Universidade Estadual de Londrina

RODRIGO CAPOBIANCO

DECAIMENTO DE ENERGIA PARA UM MODELO VISCOELÁSTICO DE PLACAS

Londrina
2014

RODRIGO CAPOBIANCO

DECAIMENTO DE ENERGIA PARA UM MODELO VISCOELÁSTICO DE PLACAS

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva

Londrina
2014

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação -na-Publicação (CIP)

C245d Capobianco, Rodrigo.

Decaimento de energia para um modelo viscoelástico de placas / Rodrigo Capobianco. – Londrina, 2014.
77 f. : il.

Orientador: Marcio Antonio Jorge da Silva.
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2014.

Inclui Bibliografia.

1. Equações diferenciais - Soluções numéricas - Teses. 2. Análise numérica - Teses. 3. Perturbação (Matemática) - Teses. 4. Estabilidade - Teses. 5. Operadores lineares - Teses. I. Silva, Marcio Antonio Jorge da. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

CDU 519.61-7

RODRIGO CAPOBIANCO

DECAIMENTO DE ENERGIA PARA UM MODELO VISCOELÁSTICO DE PLACAS

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Márcio Antônio Jorge da Silva
UEL – Londrina – PR

____

Prof. Dr. To Fu Ma
UFSCAR – São Carlos – SP

____

Prof. Dr. Vando Narciso
UEMS – Maracaju – MS

Londrina, 11 de Fevereiro de 2014.

Dedico este trabalho a minha mãe Tereza e a minha tia Rosa.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por me dar forças para sempre seguir em frente, mesmo quando as coisas não estão bem.

À minha família pelas orações e por me apoiar incondicionalmente.

A todos os meus amigos que fizeram parte dessa caminhada.

À Alessandra por me mostrar o caminho acadêmico.

À Juliana por toda motivação e confiança.

À Simone por todos os momentos que compartilhamos e por tornar possível a minha ida para o Doutorado.

À Professora Bia pela compreensão e por todo seu cuidado maternal.

Ao meu irmão André por suas palavras sábias e por suas ideias mirabolantes que sempre me fazem rir muito. “Deixa com pai que o pai sabe.”

Ao meu amigo Frederix pelas nossas conversas filosóficas regadas com muito tereré e pelos bons conselhos.

Ao grande mestre Professor Donizetti que desde o início me ajudou e acreditou nesse trabalho.

Ao meu amigo Arthur por me ajudar desde a graduação com seus conhecimentos matemáticos.

Agradecimento especial para meu Orientador Marcio pela atenção, paciência e que me mostrou como a matemática é apaixonante.

CAPOBIANCO, Rodrigo Capobianco. **Decaimento de Energia para um modelo Viscoelástico de Placas**. 2014. 77. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é provar a existência, unicidade e o comportamento assintótico de solução para uma equação viscoelástica de placas com termo não local. A prova de existência é feita por meio do Método de Faedo-Galerkin. Para obtermos o comportamento assintótico da solução utilizamos método da pertubação de energia.

Palavras-chave: Equação viscoelástica de placas. Existência e unicidade de soluções. Estabilização uniforme.

CAPOBIANCO, Rodrigo Capobianco. **Decay of Energy for plate model viscoelastic**. 2014. 77. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

ABSTRACT

The purpose of this work is to prove the existence, uniqueness and asymptotic behavior of solution for a viscoelastic plate equation with a nonlocal term. The proof of the existence of solutions is made by Faedo-Galerkin method. To establish the asymptotic behavior of the solution we use energy perturbation method.

Keywords: Viscoelastic plate equation. Existence and uniqueness of solutions. Uniform stabilization.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresentamos de forma detalhada os resultados sobre existência e estabilidade de soluções, baseados no artigo de Cavalcanti, Domingos Cavalcanti e Ma [7], para o seguinte Problema de Valor Inicial e de Fronteira envolvendo a seguinte equação viscoelástica da placa com dissipação não local

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-\tau)\Delta^2 u(\tau)\, d\tau + M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right) u_t = 0 \;\text{ em }\; \Omega \times (0,\infty), \\ u = \Delta u = 0 \;\text{ sobre }\; \partial\Omega \times [0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde consideramos hipóteses menos restritivas sobre as funções g e M. Mais precisamente, em [7] os autores estabeleceram existência e unicidade de soluções fracas impondo restrições a g, g' e g'', e também com $M \in C^1([0,\infty))$ tal que $M(s) \geq 0$ para todo $s \geq 0$. Além disso, para determinar que tal solução decai de forma exponencial, foi assumido fortemente que

$$M(s) \geq \lambda_0 > 0, \quad \forall\, s \geq 0, \tag{2}$$

ou seja, o termo $M(\|\nabla u(t)\|_2^2)u_t$ representa uma dissipação friccional que atua em toda placa. Neste trabalho, os mesmos resultados sobre existência e decaimento foram obtidos utilizando apenas hipóteses sobre g, g' e $M \geq 0$, mas sem a necessidade de considerar a condição (2). Isto nos permite dizer que o termo de memória no problema (1) é suficiente para estabilizar o sistema.

Para $g = 0$ temos o artigo de Lange e Perla Menzala [12] onde a seguinte equação foi considerada

$$u_{tt} + \Delta^2 u + M(\|\nabla u(t)\|_2^2)u_t = 0 \quad \text{em} \quad \Omega = \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Em [12] os autores observaram que a parte imaginaria da solução da equação de Shrödinger

$$iw_t = \Delta w + iM\left(\|\nabla(Im\, w)\|_2^2\right) Re\, w,$$

é precisamente a solução de (3). Quando o núcleo da memória é não nulo, isto é, para $g \neq 0$ existem vários resultados conhecidos que relatam o comportamento assintótico da solução do sistema viscoelástico de ondas. Um trabalho pioneiro para sistemas viscoelásticos foi introduzido por Dafermos [10], que mostrou que a solução para o sistema viscoelástico tende para zero à medida que o tempo vai para infinito, mas sem dar taxa explícita de decaimento. Em 1996 Muñoz Rivera [18] obteve taxas uniforme de decaimento para soluções de equações viscoelásticas com memória, onde ficou provado que a taxa de decaimento da solução depende da taxa de decaimento da função relaxação g, ou seja, se o núcleo da memória g decai exponencialmente então a solução decai exponencialmente, se a função g decai polinomialmente então a solução decai polinomialmente com a mesma taxa. Para sistemas viscoelásticos de ondas com dissipação friccional mencionamos o trabalho de Cavalcanti et al. [8] sob a condição

$$\xi_1 g(t) \leq g'(t) \leq -\xi_2 g(t), \quad t \geq 0,$$

onde os autores obtiveram uma taxa de decaimento exponencial para a solução do problema. Berrimi e Messaoudi [3] melhoraram os resultados de Cavalcanti [8] e mostraram que a dissipação viscoelástica é suficiente para estabilizar o sistema. Para isso, em [3] os autores introduziram um novo funcional o qual lhes permitiram enfraquecer as condições sobre g, bem como sobre o dissipação localizado. Prosseguindo, nosso objetivo num segundo momento foi de estender os conceitos estabelecidos em [7] ao utilizarmos o funcional análogo a Berrimi [3], mas aplicado agora a um sistema viscoelástico de placas com um termo não local. Neste caso, a dissipação $M(\|\nabla u(t)\|_2^2)u_t$ não se faz mais necessária para obtermos o decaimento exponencial. Por outro lado, o problema não-linear torna-se um problema linear no caso em que $M \equiv 0$. Em Muñoz Rivera e Naso [19] estudou-se o comportamento assintótico do sistema viscoelástica abstrato da forma

$$u_{tt} + Au(t) - (g * Au)(t) = 0,$$

onde $(g * Au)(t) = \int_0^t g(t-\tau)Au(\tau)\,d\tau$ e A é um operador linear auto-adjunto e positivo definido. Neste último trabalho foi estabelecido condições necessárias e suficientes para obter decaimento exponencial. Caso não ocorra decaimento exponencial, então um decaimento polinomial foi provado. A nossa contribuição neste trabalho consiste em "generalizar" o resultado de decaimento visto anteriormente em [7]. Mais precisamente, mostrar que a energia decai com uma taxa de decaimento similar a da função relaxamento g, que não é necessariamente um decaimento na forma exponencial ou polinomial.

A dissertação encontra-se organizada conforme segue. No primeiro capítulo apresentaremos algumas definições, notações e resultados básicos, necessários ao longo de todo o trabalho. No segundo capítulo, provaremos a existência e unicidade de solução para o problema dado utilizando o método de Faedo-Galerkin e estabeleceremos taxas de decaimento para a energia via método de energia perturbada. No terceiro capítulo, utilizando ideias análogas a Berrimi e Messaoudi [2], consideramos $M \equiv 0$ em (1) e mostramos decaimento geral de solução. Para equação viscoelásticas de ondas, o método aqui aplicado também pode ser encontrado em Messaoudi [16].

1 PRELIMINARES

Destinamos este capítulo à fixação de notações que serão utilizadas em toda a dissertação bem como apresentar alguns dos resultados da teoria geral de análise funcional, espaços de Sobolev e equações diferenciais parciais que serão usadas nos capítulos seguintes. Os resultados serão apresentados sem uma prova formal, porém em cada seção fornecemos as referências clássicas dentro da literatura para os conceitos e resultados citados.

1.1 DISTRIBUIÇÕES E ESPAÇOS FUNCIONAIS

1.1.1 Espaços das Funções Testes

Dado um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e um ponto $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, define-se $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ a ordem do multi-índice e representaremos por D^α operador de Derivação de ordem α, definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, ..., 0)$, temos por definição $D^0\varphi = \varphi$ para toda função φ.

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que tem suporte compacto, onde suporte φ é o fecho do conjunto $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$ em Ω, ou seja, $supp\,(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^{\Omega}$.

Dizemos que uma sequência $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero, denotando $\varphi_n \to 0$, se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω, tal que:

i) $supp\,(\varphi_n) \subset K, \forall\, n \in \mathbb{N}$;

ii) $D^\alpha\varphi_n \to D^\alpha\varphi$ uniformemente sobre $K, \forall\alpha \in \mathbb{N}^n$.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido desta noção de convergência, é denominado espaço das funções testes, e denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Com o intuito de generalizar o conceito de funções sobre Ω define-se o conceito de distribuições a valores reais sobre Ω a toda forma linear T sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}(\Omega)$.

O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$, chamado espaço das distribuições sobre Ω, munido da seguinte noção de convergência: Seja (T_n) uma sucessão em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Diremos que $T_n \to T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se a sequência $\langle T_n, \varphi\rangle$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Seja T uma distribuição sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T, no sentido das distribuições, é definida por:

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle; \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Verifica-se que $D^\alpha T$ é ainda um distribuição e que o operador $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$, associa cada $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ uma forma linear e contínua $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

1.1.2 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Denotamos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, o espaço das funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, mensuráveis a Lebesgue e tais que $|u|^p$ são Lebesgue integráveis em Ω. O Espaço $L^p(\Omega)$, é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para} \quad 1 \leq p < +\infty.$$

E

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u(x)|, \quad \text{para} \quad p = +\infty.$$

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno,

$$(u, v) = \int_\Omega u(x) v(x) \, dx.$$

Teorema 1.1. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis num aberto $\Omega \in \mathbb{R}^n$, convergente quase sempre para uma função u. Se existir uma função $u_0 \in L^1(\Omega)$ tal que $|u_\nu| \leq u_0$ quase sempre, $\forall \nu \in \mathbb{N}$ então u é integrável e tem-se*

$$\int_\Omega u = \lim_{\nu \to \infty} \int_\Omega u_\nu.$$

Demonstração: Ver [14] Página 49.

Proposição 1.2. (Desigualde de Young) *Sejam $1 < p, q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $a, b > 0$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Ver [4] página 92.

Observação 1.3. *No caso particular em que $p = q = 2$, a desigualdade de Young com $\epsilon > 0$ se resume em*

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2, \quad \forall \, a, b \geq 0,$$

esta desigualdade será extremamente utilizada em todos os capítulos seguintes.

Teorema 1.4. (Desigualdade de Poincaré) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $1 \leq p < \infty$. Então existe um constante $C = C(p, |\Omega|) > 0$ tal que*

$$\|u\|_p \leq C\|\nabla u\|_p, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração: Ver [4] página 218.

Proposição 1.5. (Desigualdade de Hölder) *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e temos a desigualdade*

$$\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demontração: Ver [4] página 92.

Teorema 1.6. (Teorema da Representação de Riesz-Fréchet) *Seja $(H, \|.\|_H, (.,.)_H)$ uma espaço de Hilbert. Para todo funcional $\phi \in H'$, existe um uníco $f \in H$ tal que*

$$\langle \phi, v \rangle_{H',H} = (f, v)_H, \ \ \forall\, v \in H.$$

Além disso, $\|\phi\|_{H'} = \|f\|_H$.

Demonstração: Ver [4] página 135.

Lema 1.7. (Lema de Gronwall) *Sejam $m \in L^1(a,b)$ tal que $m \geq 0$ q.s em (a,b) e seja $c \geq 0$.Consideremos $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua verificando*

$$\varphi(t) \leq c + \int_a^t m(\xi)\varphi(\xi)\, d\xi \quad \forall\, t \in [a,b].$$

Então

$$\varphi(t) \leq c e^{\int_a^t m(\xi)\, d\xi}, \quad \forall\, t \in [a,b].$$

Demonstração: Ver [15] página 198.

Lema 1.8. *Seja Ω um domínio de $\mathbb{R}^n$.*

(i) *Se $1 < p < \infty$, então $L^p(\Omega)$ é reflexivo. Entretando, $L^1(\Omega)$ e $L^\infty(\Omega)$ não são reflexivos.*

(ii) *Se $1 \leq p < \infty$, então $L^p(\Omega)$ é separável. Entretando, $L^\infty(\Omega)$ não é separável.*

Demonstração: Ver [4] páginas 95 e 98 respectivamente.

Definição 1.9. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leq p \leq +\infty$. Definimos a convolução de f por g por*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy.$$

Teorema 1.10. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leq p \leq +\infty$. Então*

$$(f * g) \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad e \quad \|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p. \tag{1.1}$$

Demonstração: Ver [4] página 104.

1.1.3 Espaço de Sobolev

Seja um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < +\infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $u \in L^p(\Omega)$ sabemos que u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, mas não é verdade, em geral, que $D^\alpha u$ seja uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Quando $D^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$ define-se um novo espaço denominado espaço de Sobolev. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence à $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{para} \quad 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |D^\alpha u| \quad \text{para} \quad p = \infty$$

é um espaço de Banach. Além disso, definimos o conjunto $W_0^{m,p}(\Omega)$ como o subespaço de $W^{m,p}(\Omega)$ constituído pelo fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, ou seja,

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}}.$$

Representa-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ devido a sua estrutura hilbertiana, ou seja, os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert. Neste caso a estrutura do produto interno vem dada por

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

Além disso, $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}$.

Teorema 1.11. **(Imersão de Sobolev)** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira de classe C^m*

(i) Se $mp < n$, então a seguinte inclusão é contínua

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad onde \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}.$$

Além disso, a inclusão é compacta para qualquer q^*, com $1 \leq q^* \leq q$.

(ii) Se $mp = n$, então a seguinte inclusão é contínua e compacta

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \;\; \forall\, 1 \leq p < \infty.$$

Além disso, se $p = 1$ e $m = n$, então vale a mesma relação acima para $q = \infty$.

Demonstração: Ver [1] página 85.

Teorema 1.12. (Fórmula de Green) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto com fronteira Γ suave. Se $u, v \in H^2(\Omega)$, então*

$$-\int_\Omega (\Delta u) v\, dx = \int_\Omega \nabla u . \nabla v\, dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v\, dS,$$

onde ν representa o vetor normal unitário exterior a Γ e $\frac{\partial u}{\partial \nu} := \nabla u \cdot \nu$ a derivada normal de u.

Demonstração: Ver [4] página 316.

Proposição 1.13. (Regularidade dos problemas elípticos) *Seja Ω um aberto de classe C^2 com fronteira Γ limitada. Sejam $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$, verificando*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Então, $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|f\|_2$, onde c é uma constante que só depende de Ω. Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e $f \in H^m(\Omega)$, então $u \in H^{m+2}(\Omega)$ com $\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c\|f\|_{H^m(\Omega)}$. Em particular, se $m > \frac{1}{2}$ então $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Ainda, se Ω é de classe C^∞ e $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, então $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [4] página 298.

1.1.4 Espaços Funcionais a Valores Vetoriais

Dados X um espaço de Banach, $T \in \mathbb{R}$ com $T > 0$. O espaço $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < +\infty$, consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[0, T]$ com imagem em X, ou seja as funções $u : (0, T) \to X$, tais que

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

O espaço $L^\infty(0, T; X)$ consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[0, T]$ com imagem em X, as funções $u : (a, b) \to X$ limitadas quase sempre em $(0, T)$. A norma neste espaço é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} := \sup \left\{ c \geq 0; \|u(t)\|_X \leq c, q.s. \right\}.$$

O espaço $C^m([a,b];X)$, consiste de todas as funções contínuas $u : [a,b] \to X$ que possuem derivadas contínuas até a ordem m sobre $[0,T]$. A norma é dada por

$$\|u\|_{C^m([a,b],X)} := \sum_{i=0}^{m} \max_{t\in[a,b]} |u^{(i)}(t)|_X.$$

O espaço das distribuições sobre $(0,T)$ com imagem em X, será denotado por

$$\mathcal{D}'(0,T;X).$$

Logo, $\mathcal{D}'(0,T;X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T);X)$, ou seja, é o conjunto de todas as aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X.

Para $f \in \mathcal{D}'(0,T;X)$, sua derivada de ordem n no sentido das distribuições vetoriais é definida por

$$\left\langle \frac{d^n f}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1) \left\langle f, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \ \ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(0,T). \tag{1.2}$$

Além disso, se f é derivável no sentido das distribuições vetoriais, então podemos enxergar $\frac{df}{dt}$ como um elemento de $\mathcal{D}'(0,T;X)$, valendo a relação (1.2).

Agora se $f \in L^p(0,T;X)$, então pode-se identificar f com uma distribuição vetorial (que aqui denotaremos por f), de modo que

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_0^T f(t)\varphi(t)\, dt, \ \ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Com isto, podemos dizer com um certo abuso de notação que

$$L^p(0,T;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T;X).$$

Teorema 1.14. (Teorema de Aubin-Lions) *Sejam B_0, B, B_1 três espaços de Banach tais que $B_0 \hookrightarrow\hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$, onde B_0 e B_1 são reflexivos. Definamos*

$$W = \{v; v \in L^{p_0}(0,T;B_0),\ v_t \in L^{p_1}(0,T;B_1)\},$$

onde $1 < p_0, p_1 < \infty$, e consideremos W munido da norma

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|v_t\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)},$$

o que o torna um espaço de Banach. Então, a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.

Demonstração: Ver [13] página 57.

Notação: $\hookrightarrow\hookrightarrow$ indica imersão compacta.

Lema 1.15. *Sejam H e V espaços de Banach, tais que $H \hookrightarrow V$. Se $u \in L^1(0,T;H)$ e $u' \in L^1(0,T;V)$, então $u \in C^0([0,T];V)$.*

Demonstração: Ver [13] página 7.

1.2 TEOREMA DE CARATHÉODORY

Nesta seção enunciaremos o teorema de Carathéodory que será utilizado no Capítulo 2. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [9].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto cujos elementos são denotados por (t,x), $t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$ e seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função.

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

dizemos que $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições de Carathéodory sobre Ω se:
(i) $f(t,x)$ é mensurável em t para cada x fixado;
(ii) $f(t,x)$ é contínua em x para quase todo t fixado;
(iii) para cada compacto $K \subset \Omega$, existe uma função real $m_K(t)$, integrável, tal que

$$\|f(t,x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq m_K(t),\ \forall (t,x) \in K.$$

Teorema 1.16. (Teorema de Carathéodory) *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre Ω. Então existe uma solução absolutamente contínua $x(t)$ de (1.3) sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta,\ \beta > 0$.*

Demonstração: Ver [9] página 45.

Corolário 1.17. *Sejam $\Omega = [0,T) \times B$ com $T > 0$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$ onde $b > 0$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ nas condições de Carathéodory sobre Ω. Suponhamos que $x(t)$ é uma solução de (1.3) tal que $|x_0| \leq b$ e que em qualquer intervalo I, onde $x(t)$ está definida, se tenha $|x(t)| \leq M$, $\forall t \in I$, M independente de I e $M < b$. Então $x(t)$ possui um prolongamento à todo $[0,T]$.*

Demonstração: Ver [9] página 47.

1.3 TOPOLOGIA FRACA $\sigma(E,E')$ E TOPOLOGIA FRACO ESTRELA $\sigma(E',E)$

Seja E um espaço de Banach, E' o seu dual topológico e consideremos $f \in E'$. Designaremos por $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$, a aplicação dada por $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$, para todo $x \in E$. À medida que f percorre E', obtemos uma família $\{\varphi_f\}_{f \in E'}$ de aplicações de E em $\mathbb{R}$.

Definição 1.18. *Seja E um espaço de Banach. A topologia fraca $\sigma(E, E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E para a qual são contínuas todas as aplicações $\varphi_f,\ f \in E'$.*

Definição 1.19. *Diremos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge fraco para $x \in E$ quando (x_n) converge a x na topologia fraca $\sigma(E, E^{'})$, isto é, para todo funcional $f \in E'$ temos*

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle .$$

Denotaremos a convergência fraca de (x_n) a x por $x_n \rightharpoonup x$.

Proposição 1.20. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E, então:*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ *em E se, e somente se,* $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle,\ \forall\, f \in E'$.

(ii) Se $x_n \to x$ em E, então $x_n \rightharpoonup x$ em E.

(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E, então $\|x_n\|_E$ é limitada e $\|x\|_E \leq \liminf \|x_n\|_E$.

(iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E e $f_n \to f$ em E', então $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Demonstração: Ver [4] página 58.

Seja E um espaço de Banach e seja $x \in E$ fixo. Definamos $J_x : E' \to \mathbb{R}$ por

$$\langle J_x, f \rangle = \langle f, x \rangle.$$

As aplicações J_x são lineares e contínuas, portanto $J_x \in E'',\ \forall\, x \in E$. Definamos, agora, $J : E \to E''$ tal que $J(x) = J_x$.

Definição 1.21. *A topologia fraco estrela também designada por $\sigma(E', E)$, é a topologia menos fina sobre E' que torna contínuas todas as aplicações J_x.*

Definição 1.22. *Diremos que uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$ converge fraco estrela para $f \in E'$ quando (f_n) converge a f na topologia fraca estrela $\sigma(E^{'}, E)$, isto é, para todo $x \in E$ temos*

$$\langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle .$$

Denotaremos a convergência fraca de (f_n) a f por $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

Proposição 1.23. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E', então:*

(i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E' se, e somente se, $\langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle,\ \forall x \in E$.

(ii) Se $f_n \to f$ em E', então $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E'.

(iii) Se $f_n \rightharpoonup f$ em E', então $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E'.

(iv) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E', então $||f_n||_{E'}$ é limitada e $||f||_{E'} \leq \liminf ||f_n||_{E'}$.

Demonstração: Ver [4] página 63.

Lema 1.24. (Compacidade fraca) *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada de E, então existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $x \in E$, tal que*

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

Demonstração: Ver [4] página 69.

Lema 1.25. (Compacidade fraca Estrela) *Sejam E um espaço de Banach separável e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada de E', então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $f \in E'$, tal que*

$$f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ em } E'.$$

Demonstração: Ver [4] página 76.

2 UM MODELO DE PLACAS COM MEMÓRIA

2.1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é mostrar a boa colocação e o comportamento assintótico de soluções fracas para o seguinte problema de placas com termo não local e memória.

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u - \displaystyle\int_0^t g(t-\tau)\Delta^2 u(\tau)\, d\tau + M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right) u_t = 0 \;\text{ em }\; \Omega \times (0,\infty), \\ u = \Delta u = 0 \;\text{ sobre }\; \partial\Omega \times [0,\infty), \\ u(\cdot,0) = u_0, \quad u_t(\cdot,0) = u_1 \quad \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde Ω é um conjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ bem regular, $\Delta^2 = \Delta(\Delta)$ denota o operador biharmônico, g é o núcleo da memória e M é uma função não linear. O resultado sobre existência de soluções é dada via método de Faedo-Galerkin. A estabilidade exponencial de soluções via método de energia perturbada, segundo Berrimi e Messaoudi [2].

As funções g e M devem satisfazer as seguintes hipóteses.

Núcleo da memória g.

$(G1)$ Seja $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função de classe C^1 tal que

$$g(0) > 0, \quad 1 - \int_0^\infty g(\tau)\, d\tau = l > 0. \tag{2.2}$$

$(G2)$ Além disso, suponhamos que exista uma constante $\xi_1 > 0$ tal que

$$g'(t) \leq -\xi_1 g(t), \quad \forall\, t \geq 0. \tag{2.3}$$

Termo não local M. Seja $M : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, com $M \in C^1([0,\infty))$, tal que

$$M(s) \geq 0, \quad \forall\, s \geq 0. \tag{2.4}$$

No que segue, fixaremos as notações que serão usadas em todo trabalho. Denotaremos em primeiro lugar, os espaços de Hilbert

$$L^2(\Omega), \quad H_0^1(\Omega), \quad H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

e

$$H_\Gamma^m(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega);\;\; u = \Delta u = 0 \;\text{ sobre }\; \partial\Omega\}$$

com $m = 3, 4$, munidos dos respectivos produtos internos e normas

$$
\begin{aligned}
(u,v) &= \int_\Omega u(x)v(x)\,dx \quad &\text{e} \quad& \|u\|_2 = \left(\int_\Omega |u(x)|^2\,dx\right)^{1/2},\\
(u,v)_{H_0^1(\Omega)} &= (\nabla u, \nabla v) \quad &\text{e} \quad& \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_2,\\
(u,v)_{H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)} &= (\Delta u, \Delta v) \quad &\text{e} \quad& \|u\|_{H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)} = \|\Delta u\|_2,\\
(u,v)_{H_\Gamma^3(\Omega)} &= (\nabla\Delta u, \nabla\Delta v) \quad &\text{e} \quad& \|u\|_{H_\Gamma^3} = \|\nabla\Delta u\|_2,\\
(u,v)_{H_\Gamma^4(\Omega)} &= (\Delta^2 u, \Delta^2 v) \quad &\text{e} \quad& \|u\|_{H_\Gamma^4} = \|\Delta^2 u\|_2.
\end{aligned}
$$

2.2 EXISTÊNCIA, DEPENDÊNCIA CONTÍNUA E UNICIDADE

De modo a resolver o problema (2.1), utilizaremos o método de Faedo-Galerkin, o qual consiste em obter um problema de valor inicial aproximado equivalente a um sistema de equações diferenciais ordinárias. Resolveremos primeiramente o problema com dados iniciais fortes e a partir de argumentos de densidade, demonstraremos a existência de solução fraca para o problema com dados fracos.

Definição 2.1. *Uma função $u : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ na classe*

$$u \in C^0([0,T], H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T], L^2(\Omega)) \tag{2.5}$$

é chamada solução fraca do problema (2.1)*, se para todo $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tem-se*

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(u_t(t), v) + (\Delta u(t), \Delta v) - \int_0^t g(t-\tau)(\Delta u(\tau), \Delta v)\,d\tau& \\
+M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(u_t(t), v) = 0&
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

em $\mathcal{D}'(0,T)$ e ainda

$$u(x,0) = u_0(x) \ \ e \ \ u_t(x,0) = u_1(x).$$

Definição 2.2. *Uma solução forte de* (2.1) *é uma função $u : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ na classe*

$$u \in L^\infty(0,T; H_\Gamma^4(\Omega)), \quad u_t \in L^\infty(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad u_{tt} \in L^2(0,T; L^2(\Omega)). \tag{2.7}$$

que satisfaz (2.1) *q.s. em $\Omega \times (0,T)$ e as condições iniciais* $(2.1)_3$ *q.s sobre* Ω.

Agora enunciaremos o principal resultado dessa seção, o qual assegura que o problema (2.1) é bem posto.

Teorema 2.3. *Seja $T > 0$ arbitrário. Sob as hipóteses* (2.2)-(2.4)*, temos:*

(i) *Se $(u_0, u_1) \in H_\Gamma^4(\Omega) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$, então o problema* (2.1) *possui uma solução forte.*

(ii) *Se* $(u_0, u_1) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times L^2(\Omega)$*, então o problema* (2.1) *possui uma solução fraca.*

Mais ainda, para os dados iniciais $(u_0, u_1) \in H_\Gamma^3(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ *a solução fraca tem mais regularidade*

$$u \in L^\infty(0, T; H_\Gamma^3(\Omega)), \quad u_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad u_{tt} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \tag{2.8}$$

(iii) *Nos três casos, a solução* (u, u_t) *depende continuamente dos dados iniciais em* $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) := \mathcal{H}$*. Mais precisamente, se* $z^1 = (u, u_t)$*,* $z^2 = (v, v_t)$*, são duas soluções do problema* (2.1) *correspondentes aos dados iniciais* $z_0^1 = (u_0, u_1)$*,* $z_0^2 = (v_0, v_1)$*, então vale a seguinte estimativa:*

$$\|z^1(t) - z^2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq C_T \|z_0^1 - z_0^2\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall\, t \in [0, T], \tag{2.9}$$

para alguma constante positiva $C_T = C_T(\|z_0^1\|_{\mathcal{H}}, \|z_0^2\|_{\mathcal{H}}, T)$*. Em particular, o problema* (2.1) *possui uma única solução.*

A prova será feita em várias etapas conforme segue.

2.2.1 Problema Aproximado

Seja $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ a base hilbertiana dada por autofunções do problema $\Delta^2 w = \lambda w$ em Ω com condições de fronteira $w = \Delta w = 0$ sobre $\partial\Omega$ tal que (w_j) seja uma base ortogonal em $H_\Gamma^4(\Omega)$ e ortonormal $L^2(\Omega)$. Denotando por $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ a sequência de autovalores correspondentes, temos também:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_j \leq \cdots \quad com\, \lambda_j \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

e

$$\begin{cases} \Delta^2 w_j = \lambda_j w_j \ \text{ em } \ \Omega, \\ w_j = \Delta w_j = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega \ \text{ com } \quad j \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.10}$$

Mais ainda, devido a regularidade dos problemas elípticos e das imersões de Sobolev temos

$$w_j \in \left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} H^m(\Omega) \right) \cap C^\infty(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Seja $V_m = [w_1 \dots w_m]$ o subespaço gerado pelas m primeiras autofunções e consideremos em V_m o problema aproximado

$$\begin{cases} u^m(t) \in V_m \Leftrightarrow u^m(t) = \sum_{i=1}^m y_{im}(t) w_i, \\ (u_{tt}^m, w_j) + (\Delta u^m, \Delta w_j) - \displaystyle\int_0^t g(t-\tau)(\Delta u^m(\tau), \Delta w_j)\, d\tau + M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(u_t^m, w_j) = 0, \\ u^m(0) = u_0^m \to u_0 \ \text{ em } \ H_\Gamma^4(\Omega), \quad u_t^m(0) = u_1^m \to u_1 \ \text{ em } H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.11}$$

Substituindo u^m no problema aproximado $(2.11)_2$, podemos escrever o sistema de equações da seguinte forma

$$y_{jm}''(t) = -\lambda_j y_{jm}(t) + \lambda_j \int_0^t g(t-\tau) y_{jm}(\tau)\, d\tau - M(\sum_{i=1}^m y_{im}^2(t) \|\nabla w_i\|_2^2) y_{jm}'(t), \tag{2.12}$$

com $j = 1, \cdots, m$ e com os dados iniciais

$$y_{jm}(0) = (u_0^m, \omega_j), \quad y_{jm}'(0) = (u_1^m, \omega_j). \tag{2.13}$$

Reescrevendo o sistema (2.12)-(2.13) na forma matricial, temos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_{1m}''(t) \\ \vdots \\ y_{mm}''(t) \end{bmatrix} = & - \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix}}_{C_1} \begin{bmatrix} y_{1m}(t) \\ \vdots \\ y_{mm}(t) \end{bmatrix} \\ & + \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix}}_{C_2} \begin{bmatrix} \int_0^t g(t-\tau) y_{1m}(\tau)\, d\tau \\ \vdots \\ \int_0^t g(t-\tau) y_{mm}(\tau)\, d\tau \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} M(\sum_{i=1}^m y_{im}^2(t)\|\nabla w_i\|_2^2) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & M(\sum_{i=1}^m y_{im}^2(t)\|\nabla w_i\|_2^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1m}'(t) \\ \vdots \\ y_{mm}'(t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} y_{m1}(0) \\ \vdots \\ y_{mm}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_0^m, w_1) \\ \vdots \\ (u_0^m, w_m) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_{m1}'(0) \\ \vdots \\ y_{mm}'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_1^m, w_1) \\ \vdots \\ (u_1^m, w_m) \end{bmatrix}.$$

Pondo

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_{1m} \\ \vdots \\ y_{mm} \end{bmatrix}, \; F(Y(t)) = \begin{bmatrix} M(\sum_{i=1}^m y_{im}^2(t)\|\nabla w_i\|_2^2) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & M(\sum_{i=1}^m y_{im}^2(t)\|\nabla w_i\|_2^2) \end{bmatrix};$$

reduzimos nossos estudos ao seguinte sistema matricial de EDO's

$$Y''(t) = -C_1 Y(t) + \int_0^t g(t-\tau) C_2 Y(\tau)\, d\tau - F(Y(t))Y'(t), \tag{2.14}$$

com condições iniciais

$$Y(0) = Y_0, \;\; Y'(0) = Y_1,$$

onde

$$Y_0 = \begin{bmatrix} (u_0^m, w_1) \\ \vdots \\ (u_0^m, w_m) \end{bmatrix} \;\; \text{e} \;\; Y_1(t) = \begin{bmatrix} (u_0^m, w_1) \\ \vdots \\ (u_0^m, w_m) \end{bmatrix}.$$

Além disso, considerando

$$X(t) = Y'(t) \;\; e \;\; Z(t) = \begin{bmatrix} Y(t) \\ X(t) \end{bmatrix}$$

temos

$$\begin{aligned} Z'(t) \quad &= \begin{bmatrix} X(t) \\ -C_1 Y(t) + \int_0^t g(t-\tau) C_2 Y(\tau)\, d\tau \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ F(Y(t))X(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \int_0^t g(t-\tau) C_2 Y(\tau)\, d\tau \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ F(Y(t))X(t), \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ou ainda, podemos escrever

$$\begin{cases} Z'(t) = f(t, Z(t)), \\ Z(0) = Z_0, \end{cases} \tag{2.15}$$

onde $f : [0,T] \times \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$ é definida por:

$$f(t, Z) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ -C_1 & -0 \end{bmatrix}}_{C(Z)} Z + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \int_0^t g(t-\tau) C_2 Y\, d\tau \end{bmatrix}}_{\varphi(t,Y)} - \begin{bmatrix} 0 \\ F(Y)X \end{bmatrix}.$$

Vamos mostrar que (2.15) satisfaz as condições de Caratheodory (ver Teorema

1.16 Cap.1), ou seja,

i) Para cada $Z \in \mathbb{R}^{2m}$ fixo a aplicação $f(t, Z)$ é mensurável em t.

De fato, como g é contínua e toda função contínua é mensurável, logo $f(\cdot, Z)$ é mensurável.

ii) Para cada t fixado a aplicação $f(t, Z)$ é contínua em Z.

Observe que a continuidade de $F(Y)X$ é proveniente do fato que $F(Y)$ é contínua, pois resulta do fato $M \in C^1(\mathbb{R}_+)$ e a continuidade de $\varphi(t, Y)$ sai de g ser contínua. Portanto a aplicação $f(t, Z)$ é contínua.

iii) Seja $K \subset [0, T] \times \mathbb{R}^{2m}$ um retângulo compacto, existe uma função $m(t)$ Lebesgue integrável $[0, T]$, tal que,

$$\|f(t, Z)\|_{2m} \leq m_K(t) \quad \forall\, (t, Z) \in K \tag{2.16}$$

Note que para todo $(t, Z) \in K$ temos

$$\|f(t, Z)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \quad \leq \quad \|C(Z)\|_{\mathbb{R}^{2m}} + \|F(Y)\|_{\mathbb{R}^{2m}}\|X\|_{\mathbb{R}^{2m}} + \|\varphi(t, Y)\|_{\mathbb{R}^{2m}}.$$

Sendo $F(Y)$ e $\varphi(t, Y)$ contínuas em $\mathbb{R}^{2m}$, bem como a aplicação linear C, existe $M_K > 0$ tal que

$$\|f(t, Z)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq M_K.$$

Tomando $m_K(t) = M_K, \ \ \forall\, t \in [0, T]$, segue que

$$\|f(t, Z)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq m_K(t), \ \ \forall (t, y) \in K.$$

Portanto pelo Teorema de Carathéodory 1.16 o sistema de EDO dado em (2.15) admite uma solução local $Z(t)$ em algum intervalo $[0, t_m)$, tal que $Z(t)$ é absolutamente contínua e $Z'(t)$ existe $q.s.$ em $[0, t_m)$. Assim o sistema (2.14) tem solução local $Y(t)$ no mesmo intervalo $(0, t_m)$ e as funções $Y(t)$ e $Y'(t)$ que são absolutamente contínuas com $Y''(t)$ existindo $q.s.$ em $[0, t_m)$. Consequentemente as funções $y_{jm}(t)$ são soluções locais de (2.12) com y_{jm}, absolutamente contínua e y''_{jm} existindo $q.s.$ em $[0, t_m)$. Portanto concluímos que a função $u_m(t)$ é uma solução local para (2.11) com $u_m(t)$, $u'_m(t)$ absolutamente contínua e $u''_m(t)$ existindo $q.s.$ em $[0, t_m)$.

Nas subseções seguintes faremos estimativas com o intuito de prolongar a solução aproximada definida para $t \in [0, t_m)$ para todo intervalo $[0, T]$.

2.2.2 Estimativa a priori 1

Considere o problema aproximado (2.11) com $(u_0^m, u_1^m) \in H^4_\Gamma(\Omega) \times (H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega))$ tal que

$$(u_0^m, u_1^m) \to (u_0, u_1) \ \text{ em } \ (H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)) \times L^2(\Omega). \tag{2.17}$$

Trocando w_j por u_t^m na equação aproximada $(2.11)_2$ temos

$$\begin{aligned}&(u_{tt}^m(t), u_t^m(t)) + (\Delta u^m(t), \Delta u_t^m(t)) \\ &\quad - \int_0^t g(t-\tau)(\Delta u^m(\tau), \Delta u_t^m(t))\, d\tau + M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(u_t^m(t), u_t^m(t)) = 0.\end{aligned} \tag{2.18}$$

Note que vale a seguinte identidade

$$(u_{tt}^m(t), u_t^m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t^m(t)\|_2^2. \tag{2.19}$$

De fato, para $\theta \in \mathcal{D}(0, t_m)$ considere

$$\begin{aligned}\langle (u_{tt}^m(t), u_t^m(t)), \theta\rangle_{\mathcal{D}'(0,t_m),\mathcal{D}(0,t_m)} &= \left\langle \int_\Omega u_{tt}^m(t) u_t^m(t)\, dx, \theta \right\rangle_{\mathcal{D}'(0,t_m),\mathcal{D}(0,t_m)} \\ &= \int_0^{t_m}\int_\Omega u_{tt}^m(t)u_t^m(t)\theta(t)\, dx\, dt \\ &= \int_\Omega\int_0^{t_m} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_t^m(t))^2\theta(t)\, dt\, dx \\ &= \int_\Omega \left\{\frac{1}{2}(u_t^m(t))^2\theta(t)|_0^{t_m} - \int_0^{t_m}\frac{1}{2}(u_t^m(t))^2\theta'(t)\, dt\right\} dx \\ &= -\int_0^{t_m}\int_\Omega \frac{1}{2}(u_t^m(t))^2\theta'(t)\, dx\, dt \\ &= -\left\langle \frac{1}{2}\|u_t^m(t)\|_2^2, \theta'\right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t^m(t)\|_2^2, \theta\right\rangle.\end{aligned}$$

Da mesma forma prova-se que

$$(\Delta u^m(t), \Delta u_t^m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u^m(t)\|_2^2. \tag{2.20}$$

Substituindo as identidades (2.19) e (2.20) em (2.18) obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|u_t^m(t)\|_2^2 + \|\Delta u^m(t)\|_2^2\right\} \\ &\quad + M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)\|u_t^m(t)\|_2^2 = \int_0^t g(t-\tau)(\Delta u^m(\tau), \Delta u_t^m(t))\, d\tau.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}\int_0^t g(t-\tau)(\Delta u^m(\tau), \Delta u_t^m(t))\, d\tau &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{(g\Box\Delta u^m)(t) - \left(\int_0^t g(\tau)\, d\tau\right)\|\Delta u^m(t)\|_2^2\right\} \\ &\quad + \frac{1}{2}(g'\Box\Delta u^m)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\Delta u^m(t)\|_2^2.\end{aligned} \tag{2.22}$$

Para mostrar a identidade acima basta diferenciar a expressão

$$(g\Box\Delta u)(t) = \int_0^t g(t-\tau)\|\Delta u(\tau) - \Delta u(t)\|_2^2\, d\tau, \tag{2.23}$$

onde omitiremos o índice m para facilitar a notação. De fato, pela regra de Leibniz

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(g\Box\Delta u)(t) = &\int_0^t g'(t-\tau)\|\Delta u(\tau) - \Delta u(t)\|_2^2\, d\tau \\ &+2\int_0^t g(t-\tau)\frac{d}{dt}(\Delta u_t(t), \Delta u(t))\, d\tau - 2\int_0^t g(t-\tau)(\Delta u(\tau), \Delta u_t(t))\, d\tau\end{aligned} \tag{2.24}$$

observe que

$$\begin{aligned}&\int_0^t g(s)\frac{d}{dt}(\Delta u(t), \Delta u(t))\, ds \\ &\quad = \frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(s)\, ds\right)\|\Delta u(t)\|_2^2 - g(t)\|\Delta u(t)\|_2^2.\end{aligned} \tag{2.25}$$

Então substituindo (2.25) em (2.24) segue (2.22).

Substituindo (2.22) em (2.21) temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E^m(t) + M\left(\|\nabla u^m(t)\|_2^2\right)\|u_t^m(t)\|_2^2 = \frac{1}{2}(g'\Box\Delta u^m)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\Delta u^m(t)\|_2^2, \tag{2.26}$$

onde

$$E^m(t) = \|u_t^m(t)\|_2^2 + \|\Delta u^m(t)\|_2^2 - \left(\int_0^t g(\tau)\, d\tau\right)\|\Delta u^m(t)\|_2^2 + (g\Box\Delta u^m)(t)$$

é a energia dada pela solução aproximada $u^m(t)$.

Pela condição (2.2) e do fato $(g\Box\Delta u^m)(t) \geq 0$ deduzimos

$$\|u_t^m(t)\|_2^2 + l\|\Delta u^m(t)\|_2^2 \leq E^m(t). \tag{2.27}$$

Por outro lado, de (2.3)

$$(g'\Box\Delta u^m)(t) \leq -\xi_1(g\Box\Delta u^m)(t) \leq 0,$$

então

$$\frac{1}{2}(g'\Box\Delta u^m)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\Delta u^m(t)\|_2^2 \leq 0.$$

Assim de (2.26) temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E^m(t) + M\left(\|\nabla u^m(t)\|_2^2\right)\|u_t^m(t)\|_2^2 \leq 0. \tag{2.28}$$

Integrando (2.28) de 0 a t e usando a condição (2.4) obtemos

$$E^m(t) \leq E^m(0),$$

deste modo pela estimativa (2.27) temos

$$\|u_t^m(t)\|_2^2 + l\|\Delta u^m(t)\|_2^2 \leq E^m(0). \tag{2.29}$$

Das convergências dos dados iniciais (2.17), existe uma constante $c_1 > 0$ tal que

$$\|u_t^m(0)\|_2^2 + l\|\Delta u^m(0)\|_2^2 \leq c_1, \quad \forall\, t \in [0, t_m) \ \ \forall\, m \in \mathbb{N}. \tag{2.30}$$

Como $l < 1$ melhorando as desigualdades (2.29) e (2.30) concluímos

$$\|u_t^m(t)\|_2^2 + \|\Delta u^m(t)\|_2^2 \leq M_1, \tag{2.31}$$

para todo $t \in [0, t_m)$ e $m \in \mathbb{N}$, onde $M_1 = M_1(\|u_1\|_2, ||\Delta u_0\|_2)$. A estimativa (2.31) nos permite estender as soluções $u^m(t)$ do problema aproximado (2.11) a todo intervalo $[0, T]$ via Corolário 1.17. Além disso, repetindo o mesmo procedimento anterior segue que (2.31) vale para todo $t \in [0, T]$ e $m \in \mathbb{N}$.

Portanto, a estimativa (2.31) implica que

$$\begin{aligned} &(u^m) \ \text{ é limitada em } \ L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \\ &(u_t^m) \ \text{ é limitada em } \ L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned} \tag{2.32}$$

2.2.3 Estimativa a priori 2

Agora vamos considerar $(u_0^m, u_1^m) \in H_\Gamma^4(\Omega) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ tal que

$$(u_0^m, u_1^m) \to (u_0, u_1) \in H_\Gamma^3(\Omega) \times H_0^1(\Omega). \tag{2.33}$$

Trocando w_j por $-\Delta u_t^m$ na equação aproximada $(2.11)_2$ temos

$$\begin{aligned} &-(u_{tt}^m(t), \Delta u_t^m(t)) - (\Delta u^m(t), \Delta(\Delta u_t^m(t))) \\ &\quad + \int_0^t g(t-\tau)(\Delta u^m(\tau), \Delta(\Delta u_t^m(t)))\, d\tau - M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(u_t^m(t), \Delta u_t^m(t)) = 0. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Note que aplicando a formula de Green em $-\displaystyle\int_\Omega \Delta u^m(t) \Delta(\Delta u_t^m(t))\, dx$ temos

$$-\int_\Omega \Delta(\Delta u_t^m(t)) \Delta u^m(t)\, dx = \int_\Omega \nabla \Delta u^m(t) \nabla \Delta u_t^m(t)\, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Delta u_t^m(t)}{\partial \nu} \Delta u^m(t)\, dx. \tag{2.35}$$

Como vale a condição de fronteia $u^m = \Delta u^m = 0$, obtemos a seguinte identidade

$$-(\Delta u^m(t), \Delta(\Delta u_t^m(t))) = (\nabla \Delta u^m(t), \nabla \Delta u_t^m(t)).$$

Além disso, também pela fórmula de Green, temos

$$-(u_{tt}^m(t), \Delta u_t^m(t)) = (\nabla u_{tt}^m(t), \nabla u_t^m(t)).$$

Logo a equação (2.34) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
&(\nabla u_{tt}^m(t), \nabla u_t^m(t)) + (\nabla \Delta u^m(t), \nabla \Delta u_t^m(t)) \\
&\quad - \int_0^t g(t-\tau)(\nabla \Delta u^m(\tau), \nabla(\Delta u_t^m(t)))\, d\tau + M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(\nabla u_t^m(t), \nabla u_t^m(t)) = 0.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Note que

$$\begin{aligned}
(\nabla u_{tt}^m(t), \nabla u_t^m(t)) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_t^m(t)\|_2^2, \\
(\nabla \Delta u^m(t), \nabla \Delta u_t^m(t)) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla \Delta u^m(t)\|_2^2.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Então substituindo (2.37) em (2.36) chegamos em

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|\nabla u_t^m(t)\|_2^2 + \|\nabla \Delta u^m(t)\|_2^2\right\} \\
&\quad + M\left(\|\nabla u^m(t)\|_2^2\right)\|\nabla u_t^m(t)\|_2^2 = \int_0^t g(t-\tau)(\nabla \Delta u^m(\tau), \nabla \Delta u_t^m(t))\, d\tau.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Da mesma forma como obtido em (2.22), utilizando a identidade para memória em (2.38)

$$\begin{aligned}
\int_0^t g(t-\tau)(\nabla \Delta u^m(\tau), \nabla \Delta u(t))\, d\tau = &-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{(g\Box\nabla\Delta u^m)(t) - \left(\int_0^t g(s)\, ds\right)\|\nabla \Delta u^m(t)\|_2^2\right\} \\
&+\frac{1}{2}(g'\Box\nabla\Delta u^m)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla \Delta u^m(t)\|_2^2,
\end{aligned} \tag{2.39}$$

obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}F^m(t) + M\left(\|\nabla u^m(t)\|_2^2\right)\|\nabla u_t^m(t)\|_2^2 = \frac{1}{2}(g'\Box\nabla\Delta u^m)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\nabla \Delta u^m(t)\|_2^2,$$

com

$$F^m(t) = \|\nabla u_t^m(t)\|_2^2 + \|\nabla \Delta u^m(t)\|_2^2 - \left(\int_0^t g(s)\, ds\right)\|\nabla \Delta u^m(t)\|_2^2 + (g\Box\nabla\Delta u^m)(t).$$

Note que $(g\Box\nabla\Delta u^m)(t) \geq 0$ e por $(G2)$, $(g'\Box\nabla\Delta u^m)(t) \leq -\xi(g\Box\nabla\Delta u^m)(t) \leq 0$. Pela condição $(G1)$ e de forma semelhante as considerações feitas em (2.28)-(2.29) segue que

$$\|\nabla u_t^m(t)\|_2^2 + l\|\nabla\Delta u^m(t)\|_2^2 \leq F^m(0). \tag{2.40}$$

Das convergências em (2.33) existe uma constante $c_3 > 0$ tal que

$$\|\nabla u_t^m(0)\|_2^2 + l\|\nabla\Delta u^m(0)\|_2^2 \leq c_3 \qquad \forall\, t \in [0,T], \forall\, m \in \mathbb{N}. \tag{2.41}$$

Disto e de (2.40) segue que

$$\|\nabla u_t^m(t)\|_2^2 + \|\nabla\Delta u^m(t)\|_2^2 \leq M_2, \tag{2.42}$$

para todo $t \in [0,T]$ e $m \in \mathbb{N}$, onde $M_2 = M_2(\|\nabla u_1\|_2, \|\nabla\Delta u_0\|_2)$ independe de t e m.

Em particular da estimativa (2.42) implica que

$$\begin{aligned} &(u^m) \ \text{ é limitada em } \ L^\infty(0,T; H^3_\Gamma(\Omega)),\\ &(u^m_t) \ \text{ é limitada em } \ L^\infty(0,T; H^1_0(\Omega)). \end{aligned} \tag{2.43}$$

2.2.4 Estimativa a priori 3

Considere o problema aproximado (2.11) com

$$(u_0^m, u_1^m) \to (u_0, u_1) \ \text{ em } \ H^4_\Gamma(\Omega) \times \left(H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)\right). \tag{2.44}$$

Usando a formula de Green podemos reescrever $(2.11)_2$ como

$$(u_{tt}^m(t), w_j) + (\Delta^2 u^m(t), w_j) - \int_0^t g(t-\tau)(\Delta^2 u^m(t), w_j)\, d\tau + M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(u_t^m(t), w_j) = 0.$$

Substituindo w_j por $\Delta^2 u_t^m$ na igualdade acima deduzimos que

$$\begin{aligned} &(u_{tt}^m(t), \Delta^2 u_t^m(t)) + (\Delta^2 u^m(t), \Delta^2 u_t^m(t)) \\ &\quad - \int_0^t g(t-\tau)(\Delta^2 u^m(\tau), \Delta^2 u_t^m(t))\, d\tau + M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(u_t^m(t), \Delta^2 u_t^m(t)) = 0. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Novamente pela formula de Green é possível verificar que

$$\begin{aligned} &(u_{tt}^m(t), \Delta^2 u_t^m(t)) = (\Delta u_{tt}^m(t), \Delta u_t^m(t)) \\ &(u_t^m(t), \Delta^2 u_t^m(t)) = (\Delta u_t^m(t), \Delta u_t^m(t)) = \|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 \end{aligned}$$

logo podemos reescrever (2.45) como

$$
\begin{aligned}
&(\Delta u_{tt}^m(t), \Delta u_t^m(t))(\Delta^2 u^m(t), \Delta^2 u_t^m(t)) \\
&\quad - \int_0^t g(t-\tau)(\Delta^2 u^m(\tau), \Delta^2 u_t^m(t))\, d\tau + M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)\|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 = 0.
\end{aligned} \tag{2.46}
$$

Agora note que

$$
\begin{aligned}
(\Delta^2 u^m(t), \Delta^2 u_t^m(t)) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2 \\
(\Delta u_{tt}^m(t), \Delta u_t^m(t)) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u_t^m(t)\|_2^2.
\end{aligned} \tag{2.47}
$$

Substituindo (2.47), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 + \|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2\right\} \\
&\quad + M\left(\|\nabla u^m(t)\|_2^2\right)\|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 = \int_0^t g(t-\tau)(\Delta^2 u^m(\tau), \Delta^2 u_t^m(t))\, d\tau.
\end{aligned} \tag{2.48}
$$

Pela identidade sobre a memória temos

$$
\begin{aligned}
\int_0^t g(t-\tau)(\Delta^2 u^m(\tau), \Delta^2 u_t^m(t))\, d\tau = &- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{(g\Box\Delta^2 u^m)(t) - \left(\int_0^t g(\tau)\, d\tau\right)\|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2\right\} \\
&+ \frac{1}{2}(g'\Box\Delta^2 u^m)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2.
\end{aligned} \tag{2.49}
$$

Substituindo (2.49) em (2.48) temos

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}P^m(t) + M\left(\|\nabla u^m(t)\|_2^2\right)\|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 = \frac{1}{2}(g'\Box\Delta^2 u^m)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2, \tag{2.50}
$$

onde

$$
P^m(t) = \|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 + \|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2 - \left(\int_0^t g(s)\, ds\right)\|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2 + (g\Box\Delta^2 u^m)(t).
$$

Novamente observando que $(g\Box\Delta^2 u^m)(t) \geq 0$ e usando a condição $(G1)$ temos

$$
\|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 + l\|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2 \leq P^m(t).
$$

Integrando (2.50) de 0 a t e usando o fato que $(g'\Box\Delta^2 u^m)(t) \leq 0$ segue que

$$
\|\Delta u_t^m(t)\|_2^2 + l\|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2 \leq P^m(0) \tag{2.51}
$$

Pela convergência dos dados iniciais (2.44) existe uma constante M_3 tal que

$$
\|\Delta u_t(t)\|_2^2 + \|\Delta^2 u^m(t)\|_2^2 \leq M_3, \tag{2.52}
$$

onde $M_3 > 0$ e depende dos dados iniciais, ou seja, $M_3 = M_3(\|\Delta u_1\|_2, \|\Delta^2 u_0\|_2)$. Consequentemente, obtemos que a desigualdade (2.52) é válida para todo $t \in [0,T]$ e $m \in \mathbb{N}$. A estimativa (2.52) implica que

$$\begin{aligned}
&(u^m) \ \text{ é limitada em } \ L^\infty(0,T; H^4_\Gamma(\Omega)) \qquad (2.53)\\
&(u^m_t) \ \text{ é limitada em } \ L^\infty(0,T; H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)).
\end{aligned}$$

2.2.5 Estimativa a priori 4

Sejam $m \geq n$, com $m, n \in \mathbb{N}$ e considere duas soluções aproximadas (u^m, u^m_t) e (u^n, u^n_t) de (2.11) com dados iniciais correspondentes (u^m_0, u^m_1) e (u^n_0, u^n_1), respectivamente. Seja $z = u^m - u^n$ então a função (z, z_t) é solução do problema

$$\begin{aligned}
&(z_{tt}(t), w_j) + (\Delta^2 z(t), w_j) - \int_0^t g(t-\tau)(\Delta^2 z(\tau), w_j)\, d\tau \qquad (2.54)\\
&\quad = M\left(\|\nabla u^n(t)\|_2^2\right)(u^n_t, w_j) - M\left(\|\nabla u^m(t)\|_2^2\right)(u^m_t, w_j)
\end{aligned}$$

com dados iniciais $(z(0), z_t(0)) = (u^m_0 - u^n_0, u^m_1 - u^n_1) := (z_0, z_1)$.

Trocando w_j por z_t em (2.54) temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|z_t(t)\|_2^2 + \|\Delta z(t)\|_2^2\right\} - \int_0^t g(t-\tau)(\Delta z(\tau), \Delta z_t(t))\, d\tau\\
&\quad = M(\|\nabla u^n(t)\|_2^2)(u^n_t(t), z_t(t)) - M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(u^m_t(t), z_t(t)), \qquad (2.55)
\end{aligned}$$

somando e subtraindo $M(\|\nabla u^n(t)\|_2^2)(u^m_t(t), z_t(t))$ em (2.55) e usando identidade para memória

$$\begin{aligned}
\int_0^t g(t-\tau)(\Delta z(\tau), \Delta z_t(t))\, d\tau = &- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{(g\Box\Delta z)(t) - \left(\int_0^t g(\tau)\, d\tau\right)\|\Delta z(t)\|_2^2\right\}\\
&+ \frac{1}{2}(g'\Box\Delta z)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\Delta z(t)\|_2^2,
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|z_t(t)\|_2^2 + \|\Delta z(t)\|_2^2 - \left(\int_0^t g(s)\, ds\right)\|\Delta z(t)\|_2^2 + (g\Box\Delta z)(t)\right\} \qquad (2.56)\\
&= M\left(\|\nabla u^n(t))\|_2^2\right)\|z_t(t)\|_2^2 + \left[M(\|\nabla u^n(t)\|_2^2) - M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)\right](u^m_t(t), z_t(t))\\
&\quad + \frac{1}{2}(g'\Box\Delta z)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\Delta z(t)\|_2^2.
\end{aligned}$$

Pela condição (2.4) temos $M \in C^1([0,\infty))$. Por outro lado, pela estimativa (2.31) temos $\|\Delta u^m(t)\|_2^2 \leq M_1$, lembrando que $M_1 = M_1(\|u_1\|_2, \|\Delta u_0\|_2)$. E pela imersão

$H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ temos

$$\|\nabla u^m(t)\|_2^2 \le C_1 \|\Delta u^m(t)\|_2^2 \le M_1.$$

Logo, vale a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\left|M(\|\nabla u^n(t)\|_2^2) - M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)\right| &= \left|\int_{\|\nabla u^n(t)\|_2^2}^{\|\nabla u^m(t)\|_2^2} M'(\xi)\, d\xi\right| \qquad (2.57)\\
&\le k_1 \left|\|\nabla u^m(t)\|_2^2 - \|\nabla u^n(t)\|_2^2\right|\\
&= k_1 \left(\|\nabla u^m(t)\|_2 + \|\nabla u^n(t)\|_2\right)\left(\|\nabla u^m(t)\|_2 - \|\nabla u^n(t)\|_2\right)\\
&\le k_1(\|\nabla u^m(t)\|_2 + \|\nabla u^n(t)\|_2)(\|\nabla u^m(t) - \nabla u^n(t)\|_2)\\
&\le 2k_1 M_1^{\frac{1}{2}} \|\nabla z(t)\|_2\\
&\le k_2 \|\Delta z(t)\|_2,
\end{aligned}$$

onde $k_1 = \max_{0 \le \xi \le M_1} |M'(\xi)|$ e $k_2 = 2k_1 M_1^{\frac{1}{2}}$ são constantes positivas. Neste caso obtemos

$$\left|M(\|\nabla u^n(t)\|_2^2) - M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)\right| \le k_2 \|\Delta z(t)\|_2, \qquad (2.58)$$

onde $k_2 = k_2(\|u_1\|_2, \|\|\Delta u_0\|_2)$.

Substituindo (2.58) em (2.56) e usando o fato que $(g' \Box \Delta z)(t) \le 0$ segue que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|z_t(t)\|_2^2 + \|\Delta z(t)\|_2^2 - \left(\int_0^t g(s)\, ds\right)\|\Delta z(t)\|_2^2 + (g \Box \Delta z)(t)\right\} \qquad (2.59)\\
&\le M\left(\|\nabla u^n(t)\|_2^2\right)\|z_t(t)\|_2^2 + k_2 \|\Delta z(t)\|_2 |(u_t^m(t), z_t(t))|.
\end{aligned}$$

No que segue, denotaremos por C varias constantes positivas. Note que pela desigualdade de Young e pela estimativa (2.31) temos

$$\begin{aligned}
k_2 \|\Delta z(t)\|_2 |(u_t^m(t), z_t(t))| &= k_2 \|\Delta z(t)\|_2 \|z_t(t)\|_2 \|u_t^m(t)\|_2 \qquad (2.60)\\
&\le C(\|\Delta z(t)\|_2^2 + \|z_t(t)\|_2^2).
\end{aligned}$$

Substituindo (2.60) em (2.59) e usando que M é limitada num intervalo compacto, ou seja, $M(\xi) \le \lambda, \ \ \forall \xi \in [0, M_1]$. Então segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|z_t(t)\|_2^2 + l\|\Delta z(t)\|_2^2 + (g \Box \Delta z)(t)\right\} \le C(\|\Delta z(t)\|_2^2 + \|z_t(t)\|_2^2). \qquad (2.61)$$

Integrando (2.61) de 0 a t e usando o fato que $(g \Box \Delta z)(t) \ge 0$ segue que

$$\|z_t(t)\|_2^2 + \|\Delta z(t)\|_2^2 \le \|z_t(0)\|_2^2 + \|\Delta z(0)\|_2^2 + C\int_0^t (\|z_t(s)\|_2^2 + \|\Delta z(s)\|_2^2)\, ds.$$

Pelo Lema de Gronwall inferimos que

$$\|z_t(t)\|_2^2 + \|\Delta z(t)\|_2^2 \leq C_T(\|z_1\|_2^2 + \|\Delta z_0\|_2^2), \tag{2.62}$$

onde $C_T = e^{CT} > 0$ é uma constante que depende de T e dos dados iniciais em $\mathcal{H} = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times L^2(\Omega)$, mas não de $m \in \mathbb{N}$. Como $z = u^m - u^n$ e $(z_0, z_1) = (u_0^m - u_0^n, u_1^m - u_1^n)$, então

$$\|u_t^m(t) - u_t^n(t)\|_2^2 + \|\Delta u^m(t) - \Delta u^n(t)\|_2^2 \leq C_T(\|u_1^m - u_1^n\|_2^2 + \|\Delta u_0^m - \Delta u_0^n\|_2^2). \tag{2.63}$$

Agora note que (u_0^m) e (u_1^n) são sequências de Cauchy em $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$, respectivamente, uma vez que são convergentes nestes espaços. Pelas convergências de $(2.11)_3$ vem que

$$\|u_t^m(t) - u_t^n(t)\|_2^2 + \|\Delta u^m(t) - \Delta u^n(t)\|_2^2 \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pelas convergências acima temos

$$\begin{aligned} &u^m \to u \ \text{ em } \quad C([0,T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \\ &u_t^m \to u_t \ \text{ em } \quad C([0,T]; L^2(\Omega)). \end{aligned} \tag{2.64}$$

2.2.6 Passagem ao Limite

Das estimativas (2.32), (2.43) e (2.53) juntamente com o Lema 1.25 deduzimos que existem subsequências de (u^m), que ainda de denotaremos por (u^m), tal que

$$u^m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \tag{2.65}$$
$$u_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} u_t \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T; L^2(\Omega)), \tag{2.66}$$
$$u^m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T; H_\Gamma^3(\Omega)), \tag{2.67}$$
$$u_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} u_t \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)), \tag{2.68}$$
$$u^m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T; H_\Gamma^4(\Omega)), \tag{2.69}$$
$$u_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} u_t \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)). \tag{2.70}$$

Com estas convergências podemos passar limite no problema aproximado (2.11) e obter a solução forte para o problema (2.1). Seja $j, m \in \mathbb{N}$, tal que $m \geq j$ e consideremos $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Multiplicando $(2.11)_2$ por θ e integrando em $[0,T]$, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^T (u_{tt}^m(t), w_j)\theta(t)\,dt + \int_0^T (\Delta^2 u^m, w_j)\theta(t)\,dt \\ &\quad - \int_0^T \int_0^t g(t-\tau)(\Delta^2 u^m(\tau), w_j)\,d\tau\theta(t)\,dt + \int_0^T M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(u_t^m, w_j)\theta(t)\,dt = 0. \end{aligned}$$

Integrando por partes,

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T (u_t^m(t),\omega_j)\theta'(t)\,dt+\int_0^T (\Delta^2 u^m(t),\omega_j)\theta(t)\,dt \\
&\quad -\int_0^T\int_0^t g(t-\tau)(\Delta^2 u^m(\tau),\omega_j)\,d\tau\theta(t)\,dt+\int_0^T M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(u_t^m(t),\omega_j)\theta(t)\,dt=0.
\end{aligned}
\tag{2.71}
$$

Note que das convergências obtidas (2.69) e (2.70), segue que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T (u^m(t),\eta(t))\,dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (u(t),\eta(t))\,dt,\quad \forall\,\eta\in L^1(0,T;(H_\Gamma^4)'(\Omega)) \\
&\int_0^T (u_t^m(t),\vartheta(t))\,dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (u_t(t),\vartheta(t))\,dt,\quad \forall\,\vartheta\in L^1(0,T;(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))').
\end{aligned}
\tag{2.72}
$$

Em particular, para

$$
\eta=\Delta^2 w_j\theta,\quad \vartheta=w_j\theta'
$$

segue diretamente das convergências acima que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T (\Delta^2 u^m(t),w_j)\theta(t)\,dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (\Delta^2 u(t),w_j)\theta(t)\,dt, \\
&\int_0^T (u_t^m(t),w_j)\theta'(t)\,dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (u_t(t),w_j)\theta'(t)\,dt.
\end{aligned}
\tag{2.73}
$$

Antes de passarmos o limite em (2.71) analisaremos os termos $M\left(\|\nabla u^m(t)\|_2^2\right)u_t^m$ e $(g*\Delta^2 u^m)(t)$, conforme segue.

Análise do Termo não linear $M\left(\|\nabla u^m(t)\|_2^2\right)u_t^m$.

Levando em consideração (2.32) segue que (u^m) também é limitada no espaço

$$
W=\{u\in L^2(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))\,;\ u_t\in L^2(0,T;L^2(\Omega))\}
$$

munido da norma $\|u\|_W=\|u\|_{L^2(0,T,H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))}+\|u_t\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}$. Logo existe uma subsequência de (u^m), que continuaremos denotando por (u^m), tal que

$$
u^m\rightharpoonup u\ \text{ em }\ W.
$$

Como $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ pelo Teorema 1.14 (ver Cap. 1), temos

$$
W\hookrightarrow\hookrightarrow L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).
$$

Logo

$$
u^m\to u\ \text{ em }\quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),
\tag{2.74}
$$

ou seja,

$$\int_0^T \|\nabla u^m(t) - \nabla u(t)\|_2^2 \, dt \to 0 \text{ quando } m \to \infty.$$

Então

$$\|\nabla u^m(t)\|_2^2 \to \|\nabla u(t)\|_2^2 \text{ em } L^1(0,T). \tag{2.75}$$

Por outro lado, sendo $M \in C^1([0,\infty))$ temos que

$$M\left(\|\nabla u^m(t)\|_2^2\right) \to M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right) \quad \text{em } L^2(0,T). \tag{2.76}$$

De fato, como $M \in C^1([0,\infty])$ temos para quase todo ponto $t \in [0,T]$

$$M\left(\|\nabla u^m(t)\|_2^2\right) - M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right) = \int_{\|\nabla u(t)\|_2^2}^{\|\nabla u^m(t)\|_2^2} M'(\xi)\, d\xi, \tag{2.77}$$

sendo $M' \in C^0([0,\infty))$, existe $L > 0$ tal que $|M'(\xi)| \leq L$ para todo $\xi \in [0, M_1]$. Logo da equação acima resulta que:

$$|M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2) - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)| \leq L|\|\nabla u^m(t)\|_2^2 - \|\nabla u(t)\|_2^2| \tag{2.78}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e $t \in [0,T]$. Assim, de (2.78) segue que

$$\begin{aligned}
\left|M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2) - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\right|^2 &\leq L^2 \left|\|\nabla u^m(t)\|_2^2 - \|\nabla u(t)\|_2^2\right|^2 \\
&= L^2 \left|(\|\nabla u^m(t)\|_2 - \|\nabla u(t)\|_2)(\|\nabla u^m(t)\|_2 + \|\nabla u(t)\|_2\right|^2 \\
&= L^2 \left|\|\nabla u^m(t)\|_2 - \|\nabla u(t)\|_2\right|^2 (\|\nabla u^m(t)\|_2 + \|\nabla u(t)\|_2)^2 \\
&\leq 4M_1^2 L^2 \left|\|\nabla u^m(t)\|_2 - \|\nabla u(t)\|_2\right|^2 \\
&\leq c\|\nabla u^m(t) - \nabla u(t)\|_2^2,
\end{aligned}$$

onde $c = 4M_1^2 L^2$. Integrando a última desigualdade de 0 a T temos;

$$\int_0^T \left|M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2) - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\right|^2 \, dt \leq c \int_0^T \|\nabla u^m(t) - \nabla u(t)\|_2^2 \, dt.$$

Mas de (2.74), temos que o lado direito da desigualdade acima converge para zero quando $m \to +\infty$. Logo

$$\int_0^T \left|M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2) - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\right|^2 \, dt \to 0 \text{ quando } m \to 0.$$

Por outro lado, de (2.74) temos também

$$u^m \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

Assim

$$\langle \mu, u^m \rangle \to \langle \mu, u \rangle \,, \quad \forall\, \mu \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

Em particular, se $\mu = w_j\theta'$ resulta que

$$\int_0^T (u^m(t), w_j)\theta'(t)\,dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)\,dt.$$

Integrando por partes temos

$$\int_0^T (u_t^m(t), w_j)\theta(t)\,dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (u_t(t), w_j)\theta(t)\,dt.$$

Logo,

$$(u_t^m(t), w_j) \rightharpoonup (u_t(t), w_j) \;\text{ em }\; L^2(0,T). \tag{2.79}$$

De (2.76) e (2.79) obtemos

$$(wM(\|\nabla u^m(t)\|_2^2), (u^m(t), w_j)) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} (wM(\|\nabla u(t)\|_2^2), (u(t), w_j)), \;\; \forall\, w \in L^\infty(0,T).$$

Em particular, para $w = \theta \in \mathcal{D}(0,T)$ resulta que

$$\int_0^T M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(u_t^m(t), w_j)\theta(t)\,dt \to \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(u_t(t), w_j)\theta(t)\,dt. \tag{2.80}$$

Convergência do termo $(g * \Delta^2 u)(t)$**.**

Pela estimativa (2.52) e pelo Teorema 1.10 (ver Cap.1) temos

$$\|(g * \Delta^2 u^m)(t)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} = \sup_{t\in(0,T)} \text{ess}\|(g * \Delta^2 u^m)(t)\|_2 \leq \|g\|_1 \|\Delta^2 u^m(t)\|_2 < \infty.$$

Portanto

$$(g * \Delta^2 u^m) \;\text{ é limitado em }\; L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.81}$$

de onde segue que

$$g * \Delta u^m \overset{*}{\rightharpoonup} \chi \;\text{ em }\; L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.82}$$

Vamos mostrar que $g * \Delta^2 u^m \overset{*}{\rightharpoonup} g * \Delta^2 u$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Com efeito, note que

$$\int_0^T ((g * \Delta u^m)(t), \eta(t))\,dt \to \int_0^T (\chi, \eta(t))\,dt, \quad \forall\, \eta \in L^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

Afirmamos que $\chi = g * \Delta u$ q.s. em $(0,T) \times \Omega$.

De (2.69) e (2.70), aplicando o Teorema de Aubin Lions temos que, existe uma subsequência (Δu^m), que ainda denotaremos por (Δu^m), tal que

$$\Delta u^m \to \Delta u \ \text{ em } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.83}$$

De (2.83), podemos provar que

$$g * \Delta u^m \to g * \Delta u \ \text{ em } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.84}$$

De fato,

$$\|g * \Delta u^m - g * \Delta u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \|g\|_1^2 \|\Delta u^m - \Delta u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Assim de (2.83) temos que $\|g * \Delta u^m - g * \Delta u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \to 0$ quando $m \to \infty$ o que prova (2.84).

Por outro lado, de (2.82) temos

$$g * \Delta u^m \overset{*}{\rightharpoonup} \chi \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.85}$$

De (2.84), (2.85) e pela unicidade do limite fraco concluímos que

$$g * \Delta u^m \overset{*}{\rightharpoonup} g * \Delta u \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.86}$$

Notando que

$$g * \Delta^2 u^m = \Delta(g * \Delta u^m) \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

vem de (2.81) e (2.86), que existe uma subsequência de $(g * \Delta^2 u^m)$ que manteremos a mesma indexação tal que

$$(g * \Delta^2 u^m)(t) \overset{*}{\rightharpoonup} (g * \Delta^2 u)(t) \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.87}$$

quando $m \to \infty$.

De onde segue

$$\big\langle (g * \Delta^2 u^m)(t), \eta(t) \big\rangle \to \big\langle (g * \Delta^2 u)(t), \eta(t) \big\rangle, \forall\, \eta \in L^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

Tomando em particular $\eta = w_j \theta$, $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, obtemos

$$\int_0^T \big((g * \Delta^2 u^m)(t), w_j\big)\, \theta(t)\, dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \big((g * \Delta^2 u)(t), w_j\big)\, \theta(t)\, dt. \tag{2.88}$$

Finalmente pelas convergências (2.73), (2.80) e (2.88) podemos passar o limite em (2.71) quando $m \to \infty$. Assim obtemos

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T (u_t(t),\omega_j)\theta'(t)\,dt + \int_0^T (\Delta^2 u(t),\omega_j)\theta(t)\,dt \\
&\quad -\int_0^T\int_0^t g(t-\tau)(\Delta^2 u(\tau),\omega_j)\,d\tau\theta(t)\,dt + \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(u_t(t),\omega_j)\theta(t)\,dt = 0.
\end{aligned} \tag{2.89}
$$

Integrando por partes o primeiro termo temos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \frac{d}{dt}(u_t(t),w_j)\theta(t)\,dt + \int_0^T (\Delta^2 u(t),w_j)\theta(t)\,dt \\
&\quad -\int_0^T\int_0^t g(t-\tau)(\Delta^2 u(\tau),\Delta\omega_j)\,d\tau\theta(t)\,dt + \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(u_t(t),w_j)\theta(t)\,dt = 0.
\end{aligned}
$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$.

Como as combinações lineares finitas dos $w_j's$ são densas em $H_\Gamma^4(\Omega)$ a igualdade acima permanece válida para toda $v \in H_\Gamma^4(\Omega)$, isto é,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \frac{d}{dt}(u_t(t),v)\theta(t)\,dt + \int_0^T (\Delta^2 u(t),v)\theta(t)\,dt \\
&\quad -\int_0^T\int_0^t g(t-\tau)(\Delta^2 u(\tau),v)\,d\tau\theta(t)\,dt + \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(u_t,v)\theta(t)\,dt = 0.
\end{aligned} \tag{2.90}
$$

Note que podemos reescrever (2.90) como

$$
\left\langle \frac{d}{dt}(u_t(t),v) + (\Delta^2 u(t),v) - \int_0^t g(t-\tau)(\Delta^2 u(\tau),v)\,d\tau + M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(u_t,v), \theta \right\rangle = 0
$$

para todo $v \in H_\Gamma^4(\Omega)$ e para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, de onde segue que

$$
\frac{d}{dt}(u_t(t),v) + (\Delta^2 u(t),v) - \int_0^t g(t-\tau)(\Delta^2 u(\tau),v)\,d\tau + M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(u_t,v) = 0
$$

em $\mathcal{D}'(0,T)$ para todo $v \in H_\Gamma^4(\Omega)$. Além disso, a identidade (2.90) também nos permite escrever

$$
\left\langle \left\langle u_{tt} + \Delta^2 u - g * \Delta^2 u + M(\|\nabla u(t)\|_2^2)u_t, \theta \right\rangle, v \right\rangle
$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $v \in H_\Gamma^4$. Daí vem que

$$
u_{tt} + \Delta^2 u - g * \Delta^2 u + M(\|\nabla u(t)\|_2^2)u_t = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;(H_\Gamma^4)'(\Omega)). \tag{2.91}
$$

Contudo, temos

$$\begin{aligned}
&\Delta^2 u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega)), \\
&M\left(\|\nabla u(t)\|\right) u_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \\
&g * \Delta^2 u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega)).
\end{aligned} \tag{2.92}$$

De (2.91) e (2.92) concluímos que

$$u_{tt} \in L^2(0,T,L^2(\Omega)).$$

Portanto

$$u_{tt} + \Delta^2 u - g * \Delta^2 u + M(\|\nabla u(t)\|_2^2) u_t = 0 \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

com

$$u \in L^\infty(0,T,H^4_\Gamma(\Omega)), \quad u_t \in L^\infty(0,T,H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)), \quad u_{tt} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.93}$$

Para provar o item (i) do Teorema 2.3, isto é, que u é solução forte conforme Definição 2.2 resta provar as condições dos dados iniciais.

2.2.7 Dados Iniciais

Provemos em primeiro lugar que

(i) $u(0) = u_0$

De fato, para $j, m \in \mathbb{N}$, com $m \geq j$ vem de $(2.72)_1$ com $\eta = w_j \theta'$ e de $(2.72)_2$ com $\vartheta = w_j\theta$, que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (u^m(t), w_j)\theta'(t)\, dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)\, dt, \\
&\int_0^T (u^m_t(t), w_j)\theta(t)\, dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (u_t(t), w_j)\theta(t)\, dt,
\end{aligned} \tag{2.94}$$

respectivamente. Usando integração por partes em $(2.94)_2$ resulta

$$(u^m(t), w_j)\theta(t)|_0^T - \int_0^T (u^m(t), w_j)\theta'(t)\, dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} (u(t), w_j)\theta(t)|_0^T - \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)\, dt.$$

Escolhendo θ de modo que $\theta(T) = 0$, $\theta(0) = 1$ e combinando com $(2.94)_1$ segue que

$$(u^m(0), w_j) \to (u(0), w_j) \;\; \forall\, j \in \mathbb{N},$$

o que implica na seguinte convergência

$$u^m(0) \rightharpoonup u(0) \text{ em } L^2(\Omega).$$

Por outro lado, da primeira convergência em $(2.11)_3$ temos

$$u^m(0) \rightharpoonup u_0 \text{ em } L^2(\Omega).$$

Pela unicidade do limite fraco, obtemos

$$u(0) = u_0.$$

Agora vamos mostrar que

(ii) $u_t(0) = u_1$

De fato, sejam $\theta \in C([0,T])$ com $\theta(0) = 1$, $\theta(T) = 0$ e $j, m \in \mathbb{N}$, com $m \geq j$. Multiplicando o problema aproximado (2.11) por θ e integrando sobre $(0,T)$ temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (u_{tt}^m(t), w_j)\theta(t)\,dt + \int_0^T (\Delta^2 u^m(t), w_j)\theta(t)\,dt \\
&\quad - \int_0^T \int_0^t g(t-\tau)(\Delta^2 u^m(\tau), w_j)\,d\tau\theta(t)\,dt + \int_0^T M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(u_t^m(t), w_j)\theta(t)\,dt = 0.
\end{aligned} \tag{2.95}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\int_0^T (u_{tt}^m(t), w_j)\theta(t)\,dt &= \int_0^T \frac{d}{dt}(u_t^m(t), w_j)\theta(t)\,dt \\
&= (u_t^m(t), w_j)\theta(t)|_0^T - \int_0^T (u_t^m(t), w_j)\theta'(t)\,dt \\
&= (u_t^m(0), w_j)\theta(0) - \int_0^T (u_t^m(t), w_j)\theta'(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Substituindo em (2.95) e como $\theta(0) = 1$ então

$$\begin{aligned}
&-(u_t^m(0), w_j) - \int_0^T (u_t^m(t), w_j)\theta'(t)\,dt + \int_0^T (\Delta^2 u^m(t), w_j)\theta(t)\,dt \\
&\quad - \int_0^T \int_0^t g(t-\tau)(\Delta^2 u^m(\tau), w_j)\,d\tau\theta(t)\,dt + \int_0^T M(\|\nabla u^m(t)\|_2^2)(u_t^m(t), w_j)\theta(t)\,dt = 0.
\end{aligned}$$

Da convergência dos dados iniciais em $(2.11)_3$, segue que

$$(u_t^m(0), w_j) \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} (u_1, w_j), \quad \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Logo, tomando limite quando $m \to \infty$ e usando novamente as convergências (2.73), (2.80), (2.88) e como as combinações lineares finitas dos $w_j{}'s$ são densas em $H^4_\Gamma(\Omega)$, então para toda $v \in H^4_\Gamma(\Omega)$, vem que

$$\begin{aligned}
-(u_1, v) - \int_0^T (u_t(t), v)\theta'(t)\, dt + \int_0^T (\Delta^2 u(t), v)\theta(t)\, dt \\
- \int_0^T \int_0^t g(t-\tau)(\Delta^2 u(\tau), v)\, d\tau\theta(t)\, dt + \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(u_t(t), v)\theta(t)\, dt = 0.
\end{aligned}$$

Novamente usando integração por partes, vem que

$$\begin{aligned}
-(u_1, v) + (u_t(0), v) + \int_0^T \frac{d}{dt}(u_t(t), v)\theta(t)\, dt + \int_0^T (\Delta u(t), \Delta v)\theta(t)\, dt \\
- \int_0^T \int_0^t g(t-\tau)(\Delta u(\tau), \Delta v)\, d\tau\theta(t)\, dt + \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(u_t(t), v)\theta(t)\, dt = 0.
\end{aligned}$$

Comparando (2.90) com a igualdade acima, resulta que

$$(u_t(0), v) = (u_1, v).$$

Portanto

$$u_t(0) = u_1.$$

Isto conclui a prova do item (i) do Teorema 2.3. ■

2.2.8 Solução Fraca

Provaremos a existência de solução fraca do problema (2.1) por meio de aproximação de soluções regulares. De fato, sejam $u_0 \in H^2_0(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ e $u_1 \in L^2(\Omega)$. Como H^4_Γ é denso em $H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ e $H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$ então existem $(u_0^n, u_1^n) \in H^4_\Gamma \times (H^2_0(\Omega) \cap H^1_0(\Omega))$ tais que

$$(u_0^n, u_1^n) \to (u_0, u_1) \ \text{ em } \ (H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)) \times L^2(\Omega). \tag{2.96}$$

Desta forma, temos que existe para cada $n \in \mathbb{N}$ uma única solução regular u^n do problema

$$\begin{cases}
u_{tt}^n + \Delta^2 u^n - \int_0^t g(t-\tau)\Delta^2 u^n(\tau)\, d\tau + M\left(\|\nabla u^n(t)\|_2^2\right) u_t^n = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times (0,\infty), \\
u^n = \Delta u^n = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega \times [0,\infty), \\
u^n(0) = u_0 \in H^4_\Gamma(\Omega), \qquad u_t^n(0) = u_1 \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega).
\end{cases} \tag{2.97}$$

Como anteriormente, das estimativas a priori 1 e 4 valem as seguintes convergências

$$u^n \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)), \tag{2.98}$$

$$u_t^n \overset{*}{\rightharpoonup} u_t \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.99}$$

$$u^n \to u \quad \text{em} \quad C([0,T];H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)), \tag{2.100}$$

$$u_t^n \to u_t \quad \text{em} \quad C([0,T];L^2(\Omega)). \tag{2.101}$$

Com estas convergências podemos passar limite no problema aproximado (2.97) e obter uma solução fraca para (2.1). De fato, consideremos uma função $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $m, j \in \mathbb{N}$ com $m \geq j$. Multiplicando (2.97) por θ e integrando sobre $(0,T)$ resulta que

$$\begin{aligned}\int_0^T (u_{tt}^n(t), w_j)\theta(t)\,dt + \int_0^T (\Delta u^n(t), \Delta w_j)\theta(t)\,dt \\ - \int_0^T ((g*\Delta u^n)(t), \Delta w_j)\theta(t)\,dt + \int_0^T \left(M\left(\|u^n(t)\|_2^2\right) u_t^n(t), w_j\right)\,dt = 0.\end{aligned}$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned}-\int_0^T (u_t^n(t), w_j)\theta'(t)\,dt + \int_0^T (\Delta u^n(t), \Delta w_j)\theta(t)\,dt \\ - \int_0^T ((g*\Delta u^n)(t), \Delta w_j)\theta(t)\,dt + \int_0^T \left(M\left(\|u^n(t)\|_2^2\right) u_t^n(t), w_j\right)\theta(t)\,dt = 0.\end{aligned} \tag{2.102}$$

Note que das convergências obtidas em (2.98) e (2.99) segue que

$$\begin{aligned}\int_0^T (u_t^n(t), \nu(t))\,dt &\overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (u_t(t), \nu)\,dt, \quad \forall\, \nu \in L^1(0,T;L^2(\Omega)), \\ \int_0^T (u^n(t), \eta(t))\,dt &\overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (u(t), \eta(t))\,dt, \quad \forall\, \eta \in L^1(0,T;(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))').\end{aligned}$$

Em particular para $\nu = w_j\theta'$ e $\eta = \Delta^2 w_j \theta$, segue diretamente das convergências acima que

$$\begin{aligned}\int_0^T (u_t^n(t), w_j(t))\theta'(t)\,dt &\overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (u_t(t), w_j)\theta'(t)\,dt, \\ \int_0^T (\Delta u^n(t), \Delta w_j)\theta(t)\,dt &\overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (\Delta u(t), \Delta w_j)\theta(t)\,dt.\end{aligned} \tag{2.103}$$

Avaliaremos as convergências dos demais termos presentes em (2.102). Mais precisamente

$$\begin{aligned}\int_0^T ((g*\Delta u^n)(t), \Delta w_j)\theta(t)\,dt &\overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T ((g*\Delta u)(t), \Delta w_j)\theta(t)\,dt, \\ \int_0^T \left(M\left(\|u^n(t)\|_2^2\right) u_t^n(t), w_j\right)\theta(t)\,dt &\overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \left(M\left(\|u(t)\|_2^2\right) u_t(t), w_j\right)\theta(t)\,dt,\end{aligned} \tag{2.104}$$

são demonstrados de forma idêntica a Subseção 2.2.6 convergência do termo não local $M(\|\nabla u(t)\|_2^2)u_t$ e $g * \Delta^2 u$.

Diante das convergências obtidas em (2.103) e (2.104), fixando j e passando limite em (2.102), obtemos

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T (u_t(t), w_j)\theta'(t)\,dt + \int_0^T (\Delta u(t), \Delta w_j)\theta(t)\,dt \\
&\quad - \int_0^T ((g*\Delta u)(t), \Delta w_j)\theta(t)\,dt + \int_0^T \left(M\left(\|u(t)\|_2^2\right) u_t(t), w_j\right)\,dt = 0,
\end{aligned}
$$

ou seja, para todo j e todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, vale que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \frac{d}{dt}(u_t(t), w_j)\theta(t)\,dt + \int_0^T (\Delta u(t), \Delta w_j)\theta(t)\,dt \\
&\quad - \int_0^T ((g*\Delta u)(t), \Delta w_j)\theta(t)\,dt + \int_0^T \left(M\left(\|u(t)\|_2^2\right) u_t(t), w_j\right)\,dt = 0,
\end{aligned}
$$

como $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ constitui base de $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, então

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \frac{d}{dt}(u_t(t), w)\theta(t)\,dt + \int_0^T (\Delta u(t), \Delta w)\theta(t)\,dt \\
&\quad - \int_0^T ((g*\Delta u)(t), \Delta w)\theta(t)\,dt + \int_0^T \left(M\left(\|u(t)\|_2^2\right) u_t(t), w\right)\,dt = 0,
\end{aligned}
\tag{2.105}
$$

para todo $w \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Reescrevendo (2.105) como

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \frac{d}{dt}(u_t(t), w), \theta \right\rangle + \langle (\Delta u(t), \Delta w), \theta \rangle \\
&\quad + \left\langle -\int_0^t g(t-\tau)(\Delta u(\tau), \Delta w)\,d\tau, \theta \right\rangle + \left\langle \left(M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(u_t(t), w)\right), \theta \right\rangle = 0,
\end{aligned}
\tag{2.106}
$$

segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(u_t(t), w) + (\Delta u(t), \Delta w) - \int_0^t g(t-\tau)(\Delta u(\tau), \Delta w)\,d\tau& \\
+M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(u_t(t), w) = 0&
\end{aligned}
\tag{2.107}
$$

em $\mathcal{D}'(0,T), \forall\, w \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$.

Isto mostra que a função u satisfaz a Definição 2.1 com

$$
\begin{aligned}
&u \in L^\infty(0,T; H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)) \\
&u_t \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)).
\end{aligned}
\tag{2.108}
$$

Por outro lado identificando $L^2(\Omega)$ com seu dual pelo Teorema de representação de Riesz-

Fréchet temos as cadeias

$$H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\hookrightarrow H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)\hookrightarrow H^{-1}(\Omega)\hookrightarrow (H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))'.$$

Em virtude da identificação acima e de (2.107) podemos reescrever (2.105) como

$$\begin{aligned}&\left\langle -\int_0^T u_t(t)\theta'(t)\,dt, w\right\rangle + \left\langle \int_0^T \Delta^2 u(t)\theta(t)\,dt, w\right\rangle\\ &\quad + \left\langle -\int_0^T (g*\Delta^2 u)(t)\theta(t)\,dt, w\right\rangle + \left\langle \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)u_t(t)\theta(t)\,dt, w\right\rangle = 0.\end{aligned}$$

Novamente usando integração por partes,

$$\begin{aligned}&\left\langle \int_0^T u_{tt}(t)\theta(t)\,dt, w\right\rangle + \left\langle \int_0^T \Delta^2 u(t)\theta(t)\,dt, w\right\rangle\\ &\quad + \left\langle -\int_0^T (g*\Delta^2 u)(t)\theta(t)\,dt, w\right\rangle + \left\langle \int_0^T M(\|\nabla u(t)\|_2^2)u_t(t)\theta(t)\,dt, w\right\rangle = 0.\end{aligned}$$

para todo $w\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$.

Portanto, concluímos que

$$u_{tt}+\Delta^2 u - g*\Delta^2 u + M(\|\nabla u(t)\|_2^2)u_t = 0 \ \text{ em } \ \mathcal{D}'(0,T;(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))'). \tag{2.109}$$

Afirmamos que

$$\Delta^2 u,\ g*\Delta^2 u\in L^2(0,T;(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))'). \tag{2.110}$$

De fato, para $\phi\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, temos

$$|\left\langle \Delta^2 u(t),\phi\right\rangle| = |(\Delta u,\Delta\phi)|\le \|\Delta u(t)\|_2\|\Delta\phi\|_2. \tag{2.111}$$

Assim de (2.108) e usando (2.111) temos

$$\|\Delta^2 u\|_{(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))'} = \sup_{\phi\in H^2\cap H_0^1,\|\Delta\phi\|_2\le 1}\left|\left\langle \Delta^2 u(t),\phi\right\rangle\right| \le \|\Delta u\|_2 <\infty \ \text{ q.s. em } \ [0,T].$$

Por outro lado

$$|\left\langle (g*\Delta^2 u)(t),\theta\right\rangle| = |((g*\Delta u)(t),\Delta\theta)|\le \|(g*\Delta u)(t)\|_2\|\Delta\theta\|_2.$$

De (2.108) temos que $(g*\Delta u)$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Portanto

$$\|(g*\Delta^2 u)(t)\|_{(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))'}\le \|(g*\Delta u)(t)\|_2<\infty.$$

Além disso,

$$M(\|\nabla u(t)\|_2^2)u_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))'). \tag{2.112}$$

Logo, combinando (2.109) com (2.110) e (2.112) temos

$$u_{tt} \in L^2(0,T;(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))')$$

o que implica que a igualdade em (2.109) vale em $L^2(0,T;(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))')$, ou seja,

$$u_{tt} + \Delta^2 u - g * \Delta^2 u + M(\|\nabla u(t)\|)u_t = 0 \text{ em } L^2(0,T;(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))').$$

As condições inciais são provadas de forma análoga a Subseção 2.2.7. Isto conclui a prova de que u é uma solução fraca para (2.1). Para concluir a prova do item (ii) do Teorema 2.3 resta mostrar que a solução fraca é mais regular para dados mais regulares.

Agora dado $(u_0,u_1) \in H_\Gamma^3(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ então existe $(u_0^n,u_1^n) \in H_\Gamma^4(\Omega) \times H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(u_0^n,u_1^n) \to (u_0,u_1) \in H_\Gamma^3(\Omega) \times H_0^1(\Omega),$$

logo valem as estimativas a priori $1, 2, 4$, isto é, valem (2.98), (2.99), (2.100), (2.101) e também

$$u^n \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T;H_\Gamma^3(\Omega), \tag{2.113}$$

$$u_t^n \overset{*}{\rightharpoonup} u_t \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{2.114}$$

Assim podemos passar limite com maior razão no problema $(2.97)_1$ e obter uma solução fraca mais regular, ou seja, que vale

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(u_t(t),v) + (\Delta u(t),\Delta v) - \int_0^t g(t-\tau)(\Delta u(\tau),\Delta v)\,d\tau \\ +M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(u_t(t),v) = 0\end{aligned} \tag{2.115}$$

em $\mathcal{D}'(0,T)$, para $v \in H_\Gamma^3(\Omega)$.

Usando o teorema de representação de Riesz-Fréchet, vale também as seguintes cadeias de inclusões contínuas

$$H_\Gamma^3(\Omega) \hookrightarrow H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow (H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))' \hookrightarrow (H_\Gamma^3(\Omega))'.$$

O que nos permite deduzir que

$$u_{tt} + \Delta^2 u - g * \Delta^2 u + M(\|\nabla u(t)\|_2^2)u_t = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.116}$$

Afirmamos que

$$\Delta^2 u,\ (g * \Delta^2 u),\ M(\|\nabla u(t)\|_2^2)u_t \in L^\infty(0,T,H^{-1}). \tag{2.117}$$

De fato, para $\phi \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\left|\left\langle \Delta^2 u(t), \phi \right\rangle\right| = |(\nabla\Delta u(t), \nabla\phi)| \leq \|\nabla\Delta u(t)\|_2 \|\nabla\phi\|_2$$

Assim,

$$\|\Delta^2 u(t)\|_{H^{-1}} = \sup_{\phi\in H_0^1, \|\nabla\phi\|_2\leq 1} \left|\left\langle \Delta^2 u(t), \phi \right\rangle\right| \leq \|\nabla\Delta u(t)\|_2 < \infty \text{ q.s em } [0,T].$$

O mesmo se aplica a $(g * \Delta^2 u)(t)$, isto é,

$$|\left\langle (g * \Delta^2 u)(t), \theta \right\rangle| = |((g * \nabla\Delta u)(t), \nabla\theta)| \leq \|(g * \nabla\Delta u)(t)\|_2 \|\nabla\theta\|_2.$$

De (2.108) temos que $(g * \nabla\Delta u)$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)$. Portanto

$$\|(g * \Delta^2 u)(t)\|_{(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))'} \leq \|(g * \nabla\Delta u)(t)\|_2 < \infty.$$

Segue também que

$$M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right) u_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.118}$$

Logo, combinando (2.116) com (2.117) obtemos

$$u_{tt} + \Delta^2 u - g * \Delta^2 u + M(\|\nabla u(t)\|_2^2)u_t = 0 \text{ em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Concluindo assim o item (ii) do Teorema 2.3. ■

2.2.9 Dependência contínua

Sejam $z^1 = (u, u_t)$ e $z^2 = (v, v_t)$ duas soluções fortes do problema (2.1) correspondentes aos dados iniciais $z_0^1 = (u_0, u_1)$ e $z_0^2 = (v_0, v_1)$ em $H_\Gamma^4(\Omega) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$.

Definindo $w = u - v$, então a função $z = (w, w_t) = z^1 - z^2$ é uma solução forte do seguinte problema

$$w_{tt} + \Delta^2 w - \int_0^t g(t-\tau)\Delta^2 w(t)\,dt + M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right) u_t - M\left(\|\nabla v(t)\|_2^2\right) v_t = 0, \tag{2.119}$$

com dados iniciais

$$z(0) = (w(0), w_t(0)) = z_0^1 - z_0^2.$$

Com esta regularidade, multiplicando a equação (2.119) por w_t e integrando sobre Ω, deduzimos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|w_t(t)\|_2^2 + \|\Delta w(t)\|_2^2\right\} - \int_0^t g(t-\tau)(\Delta w(\tau), \Delta w_t(t))\, d\tau \\
&= \ M(\|\nabla v(t)\|_2^2)(v_t(t), w_t(t)) - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(u_t(t), w_t(t)).
\end{aligned}$$

Seguindo de forma semelhante os passos (2.56)-(2.62) feitos na Estimativa a priori 4 temos

$$\|w_t(t)\|_2^2 + \|\Delta w(t)\|_2^2 \leq C_T(\|\Delta w(0)\|_2^2 + \|w_t(0)\|_2^2), \tag{2.120}$$

para alguma constante positiva $C_T = C_T(\|z_0^1\|_{\mathcal{H}}, \|z_0^2\|_{\mathcal{H}}, T)$ de onde segue a estimativa (2.9) do Teorema 2.3. Isto garante a dependência contínua em $\mathcal{H}$ para soluções fortes com dados iniciais mais regulares.

Agora considere sequências de soluções fortes $z_n^1 = (u^n, u_t^n)$ e $z_n^2 = (v^n, v_t^n)$ tais que

$$(z_n^1, z_n^2) \to (z^1, z^2) \in C([0,T], \mathcal{H} \times \mathcal{H}),$$

como mostrado na estimativa 4. Como a diferença $z_n^1 - z_n^2 = (w^n, w_t^n)$ satisfaz (2.120) para todo $n \in \mathbb{N}$. Então passando limite quando $n \to \infty$ temos que a diferença de soluções fracas $z^1 - z^2$ satisfaz a estimativa (2.9) do Teorema 2.3. De forma análoga tem-se o mesmo resultado para soluções fracas mais regulares.

Em particular temos unicidade para soluções forte, fraca e fraca mais regular. Isto prova o item (iii) e portanto completa a prova do Teorema 2.3. ■

2.3 Decaimento de Energia

Sob as hipóteses do Teorema 2.3, considere uma solução forte u do problema

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-\tau)\Delta^2 u(\tau)\, d\tau + M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right) u_t = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times (0,\infty), \\ u = \Delta u = 0, \ \text{ sobre } \ \partial\Omega \times [0,\infty), \\ u(\cdot,0) = u_0 \quad u_t(\cdot,0) = u_1 \quad \text{em} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.121}$$

Como $(2.121)_1$ vale em $L^2(0,\infty; L^2(\Omega))$ e $u_t \in L^\infty(0,\infty, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$, então multiplicando $(2.121)_1$ por u_t e integrando sobre Ω obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_{tt}(t)u_t(t)\, dx + \int_\Omega \Delta^2 u(t)u_t(t)\, dx \ &- \ \int_\Omega \int_0^t g(t-\tau)\Delta^2 u(\tau)u_t(t)\, d\tau\, dx \\
&+ \ \int_\Omega M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right) u_t^2(t)\, dx = 0.
\end{aligned} \tag{2.122}$$

Aplicando a formula de Green em (2.122) temos

$$\int_\Omega \Delta^2 u(t) u_t(t)\, dx = -\int_\Omega \nabla \Delta u(t) \nabla u_t(t)\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Delta u(t)}{\partial \nu} u_t(t)\, dx.$$

como $u_t(t) \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega \Delta^2 u(t) u_t(t)\, dx = -\int_\Omega \nabla \Delta u(t) \nabla u_t(t)\, dx.$$

Aplicando novamente Green

$$-\int_\Omega \nabla(\Delta u(t)) \nabla u_t(t)\, dx = \int_\Omega \Delta u(t) \Delta u_t(t)\, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_t(t)}{\partial \nu} \Delta u(t)\, dx.$$

Como $u(t) \in H_\Gamma^4(\Omega)$, então

$$\int_\Omega \Delta^2 u(t) u_t(t)\, dx = \int_\Omega \Delta u(t) \Delta u_t(t)\, dx.$$

O mesmo vale para

$$\int_\Omega \int_0^t g(t-\tau) \Delta^2 u(\tau) u_t(t)\, d\tau\, dx.$$

Assim podemos reescrever (2.122) como

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2\right\} + M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right)\|u_t(t)\|_2^2 = \int_0^t g(t-\tau)(\Delta u(\tau), \Delta u_t(t))\, d\tau. \tag{2.123}$$

Note que pela identidade para memória (ver (2.22) na Estimativa a priori 1) segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}&\left\{\|u_t(t)\|_2^2 + \left(1 - \int_0^t g(s)\, ds\right)\|\Delta u(t)\|_2^2 + (g\Box\Delta u)(t)\right\} \\ &= -M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right)\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g'\Box\Delta u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\Delta u(t)\|_2^2 \end{aligned} \tag{2.124}$$

Definindo

$$E_0(t) = \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2, \tag{2.125}$$

e

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)\, ds\right)\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g\Box\Delta u)(t). \tag{2.126}$$

Então, de (2.124) vem que

$$\frac{d}{dt}E(t) = -M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right)\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g'\Box\Delta u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\Delta u(t)\|_2^2. \tag{2.127}$$

Pela hipótese (2.2) e $(g'\Box\Delta u)(t) \leq -\xi_1(g\Box\Delta)u(t) \leq 0$, então

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq 0,$$

ou seja, $E(t)$ é decrescente e o sistema é dissipativo. Além disso como

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g\Box\Delta u)(t) \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{l}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 \\ &\geq l\left\{\frac{1}{2}\{\|u_t(t)\| + \frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2\right\} \\ &= lE_0(t). \end{aligned}$$

Então, $E_0(t)$ também é decrescente e a solução (em norma) decresce com o tempo. Neste caso para avaliar o comportamento da solução (u, u_t) no espaço de fase $(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times L^2(\Omega)$, é suficiente, estudar o comportamento de $E(t)$ uma vez que $E_0(t) \leq \frac{1}{l}E(t)$.

O resultado a seguir estabelece que a energia $E(t)$ associada ao problema (2.121) dada em (2.126) tem decaimento na mesma taxa que o núcleo da memória, a qual tem um comportamento do tipo exponencial desde que satisfaça a condição $(G2)$.

De fato, de (2.3) note que

$$\begin{aligned} & g'(t) \leq -\xi_1 g(t) \\ \Rightarrow\quad & g'(t) + \xi_1 g(t) \leq 0 \\ \Rightarrow\quad & g'(t)e^{\xi_1 t} + \xi_1 g(t)e^{\xi_1 t} \leq 0 \\ \Rightarrow\quad & \frac{d}{dt}\left(g(t)e^{\xi_1 t}\right) \leq 0. \end{aligned}$$

Integrando de 0 a $t > 0$ obtemos

$$g(t)e^{\xi_1 t} - g(0) \leq 0 \implies g(t) \leq g(0)e^{-\xi_1 t}, \quad t > 0.$$

Teorema 2.4. *Sob as hipóteses do Teorema 2.3, seja u uma solução forte de (2.121). Então, para cada $t_0 > 0$, existem constantes $k > 0$ e $\lambda > 0$ tais que*

$$E(t) \leq KE(t_0)e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \forall\, t \geq t_0.$$

A demonstração será feita em várias etapas como segue.

Lema 2.5. *A energia $E(t)$ em (2.126), associada a solução de (2.121), satisfaz*

$$E'(t) \leq -M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right)\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g'\Box\Delta u)(t).$$

Demonstração: Como provado em (2.127), temos

$$E'(t) = -M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right)\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g'\Box\Delta u)(t) - \frac{1}{2}g(t)\|\Delta u(t)\|_2^2.$$

De onde segue

$$E'(t) \leq -M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right)\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g'\Box\Delta u)(t),$$

uma vez que $g(t) > 0$. ■

Agora definindo os funcionais

$$F(t) = E(t) + \epsilon_1\Phi(t) + \epsilon_2\Psi(t), \tag{2.128}$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 são constantes positivas a serem escolhidas posteriormente e

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \int_\Omega u(t)u_t(t)\,dx, \qquad (2.129)\\ \Psi(t) &= -\int_\Omega u_t(t)\int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\,d\tau\,dx. \end{aligned}$$

Lema 2.6. *Para $u \in C([0,T]; H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$, temos*

(i)

$$\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\,d\tau\right)^2 dx \leq \|g\|_1 C_p^2(g\Box\Delta u)(t),$$

onde $C_p > 0$ é a constante de Poincaré e

(ii)

$$\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)(\Delta u(t)-\Delta u(\tau))\,d\tau\right)^2 dx \leq \|g\|_1(g\Box\Delta u)(t)$$

Demonstração: Note que

$$\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\,d\tau\right)^2 dx = \int_\Omega\left(\int_0^t \sqrt{g(t-\tau)}\sqrt{g(t-\tau)}(u(t)-u(\tau))\,d\tau\right)^2 dx.$$

Pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} &\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\,d\tau\right)^2 dx\\ &\leq \int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)\,d\tau\right)\left(\int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))^2\,d\tau\right) dx\\ &\leq \left(\int_0^t g(t-\tau)\,d\tau\right)\left(\int_0^t g(t-\tau)\|u(t)-u(\tau)\|_2^2\,d\tau\right) \end{aligned}$$

pela desigualdade de Poincaré e pela imersão $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ temos

$$\|u(t) - u(\tau)\|_2 \leq C_p \|\Delta u(t) - \Delta u(\tau)\|_2$$

e sabendo que

$$(g\Box\Delta u)(t) = \int_0^t g(t-\tau)\|\Delta u(t) - \Delta u(\tau)\|_2^2 \, d\tau,$$

então

$$\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau)) \, d\tau \right)^2 dx \leq \|g\|_1 C_p^2 (g\Box\Delta u)(t).$$

Prova-se de forma análoga o item (ii) ■

Lema 2.7. *Existem constantes $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, tais que*

$$\alpha_1 F(t) \leq E(t) \leq \alpha_2 F(t)$$

para $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ suficientemente pequenos.

Demonstração: De fato, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\begin{aligned} F(t) &\leq E(t) + \epsilon_1 |\Phi(t)| + \epsilon_2 |\Psi(t)| \\ &\leq E(t) + \epsilon_1 \|u(t)\|_2 \|u_t(t)\|_2 + \epsilon_2 \int_\Omega |u_t(t)| \int_0^t g(t-\tau)|u(t) - u(\tau)| \, d\tau \, dx, \end{aligned}$$

pela desigualdade de Young $2ab \leq a^2 + b^2$ e pelo Lema 2.6 item (i) segue que

$$\begin{aligned} F(t) &\leq E(t) + \frac{\epsilon_1}{2}\|u(t)\|_2^2 + \frac{\epsilon_1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\epsilon_2}{2}\|u_t(t)\|_2^2 \\ &\quad + \frac{\epsilon_2}{2} \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)|u(t) - u(\tau)| \, d\tau \right)^2 dx \\ &\leq E(t) + \frac{\epsilon_1}{2} C_p^2 \|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\epsilon_2}{2} C_p^2 \|g\|_1 (g\Box\Delta u)(t), \end{aligned}$$

substituindo (2.126) na desigualdade acima temos

$$F(t) \leq \frac{1}{\alpha_1} E(t),$$

onde $\dfrac{1}{\alpha_1} = \max\{\epsilon_1 + \epsilon_2 + 1,\ l + \epsilon_1 C_p^2,\ \epsilon_2 C_p^2 \|g\|_1 + 1\}$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} F(t) &\geq E(t) - \frac{\epsilon_1}{2}\|u(t)\|_2^2 - \frac{\epsilon_1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 - \frac{\epsilon_2}{2}\|u_t(t)\|_2^2 \\ &- \frac{\epsilon_2}{2} \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)|u(t) - u(\tau)| \, dt \right)^2 dx. \end{aligned} \tag{2.130}$$

Substituindo (2.126) em (2.130) e usando o Lema 2.6 item (i) temos

$$\begin{aligned} F(t) &\geq \left[\frac{1}{2} - \frac{(\epsilon_1+\epsilon_2)}{2}\right]\|u_t(t)\|_2^2 + \left[\frac{l}{2} - \frac{\epsilon_1}{2}C_p^2\right]\|\Delta u(t)\|_2^2 + \left[\frac{1}{2} - \frac{\epsilon_2}{2}C_p^2\|g\|_1\right](g\Box\Delta u)(t) \\ &\geq \frac{1}{\alpha_2}E(t), \end{aligned}$$

onde $\dfrac{1}{\alpha_2} = \min\{1-(\epsilon_1+\epsilon_2),\, l-\epsilon_1 C_p^2,\, 1-\epsilon_2 C_p^2\|g\|_1\}$ e ϵ_1, ϵ_2 são suficientemente pequenos tal que

$$\left[\frac{1}{2} - \frac{(\epsilon_1+\epsilon_2)}{2}\right] > 0, \left[\frac{l}{2} - \frac{\epsilon_1}{2}C_p^2\right] > 0, \left[\frac{1}{2} - \frac{\epsilon_2}{2}C_p^2\|g\|_1\right] > 0.$$

■

Lema 2.8. *Seja u solução de (2.121),então*

$$\Phi'(t) \leq c_1\|u_t(t)\|_2^2 - \frac{l}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 + c_2(g\Box\Delta u)(t), \tag{2.131}$$

para algumas constantes $c_1, c_2 > 0$.

Demonstração: Diferenciando $\Phi(t)$, segue que

$$\Phi'(t) = \int_\Omega u_{tt}(t)u(t)\,dx + \int_\Omega u_t^2(t)\,dx. \tag{2.132}$$

Substituindo $u_{tt} = -\Delta^2 u + \int_0^t g(t-\tau)\Delta^2 u(\tau)\,d\tau - M(\|\nabla u(t)\|_2^2 u_t$ em (2.132) temos

$$\begin{aligned} \Phi'(t) = &- \int_\Omega \Delta^2 u(t)u(t)\,dx + \int_\Omega\int_0^t g(t-\tau)\Delta^2 u(\tau)u(t)\,d\tau\,dx \\ &- \int_\Omega M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right)u_t(t)u(t)\,dx + \int_\Omega u_t^2(t)\,dx. \end{aligned}$$

Pela fórmula de Green, temos

$$-\int_\Omega \Delta^2 u(t)u(t)\,dx = -\int_\Omega \Delta u(t)\Delta u(t)\,dx$$

e

$$\int_\Omega\int_0^t g(t-\tau)\Delta^2 u(\tau)u(t)\,d\tau\,dx = \int_\Omega\int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau)\Delta u(t)\,d\tau\,dx.$$

Logo

$$\Phi'(t) = -\|\Delta u(t)\|_2^2 + \|u_t(t)\|_2^2 + J_1 + J_2, \tag{2.133}$$

onde

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^t g(t-\tau)(\Delta u(\tau), \Delta u(t))\, d\tau, \\ J_2 &= -M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right)(u_t(t), u(t)). \end{aligned}$$

Vamos estimar J_1 e J_2. Em primeiro lugar, note que

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq \int_0^t g(t-\tau)\|\Delta u(\tau)\|_2 \|\Delta u(t)\|_2\, d\tau, \\ &\leq \int_0^t g(t-\tau)\|\Delta u(t)\|_2 \|\Delta u(\tau) - \Delta u(t) + \Delta u(t)\|_2\, d\tau, \\ &\leq \int_0^t g(t-\tau)\|\Delta u(t)\|_2^2\, d\tau + \|\Delta u(t)\|_2 \int_0^t g(t-\tau)\|\Delta u(\tau) - \Delta u(t)\|_2\, d\tau. \end{aligned}$$

Pelas desigualdades de Young e Hölder obtemos

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq \|\Delta u(t)\|_2^2 \int_0^t g(t-\tau)\, d\tau + \eta\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\eta}\left(\int_0^t g(t-\tau)\|\Delta u(\tau) - \Delta u(t)\|_2\, d\tau\right)^2 \\ &\leq \|\Delta u(t)\|_2^2 \int_0^t g(s)\, ds + \eta\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{\|g\|_1}{4\eta}(g\Box\Delta u)(t) \\ &\leq (1-l)\|\Delta u(t)\|_2^2 + \eta\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\eta}\|g\|_1 (g\Box\Delta u)(t), \end{aligned}$$

na estimativa acima usamos o fato de que

$$\int_0^t g(\tau)\, d\tau \leq \int_0^\infty g(\tau)\, d\tau = 1 - l.$$

Agora para estimar J_2 usaremos as desigualdades de Young e Poincaré. De fato

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq \max_{0 \leq \|\nabla u(t)\| \leq M_1} M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right)\|u_t(t)\|_2 \|u(t)\|_2 \\ &\leq K\|u_t(t)\|_2\|u(t)\|_2 \\ &\leq \frac{K^2}{4\eta}\|u_t(t)\|_2^2 + \eta C_p^2\|\Delta u(t)\|_2^2. \end{aligned}$$

Substituindo J_1 e J_2 em (2.133) temos

$$\Phi'(t) \leq -l\|\Delta u(t)\|_2^2 + \left(\frac{K^2}{4\eta} + 1\right)\|u_t(t)\|_2^2 + \eta(C_p^2 + 1)\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\eta}\|g\|_1 (g\Box\Delta) u(t),$$

considerando $\eta < \frac{l}{2(C_p^2+1)}$ obtemos

$$\Phi'(t) \leq -\frac{l}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 + c_1\|u_t(t)\|_2^2 + c_2(g\Box\Delta u)(t).$$

■

Lema 2.9. *Seja u solução de (2.121), então*

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &\leq \delta\left\{1+2(1-l)^2\right\}\|\Delta u(t)\|_2^2+\left\{2\delta+\frac{1}{4\delta}(2+C_p^2)\right\}\|g\|_1(g\Box\Delta u)(t)\\ &+ \frac{g(0)}{4\delta}C_p^2((-g')\Box\Delta u)(t)+\left\{\delta(K_1+1)-\int_0^t g(s)\,ds\right\}\|u_t(t)\|_2^2, \qquad (2.134)\end{aligned}$$

onde $\delta, C_p, K_1 > 0$

Demonstração: Diferenciando $\Psi(t)$ e usando a regra de Leibniz em $\int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\,d\tau$ obtemos

$$\begin{aligned}\Psi'(t) = &- \int_\Omega u_{tt}(t)\int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\,d\tau\,dx \qquad (2.135)\\ &- \int_\Omega u_t(t)\int_0^t g'(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\,d\tau\,dx - \int_\Omega\int_0^t g(t-\tau)u_t^2(t)\,d\tau\,dx.\end{aligned}$$

Substituindo $u_{tt}(t) = -\Delta^2u(t)+\int_0^t g(t-\tau)\Delta^2u(\tau)\,d\tau - M(\|\nabla u(t)\|_2^2 u_t(t)$ em (2.135) e aplicando Green duas vezes temos

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &= \int_\Omega \Delta u(t)\int_0^t g(t-\tau)(\Delta u(t)-\Delta u(\tau))\,d\tau\,dx\\ &-\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau)\,d\tau\right)\left(\int_0^t g(t-\tau)(\Delta u(t)-\Delta u(\tau))\,d\tau\right)dx\\ &+\int_\Omega M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right)u_t(t)\int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\,d\tau\,dx\\ &-\int_\Omega u_t(t)\int_0^t g'(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\,d\tau\,dx-\int_\Omega u_t(t)\int_0^t g(t-\tau)u_t(t)\,d\tau\,dx.\end{aligned}$$

Logo,

$$\Psi'(t) \leq |I_1|+|I_2|+|I_3|+|I_4|-\int_\Omega u_t(t)\int_0^t g(t-\tau)u_t(t)\,d\tau\,dx, \qquad (2.136)$$

onde

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_\Omega \Delta u(t) \left(\int_0^t g(t-\tau)(\Delta u(t) - \Delta u(\tau))\, d\tau \right) dx, \\
I_2 &= -\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau)\, d\tau \right) \left(\int_0^t g(t-\tau)(\Delta u(t) - \Delta u(\tau))\, d\tau \right) dx, \\
I_3 &= \int_\Omega M\left(\|\nabla u(t)\|_2^2\right) u_t(t) \int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\, d\tau\, dx, \\
I_4 &= -\int_\Omega u_t(t) \left(\int_0^t g'(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\, d\tau \right) dx.
\end{aligned}
$$

Nas estimativas a seguir usaremos a desigualdade de Young $ab \leq \delta a^2 + \frac{1}{4\delta} b^2$ com $\delta > 0$.

Agora vamos estimar I_1, I_2, I_3 e I_4. De fato, usando desigualdade de Young e o Lema 2.6 item (ii) obtemos

$$
\begin{aligned}
|I_1| &\leq \delta \|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\delta} \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)|\Delta u(t) - \Delta u(\tau)|\, d\tau \right)^2 dx \qquad (2.137) \\
&\leq \delta \|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\delta} \|g\|_1 (g \Box \Delta u)(t).
\end{aligned}
$$

Novamente pela desigualdade de Young

$$
\begin{aligned}
|I_2| &\leq \delta \int_\Omega \left| \int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau)\, d\tau \right|^2 dx + \frac{1}{4\delta} \int_\Omega \left| \int_0^t g(t-\tau)(\Delta u(t) - \Delta u(\tau))\, d\tau \right|^2 dx \\
&\leq \underbrace{\delta \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)|\Delta u(\tau)|\, d\tau \right)^2 dx}_{I_2^1} + \frac{1}{4\delta} \|g\|_1 (g \Box \Delta u)(t). \qquad (2.138)
\end{aligned}
$$

Note que,

$$
\begin{aligned}
I_2^1(t) &= \delta \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)|\Delta u(\tau)|\, d\tau \right)^2 dx, \\
&= \delta \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)|\Delta u(\tau) - \Delta u(t) + \Delta u(t)|\, d\tau \right)^2 dx, \\
&\leq \delta \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)|\Delta u(\tau) - \Delta u(t)|\, d\tau + \int_0^t g(t-\tau)|\Delta u(t)|\, d\tau \right)^2 dx, \\
&\leq 2\delta \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)|\Delta u(\tau) - \Delta u(t)|\, d\tau \right)^2 dx, \\
&\quad + 2\delta \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)|\Delta u(t)|\, d\tau \right)^2 dx
\end{aligned}
$$

Pelo Lema 2.6 item (ii) e como $\displaystyle\int_0^t g(s)\,ds \le \int_0^\infty g(s)\,ds = 1-l$ temos

$$I_2^1(t) \;\le\; 2\delta\|g\|_1(g\Box\Delta u)(t) + 2\delta(1-l)^2\|\Delta u(t)\|_2^2.$$

Substituindo $I_2^1(t)$ em (2.138) obtemos

$$|I_2| \le 2\delta(1-l)^2\|\Delta u(t)\|_2^2 + (2\delta + \frac{1}{4\delta})\|g\|_1(g\Box\Delta u)(t).$$

Com relação a I_3 temos, simplesmente pela desigualdade de Young e pelo Lema 2.6 item (ii), que

$$\begin{aligned} |I_3| \;&\le\; \delta K_1\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\delta}\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)|u(t)-u(\tau)|\,d\tau\right)^2 dx \qquad (2.139)\\ &\le\; \delta K_1\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\delta}C_p^2\|g\|_1(g\Box\Delta u)(t), \end{aligned}$$

onde $K_1 = \max\limits_{0\le\xi\le M_1}|M(\xi)|$.

$$|I_4| \;\le\; \delta\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\delta}\left(\int_0^t (-g')(t-\tau)\,d\tau\right)\left(\int_0^t -g'(t-\tau)\|u(t)-u(\tau)\|_2^2\,d\tau\right).$$

Como $g'(t) \le -\xi(t)g(t)$ é menor que zero, então $-g'(t) \ge \xi(t)g(t)$ é maior que zero. Assim aplicando as desigualdades de Young e Hölder resulta que

$$|I_4| \;\le\; \delta\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\delta}g(0)C_p^2\int_0^t (-g')(t-\tau)\|\Delta u(t)-\Delta u(\tau)\|_2^2\,d\tau. \qquad (2.140)$$

Inserindo as estimativas (2.137)-(2.140) em (2.136) e reorganizando os termos concluímos que

$$\begin{aligned} \Psi'(t) \;&\le\; \delta\left\{1+2(1-l)^2\right\}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \left\{2\delta + \frac{1}{4\delta}(2+C_p^2)\right\}\|g\|_1(g\Box\Delta u)(t)\\ &+\; \frac{g(0)}{4\delta}C_p^2((-g')\Box\Delta u)(t) + \left\{\delta(K_1+1) - \int_0^t g(s)\,ds\right\}\|u_t(t)\|_2^2. \end{aligned}$$

■

Lema 2.10. *Existem constantes $k_1, k_2, k_3 > 0$ tais que*

$$F'(t) \le -k_1\|u_t(t)\|_2^2 - k_2\|\Delta u(t)\|_2^2 - k_3(g\Box\Delta u)(t), \;\; \forall\, t \ge t_0.$$

Demonstração: Lembre-se que $F(t) = E(t) + \epsilon_1\Phi(t) + \epsilon_2\Psi(t)$. Como

$$\int_0^t g(s)\,ds \ge \int_0^{t_0} g(s)\,ds = g_0 > 0, \;\; \forall\, t \ge t_0, \qquad (2.141)$$

diferenciando o funcional $F(t)$ e usando os Lemas 2.5, 2.8, 2.9 e a estimativa (2.141) obtemos

$$\begin{aligned}
F'(t) \ \leq\ & \frac{1}{2}(g'\Box\Delta u)(t) + \epsilon_1 c_1\|u_t(t)\|_2^2 - \epsilon_1\frac{l}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \epsilon_1 c_2(g\Box\Delta u)(t) \qquad (2.142)\\
& + \epsilon_2\delta\left\{1+2(1-l)^2\right\}\|\Delta u(t)\|_2^2 + \epsilon_2\left\{2\delta + \frac{1}{4\delta}(2+C_p^2)\right\}\|g\|_1(g\Box\Delta u)(t)\\
& + \epsilon_2\frac{g(0)}{4\delta}C_p^2(g'\Box\Delta u)(t) + \epsilon_2\left\{\delta(K_1+1) - \int_0^t g(s)\,ds\right\}\|u_t(t)\|_2^2\\
\leq\ & -\{\epsilon_2(g_0-\delta(K_1+1)) - \epsilon_1 c_1\}\|u_t(t)\|_2^2 - \left[\epsilon_1\frac{l}{2} - \epsilon_2\delta(1+2(1-l)^2)\right]\|\Delta u(t)\|_2^2\\
& + \left[\epsilon_1 c_2 + \epsilon_2\|g\|_1(2\delta + \frac{1}{4\delta}(2+C_p^2))\right](g\Box\Delta u)(t) + \left(\frac{1}{2} - \epsilon_2\frac{g(0)}{4\delta}C_p^2\right)(g'\Box\Delta u)(t).
\end{aligned}$$

Considerando $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$g_0 - \delta(K_1+1) > \frac{g_0}{2}$$

e

$$\frac{2}{l} - \delta(1+2(1-l)^2) < \frac{1}{4c_1}g_0.$$

Assim fixando $\delta > 0$ e escolhendo duas constantes $\epsilon_1 > 0$ e $\epsilon_2 > 0$ satisfazendo

$$\frac{g_0}{4c_1}\epsilon_2 < \epsilon_1 < \frac{g_0}{2c_1}\epsilon_2 \qquad (2.143)$$

De modo que

$$\begin{aligned}
k_1 &= \epsilon_2(g_0 - \delta(K_1+1)) > 0\\
k_2 &= \epsilon_1\frac{l}{2} - \epsilon_2\delta(1+2(1-l)^2) > 0,\\
k_3 &= \frac{1}{2} - \epsilon_2\frac{g(0)}{4\delta}C_p^2 - \frac{1}{\xi_1}\left[\epsilon_1 c_2 + \epsilon_2\|g\|_1(2\delta + \frac{1}{4\delta}(2+C_p^2))\right] > 0.
\end{aligned}$$

Então podemos reescrever (2.142) como

$$F'(t) \leq -k_1\|u_t(t)\|_2^2 - k_2\|\Delta u(t)\|_2^2 - k_3(g\Box\Delta u)(t), \quad \forall\, t \geq t_0.$$

■

Demonstração do Teorema 2.4: Considerando $\beta_1 = \frac{1}{2}\min\{k_1,k_2,k_3\}$ e combinando com o Lema 2.7, segue que

$$F'(t) \leq -\beta_1 E(t) \leq -\beta_1\alpha_1 F(t). \qquad (2.144)$$

Integrando (2.144) sobre (t_0, t), concluímos que

$$F(t) \leq F(t_0)e^{\beta_1\alpha_1 t_0}e^{-\beta\alpha_1 t}, \quad \forall\, t \geq t_0.$$

Usando novamente o Lema 2.7 obtemos

$$E(t) \leq KE(t_0)e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \forall\, t \geq t_0.$$

Onde $K = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ e $\lambda = \beta_1\alpha_1$. Isto completa a prova do Teorema 2.4. ■

Observação 2.11. *Das definições $E_0(t)$ e $E(t)$ em (2.125), (2.126) obtemos que*

$$E_0(t) = \frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2$$

satisfaz sob uma solução forte u do problema (2.121)

$$\begin{aligned} E_0(t) &\leq \frac{1}{l}E(t) \leq \frac{K}{l}E(t_0)e^{-\lambda(t-t_0)} \\ &= \frac{K}{l}e^{\lambda t_0}E(t_0)e^{-\lambda t} \\ &\leq \left(\frac{K}{l}e^{\lambda t_0}\right)E(0)e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Fixando $t_0 > 0$ e tomando $k_{t_0} = \dfrac{Ke^{\lambda t_0}}{l} > 0$, então

$$E_0(t) \leq k_{t_0}E_0(0)e^{-\lambda t}, \quad \forall\, t \geq t_0$$

■

Observação 2.12. *Decaimento de soluções fracas. Seja $(u_0, u_1) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times L^2(\Omega)$, então existem sequências de dados iniciais $(u_0^n, u_1^n) \in H_\Gamma^4(\Omega) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ tais que*

$$(u_0^n, u_1^n) \to (u_0, u_1) \ \text{ em } \ (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times L^2(\Omega),$$

de onde segue que

$$\|\Delta u_0^n\|_2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|\Delta u_0\|_2 \tag{2.145}$$

e

$$\|u_1^n\|_2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|u_1\|_2. \tag{2.146}$$

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, o problema

$$\begin{cases} u_{tt}^n + \Delta^2 u^n - \int_0^t g(t-\tau)\Delta^2 u^n(\tau)\,d\tau + M\left(\|\nabla u^n(t)\|_2^2\right)u_t^n = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times (0,\infty), \\ u^n = \Delta u^n = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega \times [0,\infty), \\ u^n(0) = u_0^n, \qquad u_t^n(0) = u_1^n, \end{cases} \tag{2.147}$$

possui uma única solução u^n na classe

$$u \in L^\infty(0,T;H^4_\Gamma(\Omega)), \quad u_t \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)), \quad u_{tt} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

a qual

$$\begin{aligned} &u^n \to u \in C([0,T],H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)),\\ &u^n_t \to u_t \in C([0,T],L^2(\Omega)),\end{aligned}$$

onde (u,u_t) constitue uma solução fraca para (2.121), assim como no item (ii) do Teorema 2.3. De onde segue que

$$\|\Delta u^n(t)\|_2 \to \|\Delta u(t)\|_2, \tag{2.148}$$

$$\|u^n_t(t)\|_2 \to \|u_t(t)\|_2. \tag{2.149}$$

para $t>0$. Definindo

$$E^n_0(t) = \frac{1}{2}\|u^n_t(t)\|^2_2 + \frac{1}{2}\|\Delta u^n(t)\|^2_2,$$

funcional energia associado a sequência de soluções fortes e

$$E_0(t) = \frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2_2 + \frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|^2_2,$$

funcional energia associado a solução fraca. Obtemos da Observação 2.11 que

$$E^n_0(t) \le K_{t_0}E^n_0(0)e^{-\lambda t}.$$

Tomando o limite quando $n\to\infty$ e usando (2.145), (2.146), (2.148) e (2.149) concluímos que

$$E_0(t) \le K_{t_0}E_0(0)e^{-\lambda t}, \ \ \forall\, t \ge t_0.$$

Isto mostra que a solução fraca (u,u_t) decai de forma exponencial em norma no espaço de fase $(H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega))\times L^2(\Omega)$, quando $t\to\infty$ como queríamos.

■

3 DECAIMENTO GERAL DA SOLUÇÃO PARA UM PROBLEMA DE PLACAS COM MEMÓRIA

3.1 INTRODUÇÃO

No capítulo 2 vimos que a solução u do problema (2.1) decai a uma mesma taxa que o núcleo da memória g, ou seja, quando a função g decai para zero exponencialmente a solução u também decai na mesma taxa, qualquer que seja $M \geq 0$ de classe C^1 dada. Este capítulo está organizado como segue.

Na Seção 3.2 colocaremos o problema a ser estudado e o resultado de existência com uma condição mais geral sobre o núcleo da memória g. Em seguida na Seção 3.3 mostraremos que a solução decai de forma geral, conforme o decaimento de g.

3.2 BOA COLOCAÇÃO DO PROBLEMA

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado. Consideremos o seguinte problema de valor inicial e de Fronteira.

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-\tau)\Delta^2 u(\tau)\,d\tau = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times (0,\infty), \\ u = \Delta u = 0 \ \text{ em } \ \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(\cdot,0) = u_0, \ \ u_t(\cdot,0) = u_1 \ \text{ em } \ \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Núcleo da memória g.

$(H1)$ Seja $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função diferenciável, tal que

$$g(0) > 0, \quad 1 - \int_0^\infty g(\tau)\,d\tau = l > 0. \tag{3.2}$$

$(H2)$ Além disso, suponhamos que exista uma função $\xi(t)$ satisfazendo

$$g'(t) \leq -\xi(t)g(t), \quad t \geq 0, \tag{3.3}$$

$$\left|\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\right| \leq k, \ \xi(t) > 0, \ \xi'(t) \leq 0, \ \forall\, t > 0, \tag{3.4}$$

para alguma constante $k > 0$.

Teorema 3.1. *Seja $T > 0$ arbitrário. Sob as hipóteses $(H1)$-$(H2)$, temos:*

(i) *Se $(u_0, u_1) \in H^4_\Gamma(\Omega) \times (H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega))$, então o problema* (3.1) *possui uma única* *solução forte na classe*

$$u \in L^\infty(0,T;H^4_\Gamma(\Omega)), \quad u_t \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)), \quad u_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.5}$$

(ii) *Se* $(u_0,u_1) \in (H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)) \times L^2(\Omega)$*, então o problema* (3.1) *possui uma única solução fraca*

$$u \in C^0([0,T],H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)) \cap C^1([0,T]L^2(\Omega)), \tag{3.6}$$

na classe

$$u \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)),\ u_t \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\ u_{tt} \in L^2(0,T;(H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega))'). \tag{3.7}$$

Mais ainda, se os dados iniciais $(u_0,u_1) \in H^3_\Gamma(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$*, então a solução fraca tem mais regularidade na classe*

$$u \in L^\infty(0,T;H^3_\Gamma(\Omega)), \quad u_t \in L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)), \quad u_{tt} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{3.8}$$

(iii) *A solução* (u,u_t) *depende continuamente dos dados iniciais em* $\mathcal{H} := H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$*. Mais precisamente, se* $z^1 = (u,u_t)$*,* $z^2 = (v,v_t)$*, são duas soluções (fraca ou forte) do problema* (3.1) *correspondentes aos dados iniciais* $z^1_0 = (u_0,u_1)$*,* $z^2_0 = (v_0,v_1)$*, então vale a seguinte estimativa*

$$\|z^1(t) - z^2(t)\|_{\mathcal{H}} \le C_T\|z^1_0 - z^2_0\|_{\mathcal{H}}, \ \ \forall\, t \in [0,T], \tag{3.9}$$

para alguma constante positiva $C_T = C_T(\|z^1_0\|_{\mathcal{H}},\|z^2_0\|_{\mathcal{H}},T)$*. Em particular, o problema* (3.1) *possui uma única solução forte e fraca.*

Demonstração: A prova segue de forma similar ao do Teorema 2.3 no Capítulo 2. Note que para determinarmos as estimativas a priori $1,2,3$ e 4 do Teorema 3.1 usa-se fortemente as condições $(H1)$, que é análogo a $(G1)$. A condição $g'(t) \le -\xi(t)g(t)$, que contém de forma implícita a condição $(G2)$ uma vez que em $(H2)$ temos $\xi(t) \ge 0$, é usada apenas para saber o sinal de g', a saber, que $g' \le 0$. Omitiremos a prova aqui uma vez que a mesma segue ao realizarmos as mesmas contas na prova do Teorema 2.3. ■

3.3 Decaimento Geral

Notemos inicialmente que a condição (3.3) em $(H2)$ implica que

$$g'(t) \le -\xi(t)g(t) \Longrightarrow g'(t)e^{\int_0^t \xi(s)\,ds} + \xi(t)g(t)e^{\int_0^t \xi(s)\,ds} \le 0,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\left(g(t)e^{\int_0^t \xi(s)\,ds}\right) \leq 0.$$

Integrando de 0 a t temos

$$g(t)e^{\int_0^t \xi(s)\,ds} \leq g(0) \Longrightarrow g(t) \leq g(0)e^{-\int_0^t \xi(s)\,ds} \quad t > 0. \tag{3.10}$$

De acordo com (3.3) segue o decaimento do núcleo da memória g, conforme a função $\xi(t)$ satisfazendo (3.4). Ao final do capítulo faremos alguns exemplos de funções $\xi(t)$ satisfazendo (3.4) e o tipo de decaimento que obteremos para a energia associada ao problema (3.1). De acordo com o exposto acima, espera-se que a solução de (3.1) dada pelo Teorema 3.1 tenha um decaimento conforme (3.10).

A energia $E(t)$ associada a (3.1) é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(g\Box\Delta u)(t). \tag{3.11}$$

Teorema 3.2. *Sob as condições do Teorema 3.1, seja u uma solução (fraca ou forte) do problema (3.1). Então para cada $t_0 > 0$ existem constantes $\alpha, \beta > 0$ tais que a energia $E(t)$ satisfaz*

$$E(t) \leq \alpha E(t_0)e^{-\beta\int_{t_0}^t \xi(s)\,ds}, \quad \forall\, t \geq t_0. \tag{3.12}$$

A demonstração do Teorema 3.2 será feita em várias etapas conforme segue.

Lema 3.3. *Sob a solução do problema* (3.1)*, o funcional energia $E(t)$ satisfaz*

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq \frac{1}{2}(g'\Box\Delta u)(t).$$

Demonstração: Multiplicando a equação (3.1) por u_t e integrando em Ω, obtemos

$$\int_\Omega u_{tt}(t)u_t(t)\,dx + \int_\Omega \Delta^2 u(t)u_t(t)\,dx - \int_\Omega\int_0^t g(t-\tau)\Delta^2 u(\tau)u_t(t)\,d\tau\,dx = 0.$$

Aplicando a formula de Green duas vezes temos

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2\right\} = \int_0^t g(t-\tau)(\Delta u(\tau), \Delta u_t(t))\,d\tau.$$

Usando a identidade para memória (ver (2.22) na estimativa 1) segue que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|u_t(t)\| + \left(1 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\Delta u(t)\|_2^2 + (g\Box\Delta u)(t)\right\} \\ &= (g'\Box\Delta u)(t) - g(t)\|\Delta u(t)\|_2^2 \\ &\leq \frac{1}{2}(g'\Box\Delta u)(t), \end{aligned}$$

ou seja,

$$E'(t) \leq \frac{1}{2}(g'\Box\Delta u)(t).$$

■

Como consequência do Lema 3.3 e as condições $(H1)$ e $(H2)$ temos $E'(t) \leq 0$, ou seja, $E(t)$ é decrescente.

Agora definamos o seguinte funcional perturbado

$$F(t) = E(t) + \epsilon_1\Phi(t) + \epsilon_2\chi(t), \tag{3.13}$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 são constantes positivas a serem escolhidas posteriormente e

$$\Phi(t) = \xi(t)\int_\Omega u(t)u_t(t)\,dx, \tag{3.14}$$

$$\chi(t) = -\xi(t)\int_\Omega u_t(t)\int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\,d\tau\,dx. \tag{3.15}$$

Lema 3.4. *Existem constantes α_1 e $\alpha_2 > 0$ tais que*

$$\alpha_1 F(t) \leq E(t) \leq \alpha_2 F(t)$$

para $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ suficientemente pequenos.

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned} F(t) &\leq E(t) + \epsilon_1|\Phi(t)| + \epsilon_2|\chi(t)| \\ &\leq E(t) + \epsilon_1\xi(t)\|u(t)\|_2\|u_t(t)\|_2 + \epsilon_2\xi(t)\int_\Omega |u_t(t)|\int_0^t g(t-\tau)|u(t)-u(\tau)|\,d\tau\,dx, \end{aligned}$$

pela desigualdade de Young $2ab \leq a^2 + b^2$ e pelo Lema 2.6 segue que

$$\begin{aligned} F(t) &\leq E(t) + \frac{\epsilon_1}{2}\xi(t)\|u(t)\|_2^2 + \frac{\epsilon_1}{2}\xi(t)\|u_t(t)\|_2^2 \\ &\quad + \frac{\epsilon_2}{2}\xi(t)\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\epsilon_2}{2}\xi(t)\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)|u(t)-u(\tau)|\,d\tau\right)^2 dx \\ &\leq E(t) + \frac{\epsilon_1}{2}C_p^2 M\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{(\epsilon_1+\epsilon_2)}{2}M\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\epsilon_2}{2}C_p^2 M\|g\|_1(g\Box\Delta u)(t) \\ &\leq \frac{1}{\alpha_1}E(t). \end{aligned}$$

onde $M = \max_{t>0}|\xi(t)|$ e $\dfrac{1}{\alpha_1} = \max\{1+\epsilon_1 C_p^2 M,\ 1+(\epsilon_1+\epsilon_2)M,\ 1+\epsilon_2 C_p^2 M\|g\|_1\}$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} F(t) &\geq E(t) - \frac{\epsilon_1}{2}\xi(t)\|u(t)\|_2^2 - \frac{\epsilon_1}{2}\xi(t)\|u_t(t)\|_2^2 - \frac{\epsilon_2}{2}\xi(t)\|u_t(t)\|_2^2 \\ &\quad -\frac{\epsilon_2}{2}\xi(t)\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)|u(t)-u(\tau)|\,d\tau\right)^2 dx. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Substituindo (3.11) em (3.16) e usando o Lema 2.6 temos

$$\begin{aligned} F(t) &\geq \left[\frac{1}{2} - \frac{(\epsilon_1+\epsilon_2)}{2}\right]\|u_t(t)\|_2^2 + \left[\frac{l}{2} - \frac{\epsilon_1}{2}C_p^2\right]\|\Delta u(t)\|_2^2 + \left[\frac{1}{2} - \frac{\epsilon_2}{2}C_p^2\|g\|_1\right](g\Box\Delta u)(t) \\ &\geq \frac{1}{\alpha_2}E(t), \end{aligned}$$

onde $\frac{1}{\alpha_2} = \min\{1-(\epsilon_1+\epsilon_2),\, l-\epsilon_1 C_p^2,\, 1-\epsilon_2 C_p^2\|g\|_1\}$ para ϵ_1 e ϵ_2 suficientemente pequenos. ■

Lema 3.5. *Seja u solução do problema (3.1), então*

$$\Phi'(t) \leq c_3\xi(t)\|u_t(t)\|_2^2 - \frac{l}{4}\xi(t)\|\Delta u(t)\|_2^2 + c_4\xi(t)(g\Box\Delta u)(t), \tag{3.17}$$

onde $k, \eta, C_p > 0$ são constantes independentes dos dados iniciais.

Demonstração: Derivando $\Phi(t)$ e usando a equação $(3.1)_1$, segue que

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= -\xi(t)\int_\Omega \Delta^2 u(t)\,dx + \xi(t)\int_\Omega\int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau)\Delta u(t)\,d\tau\,dx \\ &\quad +\xi'(t)\int_\Omega u(t)u_t(t)\,dx + \xi(t)\int_\Omega u_t^2(t)\,dx \\ &= -\xi(t)\|\Delta u(t)\|_2^2 + \xi(t)\|u_t(t)\|_2^2 + \xi(t)L_1 + \xi'(t)L_2, \end{aligned} \tag{3.18}$$

onde

$$\begin{aligned} L_1 &= \int_\Omega\int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau)\Delta u(t)\,d\tau\,dx, \\ L_2 &= \int_\Omega u(t)u_t(t)\,dx. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Young com $\eta > 0$ e como

$$\int_0^t g(\tau)\,d\tau \leq \int_0^\infty g(\tau)\,d\tau = 1 - l,$$

segue pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz, triangular e de Hölder que

$$\begin{aligned}
|L_1| &\leq \int_0^t g(t-\tau)\|\Delta u(\tau)\|_2\|\Delta u(t)\|_2\, d\tau, \\
&= \int_0^t g(t-\tau)\|\Delta u(t)\|_2\|\Delta u(\tau)-\Delta u(t)+\Delta u(t)\|_2\, d\tau \\
&\leq \int_0^t g(t-\tau)\|\Delta u(t)\|_2\left(\|\Delta u(\tau)-\Delta u(t)\|_2+\|\Delta u(t)\|_2\right)\, d\tau \\
&= \int_0^t g(t-\tau)\|\Delta u(t)\|_2^2\, d\tau + \|\Delta u(t)\|_2\int_0^t g(t-\tau)\|\Delta u(\tau)-\Delta u(t)\|_2\, d\tau \\
&\leq \int_0^t g(t-\tau)\|\Delta u(t)\|_2^2\, d\tau + \eta\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\eta}\left(\int_0^t g(t-\tau)\|\Delta u(\tau)-\Delta u(t)\|_2\, d\tau\right)^2 \\
&\leq \|\Delta u(t)\|_2^2\int_0^t g(s)\, ds + \eta\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\eta}\|g\|_1(g\Box\Delta u)(t) \\
&\leq (1-l)\|\Delta u(t)\|_2^2 + \eta\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\eta}\|g\|_1(g\Box\Delta u)(t),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|L_2| &\leq \|u_t(t)\|_2\|u(t)\|_2 \\
&\leq \frac{1}{4\eta}\|u_t(t)\|_2^2 + \eta C_p^2\|\Delta u(t)\|_2^2.
\end{aligned}$$

Substituindo $|L_1|$ e $|L_2|$ em (3.18) e usando a condição (3.4) obtemos

$$\begin{aligned}
\Phi'(t) &\leq -\xi(t)\|\Delta u(t)\|_2^2 + \xi(t)\|u_t(t)\|_2^2 + \xi(t)(1-l)\|\Delta u(t)\|_2^2 \\
&\quad +\xi(t)\eta\|\Delta u(t)\|_2^2 + \xi(t)\frac{1}{4\eta}\|g\|_1(g\Box\Delta u)(t) + \xi'(t)\frac{1}{4\eta}\|u_t(t)\|_2^2 + \xi'(t)\eta C_p^2\|\Delta u(t)\|_2^2 \\
&\leq \left(1+\frac{1}{4\eta}\left|\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\right|\right)\xi(t)\|u_t(t)\|_2^2 + \left(\eta\left[1+\left|\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\right|C_p^2\right]-l\right)\xi(t)\|\Delta u(t)\|_2^2 \\
&\quad +\xi(t)\frac{\|g\|_1}{4\eta}(g\Box\Delta u)(t) \\
&\leq \left(1+\frac{1}{4\eta}k\right)\xi(t)\|u_t(t)\|_2^2 + \left(\eta\left[1+kC_p^2\right]-l\right)\xi(t)\|\Delta u(t)\|_2^2 + \xi(t)\frac{\|g\|_1}{4\eta}(g\Box\Delta u)(t),
\end{aligned}$$

tomando η suficientemente pequeno temos

$$\Phi'(t) \leq c_3\xi(t)\|u_t(t)\|_2^2 - \frac{l}{4}\xi(t)\|\Delta u(t)\|_2^2 + c_4\xi(t)(g\Box\Delta u)(t),$$

o que mostra (3.17). ■

Lema 3.6. *Seja u solução do problema (3.1), então*

$$\begin{aligned}\chi'(t) \;&\leq\; \xi(t)\left[\delta(k+1)-\int_0^t g(s)\,ds\right]\|u_t(t)\|_2^2+\delta[1+2(1-l)^2]\xi(t)\|\Delta u(t)\|_2^2\\ &+\left[\left(2\delta+\frac{1}{4\delta}\right)+\frac{C_p^2}{4\delta}(k+1)\right]\xi(t)\|g\|_1(g\Box\Delta u)(t)+\xi(t)\frac{g(0)}{4\delta}C_p^2((-g')\Box\Delta u)(t)\end{aligned}$$

onde $k, C_p > 0$ qualquer que seja $\delta > 0$.

Demonstração: Derivando (3.15) temos

$$\begin{aligned}\chi'(t) \;=\;& -\xi'(t)\int_\Omega u_t(t)\int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\,d\tau\,dx \qquad (3.19)\\ & -\xi(t)\int_\Omega u_{tt}(t)\int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\,d\tau\,dx\\ & -\xi(t)\int_\Omega u_t(t)\int_0^t g'(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\,d\tau\,dx\\ & -\xi(t)\int_\Omega u_t(t)\int_0^t g(t-\tau)u_t(t)\,d\tau\,dx,\\ =\;& -\xi'(t)\int_\Omega u_t(t)\int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\,d\tau\,dx\\ & +\xi(t)\int_\Omega \Delta u(t)\int_0^t g(t-\tau)(\Delta u(t)-\Delta u(\tau))\,d\tau\,dx\\ & -\xi(t)\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau)\,d\tau\right)\left(\int_0^t g(t-\tau)(\Delta u(t)-\Delta u(\tau))\,d\tau\right)dx\\ & -\xi(t)\int_\Omega u_t(t)\int_0^t g'(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\,d\tau\,dx\\ & -\xi(t)\|u_t(t)\|_2^2\int_0^t g(t-\tau)\,d\tau. \qquad (3.20)\end{aligned}$$

Assim obtemos

$$\chi'(t)\leq -\xi(t)\|u_t(t)\|_2^2\int_0^t g(t-\tau)\,d\tau+|S_1|+|S_2|+|S_3|+|S_4|, \tag{3.21}$$

onde

$$\begin{aligned}S_1 &= -\xi'(t)\int_\Omega u_t(t)\int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\,d\tau\,dx,\\ S_2 &= \xi(t)\int_\Omega \Delta u(t)\int_0^t g(t-\tau)(\Delta u(t)-\Delta u(\tau))\,d\tau\,dx,\\ S_3 &= -\xi(t)\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau)\,d\tau\right)\left(\int_0^t g(t-\tau)(\Delta u(t)-\Delta u(\tau))\,d\tau\right)dx,\\ S_4 &= -\xi(t)\int_\Omega u_t(t)\int_0^t g'(t-\tau)(u(t)-u(\tau))\,d\tau\,dx.\end{aligned}$$

Estimando $S_i's$ temos pela desigualdade de Young com $\delta > 0$ e pelo Lema 2.6

$$|S_1| \leq \left|\frac{-\xi'(t)}{\xi(t)}\right| \xi(t)\delta\|u_t(t)\|_2^2 + \left|\frac{-\xi'(t)}{\xi(t)}\right| \xi(t)\frac{1}{4\delta}\|g\|_1 C_p^2 \int_0^t g(t-\tau)\|\Delta u(t) - \Delta u(\tau)\|_2^2\, d\tau,$$

e

$$|S_2| \leq \xi(t)\delta\|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{\xi(t)}{4\delta}\|g\|_1 C_p^2 \int_0^t g(t-\tau)\|\Delta u(t) - \Delta u(\tau)\|_2^2\, d\tau.$$

Para estimar S_3 e S_4 usamos argumentos análogos aos feitos em I_2 e I_4, uma vez que $\xi(t)$ não influencia na estimativa. Neste caso obtemos

$$|S_3| \leq \xi(t)\left\{2\delta(1-l)^2\|\Delta u(t)\|_2^2 + (2\delta + \frac{1}{4\delta})\|g\|_1 (g\Box\Delta u)(t)\right\}$$

e

$$|S_4| \leq \xi(t)\delta\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{\xi(t)}{4\delta} g(0) C_p^2 \int_0^t (-g')(t-\tau)\|\Delta u(t) - \Delta u(\tau)\|_2^2\, d\tau.$$

Substituindo $S_i's$ em (3.21) concluímos que

$$\begin{aligned}
\chi'(t) \quad &\leq \quad \xi(t)\left[\delta(k+1) - \int_0^t g(s)\, ds\right]\|u_t(t)\|_2^2 + \delta[1 + 2(1-l)^2]\xi(t)\|\Delta u(t)\|_2^2 \\
&\quad + \left[\left(2\delta + \frac{1}{4\delta}\right) + \frac{C_p^2}{4\delta}(k+1)\right]\xi(t)\|g\|_1 (g\Box\Delta u)(t) + \xi(t)\frac{g(0)}{4\delta}C_p^2((-g')\Box\Delta u)(t),
\end{aligned}$$

onde $k, C_p > 0$, como queríamos demonstrar. ■

Lema 3.7. *Existem constantes $k_1, k_2, k_3 > 0$ tais que o funcional $F(t)$ em (3.13) satisfaz*

$$F'(t) \leq -k_1\xi(t)\|u_t(t)\|_2^2 - k_2\xi(t)\|\Delta u(t)\|_2^2 - k_3\xi(t)(g\Box\Delta u)(t). \tag{3.22}$$

Demonstração: Usando os Lemas 3.3, 3.5 e 3.6 obtemos

$$\begin{aligned}
F'(t) \quad &\leq \quad \frac{1}{2}(g'\Box\Delta u)(t) + \epsilon_1 c_3 \xi(t)\|u_t(t)\|_2^2 - \epsilon_1\xi(t)\frac{l}{4}\|\Delta u(t)\|_2^2 \\
&\quad + \epsilon_1 c_4 \xi(t)(g\Box\Delta u)(t) + \epsilon_2\xi(t)\left[\delta(k+1) - \int_0^t g(s)\, ds\right]\|u_t(t)\|_2^2 \\
&\quad + \epsilon_2\xi(t)\left[\left(2\delta + \frac{1}{4\delta}\right) + \frac{C_p^2}{4\delta}(k+1)\right]\|g\|_1 (g\Box\Delta u)(t) + \epsilon_2\xi(t)\frac{g(0)}{4\delta}C_p^2((-g')\Box\Delta u)(t) \\
&\quad + \epsilon_2\xi(t)\delta\left[1 + 2(1-l)^2\right]\|\Delta u(t)\|_2^2.
\end{aligned}$$

Como

$$\int_0^t g(s)\, ds \geq \int_0^{t_0} g(s)\, ds = g_0 > 0,\ \forall\, t \geq t_0,$$

temos

$$
\begin{aligned}
F'(t) \leq & -\left[(g_0 - \delta(k+1))\epsilon_2 - \epsilon_1 c_3\right] \xi(t)\|u_t(t)\|_2^2 \\
& - \left[\frac{l}{4}\epsilon_1 - \epsilon_2\delta[1+2(1-l)^2]\right] \xi(t)\|\Delta u(t)\|_2^2 \\
& + \left[c_4\epsilon_1 + \epsilon_2[(2\delta + \frac{1}{4\delta}) + \frac{C_p^2}{4\delta}(k+1)]\right] \xi(t)\|g\|_1(g\Box\Delta u)(t) \\
& + \left(\frac{1}{2} - \epsilon_2\frac{g(0)}{4\delta}MC_p^2\right)(g'\Box\Delta u)(t).
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

Agora escolhendo $\delta > 0$ pequeno suficiente tal que

$$
\begin{aligned}
g_0 - \delta(k+1) &> \frac{1}{2}g_0, \\
\delta\left[1+2(1-l)^2\right] &< \frac{l}{4c_3}g_0,
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

Sendo assim, escolhemos $\epsilon_1 > 0$ e $\epsilon_2 > 0$ tais que

$$
\frac{g_0}{4c_3}\epsilon_2 < \epsilon_1 < \frac{g_0}{2c_3}\epsilon_2. \tag{3.25}
$$

Logo, temos que as seguintes constantes são positivas

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \epsilon_2\left[g_0 - \delta(k+1)\right] - \epsilon_1 c_3 > 0, \\
k_2 &= \frac{l}{4}\epsilon_1 - \epsilon_2\delta\left[1+2(1-l)^2\right] > 0
\end{aligned}
$$

Além disso, escolhendo ϵ_1 e ϵ_2 suficientemente pequenos de forma que permaneçam válidos (3.4), (3.25) e

$$
k_3 = \left(\frac{1}{2} - \epsilon_2\frac{g(0)}{4\delta}C_p^2 M\right) - \left(\epsilon_1 c_4 + \epsilon_2[(2\delta + \frac{1}{4\delta}) + \frac{C_p^2}{4\delta}(k+1)\right) - \epsilon_2 k\frac{C_p^2}{4\delta} > 0.
$$

Podemos reescrever (3.23) como

$$
F'(t) \leq -k_1\xi(t)\|u_t(t)\|_2^2 - k_2\xi(t)\|\Delta u\|_2^2 - k_3\xi(t)(g\Box\Delta u)(t), \tag{3.26}
$$

como queriamos mostrar. ∎

Demonstração do Teorema 3.2: Pelas condições anteriores, segue do Lema 3.7 que

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq -k_1\xi(t)\|u_t(t)\|_2^2 - k_2\xi(t)\|\Delta u\|_2^2 - k_3\xi(t)(g\Box\Delta u)(t) \\ &\leq -k_0\xi(t)\{\|u_t(t)\|_2^2 + \|\Delta u\|_2^2 + (g\Box\Delta u)(t)\} \\ &\leq -k_0\xi(t)\{\|u_t(t)\|_2^2 + \|\Delta u\|_2^2 + (g\Box\Delta u)(t)\} + k_0\|\Delta u(t)\|_2^2\xi(t)\int_0^t g(s)\,ds \\ &= -k_0\xi(t)\{\|u_t(t)\|_2^2 + \left(1 - \int_0^t g(s)\,ds\right)\|\Delta u\|_2^2 + (g\Box\Delta u)(t)\}, \end{aligned}$$

usando o Lema 3.7, a definição de $E(t)$ em (3.3) e considerando $k_0 = \min\{k_1, k_2, k_3\}$, obtemos

$$F'(t) \leq -2k_0\xi(t)E(t).$$

Pelo Lema 3.4 temos

$$F'(t) \leq -2k_0\xi(t)E(t) \leq -2k_0\alpha_1\xi(t)F(t),$$

multiplicando por $e^{\int_{t_0}^t \xi(s)\,ds}$ temos

$$F'(t)e^{\int_{t_0}^t \xi(s)\,ds} + 2k_0\alpha_1\xi(t)F(t)e^{\int_{t_0}^t \xi(s)\,ds} \leq 0,$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\beta\int_{t_0}^t \xi(s)\,ds}F(t)\right) \leq 0.$$

Integrando de t_0 a t obtemos:

$$F(t)e^{\beta\int_{t_0}^t \xi(s)\,ds} \leq F(t_0) \Longrightarrow F(t) \leq F(t_0)e^{-\beta\int_{t_0}^t \xi(s)\,ds}, \quad \forall\, t \geq t_0.$$

usando novamente o Lema 3.4 temos

$$\begin{aligned} E(t) \leq \alpha_2 F(t) &\leq \alpha_2 F(t_0)e^{-\beta\int_{t_0}^t \xi(s)\,ds} \\ &\leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1}E(t_0)e^{-\beta\int_{t_0}^t \xi(s)\,ds}, \end{aligned}$$

de onde segue a prova do Teorema 3.2 com $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} > 0$ e $\beta = 2k_0\alpha_1 > 0$. ■

Observação 3.8. *Fixado $t_0 > 0$ o Teorema 3.2 afirma que $E(t) \leq \alpha E(t_0)e^{-\beta\int_{t_0}^t \xi(s)\,ds}$ para todo $t \geq t_0$. Sendo $\xi(t)$ contínua e $E(t)$ decrescente (ver Lema 3.3) então para t suficientemente grande concluímos que*

$$E(t) \leq \alpha E(t_0)e^{-\beta\int_{t_0}^t \xi(s)\,ds} \leq \alpha E(0)e^{-\beta\int_{t_0}^t \xi(s)\,ds - \beta\int_0^{t_0} \xi(s)\,ds + \beta\int_0^{t_0} \xi(s)\,ds}$$

o que implica

$$E(t) \leq \alpha E(0) e^{-\beta \int_0^t \xi(s)\,ds} e^{-\beta \int_0^{t_0} \xi(s)\,ds}.$$

Logo,

$$E(t) \leq \alpha C_{t_0} E(0) e^{-\beta \int_0^t \xi(s)\,ds}, \quad \forall\, t \geq t_0. \tag{3.27}$$

O que mostra o decaimento na mesma taxa que a desigualdade (3.10).

■

3.4 APLICAÇÕES

No que segue aplicaremos o Teorema 3.2 para obter taxas de decaimento de energia conforme a função $\xi(t)$ satisfaz a hipótese (3.4).

Caso 1. Seja $\xi(t) = \xi_1 = cte > 0$. Então $\xi(t)$ satisfaz claramente (3.4) pois

$$\xi(t) > 0, \quad \xi'(t) = 0, \quad \left|\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\right| = 0 < k,$$

qualquer que seja $k > 0$, por exemplo, $k = \xi_1$. Neste caso, de (3.10) temos

$$g(t) \leq g(0) e^{-\int_0^t \xi_1\,ds} = g(0) e^{-\xi_1 t}, \ \ \forall\, t > 0.$$

De (3.27) existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$E(t) \leq C_1 E(0) e^{-C_2 t}, \ \ \forall\, t > t_0.$$

Caso 2. Seja $\xi(t) = \frac{1}{t+1} > 0, \quad t > 0$. Então

$$\xi'(t) = \frac{-1}{(t+1)^2} \leq 0, \quad \left|\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\right| = \left|\frac{\frac{-1}{(t+1)^2}}{\frac{1}{t+1}}\right| = \frac{1}{t+1} < 1 := k,$$

e a condição (3.4) é satisfeita. De (3.10) temos

$$g(t) \leq g(0) e^{-\int_0^t \frac{1}{s+1}\,ds} = g(0) e^{-(ln(t+1) - ln(1))}$$

o implica

$$g(t) \leq g(0) e^{-ln(t+1)} = \frac{g(0)}{t+1}, \ \ \forall\, t > 0.$$

Além disso, de (3.27) existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$E(t) \leq C_1 E(0) \frac{1}{(t+1)^{C_2}}, \ \ \forall\, t > t_0.$$

Caso 3. Seja $\xi(t) = \frac{1}{(t+e)(ln(t+e))} > 0, \quad t > 0$. Então

$$\xi'(t) = -\frac{[ln(t+e) + (t+e)/(t+e)]}{[(t+e)ln(t+e)]^2} = -\frac{[1+ln(t+e)]}{[(t+e)ln(t+e)]^2} < 0$$

e

$$\left|\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\right| = \frac{1+ln(t+e)}{[(t+e)ln(t+e)]^2}(t+e)ln(t+e) = \frac{1}{(t+e)ln(t+e)} + \frac{1}{t+e} < \frac{1}{e} + \frac{1}{e} = \frac{2}{e} := k.$$

De fato, note que

$$t+e > e \Rightarrow \frac{1}{t+e} < \frac{1}{e} \Rightarrow \frac{1}{ln(t+e)} < \frac{1}{ln(e)} = 1.$$

Portanto $\xi(t)$ satisfaz a condição (3.4). De (3.10) temos

$$g(t) \leq g(0)e^{-\int_0^t \xi(s)\, s} = g(0)e^{-\int_0^t \frac{1}{(s+e)ln(s+e)}\, ds} = g(0)e^{-(ln(ln(t+e)) - ln(ln(e)))},$$

o que implica

$$g(t) \leq \frac{g(0)}{ln(t+e)}, \quad t > 0.$$

Além disso, de (3.27) existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$E(t) \leq C_1 E(0)\frac{1}{[ln(t+e)]^2}, \quad \forall\, t > t_0.$$

CONCLUSÃO

Vimos pelas considerações feitas no Capítulo 2, que ao definirmos o funcional de Lyapunov da mesma forma que Berrime e Messaoudi [2] o termo dissipativo $M(\|\nabla u\|_2^2)u_t$, que foi imprescindível para se obter decaimento exponencial em Cavalcanti et al. [7], não se faz mais necessário. Além disso, mostramos que a taxa de decaimento da solução depende da função relaxamento g, isto é, quando a função g decai para zero exponencialmente a solução também decai para zero exponencialmente. Isto mostra que o efeito da memória é forte suficiente para produzir estabilização. Diante do que foi exposto, no Capítulo 3 concluímos que para certa classe de funções relaxamento e certos dados iniciais, a energia decai com taxa semelhante ao decaimento das funções relaxamento, que não é necessariamente um decaimento da forma polinomial ou exponencial. Portanto, nosso resultado permite uma maior classe de funções relaxamento e complementa o resultado de Cavalcanti et al. [7], em que apenas o decaimento exponencial foi considerado.

REFERÊNCIAS

[1] Adams R. A. and Fournier J. J. F; **Sobolev Space**. Pure and Applied Mathematics. Amsterdam, 2003.

[2] Berrimi S. and Messaoudi S. A; **Existence and decay of solutions of a viscoelastic equation with a nonlinear source,** Nonlinear Anal., (2006), 2314-2331.

[3] Berrimi S. and Messaoudi S. A; **Exponential decay of solutions to a viscoelastic equation with nonlinear localized damping**, Electron. J. Differential Equations 2004 (88) (2004) 1-10.

[4] Brézis H; **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. Springer Science, USA, 2011.

[5] Brézis H; **Operateurs Maximaux Monotones et Semigroups de Contractions dans les Spaces de Hilbert**. Amsterdam: North Holland Publishing Co., 1973.

[6] Cavalcanti, M. M. and Domingos Cavalcanti V. N; **Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev**. MaringÃ¡: Eduem, 2009.

[7] Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V. N. and Ma T. F; **Exponential decay of the viscoelastic Euler-Bernoulli equation with a nonlocal dissipation in general domains**, Differential Integral Equations (2004), 495-510.

[8] Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V. N. and Soriano J. A; **Exponential decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping**, Electron. J. Differential Equations 2002 (44) (2002) 1-14.

[9] Coddington E. A. and Levinson N; **Theory of Ordinary Differential Equations**, McGraw-Hill Inc. New York, 1955.

[10] Dafermos C. M; **Asymptotic stability in viscoelasticity**, Arch. Ration. Mech. Anal. 37 (1970) 297-308.

[11] Evans L. C; **Partial diferrential equations**. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[12] Lange H. and Perla Menzala G; **Rates of decay of a nonlocal beam equation** Diff. Integral Equations, 10 (1997), 1075-1092

[13] Lions J. L; **Quelques Méthodes de Résolution des Problémes Aux Limites Non Linéaires**. Dunod, Gauthier-Villars, 1969.

[14] Medeiros L. A. and Mello E. A; **A IntegraL de Lebesgue**. Textos e Métodos Matemáticos 18, Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 1989.

[15] Medeiros L. A. and Mello E. A; **Iniciação aos Espaços de Sobolev e Aplicações**. Textos de Métodos Matemáticos, UFRJ, 1983.

[16] Messaoudi S. A; **General decay of solutions of a viscoelastic equation** J. Math. Anal. Appl. 341 (2008) 1457-1467.

[17] Muñoz Rivera J. E., Lapa E.C. and Barreto.R; **Decay Rates for Viscoelastic Plates with Memory**, Journal of Elasticity 44: 61-87, 1996.

[18] Muñoz Rivera J. E; **Asymptotic behavior in linear viscoelasticity**, Quart. Appl. Math. 52 (4) (1994) 628-648.

[19] Munoz Rivera J. E. and Naso M.G; **Asymptotic stability of semigroups associated to weak dissipative systems with memory** J. Math. Anal. Appl. 326 (1) (2007) 691-707.