Universidade Estadual de Londrina

VALTER HENRIQUE BISCARO RAPOSO

EXPOENTES INICIAIS CRÍTICOS EM SEQUÊNCIAS STURMIANAS

Londrina
2013

VALTER HENRIQUE BISCARO RAPOSO

EXPOENTES INICIAIS CRÍTICOS EM SEQUÊNCIAS STURMIANAS

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Túlio Oliveira de Carvalho

Londrina
2013

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

R219e Raposo, Valter Henrique Biscaro.
Expoentes iniciais críticos em sequências sturmianas / Valter Henrique Biscaro Raposo. – Londrina, 2013.
71 f. : il.

Orientador: Túlio Oliveira de Carvalho.
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2013.
Inclui bibliografia.

1. Sequências (Matemática) – Teses. 2. Sistemas dinâmicos diferenciais – Teses. 3. Teoria do ponto crítico (Análise matemática) – Teses. 4. Dinâmica simbólica – Teses. I. Carvalho, Túlio Oliveira de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

CDU 517.52

VALTER HENRIQUE BISCARO RAPOSO

EXPOENTES INICIAIS CRÍTICOS EM SEQUÊNCIAS STURMIANAS

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Túlio Oliveira de Carvalho
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Naresh Kumar Sharma
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Alessandra Aparecida Verri
Universidade Federal de São Carlos

Londrina, 27 de fevereiro de 2013.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro.

RAPOSO, Valter Henrique Biscaro. **Expoentes Iniciais Críticos em Sequências Sturmianas**. 2013. 71 páginas. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

RESUMO

Neste trabalho investigamos potências de prefixos de sequências Sturmianas. Deduzimos uma fórmula explícita para o expoente inicial crítico de uma sequência Sturmiana w, definido como o limite superior dos números reais $p_n > 0$, em que, se U é prefixo de w de comprimento n, p_n é o maior valor para o qual U^{p_n} também é um prefixo de w. Esta fórmula é baseada na representação S-ádica multiplicativa de w, que por sua vez está relacionada com o sistema de numeração de Ostrowski. Mostramos que o expoente inicial crítico de qualquer sequência Sturmiana é no mínimo 2. Além disso, caracterizamos os números irracionais α para o qual existe uma sequência Sturmiana w de inclinação α tal que seu expoente inicial crítico é igual a 2.

Palavras-chave: Expoente Inicial Crítico. Sequências Sturmianas. Odômetro de Ostrowski. Dinâmica Simbólica. Sistemas Dinâmicos.

RAPOSO, Valter Henrique Biscaro. **Initial Critical Exponents in Sturmian Sequences**. 2013. 71 pages. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

ABSTRACT

In this work we investigate powers of prefixes of Sturmian sequences. We deduce an explicit formula for the initial critical exponent of a Sturmian sequence w, defined as the upper limit of real numbers $p_n > 0$, where, if U is a prefix of w of length n, p_n is the largest value for which U^{p_n} is also a prefix of w. This formula is based on the multiplicative S-adic representation of w, which in turn is related with the Ostrowski's numbering system. We show that the initial critical exponent of any Sturmian sequence is at least 2. Furthermore, we characterize the irrational numbers α for which there exists a Sturmian sequence w of slope α such that its initial critical exponent is equal to 2.

Keywords: Initial Critical Exponent. Sturmian Sequences. Ostrowski's Odometer. Dynamical Systems. Symbolic dynamics.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho trata potências de fatores que ocorrem no início de sequências Sturmianas. Há uma série de trabalhos recentes sobre potências de palavras que ocorrem em sequências Sturmianas (veja por exemplo [5, 2, 15], usados na preparação desta monografia, e sua extensa bibliografia). Grande parte destes trabalhos estudam o supremo das potências de fatores de uma sequência (o índice ou expoente crítico da sequência) e o limite superior de potências dos fatores quando o comprimento destes fatores tendem ao infinito. É bem conhecido que estes valores são finitos se, e somente se, os quocientes da expansão em fração contínua da inclinação da sequência Sturmiana são limitados (ver [14]). Uma fórmula explícita para o índice de uma sequência Sturmiana foi dada por Vandeth em termos dos quocientes de sua inclinação (Teorema 16 em [15]).

O expoente inicial crítico de uma sequência w em um alfabeto finito, denotado por $\mathrm{ice}(w)$, é definido como o limite superior dos números reais $p_n > 0$, em que p_n é o maior valor para o qual, se W é o prefixo de w de comprimento n então W^{p_n} também é um prefixo de W. Obtemos uma fórmula explícita para o expoente inicial crítico de uma sequência Sturmiana em termos de uma expansão de S-ádica especial. Para a sequência característica a fórmula para o expoente inicial crítico é conhecida desde [13], embora Hedlund e Morse não tenham abordado esta questão especificamente. Pode-se também obter uma fórmula para o ice da sequência característica, segundo a fórmula de Cassaigne para os quocientes dos convergentes em [6].

Cada sequência Sturmiana w no alfabeto $\{0, 1\}$ admite uma única representação S-ádica como uma composição infinita na forma

$$w = \sigma^{c_1} \circ \tau_0^{a_1} \circ \sigma^{c_2} \circ \tau_1^{a_2} \ldots,$$

onde τ_0 e τ_1 são morfismos definidos em $\{0, 1\}^*$ dados por

$$\tau_0(0) = 0 \text{ e } \tau_0(1) = 01$$

$$\tau_1(1) = 1 \text{ e } \tau_1(0) = 10,$$

e para todo $k \geq 1$ temos que $0 \leq c_k \leq a_k$ e se $c_{k+1} = a_{k+1}$ então $c_k = 0$. A sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ na verdade é a sequência dos quocientes da inclinação de w (a densidade da símbolo 1 em w), enquanto que a sequência $(c_k)_{k\geq 1}$ é a sequência de dígitos da expansão aritmética de Ostrowski do intercepto da sequência (ver por exemplo [4]). Embora esta expansão de w seja apenas uma das muitas expansões possíveis como uma composição de infinitos morfismos [3], ela é particularmente útil na determinação dos expoentes críticos. Em cada caso, estas expansões estão intimamente ligados ao sistema de numeração Ostrowski.

No Capitulo 4 é mostrado que cada sequência Sturmiana começa em infinitos quadrados, e portanto o expoente inicial crítico de qualquer sequências Sturmiana é maior ou igual a 2. Mostramos que o valor 2 é atingível, e damos a seguinte caracterização para a inclinação α para os quais existe uma sequência Sturmiana com expoente inicial crítico igual a 2:

Teorema 1.1. *Seja $\alpha = [0; a_1+1, a_2, \ldots]$ um irracional e X_α o conjunto de todas as sequências Sturmianas de inclinação α. Então existe uma sequência $w \in X_\alpha$ com $\operatorname{ice}(w) = 2$ se, e somente se, para cada par de inteiros (s,t) com $s > 1$, existe no máximo um número finito de índices k tal que*

$$(a_k, a_{k+1}) = (s,t) \ \textit{ou} \ (a_k, a_{k+1}, a_{k+2}) = (1,1,t).$$

Mostramos também como construir explicitamente uma sequência Sturmiana $w \in X_\alpha$ caso exista, tal que $\operatorname{ice}(w) = 2$. Provamos também o seguinte teorema

Teorema 1.2. *Se w^* é a sequência característica de X_α então*

$$\operatorname{ice}(w) = \operatorname{ind}^*(X_\alpha) - 1.$$

Em que $\operatorname{ind}^*(X_\alpha)$ é o valor comum de

$$\operatorname{ind}^*(w) = \limsup_{n\to\infty} \left\{ \sup_{p\geq 1}\{W^p \ \textit{ocorre em} \ w \ \textit{com} \ W \in L_n(w)\} \right\},$$

de qualquer $w \in X_\alpha$.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. Após uma primeira parte tratando alguns fatos básicos sobre sequências Sturmianas, introduzimos no Capitulo 3 duas representações S-ádicas para sequências Sturmianas (versões aditiva e multiplicativa) com base no sistema de numeração de Ostrowski. Obtemos uma fórmula explícita para o expoente inicial crítico de uma sequência Sturmiana no Capitulo 4. Por fim, damos uma prova para o teorema 1.1 na Seção 4.3.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos as notações e os resultados que dão base para o desenvolvimento deste trabalho. Introduzimos alguns conceitos de dinâmica, com ênfase em dinâmica simbólica e definindo ainda as sequências Sturmianas.

2.1 SISTEMAS DINÂMICOS

2.1.1 Recorrência

Entendemos que um *sistema dinâmico* consiste de um espaço métrico compacto X e um grupo ou semi-grupo G atuando em X via aplicações contínuas. Denotamos um sistema dinâmico por (X, G). Neste trabalho teremos sempre $G = \mathbb{N}$ ou $G = \mathbb{Z}$, e nestes casos podemos também chamar (X, G) de *sistema cíclico* e denotá-lo por (X, T), onde T esta associado ao elemento $1 \in G$.

Definição 2.1. *Seja X um espaço topológico e $T : X \to X$ uma aplicação contínua. Um ponto $x \in X$ é dito recorrente por T (ou para o sistema (X, T)) se para toda vizinhança $V \subset X$ de x, existe um $n \geq 1$ tal que $T^n x \in V$.*

Note que, se X é um espaço métrico podemos imergir V em uma sequência de vizinhanças com diâmetro tendendo a zero, obtendo assim uma sequência (n_k) de números naturais tais que $\lim T^{n_k} x = x$.

Proposição 2.2. *Se X é compacto e $T : X \to X$ é contínua, então o conjunto dos pontos recorrentes por T em X é não-vazio.*

Demonstração. Denote por F o seguinte conjunto

$$F = \{Y \subset X : Y \neq \varnothing, \text{ fechado e } TY \subset Y\},$$

note que, $F \neq \varnothing$, pois $X \in F$ e que F é parcialmente ordenado por inclusão. Dada uma cadeia $F_0 \subset F$, temos que $Y = \bigcap_{F_i \in F_0} F_i$ é uma cota inferior de F_0 pertencente a F, assim pelo lema de Zorn, F possui um elemento mínimo, o qual denotaremos por A. Mostremos que todos os elementos de A são recorrentes. Dado $x \in A$ seja

$$\overline{\mathcal{O}^+(x)} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{T^n x : n \geq 1\}} \,.$$

Note que $\overline{\mathcal{O}^+(x)} \subset A$, pois A é fechado e invariante por T. Por outro lado, temos que $\overline{\mathcal{O}^+(x)} \in F$. Como A é mínimo, segue que $A \subset \overline{\mathcal{O}^+(x)}$, donde $A = \overline{\mathcal{O}^+(x)}$, e podemos concluir que todos os elementos de A são recorrentes. $\square$

2.1.2 Conjugação

Definição 2.3. *Sejam (X, G) e (Y, G) sistemas dinâmicos sobre o mesmo grupo ou semi-grupo de operadores. Uma* semi-conjugação *é uma aplicação contínua $\varphi : X \to Y$ tal que*

$$(g \circ \varphi)(x) = (\varphi \circ g)(x) \text{ , } \textit{para todo } \ x \in X \ \textit{ e } \ g \in G.$$

Note que no lado esquerdo da equação $g \in G$ atua sobre X, enquanto no lado direito g atua sobre Y. Por exemplo, sejam (X, T) e (Y, S) sistemas cíclicos, digamos que $G = \mathbb{N}$. Observe o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi\circ T"] \arrow[dr, bend right=60, "S\circ\varphi"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\
Y \arrow[r, "S"] & Y
\end{tikzcd} \quad .$$

Assim uma aplicação contínua $\varphi : X \to Y$ é uma semi-conjugação se, e somente se,

$$(S^n \circ \varphi)(x) = (\varphi \circ T^n)(x) \ \text{ para todo } \ x \in X \ \text{ e } \ n \in \mathbb{N} \text{ .}$$

Definição 2.4. *Uma* conjugação *entre dois sistemas dinâmicos (X, G) e (Y, G) sobre o mesmo grupo ou semi-grupo de operadores é uma semi-conjugação $\varphi : X \to Y$ bijetiva.*

Proposição 2.5. *Se $\varphi : X \to Y$ define uma semi-conjugação de um sistema cíclico (X, T) em (Y, S) e $x \in X$ é recorrente por T, então $\varphi(x) \in Y$ é recorrente por S.*

Demonstração. Por hipótese, existe uma sequência (n_k) de números naturais tal que,

$$\lim_{k\to\infty} T^{n_k} x = x,$$

pela continuidade de φ temos que,

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} S^{n_k}(\varphi(x)) &= \lim_{k\to\infty} \varphi(T^{n_k}(x)) \\
&= \varphi(\lim_{k\to\infty} T^{n_k}(x)) = \varphi(x).
\end{aligned}$$

Logo $\varphi(x)$ é recorrente por S. □

Definição 2.6. *Sejam (X, G) e (Y, G) sistemas dinâmicos sobre o mesmo grupo ou semi-grupo de operadores. Dizemos que (Y, G) é um* fator *de (X, G), se existe uma semi-conjugação sobrejetora $\varphi : X \to Y$, neste caso dizemos ainda que (X, G) é uma* extensão *de (Y, G).*

2.1.3 Minimalidade

Definição 2.7. *Seja G um grupo ou semi-grupo topológico abeliano, um subconjunto $S \subset G$ é dito* sindético *se existe um conjunto compacto $K \subset G$ tal que, para todo $g \in G$, existe $k \in K$ tal que $kg \in S$.*

Exemplo: Um conjunto $S = \{s_1, s_2, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ com $s_1 < s_2 < \ldots$, é sindético se, e somente se, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $s_{i+1} - s_i \leq l$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Para uma demonstração ver [8].

Definição 2.8. *Seja (X, G) um sistema dinâmico. Um ponto $x \in X$ é dito* uniformemente recorrente *para o sistema (X, G), se para toda vizinhança $V \subset X$ de x, é sindético o seguinte conjunto:*

$$N(V) = \{g \in G : gx \in V\} \, .$$

Definição 2.9. *Um sistema dinâmico (X, G) é dito minimal se satisfaz uma e portanto todas as condições equivalentes abaixo:*

1) X não possui subconjunto próprio fechado e invariante sob a ação de G.

2) Para todo aberto não-vazio $V \subset X$ existem $g_1, \ldots, g_n \in G$ tais que $X = \bigcup_{i=1}^{n} g_i^{-1} V$.

3) Toda órbita $\mathcal{O}(x) = \{gx : g \in G\}$ é densa em X.

Mostremos a equivalência entre as três propriedades.
$1) \Rightarrow 2)$. Mostremos que para todo aberto $V \subset X$ temos que,

$$X = Y := \bigcup_{g \in G} g^{-1}(V).$$

De fato, se existisse $x \in X - Y$, que é fechado uma vez que Y é aberto, por (1) existiria $g \in G$ tal que $g(x) \notin X - Y$, ou seja, $g(x) \in Y$, ou ainda, existe $h \in G$ tal que $g(x) \in h^{-1}(V)$. Segue que $hg(x) \in V$ e portanto $x \in (hg)^{-1}(V)$, uma contradição. Concluindo, obtemos uma cobertura de X por meio de abertos, e pela compacidade de X obtemos uma subcobertura finita, ou seja existe um conjunto finito $K = \{g_1, \ldots, g_n\}$ de G tal que,

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} g_i^{-1}(V) \, .$$

$2) \Rightarrow 3)$. Suponha que exista $x \in X$ tal que $\mathcal{O}(x)$ não seja denso em X, ou seja, $X - \overline{\mathcal{O}(x)}$ é aberto e não-vazio, por hipótese existem $g_1, \ldots, g_n \in G$ tais que,

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} g_i^{-1}(X - \overline{\mathcal{O}(x)}).$$

Em particular existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in g_i^{-1}(X - \overline{\mathcal{O}(x)})$, ou seja, $g_i(x) \in X - \overline{\mathcal{O}(x)}$, uma contradição.

$3) \Rightarrow 1)$ Seja Y um subconjunto não-vazio, fechado e invariante pela ação de G. Dado $y \in Y$, por hipótese temos que

$$Y \subset X = \overline{\mathcal{O}(y)} \subset Y,$$

ou seja, o único subconjunto de X não-vazio, fechado e invarinte por G é o próprio X.

Teorema 2.10. *Se (X, G) é minimal então todos os seus pontos são uniformemente recorrentes.*

Demonstração. Mostremos que, dado $x \in X$ o conjunto $N(V)$ é sindético para todo aberto não-vazio $V \subset X$. Por hipótese, existem $g_1, \ldots, g_n \in G$ tais que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} g_i^{-1}(V).$$

Para cada $g \in G$ temos que, existe $1 \leq i \leq n$ tal que $g(x) \in g_i^{-1}(V)$, ou seja, $g_i g(x) \in V$. Concluindo, existe um conjunto finito $K = \{g_1, \ldots, g_n\} \subset G$ tal que, para todo $g \in G$ existe $g_i \in K$ tal que $g_i g \in N(V)$. $\square$

2.1.4 Sistemas de Bebutov

Considere G um grupo ou semi-grupo enumerável e Λ um espaço métrico compacto, denote por Λ^G o conjunto de todas as funções definidas em G assumindo valores em Λ. Se $d_G(,)$ denota uma métrica em Λ e $G = \{g_1, g_2, \ldots\}$ é uma enumeração de G, defina,

$$\begin{array}{rcl} d \ : \ \Lambda \times \Lambda & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f, h) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{d_G(f(g_n), h(g_n))}{2^n}. \end{array}$$

É fácil mostrar que $d(,)$ define uma métrica em Λ^G, a partir das propriedades da métrica em Λ. Definimos a ação regular de G em Λ^G: dados $f \in \Lambda^G$ e $g_0 \in G$ pomos

$$\begin{array}{rcl} g_0 f \ : \ G & \longrightarrow & \Lambda \\ g & \longmapsto & f(g g_0). \end{array}$$

Feita estas considerações podemos definir um novo sistema.

Definição 2.11. *Um sistema de Bebutov é um par (X, G), onde X é um subconjunto de Λ^G fechado e invariante sobre a ação regular de G. Denominamos por* dinâmica simbólica *um sistema de Bebutov no qual Λ é finito com a métrica discreta e $G = \mathbb{N}$ ou $G = \mathbb{Z}$, nestes casos, Λ é denominado alfabeto da dinâmica ou apenas alfabeto.*

Exemplo: Seja $\Lambda = \{0, 1\}$ e $G = \mathbb{N}$, então os elementos de Λ^G podem ser vistos como sequências de zeros e uns, e também no caso geral de dinâmicas simbólicas, os elementos de $\Lambda^{\mathbb{N}}$ podem ser vistos como sequências de símbolos do alfabeto Λ.

Vamos agora enfocar nosso estudo na dinâmica simbólica, considerado o semi-grupo $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Definimos a aplicação de deslocamento (*shift*) que será usada no decorrer deste trabalho,

$$\begin{array}{rccc} \sigma \ : & \Lambda^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \Lambda^{\mathbb{N}} \\ & (x_0, x_1, \ldots) & \longmapsto & (x_1, x_2, \ldots), \end{array}$$

o nosso próximo resultado garante a continuidade da aplicação σ.

Proposição 2.12. *Seja $\Lambda^{\mathbb{N}}$ uma dinâmica simbólica, se $d(x,y) < \dfrac{1}{2^n}$ então $x_i = y_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Por outro lado se $x_i = y_i$ para $i = 1, \ldots, n$ então $d(x,y) \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}$.*

Demonstração. Suponha que $x_i \neq y_i$ para algum $i \leq n$ então

$$d(x,y) \geq \frac{1}{2^i} \geq \frac{1}{2^n},$$

por outro lado se $x_i = y_i$ para $i = 1, \ldots, n$ então

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{i \geq n+1} \frac{d_G(x_i, y_i)}{2^n} \\ &\leq 1 - \left(\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \frac{\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

□

Definição 2.13. *Cada sequência finita de elementos de Λ, $W = w_0 \ldots w_k$, é denominada uma palavra. Dizemos que W ocorre em outra palavra $W' = w'_0 \ldots w'_p$ se para algum j tem-se*

$$w_0 = w'_j, \ldots, w_k = w'_{j+k}\ .$$

Em particular, se $j = 0$ dizemos que W é um prefixo *de W' e denotamos por $W \lhd W'$. Se $j + k = p$, dizemos que W é um* sufixo *de W'. Se um sufixo de W é prefixo de W', dizemos que W* se sobrepõe a *W', ou que W e W'* se sobrepõem.

A mesma noção pode ser estendida para dizer que uma palavra W ocorre em uma sequência infinita $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Proposição 2.14. *Em uma dinâmica simbólica, uma sequência $w \in \Lambda^{\mathbb{N}}$ é recorrente via a aplicação σ se, e somente se, cada palavra que ocorre em w ocorre uma segunda vez.*

Demonstração. Esta demonstração é simples e pode ser encontrada em [8]. □

É claro que nesse caso, cada palavra ocorre infinitas vezes, e um argumento semelhante pode ser aplicado usando apenas palavras iniciais $w_0 \dots w_k$ já que estas contêm todas palavras que ocorrem em w. Usando a proposição anterior podemos descrever um formato geral para sequências recorrentes, como toda palavra que ocorre em w ocorre novamente infinitas vezes, temos que sequências recorrentes possuem o seguinte formato,

$$w = [(aW^{(1)}a)W^{(2)}(aW^{(1)}a)]W^{(3)}[(aW^{(1)}a)W^{(2)}(aW^{(1)}a)], \dots$$

onde $a \in \Lambda$ e $W^{(1)},\ W^{(2)},\ W^{(3)}, \dots$ são palavras formadas por elementos de Λ.

Proposição 2.15. *Em uma dinâmica simbólica, uma sequência $w \in \Lambda^{\mathbb{N}}$ é uniformemente recorrente se, e somente se, cada palavra que ocorre em w ocorre infinitas vezes em intervalos limitados entre duas ocorrências.*

Demonstração. Esta demonstração é tão simples quanto a demonstração da proposição 2.14 e também se encontra em [8]. □

2.2 SEQUÊNCIAS STURMIANAS

2.2.1 Função de Complexidade

Seja w uma sequência de símbolos em algum alfabeto finito. Denotemos por $L(w)$ o conjunto de todas as palavras finitas que ocorrem em w. O conjunto $L(w)$ é denominado a linguagem de w, e denotamos por $L_n(w)$ o conjunto de palavras de comprimento n ocorrendo em w.

Definição 2.16. *A função*

$$\begin{array}{rccc} p_w : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \\ & n & \longmapsto & \#L_n(w), \end{array}$$

é denominada função de complexidade de w.

Se estivermos com uma sequência w fixada, podemos simplificar a notação para $p(n)$, sem risco de confusão. Dentre as sequências num alfabeto finito, destacam-se as sequências periódicas, por sua simplicidade.

Definição 2.17. *Uma sequência $w \in \Lambda^{\mathbb{N}}$ é denominada pré-periódica se existem inteiros $p, n_0 > 0$ tais que $w_{n+p} = w_n$ para todo $n \geq n_0$.*

Observe que se w é pré-periódica então p é limitada. Reciprocamente, se existe $n \geq 1$ tal que $p(n) = p(n+1)$ então w é pré-periódica. Ou seja, se w não é pré-periódica temos que $p(n) \geq n+1$ pois p é crescente e $p(1) \geq 2$, caso contrário w seria constante.

Decorre da definição que sequências com função de complexidade $p(n) = n+1$ para todo n são sequências num alfabeto de duas letras, uma vez que $p(1) = 2$, neste caso vamos assumir que $\Lambda = \{0, 1\}$.

Proposição 2.18. *Toda sequência com função de complexidade $p(n) = n + 1$ é recorrente.*

Demonstração. Suponha que exista uma $W \in L_n(w)$ que ocorra um número finito de vezes e que deixe de ocorrer após um índice $k > 0$, deste modo a sequência v dada por

$$v_n = w_{n+k} \text{ com } n \geq 0,$$

é tal que, $L_n(v) \subset L_n(w)$ estritamente, mas $W \notin L_n(v)$. Deste modo, $p_v(n) \leq n$ pois $p_w(n) = n + 1$, mas isto implica que v é pré-periódica forçando que w também o seja, o que é uma contradição. Concluindo, cada palavra que ocorre em w ocorre infinitas vezes, logo w é recorrente. □

Proposição 2.19. *Se w é uma sequência com função de complexidade $p(n) = n + 1$, então 00 e 11 não ocorrem simultaneamente em w.*

Demonstração. Como $p(2) = 3$ existem exatamente três palavras de tamanho dois, como 0 e 1 ocorrem infinitas vezes, depois de algum 0 deve ocorrer algum 1 e vice e versa, pois caso contrário w seria pré-periódica, deste modo ou 00 ou 11 não pode ocorrer em w. □

Definição 2.20. *Seja $W = w_0 \dots w_n$ uma palavra em algum alfabeto Λ. Denotamos por $|W| = n + 1$ o comprimento de palavra W, ou seja, o número de letras que ocorrem em W. E dado $a \in \Lambda$, denotemos por $|W|_a$ o número de vezes que a letra a ocorre em W.*

Definição 2.21. *Uma sequência w em duas letras é dita balanceada se, para qualquer par de palavras W e V de mesmo tamanho que ocorrem em w tem-se,*

$$||W|_1 - |V|_1| \leq 1.$$

Lema 2.22. *Se w não é balanceada então existe uma palavra W possivelmente vazia tal que $0W0$ e $1W1$ ocorrem em w.*

Demonstração. Se w não é balanceada existem duas palavras W e V de mesmo tamanho tais que

$$|W|_1 - |V|_1 \geq 2.$$

Afirmação: Podemos supor que $|W|_1 - |V|_1 = 2$. Denote por W_k,V_k os prefixos de tamanho k de W e V respectivamente e por $d_k = |W_k|_1 - |V_k|_1$. Note que $d_0 = 0$ e $d_n \geq 2$. Temos ainda

$$|d_{k+1} - d_k| = ||W_{k+1}|_1 - |V_{k+1}|_1 - (|W_k|_1 - |V_k|_1)| \leq \max[|W_{k+1}|_1 - |W_k|_1] - \min[|V_{k+1}|_1 - |V_k|_1] ,$$

donde se conclui que $|d_{k+1} - d_k|$ é sempre igual a zero ou um. Sendo assim, para algum $2 \leq k \leq n$ temos que $d_k = 2$.

Sejam A e B palavras de tamanho n mínimo tal que $|A|_1 - |B|_1 = 2$ e escreva $A = a_0 \ldots a_{n-1}$ e $B = b_0 \ldots b_{n-1}$. Observe que $a_0 = a_{n-1} = 1$ e $b_0 = b_{n-1} = 0$, pois caso contrário poderíamos encontrar um par de palavras de tamanho menor tal que a diferenca de ocorrências do símbolo 1 entre elas seria 2. Agora se $1 \leq k \leq n-2$ temos que $a_k = b_k$, pois se algum $a_k \neq b_k$ em $1 \leq k \leq n-2$ então

$$|A|_1 - |B|_1 \geq 3.$$

□

Proposição 2.23. *Uma sequência w possui função de complexidade $p(n) = n+1$ se, e somente se, é balanceada e não é pré-periódica.*

Demonstração. Já vimos que sequências de complexidade $n+1$ não são pré-periódicas. Suponha que w não seja balanceada. Pelo lema 2.22 podemos obter uma palavra W tal que, $0W0$ e $1W1$ ocorram em w. Esta palavra é não-vazia pois em sequências de complexidade $n+1$, 00 e 11 não ocorrem simultaneamente pela proposição 2.19. Seja $n+1$ com $n \geq 0$ o menor valor possível para $|W|$. Tomando $A = 0W0$ e $B = 1W1$, vemos que

$$||A|_1 - |B_1|| \geq 2, \text{ e } |A| = |B| \geq n+3 \, .$$

Escrevendo $W = w_0 \ldots w_n$, tem-se para $0 \leq k \leq n$ $w_k = w_{n-k}$, ou seja W é um palíndromo, pois por exemplo, se $w_k = 0$ e $w_{n-k} = 1$ temos que

$$0w_0 \ldots w_{k-1}0 \quad \text{e} \quad 1w_{n-k+1} \ldots w_n 1$$

estariam ocorrendo em w obtendo um par de palavras não balanceadas de comprimento $k+2 < n+3$, um absurdo.

Temos exatas $n+3$ palavras de comprimento $n+2$ e $n+2$ de tamanho $n+1$. Para cada j, existe exatamente uma palavra de tamanho j em w que pode ser estendida (à direita ou à esquerda) de duas maneiras. Como W pode ser estendida de duas maneiras, tanto pela direita quanto pela esquerda, temos que ou $0W$ ou $1W$ é a única palavra de tamanho $n+2$ que pode ser estendida de duas maneiras pela direita. Suponha que seja $0W$.

Afirmação: Se i é uma posição de ocorrência de $1W1$, então $0W$ não ocorre em $w_i \ldots w_{i+2n+3}$.

Note que

$$|w_i \ldots w_{i+2n+3}| = 2n+4, |1W1| = n+3 \text{ e } |0W| = n+2,$$

e portanto se $0W$ ocorrer em $w_i \ldots w_{i+2n+3}$ então $0W$ deve se sobrepor a $1W1$. Suponha que

$0W$ se sobrepõe a $1W1$, temos que $1W1$ começa em i e termina em $i+n+2$, sendo assim $0W$ começa em $i+n_0$ para algum $1 \le n_0 \le n+2$ e termina em

$$i+n+n_0+1 \le i+2n+3.$$

Portanto, se $0W$ se sobrepõe a $1W1$ então $0W$ começa depois de w_i, digamos que em w_k. Sendo assim

$$0w_0 \dots w_{n-k} = w_k \dots w_n 1 ,$$

ou seja, $w_k = 0$ e $w_{n-k} = 1$ contradizendo o fato de que W é um palíndromo.

Concluindo, existem $n+3$ palavras de tamanho $n+2$ ocorrendo em

$$w_i \dots w_{i+2n+3},$$

como $0W$ não ocorre e $p(n+2) = n+3$ pelo menos uma delas ocorre duas vezes. Por outro lado, como $0W$ é a única palavra de tamanho $n+2$ que pode ser estendida de duas maneiras temos que w é pré-periódica, uma contradição.

Reciprocamente, se existe algum n tal que $p(n) \le n$ então w seria pré-periódica. Suponha agora que existe n tal que $p(n) > n+1$, e seja n_0 o menor valor tal que $p(n_0+1) \ge n_0+3$. Note que $n_0 \ge 0$ pois $p(1) = 2$. Como $p(n_0) = n_0+1$ existem duas palavras U, V de tamanho n_0 que podem ser estendidas pela direita de duas maneiras. Como n_0 é o menor valor com esta propriedade temos que U, V diferem apenas na primeira letra ou na última letra. Suponha que difiram na primeira letra. Concluímos que existe W tal que $U = 0W$ e $V = 1W$, e portanto $0W0$ e $1V1$ têm o mesmo comprimento e ocorrem em w. Portanto w não é balanceada. $\square$

Dada uma sequência balanceada e que não é pré-periódica, existe um número irracional (que denominaremos adiante como frequência da letra 1 na sequência). Note primeiro que, uma palavra de tanho $kq+r$ pode ser escrita como a concatenação de k palavras de tamanho q e uma palavra de tamanho r, usaremos este fato para demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 2.24. *Se w tem função de complexidade $p(n) = n+1$ então o*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|w_1 \dots w_n|_1}{n}$$

está bem definido e é irracional.

Demonstração. Seja $a_n = \min\{|W|_1 : W \in L_n(w)\}$. Como w é balanceada, $|w_1 \dots w_n|_1$ é igual a a_n ou a a_n+1. Portanto basta mostrar que o limite de a_n/n existe e é irracional.

Durante a demonstração usaremos o fato de que,

$$a_m + a_n \le a_{m+n} \le a_m + a_n + 1 ,$$

que também se deve ao fato da sequência ser balanceada. Dado $n \geq n_0 > 1$, fixe q com $q^2 < n_0$ e escreva

$$n = qk + r \ \text{ com } \begin{cases} q \leq k \\ 0 \leq r < q. \end{cases}$$

Como $r < q \leq k$ temos que

$$\frac{r}{n} < \frac{k}{n} = \frac{\frac{n-r}{q}}{n} = \frac{n-r}{qn} \leq \frac{1}{q} \ .$$

Com um simples argumento por indução obtemos que

$$ka_q \leq a_{kq+r} \leq k(a_q + 1) + r \ .$$

Usando a segunda parte dessa desigualdade temos que

$$\begin{aligned} a_n \leq k(a_q+1) + r \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a_n}{n} \leq \frac{k}{n}(a_q+1) + \frac{r}{n} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{a_n}{n} < \frac{1}{q}(a_q+1) + \frac{1}{q} = \frac{a_q}{q} + \frac{2}{q} \ . \end{aligned}$$

Por outro lado, $ka_q \leq a_n$, e como $n \geq a_n \geq ka_q > ra_q$, temos que $ra_q - n < 0$. Portanto

$$\begin{aligned} \frac{n}{q}(a_q - 1) \quad &= \quad \left(\frac{kq+r}{q}\right) a_q - \frac{n}{q} \\ &= \quad ka_q + \frac{1}{q}(ra_q - n) < a_n. \end{aligned}$$

Resumindo,

$$\frac{a_q}{q} - \frac{1}{q} < \frac{a_n}{n} < \frac{a_q}{q} + \frac{2}{q}.$$

Portanto dados $m, n \geq n_0$

$$|a_m - a_n| < \frac{3}{q}$$

de modo que a sequência (a_n/n) é de Cauchy.

Suponha que $a_n/n \to p/q$, com $p, q \in \mathbb{Z}$, e $q \neq 0$. Novamente por indução temos que

$$ka_n \leq a_{kn} < a_{kn} + 1 \leq k(a_n + 1) \ .$$

Portanto se $n|n'$, então

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{a_{n'}}{n'} < \frac{a_{n'}+1}{n'} \leq \frac{a_n+1}{n} \ .$$

Deste modo temos que a subsequência $\left(\frac{a_{2^n q}}{2^n q}\right)$ não decresce enquanto que $\left(\frac{a_{2^n q}+1}{2^n q}\right)$ não cresce, só que ambas convergem para p/q de modo que p é igual a a_q ou $a_q + 1$. Se $p = a_q$ então $a_{2^n q} = 2^n p$ para todo n; mostremos que isso é um absurdo.

Como w não é periódica, existe $U \in L_q(w)$ tal que $|U|_1 = a_q + 1$. Por outro lado, como w é recorrente, U ocorre um número infinito de vezes e portanto deve ocorrer em duas posições congruentes módulo q. Portanto podemos encontrar uma palavra de tamanho $2^n q$ que pode ser escrita em palavras de tamanho q com pelo menos duas ocorrências de U assim o número de 1's que ocorrem nessa palavra é no mínimo $2^n a_q + 2$ logo $2^n a_q = 2^n p < a_{2^n q}$. $\square$

Definição 2.25. *Se w é uma sequencia com função de complexidade $p(n) = n + 1$, então o número irracional*

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{|w_1 \dots w_n|_1}{n}$$

dado pela proposição 2.24 é denominado a frequência da do símbolo 1 em w.

2.2.2 Sequências Geradas Por Rotações

Dado um número real x, denotamos por $\lfloor x \rfloor$ a parte inteira de x, ou seja

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\} \ .$$

A parte fracionária de x é denotada por $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ e o teto de x por

$$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : x \leq n\}.$$

Definição 2.26. *Uma sequência de rotação é uma sequencia w tal que, existe um número irracional $\alpha \in (0, 1)$ e um número real β tal que,*

$$w_n = \lfloor (n + 1)\alpha + \beta \rfloor - \lfloor n\alpha + \beta \rfloor \ ,$$

ou

$$w_n = \lceil (n + 1)\alpha + \beta \rceil - \lceil n\alpha + \beta \rceil \ ,$$

para todo $n \geq 0$. O número α é chamado ângulo *ou* inclinação *da sequência enquanto β é o* intercepto *ou* ponto inicial.

Sequências de rotações estão diretamente relacionadas com rotações, que são aplicações de $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sobre si mesmo. Considere a rotação

$$\begin{array}{rccl} R_\alpha : & \mathbb{T} & \to & \mathbb{T} \\ & x & \mapsto & x + \alpha \bmod 1 \ . \end{array}$$

Considere dois intervalos I_0, I_1 definidos por

$$I_0 = [0, 1 - \alpha) \text{ e } I_1 = [1 - \alpha, 1),$$

ou

$$I_0 = [0, 1 - \alpha] \text{ e } I_1 = (1 - \alpha, 1).$$

Assim, a sequência de rotação definida por α e β é a sequência dada por

$$w_n = \chi_{I_1}(R_\alpha^n(\beta)) \text{ para } n \geq 0.$$

A escolha dos intervalos I_0, I_1 depende das escolha na definição 2.26. Esta escolha é irrelevante, exceto no caso em que existe um inteiro positivo n tal que $\beta + n\alpha$ seja inteiro. Isto é, quando β é congruente a $-n\alpha$ módulo 1, α e β definem duas sequências diferentes dependendo da escolha dos intervalos.

Proposição 2.27. *Uma sequência de rotação w é balanceada e não é pré-periódica.*

Demonstração. Como α é irracional, é óbvio que w não é pré-periódica. Para cada $n \geq 0$ temos que

$$|w_k \dots w_{k+n}|_1 = \lfloor (n+k+1)\alpha + \beta \rfloor - \lfloor k\alpha + \beta \rfloor \ .$$

Podemos ver que, para cada n fixo este número pode tomar apenas dois valores, $\lfloor (n+1)\alpha \rfloor$ ou $\lfloor (n+1)\alpha \rfloor + 1$, portanto a sequência w é balanceada. □

Definição 2.28. *Dizemos que um conjunto E de palavras finitas é balanceado se, para cada par de palavras $A, B \in E$ e cada par de palavras de mesmo tamanho U, V que ocorrem em A, B temos que*

$$||V|_1 - |U|_1| \leq 1 \ .$$

Lema 2.29. *Se E_n é o conjunto de palavras balanceadas de tamanho n então*

$$\#E_n \leq n + 1.$$

Demonstração. Para $n = 1$ temos que $E_1 = \{0, 1\}$ logo $\#E_1 = 2$. Suponha o resultado válido para algum $n \geq 1$. Se $\#E_{n+1} \geq n + 3$, os prefixos de tamanho n formam um conjunto balanceado, pela hipótese de indução. Agora pelo menos dois destes prefixos

$$V = v_0 \dots v_{n-1} \text{ e } U = u_0 \dots u_{n-1},$$

podem ser estendidos à direita de duas maneiras. Seja j o maior índice tal que, $v_j = 0$ e $u_j = 1$. As duas palavras

$$v_j \dots v_{n-1}0 \text{ e } u_j \dots u_{n-1}1$$

ocorrem em $V0,\ U1$ respectivamente e não são balanceadas, um absurdo. □

Lema 2.30. *Se u e w são sequências com função de complexidade $p(n) = n + 1$ e possuem mesma frequência α então $L(u) = L(v)$.*

Demonstração. Como w e u possuem mesma frequência, ou seja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|w_0 \dots w_n|_1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{|u_0 \dots u_n|_1}{n+1} \ ,$$

segue que

$$\inf\{|W|_1 : W \in L_n(w)\} = \inf\{|V|_1 : V \in L_n(u)\},$$

para todo n. Portanto o conjunto $L_n(w) \cup L_n(u)$ é balanceado, e pelo lema 2.29 temos que

$$n+1 = \#L_n(w) = \#L_n(u) \leq \#L_n(w) \cup L_n(v) \leq n+1.$$

Portanto $L_n(w) = L_n(u)$ para todo n, e por fim $L(w) = L(v)$. □

Proposição 2.31. *Toda sequência w com função de complexidade $p(n) = n+1$ é uma sequência de rotação.*

Demonstração. Sejam α a frequência de w e u a sequência de rotação com ângulo α e intercepto $\beta = 0$. Note que

$$|u_0 \dots u_n|_1 = \lfloor (n+1)\alpha \rfloor \ .$$

Mas

$$\left| \frac{\lfloor (n+1)\alpha \rfloor}{n+1} - \alpha \right| = \left| \frac{\lfloor (n+1)\alpha \rfloor - (n+1)\alpha}{n+1} \right| < \frac{1}{n+1},$$

temos que u possui mesma frequência de w, assim pelo lema 2.30 temos que $L(u) = L(w)$, logo existe uma sequência de inteiros (n_k) tal que

$$w = \lim \sigma^{n_k} u \ .$$

Portanto w é uma sequência de rotação. □

Definição 2.32. *Uma sequência w é denominada Sturmiana se satisfaz uma, e portanto todas, as condições equivalentes abaixo:*

1) w tem função de complexidade $p(n) = n+1$ para todo $n \geq 1$,

2) w é balanceada e não é pré-periódica,

3) w é uma sequência de rotação,

4) w é gerado por uma rotação.

Proposição 2.33. *O sistema (X_w, σ), gerado por uma sequência Sturmiana w é bijetor exceto em um ponto que possui duas pré-imagens.*

Demonstração. Seja $u \in X_w$, existe uma sequência de inteiros (n_k) com, $\lim n_k = \infty$ e $\lim \sigma^{n_k} w = u$, seja $p_k = n_k - 1$, existem $v \in X_w$ e uma subsequência de (p_k) que denotaremos do mesmo jeito (p_k) tal que $\lim \sigma^{p_k} w = v$, deste modo

$$\begin{aligned} \sigma(v) &= \sigma(\lim \sigma^{p_k}(w)) = \sigma(\lim \sigma^{n_k - 1}(w)) \\ &= \lim \sigma^{n_k}(w) = u. \end{aligned}$$

Concluindo, todos elementos de X_w possuem uma pré-imagem. Para cada $n \geq 1$ existem exatas $n + 1$ palavras de tamanho n ocorrendo em X_w, todas elas podem ser estendidas pela esquerda, pois w é recorrente, para cada n apenas uma palavra W_n de tamanho n pode ser estendida pela esquerda de duas maneiras, como o prefixo de W_{n+1} também pode ser estendido pela esquerda de duas maneiras temos que

$$W_n \triangleleft W_{n+1} \ ,$$

para todo n, logo existe apenas uma sequência $u = \lim W_n$ em X_w que possui duas pré-imagens. □

Definição 2.34. *Em um sistema (X_w, σ), com w Sturmiana, a única sequência que possui duas pré-imagens, dada pela proposição 2.33, é chamada* sequência característica *e denotada por* w^*.

2.3 Frações Contínuas

O objetivo desta seção é apresentar uma outra maneira de representar números reais, a representação por frações contínuas, que sempre apresenta aproximações racionais surpreendentemente boas, além de ser natural e conceitualmente simples.

2.3.1 Representação em Frações Contínuas

Dado $x \in \mathbb{R}$ definimos recursivamente $\alpha_0 = x$, $a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$ e se $\alpha_n \notin \mathbb{Z}$ então

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n},$$

para todo $n \geq 1$. Se, para algum $n \geq 1$, $\alpha_n = a_n$ temos

$$x = [a_0; a_1, \ldots, a_n] \stackrel{\text{def}}{=} a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Se não, denotamos

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}.$$

O sentido dessa última notação ficará claro na proposição 2.38. A representação acima se chama representação por frações contínuas de x ver [12].

Note que, para x irracional temos que

$$x = a_0 + [0; a_1, a_2, \ldots]$$

e que $[0; a_1, a_2, \ldots]$ é a expansão em frações contínuas de $x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)$. Vamos retringir nosso estudo de frações contínuas a números reais pertencentes ao intervalo $[0, 1)$.

Vejamos agora como os inteiros a_n estão relacionados com a tranformação de Gauss definida a seguir.

Definição 2.35. *A transformação de Gauss é a aplicação $T : [0, 1) \to [0, 1)$ dada por,*

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor, \ \textit{se } x \neq 0 \\ \\ 0, \ \textit{se } x = 0. \end{cases}$$

Dado $x \in (0, 1)$ temos que $\alpha_1 = \frac{1}{x}$ de modo que

$$a_1 = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{T^0 x} \right\rfloor,$$

se α_1 não é inteiro então

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - a_1} = \frac{1}{\dfrac{1}{x} - \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor} = \frac{1}{Tx} \Rightarrow a_2 = \left\lfloor \frac{1}{Tx} \right\rfloor,$$

deste modo temos que se α_n não for inteiro temos que

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n} = \frac{1}{\dfrac{1}{T^{n-1}x} - \left\lfloor \dfrac{1}{T^{n-1}x} \right\rfloor} = \frac{1}{T^n x},$$

ou seja

$$a_n = \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}x} \right\rfloor.$$

Definição 2.36. *O númrero a_n definido acima é chamado o n-ésimo* quociente *de x enquanto* *que o número racional*

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$$

é chamado o n-ésimo convergente *de x.*

Listaremos agora um pequena lista de propriedades das sequências (a_n) e (p_n/q_n).

Proposição 2.37. *A sequência de convergentes (p_n/q_n) satisfaz as seguintes propriedades*

1) Para todo $n \geq 2$ temos que,

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \;\; e \;\; q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

2) Para todo $n \geq 1$ e $x \in [0, 1)$ temos que,

a) $x = \dfrac{p_n + p_{n-1} T^n(x)}{q_n + q_{n-1} T^n(x)}$,

b) $p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n$,

c) $p_n(x) = q_{n-1}(Tx)$.

Demonstração. Ver [7]. □

Uma vez que $a_n \geq 1$, concluímos que $p_n \geq p_{n-1} + p_{n-2}$, ou seja, p_n e q_n crescem pelo menos como a sequência de Fibonacci.

Como o nome sugere, dado um número irracional x a sequência dos convergentes (p_n/q_n) converge para x, mostremos este fato na próxima proposição.

Proposição 2.38. *Seja $x \in (0, 1)$ um número irraconal, então*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{q_n} = x \, .$$

Demonstração. Pelo item $2.a$ da proposição 2.37 temos que

$$x = \frac{p_n + p_{n-1} T^n(x)}{q_n + q_{n-1} T^n(x)} \, .$$

Portanto

$$\begin{aligned} x - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{q_n p_n + q_n p_{n-1} T^n(x) - p_n q_n - p_n q_{n-1} T^n(x)}{q_n(q_n + q_{n-1} T^n(x))} \\ &= \frac{T^n(x)(p_{n-1} q_n - q_{n-1} p_n)}{q_n(q_n + q_{n-1} T^n(x))}, \end{aligned}$$

agora pelo item $2.b$ da proposção 2.37 temos que

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \;=\; \frac{T^n(x)}{q_n(q_n + q_{n-1}T^n(x))} < \frac{1}{q_n^2}.$$

Pois $0 < T^n(x) < 1$ e $q_n, q_{n-1} \geq 1$ para $n \geq 1$. Sabendo que $q_n \to \infty$ segue o resultado. $\square$

2.3.2 Interpretação Geométrica dos Quocientes

Sejam $\delta_{-1} = 1 - \alpha$, $\delta_0 = \alpha$ e $J_0 = [0, \alpha)$ um intervalo de tamanho δ_0. Note que

$$a_1 = \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor \Rightarrow a_1 \leq \frac{1}{\alpha} < a_1 + 1 \Rightarrow a_1\alpha \leq 1 < (a_1 + 1)\alpha \ ,$$

ou seja cabem a_1 intervalos de tamanho α em um intervalo de tamanho 1. Sejam

$$H_1 = [a_1\alpha, 1) \text{ e } \delta_1 = |H_1| = 1 - a_1\alpha \ .$$

Transladando H_1 para a origem obtemos $J_1 = [0, 1 - a_1\alpha)$ com $|J_1| = \delta_1$, e

$$\frac{\delta_1}{\delta_0} = \frac{1 - a_1\alpha}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} - a_1 = \frac{1}{\alpha} - \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor = T(\alpha) \ ,$$

portanto

$$a_2 = \left\lfloor \frac{1}{T(\alpha)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\delta_0}{\delta_1} \right\rfloor \ .$$

Logo

$$a_2 \leq \frac{\delta_0}{\delta_1} < a_2 + 1 \Rightarrow a_2\delta_1 \leq \delta_0 < (a_2 + 1)\delta_1 \ ,$$

ou seja cabem a_2 intervalos de tamanho δ_1 em J_0. Sejam

$$H_2 = [a_2\delta_1, \alpha) \text{ e } \delta_2 = |H_2| = (1 + a_1a_2)\alpha - a_2 \ .$$

Novamente transladando H_2 para a origem, obtemos $J_2 = [0, (1 + a_1a_2)\alpha - a_2)$ com $|J_2| = \delta_2$. Pela definição de δ_2 vemos que

$$\alpha = \frac{a_2}{1 + a_1a_2} + \frac{\delta_2}{1 + a_1a_2} = \frac{p_2}{q_2} + \frac{\delta_2}{q_2} \ .$$

Podemos determinar quantos intervalos de tamanho δ_2 cabem no intervalo J_2, definir o intervalo remanescente H_3, transladá-lo à origem e obter J_3 de modo que $|J_3| = \delta_3 = |H_3|$. Suponha definidos $J_0, \ldots, J_k$ intervalos com a propriedade acima, defina

$$H_{k+1} = [a_{k+1}\delta_k, \delta_{k-1}) \text{ e } \delta_{k+1} = |H_{k+1}| = \delta_{k-1} - a_{k+1}\delta_k,$$

mostremos que $\delta_{k+1}/\delta_k = T^{k+1}(\alpha)$ para $k \geq 0$.

Os casos $k = 0, 1$ já foram analisados. Suponha indutivamente que $\delta_j/\delta_{j-1} = T^j(\alpha)$ para $0 \leq j \leq k$, pela definição de δ_{k+1} temos que

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} &= \frac{\delta_{k-1} - a_{k+1}\delta_k}{\delta_k} = \frac{\delta_{k-1}}{\delta_k} - a_{k+1} \\ &= \frac{1}{T^k(\alpha)} - \left\lfloor \frac{1}{T^k(\alpha)} \right\rfloor = T^{k+1}(\alpha). \end{aligned}$$

Mostremos agora que, para todo $k \geq 1$

$$\delta_k = |I_k| = \begin{cases} \alpha q_k - p_k, & \text{se } k \text{ é par e} \\ p_k - \alpha q_k, & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Para $k = 1, 2$ isto já foi provado. Suponha que a afirmação acima seja verdadeira para $0 \leq j \leq k$. Se k é par então $k - 2$ também é enquanto $k - 1$ é ímpar, portanto

$$\begin{aligned} \delta_k &= \delta_{k-2} - a_k\delta_{k-1} \\ &= (\alpha q_{k-2} - p_{k-2}) - a_k(p_{k-1} - \alpha q_{k-1}) \\ &= \alpha(q_{k-2} + a_k q_{k-1}) - (p_{k-2} + a_k p_{k-1}) = \alpha q_k - p_k\ . \end{aligned}$$

De modo análogo, se k for ímpar então

$$\begin{aligned} \delta_k &= \delta_{k-2} - a_k\delta_{k-1} \\ &= (-\alpha q_{k-2} + p_{k-2}) - a_k(-p_{k-1} + \alpha q_{k-1}) \\ &= -\alpha(q_{k-2} + a_k q_{k-1}) + (p_{k-2} + a_k p_{k-1}) = -\alpha q_k + p_k\ . \end{aligned}$$

Podemos assim definir a seguinte sequência $(\delta_k)_{k \geq -1}$ por

$$\delta_{-1} = 1 - \alpha, \delta_0 = \alpha, \delta_1 = 1 - (a_1 + 1)\alpha \text{ e } \delta_k = (-1)^k(q_k\alpha - p_k) \text{ para } k \geq 2.$$

Por definição, temos que

$$\delta_{k-1} = a_{k+1}\delta_k + \delta_{k+1},$$

para todo $k \geq 0$.

3 REPRESENTAÇÃO S-ÁDICA

3.1 REPRESENTAÇÃO S-ÁDICA ADITIVA

Considere α um número irracional pertencente ao intervalo $(0,1)$ e considere as duas transformações de intercâmbio de intervalos (tii),

$$R_\alpha : [-\alpha, 1-\alpha) \to [\alpha, 1-\alpha) \text{ e } \tilde{R_\alpha} : (-\alpha, 1-\alpha] \to (\alpha, 1-\alpha]$$

dadas por

$$R_\alpha(x) = \begin{cases} x+\alpha, & \text{se } x \in [-\alpha, 1-2\alpha) \\ x+\alpha-1, & \text{se } x \in [1-2\alpha, 1-\alpha) \end{cases}$$

e

$$\tilde{R_\alpha}(x) = \begin{cases} x+\alpha, & \text{se } x \in (-\alpha, 1-2\alpha] \\ x+\alpha-1, & \text{se } x \in (1-2\alpha, 1-\alpha] \end{cases}$$

Ambas são conjugações de rotações, ao identificarmos os pontos $-\alpha$ e $1-\alpha$. O estudo das transformações de intercâmbio de intervalos foi iniciado em [11], e pode ser generalizado para funções lineares por pedaços em mais de dois intervalos, que não são conjugadas a rotações.

Uma sequência Sturmiana w de inclinação α e intercepto $\beta \in [-\alpha, 1-\alpha)$ é a sequência w dada por

$$w_n = \chi_{I_1}\left(R_\alpha^n(\beta)\right) \text{ para } n \geq 0$$

ou

$$w_n = \chi_{I_1}\left(\tilde{R_\alpha}^n(\beta)\right) \text{ para } n \geq 0$$

onde $I_1 = [1-2\alpha, 1-\alpha)$. Introduzimos ainda a notação $I_0 = [-\alpha, 1-2\alpha)$ para o intervalo complementar.

Dado um intervalo $I \subset [-\alpha, 1-\alpha)$ podemos definir uma rotação denominada rotação induzida dado por

$$\begin{array}{rccc} R_I : & I & \to & I \\ & x & \mapsto & R_\alpha^{r(x)}(x). \end{array}$$

Onde $r(x) = \min\{n \geq 1 : R_\alpha^n \in I\}$ denominado tempo de retorno de x.

Definição 3.1. *Seja w uma sequência Sturmiana, pela proposição 2.19 temos que* 00 *ou* 11 *não ocorrem simultaneamente em w. Quando* 11 *ocorre em w, dizemos que w é do tipo 1; quando* 00 *ocorre em w, dizemos que w é do tipo 0.*

Note que w é do tipo 1 se, e somente se, $\alpha > \frac{1}{2}$.

Se $i \in \{0,1\}$, denotamos por τ_i o morfismo dado por

$$\tau_i(i) = i \text{ e } \tau_i(\bar{i}) = i\bar{i}\ .$$

em que $\bar{i}$ denota o elemento de $\{0,1\}$ diferente de i.

Dada uma sequência w do tipo i, queremos obter uma sequência w' tal que

$$w = \sigma^b \circ \tau_i(w') ,$$

em que $b = 0$ se, e somente se, $w_0 = i$. Obtemos w' através da tii induzida em I_1.

Considere primeiro o caso em que $\alpha > 1/2$, ou seja, w é do tipo 1. Temos três possibilidades para $R_\alpha(x)$:

$$\begin{cases} \text{se } \ x \in I_0 \ \text{ então } \ R_\alpha(x) \in I_1 \\ \text{se } \ x \in [1-2\alpha, 2-3\alpha) \ \text{ então } \ R_\alpha(x) \in I_0 \\ \text{se } \ x \in [2-3\alpha, 1-\alpha) \ \text{ então } \ R_\alpha(x) \in I_1, \end{cases}$$

Denotando por $I_1^0 = [1-2\alpha, 2-3\alpha)$ os pontos de I_1 que possuem tempo de retorno igual a dois, e por $I_1^1 = [2-3\alpha, 1-\alpha)$ os pontos de I_1 que possuem tempo de retorno igual a um, a tii induzida em I_1 é dada por

$$R_{I_1}(x) = \begin{cases} R_\alpha(x) & \text{se} \quad x \in I_1^1 \\ R_\alpha^2(x) & \text{se} \quad x \in I_1^0 \ . \end{cases}$$

Mostraremos adiante que se $\beta \in I_1$ então a sequência w' dada por

$$w'_n = \chi_{I_1^1}(R_{I_1}^n(\beta)) \ \text{ para } \ n \geq 0,$$

é tal que $\tau_1(w') = w$. E se $\beta \in I_0$ e $\beta' = R_\alpha^{-1}(\beta)$ então a sequência w' dada por

$$w'_n = \chi_{I_1^1}(R_{I_1}^n(\beta')) \ \text{ para } \ n \geq 0,$$

é tal que $\sigma \circ \tau_1(w') = w$. Para mostrar estes fatos, considere o seguinte lema.

Lema 3.2. *Para todo $n \geq 0$,*

1) *Se $\beta \in I_1$ então $R_{I_1}^n(\beta) = R_\alpha^p(\beta)$, onde $p = |\tau_1(w'_0)\ldots\tau_1(w'_{n-1})|$ e a sequência (w'_n) é dada por*
$$w'_n = \chi_{I_1^1}\left(R_{I_1}^n(\beta)\right).$$

2) *Se $\beta \in I_0$ e $\beta' = R_\alpha^{-1}(\beta)$ então $R_{I_1}^n(\beta') = R_\alpha^{p-1}(\beta)$, onde $p = |\tau_1(w'_0)\ldots\tau_1(w'_{n-1})|$ e a sequência (w'_n) agora é dada por*

$$w'_n = \chi_{I_1^1}\left(R_{I_1}^n(\beta')\right).$$

Notação: uma palavra denotada por $w_0 \cdots w_{n-1}$ é vazia para $n = 0$.

Demonstração. Para $n = 0$ não há o que demonstrar. Suponha o resultado válido para algum $k \geq 0$, ou seja

$$R^k_{I_1}(\beta) = R^p_\alpha(\beta) \text{ onde } p = |\tau_1(w'_0) \ldots \tau_1(w'_{k-1})| \ .$$

Note que

$$R^{k+1}_{I_1}(\beta) = R_{I_1}(R^k_{I_1}(\beta)) = R_{I_1}(R^p_\alpha(\beta))$$

Temos assim duas possibilidades para $R^{k+1}_{I_1}(\beta)$.

Se $R^p_\alpha(\beta) \in I^1_1$ então $w'_k = 1$ e $R^{k+1}_{I_1}(\beta) = R^{p+1}_\alpha(\beta)$ portanto

$$|\tau_1(w'_0 \ldots w'_k)| = |\tau_1(w'_0 \ldots w'_{k-1})| + |\tau_1(w'_k)| = p + 1.$$

Agora se $R^p_\alpha(\beta) \in I^0_1$ então $w'_k = 0$ e $R^{k+1}_{I_1}(\beta) = R^{p+2}_\alpha(\beta)$ logo

$$|\tau_1(w'_0 \ldots w'_k)| = |\tau_1(w'_0 \ldots w'_{k-1})| + |\tau_1(w'_k)| = p + 2.$$

E isso encerra o primeiro caso; a demonstração do segundo é análoga. □

Proposição 3.3. *Dada uma sequência Sturmiana w do tipo i, existe uma única sequência Sturmiana w' tal que*

$$w = \sigma^b \circ \tau_i(w') \ , \quad b \in \{0, 1\} \ .$$

Além disto, $b = 0$ se, e somente se, $w_0 = i$.

Demonstração. É imediato que $b = 0$ implica em $w_0 = i$. Considere primeiro o caso em que $\alpha > 1/2$, ou seja, w é do tipo 1.

Seja $\beta \in I_1$, ou seja $w_0 = 1$. Mostremos que a sequência w' dada por

$$w'_n = \chi_{I^1_1}(R^n_{I_1}(\beta)) \text{ para } n \geq 0,$$

é tal que $\tau_1(w') = w$. Com isto, teremos provado que $b = 0$. Provaremos agora que, para todo $k \geq 0$, temos que $\tau_1(w'_0 \ldots w'_k)$ é um prefixo de w. Uma vez que $|\tau_1(w'_0 \ldots w'_k)| \to \infty$ quando $k \to \infty$ podemos concluir que $\tau_1(w') = w$. De fato, para $k = 0$ temos dois casos, se $\beta \in I^1_1$ então $w_0 = w'_0 = 1$ de modo que $\tau_1(w'_0) = w_0$. Agora se $\beta \in I^0_1$ temos que $w_0 w_1 = 10$ e $w'_0 = 0$ ainda assim temos que $\tau_1(w'_0) = w_0 w_1$. Suponha o resultado válido para algum $k \geq 0$, ou seja

$$\tau_1(w'_0 \ldots w'_k) = w_0 \ldots w_n \text{ para algum } n \geq k.$$

Se $w'_k = 0$ temos que $\tau_1(w'_k) = 10$, portanto, lembrando que w é do tipo 1, temos que $w_{n-1} w_n w_{n+1} = 101$. Agora pelo lema 3.2 temos que

$$R^k_{I_1}(\beta) = R^{n-1}_\alpha(\beta) \in I^0_1 \Rightarrow R^{k+1}_{I_1}(\beta) = R^{n+1}_\alpha(\beta).$$

Sabemos que $R_\alpha^{n+1}(\beta) \in I_1$, se $R_\alpha^{n+1}(\beta) \in I_1^1$ então $w'_{k+1} = 1$ e portanto

$$\tau_1(w'_0 \dots w'_{k+1}) = w_0 \dots w_{n+1}.$$

Agora se $R_\alpha^{n+1}(\beta) \in I_1^0$, então $w'_{k+1} = 0$, só que $w_{n+2} = 0$, logo

$$\tau_1(w'_0 \dots w'_{k+1}) = w_0 \dots w_{n+2}.$$

Se $w'_k = 1$ mostra-se de modo análogo que $\tau_1(w'_0 \dots w'_{k+1})$ é um prefixo de w.

Considere agora $\beta \in I_0$ ainda com $\alpha > 1/2$, ou seja, uma sequência do tipo 1 começando de 0, sejam $\beta' = R_\alpha^{-1}(\beta)$ e

$$w'_n = \chi_{I_1^1}(R_{I_1}^n(\beta')) \text{ para } n \geq 0.$$

Mostremos que $\sigma \circ \tau_1(w') = w$.

Usaremos novamente o Lema 3.2. Temos que

$$R_{I_1}^n(\beta') = R_\alpha^{p-1}(\beta) \text{ onde } p = |\tau_1(w'_0) \dots \tau_1(w'_{n-1})| \,.$$

Note que para $n = 0$ temos que, $w'_0 = w_0 = 0$ pois $\beta \in I_0$ de modo que

$$\sigma \circ \tau_1(w'_0) = w_0 \,.$$

Suponha o resultado válido para $k \geq 0$, ou seja

$$\tau_1(w'_o \dots w'_k) = 1w_0 \dots w_n,$$

de modo que $\sigma \circ \tau_1(w')$ é um prefixo de w, note que temos novamente mais dois casos a analisar.

Se $w'_k = 0$ temos que $\tau_1(w'_k) = 10$, pelo fato de que w é do tipo 1 temos que $w_{n-1}w_nw_{n+1} = 101$ e pelo lema 3.2 vemos que $p = n$ logo

$$R_{I_1}^k(\beta') = R_\alpha^{n-1}(\beta) \in I_1^0,$$

de modo que $R_{I_1}^{k+1}(\beta') = R_{I_1}(R_\alpha^{n-1}(\beta)) = R_\alpha^{n+1}(\beta)$. Agora se $R_\alpha^{n+1}(\beta) \in I_1^1$ então $w'_{k+1} = 1$ de modo que

$$\sigma \circ \tau_1(w'_0 \dots w'_{k+1}) = w_0 \dots w_{n+1}.$$

Por outro lado, se $R_\alpha^{n+1}(\beta) \in I_1^0$, então $w'_{k+1} = 0$, só que $w_{n+2} = 0$ e ainda assim temos que

$$\sigma \circ \tau_1(w'_0 \dots w'_{k+1}) = w_0 \dots w_{n+2} \,.$$

Para o caso de $w'_k = 1$ a demonstração é análoga. Conclusão, para todo $k \geq 0$ temos que $\sigma \circ \tau_1(w'_0 \dots w'_{k+1})$ é um prefixo de w, ou seja

$$w = \sigma \circ \tau_1(w').$$

Por fim, o caso em que $\alpha < 1/2$ e $\beta \in I_0$ é idêntico ao caso $\alpha > 1/2$ e $\beta \in I_1$, enquanto o caso $\alpha < 1/2$ e $\beta \in I_1$ é idêntico ao caso $\alpha > 1/2$ e $\beta \in I_0$. □

Corolário 3.4. *Dada uma sequência Sturmiana w, existem sequências $(i_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ com valores em $\{0,1\}$ e $(w^{(n)})_{n\geq 1}$ de sequências Sturmianas tais que*

1) $w = \sigma^{b_1} \circ \tau_{i_1} \circ \dots \circ \sigma^{b_n} \circ \tau_{i_n}\left(w^{(n)}\right)$ para todo $n \geq 1$.

2) Se $i_{n+1} = i_n$ e $b_{n+1} = 0$ então $b_n = 0$.

3) Se $i_{n+1} \neq i_n$ então b_{n+1} e b_n não são ambos iguais a 1.

4) A sequência (i_n) não é pré-constante.

Demonstração. Note que i_n é o tipo de $w^{(n-1)}$ e $b_n = 0 \Leftrightarrow w_0^{(n-1)} = i_n$.

1) A afirmação 1 seque de n aplicações da proposição 3.3.

2) Por hipótese $b_{n+1} = 0$, logo $w_0^{(n)} = i_{n+1} = i_n$. Se $b_n = 1$, temos que $w_0^{(n-1)} \neq i_n$ e, por outro lado,

$$\begin{aligned} w^{(n-1)} &= \sigma^{b_n} \circ \tau_{i_n}\left(w^{(n)}\right) \\ &= \sigma \circ \tau_{i_n}\left(i_n w_1^{(n)} \dots\right) \\ &= \sigma\left(i_n \tau_{i_n}(w_1^{(n)}) \dots\right) = (i_n \dots). \end{aligned}$$

Uma contradição, logo $b_n = 0$.

3) Suponha que $b_{n+1} = b_n = 1$, se $b_{n+1} = 1$ temos que $w_0^{(n)} = \overline{i_{n+1}} = i_n$, se $b_n = 1$ temos que $w_0^{(n-1)} = \overline{i_n} = i_{n+1}$ só que, pela mesma equação acima temos que

$$\begin{aligned} w^{(n-1)} &= \sigma^{b_n} \circ \tau_{i_n}\left(w^{(n)}\right) \\ &= \sigma \circ \tau_{i_n}\left(i_n w_1^{(n)} \dots\right) \\ &= \sigma\left(i_n \tau_{i_n}(w_1^{(n)}) \dots\right) = (i_n \dots). \end{aligned}$$

Outra contradição.

4) Note que, se $w_0^{(n)} = i_n$ então

$$b_n = 0 < 1 = |\tau_{i_n}(w_0^{(n)})|,$$

se $w_0^{(n)} \neq i_n$ então

$$b_n = 1 < 2 = |\tau_{i_n}(w_0^{(n)})|.$$

Sendo assim, $|\sigma^{b_1} \circ \tau_{i_1} \circ \ldots \circ \sigma^{b_n} \circ \tau_{i_n}(w_0^{(n)})| \geq 1$ para todo $n \geq 1$, portanto

$$\sigma^{b_1} \circ \tau_{i_1} \circ \ldots \circ \sigma^{b_n} \circ \tau_{i_n}(w^{(n)}) = \sigma^{b_1} \circ \tau_{i_1} \circ \ldots \circ \sigma^{b_n} \circ \tau_{i_n}(w_0^{(n)}) * \tau_{i_1} \circ \ldots \circ \tau_{i_n}((w_k^{(n)})_{k\geq 1}) ,$$

em que $*$ denota a concatenação.

Suponha que exista um $n_0 \geq 0$ tal que $i_n = i_{n_0}$ para todo $n \geq n_0$. Pela proposição 3.3, para todo $k \geq 1$

$$\begin{aligned} w^{(n_0)} &= \sigma^{b_{n_0+1}}\tau_{i_{n_0}} \circ \ldots \circ \sigma^{b_{n_0+k}}\tau_{i_{n_0}} \left(w^{(n_0+k)}\right) \\ &= \sigma^{b_{n_0+1}}\tau_{i_{n_0}} \circ \ldots \circ \sigma^{b_{n_0+k}}\tau_{i_{n_0}} \left(w_0^{(n_0+k)}\right) * \tau_{i_{n_0}}^k \left((w_j^{(n_0+k)})_{j\geq 1}\right). \end{aligned}$$

O prefixo

$$\sigma^{b_{n_0+1}}\tau_{i_{n_0}} \circ \ldots \circ \sigma^{b_{n_0+k}}\tau_{i_{n_0}} \left(w_0^{(n_0+k)}\right)$$

pode ser calculado explicitamente e vale i_{n_0}, se $w_0^{(n_0+k)} = i_{n_0}$, ou $\bar{i}_{n_0}$, se $w_0^{(n_0+k)} = \bar{i}_{n_0}$. Agora k é arbitrário, e podemos tomar $k \to \infty$, para ver que $w^{(n_0)}$ é pré-constante, pois

$$\tau_{i_{n_0}}^k \left((w_j^{(n_0+k)})_{j\geq 1}\right) \to i_{n_0}^\infty ,$$

o que contraria o fato de $w^{(n_0)}$ ser Sturmiana.

□

Lema 3.5. *Sejam $v, v' \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ começando em letras diferentes e τ é qualquer composição finita entre τ_0 e τ_1, então o comprimento do máximo prefixo comum entre $\tau(v)$ e $\tau(v')$ é $|\tau(01)|-$ 2.*

Demonstração. Escrevendo $\tau = \tau_{i_1} \circ \ldots \tau_{i_k}$, fazemos indução sobre k. Para $k = 1$ temos $\tau = \tau_0$ ou $\tau = \tau_1$, e denotamos $v = 0w$ e $v' = 1w'$ com $w, w' \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Se $\tau = \tau_0$ então

$$\begin{cases} \tau(v) = 0\tau_0(w) = 00\tilde{w} \\ \tau(v') = 01\tau_0(w') = 01\tilde{w'} \end{cases}$$

cujo máximo prefixo comum tem comprimento $1 = |\tau_0(01)| - 2$. Se $\tau = \tau_1$ então

$$\begin{cases} \tau(v) = 10\tau_1(w) = 10\tilde{w} \\ \tau(v') = 1\tau_1(w') = 11\tilde{w'} \end{cases}$$

cujo máximo prefixo comum tem comprimento $1 = |\tau_1(01)| - 2$.

Suponha válido o resultado para algum $k \geq 1$ e considere $i_{k+1} = 0$. Denote agora $v = 0aw$ e $v' = 1bw'$ sendo assim

$$\tau \circ \tau_0(v) = \tau(0)\tau(\tau_0(aw)) = \begin{cases} \tau(0)\tau(0\tau_0(w)) \text{ se } a = 0 \\ \tau(0)\tau(01\tau_0(w)) \text{ se } a = 1 \end{cases} .$$

Escreva

$$\tilde{w} = \begin{cases} 1\tau_0(w), & \text{se } a = 1 \\ \tau_0(w), & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

Sendo assim temos que $\tau \circ \tau_0(v) = \tau(0)\tau(0\tilde{w})$ e note que

$$\tau \circ \tau_0(v') = \tau \circ \tau_0(1bw') = \tau(0)\tau(1\tau_0(bw')).$$

Pela hipótese de indução, o comprimento do máximo prefixo comum entre $\tau(0\tilde{w})$ e $\tau(1\tau_0(bw'))$ vale $|\tau(01)| - 2$, portanto o máximo prefixo comum entre $\tau \circ \tau_0(v)$ e $\tau \circ \tau_0(v')$ mede

$$|\tau(0)| + |\tau(01)| - 2 = |\tau \circ \tau_0(01)| - 2 .$$

O caso $i_{k+1} = 1$ é análogo. $\square$

Proposição 3.6. *Qualquer par de sequências $(i_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ com valores em $\{0,1\}$ que satisfazem 2-4 do corolário 3.4 define uma única sequência Sturmiana.*

Demonstração. Suponha que $(i_n)_{n\geq 1}$,$(b_n)_{n\geq 1}$ satisfazem 2-4 do corolário 3.4, e sejam $u, v \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, pelo lema 3.5 temos que o maior prefixo comum entre

$$\sigma^{b_1} \circ \tau_{i_1} \ldots \sigma^{b_n} \circ \tau_{i_n}(u) \text{ e } \sigma^{b_1} \circ \tau_{i_1} \ldots \sigma^{b_n} \circ \tau_{i_n}(v)$$

mede no mínimo

$$|\tau_{i_1} \ldots \tau_{i_n}(i_n\overline{i_n})| - 2 - n = |\tau_{i_1} \ldots \tau_{i_n}(i_n)| - 1 \to \infty$$

Quando $n \to \infty$, logo

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} = \sigma^{b_1} \circ \tau_{i_1} \ldots \sigma^{b_n} \circ \tau_{i_n}\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)$$

contem um único ponto w, mostremos que w é Sturmiana. Seja v uma sequência Sturmiana qualquer, então

$$w = \lim_{n\to\infty} \sigma^{b_1} \circ \tau_{i_1} \ldots \sigma^{b_n} \circ \tau_{i_n}(v) .$$

Os morfismos τ_0 e τ_1 levam sequências Sturmianas em sequências Sturmianas, e a complexidade de w é menor ou igual que o limite das complexidades, ou seja, $p_w(n) \leq n+1$. Temos assim duas possibilidades, ou w é Sturmiana ou w é pré-periódica. Pelo fato de $(i_n)_{n\geq 1}$ não ser pré-constante, temos que w não é pré-periódica, ou seja não existe n tal que $p_w(n) \leq n$, ou seja $p_w(n) = n+1$ para todo n, logo a sequência w é Sturmiana. $\square$

Definição 3.7. *Dada uma sequência Sturmiana w, o par de sequências $(i_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ dadas pelo corolário 3.4 será denominada representação S-ádica aditiva de w e denotada por (i_n, b_n).*

3.2 Representação S-Ádica Multiplicativa

Seja (i_n, b_n) a expansão S-ádica aditiva de w, como (i_n) não é pré-constante existe uma sequência de inteiros (a_k) tal que,

$$i_1 i_2 \ldots = 0^{a_1} 1^{a_2} 0^{a_3} \ldots$$

e $a_k \geq 1$ para todo $k \geq 2$. Defina para $k \geq 1$,

$$s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j \;\text{ e }\; c_k = \sum_{n=s_{k-1}+1}^{s_k} b_n.$$

Note que o par de sequências (a_k) e (c_k) satisfaz as duas propriedades abaixo.

1) Para todo $k \geq 1$ temos que $0 \leq c_k \leq a_k$. De fato,

$$c_k = \sum_{n=s_{k-1}+1}^{s_k} b_n \leq \sum_{n=s_{k-1}+1}^{s_k} 1 = s_k - s_{k-1} = a_k.$$

2) Se $c_{k+1} = a_{k+1}$ então $c_k = 0$. De fato, se $c_{k+1} = a_{k+1}$ então $b_n = 1$ para $s_k + 1 \leq n \leq s_{k+1}$. Como $i_{s_k} \neq i_{s_k+1}$, pelo item 3 do corolário 3.4, temos que $b_{s_k} = 0$. Por outro lado, $i_n = i_{s_k}$ para $n = s_{k-1} + 1, \ldots, s_k$ temos, pelo item 2 do corolário 3.4 que $b_n = 0$ neste intervalo, ou seja, $c_k = 0$.

Definição 3.8. *Dada uma sequência (a_k), com $a_1 \geq 0$ e $a_k \geq 1$ para $k \geq 2$, uma sequência $(c_k)_{k\geq 1}$ satisfazendo*

1) Para todo $k \geq 1$ temos que $0 \leq c_k \leq a_k$.

2) Se $c_{k+1} = a_{k+1}$ então $c_k = 0$.

é chamada admissível *para (a_k).*

Podemos escrever (b_n) do seguinte modo

$$b_1 b_2 \ldots = 0^{a_1 - c_1} 1^{c_1} 0^{a_2 - c_2} 1^{c_2} \ldots .$$

Em função disso temos que para cada $k \geq 1$,

$$w = \tau_0^{a_1 - c_1} \circ (\sigma \circ \tau_0)^{c_1} \circ \tau_1^{a_2 - c_2} \circ (\sigma \circ \tau_1)^{c_2} \circ \ldots \circ \tau_{k-1}^{a_k - c_k} \circ (\sigma \circ \tau_{k-1})^{c_k} \left(w^{(s_k)}\right),$$

em que $\tau_{k-1} = \tau_{k-1 \pmod 2}$ de modo a simplificar a notação. Observando que $\tau_i \circ \sigma \circ \tau_i = \sigma \circ \tau_i^2$ podemos simplificar ainda mais e obter assim uma nova representação para w:

$$w = \sigma^{c_1} \circ \tau_0^{a_1} \circ \sigma^{c_2} \circ \tau_1^{a_2} \circ \ldots \circ \sigma^{c_k} \circ \tau_{k-1}^{a_k} \left(w^{(s_k)}\right).$$

Sejam $\alpha' = [0; 1 + a_1, a_2, \ldots]$ e

$$p_0 = 0, p_1 = 1 \text{ e } p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \text{ para } n \geq 2 ,$$

$$q_0 = 1, q_1 = a_1 + 1 \text{ e } q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \text{ para } n \geq 2 ,$$

ou seja, $\frac{p_k}{q_k}$ são os convergentes da expansão em frações contínuas de α', o próximo lema será útil para mostrar que a sequência (a_k) depende apenas da inclinação de w.

Lema 3.9. *Para cada $i \in \{0, 1\}$ temos que,*

1) Se $i = k \pmod 2$ então

$$|\tau_0^{a_1} \circ \ldots \tau_{k-1}^{a_k}(i)|_0 = q_k - p_k \ \ e \ \ |\tau_0^{a_1} \circ \ldots \tau_{k-1}^{a_k}(i)|_1 = p_k .$$

2) Se $i \neq k \pmod 2$ então

$$|\tau_0^{a_1} \circ \ldots \tau_{k-1}^{a_k}(i)|_0 = q_{k-1} - p_{k-1} \ \ e \ \ |\tau_0^{a_1} \circ \ldots \tau_{k-1}^{a_k}(i)|_1 = p_{k-1}.$$

Demonstração. Para $k = 1$ temos apenas $\tau_0^{a_1}$ sendo assim

$$\tau_0^{a_1}(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |\tau_0^{a_1}(0)|_0 = 1 = q_0 - p_0 \\ |\tau_0^{a_1}(0)|_1 = 0 = p_0 \end{cases}$$

$$\tau_0^{a_1}(1) = 0^{a_1}1 \Rightarrow \begin{cases} |\tau_0^{a_1}(1)|_0 = a_1 = q_1 - p_1 \\ |\tau_0^{a_1}(1)|_1 = 1 = p_1 \end{cases}$$

Em resumo, o resultado é válido em ambos os casos para $k = 1$. Suponha o resultado válido para algum $k \geq 1$. Se $i = k + 1 \pmod 2$ temos que

$$\tau_0^{a_1} \circ \ldots \tau_{k-1}^{a_k} \circ \tau_k^{a_{k+1}}(i) = \tau_0^{a_1} \circ \ldots \tau_{k-1}^{a_k}(\bar{i}^{a_{k+1}} i)$$

e portanto

$$\begin{aligned} |\tau_0^{a_1} \circ \ldots \tau_{k-1}^{a_k} \circ \tau_k^{a_{k+1}}(i)|_0 &= a_{k+1}|\tau_0^{a_1} \circ \ldots \tau_{k-1}^{a_k}(\bar{i})|_0 + |\tau_0^{a_1} \circ \ldots \tau_{k-1}^{a_k}(i)|_0 \\ &= a_{k+1}(q_k - p_k) + (q_{k-1} - p_{k-1}) \\ &= q_{k+1} - p_{k+1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|\tau_0^{a_1} \circ \dots \tau_{k-1}^{a_k} \circ \tau_k^{a_{k+1}}(i)|_1 &= a_{k+1}|\tau_0^{a_1} \circ \dots \tau_{k-1}^{a_k}(\bar{i})|_1 + |\tau_0^{a_1} \circ \dots \tau_{k-1}^{a_k}(i)|_1 \\
&= a_{k+1}q_k + q_{k-1} \\
&= q_{k+1}.
\end{aligned}$$

Suponha agora que $i \neq k+1 \pmod 2$ logo

$$\tau_0^{a_1} \circ \dots \tau_{k-1}^{a_k} \circ \tau_k^{a_{k+1}}(i) = \tau_0^{a_1} \circ \dots \tau_{k-1}^{a_k}(i)$$

e portanto

$$\begin{aligned}
|\tau_0^{a_1} \circ \dots \tau_{k-1}^{a_k} \circ \tau_k^{a_{k+1}}(i)|_0 &= |\tau_0^{a_1} \circ \dots \tau_{k-1}^{a_k}(i)|_0 \\
&= q_k - p_k
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|\tau_0^{a_1} \circ \dots \tau_{k-1}^{a_k} \circ \tau_k^{a_{k+1}}(i)|_1 &= |\tau_0^{a_1} \circ \dots \tau_{k-1}^{a_k}(i)|_1 \\
&= p_k.
\end{aligned}$$

□

Por consequência deste lema temos que,

$$\begin{aligned}
\alpha' &= \lim \frac{p_k}{q_k} \\
&= \lim \frac{|\tau_0^{a_1} \circ \dots \tau_{k-1}^{a_k}(i)|_1}{|\tau_0^{a_1} \circ \dots \tau_{k-1}^{a_k}(i)|} \\
&= \lim \frac{|w_0 \dots w_{q_k-1}|_1}{q_k} = \alpha,
\end{aligned}$$

ou seja, a sequência (a_k) e portanto (i_n) são determinados por α. O próximo teorema mostra como uma sequência Sturmiana w de inclinação $\alpha = [0; a_1 + 1, a_2, \dots]$ está unicamente relacionada com uma sequência $c = (c_k)$ que satisfaz as condições,

$$0 \leq c_k \leq a_k \text{ e } c_{k+1} = a_{k+1} \Rightarrow c_k = 0 \text{ para todo } k \geq 1.$$

Teorema 3.10. *Seja w uma sequência Sturmiana que toma valores na órbita de β através da transformação R_α, com $\alpha = [0; a_1 + 1, a_2, \dots]$. Então*

1) Existe uma sequência de inteiros $(c_k)_{k \geq 1}$ admissível para (a_k).

2)

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_k \delta_{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (q_{k-1}\alpha - p_{k-1}) \,.$$

3) Existe uma sequência $(v^{(k)})_{v\geq 1}$ de sequências Sturmianas tal que para todo $k \geq 1$

$$w = \sigma^{c_1} \circ \tau_0^{a_1} \circ \sigma^{c_2} \circ \tau_1^{a_2} \circ \ldots \circ \sigma^{c_k} \circ \tau_{k-1}^{a_k} \left(v^{(k)}\right) .$$

Demonstração. Comecemos demonstrando o item 1. Definimos a sequência (c_k) indutivamente, para isto considere a sequência de intervalos $(I_k)_{k\geq 0}$ dados por

$$I_k = \begin{cases} [-\delta_k, \delta_{k-1}), & \text{se } k \text{ é par} \\ [-\delta_{k-1}, \delta_k), & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

e a sequência de pontos $(x^{(k)})_{k\geq 0}$ tal que $x^{(k)} \in I_k$ para todo k. Seja $x^{(0)} = \beta \in I_0$ e para $k \geq 1$ seja

$$c_{k+1} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x^{(k)} \in [-\delta_k, \delta_{k+1}) \\ \left\lfloor \dfrac{x^{(k)} - \delta_{k+1}}{\delta_k} + 1 \right\rfloor & \text{se} \quad x^{(k)} \in [\delta_{k+1}, \delta_{k-1}) \end{cases}$$

e $x^{(k+1)} = x^{(k)} - c_{k+1}\delta_k$ se k é par e

$$c_{k+1} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x^{(k)} \in [-\delta_{k+1}, \delta_k) \\ \left\lceil -\dfrac{x^{(k)} + \delta_{k+1}}{\delta_k} \right\rceil & \text{se} \quad x^{(k)} \in [-\delta_{k-1}, -\delta_{k+1}). \end{cases}$$

e $x^{(k+1)} = x^{(k)} + c_{k+1}\delta_k$ se k é ímpar. A sequência $(\delta_k)_{k\geq -1}$ é a mesma definida na seção 2.3.

Note que de fato $x^{(k)} \in I_k$ para todo $k \geq 0$ ou seja aseuqência (c_k) esta bém definida. Se $c_{2k+1} = 0$ então

$$x^{(2k+1)} = x^{(2k)} \in [-\delta_{2k}, \delta_{2k+1}) = I_{2k+1},$$

se $c_{2k+1} \neq 0$ então

$$\begin{aligned} x^{(2k+1)} &= x^{(2k)} - c_{2k+1}\delta_{2k} \\ &< x^{(2k)} - \left(\frac{x^{(2k)} - \delta_{2k+1}}{\delta_{2k}}\right)\delta_{2k} = \delta_{2k+1} \end{aligned}$$

e portanto $x^{(2k+1)} \in [\delta_{2k+1} - \delta_{2k}, \delta_{2k+1}) \subset I_{2k+1}$. Se $c_{2k+2} = 0$ então

$$x^{(2k+2)} = x^{(2k+1)} \in [-\delta_{2k+2}, \delta_{2k+1}) = I_{2k+2},$$

e se $c_{k+2} \neq 0$ então

$$\begin{aligned} x^{(2k+2)} &= x^{(2k+1)} - c_{2k+2}\delta_{2k+1} \\ &\geq x^{(2k+1)} - \left(-\frac{x^{(2k+1)} + \delta_{2k+2}}{\delta_{2k+1}}\right)\delta_{2k+1} = -\delta_{2k+2} \end{aligned}$$

e portanto $x^{(2k+2)} \in [-\delta_{2k+2}, \delta_{2k+1} - \delta_{2k+2}) \subset I_{2k+2}$. Ou seja, $x^{(k)} \in I_k$ para todo $k \geq 0$.

Vejamos agora que a sequência (c_k) é admissível para (a_k). Se k é par então

$$c_{k+1} \leq \left\lfloor \frac{x^{(k)} - \delta_{k+1}}{\delta_k} + 1 \right\rfloor < \left\lfloor \frac{\delta_{k-1} - \delta_{k+1}}{\delta_k} + 1 \right\rfloor = a_{k+1} + 1,$$

portanto $c_{k+1} \leq a_{k+1}$. Se k é ímpar então

$$c_{k+1} \leq \left\lceil -\frac{x^{(k)} + \delta_{k+1}}{\delta_k} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{\delta_{k-1} - \delta_{k+1}}{\delta_k} \right\rceil = a_{k+1}.$$

A segunda condição para admissibilidade diz que se $c_{k+1} = a_{k+1}$ então $c_k = 0$, faremos uma demonstração por contrapositiva. Suponha que $c_{2k+1} \neq 0$, sendo assim temos que

$$\begin{aligned} x^{(2k+1)} &= x^{(2k)} - c_{2k+1}\delta_{2k} \\ &= x^{(2k)} - \left\lfloor \frac{x^{(2k)} - \delta_{2k+1} + \delta_{2k}}{\delta_{2k}} \right\rfloor \delta_{2k} \\ &\geq \left(\frac{x^{(2k)} - \delta_{2k+1} + \delta_{2k}}{\delta_{2k}}\right)\delta_{2k} = \delta_{2k+1} - \delta_{2k}, \end{aligned}$$

logo

$$c_{2k+2} \leq \left\lceil -\frac{x^{(2k+1)} + \delta_{2k+2}}{\delta_{2k+1}} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{\delta_{2k} - \delta_{2k-1} - \delta_{2k+2}}{\delta_{2k+1}} \right\rceil = a_{2k+2} - 1.$$

Portanto $c_{2k+2} \neq a_{2k+2}$. Suponha agora que $c_{2k+2} \neq 0$ e note que $\lceil x \rceil < x + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, portanto

$$\begin{aligned} x^{(2k+2)} &= x^{(2k+1)} + c_{2k+2}\delta_{2k+1} \\ &= x^{(2k+1)} + \left\lceil -\frac{x^{(2k+1)} + \delta_{2k+2}}{\delta_{2k+1}} \right\rceil \delta_{2k+1} \\ &< x^{(2k+1)} + \left(-\frac{x^{(2k+1)} + \delta_{2k+2}}{\delta_{2k+1}} + 1\right)\delta_{2k+1} = \delta_{2k+1} - \delta_{2k+2}, \end{aligned}$$

logo

$$c_{2k+3} \leq \left\lfloor \frac{x^{(2k+2)} - \delta_{2k+3}}{\delta_{2k+2}} + 1 \right\rfloor < \left\lceil \frac{-\delta_{2k+2} + \delta_{2k+1} - \delta_{2k+3}}{\delta_{2k+2}} + 1 \right\rceil = a_{2k+3}.$$

2) Para cada $k \geq 1$ temos que $x^{(k)} = x^{(0)} + \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j-1} c_{j+1}\delta_j$. De fato,

para $k = 1$ temos $x^{(0)} - c_1\delta_0 = x^{(1)}$. Suponha o resultado válido para algum $k \geq 1$. Se k é par então $x^{(k+1)} = x^{(k)} - c_{k+1}\delta_k$ e $(-1)^{k-1} = -1$, portanto

$$x^{(k+1)} = x^{(0)} + \sum_{j=0}^{k}(-1)^{j-1}c_{j+1}\delta_j \ .$$

Por outro lado, se k é ímpar então $x^{(k+1)} = x^{(k)} + c_{k+1}\delta_k$ e $(-1)^{k-1} = 1$ novamente temos

$$x^{(k+1)} = x^{(0)} + \sum_{j=0}^{k}(-1)^{j-1}c_{j+1}\delta_j.$$

Como $x^{(k)} \to 0$ quando $k \to \infty$ obtemos a seguinte expressão

$$\beta = x^{(0)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}c_{k+1}\delta_k \ .$$

Esta última série converge pois para todo $k \geq 1$ temos que

$$0 \leq c_k\delta_{k-1} \leq \frac{a_k}{q_k} = \frac{a_k}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}} \leq \frac{1}{q_{k-1}}.$$

3) Considere a sequência de transformações $E^{(k)} : I_k \to I_k$, $k \geq 0$ definidas do seguinte modo. Se k é par então

$$E^{(k)}(x) = \begin{cases} x + \delta_k, & \text{se} \quad x \in [-\delta_k, \delta_{k-1} - \delta_k) \\ x - \delta_{k-1}, & \text{se} \quad x \in [\delta_{k-1} - \delta_k, \delta_{k-1}), \end{cases}$$

se k é ímpar então

$$E^{(k)}(x) = \begin{cases} x + \delta_{k-1}, & \text{se} \quad x \in [-\delta_{k-1}, \delta_k - \delta_{k-1}) \\ x - \delta_k, & \text{se} \quad x \in [\delta_k - \delta_{k-1}, \delta_k). \end{cases}$$

Mostremos primeiro que, se k é par então $E^{(k+1)}$ é a tii induzida de $E^{(k)}$ no intervalo $[-\delta_k, \delta_{k+1})$. De fato, se $x \in [-\delta_k, \delta_{k+1} - \delta_k)$ então o tempo de retorno a $[-\delta_k, \delta_{k+1})$ é igual a 1 pois

$$E^{(k)}(x) = x + \delta_k \in [0, \delta_{k+1}) \text{ e mais } E^{(k)}(x) = E^{(k+1)}(x) \ .$$

Se $x \in [\delta_{k+1} - \delta_k, \delta_{k+1})$, devido à relação de recorrência $\delta_{k-1} = a_{k+1}\delta_k + \delta_{k+1}$ temos que para cada $p = 1, \ldots, a_{n+1}$,

$$\left(E^{(k)}\right)^p(x) = x + p\delta_k \geq \delta_{k+1},$$

mas

$$\begin{aligned}\left(E^{(k)}\right)^{a_{k+1}+1}(x) &= E^{(k)}(x+a_{k+1}\delta_k) = x + a_{k+1}\delta_k - \delta_{k-1}\\ &= x - \delta_{k+1} \in [-\delta_k, 0),\end{aligned}$$

logo o tempo de retorno é igual a $a_{k+1}+1$ e $\left(E^{(k)}\right)^{a_{k+1}+1}(x) = E^{(k+1)}(x)$, portanto $E^{(k+1)}$ é de fato a tii induzida de $E^{(k)}$ sobre o intervalo $[-\delta_k, \delta_{k+1})$. De modo análogo, mostremos que se k é ímpar então $E^{(k+1)}$ é a tii induzida de $E^{(k)}$ no intervalo $[-\delta_{k+1}, \delta_k)$. Se $x \in [\delta_k - \delta_{k+1}, \delta_k)$ então o tempo de retorno a $[-\delta_{k+1}, \delta_k)$ é igual a 1, pois

$$E^{(k)}(x) = x - \delta_k \in [-\delta_{k+1}, 0) \text{ e mais } E^{(k)}(x) = E^{(k+1)}(x)\ .$$

Se $x \in [-\delta_{k+1}, \delta_k - \delta_{k+1})$, novamente devido a relação de recorrência, $\delta_{k-1} = a_{k+1}\delta_k + \delta_{k+1}$ e então para cada $p = 1, \ldots, a_{n+1}$,

$$\left(E^{(k)}\right)^{p}(x) = x - p\delta_k < -\delta_{k+1}\ ,$$

mas

$$\begin{aligned}\left(E^{(k)}\right)^{a_{k+1}+1}(x) &= E^{(k)}(x-a_{k+1}\delta_k) = x - a_{k+1}\delta_k + \delta_{k-1}\\ &= x + \delta_{k+1} \in [0, \delta_k),\end{aligned}$$

logo o tempo de retorno é igual a $a_{k+1}+1$ e $\left(E^{(k)}\right)^{a_{k+1}+1}(x) = E^{(k+1)}(x)$, portanto $E^{(k+1)}$ é a tii induzida de $E^{(k)}$ sobre o intervalo $[-\delta_{k+1}, \delta_k)$.

Para cada $k \geq 0$, seja $v^{(k)}$ a sequência Sturmiana que toma valores na órbita de $x^{(k)}$ com relação à partição natural, ou seja, para cada $k \geq 1$ defina para k par

$$v_n^{(k)} = \chi_{[\delta_{k-1}-\delta_k, \delta_{k-1})}\left(\left[E^{(k)}\right]^n\left(x^{(k)}\right)\right)$$

e para k ímpar

$$v_n^{(k)} = \chi_{[\delta_{k}-\delta_{k-1}, \delta_{k})}\left(\left[E^{(k)}\right]^n\left(x^{(k)}\right)\right).$$

Pelo fato de $E^{(k+1)}$ ser a tii induzida de $E^{(k)}$ podemos mostrar que para todo $k \geq 0$

$$v^{(k)} = \sigma^{c_{k+1}} \circ \tau_k^{a_{k+1}}\left(v^{(k+1)}\right).$$

Para fixar as ideias suponha que k seja par, note que para todo inteiro $p \geq 1$ vale a seguinte relação

$$\left[E^{(k+1)}\right]^p\left(x^{(k+1)}\right) = \left[E^{(k)}\right]^s\left(x^{(k+1)}\right) \text{ onde } s = \left|\tau_0^{a_{k+1}}(v_0^{(k+1)} \ldots v_{p-1}^{(k+1)})\right|.$$

Mostremos este fato por indução. Para $p = 1$ temos dois casos, se $v_0^{(k+1)} = 0$ então $x^{(k+1)} \in [-\delta_k, \delta_{k+1} - \delta_k)$ de modo que

$$E^{(k+1)}\left(x^{(k+1)}\right) = E^{(k)}\left(x^{(k+1)}\right) \text{ onde } 1 = \left|\tau_0^{a_{k+1}}(v_0^{(k+1)})\right|,$$

se $v_0^{(k+1)} = 1$ então $x^{(k+1)} \in [\delta_{k+1} - \delta_k, \delta_{k+1})$ de modo que

$$E^{(k+1)}\left(x^{(k+1)}\right) = \left[E^{(k)}\right]^{a_{k+1}+1}\left(x^{(k+1)}\right) \text{ onde } a_{k+1} + 1 = \left|\tau_0^{a_{k+1}}(v_0^{(k+1)})\right|.$$

Suponha o resultado válido para $p \geq 1$. Segue que

$$\left[E^{(k+1)}\right]^{p+1}\left(x^{(k+1)}\right) = E^{(k+1)}\left[E^{(k+1)}\right]^{p}\left(x^{(k+1)}\right) = E^{(k+1)}\left[E^{(k)}\right]^{s}\left(x^{(k+1)}\right) \ ,$$

se $\left[E^{(k)}\right]^{s}\left(x^{(k+1)}\right) \in [-\delta_k, \delta_{k+1} - \delta_k)$ então $v_p^{(k+1)} = 0$, de modo que

$$\left[E^{(k+1)}\right]^{p+1}\left(x^{(k+1)}\right) = \left[E^{(k)}\right]^{s+1}\left(x^{(k+1)}\right) \text{ onde } s + 1 = \left|\tau_0^{a_{k+1}}(v_0^{(k+1)} \dots v_p^{(k+1)})\right| \ .$$

Por outro lado, se $\left[E^{(k)}\right]^{s}\left(x^{(k+1)}\right) \in [\delta_{k+1} - \delta_k, \delta_{k+1})$, então $v_p^{(k+1)} = 1$, de modo que

$$\left[E^{(k+1)}\right]^{p+1}\left(x^{(k+1)}\right) = \left[E^{(k)}\right]^{s+a_{k+1}+1}\left(x^{(k+1)}\right) \text{ onde } s+a_{k+1}+1 = \left|\tau_0^{a_{k+1}}(v_0^{(k+1)} \dots v_p^{(k+1)})\right|.$$

Para finalizar, como $c^{(k+1)}$ depende de $x^{(k)}$ e a_{k+1} temos várias possibilidades. Vejamos uma delas. Suponha que $x^{(k)} \in [\delta_{k-1} - \delta_k, \delta_{k-1})$, sendo assim $c_{k+1} = a_{k+1}$ e $x^{(k+1)} \in [\delta_{k+1} - \delta_k, \delta_{k+1})$ e portanto $v_0^{(k)} = v_0^{(k+1)} = 1$ e

$$\sigma^{c_{k+1}} \circ \tau_0^{a_{k+1}}(v_0^{(k+1)}) = v_0^{(k)} \ .$$

Suponha agora que

$$\sigma^{c_{k+1}} \circ \tau_0^{a_{k+1}}(v_0^{(k+1)} \dots v_{n-1}^{(k+1)}) = v_0^{(k)} \dots v_{s-a_{k+1}-1}^{(k)}.$$

Note que $E^{(k)}(z) = (z + \delta_k) \pmod{\delta_{k-1} + \delta_k}$. Portanto

$$\begin{aligned}
\left[E^{(k)}\right]^{n}\left(x^{(k+1)}\right) &= (x^{(k+1)} + n\delta_k) \bmod \delta_{k-1} + \delta_k \\
&= (x^{(k)} + (n - a_{k+1})\delta_k) \bmod \delta_{k-1} + \delta_k \\
&= \left[E^{(k)}\right]^{n-a_{k+1}}\left(x^{(k)}\right) \ .
\end{aligned}$$

Pelo que vimos acima, temos que

$$\left[E^{(k+1)}\right]^{n}\left(x^{(k+1)}\right) = \left[E^{(k)}\right]^{s}\left(x^{(k+1)}\right) = \left[E^{(k)}\right]^{s-a_{k+1}}\left(x^{(k)}\right) \ .$$

Se $v_n^{(k+1)} = 1$, então $\left[E^{(k)}\right]^s \left(x^{(k+1)}\right) \in [\delta_{k+1} - \delta_k, \delta_{k+1})$. Portanto $\left[E^{(k)}\right]^s \left(x^{(k)}\right) \in [\delta_{k-1} - \delta_k, \delta_{k+1})$, enquanto que $\left[E^{(k)}\right]^j \left(x^{(k)}\right) \in [-\delta_k, \delta_{k-1} - \delta_k)$ para $j = s - a_{k+1}, \ldots, s-1$, de modo que

$$\tau_0^{a_{k+1}}(v_n^{(k+1)}) = (v_{s-a_{k+1}}^{(k)} \ldots v_s^{(k)}) \ ,$$

ou seja,

$$\sigma^{c_{k+1}} \circ \tau_0^{a_{k+1}}(v_0^{(k+1)} \ldots v_n^{(k+1)}) = v_0^{(k)} \ldots v_s^{(k)}.$$

Se $v_n^{(k+1)} = 0$, então

$$\left[E^{(k)}\right]^s \left(x^{(k+1)}\right) = \left[E^{(k)}\right]^{s-a_{k+1}} \left(x^{(k)}\right) \in [-\delta_k, \delta_{k+1} - \delta_k) \ ,$$

de modo que

$$\tau_0^{a_{k+1}}(v_n^{(k+1)}) = v_{s-a_{k+1}}^{(k)},$$

ou seja,

$$\sigma^{c_{k+1}} \circ \tau_0^{a_{k+1}}(v_0^{(k+1)} \ldots v_n^{(k+1)}) = v_0^{(k)} \ldots v_{s-a_{k+1}}^{(k)}.$$

Concluindo, a imagem de cada prefixo de $v^{(k+1)}$ por $\sigma^{c_{k+1}} \circ \tau_0^{a_{k+1}}$ também é um prefixo de $v^{(k)}$, ou seja,

$$v^{(k)} = \sigma^{c_{k+1}} \circ \tau_0^{a_{k+1}}(v^{(k+1)}) \ \text{ para todo } \ k \geq 1.$$

□

Definição 3.11. *Seja w uma sequência Sturmiana de inclinação $\alpha = [0; a_1 + 1, a_2, \ldots]$. A sequência $c = (c_k)$ dada pela proposição 3.10 é denominada* representação S-ádica multiplicativa *de w. A expansão*

$$\beta = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}(q_k\alpha - p_k),$$

é chamada expansão de Ostrowski *do número β.*

3.3 Odômetro de Ostrowski

Dado $\alpha = [0; a_1 + 1, a_2, \ldots]$, seja $E_0 = \{0, \ldots, a_1 + 1\}$ e para $j \geq 1$ seja

$$E_j = \left\{ b \in \mathbb{Z} : 0 \leq b < \frac{q_{j+1}}{q_j} \right\} = \{0, \ldots, a_{j+1}\} \ ,$$

dotados da topologia discreta e seja $E = \prod_{j \geq 0} E_j$ o espaço produto. Note que o conjunto

$$K_\alpha = \{c : \forall k \geq 1, \ 0 \leq c_k \leq a_k \text{ e } c_{k+1} = a_{k+1} \Rightarrow c_k = 0\} \ ,$$

pode ser escrito como

$$\{c : \forall k \geq 1, \ c_1 q_0 + c_2 q_1 + \ldots + c_k q_{k-1} \leq q_k - 1\} \ .$$

Sendo assim, dado $c \in K_\alpha$, defina

$$D(c) = \{k \geq 1 : \ c_1 q_0 + c_2 q_1 + \ldots + c_k q_{k-1} = q_k - 1\}$$

e compute

$$m = \begin{cases} \sup D(c), & \text{se } D(c) \neq \varnothing; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que $m = +\infty$ se, e somente se,

$$c = \begin{cases} a_1 0 a_3 0 \ldots \\ \text{ou} \\ 0 a_2 0 a_4 \ldots . \end{cases}$$

Por outro lado $0 < m < +\infty$ se, e somente se,

$$c = \begin{cases} a_1 0 a_3 0 \ldots 0 a_m c_{m+1} \ldots & \text{se } m \text{ ímpar,} \\ 0 a_2 0 a_4 \ldots 0 a_m c_{m+1} \ldots & \text{se } m \text{ par.} \end{cases}$$

Para cada $c \in K_\alpha$, defina a seguinte sequência

$$\tilde{\sigma}(c) = \begin{cases} 0^m (c_{m+1} + 1) c_{m+2} \ldots \ \text{se } 0 < m < \infty, \\ 0^\infty \ \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A aplicação $\tilde{\sigma}$ é denominada α-odômetro de Ostrowski. A aplicação $\tilde{\sigma} : K_\alpha \to K_\alpha$ é sobrejetora, contínua e o sistema $(K_\alpha, \tilde{\sigma})$ é minimal, detalhes em [4, 9].

Proposição 3.12. *Os sistemas $(K_\alpha, \tilde{\sigma})$ e (X_α, σ) são topologicamente conjugados.*

Demonstração. Os conjuntos K_α e X_α estão em correspondência biunívoca através da aplicação

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & X_\alpha & \to & K_\alpha \\ & w & \mapsto & c \end{array}$$

onde c é expansão S-ádica multiplicativa de w. Seja $w \in X_\alpha$, suponha que $\Psi(w) = c$ e que $0 < m < +\infty$, note que $c_{m+1} < a_{m+1}$ e portanto

$$|\sigma^{c_1} \tau_0^{a_1} \circ \ldots \circ \sigma^{c_m} \tau_{m-1}^{a_m} (v_0^{(n)})| = 1 \ .$$

Portanto

$$\begin{aligned} \sigma(w) &= \sigma(\sigma^{c_1} \tau_0^{a_1} \circ \ldots \circ \sigma^{c_m} \tau_{m-1}^{a_m} (v^{(m)})) \\ &= \tau_0^{a_1} \circ \ldots \circ \tau_{m-1}^{a_m} (\sigma v^{(m)}) \\ &= \tau_0^{a_1} \circ \ldots \circ \tau_{m-1}^{a_m} \circ \sigma^{c_{m+1}+1} \tau_m^{a_{m+1}} (v^{(m+1)}) \end{aligned}$$

Portanto $\Psi(\sigma w) = \tilde{\sigma}(\Psi w)$, como X_α é minimal temos que $\Psi(\sigma w) = \tilde{\sigma}(\Psi w)$ para todo $w \in X_\alpha$. □

Para fixar as ideias denote por $w_{-\alpha}$ a sequência Sturmiana que toma valores na órbita de $-\alpha$ pela trnsformação R_α e por $w_{1-\alpha}$ a sequência Sturmiana que toma valores na órbita de $1-\alpha$ pela transformação $\tilde{R_\alpha}$, note que $w_{-\alpha}$ e $w_{1-\alpha}$ são as duas pré-imagens de w^* em X_α, e pelo teorema 3.10, temos que

$$\begin{cases} \Psi(w_{-\alpha}) = 0a_2 0a_4 \dots \\ \Psi(w_{1-\alpha}) = a_1 0 a_3 0 \dots \end{cases}$$

Assim pela proposição 3.12 temos que

$$\Psi(w^*) = \Psi(\sigma w_{-\alpha}) = \Psi(\sigma w_{1-\alpha}) = \tilde{\sigma}(\Psi w_{-\alpha}) = 0^\infty,$$

ou seja, a representação S-ádica multiplicativa de w^* é dada por $c = (c_k)$ com $c_k = 0$ para todo $k \geq 1$.

4 EXPOENTE INICIAL CRÍTICO

Neste capítulo estudamos potências de prefixos e o expoente inicial crítico de uma sequência Sturmiana, damos uma fórmula explícita para o expoente inicial crítico de uma sequência em termos da representação obtida na definição 3.11 e damos condições para o número α para que exista $w \in X_\alpha$ tal que $\mathrm{ice}(w) = 2$.

4.1 EXPOENTE INICIAL CRÍTICO

Definição 4.1. *A potência inteira positiva de uma palavra finita W é definida por*

$$W^1 = W \ \ e \ \ W^n = W^{n-1}W \ \ para \ \ n > 1,$$

para $p \geq 0$ arbitrário, temos que

$$W^p = W^{\lfloor p \rfloor}U,$$

onde U é um prefixo de W com comprimento $\lceil (p - \lfloor p \rfloor)|W| \rceil$.

Exemplo: Seja $W = 010$ então $W^2 = 010010$ e se $p = 1/3$ então $W^p = W^{\lfloor p \rfloor}U$ de modo que $|U| = \lceil (p - \lfloor p \rfloor)|W| \rceil = \lceil p|W| \rceil = 1$ logo $W^p = 0$.

Observação. Note que $|W|$ particiona o intervalo $(0, 1]$ em $|W|$ sub-intervalos,

$$\left(\frac{i-1}{|W|}, \frac{i}{|W|} \right] \ \ \text{para} \ \ i = 1, \ldots, |W|.$$

Se $p \in (0, 1]$ então $W^p = U$ onde U é um prefixo de W tal que, $|U| = i$ se, e somente se, $p \in \left(\frac{i-1}{|W|}, \frac{i}{|W|} \right]$. De fato, temos que

$$|U| = \lceil (p - \lfloor p \rfloor)|W| \rceil = \lceil p|W| \rceil,$$

ou seja, para $0 < p \leq 1$,

$$\lceil p|W| \rceil = i \Leftrightarrow i - 1 < p|W| \leq i.$$

Observação. Note que $W^p = W^{\lfloor p \rfloor}W^{p - \lfloor p \rfloor}$. De fato, por definição $W^p = W^{\lfloor p \rfloor}U$ onde U é um prefixo de W de comprimento $|U| = \lceil (p - \lfloor p \rfloor)|W| \rceil$. Como $p - \lfloor p \rfloor \in [0, 1]$ temos que $W^{p - \lfloor p \rfloor} = U'$ onde U' é um prefixo de W com $|U'| = \lceil (p - \lfloor p \rfloor - 0)|W| \rceil = |U|$, ou seja, U e U' são prefixos de W com mesmo comprimento, portanto $U = U' = W^{p - \lfloor p \rfloor}$.

Definição 4.2. *A* potência *de uma palavra W em uma sequência w é definida pelo*

$$\sup\{p \geq 0 : W^p \ \ ocorre\ em \ \ w\}\ .$$

A potência de prefixo *de uma palavra W em uma sequência w é dada por*

$$\sup\{p \geq 0 : W^p \ \textit{é um prefixo de} \ \ w\}.$$

Note que a potência de prefixo de uma palavra é sempre menor que ou igual à potência da mesma.

Definição 4.3. *O* expoente inicial crítico *de uma sequência $w = w_0 w_1 \ldots$ denotado por* $\operatorname{ice}(w)$ *é definido como o limite superior das potências de prefixo das palavras $w_0 \ldots w_n$, ou seja*

$$\operatorname{ice}(w) = \limsup_{n\to\infty} \left\{ \sup_{p\geq 1}\{(w_0 \ldots w_n)^p \ \ \textit{é prefixo de} \ \ w\} \right\}.$$

De maneira similar podemos definir o $\operatorname{ind}^*(w)$ *como sendo o*

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \sup_{p\geq 1}\{W^p \ \ \textit{ocorre em} \ \ w \ \ \textit{com} \ \ W \in L_n(w)\} \right\}.$$

Caso X seja minimal definimos $\operatorname{ind}^*(X)$ *como o valor comum* $\operatorname{ind}^*(w)$ *de cada $w \in X$.*

Se $X = X_\alpha$ então por [15] temos que

$$\operatorname{ind}^*(X) = 2 + \limsup_{k\to\infty} [a_k; a_{k-1}, \ldots, a_1].$$

Isto implica em particular que qualquer sequência Sturmiana contém cubos em sua linguagem e que uma sequência Sturmiana de inclinação α possui ind^* finito se, e somente se, a sequência dos quocientes parciais de α é limitada.

Proposição 4.4. *Se (X, σ) é uma dinâmica simbólica, então para cada $w \in X$ temos*

$$\operatorname{ice}(w) \leq \operatorname{ice}(\sigma w) \ ,$$

caso a desigualdade seja estrita, então σw possui duas pré-imagens.

Demonstração. Considere o caso em que $1 < \operatorname{ice}(w) < +\infty$ e escreva

$$\operatorname{ice}(w) = \limsup_{n\to\infty} p_n \quad \text{onde} \quad p_n = \sup_{p\geq 1}\{(w_1 \ldots w_n)^p \ \ \text{é prefixo de} \ \ w\},$$

seja W_k a sequência crescente de prefixos de w tal que a sequência de potências de prefixo correspondente $p_k \to \operatorname{ice}(w)$, podemos encontrar um $k_0 > 0$ tal que se $k > k_0$ então $p_k > 1$. Ora, se $p_k > 1$ e V_k for a primeira conjugação à direita de W_k então V_k é um prefixo de σw com potência de prefixo $p_k - \frac{1}{|W_k|}$, podemos então concluir que

$$\operatorname{ice}(w) = \lim p_k = \lim \left(p_k - \frac{1}{|W_k|} \right) \leq \operatorname{ice}(\sigma w).$$

Caso a desigualdade seja estrita devemos ter $\operatorname{ice}(\sigma w) > 1$. Denote por, (V_k) a sequência de prefixos de σw tal que a sequência de potências de prefixo $p_k \to \operatorname{ice}(\sigma w)$, por a a primeira letra de w e por b a letra comum que ocorre no final de infinitos prefixos V_k. Tomando uma subsequência se necessário, podemos supor que V_k termina em b e que $p_k > 1$ para todo k. Note que $b \neq a$, pois caso contrário a primeira conjugação à esquerda de V_k seria um prefixo de w com potência de prefixo $p_k + \frac{1}{|V_k|}$ e nesse caso teríamos a seguinte contradição

$$\operatorname{ice}(w) < \operatorname{ice}(\sigma w) = \lim p_k = \lim \left(p_k + \frac{1}{|V_k|} \right) \leq \operatorname{ice}(w).$$

Concluindo, para todo k temos que σw começa em $V_k V_k^{p_k - 1}$ e w começa em aV_k, uma vez que $p_k > 1$ temos que $aV_k^{p_k-1}$ e $bV_k^{p_k-1}$ pertencem a $L(X)$, como $|V_k^{p_k-1}| \to \infty$ e cada $V_k^{p_k-1} \lhd \sigma w$ temos que ambos $a\sigma w$ e $b\sigma w$ são elementos de X. □

Observação. Se σw possui apenas w como pré-imagem então $\operatorname{ice}(w) = \operatorname{ice}(\sigma w)$.

Proposição 4.5. *Se (X, σ) é uma dinâmica simbólica minimal com função de complexidade sublinear, então a função* ice *é σ-invariante a menos de uma união finita de órbitas, ou seja,* $\operatorname{ice}(w) = cte$ *em quase todo ponto com respeito a qualquer medida ergódica de Borel.*

Demonstração. Decorre do fato de a função de complexidade ser sublinear que existe um $C > 0$ tal que

$$p(n+1) - p(n) \leq C \ \text{ para todo } \ n \geq 1 \ .$$

Como X é minimal, cada $W \in L_n(X)$ possui pelo menos uma extensão à esquerda $aW \in L_{n+1}(X)$ nesse caso, o número de palavras de comprimento n que pode ser estendida duas ou mais vezes não pode ultrapassar C pois caso contrário teríamos

$$p(n+1) - p(n) > C \ .$$

Assim, se denotarmos por A o sub-conjunto de X dos pontos que possuem mais do que uma pré-imagem devemos ter que $\#A \leq C$ caso contrario teríamos o mesmo problema acima

$$p(n+1) - p(n) > C.$$

Concluindo, se $w \notin \bigcup_{v \in A} \mathcal{O}(v)$ então $\operatorname{ice}(w) = \operatorname{ice}(\sigma w)$, pois caso contrario σw teria duas pré-imagens. □

Sejam $\alpha = [0; a_1 + 1, a_2, \ldots]$ e X_α o conjunto de todas as sequências Sturmianas de inclinação α. Defina $(X_n)_{n \geq -1}$ uma sequência de palavras em $\{0,1\}^*$ dada por

$$X_{-1} = 1, \ X_0 = 0, \ X_1 = 0^{a_1}1 \text{ e } X_n = X_{n-1}^{a_n} X_{n-2} \text{ para } n \geq 2.$$

É fato que, se w^* denota a sequência característica de X_α, para cada $n \geq 1$, X_n é um prefixo de w^* (ver [10]) e para $n \geq 3$, X_{n+2} começa em $X_n^{a_{n+1}+1} Z_{n-1}$ em que Z_{n-1} é o prefixo de X_{n-1} de comprimento $|X_{n-1}| - 2$ (ver [2]). Podemos então concluir que para cada $n \geq 5$, w^* começa em quadrados do tipo $X_n X_n$. Além disto,

$$|X_n| = q_n \to \infty,$$

donde $\mathrm{ice}(w^*) \geq 2$. Podemos estender esta desigualdade a todo X_α. Primeiro note que se $w \in \mathcal{O}(w^*)$, $\mathrm{ice}(w) \geq \mathrm{ice}(w^*) \geq 2$. Precisamos de algumas definições como preparação para o resultado geral.

Definição 4.6. *Sejam $w \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e $W \in L(w)$, então*

1) *W é dita* especial à direita *se $W0, W1 \in L(w)$ e* especial à esquerda *se $0W, 1W \in L(w)$.*

2) *Um* primeiro retorno *para $V = v_0 \cdots v_k$ é uma palavra não-vazia $U \in L(w)$ tal que*

$$u_0 \dots u_{|U|-1} = w_i \dots w_{i+|U|-1} \ ,$$
$$w_{i+|U|} \dots w_{i+|U|+k} = v_0 \dots v_k \ , \text{e}$$
$$V \triangleleft UV \ .$$

Se w é Sturmiana então $p(n) = n + 1$, para todo $n \geq 1$. Consequentemente, para cada n, existe uma única palavra $W \in L_n(w)$ especial à direita e uma única $V \in L_n(w)$ especial à esquerda. Para cada $V \in L(w)$ especial à esquerda existe um único $a \in \{0,1\}$ tal que Va também é especial à esquerda.

Lema 4.7. *Numa sequência Sturmiana, os conjuntos de primeiros retornos de duas palavras distintas de mesmo comprimento U e V são disjuntos.*

Demonstração. Digamos que W seja um primeiro retorno de U e V simultaneamente. Se $|W| > |V| = |U|$, então $U \triangleleft W$ e $V \triangleleft W$, donde

$$W = UZ \quad \text{e} \quad W = VY \ ,$$

donde $UZ = VY \ \Rightarrow \ U = V$. O caso $|W| = |V|$ evidentemente não ocorre tampouco.

Se $|W| < |V| = |U|$, $WZ = V$, $Z \neq \emptyset$. De $V \triangleleft WV$, tiramos que $WV = WZP$, para algum P, e $ZP = WZ$. Portanto $W = ZT$ e $V = ZTZ$, para algum T. O mesmo argumento partindo de $U = WZ'$, leva a $W = Z'T'$, com $|Z| = |Z'|$, donde $Z' = Z$ e $U = V$. $\square$

Proposição 4.8. *Qualquer sequência Sturmiana w começa com quadrados arbitrariamentes grandes.*

Demonstração. Seja w uma sequência Sturmiana, $w \in X_\alpha$, para algum $\alpha \in (0,1)$ irracional. Pelo exposto acima, podemos supor $w \notin \mathcal{O}(w^*)$, e portanto w começa no máximo com um número finito de prefixos especiais à esquerda, caso contrário $0w, 1w \in X_\alpha$ implicando $w = w^*$. Como w não é pré-periódica e uniformemente recorrente segue que w começa com infinitos prefixos especiais à direita os quais podemos supor que não sejam especias à esquerda.

Afirmação: Se W é especial à direita e Z é um primeiro retorno para W então $|Z| \leq |W| + 1$. De fato, suponha que $|Z| > |W| + 1$. Como w contém exatamente $|W| + 1$ fatores de tamanho $|W|$ existe $V \neq W$ com $|V| = |W|$ ocorrendo pelo menos duas vezes em ZW, ou seja, Z contém um primeiro retorno U para V. Note que $ZW = WXW$, com $|X| \geq 2$. Como $U \neq Z$ (pelo lema 4.7), e V é prefixo e sufixo de UV, U não pode ser prefixo de Z. Portanto W não ocorre em UV. Segue que nenhum prefixo de UV de tamanho $\geq |W|$ é especial à direita, mas então w é pré-periódica, isto é, existe $X \triangleleft Z$ tal que

$$w = XU(w_i \dots w_{i+k})^\infty = XV^\infty .$$

Se W é especial à direita, então um primeiro retorno para W é prefixo de W ou do tipo Wa para algum $a \in \{0,1\}$. E cada $W \in L(w)$ especial à direita possui exatamente dois primeiros retornos, e apenas um deles também é especial à direita.

Seja W um prefixo de w especial à direita e não à esquerda, como w é recorrente, então w começa em um primeiro retorno para W. Se w começa em um primeiro retorno $V \triangleleft W$, então w começa com um quadrado. De fato, $W = VX$, mas também $W = XV$, pois V é primeiro retorno de W, podendo X ser a palavra vazia. Suponha $|X| \leq |V|$. Então VXV é prefixo de w, e daí $V = XT$, e w começa com $XTXTX$.

Por outro lado se w começa com um primeiro retorno do tipo Wa para algum $a \in \{0,1\}$, então o outro primeiro retorno para W é prefixo de W, pois se fosse do tipo Wb com $b \neq a$ então W seria especial à esquerda, uma contradição. Analisemos Wa em dois casos.

Caso 1: Suponha que WaW seja especial à direita. Se w começa em um primeiro retorno para WaW de comprimento $\leq |WaW|$ pronto, vez que w começa com um quadrado; caso contrário w começa em $WaWbWaW$, como W não é especial à esquerda temos que $a = b$ e portanto w começa em $WaWa$.

Caso 2: Suponha agora que WaW não seja especial à direita. Neste caso o primeiro retorno para W que é prefixo de W, digamos $V \triangleleft W$, é especial à direita. Além disto, cada ocorrência de WaW é prefixo de $WaWV$, caso contrário w seria pré-periódica. Mais ainda, existe $n \geq 1$ tal que $WaWV^n$ é especial à direita e prefixo de w. Mostremos que cada primeiro retorno para $WaWV^n$ é prefixo de si mesmo, ou seja $|U| \leq |WaWV^n|$, de onde podemos concluir que w começa com um quadrado. Suponha que $WaWV^n$ possua um primeiro retorno do tipo $WaWV^nb$; como W não é especial à esquerda temos que $b = a$. Como W é sufixo WV^n temos que $WaWaW$ ocorre em $WaWV^naWaWV^n$, mas supomos que WaW não é especial à direita, logo a palavra $WaWaW$ não pode ocorrer em w, se fosse o caso w seria pré-periódica, uma contradição.

Concluindo, como w possui prefixos especiais à direita arbitrariamente grandes, temos que w começa com quadrados arbitrariamentes grandes. $\square$

4.2 Cálculo de Potências

O paradigma para o nosso estudo é que grandes potências w vêm de grandes potências de $w^{(n)}$, em que a sequência $w^{(n)}$ é a sequência obtida no corolário 3.4. Antes de fazer uma afirmação mais precisa, seja (i_n, b_n) a representação S-ádica aditiva de uma sequência Sturmiana w, vamos provar o seguinte fato.

Lema 4.9. *Seja w uma sequência Sturmiana que começa em W^r com $r > 1$, $|W| > 2$ e W primitiva. Então existe um prefixo $W^{(1)}$ de $w^{(1)}$ tal que $W = \tau_{i_1}(W^{(1)})$ ou W é a primeira conjugação à esquerda de $\tau_{i_1}(W^{(1)})$, e mais, $W^{(1)}$ é primitiva com $|W^{(1)}| \geq 2$.*

Demonstração. Se $b_1 = 0$ então $w_{|W|} = w_0 = i_1$ pois W^r é prefixo de w e $r > 1$, como $i_1 \lhd \tau_{i_1}(i)$ e $1 \leq |\tau_{i_1}(i)| \leq 2$ para cada $i \in \{0, 1\}$ podemos construir um prefixo $W^{(1)}$ de $w^{(1)}$ tal que

$$\tau_{i_1}(W^{(1)}) = W.$$

De fato, seja $j \geq 1$ o maior índice tal que

$$\tau_{i_1}(w_0^{(1)}) \ldots \tau_{i_1}(w_j^{(1)}) \lhd W,$$

lembre-se que $\tau_{i_1}(w^{(1)}) = w$, podemos então ter duas configurações

$$\begin{cases} \tau_{i_1}(w_0^{(1)} \ldots w_j^{(1)}) = w_0 \ldots w_{|W|-1} = W \\ \text{ou} \\ \tau_{i_1}(w_0^{(1)} \ldots w_j^{(1)}) = w_0 \ldots w_{|W|-2}. \end{cases}$$

No primeiro caso tome $W^{(1)} = w_0^{(1)} \ldots w_j^{(1)}$, na segunda configuração, temos que $w_{j+1}^{(1)} = i_1$ pois caso contrário teríamos

$$\tau_{i_1}(w_0^{(1)}) \ldots \tau_{i_1}(w_{j+1}^{(1)}) = w_0 \ldots w_{|W|-2} i_1 \overline{i_1}$$

implicando $w_{|W|} = \overline{i_1}$. Neste caso tome $W^{(1)} = w_0^{(1)} \ldots w_{j+1}^{(1)}$.

Se $b_1 = 1$ então $\tau_{i_1}(w^{(1)}) = i_1 w$ e $w_{|W|} = w_0 = \overline{i_1}$, como w é do tipo i_1 segue que $\overline{i_1 i_1}$ não ocorre em w portanto $w_{|W|-1} = i_1$ pelo mesmo argumento do caso $b_1 = 0$, obtemos $W^{(1)} \lhd w^{(1)}$ tal que

$$\tau_{i_1}(W^{(1)}) = i_1 w_0^{(1)} \ldots w_{|W|-2}^{(1)},$$

onde $i_1 w_0^{(1)} \ldots w_{|W|-2}^{(1)}$ é a primeira conjugação à esquerda de W.

Note que $|\tau_{i_1}(U)| \leq 2|U|$ para qualquer $U \in \{0,1\}^*$, como

$$2 < |W| = |\tau_{i_1}(W^{(1)})| \leq 2|W^{(1)}|,$$

podemos concluír que $|W^{(1)}| \geq 2$, se $W^{(1)} = V^p$ com $p > 1$ e inteiro então

$$W = \tau_{i_1}(W^{(1)}) = \tau_{i_1}(V^p) = [\tau_{i_1}(V)]^p,$$

um absurdo uma vez que W é primitiva. □

Observação: Relembre que para cada $k > 0$, $s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$, $c_k = \sum_{n=s_{k-1}+1}^{s_k} b_n$ com

$$(i_n) = (0^{a_1}1^{a_2}0^{a_3}1^{a_4}\ldots) \text{ e } (b_n) = (0^{a_1-c_1}1^{c_1}0^{a_2-c_2}1^{c_2}\ldots)$$

e

$$\begin{aligned} w &= \tau_0^{a_1-c_1} \circ (\sigma \circ \tau_0)^{c_1} \circ \ldots \circ \tau_{k-1}^{a_k-c_k} \circ (\sigma \circ \tau_{k-1})^{c_k}(w^{(s_k)}) \\ &= \sigma^{c_1}\tau_0^{a_1} \circ \ldots \circ \sigma^{c_k}\tau_{k-1}^{a_k}(w^{(s_k)}). \end{aligned}$$

Proposição 4.10. *Seja w uma sequência Sturmiana que começa em W^r com $r \geq 2$, $|W| > 2$ e W primitiva. Existe um inteiro $m > 0$ tal que W é igual ou é alguma conjugação à esquerda de*

$$\tau_{i_1} \circ \ldots \circ \tau_{i_m}(01) \text{ ou } \tau_{i_1} \circ \ldots \circ \tau_{i_m}(10).$$

Ou seja $w^{(m)}$ começa em 01 ou 10 e mais, com potência maior que $\lfloor r \rfloor - 1$ e m é um dos números $s_k - 1$ ou $s_k - c_k - 1$, se $r \geq 3$ então $m = s_k - 1$, para algum $k > 0$.

Demonstração. Aplicando o lema 4.9 n vezes, $n \geq 1$, obtemos $W^{(n)} \lhd w^{(n)}$ tal que $\tau_{i_n}(W^{(n)})$ é igual a $W^{(n-1)}$ ou a primeira conjugação à esquerda de $W^{(n-1)}$. O lema deixa de ser aplicado após um número finito de vezes, pois caso contrario teríamos

$$|W| = |\tau_{i_1} \circ \ldots \circ \tau_{i_n}(W^{(n)})| \to \infty,$$

quando $n \to \infty$, absurdo uma vez que $|W|$ é finito. Seja m o menor índice tal que o lema deixa de ser aplicado, neste caso $|W^{(m)}| = 2$ ou

$$r' = \sup_{p \geq 1} \left\{ [W^{(m)}]^p \lhd w^{(m)} \right\} = 1.$$

Mostremos que $|W^{(m)}| = 2$, de onde podemos afirmar que $W^{(m)}$ é igual a 01 ou 10 uma vez que $W^{(m)}$ é primitiva, fazendo isto podemos concluir também que W é igual ou é alguma conjugação à esquerda de $\tau_{i_1} \circ \ldots \circ \tau_{i_m}(01)$ ou de $\tau_{i_1} \circ \ldots \circ \tau_{i_m}(10)$.

Mostremos que $r' > 1$ restando apenas o fato que $|W^{(m)}| = 2$ para que o lema 4.9 deixe de ser aplicado. Denote por $[W^{(m)}]^\infty$ a sequência $W^{(m)}W^{(m)}\ldots$, o maior prefixo comum entre $[W^{(m)}]^\infty$ e $w^{(m)}$ é $[W^{(m)}]^{r'}$, sendo assim pelo lema 3.5 o maior prefixo comum entre

$$\begin{cases} \tau_{i_1} \circ \ldots \circ \tau_{i_m}(w^{(m)}) \\ \text{e} \\ \tau_{i_1} \circ \ldots \circ \tau_{i_m}([W^{(m)}]^\infty) \end{cases}$$

possui comprimento

$$|\tau_{i_1} \circ \ldots \circ \tau_{i_m}([W^{(m)}]^{r'})| + |\tau_{i_1} \circ \ldots \circ \tau_{i_m}(01)| - 2 < |\tau_{i_1} \circ \ldots \circ \tau_{i_m}([W^{(m)}]^{r'+1})|,$$

uma vez que $W^{(m)}$ contém pelo menos um 0 e um 1 pois $W^{(m)}$ é primitiva. Por outro lado as sequências

$$\begin{cases} \sigma^{b_1}\tau_{i_1} \circ \ldots \circ \sigma^{b_m}\tau_{i_m}(w^{(m)}) \\ \text{e} \\ \sigma^{b_1}\tau_{i_1} \circ \ldots \circ \sigma^{b_m}\tau_{i_m}([W^{(m)}]^\infty) \end{cases}$$

possuem W^r como prefixo comum, pois

$$\sigma^{b_1}\tau_{i_1} \circ \ldots \circ \sigma^{b_m}\tau_{i_m}(w^{(m)}) = w,$$

e

$$\sigma^{b_1}\tau_{i_1} \circ \ldots \circ \sigma^{b_m}\tau_{i_m}([W^{(m)}]^\infty) = W^\infty.$$

Se $j = \#\{b_i : b_i = 1, i = 1, \ldots, m\}$ temos que

$$\sigma^{b_1}\tau_{i_1} \circ \ldots \circ \sigma^{b_m}\tau_{i_m}([W^{(m)}] = w_0 \ldots w_{|W|-j-1},$$

por outro lado

$$\tau_{i_1} \circ \ldots \circ \tau_{i_m}([W^{(m)}])$$

é a j-ésima conjugação à esquerda de W, portanto

$$\begin{cases} \tau_{i_1} \circ \ldots \circ \tau_{i_m}(w^{(m)}) \\ \text{e} \\ \tau_{i_1} \circ \ldots \circ \tau_{i_m}([W^{(m)}]^\infty) \end{cases}$$

possuem prefixo comum maior ou igual a $r|W|$, deste modo podemos concluír que

$$r|\tau_{i_1} \circ \ldots \circ \tau_{i_m}([W^{(m)}])| = r|W| < |\tau_{i_1} \circ \ldots \circ \tau_{i_m}([W^{(m)}]^{r'+1})|.$$

Como $\lfloor r \rfloor \le r$ temos que

$$\begin{aligned} |\tau_{i_1} \circ \ldots \circ \tau_{i_m}([W^{(m)}]^{\lfloor r \rfloor})| &= \lfloor r \rfloor |\tau_{i_1} \circ \ldots \circ \tau_{i_m}([W^{(m)}])| \\ &\le r|\tau_{i_1} \circ \ldots \circ \tau_{i_m}([W^{(m)}])| \\ &< |\tau_{i_1} \circ \ldots \circ \tau_{i_m}([W^{(m)}]^{r'+1})|, \end{aligned}$$

ou seja $\lfloor r \rfloor < r' + 1 \Leftrightarrow r' > \lfloor r \rfloor - 1$, como $r \ge 2$ temos que $r' > 1$.

Analisemos m mais precisamente, sabemos que $w^{(m)}$ começa em 010 ou 101 pois $W^{(m)} = 01$ ou 10 e $r' > 1$, sem perda de generalidade, suponha que $W^{(m)} = 01$.

Se $i_{m+1} = 0$ como $w^{(m)}$ começa em 01 segue que $b_{m+1} = 0$ e $w_0^{(m+1)} = 1$, temos duas possibilidades. Se $i_{m+2} = 1$ então $m = s_k - 1$ para algum $k > 0$, agora se $i_{m+2} = 0$ então $b_{m+2} = 1$ logo $m = s_k - c_k - 1$ para algum $k > 0$.

Se $i_{m+1} = 1$ então $b_{m+1} = 1$ e $w^{(m+1)}$ começa em 00 pois $w^{(m)} = \sigma\tau_1(w^{(m+1)})$ e $w^{(m)}$ começa em 01, logo $i_{m+2} = 0$ e portanto $m = s_k - 1$. Note que no segundo caso m independe de r, agora no primeiro se $m = s_k - c_k - 1$ então

$$w^{(m)} = \tau_0\sigma\tau_0(w^{(m+2)}),$$

pois $i_{m+1} = i_{m+2} = b_{m+1} = \overline{b_{m+2}} = 0$ e $w^{(m+2)}$ começa em 10 pois $010 \lhd w^{(m)}$, independente de $w_2^{(m+2)}$ temos que $0100 \lhd w^{(m)}$ implicando $r' = 3/2$, impossível se $r \ge 3$. Portanto, se $r \ge 3$ então $m = s_k - 1$. $\square$

Lema 4.11. *Seja $k > 0$ e suponha que $i = k$ mod 2, então*

1) $|\tau_0^{a_1} \circ \ldots \circ \tau_{k-1}^{a_k}(i\bar{i})| = q_k + q_{k-1} = 2 + \sum_{j=1}^k a_j q_{j-1}$

2) $|\sigma^{c_1}\tau_0^{a_1} \circ \ldots \circ \sigma^{c_k}\tau_{k-1}^{a_k}(i)| = q_k - \sum_{j=1}^k c_j q_{j-1}$

3) $|\sigma^{c_1}\tau_0^{a_1} \circ \ldots \circ \sigma^{c_k}\tau_{k-1}^{a_k}(i\bar{i})| = 2 + \sum_{j=1}^k (a_j - c_j) q_{j-1}$.

Demonstração. O item 1 decorre do lema 3.9. Vejamos o item 2 por indução. Para $k = 1$ temos que

$$|\sigma^{c_1}\tau_0^{a_1}(1)| = a_1 - c_1 + 1 = q_1 - \sum_{j=1}^{1} c_j q_{j-1},$$

para facilitar a escrita usaremos as seguintes notações

$$\begin{cases} \varphi_k = \sigma^{c_1}\tau_0^{a_1} \circ \ldots \circ \sigma^{c_k}\tau_{k-1}^{a_k} \\ e \\ \xi_k = \tau_0^{a_1} \circ \ldots \circ \tau_{k-1}^{a_k}. \end{cases}$$

Suponha o resultado válido para $n = k - 1$, sabemos que

$$\begin{aligned}\varphi_k(i) &= \varphi_{k-1}(\sigma^{c_k}\tau_{k-1}^{a_k}(i)) \\ &= \varphi_{k-1}(\bar{i}^{a_k - c_k} i) \\ &= \varphi_{k-1}(\bar{i})\xi_{k-1}(\bar{i}^{a_k - c_k - 1} i),\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}|\varphi_k(i)| &= |\varphi_{k-1}(\bar{i})| + (a_k - c_k - 1)|\xi_{k-1}(\bar{i})| + |\xi_{k-1}(i)| \\ &= q_{k-1} - \sum_{j=1}^{k-1} c_j q_{j-1} + (a_k - c_k - 1)q_{k-1} + q_{k-2} \\ &= q_k - \sum_{j=1}^{k} c_j q_{j-1}.\end{aligned}$$

A afirmação 3 segue de 1 e 2 pois

$$\varphi_k(i\bar{i}) = \varphi_k(i)\xi_k(\bar{i}),$$

sendo assim

$$\begin{aligned}|\varphi_k(i\bar{i})| &= |\varphi_k(i)| + |\xi_k(\bar{i})| \\ &= q_k - \sum_{j=1}^{k} c_j q_{j-1} + q_{k-1} \\ &= 2 + \sum_{j=1}^{k} (a_j - c_j) q_{j-1}.\end{aligned}$$

□

Proposição 4.12. *Sejam W e r como da proposição 4.10 e m,$w^{(m)}$ e $W^{(m)}$ obtidos na demonstração. Suponha que r seja a potência de prefixo de W em w então*

$$r = \begin{cases} \delta_{k+2} + \dfrac{1}{q_k}\displaystyle\sum_{j=1}^{k+1}(a_j - c_j)q_{j-1}, & \textit{se } m = s_k - 1, \\ 1 + \dfrac{1}{q_k - c_k q_{k-1}}\displaystyle\sum_{j=1}^{k}(a_j - c_j)q_{j-1}, & \textit{se } m = s_k - c_k - 1 \textit{ com } 0 < c_k < a_k. \end{cases}$$

Onde

$$\delta_{k+2} = \begin{cases} 1, & \textit{se } a_{k+2} = c_{k+2} \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Suponha que $m = s_k - 1$ e seja $i = k \bmod 2$. Mostremos que a sequência $w^{(s_k)}$

começa em $i^{\gamma_{k+2}}\bar{i}$ onde $\gamma_{k+2} = \delta_{k+2} + a_{k+1} - c_{k+1}$. Sabemos que

$$\begin{cases} w^{(s_k)} = \sigma^{c_{k+1}} \circ \tau_k^{a_{k+1}}(w^{(s_{k+1})}) \\ \text{e} \\ w^{(s_{k+1})} = \sigma^{c_{k+2}} \circ \tau_{k+1}^{a_{k+2}}(w^{(s_{k+2})}), \end{cases}$$

se $a_{k+2} \neq c_{k+2}$ então $w^{(s_{k+1})}$ começa em $\bar{i}$, sendo assim $w^{(s_k)}$ começa em

$$\sigma^{c_{k+1}} \circ \tau_k^{a_{k+1}}(\bar{i}) = i^{a_{k+1}-c_{k+1}}\bar{i},$$

se $a_{k+2} = c_{k+2}$ então em primeiro lugar $c_{k+1} = 0$ e $b_j = 1$ para $j = s_{k+1}+1, \ldots, s_{k+2}$, logo

$$w_0^{(s_{k+2})} = \overline{k+1} = k = i,$$

portanto $w^{(s_{k+1})}$ começa em $i\bar{i}$ logo $w^{(s_k)}$ começa em

$$\tau_k^{a_{k+1}}(i\bar{i}) = i\tau_k^{a_{k+1}}(\bar{i}) = i^{1+a_{k+1}}\bar{i}.$$

Com esses fatos podemos calcular o tamanho do maior prefixo comum entre $w = \varphi_k(w^{(s_k)})$ e $\varphi_k(i^\infty)$, usando o lema 4.11 temos que

$$\begin{aligned} |\varphi_k(i^{\gamma_{k+2}})| + |\xi_k(i\bar{i})| - 2 &= |\varphi_k(i)| + \gamma_{k+2}|\xi_k(i)| + |\xi_k(\bar{i})| - 2 \\ &= |\varphi_k(i\bar{i})| + \gamma_{k+2}|\xi_k(i)| - 2 \\ &= \sum_{j=1}^{k}(a_j - c_j)q_{j-1} + \gamma_{k+2}q_k \\ &= \sum_{j=1}^{k+1}(a_j - c_j)q_{j-1} + \delta_{k+2}q_k, \end{aligned}$$

veja que

$$\begin{aligned} q_k &= |\xi_k(i)| = |\tau_0^{a_1} \circ \ldots \circ \tau_{k-1}^{a_k}(i)| \\ &= |\tau_0^{a_1} \circ \ldots \circ \tau_{k-1}^{a_k - 1}(\tau_{k-1}(i))| = |\tau_{i_1} \circ \ldots \circ \tau_{i_m}(\bar{i}i)| \\ &= |W|, \end{aligned}$$

assim a potência de prefixo de W em w é dado por

$$\frac{\sum_{j=1}^{k+1}(a_j - c_j)q_{j-1} + \delta_{k+2}q_k}{|W|} = \delta_{k+2} + \frac{1}{q_k}\sum_{j=1}^{k+1}(a_j - c_j)q_{j-1}.$$

Considere agora o caso em que $m = s_k - c_k - 1$ com $0 < c_k < a_k$. Sabemos que

$$w^{(s_k-c_k)} = (\sigma \circ \tau_{k-1})^{c_k}(w^{(s_k)}) = \sigma^{c_k} \circ \tau_{k-1}^{c_k}(w^{(s_k)}),$$

sendo assim $w^{(s_k-c_k)}$ começa em

$$\sigma^{c_k} \circ \tau_{k-1}^{c_k}(i^{\gamma_{k+2}}\bar{i}) = i\tau_{k-1}^{c_k}(i^{\gamma_{k+2}-1}\bar{i}),$$

ou seja $w^{(s_k-c_k)}$ começa em $i\bar{i}$, assim o tamanho do maior prefixo comum entre

$$\begin{cases} w = \sigma^{c_1} \circ \tau_0^{a_1} \circ \ldots \circ \tau_{k-1}^{a_k-c_k}(w^{(s_k-c_k)}) \\ \text{e} \\ \sigma^{c_1} \circ \tau_0^{a_1} \circ \ldots \circ \tau_{k-1}^{a_k-c_k}(i^{\infty}) \end{cases}$$

é dado por

$$\begin{aligned}
|\varphi_{k-1} \circ \tau_{k-1}^{a_k-c_k}(i)| &+ |\xi_{k-1} \circ \tau_{k-1}^{a_k-c_k}(i\bar{i})| - 2 = \\
&= |\varphi_{k-1}(\bar{i}^{\,a_k-c_k} i)| + |\xi_{k-1}(\bar{i}^{\,a_k-c_k} i)| + |\xi_{k-1}(\bar{i})| - 2 \\
&= |\varphi_{k-1}(\bar{i}i)| + 2(a_k-c_k)|\xi_{k-1}(\bar{i})| + |\xi_{k-1}(i)| - 2 \\
&= 2 + \sum_{j=1}^{k-1}(a_j-c_j)q_{j-1} + 2(a_k-c_k)q_{k-1} + q_{k-2} - 2 \\
&= \sum_{j=1}^{k}(a_j-c_j)q_{j-1} + q_k - c_k q_{k-1},
\end{aligned}$$

agora temos que

$$\begin{aligned}
q_k - c_k q_{k-1} &= |\xi_{k-1}\tau_{k-1}^{a_k-c_k}(i)| = |\xi_{k-1}\tau_{k-1}^{a_k-c_k-1}(\tau_{k-1}i)| \\
&= |\xi_{k-1}\tau_{k-1}^{a_k-c_k-1}(\bar{i}i)| = |\tau_{i_1} \circ \ldots \circ \tau_{i_m}(\bar{i}i)| \\
&= |W|,
\end{aligned}$$

assim a potência de prefixo de W em w é dado por

$$\frac{\sum_{j=1}^{k}(a_j-c_j)q_{j-1} + q_k - c_k q_{k-1}}{|W|} = 1 + \frac{1}{q_k - c_k q_{k-1}} \sum_{j=1}^{k}(a_j-c_j)q_{j-1}.$$

$\square$

Antes de continuar vamos introduzir as seguintes notações

$$x_k = \delta_{k+2} + \frac{1}{q_k}\sum_{j=1}^{k+1}(a_j-c_j)q_{j-1},$$

$$x'_k = \frac{1}{q_k}\sum_{j=1}^{k+1}(a_j - c_j)q_{j-1}$$

e

$$y_k = 1 + \frac{1}{q_k - c_k q_{k-1}}\sum_{j=1}^{k}(a_j - c_j)q_{j-1}.$$

Proposição 4.13. *Para cada $k > 0$ existe $W \lhd w$ tal que*

$$\sup_{p\geq 1}\{W^p \lhd w\} = x_k,$$

e para cada $k > 0$ tal que $0 < c_k < a_k$, existe $W \lhd w$ tal que

$$\sup_{p\geq 1}\{W^p \lhd w\} = y_k.$$

Demonstração. Vimos na demonstração da proposição anterior que para cada $k > 0$, $w^{(s_k)}$ começa em $i^{\gamma_{k+2}}\bar{i}$ onde $i = k \bmod 2$, portanto o maior prefixo comum entre $w = \varphi_k(w^{(s_k)})$ e $\varphi_k(i^\infty)$ mede

$$\sum_{j=1}^{k+1}(a_j - c_j)q_{j-1} + \delta_{k+2}q_k$$

logo se $W = w_0 \dots w_{q_k - 1}$ temos que

$$\sup_{p\geq 1}\{W^p \lhd w\} = x_k.$$

Por outro lado se $0 < c_k < a_k$ então a sequência $w^{(s_k - c_k)}$ começa em $i\bar{i}$, logo o maior prefixo comum entre $w = \varphi_{k-1}\tau_{k-1}^{a_k - c_k}(w^{(s_k - c_k)})$ e $\varphi_{k-1}\tau_{k-1}^{a_k - c_k}(i^\infty)$ mede

$$\sum_{j=1}^{k}(a_j - c_j)q_{j-1} + (q_k - c_k q_{k-1}),$$

portanto se $W = w_0 \dots w_{q_k - c_k q_{k-1} - 1}$ então

$$\sup_{p\geq 1}\{W^p \lhd w\} = y_k.$$

□

Corolário 4.14.

$$\mathrm{ice}(w) = \max\left\{\limsup_{k\to\infty} x_k, \limsup_{k\to\infty, 0<c_k<a_k} y_k\right\}.$$

Demonstração. Cada prefixo primitivo de w possui potência de prefixo menor ou igual a algum x_k ou y_k e para cada $k > 0$, temos que x_k é a potência de prefixo de algum prefixo de w, o mesmo vale para y_k caso $0 < c_k < a_k$, como os prefixos primitivos de w possuem as maiores potências de prefixos podemos concluir que

$$\operatorname{ice}(w) = \max\left\{\limsup_{k\to\infty} x_k, \limsup_{k\to\infty, 0<c_k<a_k} y_k\right\}.$$

□

Teorema 4.15.

$$\operatorname{ice}(w) = \limsup_{k\to\infty} \max\left\{\frac{\sum_{j=1}^{k+1}(a_j - c_j)q_{j-1}}{q_k}, 1 + \frac{\sum_{j=1}^{k}(a_j - c_j)q_{j-1}}{q_k - c_k q_{k-1}}\right\}.$$

Demonstração. Pelo corolário 4.14 temos que

$$\operatorname{ice}(w) = \max\left\{\limsup_{k\to\infty} x_k, \limsup_{k\to\infty, 0<c_k<a_k} y_k\right\}.$$

Suponha que $\operatorname{ice}(w) = \limsup x_k > \limsup y_k$, logo

$$\limsup \max\{x_k, y_k\} = \limsup x_k = \operatorname{ice}(w),$$

o mesmo argumento pode ser usado quando $\operatorname{ice}(w) = \limsup y_k > \limsup x_k$. O resultado é imediato quando $\limsup x_k = \limsup y_k$. Considere agora as seguintes observações.

1) Se $c_k = a_k$ então $y_k = x_{k-2}$, ou seja se $a_{k+2} = c_{k+2}$ então $x_k = y_{k+2}$.

2) Se $c_k = 0$ e $c_{k+1} = a_{k+1}$ então $y_k < y_{k+1}$.

3) Se $c_k = 0$ e $c_{k+1} < a_{k+1}$ então $y_k \leq x_k$.

Por $1, 2$ e 3 temos que

$$\operatorname{ice}(w) = \limsup \max\{x_k, y_k\} = \limsup \max\{x'_k, y_k\}.$$

□

Proposição 4.16. *Se w^* é a sequência característica de X_α então,*

$$\operatorname{ice}(w^*) = \operatorname{ind}^*(X_\alpha) - 1$$

Demonstração. Vimos na seção 3.3 que $\Psi(w^*) = 0^\infty$, sendo assim pela proposição 4.15 e pela fórmula do espelho para frações contínuas, ver [1] temos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{ice}(w^*) &= \limsup \max\left\{\frac{1}{q_k}\sum_{j=1}^{k+1} a_j q_{j-1}, 1 + \frac{1}{q_k}\sum_{j=1}^{k} a_j q_{j-1}\right\} \\
&= \limsup \frac{1}{q_k}\sum_{j=1}^{k+1} a_j q_{j-1} \\
&= \limsup \left\{1 + a_{k+1} + \frac{q_{k-1}}{q_k}\right\} \\
&= 1 + \limsup [a_k; a_{k-1}, \ldots, a_1] \\
&= \operatorname{ind}^*(X_\alpha) - 1
\end{aligned}$$

□

4.3 SEQUÊNCIAS COM $\operatorname{ice} = 2$

Daremos condições para α de modo que exista $w \in X_\alpha$ com $\operatorname{ice}(w) = 2$, para isto façamos primeiro algumas considerações.

1) Suponha que $a_{k+2} = c_{k+2}$, sendo assim

$$y_{k+2} = 1 + \frac{1}{q_k}\sum_{j=1}^{k+1}(a_j - c_j)q_{j-1} \geq 1 + a_{k+1} + \frac{a_{k-1}q_{k-2}}{q_k}.$$

Note que

$$\frac{a_{k-1}q_{k-2}}{q_k} = \frac{a_{k-1}q_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}} = \frac{a_{k-1}}{a_k \frac{q_{k-1}}{q_{k-2}} + 1},$$

como

$$\frac{q_{k-1}}{q_{k-2}} = a_{k-1} + \frac{q_{k-3}}{q_{k-2}} \leq a_{k-1} + 1,$$

temos que

$$\frac{a_{k-1}q_{k-2}}{q_k} \geq \frac{a_{k-1}}{a_k(a_{k-1}+1)+1},$$

note também que a função real $f(x) = \frac{x}{a_k(x+1)+1}$, $x \geq 0$ e crescente pois

$$f'(x) = \frac{a_k(x+1) + 1 - xa_k}{(a_k(x+1)+1)^2} = \frac{a_k + 1}{(a_k(x+1)+1)^2} > 0,$$

portanto

$$\frac{1}{2a_k + 1} = f(1) \leq f(a_{k-1}) = \frac{a_{k-1}}{a_k(a_{k-1}+1)+1} \leq \frac{a_{k-1}q_{k-2}}{q_k},$$

logo

$$y_{k+2} \geq 1 + a_{k+1} + \frac{1}{2a_k + 1}.$$

2) Suponha que $a_{k+2} - c_{k+2} \geq 2$, sendo assim

$$x_{k+1} \geq a_{k+2} - c_{k+2} + \frac{1}{q_{k+1}} \sum_{j=1}^{k+1} (a_j - c_j) q_{j-1} \geq a_{k+2} - c_{k+2} + \frac{a_k q_{k-1}}{q_{k+1}},$$

usando argumento análogo ao caso 1) temos que

$$\frac{1}{2a_{k+1}+1} \leq \frac{a_k q_{k-1}}{q_{k+1}},$$

portanto

$$x_{k+1} \geq a_{k+2} - c_{k+2} + \frac{1}{2a_{k+1}+1}.$$

3) Suponha agora que $c_{k+2} = a_{k+2} - 1$ e $c_{k+1} < a_{k+1}$, sendo assim

$$\begin{aligned} y_{k+2} &= 1 + \frac{q_{k+1} + \sum_{j=1}^{k+1}(a_j - c_j) q_{j-1}}{q_{k+1} + q_k} \\ &\geq 1 + \frac{q_{k+1} + q_k + \sum_{j=1}^{k}(a_j - c_j) q_{j-1}}{q_{k+1} + q_k} \\ &\geq 2 + \frac{a_k q_{k-1}}{q_{k+1} + q_k}. \end{aligned}$$

Note que

$$\frac{a_k q_{k-1}}{q_{k+1} + q_k} = \frac{a_k q_{k-1}}{q_k(a_{k+1}+1) + q_{k-1}} = \frac{a_k}{\frac{q_k}{q_{k-1}}(a_{k+1}+1)+1},$$

como

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = \frac{a_k q_{k-1} + q_{k-2}}{q_{k-1}} \leq a_k + \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} \leq a_k + 1,$$

temos que

$$\frac{a_k q_{k_1}}{q_{k+1} + q_k} \geq \frac{a_k}{(a_k+1)(a_{k+1}+1)+1},$$

uma rápida observação vemos que a função real $f(x) = \frac{x}{(x+1)(a_{k+1}+1)+1}$, $x \geq 0$ é crescente, logo

$$\frac{1}{2(a_{k+1}+1)+1} = f(1) \leq f(a_k) = \frac{a_k}{(a_k+1)(a_{k+1}+1)+1},$$

portanto

$$y_{k+2} \geq 2 + \frac{1}{2(a_{k+1}+1)+1}.$$

Feitas essas considerações podemos enunciar as próximas duas proposições, que correspondem a uma parte do teorema 1.1.

Proposição 4.17. *Se (s,t) é um par de inteiros positivos com $s > 1$, tal que $(s,t) = (a_k, a_{k+1})$ para um número infinitos índices k então*

$$\text{ice}(w) \geq 2 + \frac{1}{2(s+1)(t+1)+1},$$

para todo $w \in X_\alpha$.

Demonstração. Fixe um índice k tal que $a_k > 1$, suponha que $c_{k+1} = a_{k+1}$, nesse caso temos que $c_k = 0$ e

$$y_{k+1} = 1 + \frac{1}{q_{k-1}} \sum_{j=1}^{k} (a_j - c_j) q_{j-1} \geq 1 + a_k,$$

pelo fato de que $a_k > 1$ seque a desigualdade. Agora se $c_{k+1} < a_{k+1}$ independente de $a_k > 1$ ou não, e independente de c_{k+2}, ou seja

$$c_{k+2} = a_{k+2}, \quad c_{k+2} = a_{k+2} - 1 \ \text{ ou } \ a_{k+2} - c_{k+2} \geq 2,$$

pelas observações feitas anteriormente temos que x_{k+1} ou y_{k+2} são sempre maiores ou iguais a

$$2 + \frac{1}{2(s+1)(t+1)+1},$$

sendo assim pela proposição 4.15 podemos concluir que

$$\mathrm{ice}(w) \geq 2 + \frac{1}{2(s+1)(t+1)+1},$$

para todo $w \in X_\alpha$. □

Proposição 4.18. *Se t é um inteiro tal que*

$$(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}) = (1, 1, t),$$

para um número infinito de índices k então

$$\mathrm{ice}(w) \geq 2 + \frac{1}{8t+1},$$

para toda $w \in X_\alpha$.

Demonstração. Fixe k tal que $a_k = a_{k+1} = 1$ e $a_{k+2} = t$, note que, se $c_{k+1} < a_{k+1}$, independente de $a_k > 1$ ou não temos que x_{k+1} ou y_{k+2} é pelo menos

$$\begin{aligned} 2 + \frac{1}{2(a_k+1)(a_{k+1}+1)+1} &= 2 + \frac{1}{9} \\ &\geq 2 + \frac{1}{8a_{k+2}+1} = 2 + \frac{1}{8t+1}. \end{aligned}$$

Agora se $c_{k+1} = a_{k+1}$ então $c_{k+2} < a_{k+2}$ e temos três possibilidades para c_{k+3}

$$c_{k+3} = a_{k+3}, \quad c_{k+3} = a_{k+3} - 1 \ \text{ ou } \ a_{k+3} - c_{k+3} \geq 2,$$

de onde podemos concluímos que, x_{k+2} ou y_{k+3} é pelo menos

$$\begin{aligned} 2+\frac{1}{2(a_{k+1}+1)(a_{k+2}+1)+1} &= 2+\frac{1}{4(a_{k+2}+1)+1} \\ &\geq 2+\frac{1}{8a_{k+2}+1}=2+\frac{1}{8t+1}. \end{aligned}$$

□

Conclusão, se existe $w \in X_\alpha$ tal que $\operatorname{ice}(w)=2$ então não existe um par de inteiros (s,t) com $s>1$ tais que,

$$(a_k, a_{k+1}) = (s,t) \text{ ou } (a_k, a_{k+1}, a_{k+2}) = (1,1,t)$$

para infinitos índices k.

Dado os quocientes parciais a_k de α queremos escolher $c=(c_k)$ satisfazendo as condições de admissibilidade de modo a minimizar $\operatorname{ice}(\Psi^{-1}(c))$ usando o teorema 4.15. Comecemos com algumas observações. Se $a_k - c_k \geq 3$ para um número infinitos de índices k então $\operatorname{ice}(w) \geq 3$, onde $w=\Psi^{-1}(c)$, portanto para que $\operatorname{ice}(w)$ esteja entre 2 e 3 devemos considerar sequências tais que $a_k - c_k \geq 3$ apenas um número finito de vezes. Agora dado $c=\Psi(w)$ podemos construir uma nova sequência c' dada por

$$c'_k = \begin{cases} c_k, & \text{se } a_k = c_k \text{ ou } a_{k+1} = c_{k+1} \\ a_k - 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que $c' \in K_\alpha$ ou seja c' satisfaz as condições de admissibilidade, logo $c'=\Psi(w')$ para alguma $w' \in X_\alpha$, como $c'_k \geq c_k$ para todo k temos que

$$\operatorname{ice}(w') \leq \operatorname{ice}(w).$$

Consequentemente, para minimizar a função ice sobre X_α, precisamos considerar apenas sequências onde para cada k temos

1) $c_k \in \{0, a_k, a_k - 1\}$,

2) se $c_k = 0$ então $a_{k+1} = c_{k+1}$ ou $a_k = 1$,

3) se $a_k \geq 2$ então $c_k > 0$ ou seja $c_{k+1} < a_{k+1}$.

Proposição 4.19. *Se para cada par de inteiros (s,t) com $s>1$, existem no máximo um número finito de índices tais que*

$$(a_k, a_{k+1}) = (s,t) \;\; \textit{ou} \;\; (a_k, a_{k+1}, a_{k+2}) = (1,1,t),$$

então existe $w \in X_\alpha$ tal que $\operatorname{ice}(w)=2$.

Demonstração. A ideia é construir uma sequência $c = (c_k)$ tal que a sequência $w = \Psi^{-1}(c)$ possua ice igual a 2. Por hipótese em particular existe k_0 tal que se $k \geq k_0$ então $(1, 1, 1)$ não ocorre em (a_k), como

$$\limsup \max\{x'_k, y_k\} = \limsup_{k \geq k_0} \max\{x'_k, y_k\},$$

ou seja $\operatorname{ice}(w)$ independe de uma parte finita de c, considere então a seguinte sequência

$$c_k = \begin{cases} a_k - 1, & \text{se } a_k > 1, a_{k-1} > 1 \\ a_k - 1, & \text{se } a_k > 1, a_{k-1} = a_{k-2} = 1 \\ a_k, & \text{se } a_k > 1, a_{k-1} = 1, a_{k-2} > 1 \\ 0, & \text{se } a_k = 1, a_{k-1} > 1 \\ a_k, & \text{se } a_k = 1, a_{k-1} = 1 \end{cases}$$

para $k \geq k_0$ e para $1 \leq k < k_0$ use qualquer um que satisfaça as condições de admissibilidade. Se $a_k = c_k$ para $k \geq k_0$ temos duas possibilidades, a primeira, $a_k > 1$,$a_{k-1} = 1$ e $a_{k-2} > 1$ ou seja $c_{k-2} = 0$, a segunda possibilidade é que, $a_k = a_{k-1} = 1$ e portanto $a_{k-2} > 1$ logo $c_{k-1} = 0$, ou seja, a sequência (c_k) satisfaz as condições de admissibilidade ou seja define uma sequência Sturmiana w. Note que $c_k \in \{0, 1\}$ para todo $k \geq 1$, portanto $x'_k \leq y_k$ para todo $k \geq 1$.

Suponha que $\operatorname{ice}(w) > 2$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$2 + \varepsilon \leq y_k \leq \operatorname{ice}(w) = \limsup y_k,$$

para infinitos índices k, note também que qualquer $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$ também satisfaz esta condição. Note agora que uma das quatro configurações ocorre infinitas vezes

1) $c_k = a_k - 1$,

2) $c_k = a_k$ com $a_k > 1$,

3) $c_k = a_k$ com $a_k = 1$,

4) $c_k = 0$.

Uma das quatro configurações ocorre simultaneamente com

$$2 + \varepsilon \leq y_k \leq \operatorname{ice}(w) = \limsup y_k,$$

Vamos analisar as quatro possibilidades. Caso 1: Suponha que $c_k = a_k - 1$, então para infinitos índices k temos que

$$2 + \varepsilon \leq y_k \leq 1 + \frac{1}{q_{k-1} + q_{k-2}} \left(q_{k-1} + \sum_{j=1}^{k-1} (a_j - c_j) q_{j-1} \right),$$

como $a_k - c_k \leq 1$ temos que

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)(q_{k-1}+q_{k-2}) &\leq q_{k-1}+\sum_{j=1}^{k-1} q_{j-1} = q_{k-1}+q_{k-2}+q_{k-3}+\sum_{j=1}^{k-4} q_{j-1}\\ &\leq q_{k-1}+q_{k-2}+q_{k-3}+\sum_{j=1}^{k-4} a_j q_{j-1} = q_{k-1}+q_{k-2}+2q_{k-3}+q_{j-4},\end{aligned}$$

ou seja

$$\varepsilon(q_{k-1}+q_{k-2}) \leq 2q_{k-3}+q_{k-4},$$

e portanto

$$\varepsilon(a_{k-1}q_{k-2}+a_{k-2}q_{k-3}) \leq 3q_{k-3} \leq 3q_{k-2},$$

em particular

$$\varepsilon(a_{k-1}q_{k-2}) \leq 3q_{k-2} \Leftrightarrow a_{k-1} \leq \frac{3}{\varepsilon},$$

e

$$\varepsilon(a_{k-2}q_{k-3}) \leq 3q_{k-3} \Leftrightarrow a_{k-2} \leq \frac{3}{\varepsilon},$$

para infinitos índices k, logo existem um par de inteiros (s,t) tal que

$$(a_{k-2}, a_{k-1}) = (s,t),$$

para infinitos índices, logo pela hipótese feita sobre α devemos ter $s = 1$. Temos dois casos a considerar.

1.1) Se $s = t = 1$ então para infinitos índices temos que $a_{k-2} = a_{k-1} = 1$ e portanto $c_{k-1} = a_{k-1}$ e $c_{k-2} = 0$, temos também que $a_{k-3} > 0$ logo $c_{k-3} \geq a_{k-3} - 1$ e

$$\begin{aligned}2+\varepsilon &\leq y_k = 1+\frac{1}{q_{k-1}+q_{k-2}}\sum_{j=1}^{k}(a_j-c_j)q_{j-1}\\ &= 1+\frac{1}{q_{k-1}+q_{k-2}}\left(q_{k-1}+q_{k-3}+q_{k-4}+\sum_{j=1}^{k-4}(a_j-c_j)q_{j-1}\right)\\ &\leq 1+\frac{1}{q_{k-1}+q_{k-2}}\left(q_{k-1}+q_{k-2}+\sum_{j=1}^{k-4}a_j q_{j-1}\right),\end{aligned}$$

logo

$$\varepsilon(q_{k-1}+q_{k-2}) \leq 2q_{k-4},$$

como

$$q_{k-1}+q_{k-2} = q_{k-2}+q_{k-3}+q_{k-3}+q_{k-4} = 3q_{k-3}+2q_{k-4} \geq (3a_{k-1}+2)q_{k-4},$$

temos que

$$\varepsilon(3a_{k-3}+2)q_{k-4} \leq 2q_{k-4} \Leftrightarrow a_{k-3} \leq \frac{2(1-\varepsilon)}{3\varepsilon},$$

para infinitos índices, logo existe um inteiro s' tal que

$$(a_{k-3}, a_{k-2}, a_{k-1}) = (s', 1, 1),$$

para infinitos índices, uma contradição com a hipótese.

1.2) Se $s = 1$ e $t > 1$ então para infinitos índices devemos ter $a_{k-2} = 1$,$a_{k-1} = t > 1$ e podemos assumir que $a_{k-3} > 1$ pois a terna $(1, 1, t)$ ocorre no máximo um número finito de vezes, portanto $c_{k-1} = a_{k-1}$ e $c_{k-2} = 0$, neste caso temos que

$$\begin{aligned} 2+\varepsilon &\leq y_k = 1 + \frac{1}{q_{k-1}+q_{k-2}} \sum_{j=1}^{k} (a_j - c_j) q_{j-1} \\ &= 1 + \frac{1}{q_{k-1}+q_{k-2}} \left(q_{k-1} + q_{k-3} + q_{k-4} + \sum_{j=1}^{k-4} (a_j - c_j) q_{j-1} \right) \\ &\leq 1 + \frac{1}{q_{k-1}+q_{k-2}} \left(q_{k-1} + q_{k-2} + \sum_{j=1}^{k-4} a_j q_{j-1} \right), \end{aligned}$$

logo

$$\varepsilon(q_{k-1}+q_{k-2}) \leq 2q_{k-4},$$

como

$$q_{k-1}+q_{k-2} = tq_{k-2} + q_{k-3} + q_{k-3} + q_{k-4} = (t+2)q_{k-3} + (t+1)q_{k-4},$$

temos que

$$\varepsilon(a_{k-3}(t+2)+(t+1))q_{k-4} \leq 2q_{k-4} \Leftrightarrow a_{k-3} \leq \frac{2-\varepsilon(t+1)}{\varepsilon(t+2)},$$

para infinitos índices, logo existe um inteiro t' tal que

$$(a_{k-3}, a_{k-2}, a_{k-1}) = (t', 1, t),$$

para infinitos índices, de novo uma contradição com a hipótese.

Caso 2) Suponha que $c_k = a_k$ com $a_k > 1$, neste caso $a_{k-1} = 1$ e $a_{k-2} > 1$ e $c_{k-1} = 0$. Para infinitos índices k temos que

$$\begin{aligned} 2+\varepsilon &\leq y_k = 1 + \frac{1}{q_{k-2}} \sum_{j=1}^{k} (a_j - c_j) q_{j-1} \\ &= 1 + \frac{1}{q_{k-2}} \left(q_{k-2} + \sum_{j=1}^{k-2} (a_j - c_j) q_{j-1} \right), \end{aligned}$$

podemos concluir que

$$\varepsilon q_{k-2} \leq q_{k-3} + \sum_{j=1}^{k-3} a_j q_{j-1} \leq 3q_{k-3},$$

e portanto

$$\varepsilon a_{k-2} q_{k-3} \leq 3q_{k-3} \Leftrightarrow a_{k-2} \leq \frac{3}{\varepsilon},$$

para infinitos índices k, logo existe um inteiro $s > 1$ tal que

$$(a_{k-2}, a_{k-1}) = (s, 1),$$

par infinitos índices, contradição com a hipótese.

Caso $3)$ Suponha que $c_k = a_k = 1$, neste caso $a_{k-1} = 1$ e portanto $a_{k-2} > 1$ e $c_{k-1} = 0$. Para infinitos índices k temos que

$$\begin{aligned} 2 + \varepsilon &\leq y_k = 1 + \frac{1}{q_{k-2}} \sum_{j=1}^{k} (a_j - c_j) q_{j-1} \\ &= 1 + \frac{1}{q_{k-2}} \left(q_{k-2} + \sum_{j=1}^{k-2} (a_j - c_j) q_{j-1} \right), \end{aligned}$$

podemos concluir que

$$\varepsilon q_{k-2} \leq q_{k-3} + \sum_{j=1}^{k-3} a_j q_{j-1} \leq 3q_{k-3},$$

e portanto

$$\varepsilon a_{k-2} q_{k-3} \leq 3q_{k-3} \Leftrightarrow a_{k-2} \leq \frac{3}{\varepsilon},$$

para infinitos índices k, logo existe um inteiro $s > 1$ tal que

$$(a_{k-2}, a_{k-1}) = (s, 1),$$

para infinitos índices, outra contradição com a hipótese.

Caso $4)$ Suponha que $c_k = 0$ então $a_k = 1$ e $a_{k-1} > 1$. Para infinitos índices k temos que

$$\begin{aligned} 2 + \varepsilon &\leq y_k = 1 + \frac{1}{q_k} \sum_{j=1}^{k} (a_j - c_j) q_{j-1} \\ &\leq 1 + \frac{1}{q_k} \left(q_{k-1} + q_{k-2} + \sum_{j=1}^{k-2} (a_j - c_j) q_{j-1} \right), \end{aligned}$$

de onde podemos concluir que

$$\varepsilon q_k \leq q_{k-2} + q_{k-3} \leq 2q_{k-2},$$

portanto

$$\varepsilon(a_{k-1}+1)q_{k-2} = \varepsilon(q_{k-1}+q_{k-2}-q_{k-3}) \leq \varepsilon(q_{k-1}+q_{k-2} \leq 3q_{k-2},$$

ou seja $a_{k-1} \leq \frac{1}{\varepsilon}$ para infinitos índices k, logo existe um inteiro $s > 1$ tal que

$$(a_{k-1}, a_k) = (s, 1),$$

para infinitos índices, uma contradição.

$\square$

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho estudamos o expoente inicial crítico de uma sequência Sturmiana w. Inicialmente obtemos duas representações para uma sequência Sturmiana denominadas representação S-ádica aditiva e multiplicativa, representações que foram usadas no cálculo de potências de prefixo.

No Capítulo 4 é mostrado que cada sequência Sturmiana começa em infinitos quadrados, e portanto o expoente inicial crítico de qualquer sequências Sturmiana é maior ou igual a 2. Mostramos que o valor 2 é atingível, e caracterizamos os irracionais α para o qual exista uma sequência Sturmiana de inclinação α com expoente inicial crítico igual a 2.

Na Seção 4.2 obtemos uma fórmula explícita para o expoente inicial crítico de uma sequência Sturmiana w em termos da expansão de S-ádica multiplicativa, e usamos esta fórmula para demonstrar o Teorema 1.2, que relaciona o expoente inicial crítico da sequência característica w^* com o limite superior (em n) das potências de qualquer palavra de comprimento n ocorrendo na sequência w.

REFERÊNCIAS

[1] ADAMCZEWSKI, B., AND ALLOUCHE, J. Reversals and palindromes in continued fractions. *Theoretical Computer Science 380* (2007), 220–237.

[2] ALLOUCHE, J., DAVISON, J., QUEFFÉLLEC, M., AND ZAMBONI, L. Transcendence of Sturmian or morphic continued fractions. *Journal of Number Theory 91* (2001), 39–66.

[3] ARNOUX, P., FERENCZI, S., AND HUBERT, P. Trajectories of rotations. *Acta. Arith. 87* (1999), 209–217.

[4] BARAT, G., AND LIARDET, P. Dynamic properties of the Ostrowski α-expansion. *Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. 24* (2004), 133–184.

[5] BERTHÉ, V., HOLTON, C., AND ZAMBONI, L. Initial powers of Sturmian sequences. *Acta Arithmetica 122* (2006), 315–347.

[6] CASSAIGNE, J. Limit values of the recurrence quotient in Sturmian sequences. *Theoret. Comput. Science. 218* (1999), 3–12.

[7] DÍAZ, L., AND JORGE, D. *Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos via Frações Contínuas*. IMPA, 2007.

[8] FURSTENBERG, H. *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*. Princeton University Press, New Jersey, 1981.

[9] GRABNER, P., LIARDET, P., AND TICHY, R. Odometers and systems of numeration. *Acta Arith. 70* (1995), 103–123.

[10] J.SHALLIT. Characteristic words as fixed points of homomorphisms. Tech. Rep. N2L 3G1, Department of Computer Science, University of Waterloo, 1991.

[11] KEANE, M. Inteval exchange transformations. *Math. Zeitschrift 141* (1975), 25–31.

[12] MARTINEZ, F. B., MOREIRA, C. G., SALDANHA, N., AND TENGAN, E. *Teoria dos Números*, 2a ed. IMPA, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2011.

[13] MORSE, M., AND HEDLUND, G. A. Symbolic dynamics II, Sturmian trajectories. *Amer. J. Math. 62* (1940), 1–42.

[14] VANDETH, D. Infinite words with linear subword complexity. *Theoret. Comput. Science 65* (1989), 221–242.

[15] VANDETH, D. Sturmian words and words with a critical exponent. *Theoret. Comput. Science 380* (2000), 283–300.