AND GABBAI, A. A. Conduitas na estenose da carótida. *Rev. Neurociências* 7 (1999), 39–44.
- [25] GASKELL, P. H., AND LAU, A. K. C. Curvature-compensated convective transport: Smart, a new boundedness preserving transport algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 8 (1988), 617–641.
- [26] GHIA, U., GHIA, K. N., AND SHIN, C. T. High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and multigrid method. *Journal of Computational Physics* 48 (1982), 387–411.

- [27] GILES, R. V. *Mecânica dos Fluidos e Hidráulica*. McGraw-Hill, São Paulo, 1977.
- [28] GODUNOV, S. K., AND PROKOPOV, G. P. The solution of differential equations by the use of curvilinear difference networks. *U.S.S.R. Computational Math Phys.* 8 (1968), 1.
- [29] GRIEBEL, M., DORNSEIFER, T., AND NEUNHOEFFER, T. *Numerical Simulation in Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) Press, Filadélfia, 1998.
- [30] GUIMARÃES, K. D. Acoplamento de modelos dimensionalmente heterogêneos: Formulações variacionais e métodos iterativos. Dissertação, Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, abr. 2011.
- [31] GUPTA, M. M., AND KALITA, J. C. A new paradigm for solving navier-stokes equations: streamfunction-velocity formulation. *Journal of Computational Physics* 207 (2005), 52–68.
- [32] HALLIDAY, RESNICK, AND WALKER, J. *Fundamentos de Física: Gravitação, ondas e termodinâmica*, 8 ed., vol. 2. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 2009.
- [33] HARTEN, A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics* 83 (1983), 357–393.
- [34] HESS, J. L., AND SMITH, A. M. O. Calculation of potential flow about arbitrary bodies. *Progress in Aeronautical Sciences* 8 (1967), 1–138.
- [35] HOU, S., ZOU, Q., CHEN, S., DOOLEN, G., AND COGLEY, A. Simulation of cavity flows by the lattice boltzmann method. *Journal of Computational Physics* 118 (1995), 329–347.
- [36] JIANHUA, W., WANZHENG, A., AND QI, Z. Head loss coefficient of orifice plate energy dissipator. *Journal of Hydraulic Research* 48, 4 (2010), 526–530.
- [37] KAMEMOTO, K. Development of the vortex methods for grid-free lagrangian direct numerical simulation. *Proceedings of the 3th JSME-KSME Fluids Engineering Conference* (jul. 1994), 542–547.
- [38] KEMPENICH, G. *Curso de Projetos de Instrumentação*. Instituto Mauá de Tecnologia, São Paulo, 1985.
- [39] LAMB, H. *Hydrodynamics*. Dover Publications Inc., Nova York, 1945.
- [40] LAYEK, G. C., AND MIDYA, C. Effect of constriction height on flow separation in a two-dimensional channel. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 12 (2007), 745–759.
- [41] LEONARD, B. P. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Comp. Method Appl. Mech. Engr.* 19 (1979), 59–98.
- [42] LEONARD, B. P. Simple high-accuracy resolution program for convective modelling of discontinuities. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 8 (1988), 1291–1318.

- [43] LEONARD, B. P. Universal limiter for transient interpolation modeling of the advective transport equations: the ultimate conservation difference scheme. *NASA technical Memorandum 100916* (1988).
- [44] LIN, H., AND CHIENG, C. C. Characteristic-based flux limiters of an essentially third-order flux-splitting method for hyperbolic conservation laws. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 13 (1991), 287–307.
- [45] LUSIS, A. J. Atherosclerosis. *Nature* 407 (2000), 233–241.
- [46] MALISKA, C. R. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*, 2a. ed. LTC, Rio de Janeiro, 2013.
- [47] MANAGEMENT, E. P. Fundamentals of orifice meter measurement. Tech. rep.
- [48] MANAGEMENT, E. P. Medidores de vazão com orifício compacto da rosemount. Tech. rep.
- [49] MARCHI, C. H., SUERO, R., AND ARAKI, L. K. The lid-driven square cavity flow: numerical solution with a 1024x1024 grid. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* 31 (2009), 186–198.
- [50] MARQUES, A. C. Desenvolvimento de modelo numérico utilizando o método de volumes finitos em malhas não-estruturadas. Dissertação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2005.
- [51] MARTINS, F. P. Desenvolvimento de um método numérico implícito para a simulação de escoamentos viscoelásticos com superfícies livres. Dissertação, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.
- [52] MCKEE, S., TOMÉ, M. F., FERREIRA, V. G., CUMINATO, J. A., CASTELO, A., SOUZA, F. S., AND MANGIAVACCHI, N. Review: The mac method. *Computers and Fluids*, 37 (2008), 907–930.
- [53] MEDEIROS, C. B. Soluções das equações de burgers 1d e 2d via: Upwind de alta ordem e hopf-cole. Dissertação, Universidade Estadual de Londrina, 2013.
- [54] MEITZ, H. L., AND FASEL, H. F. A compact-difference scheme for the navier-stokes equations in vorticity-velocity formulation. *J. Comp. Phys.* 157 (2000), 371–403.
- [55] MILIOLI, F. E. Solução numérica de problemas bidimensionais de convecção natural em cavidades arbitrárias. Dissertação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, abr. 1985.
- [56] MIRANDA, A. M. Escoamento laminar de fluidos viscosos: Equações de navier-stokes. Monografia, Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2007.
- [57] MOTA, M. A. A., AND MALISKA, C. R. Simulação numérica de reservatórios de petróleo utilizando coordenadas generalizadas e interpolação tvd. *Encontro Nacional de Ciências Térmicas*, 5 (1994).
- [58] MUNSON, B. R., AND YOUNG, D. F. *Fundamentos da Mecânica dos Fluidos*, 4a. ed. Edgard Blücher, São Paulo, 2004.

- [59] PEDROSO, C. A. Simulação de fluxos bidimensionais, laminares e incompressíveis entre superfícies móveis. Dissertação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, jan. 2001.
- [60] PIVEM, A. C., FILHO, A. C., NONATO, L. G., SIMÃO, A. S., DE SOUZA, F. S., AND MANGIAVACCHI, N. Simulação numérica do transporte da temperatura e de espécies constituintes em reservatórios hidrelétricos utilizando método de elementos finitos em malhas não-estruturadas. *Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, 30 (2007).
- [61] QUEIROZ, R. A. B., AND FERREIRA, V. G. Esquemas polinomiais upwind e suas aplicações em escoamentos incompressíveis 3d transientes. *Congresso Nacional de Estudantes de Engenharia Mecânica*, 14 (2007).
- [62] QUEIROZ, T. E. Animação computacional de escoamento de fluidos utilizando o método sph. Dissertação, ICMC - Universidade de São Paulo, São Carlos, jun 2009.
- [63] RUGGIERO, M. A. G., AND LOPES, V. L. R. *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*, 2a. ed. Pearson Makron Books, São Paulo, 1996.
- [64] SANTOS, J. P. L. *Estratégias adaptativas para formulações mistas em elementos finitos aplicadas a modelos reológicos viscoelásticos e modelos lineares incompressíveis*. Tese, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, jul. 2011.
- [65] SCHÄFER, M. *Computational Engineering: Introduction to Numerical Methods*. Springer-Verlag, Berlin; Heidelberg, 2006.
- [66] SILVEIRA, M. R., AND MARIANI, V. C. Investigação das equações de navier-stokes e conservação da massa. *Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, 28 (2005).
- [67] SWEBY, P. K. High resolution scheme using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 21 (1984), 995–1011.
- [68] THOMPSON, J. F., THAMES, F. C., AND MASTIN, W. C. Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies. *Journal of Computational Physics* 15 (1974), 299–319.
- [69] THOMPSON, J. F., THAMES, F. C., AND MASTIN, W. C. Boundary fitted curvilinear coordinate system for solution of partial differential equations on fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies. *NASA Langley Research Centre CR-2729* (1976).
- [70] THOMPSON, J. F., THAMES, F. C., AND MASTIN, W. C. Tomcat-a code for numerical generation of boundary-fitted curvilinear coordinate systems of fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies. *Journal of Computational Physics* 24 (1977), 274–302.
- [71] THOMPSON, J. F., WARSI, Z. U. A., AND MASTIN, C. W. *Numerical Grid Generation: Foundations and Applications*. North-Holland, 1985.

- [72] WATERSON, N. P., AND DECONINCK, H. Design principles for bounded high-order convection schemes - a unified approach. *Journal of Computational Physics* 224 (2007), 182–207.