



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

RODRIGO VINÍCIUS DA COSTA

**MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS MORFOLÓGICAS
BROUWERIANAS**

Londrina

2013

RODRIGO VINÍCIUS DA COSTA

**MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS MORFOLÓGICAS
BROUWERIANAS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Eduardo Ribeiro
do Valle Mesquita

Londrina
2013

RODRIGO VINÍCIUS DA COSTA

**MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS MORFOLÓGICAS
BROUWERIANAS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcos E. R. Valle Mesquita
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Benjamín René C. Bedregal
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Naresh Kumar Sharma
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 26 de Fevereiro de 2013.

*À minha avó,
Rosa de Lourdes Duro Vasques.*

AGRADECIMENTOS

À Ana Paula, pelo carinho e compreensão em todos os momentos.

Ao meu orientador, Marcos Eduardo Valle, pela excelente orientação.

Aos meus colegas, Adriano, Camila, Carol, Cibele, Claudia, Giuliane, Rafael e Valter pela agradável convivência.

Aos professores do PGMAC que contribuíram para a minha formação.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

COSTA, Rodrigo Vinícius. **Memórias Associativas Morfológicas Brouwerianas**. 2013. 70f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

RESUMO

Memórias associativas são modelos inspirados na habilidade do cérebro humano de recordar por associação. Estes modelos tem sido aplicados com sucesso em diversas áreas incluindo processamento de imagem, controle e previsão de séries temporais. Nesta dissertação introduzimos a classe das memórias associativas morfológicas Brouwerianas (BMAMs), que são redes neurais morfológicas definidas num reticulado completo Brouweriano. A memória associativa *fuzzy* implicativa de Gödel é um exemplo de BMAM definida no reticulado completo $[0, 1]$. Resultados teóricos sobre a convergência e capacidade de armazenamento das BMAMs são enunciados. Também caracterizamos os padrões recordados por uma BMAM em termos dos seus pontos fixos. Por fim, usamos um sistema *fuzzy* no espaço de cor HSV para introduzir uma BMAM para o armazenamento e recordação de imagens coloridas. A tolerância da nova memória com respeito a ruídos Gaussiano, impulsivo e *pepper* são investigadas por meio de experimentos computacionais.

Palavras-chave: Memória associativa. Rede neural artificial. Reticulado completo Brouweriano. Morfologia matemática. Sistema *fuzzy*. Processamento de imagem colorida.

COSTA, Rodrigo Vinícius. **Brouwerians Morphological Associative Memories..** 2013. 70f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

ABSTRACT

Associative memories are models inspired in the human brain ability to recall by association. These models have been applied successfully in many areas including image processing, control, and time series prediction. In this dissertation, we introduce the class of Brouwerian morphological associative memories (BMAMs), which are morphological neural networks defined in a complete Brouwerian lattice. The implicative fuzzy associative memory of Gödel is an instance of BMAM defined on the complete lattice $[0, 1]$. Theoretical results concerning the convergence and the storage capacity of BMAMs are given. We also characterize the patterns recalled by a BMAM in terms of its fixed points. Finally, we use a fuzzy system on the HSV color space to introduce a BMAM for the storage and recall of color images. The tolerance of the novel memory with respect to Gaussian, impulsive, and pepper noise are investigated by means of computational experiments.

Keywords: Associative memory. Artificial neural network. Complete Brouwerian lattice. Mathematical morphology. Fuzzy system. Color image processing.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	15
2	LÓGICA E CONJUNTOS FUZZY	17
2.1	OPERADORES DA LÓGICA FUZZY	18
2.2	RELAÇÕES FUZZY	19
2.3	SISTEMAS BASEADOS EM REGRAS <i>Fuzzy</i>	20
2.3.1	Método de Mamdani	22
2.3.2	Defuzificação	23
3	MORFOLOGIA MATEMÁTICA	25
3.1	MORFOLOGIA MATEMÁTICA EM RETICULADOS COMPLETOS	25
3.1.1	Reticulados Brouwerianos	26
3.1.2	Operadores em Reticulados Completos	27
3.2	MORFOLOGIA MATEMÁTICA BINÁRIA	28
3.3	MORFOLOGIA MATEMÁTICA EM TONS DE CINZA	31
3.3.1	Abordagem da Umbra	31
3.3.2	Abordagem do Threshold e Level Set	34
3.4	MORFOLOGIA MATEMÁTICA PARA IMAGENS COLORIDAS	37
3.4.1	Modelo de Louverdis para Morfologia Matemática Coloridas	39
4	MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS MORFOLÓGICAS	45
4.1	MAMs DE RITTER E SUSSNER	46
4.2	IFAM DE GÖDEL	48
4.3	MEMÓRIAS AUTO-ASSOCIATIVAS ESPARSAS EM RETICULADOS COMPLETOS	50
5	MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS MORFOLÓGICAS BROUWERIANAS	52
5.1	MAMs BROUWERIANAS PARA IMAGENS COLORIDAS	57
6	CONCLUSÃO	63
	REFERÊNCIAS	65

LISTA DE FIGURAS

3.1	Imagem Binária, Elemento estruturante, Dilatação e Erosão binárias.	30
3.2	Abertura, fechamento e gradiente morfológico da imagem pelo elemento estruturante apresentados na Figura 3.1.	31
3.3	Imagem em tons de cinza, elemento estruturante, dilatação e erosão da imagem pelo elemento estruturante utilizando a abordagem da umbra.	34
3.4	Abertura, fechamento e complemento do gradiente morfológico da imagem pelo elemento estruturante apresentados na Figura 3.1 utilizando a abordagem da umbra.	35
3.5	Imagem em tons de cinza, elemento estruturante, dilatação e erosão da abordagem <i>level sets</i>	37
3.6	Abertura, fechamento e complemento do gradiente morfológico da imagem pelo elemento estruturante apresentados na Figura 3.5 utilizando a abordagem <i>level sets</i>	38
3.7	Interpretação geométrica do sistema de cores HSV.	38
3.8	Conjuntos <i>fuzzy</i> que descrevem as cromaticidades <i>vermelho, amarelo, verde, ciano, azul e magenta</i>	39
3.9	Conjuntos <i>fuzzy</i> que descrevem os conceitos <i>pequeno, médio e grade</i>	39
3.10	Conjuntos <i>fuzzy</i> L1, L2, L3, ..., L54 no universo do plano ordenado.	40
3.11	(a) Imagem colorida 512×512 pixels, (b) dilatação da abordagem baseada no reticulado \mathbb{V}_{fHSV} e (c) erosão da abordagem baseada no reticulado \mathbb{V}_{fHSV}	44
3.12	Abertura, fechamento e gradiente morfológico da imagem apresentada na Figura 3.11.	44
5.1	Relações entre as MAMs.	57
5.2	Imagens coloridas originais utilizadas nos experimentos computacionais	58
5.3	Gráfico das médias e desvios padrões dos ΔE_{ab}^* entre: Imagens originais e ruidosas em preto e imagens originais e recordadas pela BMAM em azul.	60
5.4	Comparação entre as iterações da BMAM. Em azul o ΔE_{ab}^* da imagem recordada na primeira iteração pala imagem original, em rosa o ΔE_{ab}^* da imagem recordada na quinta iteração pala imagem original.	60
5.5	(a) Imagem x^8 , (b) imagem \tilde{x}^8 com ruído tipo pepper com probabilidade de 0.05, (c) imagem recordada pela BMAM \mathcal{W}_1 , (d) imagem recordada pela BMAM \mathcal{W}_5	61

5.6	Gráfico das médias e desvios padrões dos ΔE_{ab}^* entre: Imagens originais e ruidosas em preto, Imagens originais e recordadas pela BMAM em azul e Imagens originais e recordadas pela QAM.	62
5.7	Gráfico das médias e desvios padrões dos ΔE_{ab}^* entre: Imagens originais e ruidosas em preto, Imagens originais e recordadas pela BMAM em azul e Imagens originais e recordadas pela QAM.	62

LISTA DE SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

χ	Função característica de um conjunto.
μ	Função de pertinência de um conjunto <i>fuzzy</i>
t	Norma triangular
s	Co-norma triangular
\Rightarrow_m	Implicação <i>fuzzy</i> de Gödel
\vee	Supremo de um conjunto
\wedge	Ínfimo de um conjunto
\mathbb{L}	Reticulado
$/$	Operação resíduo em um reticulado completo Brouweriano
\mathbb{X}	Espaço euclidiano \mathbb{R}^d ou espaço digital \mathbb{Z}^d
\mathbb{V}	Conjunto dos valores das imagens
δ	Dilatação em um reticulado completo arbitrário
ε	Erosão em um reticulado completo arbitrário.
\oplus_b	Dilatação Binária
\ominus_b	Erosão Binária
\oplus_g	Dilatação de Imagens em Tons de Cinza pela abordagem da umbra
\ominus_g	Erosão de Imagens em Tons de Cinza pela abordagem da umbra
\oplus_t	Dilatação de Imagens em Tons de Cinza pela abordagem do <i>threshold</i>
\ominus_t	Erosão de Imagens em Tons de Cinza pela abordagem do <i>threshold</i>
\oplus_l	Dilatação de Imagens em Tons de Cinza pela abordagem <i>level sets</i>
\ominus_l	Erosão de Imagens em Tons de Cinza pela abordagem <i>level sets</i>
\oplus_c	Dilatação de Imagens coloridas com ordem do reticulado \mathbb{V}_{fHSV}
\ominus_c	Erosão de Imagens coloridas com ordem do reticulado \mathbb{V}_{fHSV}
$\mathcal{U}(\mathbf{g})$	Umbra de uma imagem \mathbf{g}

\mathbf{T} Topo de um conjunto

\mathbb{V}_{HSV} Conjunto das cores no sistema de cor HSV

\mathbb{V}_{fHSV} Reticulado completo Brouweriano $fHSV$

\mathcal{W}_{XY} Memórias Associativas Morfológicas de Ritter e Sussner baseadas no produto máximo

\mathcal{M}_{XY} Memórias Associativas Morfológicas de Ritter e Sussner baseadas no produto mínimo

$\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ Memórias Associativas *Fuzzy*

$\mathcal{W}_{\gamma\gamma}$ MAERCs baseadas no supremo

$\mathcal{M}_{\gamma\gamma}$ MAERCs baseadas no ínfimo

\mathcal{W}_t Modelo t-iterações da MAM Brouweriana

\mathcal{W}_* Modelo convergente da MAM Brouweriana

1 INTRODUÇÃO

Redes neurais artificiais são modelos matemáticos inspirados no cérebro humano, onde a unidade básica de processamento é o neurônio. Diversos modelos de redes neurais artificiais tem sido desenvolvidos para modelar as habilidades do cérebro. Uma das habilidades do cérebro, chamada *memória associativa*, refere-se à capacidade de recordarmos informações por associação [17, 23].

Os modelos de memórias associativas são desenvolvidos para armazenar e, posteriormente, recordar um conjunto de associações $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, p\}$, chamado conjunto das memórias fundamentais. As memórias associativas encontram aplicações em vários ramos da ciência. Por exemplo, as AMs foram aplicadas em problemas de detecção de falhas de motores [29], segurança de rede [69], reconhecimento e classificação de padrões [71, 72].

A Morfologia Matemática (MM) é uma teoria empregada no processamento e análise de objetos ou imagens [46, 51]. Seu desenvolvimento começou a ser formalizado na França nos anos 60 por Matheron e Serra, que se basearam nos trabalhos de Minkowski e Hadwiger para criar a morfologia matemática binária [30, 46]. Matheron e Serra buscavam criar um conjunto de ferramentas para extrair informações geométricas no estudo de imagens binárias.

Nos anos 80, várias abordagens foram desenvolvidas para generalizar a MM binária para imagens em tons de cinza. Por exemplo, a abordagem da umbra foi desenvolvida por Sternberg enquanto que uma abordagem baseada no conceito de *threshold* foi introduzida por Serra [52, 46]. Do ponto de vista teórico, tanto a MM binária como as abordagens em tons de cinza, podem ser conduzidas numa estrutura matemática chamada reticulado completo [18, 45].

Ritter e Sussner introduziram, em meados dos anos 1990, os primeiros modelos de memórias associativas baseadas na MM, referidos como Memórias Associativas Morfológicas (MAMs) tradicionais [38, 39]. Especificamente, os neurônios das MAMs tradicionais efetuam generalizações das operações da abordagem umbra para a MM em tons de cinza. Em termos gerais, a principal diferença entre os modelos clássicos de memórias associativas e os modelos morfológicos está em utilizar as operações baseadas em reticulados no lugar das operações usuais de multiplicação de matrizes [39].

Matematicamente, as MAMs tradicionais são definidas em uma extensão de reticulado completo com ordem de grupo, que além da estrutura de reticulado completo, precisa ser um grupo. As Memórias Auto-associativas Esparsas em Reticulados Completos (MAERCs), introduzidas por Valle em [60] e estudadas por Grande Vicente em [67], são baseadas em operações da abordagem *threshold* da MM, por isso são definidas em reticulados completos, dispensando a estrutura de l-grupo.

As memórias associativas *fuzzy* implicativas (IFAM, do termo inglês *implica-*

tive fuzzy associative memories), introduzidas por Valle e Sussner são definidas utilizando operações da lógica *fuzzy* [56, 63]. Um exemplo de IFAM é a IFAM de Gödel que utiliza a implicação *fuzzy* de Gödel. A IFAM de Gödel efetua uma operação da abordagem *level sets* da MM no reticulado completo $[0, 1]$.

Nesta dissertação apresentamos as MAMs Brouwerianas, que é um novo modelo de MAMs baseada na abordagem *level sets* da MM; que requer um reticulado completo Brouweriano. As MAMs Brouwerianas generalizam a IFAM de Gödel e a MAERC baseada no supremo.

Também apresentamos uma MAM Brouweriana para imagens coloridas. Uma grande dificuldade para estender a MM para imagens coloridas é criar uma ordem entre as cores, ou seja, introduzir uma relação de ordem no conjunto das cores de modo que se torne um reticulado completo.

Em particular, Louverdis *et al.* desenvolveram um novo modelo *fuzzy* de operadores morfológicos para imagens coloridas [27]. Especificamente, eles introduziram operadores de dilatação e erosão menos sensíveis a distorções na imagem que as outras abordagens morfológicas. Esses operadores são definidos utilizando uma ordem entre as cores baseada num sistema de regras *fuzzy se-então* e o espaço de cor HSV.

Baseado no sistema de regras *fuzzy se-então* de Louverdis *et al.* definimos uma ordem entre as cores que resulta em um reticulado completo Brouweriano no sistema de cores HSV. Realizamos diversos experimentos computacionais com uma MAM Brouweriana para imagens coloridas definidas nesse reticulado completo Brouweriano.

1.1 OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Nesta dissertação apresentaremos as memórias associativas morfológicas Brouwerianas, que é uma generalização de uma das memórias associativas esparsas em reticulados completos e de uma memória associativa *fuzzy* implicativa. Utilizaremos um sistema baseado em regras *fuzzy* para desenvolver uma ordem entre cores que gere um reticulado completo Brouweriano para imagens coloridas, onde poderemos desenvolver uma MAM Brouweriana que armazene e recorde imagens coloridas.

A dissertação esta organizada da seguinte maneira:

No capítulo 2 revisaremos os principais conceitos da lógica e da teoria de conjuntos *fuzzy*, os principais operadores da lógica *fuzzy*, as relações *fuzzy* e sistemas baseados em regras *fuzzy*.

No capítulo 3 revisaremos os principais conceitos da morfologia matemática, que se desenvolve em reticulados completos. Além dos principais operadores em reticulados completos, revisaremos a definição de reticulados Brouwerianos desenvolvida por Brouwer e Heyting. No capítulo 3 também apresentaremos um reticulado completo Brouweriano para imagens coloridas utilizando um sistema de regras *fuzzy* inspirado na abordagem de Louverdis

et al.

No capítulo 4 revisaremos as MAMs, começando pelas MAMs de Ritter e Sussner e, posteriormente, as memórias associativas *fuzzy* implicativas, dando principal ênfase à memória associativa *fuzzy* implicativa de Gödel e as memórias associativas esparsas em reticulados completos.

No capítulo 5, introduziremos as MAMs Brouwerianas que generaliza os modelos das memórias associativas *fuzzy* implicativas baseados no supremo. Apresentamos resultados teóricos das MAMs Brouwerianas. Também introduziremos uma memória associativa morfológica Brouweriana para imagens coloridas e faremos experimentos computacionais para avaliar se o modelo tem tolerância à ruídos gaussiano, impulsivo e *pepper*.

A dissertação termina com a conclusão no capítulo 6 e as referências.

2 LÓGICA E CONJUNTOS FUZZY

Neste capítulo revisaremos os conceitos fundamentais da lógica e da teoria dos conjuntos *fuzzy*. A noção de conjuntos *fuzzy* é altamente intuitiva e transparente, pois captura a essência da maneira como o mundo real é percebido e descrito [35].

A teoria dos conjuntos *fuzzy* foi introduzida por Zadeh em meados de 1960 e pode ser usada para modelar conceitos que não são bem definidos ou são imprecisos, por exemplo, a noção de “pessoa jovem”, “erro pequeno”, etc. [22, 32, 35, 70].

Na teoria clássica de conjuntos, dado um universo de discurso U e um conjunto $A \subset U$, um elemento x ou pertence a A ou não pertence. Por exemplo, o número 2 pertence ao conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, e o número (-2) não pertence.

Um conjunto A pode ser caracterizado por uma função $\chi_A : U \rightarrow \{0, 1\}$, chamada função característica, dada por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases} \quad (2.1)$$

Ao utilizar a linguagem cotidiana natural para transmitir conhecimento e informação, há uma grande dose de imprecisão e indefinição [32]. Por exemplo, se dizemos que no conjunto das pessoas altas estão as pessoas com mais de 1,80 metros, uma pessoa com mais de dois metros é alta, assim como uma pessoa com 1,81 metros. Porém, uma pessoa com 1,79 metros não seria considerada alta, apesar de ser quase imperceptível a diferença entre 1,79 e 1,81 metros. Neste momento, a linguagem cotidiana resolve dizendo que a pessoa com 2 metros é muito alta e as pessoas de 1,79 ou 1,81 metros são altas.

A teoria dos conjuntos *fuzzy* captura essa característica da linguagem natural. Dizemos que x tem um determinado grau de pertinência a um conjunto, podendo ter um grau de pertinência que varia entre 0 (que representa que x não pertence ao conjunto) e 1 (que representa que x pertence totalmente ao conjunto).

Um conjunto *fuzzy* A , também chamado conjunto nebuloso ou conjunto difuso, é caracterizado por uma função de pertinência μ_A de um universo de discurso U no intervalo unitário $[0, 1]$. Note que, se U é um conjunto finito, o conjunto A pode ser representado por um vetor coluna, isto é, se $U = \{u_1, \dots, u_n\}$, então A pode ser representado por $[a_1, \dots, a_n]^T$, onde $a_i = \mu_A(u_i)$.

Qualquer função $\mu : U \rightarrow [0, 1]$ torna-se potencialmente elegível para representar uma função de pertinência do conjunto A . Porém, na prática, o tipo e a forma da função de pertinência deve refletir o tipo de aplicação e a natureza do problema que pretendemos resolver [35].

A teoria dos conjuntos *fuzzy* estende a teoria clássica de conjuntos. Muitas

operações com conjuntos *fuzzy*, incluindo as operações de união e intersecção, são modeladas através de operadores da lógica *fuzzy* [22, 32, 35].

2.1 OPERADORES DA LÓGICA FUZZY

A norma triangular, ou simplesmente t-norma, generaliza o operador lógico “E”, enquanto que a co-norma triangular, ou s-norma, generaliza o operador “OU”. As t-normas e s-normas oferecem uma classe geral de operadores de intersecção e união [35].

Definição 2.1 (Norma triangular [35]). *Uma norma triangular ou t-norma, é uma operação binária $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Comutatividade: $a \ t \ b = b \ t \ a$;*
2. *Associatividade: $a \ t \ (b \ t \ c) = (a \ t \ b) \ t \ c$;*
3. *Monotonicidade: se $b \leq c$, então $a \ t \ b \leq a \ t \ c$;*
4. *Condições de fronteira: $a \ t \ 1 = a$,*

onde $a, b, c \in [0, 1]$.

Exemplos de t-normas:

Exemplo 2.2. Mínimo: $a \ t_m \ b = a \wedge b = \min(a, b)$.

Exemplo 2.3. Produto: $a \ t_p \ b = ab$.

Exemplo 2.4. Lukasiewicz: $a \ t_l \ b = (a + b - 1) \vee 0 = \max(a + b - 1, 0)$.

As co-normas podem ser vistas como operadores duais das t-normas e, como tal, explicitamente definidas com o uso das leis de De Morgan [35]. Podemos também caracterizá-las de forma independentes utilizando a seguinte definição:

Definição 2.5 (Co-norma triangular [35]). *Uma co-norma triangular, ou s-norma, é uma operação binária $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Comutatividade: $a \ s \ b = b \ s \ a$;*
2. *Associatividade: $a \ s \ (b \ s \ c) = (a \ s \ b) \ s \ c$;*
3. *Monotonicidade: se $b \leq c$, então $a \ s \ b \leq a \ s \ c$;*
4. *Condições de fronteira: $a \ s \ 0 = a$,*

onde $a, b, c \in [0, 1]$.

Exemplos de s-normas:

Exemplo 2.6. Máximo: $a \text{ s}_m b = a \vee b = \max(a, b)$.

Exemplo 2.7. Soma probabilística: $a \text{ s}_p b = a + b - ab$.

Exemplo 2.8. Lukasiewicz: $a \text{ s}_l b = (a + b) \wedge 1 = \min(a + b, 1)$.

Na lógica clássica, a implicação (\Rightarrow) é uma operação binária $\Rightarrow: \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, cuja tabela verdade é dada por:

\Rightarrow	0	1
0	1	1
1	0	1

Definição 2.9 (Implicação *fuzzy* [34, 11]). *Uma operação binária $\Rightarrow: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ decrescente no primeiro argumento e crescente no segundo argumento é chamada implicação fuzzy se \Rightarrow estende a implicação clássica usual em $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$, i.é., $(0 \Rightarrow 0) = (0 \Rightarrow 1) = (1 \Rightarrow 1) = 1$ e $(1 \Rightarrow 0) = 0$.*

Alguns exemplos de implicações *fuzzy*:

Exemplo 2.10. Implicação de Gödel:

$$(a \Rightarrow_m b) = \begin{cases} 1, & \text{se } a \leq b, \\ b, & \text{se } a > b. \end{cases}$$

Exemplo 2.11. Implicação de Goguen:

$$(a \Rightarrow_p b) = \begin{cases} 1, & \text{se } a \leq b, \\ b/a, & \text{se } a > b. \end{cases}$$

Exemplo 2.12. Implicação de Lukasiewicz: $(a \Rightarrow_l b) = 1 \wedge (b - a + 1) = \min\{1, b - a + 1\}$.

A implicação que satisfaz (2.2) abaixo é chamada de implicação residual ou R-implicação [32, 34], pois ela é definida através do resíduo de uma t-norma como segue, para todo $a, b \in [0, 1]$:

$$(a \Rightarrow b) = \bigvee \{z \in [0, 1] : a \text{ t } z \leq b\}, \quad (2.2)$$

As implicações dos Exemplos 2.10, 2.11 e 2.12 são implicações residuais derivadas das t-normas dos Exemplos 2.2, 2.3 e 2.4 respectivamente.

2.2 RELAÇÕES FUZZY

Nesta seção começaremos fazendo uma breve introdução sobre relações no sentido clássico e, posteriormente, falaremos das relações *fuzzy*, que estendem o conceito de relações clássicas.

Relações determinam associações, comparações, semelhanças, etc. entre elementos, que podem ou não estar no mesmo universos de discurso. Uma relação clássica entre U_1 e U_2 corresponde à um conjunto de pares ordenados (u_1, u_2) , onde $u_1 \in U_1$ e $u_2 \in U_2$ [35]. Uma relação clássica \mathcal{R} definida sobre o produto cartesiano de dois conjuntos clássicos U_1 e U_2 é um subconjunto de $U_1 \times U_2$. Desta forma, podemos olhar para a função característica desse subconjunto, que será uma função $\chi_{\mathcal{R}} : U_1 \times U_2 \rightarrow \{0, 1\}$ tal que

$$\chi_{\mathcal{R}}(u_1, u_2) = \begin{cases} 1, & \text{se } (u_1, u_2) \in \mathcal{R}, \\ 0, & \text{se } (u_1, u_2) \notin \mathcal{R}. \end{cases} \quad (2.3)$$

De forma análoga podemos estender essa ideia de relação para n universos de discurso. Uma relação \mathcal{R} entre U_1, U_2, \dots, U_n é definida como um subconjunto do produto cartesiano $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$. A função característica $\chi_{\mathcal{R}} : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \rightarrow \{0, 1\}$ é dada por [6]:

$$\chi_{\mathcal{R}}(u_1, \dots, u_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{R}, \\ 0, & \text{se } (u_1, \dots, u_n) \notin \mathcal{R}. \end{cases} \quad (2.4)$$

O conceito matemático de relações *fuzzy* estende a ideia de relação clássica para conjuntos *fuzzy*. Dados n universos de discurso U_1, \dots, U_n , uma relação *fuzzy* é qualquer subconjunto *fuzzy* de $U_1 \times \dots \times U_n$ [6]. A função de pertinência da relação *fuzzy* \mathcal{R} é denotada por $\mu_{\mathcal{R}} : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \rightarrow [0, 1]$.

Dado um elemento $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in U_1 \times \dots \times U_n$, o valor da função de pertinência $\mu_{\mathcal{R}}(\mathbf{u}) \in [0, 1]$ indica o grau com que os elementos u_i de \mathbf{u} estão relacionados pela relação \mathcal{R} [35].

O produto cartesiano *fuzzy* é um relação *fuzzy* especialmente importante do ponto de vista de projeção ou inferência, principalmente em sistemas baseados em regras *fuzzy*, como veremos na seção 2.3. Tecnicamente, na teoria dos conjuntos *fuzzy*, o produto cartesiano *fuzzy* é similar a intersecção [6].

Definição 2.13 (Produto Cartesiano *Fuzzy* [6]). *O produto cartesiano fuzzy dos subconjuntos fuzzy A_1, A_2, \dots, A_n de U_1, U_2, \dots, U_n , respectivamente, é a relação fuzzy cuja função de pertinência é dada por*

$$\mu_{A_1 \times \dots \times A_n}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \mu_{A_1}(u_1) \mathfrak{t} \mu_{A_2}(u_2) \mathfrak{t} \dots \mathfrak{t} \mu_{A_n}(u_n), \quad (2.5)$$

para todo $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$, em que \mathfrak{t} denota uma *t-norma*.

2.3 SISTEMAS BASEADOS EM REGRAS *Fuzzy*

No cotidiano, as ações humanas controlam os mais diversos sistemas do mundo real por meio de informações imprecisas [6]. Um motorista desejando desviar de um obstáculo

a sua frente, não pensa que deve virar o volante 30° , mas sim virar “um pouco”.

Uma tentativa de reproduzir a estratégia de um controlador humano é dada pelos sistemas *fuzzy*, isto é, um sistema que se utiliza da lógica e conjuntos *fuzzy* para produzir saídas para cada entrada *fuzzy* [6].

Em sistemas *fuzzy* as tarefas são comandadas por meio de termos da linguagem usual e é nesse aspecto que variáveis linguísticas desempenham papel fundamental. Estes termos, traduzidos por conjuntos *fuzzy*, são utilizados para transcrever a base de conhecimentos através de uma coleção de regras *fuzzy*, denominada base de regras *fuzzy*. A partir dessa base de regras obtém-se a relação *fuzzy*, a qual produzirá a saída para cada entrada [6].

Sistemas *fuzzy* raciocinam com conjuntos linguísticos em vez de proposições lógicas bivalentes. A forma geral de uma inferência lógica fuzzy é a condicional “Se Então” [48]:

Se “*condição*” Então “*conclusão*”.

Uma regra *fuzzy* ou inferência *fuzzy* relaciona conjuntos *fuzzy* usando o *modus ponens generalizado* do seguinte modo [48]:

$$\text{Regra:} \quad \text{Se } u \text{ é } A \text{ Então } s \text{ é } B, \quad (2.6)$$

$$\text{Fato:} \quad u \text{ é } A^*, \quad (2.7)$$

$$\text{Conclusão:} \quad s \text{ é } B^*. \quad (2.8)$$

Na regra composicional de inferência, a função de pertinência do conjunto B^* é dada por:

$$\mu_{B^*}(s) = \bigvee_{u \in U} \{ \mu_{\mathcal{R}}(u, s) \text{ t } \mu_{A^*}(u) \}, \quad (2.9)$$

onde \mathcal{R} é uma relação fuzzy, geralmente definida em termos do produto cartesiano fuzzy $A \times B$ ou uma implicação fuzzy.

As condições de uma regra *fuzzy* relacionam-se a valores *fuzzy* linguísticos de uma ou mais variáveis, como por exemplo

Se “*pressão* = <*baixa*>” E “*temperatura* = <*média*>” Então “*válvula* = <*abrir um pouco*>”.

Assim, a regra *fuzzy* pode ser

Se u_1 é A_1 E u_2 é A_2 E ... E u_n é A_n Então s é B .

Neste caso podemos tomar $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in U$, onde U é o produto cartesiano $U_1 \times \dots \times U_n$ e A é o produto cartesiano fuzzy $A_1 \times \dots \times A_n \in U$. A regra fica da forma:

Se \mathbf{u} é A Então s é B .

O sistema combina várias regras por meio das saídas *fuzzy* de cada regra. Utiliza-se uma s-norma como sendo o conector lógico “OU” que liga as diversas regras *fuzzy*.

Um sistema de regras *fuzzy* tem a seguinte forma geral:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se } \mathbf{u} \text{ é } A_1 \quad \text{Então } s \text{ é } B_1 \\ \text{OU} \\ \text{Se } \mathbf{u} \text{ é } A_2 \quad \text{Então } s \text{ é } B_2 \\ \text{OU} \\ \vdots \\ \text{OU} \\ \text{Se } \mathbf{u} \text{ é } A_m \quad \text{Então } s \text{ é } B_m \end{array} \right. \quad (2.10)$$

sendo $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $A_i = A_{i1} \times A_{i2} \times \dots \times A_{in}$ para todo $i = 1, \dots, m$. Se a entrada do sistema *fuzzy* for $A^* = A_1^* \times A_2^* \times \dots \times A_n^*$, a saída será um conjunto *fuzzy* $B^* \subset B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_m$.

2.3.1 Método de Mamdani

Mamdani e Assilian foram pioneiros na automação baseada em lógica *fuzzy* para realizar e controlar tarefas. No trabalho [28], Mamdani e Assilian observaram que operadores humanos baseiam suas estratégias de controle de forma linguística e geralmente não matematicamente precisas. Este trabalho influenciou outros pesquisadores a utilizar controladores *fuzzy* na teoria de controle, como é o caso do controlador de Takagi-Sugeno [58].

O método de Mamdani é baseado na regra de composição de inferência max-min. A aplicação \wedge (mínimo) é utilizada para modelar a condicional “Se Então” de cada regra da base de regras. Adota-se o mínimo também como a t-norma do conectivo lógico “E”. Para o conectivo lógico “OU” utiliza-se a s-norma \vee (máximo) que conecta as regras *fuzzy* da base de regras.

Dado $A^* = A_1^* \times A_2^* \times \dots \times A_n^*$ como entrada do sistema de regras (2.10). Para cada regra $i = 1, \dots, m$, o conjunto A_i é o produto cartesiano *fuzzy* $A_{i1} \times \dots \times A_{in}$, isto é

$$\mu_{A_i}(\mathbf{u}) = \mu_{A_{i1}}(u_1) \wedge \mu_{A_{i2}}(u_2) \wedge \dots \wedge \mu_{A_{in}}(u_n) = \bigwedge_{j=1}^n \mu_{A_{ij}}(u_j), \quad (2.11)$$

para todo $\mathbf{u} \in U = U_1 \times \dots \times U_n$.

Desta forma, a função de pertinência do conjunto B_i^* de saída de cada regra i é dado por:

$$\mu_{B_i^*}(s) = \bigvee_{\mathbf{u} \in U} \left\{ [\mu_{A_i}(\mathbf{u}) \wedge \mu_{B_i}(s)] \wedge \mu_{A^*}(\mathbf{u}) \right\}. \quad (2.12)$$

A função de pertinência do conjunto *fuzzy* B^* de saída é dada por:

$$\mu_{B^*}(s) = \mu_{B_1^*}(s) \vee \mu_{B_2^*}(s) \vee \dots \vee \mu_{B_m^*}(s) = \bigvee_{i=1}^m \mu_{B_i^*}(s) \quad (2.13)$$

$$= \bigvee_{i=1}^m \left\{ \bigvee_{\mathbf{u} \in U} [\mu_{A_i}(\mathbf{u}) \wedge \mu_{B_i}(s)] \wedge \mu_{A^*}(\mathbf{u}) \right\} \quad (2.14)$$

$$= \bigvee_{i=1}^m \left\{ \mu_{B_i}(s) \wedge \bigvee_{\mathbf{u} \in U} [\mu_{A_i}(\mathbf{u}) \wedge \mu_{A^*}(\mathbf{u})] \right\}. \quad (2.15)$$

Se A^* é *crisp* com um único elemento, isto é, $A^* = \{\mathbf{u}^*\}$, com $\mathbf{u}^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$, então para todo $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in U$ tem-se

$$\mu_{A^*}(\mathbf{u}) = \begin{cases} 1, & \text{se } u_j = u_j^* \quad \forall j = 1, \dots, n \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.16)$$

Desta maneira,

$$\bigvee_{\mathbf{u} \in U} [\mu_{A_i}(\mathbf{u}) \wedge \mu_{A^*}(\mathbf{u})] = \mu_{A_i}(\mathbf{u}^*) = \bigwedge_{j=1}^n \mu_{A_{ij}}(u_j^*). \quad (2.17)$$

Assim, a função de pertinência dada em (2.15) do conjunto *fuzzy* de saída pode ser simplificada para:

$$\mu_{B^*}(s) = \bigvee_{i=1}^m \bigwedge_{j=1}^n [\mu_{A_{ij}}(u_j^*) \wedge \mu_{B_i}(s)]. \quad (2.18)$$

Exemplo 2.14. Exemplo de sistema *fuzzy*:

$$\begin{cases} \text{Se } u_1 \text{ é } A_{11} \text{ E } u_2 \text{ é } A_{12} \text{ Então } s \text{ é } B_1, \\ \text{Se } u_1 \text{ é } A_{21} \text{ E } u_2 \text{ é } A_{22} \text{ Então } s \text{ é } B_2. \end{cases}$$

Dado como entrada um conjunto *crisp* contendo apenas $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*)$, a função de pertinência do conjunto *fuzzy* $B^* \subset B_1 \cup B_2$ de saída é dada por:

$$\mu_{B^*}(s) = \bigvee_{i=1}^2 \bigwedge_{j=1}^2 [\mu_{A_{ij}}(u_j^*) \wedge \mu_{B_i}(s)], \quad (2.19)$$

ou ainda,

$$\mu_{B^*}(s) = [\mu_{A_{11}}(u_1^*) \wedge \mu_{A_{12}}(u_2^*) \wedge \mu_{B_1}(s)] \vee [\mu_{A_{21}}(u_1^*) \wedge \mu_{A_{22}}(u_2^*) \wedge \mu_{B_2}(s)]. \quad (2.20)$$

2.3.2 Defuzificação

No controlador *fuzzy*, a cada entrada *fuzzy* o módulo produz uma saída também *fuzzy*. No entanto, se a entrada é um número real, podemos esperar que a saída correspondente seja também um número real. Assim, podemos utilizar um método para defuzificar a saída e obter um número real [6].

Os principais métodos de defuzificação podem ser estudados em [6, 35, 48], sendo eles o Método Centro dos Máximos, o Método da Média dos Máximos e o Método do

Centro de Área. Aqui abordaremos brevemente o Método do Centro de Área, que será utilizado na seção 3.4.1.

O Método do Centro de Área é semelhante a média ponderada para uma distribuição de dados, com a diferença que os pesos aqui são os graus de pertinência do conjunto *fuzzy* [6].

Dado um conjunto *fuzzy* B em V . O valor *crisp* f da defuzificação de B pelo Método do Centro de Área é dado por

$$f = \frac{\int_V v \mu_B(v) dv}{\int_V \mu_B(v) dv}, \quad (2.21)$$

ou, caso o domínio de B for discreto com n elementos, podemos utilizar a equação

$$f = \frac{\sum_{i=1}^n v_i \mu_B(v_i)}{\sum_{i=1}^n \mu_B(v_i)}. \quad (2.22)$$

3 MORFOLOGIA MATEMÁTICA

A Morfologia Matemática (MM) é empregada no processamento e análise de objetos ou imagens [46, 51]. Seu desenvolvimento começou a ser formalizado na França nos anos 60 por Matheron e Serra, que se basearam nos trabalhos de Minkowski e Hadwiger [30, 46] para criar a morfologia matemática binária. Matheron e Serra buscavam criar ferramentas para serem utilizadas na extração de informações geométricas no estudo de imagens de minerais.

Nos anos 80, várias abordagens foram criadas para generaliza-la para imagens em tons de cinza, como por exemplo a abordagem da umbra [46, 52] e *threshold* [57]. Do ponto de vista teórico, tanto a MM binária como as abordagens em tons de cinza, podem ser muito bem conduzidas numa estrutura matemática chamada reticulado completo [18, 45].

Abordagens da MM para imagens coloridas foram desenvolvidas por Comer e Delp nos anos 90 [9]. Uma grande dificuldade para estender a MM para imagens coloridas é criar uma ordem parcial apropriada para uma certa aplicação.

Em particular, Louverdis, Andreadis e Tsalides desenvolveram um novo modelo *fuzzy* de operadores morfológicos para imagens coloridas [27]. Especificamente, eles introduziram operadores de dilatação e erosão menos sensíveis a distorções na imagem que as outras abordagens morfológicas. Esses operadores são definidos utilizando sistemas de regras *fuzzy se-então* e o espaço de cor HSV.

Além das aplicações em processamento de imagens, a MM também pode ser empregada no contexto de redes neurais artificiais [12, 21, 39]. Redes neurais artificiais são modelos matemáticos inspirados no cérebro humano. Uma das habilidades do cérebro, chamada *memória associativa*, refere-se à capacidade de recordarmos informações por associação [23, 17].

Definição 3.1 (Imagem e Gráfico de uma Imagem). *Uma imagem é uma função $g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{V}$, onde \mathbb{X} denota o espaço euclidiano \mathbb{R}^d ou o espaço digital \mathbb{Z}^d e \mathbb{V} é o conjunto dos valores da imagem. O gráfico de uma imagem é o conjunto $G(g) = \{(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in \mathbb{X}\}$.*

Cada elemento $(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \in G(g)$ é chamado de *picture element* ou *pixel*. Denotaremos o conjunto de todas as imagens $g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{V}$ por $\mathbb{V}^{\mathbb{X}}$.

3.1 MORFOLOGIA MATEMÁTICA EM RETICULADOS COMPLETOS

Nesta seção faremos uma breve revisão da teoria dos reticulados completos. Reticulados fornecem um contexto geral onde a morfologia matemática pode ser conduzida.

Definição 3.2 (Ordem Parcial e Total). *Dado um conjunto não vazio L , uma relação binária \leq em L é chamada ordem parcial se*

$$i) x \leq x;$$

$$ii) x \leq y \text{ e } y \leq x \Rightarrow x = y;$$

$$iii) x \leq y \text{ e } y \leq z \Rightarrow x \leq z.$$

A ordem é dita total se, além das três propriedades acima, ela tiver a seguinte propriedade

$$iv) x \leq y \text{ ou } y \leq x, \quad \forall x, y \in L.$$

Um conjunto L munido com uma ordem parcial é dito um conjunto parcialmente ordenado. Seja L um conjunto parcialmente ordenado e $K \subset L$, dizemos que a é cota superior de K se $a \geq b$, para todo $b \in K$. Definimos o supremo (\vee) como a menor cota superior de K . Do mesmo modo, a é cota inferior de K se para todo $b \in K$ temos que $a \leq b$. O ínfimo (\wedge) de K é a maior cota inferior.

Definição 3.3 (Reticulado e Reticulado Completo). *Um conjunto parcialmente ordenado \mathbb{L} é um reticulado se todo subconjunto finito possui supremo e ínfimo em \mathbb{L} . Um reticulado é dito completo se todo subconjunto (mesmo infinito) possui supremo e ínfimo.*

Alguns exemplos importantes de reticulados são dados a seguir.

Exemplo 3.4. \mathbb{R} com a ordem usual é um reticulado, mas não é completo. No entanto $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ é um reticulado completo.

Exemplo 3.5. O conjunto das partes de E , denotado por $P(E)$, com a ordem de inclusão é um reticulado completo.

Note que, se $K = \emptyset$, todo elemento de um reticulado \mathbb{L} é cota superior e inferior de K . Portanto, a maior cota inferior de K é o maior elemento de \mathbb{L} , e a menor cota superior de K é o menor elemento de \mathbb{L} , ou seja

$$\vee \emptyset = \bigwedge \mathbb{L} \quad \text{e} \quad \bigwedge \emptyset = \vee \mathbb{L}. \quad (3.1)$$

3.1.1 Reticulados Brouwerianos

Brouwer e Heyting caracterizaram os reticulados Brouwerianos, que é uma generalização da álgebra booleana [7].

Definição 3.6 (Reticulado Brouweriano [7]). *Um reticulado \mathbb{L} é dito Brouweriano se para todo $a, b \in \mathbb{L}$, o conjunto $S = \{x \in \mathbb{L} : a \wedge x \leq b\}$ possui um maior elemento. O elemento b/a definido como:*

$$b/a = \vee \{x \in \mathbb{L} : a \wedge x \leq b\} \in S \quad (3.2)$$

é chamado por Birkhoff de pseudo complemento relativo de a em b [7]. Nós chamaremos o pseudo complemento relativo de a em b de resíduo de b por a .

Observação 1. Note que o resíduo b/a não é apenas o supremo do conjunto S , mas também um elemento de S .

O próximo exemplo mostra que o conjunto dos valores de imagens em tons de cinza é um reticulado completo Brouweriano, que será utilizado na seção 3.3 sobre a abordagem da umbra e na seção 3.3.2 sobre a abordagem *level sets*, que utiliza o fato dele ser Brouweriano.

Exemplo 3.7. O intervalo $[0, 1]$ com a ordem usual é um reticulado completo Brouweriano. Veja que, dados $a, b \in [0, 1]$, o elemento b/a é dado por

$$b/a = \bigvee \{x \in [0, 1] : a \wedge x \leq b\} = \begin{cases} 1, & \text{se } a \leq b, \\ b, & \text{se } a > b. \end{cases} \quad (3.3)$$

Exemplo 3.8. O conjunto dos números reais com a ordem usual é um reticulado mas não é Brouweriano. Note que, tomando $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq b$, não existe o supremo de $S = \{x \in \mathbb{R} : a \wedge x \leq b\}$. Entretanto, $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é um reticulado Brouweriano que não é completo.

Alguns autores, como Roman em [44], chamam o reticulado da definição 3.6 de reticulado de Heyting e o dual dele de reticulado Brouweriano. Neste trabalho seguiremos a definição de Birkhoff [7].

3.1.2 Operadores em Reticulados Completos

Sejam \mathbb{L}, \mathbb{M} reticulados completos e ϕ, ψ dois operadores de \mathbb{L} em \mathbb{M} . Escrevemos $\phi \leq \psi$ se $\phi(x) \leq \psi(x)$ para todo $x \in \mathbb{L}$. O conjunto de todos os operadores de \mathbb{L} em \mathbb{M} é um reticulado completo com esta relação de ordem. O ínfimo e o supremo são dados por

$$\left(\bigwedge_{i \in I} \psi_i \right)(x) = \bigwedge_{i \in I} \psi_i(x) \quad \text{e} \quad \left(\bigvee_{i \in I} \psi_i \right)(x) = \bigvee_{i \in I} \psi_i(x). \quad (3.4)$$

A próxima definição trata de operadores que comutam com o supremo ou ínfimo, esses são os principais operadores da MM.

Definição 3.9 (Dilatação e Erosão [18, 19, 47]). *Sejam \mathbb{L} e \mathbb{M} reticulados completos. Qualquer operador $\varepsilon : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ que satisfaz a seguinte equação, para todo $K \subseteq \mathbb{L}$, é chamado de erosão.*

$$\varepsilon \left(\bigwedge K \right) = \bigwedge_{x \in K} \varepsilon(x). \quad (3.5)$$

De forma análoga, um operador $\delta : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{L}$ é uma dilatação se satisfaz a seguinte equação para todo $K \subseteq \mathbb{L}$:

$$\delta \left(\bigvee K \right) = \bigvee_{x \in K} \delta(x). \quad (3.6)$$

Em outras palavras, erosão é qualquer operador que comuta com o ínfimo e dilatação é qualquer operador que comuta com o supremo.

Definição 3.10 (Adjunção). *Dados dois operadores $\varepsilon : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ e $\delta : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{L}$ com \mathbb{L} e \mathbb{M} reticulados completos. O par (ε, δ) é uma adjunção entre \mathbb{L} e \mathbb{M} se [18, 19, 47]:*

$$\delta(y) \leq x \Leftrightarrow y \leq \varepsilon(x). \quad (3.7)$$

Se (ε, δ) é uma adjunção entre \mathbb{L} e \mathbb{L} dizemos que (ε, δ) é uma adjunção sobre o reticulado \mathbb{L} .

A proposição a seguir é encontrada em [18, 19, 47] e relaciona os operadores de dilatação e erosão por meio da adjunção como uma relação de dualidade:

Proposição 3.11. *Sejam \mathbb{L} e \mathbb{M} reticulados completos.*

1. *Se (ε, δ) é uma adjunção entre \mathbb{L} e \mathbb{M} , então ε é uma erosão e δ é uma dilatação.*
2. *Se δ é uma dilatação, então existe uma única erosão ε tal que (ε, δ) é uma adjunção. Essa erosão é dada por:*

$$\varepsilon(x) = \bigvee \{y \in \mathbb{M} : \delta(y) \leq x\}. \quad (3.8)$$

3. *Se ε é uma erosão, então existe uma única dilatação δ tal que (ε, δ) é uma adjunção. Essa dilatação é dada por:*

$$\delta(y) = \bigwedge \{x \in \mathbb{L} : y \leq \varepsilon(x)\}. \quad (3.9)$$

3.2 MORFOLOGIA MATEMÁTICA BINÁRIA

Na morfologia matemática binária \mathbb{V} é o conjunto $\{0, 1\}$ e uma imagem binária associa a cada ponto de \mathbb{X} o valor *zero* ou *um*. Uma imagem binária pode ser vista como um subconjunto A de \mathbb{X} . Especificamente, uma imagem $g : \mathbb{X} \rightarrow \{0, 1\}$ pode ser vista como o conjunto A de todos os pontos onde g associa o valor “1”, e isso indica um pixel em “primeiro plano”.

Um pixel em primeiro plano é por exemplo preto quando o representamos numa folha de papel. Quando um pixel não pertence a imagem, ou seja, seu valor é “0”, indica um pixel em “segundo plano” que, no exemplo da folha de papel, é um pixel branco.

O complemento de uma imagem A é uma imagem representada por A^c e definida como

$$A^c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X} : \mathbf{x} \notin A\}, \quad (3.10)$$

e a reflexão de uma imagem A , denotada como \hat{A} , é dada por:

$$\hat{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X} : \mathbf{x} = -\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in A\}. \quad (3.11)$$

Se A e B são duas imagens, a união de A e B é dada por $A \cup B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X} : \mathbf{x} \in A \text{ ou } \mathbf{x} \in B\}$, a intersecção por $A \cap B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X} : \mathbf{x} \in A \text{ e } \mathbf{x} \in B\}$ e a diferença $A - B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X} : \mathbf{x} \in A \text{ e } \mathbf{x} \notin B\} = A \cap B^c$.

Podemos realizar também a translação de uma imagem por um vetor \mathbf{b} da seguinte maneira:

Definição 3.12 (Translação). *Seja $A \subset \mathbb{X}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{X}$. A translação de A por \mathbf{b} é definida como:*

$$A + \mathbf{b} = \{\mathbf{c} \in \mathbb{X} : \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}; \mathbf{a} \in A\}. \quad (3.12)$$

A morfologia matemática envolve análise geométrica das formas e das texturas nas imagens. Os operadores morfológicos trabalham com duas imagens: a imagem a ser processada e o elemento estruturante. Abaixo segue os dois operadores morfológicos elementares:

Definição 3.13 (Dilatação Binária). *Sejam $A, B \subset \mathbb{X}$, a dilatação binária de A por B é definida como:*

$$A \oplus_b B = \{\mathbf{c} \in \mathbb{X} : \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}; \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}. \quad (3.13)$$

A dilatação $A \oplus_b B$ pode ser escrita em termos de translações como:

$$A \oplus_b B = \bigcup_{\mathbf{x} \in B} (A + \mathbf{x}) = \bigcup_{\mathbf{x} \in A} (B + \mathbf{x}). \quad (3.14)$$

A dilatação possui algumas propriedades importantes, entre elas destacamos que é comutativa, associativa, monótona e distributiva em relação a união.

Definição 3.14 (Erosão Binária). *Sejam $A, B \subset \mathbb{X}$, a erosão binária de A por B é definida como:*

$$A \ominus_b B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X} : \mathbf{x} + \mathbf{b} \in A, \forall \mathbf{b} \in B\}. \quad (3.15)$$

A erosão $A \ominus_b B$ pode ser escrita em termos de translações como

$$A \ominus_b B = \bigcap_{\mathbf{b} \in B} (A - \mathbf{b}). \quad (3.16)$$

Exemplo 3.15. Na Figura 3.1 apresentamos (a) uma imagem binária e as respectivas (b) dilatação e (c) erosão binárias da imagem por um elemento estruturante quadrado de dimensões 2×2 . Observe que a dilatação expande e a erosão retrai o desenho da imagem.

A erosão e a dilatação são operações duais, isto é, $(A \ominus_b B)^c = A^c \oplus_b \hat{B}$ [16]. Entretanto, \oplus_b e \ominus_b não são operações inversas, ou seja, $(A \ominus_b B) \oplus_b B$ pode ser diferente de B .

Utilizando combinações das operações de erosão e dilatação podemos obter novas operações, duas dessas novas operações são a abertura e o fechamento. A abertura da imagem A por um elemento estruturante B , denotada por $A \circ_b B$, é obtida realizando a erosão seguida da dilatação, isto é:

$$A \circ_b B = (A \ominus_b B) \oplus_b B. \quad (3.17)$$



Figura 3.1: Imagem Binária, Elemento estruturante, Dilatação e Erosão binárias.

A abertura tem relação com o interior de conjuntos na topologia [26] e, da mesma forma que a operação interior, a abertura é idempotente, ou seja, $A \circ_b (A \circ_b B) = A \circ_b B$.

O fechamento da imagem A por um elemento estruturante B , denotado $A \bullet_b B$, é obtida realizando a dilatação seguida da erosão:

$$A \bullet_b B = (A \oplus_b B) \ominus_b B. \quad (3.18)$$

O fechamento tem relação com o fecho de conjuntos da topologia e, também é idempotente, ou seja: $A \bullet_b (A \bullet_b B) = A \bullet_b B$.

Assim como a erosão e a dilatação, abertura e fechamento também são operações duais. O complemento do fechamento de A por B é a abertura de A^c por \hat{B} [16], isto é,

$$(A \bullet_b B)^c = A^c \circ_b \hat{B}. \quad (3.19)$$

O gradiente morfológico, que pode ser usado para detecção de limites ou bordas de objetos em imagens [51], é definido como a diferença da dilatação pela erosão, ou seja, todos os pontos que estão na dilatação e não estão na erosão:

$$\rho_B(A) = (A \oplus B) - (A \ominus B). \quad (3.20)$$

Na Figura 3.2 apresentamos o complemento do gradiente morfológico para facilitar a visualização.

Exemplo 3.16. Na Figura 3.2 apresentamos (a) abertura, (b) fechamento e (c) complemento do gradiente morfológico da imagem binária apresentada na Figura 3.1. Note como o gradiente morfológico traça o contorno do desenho na imagem.

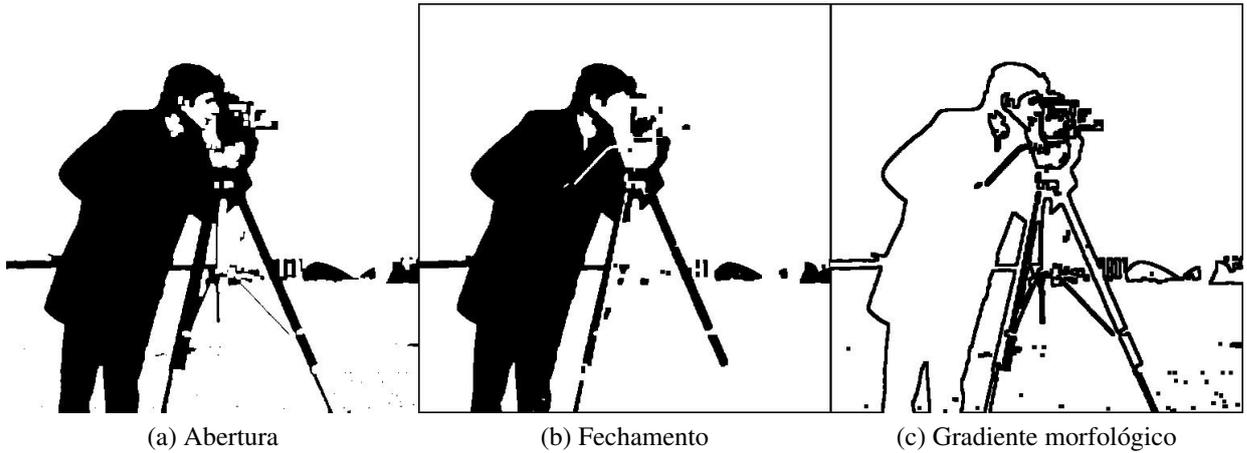


Figura 3.2: Abertura, fechamento e gradiente morfológico da imagem pelo elemento estruturante apresentados na Figura 3.1.

3.3 MORFOLOGIA MATEMÁTICA EM TONS DE CINZA

Vejamos agora o caso das imagens em tons de cinza, onde $\mathbb{V} = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$. Várias abordagens foram desenvolvidas para estender a morfologia matemática para imagens em tons de cinza. Nesta seção, falaremos das abordagens da umbra, *threshold* e *level sets*.

3.3.1 Abordagem da Umbra

A abordagem da umbra, desenvolvida por Serra e Sternberg em meados dos anos 1980, estende os operadores da morfologia matemática binária para imagens em tons de cinza [46, 52].

Para estender a MM binária, representamos uma imagem em tons de cinza do \mathbb{R}^2 como uma imagem binária do \mathbb{R}^3 usando a terceira coordenada para o tom de cinza de cada pixel [49]. Da mesma forma, uma imagem em tons de cinza do \mathbb{R}^d é uma imagem binária do \mathbb{R}^{d+1} [16].

Definição 3.17 (Umbra [49]). *Seja $g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{V}$ uma imagem em tons de cinza. A umbra de g , denotada por $\mathcal{U}(g)$, é definida como*

$$\mathcal{U}(g) = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{R} : y \leq g(\mathbf{x})\}. \quad (3.21)$$

Por exemplo, a umbra de uma imagem $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ é o subconjunto do \mathbb{R}^3 de todos os pontos (x, y, z) onde $z \leq g(x, y)$.

Definição 3.18 (Topo de um Conjunto [49]). *Seja $A \subset \mathbb{X} \times \mathbb{R}$, tome $\mathbf{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X} : (\mathbf{x}, y) \in A\}$. O Topo do conjunto A , denotado por $\mathbf{T}[A] : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{V}$, é definido como*

$$\mathbf{T}[A](\mathbf{x}) = \bigvee \{y \in \mathbb{V} : (\mathbf{x}, y) \in A\}. \quad (3.22)$$

A umbra e o topo de um conjunto estão relacionados [16] por

$$\mathbf{T}[\mathcal{U}(\mathbf{g})] = \mathbf{g}, \quad (3.23)$$

de onde segue imediatamente que $\mathcal{U}(\mathbf{T}[\mathcal{U}(\mathbf{g})]) = \mathcal{U}(\mathbf{g})$.

A umbra não é a operação inversa do topo de um conjunto pois $A \subset \mathcal{U}(\mathbf{T}[A])$ entretanto $\mathcal{U}(\mathbf{T}[A]) \not\subset A$ para certos conjuntos.

Agora podemos definir dilatação e erosão para imagens em tons de cinza utilizando a umbra e o topo da umbra combinadas com as operações de dilatação e erosão binárias.

Definição 3.19 (Dilatação e Erosão da umbra [16, 49]). *Sejam $\mathbf{g}, \mathbf{s} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{V}$. A dilatação e a erosão da umbra de \mathbf{g} por \mathbf{s} , denotadas respectivamente por $\mathbf{g} \oplus_u \mathbf{s}$ e $\mathbf{g} \ominus_u \mathbf{s}$, são definidas como*

$$\mathbf{g} \oplus_u \mathbf{s} = \mathbf{T}[\mathcal{U}(\mathbf{g}) \oplus_b \mathcal{U}(\mathbf{s})] \quad e \quad \mathbf{g} \ominus_u \mathbf{s} = \mathbf{T}[\mathcal{U}(\mathbf{g}) \ominus_b \mathcal{U}(\mathbf{s})]. \quad (3.24)$$

Assim, a dilatação (erosão) de \mathbf{g} por \mathbf{s} , para as imagens em tons de cinza, é definida como sendo o topo da dilatação (erosão) binária das umbras de \mathbf{g} e \mathbf{s} . A proposição a seguir fornece uma forma explícita de calcular dilatação e erosão da umbra, usando máximos e mínimos.

Proposição 3.20 (Dilatação e a Erosão da umbra [46]). *Sejam $\mathbf{g}, \mathbf{s} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{V}$. A dilatação e a erosão em tons de cinza de \mathbf{g} por \mathbf{s} são dadas por*

$$(\mathbf{g} \oplus_u \mathbf{s})(\mathbf{x}) = 1 \wedge \left[\bigvee_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{X} \\ \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathbb{X}}} \{\mathbf{g}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mathbf{s}(\mathbf{y})\} \right], \quad (3.25)$$

e

$$(\mathbf{g} \ominus_u \mathbf{s})(\mathbf{x}) = 0 \vee \left[\bigwedge_{\mathbf{y} \in \mathbb{X}} \{\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \mathbf{s}(\mathbf{y})\} \right]. \quad (3.26)$$

Demonstração. Pela definição:

$$[\mathbf{g} \oplus_u \mathbf{s}] = \mathbf{T}[\mathcal{U}(\mathbf{g}) \oplus_b \mathcal{U}(\mathbf{s})]. \quad (3.27)$$

Utilizando as definições de dilatação binária, umbra e topo de um conjunto,

temos:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{g} \oplus_u \mathbf{s}](\mathbf{x}) &= \mathbf{T}[\mathcal{U}(\mathbf{g}) \oplus_b \mathcal{U}(\mathbf{s})](\mathbf{x}) \\
&= \mathbf{T}\left[\left\{(\mathbf{y}, b) \in \mathbb{X} \times \mathbb{V} : b \leq \mathbf{g}(\mathbf{y})\right\} \oplus_b \left\{(\mathbf{y}, b) \in \mathbb{X} \times \mathbb{V} : b \leq \mathbf{s}(\mathbf{y})\right\}\right](\mathbf{x}) \\
&= \mathbf{T}\left[\left\{(\mathbf{c} + \mathbf{y}, d + b) \in \mathbb{X} \times \mathbb{V} : d \leq \mathbf{g}(\mathbf{c}); b \leq \mathbf{s}(\mathbf{y}), \forall \mathbf{c}, \mathbf{y} \in \mathbb{X}\right\}\right](\mathbf{x}) \\
&= \bigvee \left\{ (d + b) \in \mathbb{V} : \mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathbf{y}, d \leq \mathbf{g}(\mathbf{c}) \text{ e } b \leq \mathbf{s}(\mathbf{y}), \forall \mathbf{c}, \mathbf{y} \in \mathbb{X} \right\} \\
&= \bigvee \left\{ (d + b) \in \mathbb{V} : d \leq \mathbf{g}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \text{ e } b \leq \mathbf{s}(\mathbf{y}), \forall (\mathbf{x} - \mathbf{y}), \mathbf{y} \in \mathbb{X} \right\} \\
&= \bigvee \left\{ [\mathbf{g}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mathbf{s}(\mathbf{y})] \in \mathbb{V} : (\mathbf{x} - \mathbf{y}), \mathbf{y} \in \mathbb{X} \right\} \\
&= \bigvee_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{X} \\ \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathbb{X}}} \left\{ \mathbf{g}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mathbf{s}(\mathbf{y}) \in \mathbb{V} \right\}.
\end{aligned}$$

Utilizando agora o fato que $\mathbb{V} = [0, 1]$:

$$[\mathbf{g} \oplus_u \mathbf{s}](\mathbf{x}) = \left[\bigvee_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{X} \\ \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathbb{X}}} \left\{ \mathbf{g}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mathbf{s}(\mathbf{y}) \right\} \right] \wedge 1. \quad (3.28)$$

Assim, demonstramos a equação da dilatação, a demonstração da equação erosão segue de forma análoga. \square

Observação 2. Na literatura, a abordagem da umbra é desenvolvida no reticulado completo $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Aqui estamos utilizando o reticulado completo $[0, 1]$, por isso na Proposição 3.20 temos que realizar a operação de máximo com zero na erosão e de mínimo com 1 na dilatação. A demonstração da Proposição 3.20 é parecida com a demonstração existente para o reticulado completo $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, bastando observar que os valores devem estar no reticulado $\mathbb{V} = [0, 1]$ e por isso o máximo e o mínimo são utilizados.

Exemplo 3.21. Na Figura 3.3 apresentamos (a) uma imagem em tons de cinza, (b) um elemento estruturante, e as respectivas (c) dilatação e (d) erosão da imagem pelo elemento estruturante, na abordagem da umbra. Observe que a dilatação clareia a imagem expandindo as regiões claras, enquanto que a erosão escurece a imagem retraindo as partes claras.

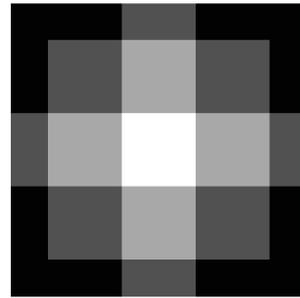
Abertura e fechamento em tons de cinza são definidos utilizando combinações das operações de dilatação e erosão, da mesma maneira que a abertura e fechamento binários. A abertura da imagem \mathbf{g} por um elemento estruturante \mathbf{s} , denotada por $\mathbf{g} \circ_u \mathbf{s}$, é obtida realizando a erosão seguida da dilatação. Já o fechamento, denotado $\mathbf{g} \bullet_u \mathbf{s}$, é obtido realizando a dilatação seguida da erosão, ou seja:

$$\mathbf{g} \circ_u \mathbf{s} = (\mathbf{g} \ominus_u \mathbf{s}) \oplus_u \mathbf{s} \quad \text{e} \quad \mathbf{g} \bullet_u \mathbf{s} = (\mathbf{g} \oplus_u \mathbf{s}) \ominus_u \mathbf{s}. \quad (3.29)$$

O gradiente morfológico é definido como a diferença ponto a ponto entre a dilatação e a erosão.



(a) Imagem em tons de cinza



(b) Elemento estruturante



(c) Dilatação utilizando a abordagem da umbra (d) Erosão utilizando a abordagem da umbra

Figura 3.3: Imagem em tons de cinza, elemento estruturante, dilatação e erosão da imagem pelo elemento estruturante utilizando a abordagem da umbra.

Exemplo 3.22. Na Figura 3.4 apresentamos (a) a abertura, (b) o fechamento e (c) o complemento do gradiente morfológico da imagem pelo elementos estruturante apresentados na Figura 3.3 utilizando a abordagem da umbra. O complemento do gradiente morfológico foi apresentado para facilitar a visualização na folha de papel. O complemento de uma imagem $g : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$ é definido como a imagem $g^c : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$ tal que $g^c(\mathbf{x}) = 1 - g(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$.

3.3.2 Abordagem do Threshold e Level Set

Outra abordagem para estender os operadores da morfologia matemática binária para imagens em tons de cinza é a abordagem do *threshold*. Esta abordagem é anterior ao trabalho de Sternberg [52] sobre a abordagem da umbra e foi desenvolvida por Serra [47].

Dada uma imagem em tons de cinza $g \in \mathbb{V}^{\mathbb{X}}$ e um elemento estruturante $S \subseteq \mathbb{X}$, a T-dilatação \oplus_t e a T-erosão \ominus_t [31], também chamadas dilatação e erosão *flat* [18], são dadas por:

$$(g \oplus_t S)(\mathbf{x}) = \bigvee_{\mathbf{y} \in S} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \text{e} \quad (g \ominus_t S)(\mathbf{x}) = \bigwedge_{\mathbf{y} \in S} g(\mathbf{y} - \mathbf{x}). \quad (3.30)$$

Note que, nessa abordagem, o elemento estruturante é um conjunto clássico.



Figura 3.4: Abertura, fechamento e complemento do gradiente morfológico da imagem pelo elemento estruturante apresentados na Figura 3.1 utilizando a abordagem da umbra.

A abordagem *level set* pode ser vista como uma extensão da abordagem *threshold*. Abordagem *level set* decompõe a imagem e o elemento estruturante em conjuntos de níveis (*level sets*) e aplica os operadores da morfologia matemática binária nesses conjuntos.

Uma imagem $g \in \mathbb{V}^{\mathbb{X}}$ pode ser decomposta em *level sets* $\mathcal{S}_t(g)$ dados por [18]:

$$\mathcal{S}_t(g) = \{x \in \mathbb{X} : g(x) \geq t\}, \quad \forall t \in \mathbb{V}. \quad (3.31)$$

Observe que $\mathcal{S}_t(g) \subseteq \mathbb{X}$ é o conjunto de todos os pontos $x \in \mathbb{X}$ em que a imagem g excede o limitante t . Para dois valores $t_1, t_2 \in \mathbb{V}$ tais que $t_1 \leq t_2$, temos $\mathcal{S}_{t_1}(g) \subseteq \mathcal{S}_{t_2}(g)$.

A imagem g pode ser recuperada à partir dos *level sets* como segue:

$$g(x) = \bigvee \{t \in \mathbb{V} : x \in \mathcal{S}_t(g)\}. \quad (3.32)$$

A L-dilatação e a L-erosão, denotadas respectivamente por \oplus_l e \ominus_l , podem ser calculadas para um elemento $s \in \mathbb{V}^{\mathbb{X}}$ fixo como

$$(g \oplus_l s)(x) = \bigvee \{t \in \mathbb{V} : x \in [\mathcal{S}_t(g) \oplus_b \mathcal{S}_t(s)]\}, \quad (3.33)$$

$$(g \ominus_l s)(x) = \bigvee \{t \in \mathbb{V} : x \in [\mathcal{S}_t(g) \ominus_b \mathcal{S}_t(s)]\}. \quad (3.34)$$

A abordagem do *level sets* generaliza a abordagem do *threshold*. Para um elemento estruturante binário $S \subseteq \mathbb{X}$ e uma imagem $g \in \mathbb{V}^{\mathbb{X}}$, temos que $g \oplus_t S = g \oplus_l s$ e $g \ominus_t S = g \ominus_l s$, onde $s \in \mathbb{V}^{\mathbb{X}}$ é definida como

$$s(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in S, \\ 0, & \text{se } x \notin S. \end{cases} \quad (3.35)$$

No artigo [57], Sussner e Valle definem o conjunto dos valores das imagens como sendo $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ou $\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Desta maneira, o supremo e o ínfimo do conjunto dos valores são $+\infty$ e $-\infty$, respectivamente. Neste trabalho estamos utilizando o

intervalo da reta $[0, 1]$ como conjunto dos valores das imagens em tons de cinza, por isso o supremo e o ínfimo do conjunto dos valores são 1 e 0, respectivamente. Em outras palavras, nas equações (3.35) e (3.38) encontram-se os valores 1 e 0 onde no trabalho de Valle e Sussner estão $+\infty$ e $-\infty$.

A próxima proposição nos dá uma maneira prática de calcular a L-dilatação e a L-erosão.

Proposição 3.23 (L-dilatação e L-erosão [57]). *Para todo par de imagens $g, s \in \mathbb{V}^{\mathbb{X}}$, a L-dilatação e a L-erosão são dadas respectivamente por*

$$(g \oplus_l s)(x) = \bigvee_{y \in \mathbb{X}} s(x - y) \wedge g(y), \quad (3.36)$$

e

$$(g \ominus_l s)(x) = \bigwedge_{y \in \mathbb{X}} (g(y) / s(y - x)), \quad (3.37)$$

onde $/ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ é uma operação binária chamada resíduo e definida como:

$$b/a = \begin{cases} 1, & \text{se } a \leq b, \\ b, & \text{se } a > b. \end{cases} \quad (3.38)$$

Note que, além dos operadores “ \vee ” e “ \wedge ”, a abordagem *level sets* é baseada também na operação binária “ $/$ ” definida em (3.38). Essa operação é definida num reticulado completo Brouweriano. Note também a relação entre a implicação *fuzzy* de Gödel dada no Exemplo 2.10 e a operação resíduo “ $/$ ”:

$$(a \Rightarrow_m b) = b/a, \quad \forall a, b \in [0, 1]. \quad (3.39)$$

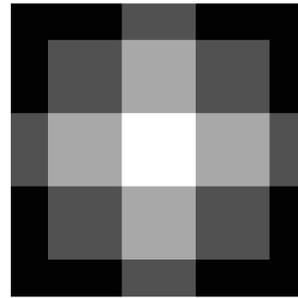
Exemplo 3.24. Na Figura 3.5 apresentamos (a) uma imagem em tons de cinza, (b) um elemento estruturante e as respectivas (c) dilatação e (d) erosão da imagem pelo elemento estruturante, na abordagem *level sets*. Observe que a dilatação clareia a imagem expandindo as regiões claras, enquanto que a erosão escurece a imagem retraindo as partes claras.

A abertura, o fechamento e o gradiente morfológico são encontrados da mesma maneira que nas abordagens anteriores, ou seja, a abertura da imagem g por um elemento estruturante s , denotada por $g \circ_l s$, é obtida realizando a erosão e em seguida a dilatação. Já o fechamento, denotado $g \bullet_l s$, é obtido realizando a dilatação seguida da erosão.

Exemplo 3.25. Na Figura 3.4 apresentamos (a) a abertura, (b) o fechamento e (c) o complemento do gradiente morfológico da imagem pelo elementos estruturante apresentados na Figura 3.3 utilizando a abordagem *level sets*. O complemento do gradiente morfológico é apresentado para facilitar a visualização na folha de papel.



(a) Imagem em tons de cinza



(b) Elemento estruturante

(c) Dilatação da abordagem *level sets*(d) Erosão da abordagem *level sets*

Figura 3.5: Imagem em tons de cinza, elemento estruturante, dilatação e erosão da abordagem *level sets*.

3.4 MORFOLOGIA MATEMÁTICA PARA IMAGENS COLORIDAS

No contexto de imagens coloridas, o conjunto de valores \mathbb{V} geralmente corresponde a um subconjunto de \mathbb{R}^3 . Com efeito, Vandembroucke classifica os espaços de cores em quatro tipos principais [65]: Os espaços de cores primárias, como o sistema RGB; os modelos de luminosidade-cromaticidade como o CIELab; os espaços de eixos independentes, que resultam de métodos estatísticos como a transformação de Karhunen-Loève; os espaços baseados na percepção humana na qual uma cor é expressa em termos de luminosidade, hue e saturação, como as representações HSL e HSV.

O sistema de cor mais utilizado é o RGB, que representa uma cor utilizando a decomposição dela nas três cores primárias: vermelho (**R**ed), verde (**G**reen) e azul (**B**lue). Entretanto, o sistema RGB apresenta algumas desvantagens. Por exemplo, ele não tem uma relação forte com a percepção de cor pelo olho humano.

O sistema de cor baseado no espaço HSV usa descrições de cores com apelo intuitivo [1]. Neste modelo as cores são representadas por três parâmetros: *hue* (h), *saturação* (s) e *valor* (v).

O *hue*, também chamado de matiz, que é representado por um ângulo sobre o eixo horizontal variando de 0 a 360 graus, refere-se a tonalidade ou cromaticidade das cores,



Figura 3.6: Abertura, fechamento e complemento do gradiente morfológico da imagem pelo elemento estruturante apresentados na Figura 3.5 utilizando a abordagem *level sets*.

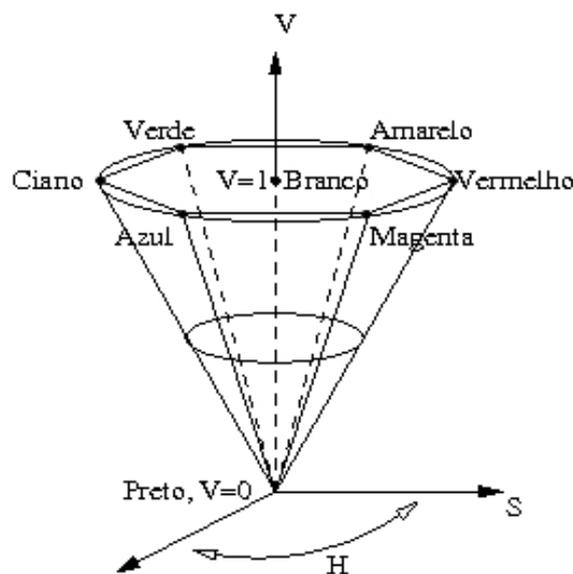


Figura 3.7: Interpretação geométrica do sistema de cores HSV.

como vermelho ou verde. Branco, preto e os tons de cinza não possuem *hue*, por isso são ditos acromáticos. Os ângulos 0° , 60° , 120° , 180° , 240° e 300° correspondem as cores *vermelho*, *amarelo*, *verde*, *ciano*, *azul* e *magenta*, respectivamente. No ângulo 360° a cor volta a ser *vermelho*. A *saturação*, com valores no intervalo $[0, 1]$, refere-se a quantidade de branco ou “pureza” da cor. Finalmente, o *valor* refere-se a intensidade de brilho de uma determinada cor. O *valor* varia de 0, cor negra onde os valores de *hue* e *saturação* são irrelevantes, até 1, onde a intensidade de brilho é máxima.

A Figura 3.7 apresenta uma interpretação geométrica do espaço de cores HSV. A altura do cone corresponde ao *valor*. A distância da cor ao eixo principal do cone determina a *saturação*. Finalmente, o ângulo corresponde ao *hue*. As equações para converter cores do espaço de cores RGB para o espaço de cores HSV podem ser encontradas em [50].

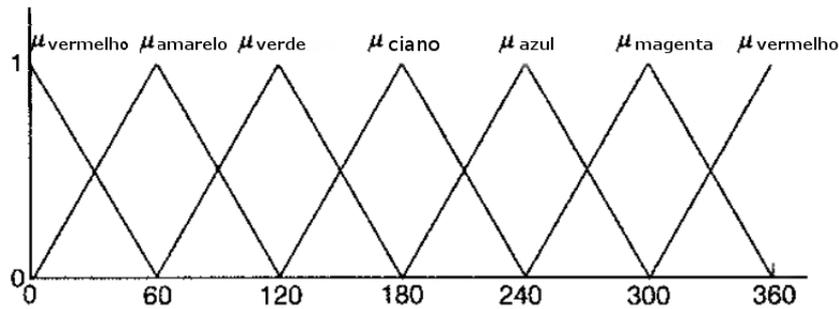


Figura 3.8: Conjuntos *fuzzy* que descrevem as cromaticidades *vermelho*, *amarelo*, *verde*, *ciano*, *azul* e *magenta*.

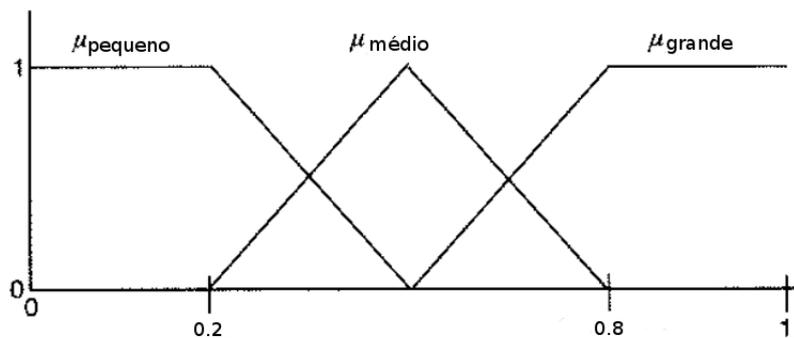


Figura 3.9: Conjuntos *fuzzy* que descrevem os conceitos *pequeno*, *médio* e *grande*.

3.4.1 Modelo de Louverdis para Morfologia Matemática Coloridas

No trabalho [27], Louverdis *et al.* criaram um sistema de regras *fuzzy se-então* em que as variáveis de entrada são os valores h , s , v de um pixel e a saída é um número que será usado para ordenar as cores. Especificamente, Louverdis *et al.* definiram conjuntos *fuzzy* triangulares, conforme apresentado na Figura 3.8, para representar as cromaticidades *vermelho*, *amarelo*, *verde*, *ciano*, *azul* e *magenta*. De um modo similar, a *saturação* e o *valor* são caracterizados por três conjuntos *fuzzy* cada, como na Figura 3.9.

A saída do sistema *fuzzy*, denotado por f e referido como plano ordenado, é um número real entre 0 e 100. Considerando os 6 conjuntos *fuzzy* do *hue*, os 3 conjuntos *fuzzy* da *saturação* e os 3 do *valor*, temos 54 combinações entre eles. Assim, o universo do plano ordenado é dividido em 54 partes, que são modeladas com conjuntos *fuzzy* L1, L2, ..., L54, como apresentado na Figura 3.10.

O sistema *fuzzy* utiliza 54 regras *se-então*, onde cada regra relaciona uma combinação entre as descrições dos valores h , s , v com um dos 54 conjuntos do plano ordenado.

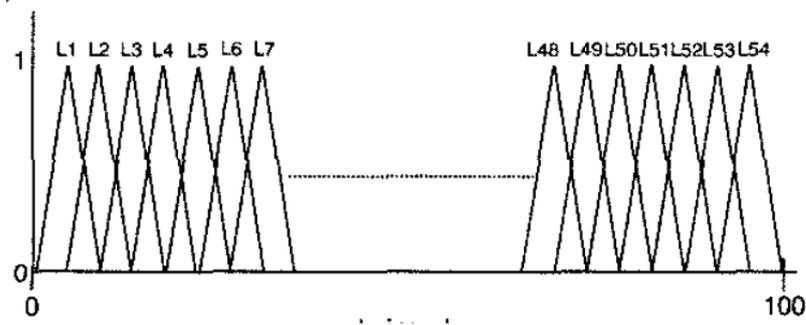


Figura 3.10: Conjuntos *fuzzy* L1, L2, L3, ..., L54 no universo do plano ordenado.

A forma geral dessas regras é:

$$\text{Se } \textit{valor} \text{ é } \left\{ \begin{array}{c} \textit{pequeno} \\ \textit{médio} \\ \textit{grande} \end{array} \right\} \text{ e } \textit{saturação} \text{ é } \left\{ \begin{array}{c} \textit{grande} \\ \textit{médio} \\ \textit{pequeno} \end{array} \right\} \text{ e } \textit{hue} \text{ é } \left\{ \begin{array}{c} \textit{vermelho} \\ \textit{magenta} \\ \textit{azul} \\ \textit{amarelo} \\ \textit{ciano} \\ \textit{verde} \end{array} \right\} \quad (3.40)$$

$$\text{então o nível do plano ordenado é } \left\{ \begin{array}{c} \text{L1} \\ \text{L2} \\ \text{L3} \\ \vdots \\ \text{L54} \end{array} \right\}. \quad (3.41)$$

Observe que as regras *fuzzy* primeiro dividem o plano ordenado com respeito ao *valor*. Se v é *pequeno*, então o plano ordenado varia entre os conjuntos L1 e L18. Se v é *médio*, então o nível do plano ordenado varia entre L19 e L36. Se v é *grande*, então o nível do plano ordenado varia entre L37 e L54. Depois, cada uma dessas regiões é subdividida de acordo com a entrada *saturação* (s) em três subníveis. O primeiro se s é *grande*, o segundo se s é *médio* e o terceiro se s é *pequeno*. Por último, cada subnível destes é dividido em 6 partes, uma para cada cromaticidade da entrada *hue*. A ordem das cromaticidades é *vermelho, magenta, azul, amarelo, ciano, verde*. Segundo Louverdis, esta ordem está baseada na percepção de cor do olho humano [27].

Finalmente, o plano ordenado f de uma certa cor é obtido utilizando o método de Mamdani seguido do método de defuzificação do centro de área [35]. Denotaremos por $\ell: \mathbb{V}_{HSV} \rightarrow [0, 100]$ a função que leva uma cor no sistema HSV ao plano ordenado. Além disso, denotaremos por \mathbb{V}_{fHSV} o produto cartesiano $[0, 100] \times \mathbb{V}_{HSV}$. Precisamente, um elemento x no sistema \mathbb{V}_{fHSV} corresponde à $[f \ v \ s \ h]$, em que h , s e v são as componentes no sistema HSV e $f = \ell([h \ s \ v])$ corresponde ao plano ordenado.

O plano ordenado foi utilizado por Louverdis *et al.* para definir uma pré-

ordem no espaço de cores HSV. Especificamente, dadas duas cores $\mathbf{x}_1 = [f_1 \ h_1 \ s_1 \ v_1]$ e $\mathbf{x}_2 = [f_2 \ h_2 \ s_2 \ v_2]$ em f HSV, eles definiram $\mathbf{x}_1 < \mathbf{x}_2$ se $f_1 < f_2$ e $\mathbf{x}_1 \equiv \mathbf{x}_2$ quando $f_1 = f_2$. Note que duas cores distintas podem ser consideradas equivalentes nesse caso. Consequentemente, o conjunto \mathbb{V}_{fHSV} não representa um reticulado com essa pré-ordem.

Em vista disso, introduzimos uma ordem condicional (*c-ordering*) entre as cores no sistema \mathbb{V}_{fHSV} . A ordem condicional é uma ordem total [4] bastante sensível ao primeiro argumento analisado. Para diminuir essa sensibilidade tomamos o maior inteiro menor que f como primeiro argumento. Essa estratégia é motivada pela ordem lexicográfica α -modulo de Angulo e Serra [3].

A ordem é definida como:

$$\mathbf{x}_1 \leq \mathbf{x}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \lfloor f_1 \rfloor < \lfloor f_2 \rfloor \text{ ou} \\ \lfloor f_1 \rfloor = \lfloor f_2 \rfloor \text{ e } v_1 < v_2 \text{ ou} \\ \lfloor f_1 \rfloor = \lfloor f_2 \rfloor, v_1 = v_2 \text{ e } s_1 > s_2 \text{ ou} \\ \lfloor f_1 \rfloor = \lfloor f_2 \rfloor, v_1 = v_2, s_1 = s_2 \text{ e } h_1 \leq h_2. \end{cases} \quad (3.42)$$

Observe que, nessa ordem, primeiro comparamos os valores inteiros do plano ordenado das duas cores. Caso $\lfloor f_1 \rfloor = \lfloor f_2 \rfloor$, analisamos o *valor* pois, segundo Louverdis *et al.*, essa componente é mais perceptível que as demais [27]. Se $v_1 = v_2$, analisamos a saturação. Por último, caso as cores tenham o mesmo plano ordenado, valor e saturação, comparamos o *hue*. Note que $\mathbf{x}_1 \leq \mathbf{x}_2$ e $\mathbf{x}_2 \leq \mathbf{x}_1$ se e somente se $[h_1 \ s_1 \ v_1] = [h_2 \ s_2 \ v_2]$.

Teorema 3.26. *O conjunto \mathbb{V}_{fHSV} com a ordem definida em (3.42) é um reticulado completo Brouweriano.*

Demonstração. Seja $S \subseteq \mathbb{V}_{fHSV}$ um subconjunto qualquer. Mostraremos que S possui supremo e ínfimo. Observe que $[0, 1]$, $[0, 100]$ e $[0, 360]$ são reticulados completos.

Desta forma, tomando $\mathbf{u} = [f_0 \ h_0 \ s_0 \ v_0]$, onde:

$$f_0 = \bigvee \{f \in [0, 100] : [f \ h \ s \ v] \in S\}, \quad (3.43)$$

$$v_0 = \bigvee \{v \in [0, 1] : [f \ h \ s \ v] \in S, \lfloor f \rfloor = \lfloor f_0 \rfloor\}, \quad (3.44)$$

$$s_0 = \bigwedge \{s \in [0, 1] : [f \ h \ s \ v] \in S, \lfloor f \rfloor = \lfloor f_0 \rfloor, v = v_0\}, \quad (3.45)$$

$$h_0 = \bigvee \{h \in [0, 360] : [f \ h \ s \ v] \in S, \lfloor f \rfloor = \lfloor f_0 \rfloor, v = v_0, s = s_0\}. \quad (3.46)$$

Note que construímos \mathbf{u} através das condições da ordem definida em (3.42), de maneira que $\mathbf{u} = \bigvee S$. Logo, existe supremo de S e, de forma análoga podemos mostrar que existe ínfimo de S . Portanto \mathbb{V}_{fHSV} é um reticulado completo.

A ordem total garante que \mathbb{V}_{fHSV} é um reticulado Brouweriano, pois toda cadeia é Brouweriana [7]. Portanto o conjunto \mathbb{V}_{fHSV} com a ordem total definida em (3.42) é um reticulado completo Brouweriano. \square

O resíduo de duas cores $\mathbf{x}_1 = [f_1 \ h_1 \ s_1 \ v_1]$ e $\mathbf{x}_2 = [f_2 \ h_2 \ s_2 \ v_2]$ em \mathbb{V}_{fHSV} é dado por:

$$\mathbf{x}_1/\mathbf{x}_2 = \begin{cases} \bigvee \mathbb{V}_{fHSV} & \text{se } \mathbf{x}_2 \leq \mathbf{x}_1, \\ [f_1 \ h_1 \ s_1 \ v_1] & \text{se } \mathbf{x}_1 < \mathbf{x}_2. \end{cases} \quad (3.47)$$

O supremo e o ínfimo de \mathbb{V}_{fHSV} são dados por:

$$\bigvee \mathbb{V}_{fHSV} = [100 \ 120 \ 0 \ 1] \quad \text{e} \quad \bigwedge \mathbb{V}_{fHSV} = [0 \ 0 \ 1 \ 0]. \quad (3.48)$$

Entretanto, da maneira como foi construído o sistema de regras *fuzzy* e a ordem em \mathbb{V}_{fHSV} , embora o contradomínio de ℓ seja o intervalo $[0, 100]$, o menor valor que ℓ pode atingir é 1.81 e o maior é 98.11, que são a defuzificação dos conjuntos L1 e L54 respectivamente. Desta maneira, em termos práticos valem:

$$\bigvee \mathbb{V}_{fHSV} = [98 \ 120 \ 0 \ 1] \quad \text{e} \quad \bigwedge \mathbb{V}_{fHSV} = [1 \ 0 \ 1 \ 0]. \quad (3.49)$$

Louverdis *et al.* definiram a dilatação e a erosão para imagens coloridas de maneira análoga à abordagem da umbra. Por exemplo, a erosão, utiliza a seguinte operação em \mathbb{V}_{HSV} : Dados $[h_1, s_1, v_1], [h_2, s_2, v_2] \in \mathbb{V}_{HSV}$,

$$[h_1, s_1, v_1] \div [h_2, s_2, v_2] = [(h_1 - h_2) \vee 0, (s_1 - s_2) \vee 0, (v_1 - v_2) \vee 0]. \quad (3.50)$$

Assim, a erosão de uma imagem $\mathbf{g} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{V}_{HSV}$ por um elemento estruturante $\mathbf{s} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{V}_{HSV}$ foi definida como a seguinte operação [27]:

$$(\mathbf{g} \ominus_{\psi} \mathbf{s})(\mathbf{x}) = \bigwedge_{\mathbf{z} \in \mathbb{X}} \{\mathbf{g}(\mathbf{z}) \div \mathbf{s}(\mathbf{z} - \mathbf{x})\}. \quad (3.51)$$

O exemplo abaixo mostra que a operação definida na Equação (3.51) não comuta com o ínfimo e, pela Definição 3.9, \ominus_{ψ} não é uma erosão.

Exemplo 3.27. Considere o elemento estruturante $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = [180 \ 0 \ 0] \in \mathbb{V}_{HSV}$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$, e duas imagens $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{V}_{HSV}$ tais que, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$, temos que $\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = [120 \ 0 \ 0]$ e $\mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = [300 \ 0 \ 0]$.

Veja que $[300 \ 0 \ 0] \leq [120 \ 0 \ 0]$ e $[0 \ 0 \ 0] \leq [120 \ 0 \ 0]$ porque $\ell([300 \ 0 \ 0]) = 25$, $\ell([120 \ 0 \ 0]) = 32$ e $\ell([0 \ 0 \ 0]) = 23$. Por um lado,

$$\left[[\mathbf{g}_1 \wedge \mathbf{g}_2] \ominus_{\psi} \mathbf{s} \right](\mathbf{x}) = \bigwedge_{\mathbf{z} \in \mathbb{X}} \left\{ (\mathbf{g}_1 \wedge \mathbf{g}_2)(\mathbf{z}) \div \mathbf{s}(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \right\} \quad (3.52)$$

$$= \left[\left([120 \ 0 \ 0] \wedge [300 \ 0 \ 0] \right) \div [180 \ 0 \ 0] \right] \quad (3.53)$$

$$= \left[[300 \ 0 \ 0] \div [180 \ 0 \ 0] \right] \quad (3.54)$$

$$= [120 \ 0 \ 0]. \quad (3.55)$$

Por outro lado,

$$(\mathbf{g}_1 \ominus_\psi \mathbf{s})(\mathbf{x}) = \bigwedge_{\mathbf{z} \in \mathbb{X}} \{\mathbf{g}_1(\mathbf{z}) \dot{-} \mathbf{s}(\mathbf{z} - \mathbf{x})\} = ([120 \ 0 \ 0] \dot{-} [180 \ 0 \ 0]) = [0 \ 0 \ 0], \quad (3.56)$$

e

$$(\mathbf{g}_2 \ominus_\psi \mathbf{s})(\mathbf{x}) = \bigwedge_{\mathbf{z} \in \mathbb{X}} \{\mathbf{g}_2(\mathbf{z}) \dot{-} \mathbf{s}(\mathbf{z} - \mathbf{x})\} = ([300 \ 0 \ 0] \dot{-} [180 \ 0 \ 0]) = [120 \ 0 \ 0]. \quad (3.57)$$

Logo,

$$\left[(\mathbf{g}_1 \ominus_\psi \mathbf{s})(\mathbf{x}) \wedge (\mathbf{g}_2 \ominus_\psi \mathbf{s})(\mathbf{x}) \right] = [0 \ 0 \ 0] \wedge [120 \ 0 \ 0] = [0 \ 0 \ 0] \quad (3.58)$$

Portanto,

$$\left[(\mathbf{g}_1 \wedge \mathbf{g}_2) \ominus_\psi \mathbf{s} \right](\mathbf{x}) \neq \left[(\mathbf{g}_1 \ominus_\psi \mathbf{s})(\mathbf{x}) \wedge (\mathbf{g}_2 \ominus_\psi \mathbf{s})(\mathbf{x}) \right] \quad (3.59)$$

O que mostra que a operação \ominus_ψ não comuta com o mínimo.

Para contornar este problema, neste ponto também seguimos um caminho diferente, definindo os operadores de dilatação e erosão como na abordagem do *level sets*.

A dilatação e a erosão para imagens coloridas são definidas utilizando a ordem total definida na equação (3.42) e o resíduo definido na equação (3.47):

$$(\mathbf{g} \oplus_c \mathbf{s})(\mathbf{x}) = \bigvee_{\mathbf{y} \in \mathbb{X}} \mathbf{s}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \wedge \mathbf{g}(\mathbf{y}), \quad (3.60)$$

$$(\mathbf{g} \ominus_c \mathbf{s})(\mathbf{x}) = \bigwedge_{\mathbf{y} \in \mathbb{X}} (\mathbf{g}(\mathbf{y}) / \mathbf{s}(\mathbf{y} - \mathbf{x})). \quad (3.61)$$

Exemplo 3.28. Na Figura 3.11 apresentamos as representações de uma imagem colorida (a), da dilatação (b) e erosão (c) definidas como definidas na equação (3.61) utilizando como elemento estruturante um quadrado 3×3 branco.

Observe que a dilatação marca o elemento estruturante nas regiões com cores claras da imagem, como por exemplo próximo ao olho da ave azul e amarela. Já a erosão escurece algumas partes com cores claras, por exemplo a região próxima ao olho da ave vermelha, mas a erosão marca o supremo do reticulado (cor branca) em outras partes claras da imagem, como por exemplo em partes do bico da ave vermelha.

A abertura e o fechamento são encontrados da mesma maneira que nas abordagens anteriores, ou seja, a abertura da imagem \mathbf{g} por um elemento estruturante \mathbf{s} , denotada por $\mathbf{g} \circ_c \mathbf{s}$, é obtida realizando a erosão e em seguida a dilatação, já o fechamento, denotado $\mathbf{g} \bullet_c \mathbf{s}$, é obtido realizando a dilatação e em seguida a erosão. O gradiente morfológico é a imagem em tons de cinza definido como a distância euclidiana, ponto a ponto, da dilatação pela erosão.

Exemplo 3.29. Na Figura 3.12 apresentamos a abertura (a), o fechamento (b) e o complemento do gradiente morfológico normalizado (c) da imagem apresentada na Figura 3.11. Em (c) é



Figura 3.11: (a) Imagem colorida 512×512 pixels, (b) dilatação da abordagem baseada no reticulado $\nabla_{f_{HSV}}$ e (c) erosão da abordagem baseada no reticulado $\nabla_{f_{HSV}}$.



Figura 3.12: Abertura, fechamento e gradiente morfológico da imagem apresentada na Figura 3.11.

apresentado o complemento do gradiente morfológico para facilitar a visualização na folha de papel. O gradiente morfológico normalizado é obtido dividindo o valor do gradiente por $\sqrt{3}$, fornecendo assim uma imagem em tons de cinza com valores em $[0, 1]$. Note que o gradiente morfológico traça o contorno dos desenhos na imagem.

4 MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS MORFOLÓGICAS

Neste capítulo faremos uma breve revisão sobre as MAMs, em especial as MAMs de Ritter e Sussner [38, 39], as memórias associativas *fuzzy* implicativas introduzidas por Valle e Sussner [56, 63] e as memórias associativas esparsas em reticulados completos estudadas por Valle e Grande Vicente [60, 67].

As memórias associativas (AMs, do termo inglês *associative memories*) são inspiradas na capacidade do cérebro humano de armazenar e recordar informações por associação [2, 5, 18, 23, 33]. Por exemplo, ao vermos algum trecho de um livro que já lemos, recordamos de todo o assunto do livro. Investigações de como o cérebro é capaz de fazer tais associações tem levado a vários modelos de redes neurais que atuam como memórias associativas [39].

As AMs são aplicadas em várias áreas da ciência. Por exemplo para reconhecimento e classificação de padrões [71, 72], problemas de otimização [20], localização de faces e visão computacional [13, 36, 53] entre outros.

O conjunto das memórias fundamentais é um conjunto de pares de associações $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, p\} \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, onde os conjuntos \mathcal{X} e \mathcal{Y} englobam todos os possíveis itens memorizados. A AM é um modelo que armazena esses pares de associações. Um modelo de AM pode ser descrito, matematicamente, como uma aplicação $\mathcal{W} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ tal que, $\mathcal{W}(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{y}^\xi$ para todo $\xi = 1, \dots, p$. Além disso, a aplicação \mathcal{W} deve ser capaz de recordar o padrão memorizado mesmo que um padrão ruidoso ou incompleto seja apresentado para a AM.

As AMs podem ser classificadas como hetero-associativas ou auto-associativas. Uma memória é dita auto-associativa se o conjunto das memórias fundamentais é da forma $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{x}^\xi) : \xi = 1, \dots, p\}$, isto é, $\mathbf{x}^\xi = \mathbf{y}^\xi$ para todo $\xi = 1, \dots, p$. Caso contrário, isto é, se $\mathbf{x}^\xi \neq \mathbf{y}^\xi$ para algum ξ entre 1 e p , então a AM é dita hetero-associativa. Desta maneira, uma AM é hetero-associativa se ela associa um elemento a outro elemento distinto, por exemplo quando associamos o título de um livro ao seu conteúdo. Por outro lado, uma AM é auto-associativa se ela associa um elemento a ele mesmo, como quando vemos uma pessoa e lembramos dela.

Os primeiros modelos de memórias associativas baseadas na MM, referidos como MAMs, foram introduzidas por Ritter e Sussner em meados dos anos 1990 [38, 39]. Especificamente, os neurônios das MAMs tradicionais efetuam generalizações das operações da abordagem umbra para a MM em tons de cinza.

Em termos gerais, a principal diferença entre os modelos clássicos de memórias associativas e os modelos morfológicos está em utilizar as operações baseadas em reticulados no lugar das operações usuais de multiplicação de matrizes [39].

Nos últimos anos, observou-se um crescente interesse em modelos de AMs para imagens coloridas. De um modo geral, existe na literatura duas abordagens distintas para generalizar uma AM em tons de cinza para trabalhar com imagens coloridas.

Uma das abordagens é baseada na representação em 24-bits de imagens digitais coloridas, em que o valor de cada pixel varia de 0 a $2^{24} - 1$. Essa abordagem foi adotada, por exemplo, por Monteros e Azuela [66].

Outra abordagem, empregada por Zheng *et al.* [73], utiliza o sistema de cor RGB. Nessa abordagem, uma imagem colorida corresponde à três imagens em tons de cinza, uma para cada canal de cor.

Por outro lado, a classe das memórias auto-associativas esparsas em reticulados completos (MAERCs), apresentadas em detalhes por Valle e Grande Vicente em [60, 67], não é baseada em modelos em tons de cinza. Com efeito, eles tinham como objetivo desenvolver um modelo de memória associativa capaz de armazenar e recordar padrões definidos em reticulados completos arbitrários. Em geral, as MAERCs requerem menos recursos computacionais que os modelos tradicionais e possuem desempenho superior à ruído gaussiano.

Do ponto de vista teórico, as MAERCs são definidas em uma estrutura de reticulado completo, enquanto que as MAMs em tons de cinza são definidas num reticulado com extensão de grupo que, além da estrutura de reticulado, requer duas operações binárias adicionais [67].

4.1 MAMS DE RITTER E SUSSNER

As MAMs introduzidas por Ritter e Sussner são definidas em termos de operações matriciais não-lineares definidas numa sub-álgebra da álgebra de imagens [37, 42, 43], chamada álgebra minimax [10]. Na álgebra minimax, as operações de soma e multiplicação são substituídas por operações de reticulados.

As MAMs tradicionais podem ser utilizadas para armazenamento de imagens binárias e em tons de cinza, e tem sido aplicadas com sucesso para análise de imagens hiperespectrais [14, 41, 40] e para reconstrução de imagens em tons de cinza corrompidas [55].

Do ponto de vista teórico, as MAMs tradicionais são definidas em uma estrutura chamada *extensão de reticulado completo com ordem de grupo*, ou extensão de l-grupo completo [54]. Um reticulado \mathbb{L} é um l-grupo se $(\mathbb{L}, +)$, para uma certa operação $+$, é um grupo e se toda translação de grupo é isótona. Uma extensão de l-grupo completo é um reticulado completo cujo conjunto dos elementos finitos formam um l-grupo.

Para que a extensão de l-grupo seja consistente, são definidas duas operações “+” e “+’” da seguinte maneira:

$$\bigwedge \mathbb{L} + \bigvee \mathbb{L} = \bigvee \mathbb{L} + \bigwedge \mathbb{L} = \bigwedge \mathbb{L} \quad \text{e} \quad \bigwedge \mathbb{L} +' \bigvee \mathbb{L} = \bigvee \mathbb{L} +' \bigwedge \mathbb{L} = \bigvee \mathbb{L}. \quad (4.1)$$

Assim, uma extensão de l-grupo completo pode ser denotado por $(\mathbb{L}, \wedge, \vee, +, +')$.

Exemplo 4.1. Um exemplo de extensão de l-grupo completo é $(\bar{\mathbb{R}}, \wedge, \vee, +, +')$ onde $+$ e $+$ '

coincidem com a operação usual de adição em \mathbb{R} e:

$$(-\infty) + (+\infty) = (+\infty) + (-\infty) = (-\infty) \quad \text{e} \quad (-\infty) +' (+\infty) = (+\infty) +' (-\infty) = (+\infty). \quad (4.2)$$

Numa extensão de l-grupo completo, todo elemento $x \in \mathbb{L}$ possui um conjugado $x^* \in \mathbb{L}$, definido como [10]:

$$x^* = \begin{cases} -x, & \text{se } x \notin \{\wedge \mathbb{L}, \vee \mathbb{L}\}, \\ \wedge \mathbb{L}, & \text{se } x = \vee \mathbb{L}, \\ \vee \mathbb{L}, & \text{se } x = \wedge \mathbb{L}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Seja \mathbb{L} um l-grupo, o conjugado de uma matriz $A \in \mathbb{L}^{m \times n}$ é a matriz $A^* \in \mathbb{L}^{n \times m}$ dada por

$$[A^*]_{ij} = [A]_{ji}, \quad (4.4)$$

para todo $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$. Note que $(A^*)^* = A$.

A operação de máximo e de mínimo entre duas matrizes com dimensões compatíveis em um l-grupo \mathbb{L} é calculada componente a componente, ou seja, dados $A, B \in \mathbb{L}^{m \times n}$, $C = A \vee B$ e $D = A \wedge B$ são dados por:

$$[C]_{ij} = [A]_{ij} \vee [B]_{ij} \quad \text{e} \quad [D]_{ij} = [A]_{ij} \wedge [B]_{ij}. \quad (4.5)$$

As operação produto máximo e produto mínimo são parecidas com o produto usual de matriz. Dadas duas matrizes, $A \in \mathbb{L}^{m \times p}$ e $B \in \mathbb{L}^{p \times n}$, as operações produto máximo e produto mínimo são definidas respectivamente como $C = A \boxtimes B$ e $D = A \boxdot B$, onde:

$$[C]_{ij} = \bigvee_{k=1}^p ([A]_{ik} + [B]_{kj}) \quad \text{e} \quad [D]_{ij} = \bigwedge_{k=1}^p ([A]_{ik} +' [B]_{kj}). \quad (4.6)$$

Ritter e Sussner definiram as MAMs tradicionais como uma aplicação $\mathcal{W}_{XY} : \bar{\mathbb{R}}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^m$, definida utilizando uma matriz $W_{XY} \in \bar{\mathbb{R}}^{m \times n}$ e o produto máximo, ou a aplicação $\mathcal{M}_{XY} : \bar{\mathbb{R}}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^m$, definida utilizando uma matriz $M_{XY} \in \bar{\mathbb{R}}^{m \times n}$ e a aplicação produto mínimo, da seguinte maneira:

$$\mathcal{W}_{XY}(\mathbf{x}) = W_{XY} \boxtimes \mathbf{x} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_{XY}(\mathbf{x}) = M_{XY} \boxdot \mathbf{x}, \quad (4.7)$$

para todo padrão de entrada $\mathbf{x} \in \bar{\mathbb{R}}^n$.

A fase de armazenamento das MAMs tradicionais consiste em definir as matrizes de pesos sinápticos W_{XY} ou M_{XY} . Dado um conjunto de memórias fundamentais

$\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, p\} \subseteq \bar{\mathbb{R}}^n \times \bar{\mathbb{R}}^m$, as matrizes W_{XY} e M_{XY} são definidas como:

$$W_{XY} = \bigwedge_{\xi=1}^p \mathbf{y}^\xi \boxtimes (\mathbf{x}^\xi)^* \quad \text{e} \quad M_{XY} = \bigvee_{\xi=1}^p \mathbf{y}^\xi \boxtimes (\mathbf{x}^\xi)^*. \quad (4.8)$$

Não existe um limite máximo de padrões que as MAMs tradicionais possam armazenar, e elas possuem convergência em uma única iteração quando aplicadas recursivamente [39, 55]. Além disso, elas se mostraram excelentes na reconstrução de imagens incompletas. Porém, as MAMs tradicionais não são eficientes na remoção de ruído gaussiano ou do tipo sal-e-pimenta.

A próxima proposição garante que, no caso auto-associativo, as MAMs tradicionais são ótimas no sentido de, se existir uma matriz A tal que $A \boxtimes \mathbf{x}^\xi = \mathbf{x}^\xi$ para todo $\xi = 1, \dots, p$ então a matriz de pesos sinápticos W_{XX} também satisfaz $W_{XX} \boxtimes \mathbf{x}^\xi = \mathbf{x}^\xi$ para todo ξ . De maneira semelhante, se existe uma matriz B tal que $B \boxtimes \mathbf{x}^\xi = \mathbf{x}^\xi$ para todo $\xi = 1, \dots, p$ então a matriz de pesos sinápticos M_{XX} também satisfaz $M_{XX} \boxtimes \mathbf{x}^\xi = \mathbf{x}^\xi$ para todo ξ .

Proposição 4.2. *Dado um conjunto de memórias fundamentais $\{\mathbf{x}^\xi : \xi = 1, \dots, p\} \subseteq \bar{\mathbb{R}}^n$, as matrizes W_{XX} e M_{XX} definidas na equação (4.8) satisfazem as seguintes equações [39]:*

$$W_{XX} = \bigvee \{A \in \bar{\mathbb{R}}^{n \times n} : A \boxtimes \mathbf{x}^\xi \leq \mathbf{x}^\xi, \forall \xi = 1, \dots, p\}, \quad (4.9)$$

e

$$M_{XX} = \bigwedge \{A \in \bar{\mathbb{R}}^{n \times n} : A \boxtimes \mathbf{x}^\xi \geq \mathbf{x}^\xi, \forall \xi = 1, \dots, p\}. \quad (4.10)$$

4.2 IFAM DE GÖDEL

No início dos anos 1990, outra classe de memórias associativas, chamadas memórias associativas *fuzzy* (FAM, do termo inglês *fuzzy associative memories*), foram introduzidas por Kosko [24, 25] e desenvolvida posteriormente por diversos pesquisadores.

As FAMs de Kosko são definidas utilizando as operações matriciais max-min e max-produto. Dadas duas matrizes A de dimensões $m \times p$ e B de dimensões $p \times n$, as matrizes C do produto matricial max-min e D do produto matricial max-produto tem dimensões $m \times n$ e são dadas por:

$$[C]_{ij} = \bigvee_{k=1}^p ([A]_{ik} \wedge [B]_{kj}) \quad \text{e} \quad [D]_{ij} = \bigvee_{k=1}^p ([A]_{ik} \cdot [B]_{kj}) \quad (4.11)$$

Chung e Lee generalizaram o modelo de Kosko substituindo o mínimo e o produto por uma t-norma qualquer [8]. Uma operação matricial semelhante aquela apresentada na equação (4.6) pode ser definida combinando a operação de máximo com uma t-norma [22, 35]. Dadas duas matrizes $A \in [0, 1]^{m \times p}$ e $B \in [0, 1]^{p \times n}$, o produto max-T de A por B , denotado

por $C = A \boxplus B$, é definido como:

$$[C]_{ij} = \bigvee_{k=1}^p ([A]_{ik} \mathfrak{t} [B]_{kj}), \quad \forall i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, n. \quad (4.12)$$

O modelo da FAM generalizada de Chung e Lee, ou GFAM (do termo inglês, *generalized fuzzy associative memory*), é descrita como uma aplicação $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^m$ definida para todo $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$ como:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mathbf{x}) = M_{\mathcal{CL}} \boxplus \mathbf{x}, \quad (4.13)$$

para $M_{\mathcal{CL}} \in [0, 1]^{m \times n}$.

A fase de armazenamento da GFAM consiste em definir as matrizes de pesos sinápticos $M_{\mathcal{CL}}$. Dado um conjunto de memórias fundamentais $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, p\}$, com $\mathbf{x}^\xi \in [0, 1]^n$ e $\mathbf{y}^\xi \in [0, 1]^m$, a matriz $M_{\mathcal{CL}}$ é definida como:

$$[M_{\mathcal{CL}}]_{ij} = \bigvee_{\xi=1}^p (y_i^\xi \mathfrak{t} x_j^\xi), \quad \forall i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, n. \quad (4.14)$$

As GFAMs não possuem bons resultados devido a interferência cruzada. Esse fenômeno acontece devido à estratégia de armazenamento da GFAM não levar em conta a equação (4.13) que descreve a memória. As memórias associativas *fuzzy* implicativas (IFAMs, do termo inglês *implicative fuzzy associative memories*), introduzidas por Valle e Sussner, podem ser vistas como versões melhoradas das GFAMs [63].

As IFAMs utilizam o armazenamento implicativo [56, 63], que também é chamado de armazenamento por adjunção [59, 61]. O armazenamento implicativo é ótimo no sentido de fornecer a maior FAM $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^m$ tal que $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mathbf{x}^\xi) \leq \mathbf{y}^\xi$ para todo $\xi = 1, \dots, p$. A matriz dos pesos sinápticos da IFAM é definida como:

$$M_{\mathcal{VS}} = \bigvee \{A \in [0, 1]^{m \times n} : A \boxplus \mathbf{x}^\xi \leq \mathbf{y}^\xi, \forall \xi = 1, \dots, p\}. \quad (4.15)$$

A próxima proposição dá uma maneira prática de calcular a matriz $M_{\mathcal{VS}}$ utilizando a implicação *fuzzy* $\Rightarrow_{\mathfrak{t}}$ que forma uma adjunção com a t-norma usada no produto max-T

Proposição 4.3. *Dado um conjunto de associações $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, p\} \in [0, 1]^n \times [0, 1]^m$, a matriz M definida por*

$$[M]_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^p (x_j^\xi \Rightarrow_{\mathfrak{t}} y_i^\xi), \quad \forall i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, n, \quad (4.16)$$

é solução de:

$$M_{\mathcal{VS}} = \bigvee \{A \in [0, 1]^{m \times n} : A \boxplus \mathbf{x}^\xi \leq \mathbf{y}^\xi, \forall \xi = 1, \dots, p\}. \quad (4.17)$$

O armazenamento implicativo utilizando a implicação de Gödel (\Rightarrow_m) que forma uma adjunção com a t-norma do mínimo (t_m) é chamada de IFAM de Gödel. Especificamente, a IFAM de Gödel \mathcal{M}_G é descrita pela equação:

$$[\mathcal{M}_G(\mathbf{x})]_i = \bigvee_{j=1}^m \left([\mathcal{M}_G]_{ij} \wedge \mathbf{x}_j \right), \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (4.18)$$

em que a matriz dos pesos sinápticos \mathcal{M}_G é dada por:

$$[\mathcal{M}_G]_{ij} = \bigvee_{\xi=1}^p \left(x_i^\xi \Rightarrow_m y_i^\xi \right) = \bigvee_{\xi=1}^p \left(x_i^\xi / y_i^\xi \right), \quad \forall i = 1, \dots, n \text{ e } j = 1, \dots, m. \quad (4.19)$$

A MAM Brouweriana definida no próximo capítulo generaliza a IFAM de Gödel.

4.3 MEMÓRIAS AUTO-ASSOCIATIVAS ESPARSAS EM RETICULADOS COMPLETOS

As memórias auto-associativas esparsas em reticulados completos (MAERCs), introduzidas por Valle em [60] e estudadas por Grande Vicente em [67], são constituídas por uma simples camada de n neurônios, onde cada neurônio executa uma operação da morfologia matemática.

Dois modelos de memórias são definidos utilizando as operações de supremo e ínfimo. O modelo baseado no supremo é uma dilatação [60], definida como uma aplicação $\mathcal{W}_{\mathcal{V}\mathcal{V}} : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{V}^n$, onde \mathbb{V} é um reticulado completo. Para um padrão de entrada $\mathbf{x} \in \mathbb{V}^n$, a saída $\mathbf{y} = \mathcal{W}_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\mathbf{x})$, é dada por:

$$\mathbf{y}_i = \bigvee_{(j,i) \in \mathcal{S}} \mathbf{x}_j, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (4.20)$$

onde $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$ e $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ é chamado conjunto das junções sinápticas. A memória baseada na operação de ínfimo, que é uma erosão [60], é dada por uma aplicação $\mathcal{M}_{\mathcal{V}\mathcal{V}} : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{V}^n$. Para um padrão de entrada \mathbf{x} , a saída \mathbf{y} é dada por

$$\mathbf{y}_i = \bigwedge_{(i,j) \in \mathcal{S}} \mathbf{x}_j, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (4.21)$$

A fase de armazenamento das MAERCs consiste em determinar o conjunto das junções sinápticas \mathcal{S} . Para armazenar o conjunto de memórias fundamentais $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\} \subset \mathbb{V}^n$, devemos determinar o conjunto \mathcal{S} , tal que:

$$\mathbf{x}_i^\xi = \bigvee_{(j,i) \in \mathcal{S}} \mathbf{x}_j^\xi \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_i^\xi = \bigwedge_{(i,j) \in \mathcal{S}} \mathbf{x}_j^\xi, \quad \forall \xi = 1, \dots, p \quad (4.22)$$

O conjunto $\mathcal{S} = \{(i, i) : \forall i \in \mathcal{N}\}$ satisfaz as equações em (4.22), o que garante pelo menos uma solução. Porém, tomando $\mathcal{S} = \{(i, i) : \forall i \in \mathcal{N}\}$, tornamos $\mathcal{M}_{\mathcal{V}\mathcal{V}}$ ou $\mathcal{W}_{\mathcal{V}\mathcal{V}}$ na

aplicação identidade, tais que $\mathcal{M}_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ ou $\mathcal{W}_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{V}^n$ e, portanto, não fornece nenhuma tolerância a ruído.

Para obter uma memória com tolerância a ruído, o conjunto das junções sinápticas \mathcal{S} das MAERCs é definido como [64]

$$\mathcal{S} = \{(i, j) : \mathbf{x}_i^\xi \leq \mathbf{x}_j^\xi, \quad \forall \xi = 1, \dots, p\}. \quad (4.23)$$

A proposição abaixo, demonstrada em [64], relaciona as MAERCs com as MAMs de Ritter e Sussner.

Proposição 4.4. *Dado um conjunto $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\} \subseteq \mathbb{L}^n$ de memórias fundamentais, onde $\mathbb{L}(\vee, \wedge, +, +')$ é uma extensão de l-grupo completo com elemento neutro 0, defina as MAERCs $\mathcal{M}_{\mathcal{V}\mathcal{V}}$ e $\mathcal{W}_{\mathcal{V}\mathcal{V}}$ por meio das equações (4.20), (4.21) e (4.23). Neste caso, existe uma única matriz de pesos sinápticos $M_{\mathcal{V}\mathcal{V}} \in \mathbb{L}^{n \times n}$ e uma única matriz $W_{\mathcal{V}\mathcal{V}} \in \mathbb{L}^{n \times n}$ tais que:*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = M_{\mathcal{V}\mathcal{V}} \boxtimes \mathbf{x} \quad e \quad \mathcal{W}_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = W_{\mathcal{V}\mathcal{V}} \boxtimes \mathbf{x}, \quad (4.24)$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{L}^n$. Além disso, essas duas matrizes podem ser obtidas das matrizes de pesos sinápticos, M_{XX} e W_{XX} , das MAMs auto-associativas de Ritter e Sussner da seguinte maneira:

$$[M_{\mathcal{V}\mathcal{V}}]_{ij} = \phi_+([M_{XX}]_{ij}) \quad e \quad [W_{\mathcal{V}\mathcal{V}}]_{ij} = \phi_-([M_{XX}]_{ij}), \quad (4.25)$$

onde os operadores $\phi_+ : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ e $\phi_- : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ são definidos como:

$$\phi_+(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0, \\ \vee \mathbb{L}, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (4.26)$$

e

$$\phi_-(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \geq 0, \\ \wedge \mathbb{L}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.27)$$

A Proposição 4.4 revela que as MAERCs podem ser obtidas das MAMs tradicionais. Entretanto, as MAERCs tem um custo computacional muito inferior as MAMs tradicionais, e Valle e Grande Vicente demonstraram que não existe um limite máximo de padrões que as MAERCs possam armazenar, além de convergência em uma única iteração [67].

Do ponto de vista teórico, as MAERCs são definidas em reticulados completos, enquanto as MAMs tradicionais são definidas em uma extensão de l-grupo que, além da estrutura de reticulado, necessita de um grupo com duas operações binárias adicionais. Por outro lado, as MAERCs exibem tolerância a ruído inferior as MAMs tradicionais.

5 MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS MORFOLÓGICAS BROUWERIANAS

Neste capítulo introduziremos as memórias associativas morfológicas Brouwerianas (BMAMs, do termo inglês *Brouwerian morphological associative memories*). Diferente das MAMs tradicionais, as MAMs Brouwerianas são definidas em um reticulado completo Brouweriano.

Suponha que o conjunto das memórias fundamentais é o produto Cartesiano de um reticulado completo Brouweriano \mathbb{L} , ou seja, $\mathcal{X} = \mathbb{L}^n$. Seja $W \in \mathbb{L}^{n \times n}$ a matriz das conexões sinápticas da BMAM. Considerando que o número de elementos em W pode ser inviável em aplicações com n grande, permitimos redes com estrutura esparsa.

Formalmente, denotamos por $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, em que $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$, a topologia de rede no seguinte sentido: se $(i, j) \in \mathcal{T}$, então a saída y_i depende diretamente de x_j . Conseqüentemente, são considerados apenas os elementos w_{ij} tais que $(i, j) \in \mathcal{T}$. Uma rede totalmente conectada é obtida considerando $\mathcal{T} = \mathcal{N} \times \mathcal{N}$. Dizemos que uma rede permite autoconexões se $(i, i) \in \mathcal{T}$ para todo $i \in \mathcal{N}$.

Dado um padrão de entrada $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{L}^n$, o modelo k -iterações da BMAM é a função $\mathcal{W}_k : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ definida como

$$\mathcal{W}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(k), \quad (5.1)$$

onde $\{\mathbf{x}(k)\}_{k=0}^{\infty}$ é a sequência dada por:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x} \quad \text{e} \quad x_i(k) = \bigvee_{(i,j) \in \mathcal{T}} \{w_{ij} \wedge x_j(k-1)\}, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (5.2)$$

Se a sequência $\{\mathbf{x}(k)\}_{k=0}^{\infty}$ é convergente para algum padrão de entrada $\mathbf{x} \in \mathbb{L}^n$, o modelo *-BMAM é a função $\mathcal{W}_* : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ dada por $\mathcal{W}_*(\mathbf{x}) = \lim \mathbf{x}(k)$.

Dado um conjunto de memórias fundamentais $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^p\} \subseteq \mathbb{L}^n$ e uma determinada topologia da rede $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, a matriz dos pesos sinápticos $W \in \mathbb{L}^{n \times n}$ da BMAM é dada por:

$$W = \bigvee \left\{ A \in \mathbb{L}^{n \times n} : \bigvee_{(i,j) \in \mathcal{T}} (a_{ij} \wedge \mathbf{x}_j^\xi) \leq \mathbf{x}_i^\xi, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \forall \xi = 1, \dots, p \right\}. \quad (5.3)$$

Teorema 5.1. *Dado um conjunto de memórias fundamentais $\{\mathbf{x}^\xi : \xi = 1, \dots, p\} \in \mathbb{L}^n$ e uma topologia de rede $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, a matriz dos pesos sinápticos W definida na equação (5.3) é dada por:*

$$w_{ij} = \begin{cases} \bigwedge_{\xi=1}^p (\mathbf{x}_i^\xi / \mathbf{x}_j^\xi), & \text{se } (i, j) \in \mathcal{T}, \\ \bigvee \mathbb{L}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.4)$$

Demonstração. Seja $A \in \mathbb{L}^{n \times n}$ tal que:

$$\bigvee_{(i,j) \in \mathcal{T}} (\mathbf{a}_{ij} \wedge \mathbf{x}_j^\xi) \leq \mathbf{x}_i^\xi, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \forall \xi = 1, \dots, p. \quad (5.5)$$

Para todo $(i, j) \in \mathcal{T}$, vale:

$$(\mathbf{a}_{ij} \wedge \mathbf{x}_j^\xi) \leq \mathbf{x}_i^\xi \quad \forall \xi = 1, \dots, p \quad (5.6)$$

$$\Rightarrow \mathbf{a}_{ij} \leq \mathbf{x}_i^\xi / \mathbf{x}_j^\xi \quad \forall \xi = 1, \dots, p \quad (5.7)$$

$$\Rightarrow \mathbf{a}_{ij} \leq \bigwedge_{\xi=1}^p (\mathbf{x}_i^\xi / \mathbf{x}_j^\xi) = \mathbf{w}_{ij}. \quad (5.8)$$

Além disso, para todo $(i, j) \notin \mathcal{T}$:

$$\mathbf{a}_{ij} \leq \bigvee \mathbb{L} = \mathbf{w}_{ij}. \quad (5.9)$$

Portanto, para todo $i, j = 1, \dots, n$, temos que $\mathbf{a}_{ij} \leq \mathbf{w}_{ij}$, ou seja, W é maior ou igual a A .

Vamos mostrar agora que W satisfaz:

$$\bigvee_{(i,j) \in \mathcal{T}} (\mathbf{w}_{ij} \wedge \mathbf{x}_j^\xi) \leq \mathbf{x}_i^\xi, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \forall \xi = 1, \dots, p. \quad (5.10)$$

Para todo $(i, j) \in \mathcal{T}$ e todo $\xi = 1, \dots, p$, valem:

Se $\mathbf{x}_j^\xi \leq \mathbf{x}_i^\xi$:

$$(\mathbf{w}_{ij} \wedge \mathbf{x}_j^\xi) \leq \mathbf{x}_j^\xi \leq \mathbf{x}_i^\xi. \quad (5.11)$$

Se $\mathbf{x}_j^\xi > \mathbf{x}_i^\xi$:

$$(\mathbf{w}_{ij} \wedge \mathbf{x}_j^\xi) \leq \mathbf{w}_{ij} = \bigwedge_{\gamma=1}^p (\mathbf{x}_i^\gamma / \mathbf{x}_j^\gamma) \leq (\mathbf{x}_i^\xi / \mathbf{x}_j^\xi) = \mathbf{x}_i^\xi. \quad (5.12)$$

Segue que,

$$(\mathbf{w}_{ij} \wedge \mathbf{x}_j^\xi) \leq \mathbf{x}_i^\xi, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{T}, \forall \xi = 1, \dots, p \quad (5.13)$$

$$\Rightarrow \bigvee_{(i,j) \in \mathcal{T}} (\mathbf{w}_{ij} \wedge \mathbf{x}_j^\xi) \leq \mathbf{x}_i^\xi, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \forall \xi = 1, \dots, p. \quad (5.14)$$

Logo,

$$W = \bigvee \left\{ A \in \mathbb{L}^{n \times n} : \bigvee_{(i,j) \in \mathcal{T}} (\mathbf{a}_{ij} \wedge \mathbf{x}_j^\xi) \leq \mathbf{x}_i^\xi, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \forall \xi = 1, \dots, p \right\}. \quad (5.15)$$

□

Como a matriz W é determinada utilizando o resíduo “/” do mínimo do reticulado \mathbb{L} , nos referimos a (5.3) como *armazenamento residual*. O armazenamento residual é ótimo no seguinte sentido: Se existe $A \in \mathbb{L}^{n \times n}$ tal que $\mathbf{x}_i^\xi = \bigvee_{(i,j) \in \mathcal{T}} (\mathbf{a}_{ij} \wedge \mathbf{x}_j^\xi)$ então a matriz W

é tal que $\mathbf{x}_i^\xi = \bigvee_{(i,j) \in \mathcal{T}} (\mathbf{w}_{ij} \wedge \mathbf{x}_j^\xi)$ e $\mathbf{a}_{ij} \leq \mathbf{w}_{ij}$ para todo $(i, j) \in \mathcal{T}$.

Além disso, o teorema a seguir revela que a sequência definida na Equação (5.2) está relacionada com o conjunto

$$\mathcal{F} = \left\{ \mathbf{z} = [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n]^T \in \mathbb{L}^n : \mathbf{z}_i = \bigvee_{(i,j) \in \mathcal{T}} (\mathbf{w}_{ij} \wedge \mathbf{z}_j), \forall i \in \mathcal{N} \right\} \quad (5.16)$$

de todos os pontos fixos da matriz de pesos sinápticos W sujeita à topologia \mathcal{T} . O teorema seguinte mostra que, independente do número de padrões, o conjunto de memórias fundamentais está contido em \mathcal{F} . Portanto, não existe um limite máximo de padrões que a BMAM possa armazenar.

Teorema 5.2. *Dado um conjunto de memórias fundamentais $\{\mathbf{x}^\xi : \xi = 1, \dots, p\} \subseteq \mathbb{L}^n$, seja W a matriz da BMAM definida em (5.3) com uma topologia de rede \mathcal{T} que permite auto-conexões. Então, as seguintes relações são verdadeiras para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{L}^n$ e para todo $k \geq 1$:*

$$\mathbf{x} \leq \mathcal{W}_k(\mathbf{x}) \leq \mathcal{W}_{k+1}(\mathbf{x}) \leq \mathcal{W}_*(\mathbf{x}) = \bigwedge \{ \mathbf{z} \in \mathcal{F} : \mathbf{z} \geq \mathbf{x} \}. \quad (5.17)$$

Além disso, $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^p\} \subseteq \mathcal{F}$ e, portanto, $\mathcal{W}_t(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{x}^\xi$ para todo $\xi = 1, \dots, p$ e para qualquer inteiro t .

Demonstração. Veja que no caso autoassociativo, se a topologia permite auto-conexões, isto é, $(i, i) \in \mathcal{T}$ para todo $i = 1, \dots, n$, então

$$\mathbf{w}_{ii} = \bigwedge_{\xi=1}^p (\mathbf{x}_i^\xi / \mathbf{x}_i^\xi) = \bigvee \mathbb{L}. \quad (5.18)$$

Dado $\mathbf{x} \in \mathbb{L}^n$, temos que:

$$\left[\mathcal{W}_1(\mathbf{x}) \right]_i = \bigvee_{(i,j) \in \mathcal{T}} \{ \mathbf{w}_{ij} \wedge \mathbf{x}_j \} \geq \mathbf{w}_{ii} \wedge \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (5.19)$$

Assim, $\mathcal{W}_1(\mathbf{x}) \geq \mathbf{x}$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{L}^n$.

De modo geral, para todo $t \in \mathbb{N}$ temos:

$$\mathcal{W}_{k+1}(\mathbf{x}) = \mathcal{W}_1(\mathcal{W}_k(\mathbf{x})) \geq \mathcal{W}_k(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{L}^n. \quad (5.20)$$

Portanto, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{L}^n$,

$$\mathbf{x} \leq \mathcal{W}_k(\mathbf{x}) \leq \mathcal{W}_{k+1}(\mathbf{x}), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (5.21)$$

Agora, defina $\mathbf{y} = \bigvee \{ \mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots \} = \bigvee_{k \in \mathbb{N}} \{ \mathbf{x}(k) \}$, onde $\{ \mathbf{x}(k) \}_{k=0}^\infty$ é a sequência definida como $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}$ e $\mathbf{x}(k) = \mathcal{W}_k(\mathbf{x})$. Pela Proposição 13.3 em [18], nós concluímos que a sequência $\{ \mathbf{x}(k) \}_{k=0}^\infty$ é ordem-convergente para \mathbf{y} . Portanto, o modelo \mathcal{W}_* é

bem definido e $\mathcal{W}_*(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Além disso,

$$\mathcal{W}_1(\mathbf{x}(k-1)) = \mathbf{x}(k). \quad (5.22)$$

Aplicando o limite em ambos lados, concluímos que $\mathcal{W}_1(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$, isto é, $\mathbf{y} \in \mathcal{F}$. A seguir mostraremos que \mathbf{y} é o menor elemento de \mathcal{F} maior ou igual a \mathbf{x} .

Pela definição de \mathbf{y} e pela equação (5.21) temos que $\mathbf{y} \geq \mathbf{x}$. Agora, suponha que existe $\mathbf{z} \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbf{x} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{y}$. Como \mathcal{W}_k preserva ordem:

$$\mathcal{W}_k(\mathbf{x}) \leq \mathcal{W}_k(\mathbf{z}) \leq \mathcal{W}_k(\mathbf{y}). \quad (5.23)$$

Aplicando o limite $k \rightarrow \infty$, temos que:

$$\mathbf{y} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{y}. \quad (5.24)$$

Concluímos que $\mathbf{y} = \bigwedge \{\mathbf{z} \in \mathcal{F} : \mathbf{z} \geq \mathbf{x}\}$.

Por fim, vamos mostrar que $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^p\} \subseteq \mathcal{F}$. Dado $\mathbf{x}^k \in \{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\}$, temos que:

$$\mathbf{w}_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^p (\mathbf{x}_i^\xi / \mathbf{x}_j^\xi) \leq (\mathbf{x}_i^k / \mathbf{x}_j^k) = \begin{cases} \bigvee \mathbb{L}, & \text{se } \mathbf{x}_j^k \leq \mathbf{x}_i^k \\ \mathbf{x}_i^k, & \text{se } \mathbf{x}_i^k < \mathbf{x}_j^k \end{cases} \quad (5.25)$$

Entretanto, para todo $(i, j) \in \mathcal{T}$,

$$\mathbf{x}_i^k < \mathbf{x}_j^k \Rightarrow (\mathbf{x}_j^k \wedge \mathbf{w}_{ij}) \leq \mathbf{w}_{ij} \leq \mathbf{x}_i^k, \quad (5.26)$$

$$\mathbf{x}_j^k \leq \mathbf{x}_i^k \Rightarrow (\mathbf{x}_j^k \wedge \mathbf{w}_{ij}) \leq \mathbf{x}_j^k \leq \mathbf{x}_i^k. \quad (5.27)$$

Assim, como $(i, i) \in \mathcal{T}$ e $(\mathbf{x}_j^k \wedge \mathbf{w}_{ij}) \leq \mathbf{x}_i^k$ para todo $(i, j) \in \mathcal{T}$:

$$\left[\mathcal{W}_1(\mathbf{x}^k) \right]_i = \bigvee_{(i,j) \in \mathcal{T}} (\mathbf{x}_j^k \wedge \mathbf{w}_{ij}) = (\mathbf{x}_i^k \wedge \mathbf{w}_{ii}) \vee \left[\bigvee_{\substack{(i,j) \in \mathcal{T} \\ j \neq i}} (\mathbf{x}_j^k \wedge \mathbf{w}_{ij}) \right] \quad (5.28)$$

$$= \mathbf{x}_i^k \vee \left[\bigvee_{\substack{(i,j) \in \mathcal{T} \\ j \neq i}} (\mathbf{x}_j^k \wedge \mathbf{w}_{ij}) \right] = \mathbf{x}_i^k. \quad (5.29)$$

□

O Teorema 5.2 mostra que a sequência $\{\mathbf{x}(k)\}_{k=0}^\infty$ dada pela equação (5.2) é bem definida e convergente se a matriz dos pesos sinápticos W é dada por (5.3) com uma topologia de rede que permite auto-conexões, ou seja, se $(i, i) \in \mathcal{T}$ para todo $i \in \mathcal{N}$.

Exemplo 5.3. A IFAM de Gödel é um exemplo de BMAM totalmente conectada (topologia $\mathcal{T} = \mathcal{N} \times \mathcal{N}$), onde a implicação *fuzzy* de Gödel corresponde ao resíduo da norma triangular do mínimo [56, 63].

O próximo teorema mostra que as BMAMs generalizam uma das MAERCS.

Teorema 5.4. *Seja \mathbb{L} um reticulado completo Brouweriano. Dado um conjunto de memórias fundamentais $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\} \subseteq \mathbb{L}^n$, defina a MAERC $\mathcal{W}_{\mathcal{V}\mathcal{V}}$ por meio das equações (4.20) e (4.23). Neste caso, existe uma BMAM $\mathcal{W}_1 : \mathbb{L}^n \rightarrow \mathbb{L}^n$ tal que:*

$$\mathcal{W}_1(\mathbf{x}) = \mathcal{W}_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\mathbf{x}), \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{L}^n. \quad (5.30)$$

Além disso, essa BMAM \mathcal{W}_1 pode ser obtida utilizando a topologia a seguir:

$$\mathcal{T} = \{(i, j) : \mathbf{x}_i^\xi \geq \mathbf{x}_j^\xi, \quad \forall \xi = 1, \dots, p\}, \quad (5.31)$$

Demonstração. Dados $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\} \subseteq \mathbb{L}^n$ e $\mathcal{W}_{\mathcal{V}\mathcal{V}}$ definidas por meio das equações (4.20) e (4.23). Isto é:

$$\mathcal{S} = \{(i, j) : \mathbf{x}_i^\xi \leq \mathbf{x}_j^\xi, \quad \forall \xi = 1, \dots, p\}, \quad (5.32)$$

e para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{L}^n$,

$$\left[\mathcal{W}_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\mathbf{x}) \right]_i = \bigvee \{ \mathbf{x}_j : (j, i) \in \mathcal{S} \} = \bigvee_{(j, i) \in \mathcal{S}} \mathbf{x}_j, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (5.33)$$

Observe que, se definimos \mathcal{T} como na equação (5.31), então:

$$\mathcal{T} = \{(i, j) : \mathbf{x}_i^\xi \geq \mathbf{x}_j^\xi, \quad \forall \xi = 1, \dots, p\} = \{(i, j) : (j, i) \in \mathcal{S}\}. \quad (5.34)$$

Além disso, definindo a matriz de pesos sinápticos da BMAM como na equação (5.4), vemos que

$$\mathbf{w}_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^p (\mathbf{x}_i^\xi / \mathbf{x}_j^\xi), \quad \forall (i, j) \in \mathcal{T}. \quad (5.35)$$

Mas, para todo $(i, j) \in \mathcal{T}$, temos que $\mathbf{x}_i^\xi \geq \mathbf{x}_j^\xi$, logo

$$\mathbf{w}_{ij} = \bigvee \mathbb{L}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{T}. \quad (5.36)$$

Assim,

$$\left[\mathcal{W}_1(\mathbf{x}) \right]_i = \bigvee_{(i, j) \in \mathcal{T}} \{ \mathbf{w}_{ij} \wedge \mathbf{x}_j \} = \bigvee_{(i, j) \in \mathcal{T}} \{ (\bigvee \mathbb{L}) \wedge \mathbf{x}_j \} = \bigvee_{(i, j) \in \mathcal{T}} \mathbf{x}_j = \bigvee_{(j, i) \in \mathcal{S}} \mathbf{x}_j. \quad (5.37)$$

Logo, das equações (5.33) e (5.37), concluímos que:

$$\left[\mathcal{W}_1(\mathbf{x}) \right]_i = \left[\mathcal{W}_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\mathbf{x}) \right]_i \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (5.38)$$

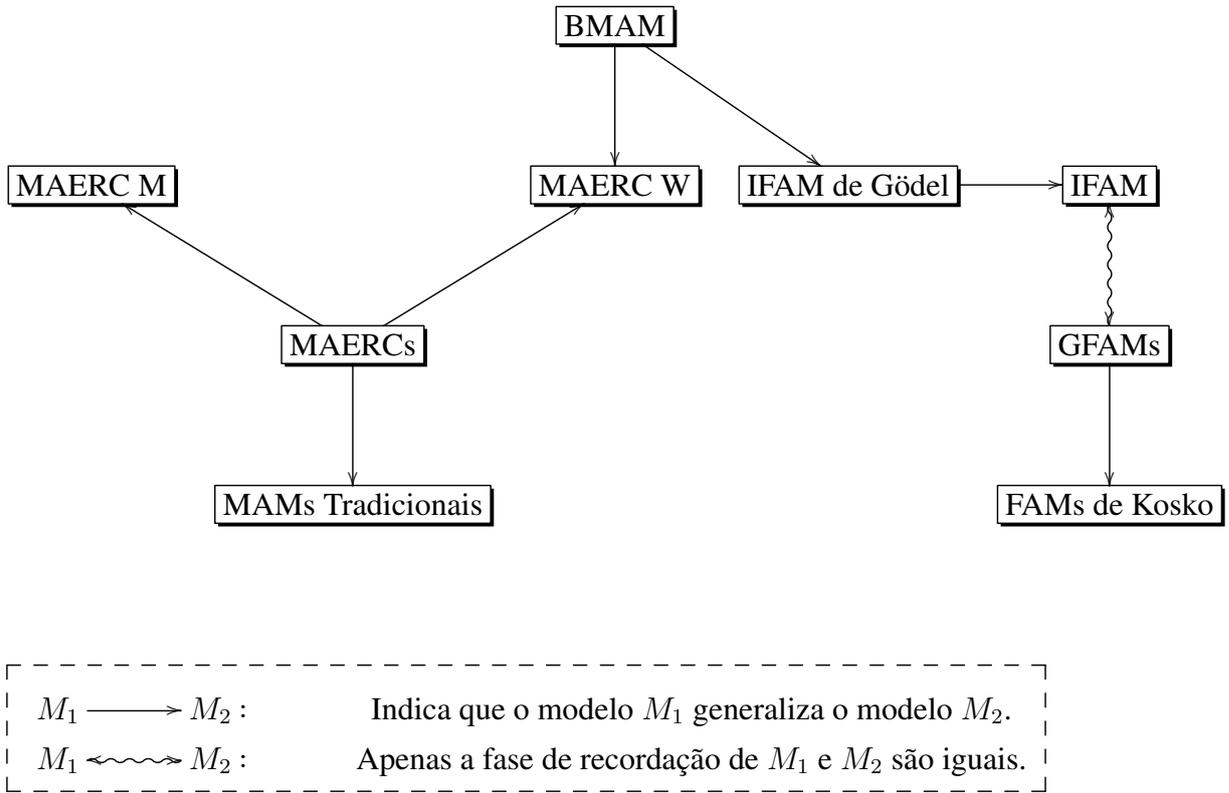


Figura 5.1: Relações entre as MAMs.

Portanto, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{L}$:

$$\mathcal{W}_1(\mathbf{x}) = \mathcal{W}_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\mathbf{x}). \quad (5.39)$$

□

As MAERCs possuem convergência em uma única iteração, assim, podemos enunciar o seguinte corolário do Teorema 5.4:

Corolário 5.5. *Dado um reticulado completo Brouweriano \mathbb{L} e um conjunto de memórias fundamentais $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\} \subseteq \mathbb{L}^n$, se $\mathcal{T} = \{(i, j) : \mathbf{x}_i^\xi \geq \mathbf{x}_j^\xi, \quad \forall \xi = 1, \dots, p\}$ então a BMAM tem convergência em uma única iteração.*

A Figura 5.1 relaciona as AMs citadas nesta dissertação em relação a generalizações, se elas estiverem na mesma estrutura algébrica. Observe que a BMAM generaliza uma das MAERCs e uma das IFAMs. Observe também que as GFAMs são modelos diferentes das IFAMs, mas suas fases de recordação são iguais, por isso criamos uma relação entre elas.

5.1 MAMS BROUWERIANAS PARA IMAGENS COLORIDAS

Nesta seção introduziremos uma BMAM para o armazenamento e recordação de imagens coloridas. Para isso utilizaremos o reticulado completo Brouweriano \mathbb{V}_{fHSV} apre-

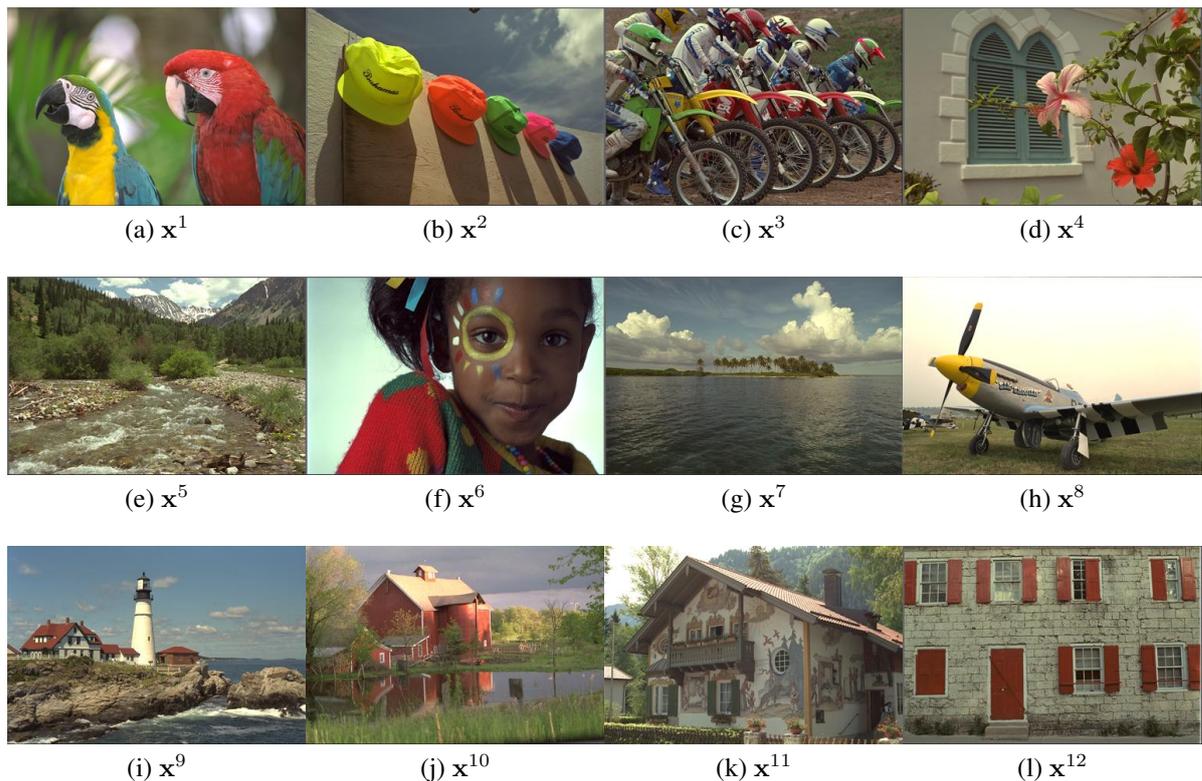


Figura 5.2: Imagens coloridas originais utilizadas nos experimentos computacionais

sentado na seção 3.4.1. Posteriormente, faremos diversos experimentos computacionais para reconstrução de imagens corrompidas com ruídos dos tipos gaussiano, impulsivo e pimenta.

Para avaliar a qualidade das imagens recordadas pela BMAM, utilizaremos a métrica ΔE_{ab}^* definida no sistema de cores CIELab. A distância entre duas imagens \mathbf{x}, \mathbf{y} no CIELab, denotada $\Delta E_{ab}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, é dada por:

$$\Delta E_{ab}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|\mathbf{x}_j^{Lab} - \mathbf{y}_j^{Lab}\|, \quad (5.40)$$

onde \mathbf{x}_j^{Lab} e \mathbf{y}_j^{Lab} são, respectivamente, os valores dos j -ésimos pixels de \mathbf{x} e \mathbf{y} , no sistema de cores CIELab e $\|\cdot\|$ denota a norma Euclidiana.

A métrica ΔE_{ab}^* é uma medida apropriada para avaliar a qualidade das imagens, pois a distância Euclidiana entre duas cores no sistema de cores CIELab está relacionada com a diferença das cores percebida pela visão humana [1, 15].

Utilizamos nos experimentos computacionais as 12 imagens, apresentadas na Figura 5.2, com dimensões 384×256 . Os pixels de cada uma das imagens foram reorganizados de forma que cada imagem se tornasse um vetor do $\mathbb{R}^{98304 \times 3}$, conforme no seguinte exemplo:

Exemplo 5.6. Dada uma imagem 3×3

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{13} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{23} \\ \mathbf{P}_{31} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{33} \end{bmatrix}, \text{ reorganizamos para } \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} \\ \mathbf{P}_{21} \\ \mathbf{P}_{31} \\ \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{22} \\ \mathbf{P}_{32} \\ \mathbf{P}_{13} \\ \mathbf{P}_{23} \\ \mathbf{P}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_4 \\ \mathbf{x}_5 \\ \mathbf{x}_6 \\ \mathbf{x}_7 \\ \mathbf{x}_8 \\ \mathbf{x}_9 \end{bmatrix} = \mathbf{x}.$$

Posteriormente, passamos as imagens do sistema de cores RGB para o sistema de cores \mathbb{V}_{fHSV} . Assim, obtivemos o conjunto $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^{12}\} \subset \mathbb{V}_{fHSV}^n$, de memórias fundamentais. Essas imagens foram armazenadas na BMAM auto-associativa, denotada por $\mathcal{W}_k : \mathbb{V}_{fHSV}^n \rightarrow \mathbb{V}_{fHSV}^n$, com $n = 98304$.

Definimos a topologia \mathcal{T} como uma rede *small-world* com auto-conexões [68]. Especificamente, para cada $i = 1, \dots, 98304$, colocamos os pares (i, i) em \mathcal{T} , e os 8 pares (i, j) que correspondem à vizinhança 3×3 do i -ésimo pixel da imagem de dimensões 384×256 . Posteriormente, para cada $i = 1, \dots, 98304$, substituímos 30% dos pares (i, j) , com $j \neq i$, por pares (i, k) com k escolhido arbitrariamente entre 1 e 98304.

Os elementos da matriz dos pesos sinápticos W da BMAM \mathcal{W}_k foram determinados utilizando a equação (5.4). O software GNU Octave versão 3.6.2-5 foi adotado no experimento computacional. No armazenamento da BMAM \mathcal{W}_k utilizamos inteiros para representar os índices (i, j) da topologia e variáveis de precisão dupla para os pesos sinápticos da matriz W . Ao todo a BMAM \mathcal{W}_k alocou 31,5 MB de espaço na memória.

Completada a fase de armazenamento, verificamos que a BMAM recordou corretamente cada uma das 12 imagens originais já na primeira iteração, conforme esperado devido ao Teorema 5.2.

Posteriormente, aplicamos a BMAM em versões ruidosas das imagens originais. Introduzimos os ruídos pepper, gaussiano e impulsivo. Utilizamos os valores 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.075, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4 e 0.5 tanto para a probabilidade de adicionar os ruídos pepper e impulsivo como para a variância do ruído gaussiano. Para cada tipo de ruído, e cada uma dessas 13 intensidades fizemos 10 experimentos em cada uma das imagens. Ao todo foram 120 experimentos para cada intensidade (probabilidade dos ruídos pepper e impulsivo e variância do ruído gaussiano) de cada tipo de ruído.

Na Figura 5.3, em preto temos as médias e os desvios padrões dos valores ΔE_{ab}^* entre as imagens original e as ruidosas, e em azul temos as médias e os desvios padrões das imagens recordadas pela BMAM. Podemos ver que os ΔE_{ab}^* entre as imagens recordadas pela BMAM e a original são menores que dos padrões ruidosos. Logo, a BMAM foi capaz de retirar

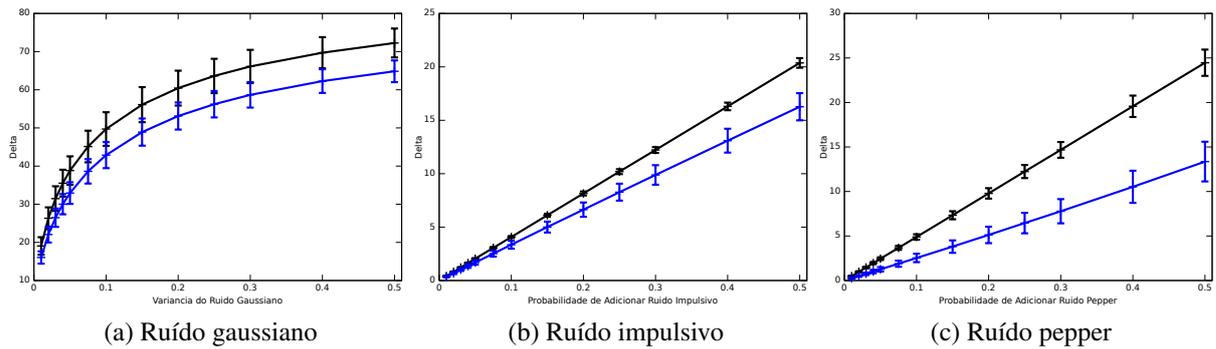


Figura 5.3: Gráfico das médias e desvios padrões dos ΔE_{ab}^* entre: Imagens originais e ruidosas em preto e imagens originais e recordadas pela BMAM em azul.

parte do ruído.

Em todos os teste, foram feitas 5 iterações da BMAM, entretanto, após a primeira iteração não ocorreram mudanças significativas nas imagens recordadas, por exemplo na Figura 5.4 comparamos as média e desvios padrões entre as imagens recordadas na primeira iteração com a original e as imagens recordadas na quinta iteração com as imagens originais. Podemos ver em azul as médias e desvios padrões do ΔE_{ab}^* da imagem recordada pela primeira iteração em relação a imagem original e em rosa da imagem recordada na quinta iteração.

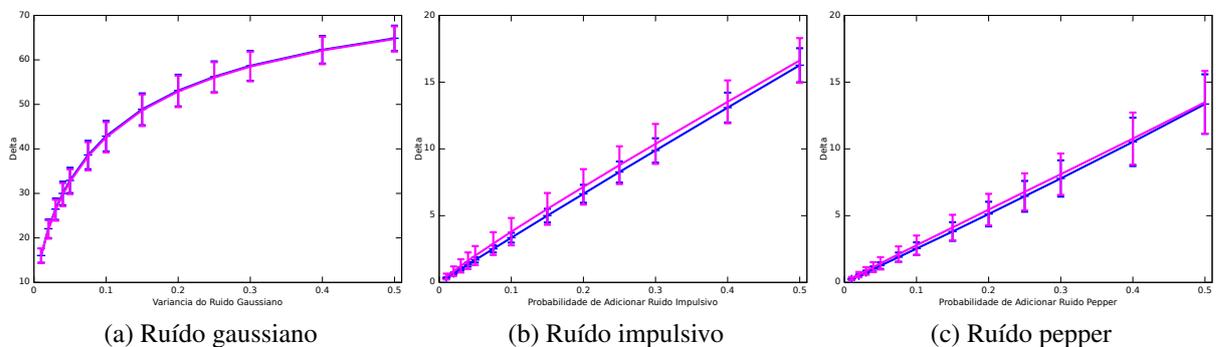


Figura 5.4: Comparação entre as iterações da BMAM. Em azul o ΔE_{ab}^* da imagem recordada na primeira iteração pala imagem original, em rosa o ΔE_{ab}^* da imagem recordada na quinta iteração pala imagem original.

Observe que, nas imagens com ruído do tipo gaussiano, após a primeira iteração da BMAM, não houve mudança no valor do ΔE_{ab}^* , de maneira que as linhas rosa e azul estão subscritas. Assim, é indiferente comparar a primeira iteração ou a última. Nas imagens com ruídos tipo impulsivo e pepper, existe uma pequena diferença entre as iterações, que ocorreu em maior quantidade precisamente entre a primeira e a segunda iteração. No entanto, a diferença entre os resultados da primeira e da quinta iteração são pequenos e após a primeira iteração o resultado começou a piorar.

Analisando as imagens recordadas, encontramos em algumas delas regiões de algumas imagens onde surgem pixels pretos após a primeira iteração da BMAM, como se a

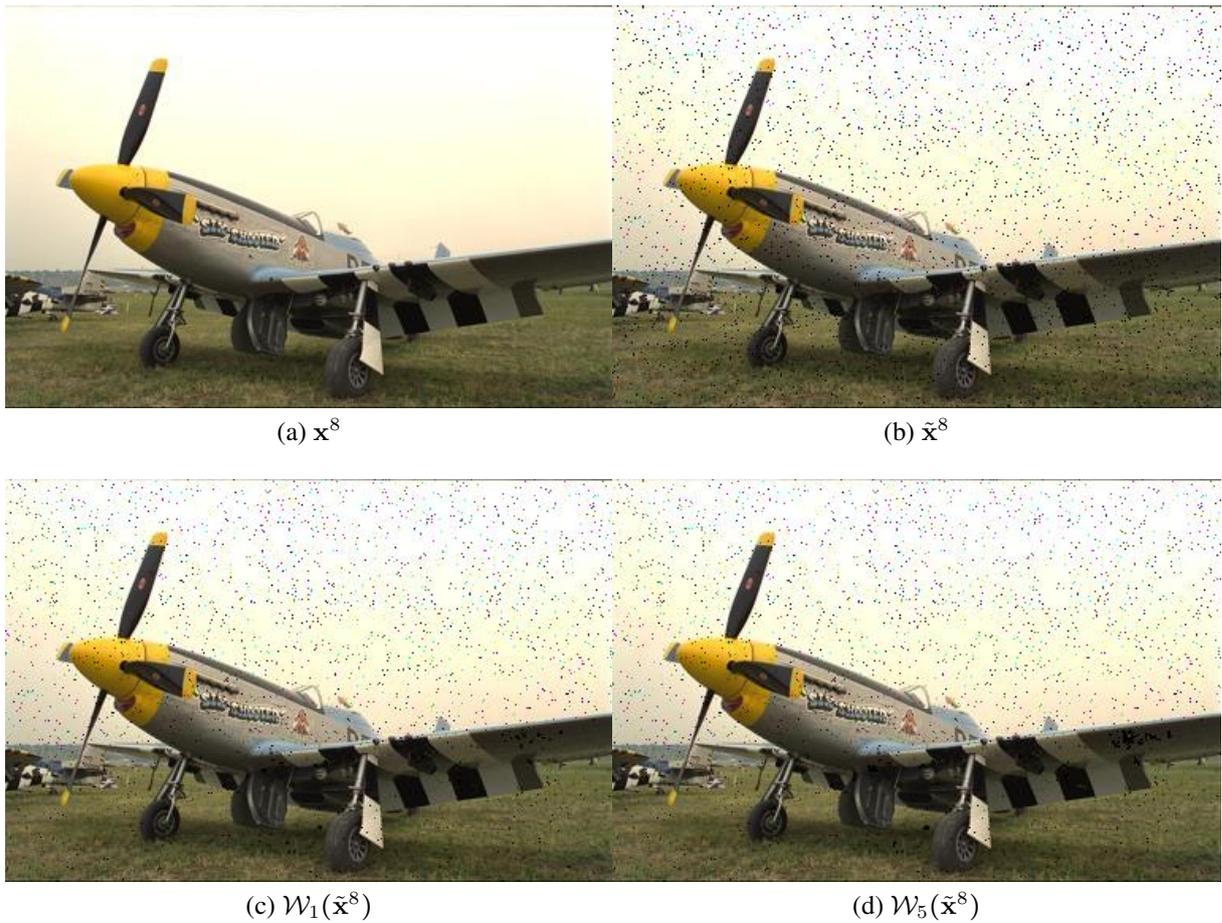


Figura 5.5: (a) Imagem x^8 , (b) imagem \tilde{x}^8 com ruído tipo pepper com probabilidade de 0.05, (c) imagem recordada pela BMAM \mathcal{W}_1 , (d) imagem recordada pela BMAM \mathcal{W}_5

memória estivesse espalhando o ruído. Na Figura 5.5 mostramos a imagem x^8 , a imagem \tilde{x}^8 com ruído tipo pepper com probabilidade 0.05, a imagem recordada pela primeira iteração e a imagem recordada pela quinta iteração.

Note que, na primeira iteração, a BMAM retirou parte do ruído pepper, mas na região da asa do avião surgiram alguns novos ruídos (pontos pretos) que não estavam na imagem \tilde{x}^8 . Na quinta iteração, havia mais ruído na região da asa do avião, como se os pixels pretos estivessem se espalhando nessa região. Esses pontos devem ser responsáveis pela pequena piora no resultado da BMAM \mathcal{W}_5 quando comparada com a \mathcal{W}_1 .

O próximo passo foi descobrir porque os pixels pretos “se espalham” em determinadas regiões das imagens. Verificamos o seguinte problema: Quando substituímos o pixel original por um pixel preto, representado no sistema de cores RGB pelo vetor $\mathbf{p} = [0 \ 0 \ 0]$, no reticulado \mathbb{V}_{fHSV} é representado por $[23 \ 0 \ 0 \ 0]$. Desta maneira, em regiões da imagem onde o valor f dos pixels são menos que 23, a BMAM pode “espalhar” o ruído para os demais pixels. De fato, na asa do avião encontramos o pixel $[22 \ 52 \ 0.318 \ 0.184]$ no sistema \mathbb{V}_{fHSV} .

Por fim, comparamos o desempenho da BMAM com o desempenho de outras

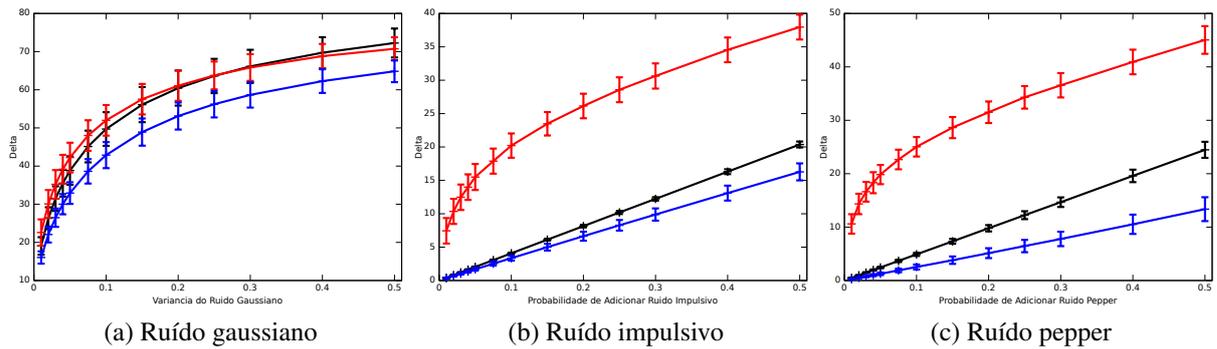


Figura 5.6: Gráfico das médias e desvios padrões dos ΔE_{ab}^* entre: Imagens originais e ruidosas em preto, Imagens originais e recordadas pela BMAM em azul e Imagens originais e recordadas pela QAM.

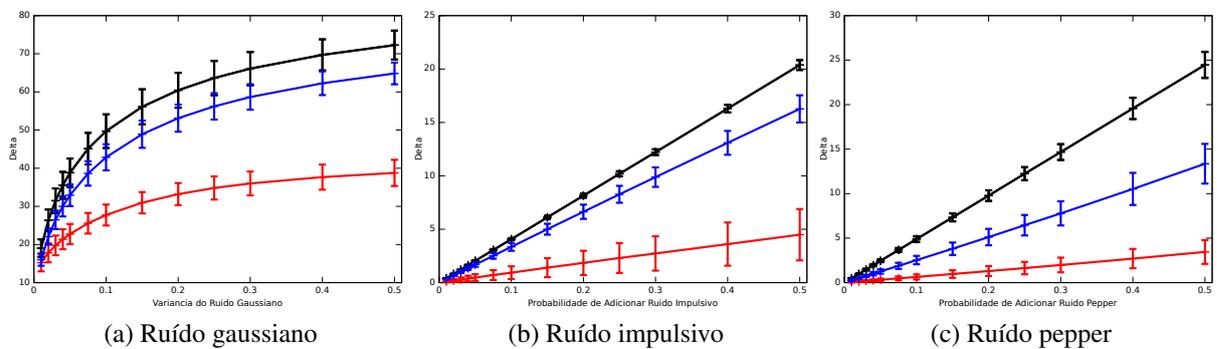


Figura 5.7: Gráfico das médias e desvios padrões dos ΔE_{ab}^* entre: Imagens originais e ruidosas em preto, Imagens originais e recordadas pela BMAM em azul e Imagens originais e recordadas pela QAM.

MAMs para imagens coloridas. Na Figura 5.6, comparamos a BMAM com a MAERC, baseada no supremo, usando o reticulado completo Brouweriano $\mathbb{V}_{f_{HSV}}$. Mostramos que o desempenho da BMAM foi bastante superior ao desempenho da MAERC. Além disso, a MAERC alocou 324,9 MB de espaço na memória, enquanto a BMAM alocou apenas 31,5 MB.

Na Figura 5.7 comparamos a BMAM com a Memória Associativa baseada em Quantales no sistema CIELab (QAMs, do termo inglês *quantale-based associative memories*), para imagens coloridas desenvolvida por Valle *et al.* em [62]. Mostramos que apesar das imagens recordadas pelo modelo da BMAM para imagem colorida possuir menos ruídos que os padrões apresentados como entrada, ela não foi superior as QAMs. A QAM alocou 94,4 MB na memória, quase três vezes mais que a BMAM.

Avaliamos que um dos motivos para o desempenho para remoção de ruído da BMAM ser inferior à QAM é o fato de um quantale ser uma estrutura mais rica matematicamente que um reticulado Brouweriano. Além disso, a QAM foi desenvolvida no CIELab, mesmo espaço do ΔE_{ab}^* , o que é uma vantagem.

6 CONCLUSÃO

Nesta Dissertação introduzimos as memórias associativas morfológicas Brouwerianas, que generalizam os modelos de memórias associativas esparsas em reticulados completos baseadas no supremo. As MAMs Brouwerianas são definidas em um reticulado completo Brouweriano, podendo ser utilizadas para armazenamento e recordação de imagens multivalor.

No capítulo 2 revisamos os principais conceitos da lógica e da teoria de conjuntos *fuzzy*. Especificamente, revisamos os principais operadores da lógica *fuzzy*, as relações *fuzzy* e sistemas baseados em regras *fuzzy*.

No capítulo 3 revisamos os principais conceitos da morfologia matemática, que se desenvolve em reticulados completos. Além dos principais operadores em reticulados completos, revisamos a definição de reticulados Brouwerianos desenvolvida por Brouwer e Heyting. Ainda no capítulo 3, revisamos a abordagem da morfologia matemática para imagens binárias e as abordagens da umbra, *threshold* e *level sets* para imagens em tons de cinza. Além disso, utilizando o trabalho de Louverdis *et al.* para imagens coloridas [27], introduzimos o reticulado completo Brouweriano \mathbb{V}_{fHSV} para imagens coloridas.

No capítulo 4 revisamos as memórias associativas morfológicas, começando pelas MAMs de Ritter e Sussner que são desenvolvidas numa estrutura matemática chamada extensão de reticulado completo com ordem de grupo. Revisamos também as IFAMs, dando principal ênfase as IFAMs de Gödel, e as MAERCs que são desenvolvidas em reticulados completos e generalizam as MAMs de Ritter e Sussner.

No capítulo 5, introduzimos as MAMs Brouwerianas que generalizam os modelos das MAERCs baseados no supremo. Matematicamente, as MAMs Brouwerianas são desenvolvidas em reticulados completos Brouwerianos. A IFAM de Gödel é um caso particular de BMAM, definida no reticulado completo Brouweriano $[0, 1]$. Além disso, apresentamos resultados teóricos das MAMs Brouwerianas.

Ainda no capítulo 5, na seção 5.1 introduzimos uma BMAM para imagens coloridas utilizando o reticulado completo Brouweriano \mathbb{V}_{fHSV} . Fizemos diversos experimentos computacionais para avaliar o desempenho desse modelo para remoção de ruído de imagens coloridas. Nos experimentos, primeiro constatamos que a BMAM foi capaz de armazenar e recordar todas as imagens originais. Posteriormente, estudamos a tolerância aos ruídos gaussiano, impulsivo e *pepper* e, constatamos que em todos os casos a BMAM foi capaz de retirar parte do ruído.

Por fim, comparamos a BMAM com a Memória Associativa baseada em Quantales no sistema CIELab (QAMs) introduzidas recentemente em [62]. Mostramos que apesar das imagens recordadas pelo modelo da BMAM para imagem colorida possuir menos ruídos que os padrões apresentados, ela não foi superior as QAMs. Entretanto, reticulados completos

Brouwerianos são estruturas matemáticas mais simples que Quantales, que além da estrutura de reticulado completo, também precisa de uma operação binária associativa e distributiva em relação ao supremo.

Por outro lado, o modelo de BMAM para imagem colorida apresentado pode também não ter sido tão eficiente devido especificamente ao reticulado completo Brouweriano \mathbb{V}_{fHSV} . Apesar do sistema de cor HSV ter relação com a maneira que o olho humano percebe as cores, e o sistema de regras *fuzzy* utilizado para criar a ordem entre as cores ter sido baseado em como o olho humano percebe as diferenças entre cores.

A ordem entre as cores possui grande influência no desempenho da BMAM, por isso, sugerimos para trabalhos futuros novos testes utilizando a BMAM para imagens coloridas em outros sistemas de cores. Em especial, sugerimos criar uma ordem entre as cores no espaço de cores CIELab utilizando um sistema *fuzzy*, similar ao que foi feito para criar o reticulado completo Brouweriano \mathbb{V}_{fHSV} .

A topologia de rede também possui grande influência no resultado da BMAM. Assim, estudos sobre o desempenho das BMAMs utilizando outras topologias de rede diferente da *small-world*, tanto no reticulado \mathbb{V}_{fHSV} como em outros reticulados, podem ser conduzidos no futuro.

REFERÊNCIAS

- [1] ACHARYA, T., AND RAY, A. *Image Processing: Principles and Applications*. John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey, 2005.
- [2] ANDERSON, J. *An Introduction to Neural Networks*. MIT Press, MA, 1995.
- [3] ANGULO, J., AND SERRA, J. Morphological coding of color images by vector connected filters. In *Proceedings of the Seventh International Symposium on Signal Processing and Its Applications* (2003), vol. 1, pp. 69–72.
- [4] APTOULA, E., AND LEFÈVRE, S. A comparative study on multivariate mathematical morphology. *Pattern Recognition* 40, 11 (2007), 2914–2929.
- [5] AUSTIN, J. Associative memory. In *Handbook of Neural Computation*, E. Fiesler and R. Beale, Eds. Oxford University Press, 1997, pp. F1.4:1–F1.4:7.
- [6] BARROS, L., AND BASSANEZI, R. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. Editora do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC-Unicamp), Campinas, 2006.
- [7] BIRKHOFF, G. *Lattice Theory*, 3 ed. American Mathematical Society, Providence, 1993.
- [8] CHUNG, F., AND LEE, T. On fuzzy associative memory with multiple-rule storage capacity. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 4, 3 (1996), 375–384.
- [9] COMER, M. L., AND DELP, E. J. Morphological operations for color image processing. *Journal of Electronic Imaging* 8, 3 (1999), 279–289.
- [10] CUNINGHAME-GREEN, R. *Minimax Algebra: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 166*. Springer-Verlag, New York, 1979.
- [11] DENG, T., AND HEIJMANS, H. Grey-scale morphology based on fuzzy logic. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 16, 2 (2002), 155–171.
- [12] GRAÑA, M. A brief review of lattice computing. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE 2008)* (Hong Kong, China, 2008), pp. 1777–1781.
- [13] GRAÑA, M., GALLEGRO, J., TORREALDEA, F. J., AND D’ANJOU, A. On the application of associative morphological memories to hyperspectral image analysis. *Lecture Notes in Computer Science* 2687 (2003), 567–574.

- [14] GRAÑA, M., VILLAVERDE, I., MALDONADO, J., AND HERNANDEZ, C. Two lattice computing approaches for the unsupervised segmentation of hyperspectral images. *Neurocomputing* 72, 10-12 (2009), 2111–2120.
- [15] HANBURY, A., AND SERRA, J. Mathematical morphology in the L*a*b* colour space. Tech. rep., Centre de Morphologie Mathématique, École des Mines de Paris, 2001.
- [16] HARALICK, R., STERNBERG, S., AND ZHUANG, X. Image analysis using mathematical morphology: Part I. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 9, 4 (1987), 532–550.
- [17] HASSOUN, M. H., Ed. *Associative Neural Memories: Theory and Implementation*. Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.
- [18] HEIJMANS, H. *Morphological Image Operators*. Academic Press, New York, NY, 1994.
- [19] HEIJMANS, H. J. A. M., AND RONSE, C. The algebraic basis of mathematical morphology I. dilations and erosions. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 50, 3 (1990), 245–295.
- [20] HOPFIELD, J., AND TANK, D. Neural computation of decisions in optimization problems. *Biological Cybernetics* 52 (1985), 141–152.
- [21] KABURLASOS, V., AND RITTER, G., Eds. *Computational Intelligence Based on Lattice Theory*. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 2007.
- [22] KLIR, G. J., AND YUAN, B. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NY, 1995.
- [23] KOHONEN, T. *Self-organization and associative memory*, 3rd edition ed. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1989.
- [24] KONG, S.-G., AND KOSKO, B. Adaptive fuzzy systems for backing up a truck-and-trailer. *IEEE Transactions on Neural Networks* 3, 2 (1992), 211–223.
- [25] KOSKO, B. *Neural Networks and Fuzzy Systems: A Dynamical Systems Approach to Machine Intelligence*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992.
- [26] LIMA, E. *Análise Real*, vol. 1 of *Coleção Matemática Universitária*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2009.
- [27] LOUVERDIS, G., ANDREADIS, I., AND TSALIDES, P. New fuzzy model for morphological colour image processing. *IEE Proceedings - Vision, Image, and Signal Processing* 149, 3 (2002), 129–139.

- [28] MAMDANI, E. H., AND ASSILIAN, S. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International Journal of Man-Machine Studies* 7, 1 (1975), 1–13.
- [29] MARCANTONIO, A., DARKEN, C., KUHN, G. M., SANTOSO, I., HANSON, S. J., AND PETSCHKE, T. A neural network autoassociator for induction motor failure prediction. In *Adv. Neural Inf. Process. Syst.* (1996), vol. 8, pp. 924–930.
- [30] MATHERON, G. *Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux*. Masson, Paris, 1967.
- [31] NACHTEGAEL, M., AND KERRE, E. E. Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies. *Fuzzy Sets and Systems* 124, 1 (2001), 73–85.
- [32] NGUYEN, H. T., AND WALKER, E. A. *A First Course in Fuzzy Logic*, 2 ed. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2000.
- [33] PAO, Y. H. *Adaptive Pattern Recognition and Neural Networks*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.
- [34] PEDRYCZ, W., AND GOMIDE, F. *An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1998.
- [35] PEDRYCZ, W., AND GOMIDE, F. *Fuzzy Systems Engineering: Toward Human-Centric Computing*. Wiley-IEEE Press, New York, 2007.
- [36] RADUCANU, B., GRAÑA, M., AND ALBIZURI, X. F. Morphological scale spaces and associative morphological memories: Results on robustness and practical applications. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 19, 2 (2003), 113–131.
- [37] RITTER, G. X. Image algebra. Unpublished manuscript. Available at: <http://www.cise.ufl.edu/jnw/CVAIIA/>, 1997.
- [38] RITTER, G. X., AND SUSSNER, P. An introduction to morphological neural networks. In *Proceedings of the 13th International Conference on Pattern Recognition* (Vienna, Austria, 1996), pp. 709–717.
- [39] RITTER, G. X., SUSSNER, P., AND DE LEON, J. L. D. Morphological associative memories. *IEEE Transactions on Neural Networks* 9, 2 (1998), 281–293.
- [40] RITTER, G. X., AND URCID, G. A lattice matrix method for hyperspectral image unmixing. *Information Sciences* 181, 10 (2011), 1787–1803.
- [41] RITTER, G. X., URCID, G., AND SCHMALZ, M. S. Autonomous single-pass endmember approximation using lattice auto-associative memories. *Neurocomputing* 72, 10-12 (2009), 2101–2110.

- [42] RITTER, G. X., AND WILSON, J. N. *Handbook of Computer Vision Algorithms in Image Algebra*, 2 ed. CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 2001.
- [43] RITTER, G. X., WILSON, J. N., AND DAVIDSON, J. L. Image algebra: An overview. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 49, 3 (1990), 297–331.
- [44] ROMAN, S. *Lattices and Ordered Sets*. Springer, NY, USA, 2008.
- [45] RONSE, C. Why mathematical morphology needs complete lattices. *Signal Processing* 21, 2 (1990), 129–154.
- [46] SERRA, J. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London, 1982.
- [47] SERRA, J. *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2: Theoretical Advances*. Academic Press, New York, 1988.
- [48] SHAW, I., AND SIMOES, M. *Controle e modelagem fuzzy*. Edgard Blucher, São Paulo, SP, Brasil, 1999.
- [49] SHIH, F. *Image processing and mathematical morphology: fundamentals and applications*. CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 2009.
- [50] SHIH, P., AND LIU, C. Comparative assessment of content-based face image retrieval in different color spaces. In *Proceedings of the 5th international conference on Audio- and Video-Based Biometric Person Authentication* (Berlin, Heidelberg, 2005), AVBPA'05, Springer-Verlag, pp. 1039–1048.
- [51] SOILLE, P. *Morphological Image Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1999.
- [52] STERNBERG, S. Grayscale morphology. *Computer Vision, Graphics and Image Processing* 35 (1986), 333–355.
- [53] SUSSNER, P., ESMI, E. A. L., VILLAVERDE, I., AND GRAÑA, M. The Kosko subsethood fuzzy associative memory (KS-FAM): Mathematical background and applications in computer vision. *J. Math. Imaging Vis.* 42, 2-3 (2012), 134–149.
- [54] SUSSNER, P., AND ESMI, E. L. Morphological perceptrons with competitive learning: Lattice-theoretical framework and constructive learning algorithm. *Information Sciences* 181, 10 (2011), 1929–1950.
- [55] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Grayscale morphological associative memories. *IEEE Transactions on Neural Networks* 17, 3 (2006), 559–570.
- [56] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Implicative fuzzy associative memories. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 14, 6 (2006), 793–807.

- [57] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Classification of fuzzy mathematical morphologies based on concepts of inclusion measure and duality. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 32, 2 (2008), 139–159.
- [58] TAKAGI, T., AND SUGENO, M. Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 15, 1 (1985), 116–132.
- [59] VALLE, M. E. *Fundamentos e Aplicações de Memórias Associativas Morfológicas Nebulosas*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, Brasil, 2007.
- [60] VALLE, M. E. A class of sparsely connected autoassociative morphological memories for large color images. *IEEE Transactions on Neural Networks* 20, 6 (2009), 1045–1050.
- [61] VALLE, M. E., AND SUSSNER, P. A general framework for fuzzy morphological associative memories. *Fuzzy Sets and Systems* 159, 7 (2008), 747–768.
- [62] VALLE, M. E., SUSSNER, P., AND ESMI, E. Spherical CIELab QAMs: Associative memories based on the CIELab system and quantales for the storage of color images. In *Hybrid Artificial Intelligent Systems*, E. Corchado, V. Snásel, A. Abraham, M. Wozniak, M. Grana, and S.-B. Cho, Eds., vol. 7209 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer Berlin Heidelberg, 2012, pp. 467–478.
- [63] VALLE, M. E., SUSSNER, P., AND GOMIDE, F. Introduction to implicative fuzzy associative memories. In *Proceedings of the IEEE International Joint Conference on Neural Networks* (Budapest, Hungary, 2004), pp. 925–931.
- [64] VALLE, M. E., AND VICENTE, D. M. G. Sparsely connected autoassociative lattice memories with an application for the reconstruction of color images. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 44, 3 (2012), 195–222.
- [65] VANDENBROUCKE, N., MACAIRE, L., AND JACK-GÉRARD POSTAIRE. Color image segmentation by pixel classification in an adapted hybrid color space. Application to soccer image analysis. *Computer Vision and Image Understanding* 90, 2 (2003), 190–216.
- [66] VAZQUEZ, R. A., AND SOSSA, H. A bidirectional hetero-associative memory for true-color patterns. *Neural Processing Letters* 28, 3 (2008), 131–153.
- [67] VICENTE, D. M. G. Memórias autoassociativas esparsas em reticulados completos com aplicações em reconstrução de imagens coloridas. Master’s thesis, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, Brasil, 2011.
- [68] WATTS, D., AND STROGATZ, S. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature* 393, 6684 (1998), 440–442.

- [69] YEUNG, D., AND CHOW, C. Parzen window network intrusion detectors. In *Int. Conf. Pattern Recognit.* (2002), pp. 385–388.
- [70] ZADEH, L. A. Fuzzy sets. *Information and Control* 8, 3 (1965), 338–353.
- [71] ZHANG, B.-L., ZHANG, H., AND GE, S. S. Face recognition by applying wavelet sub-band representation and kernel associative memory. *IEEE Transactions on Neural Networks* 15, 1 (2004), 166–177.
- [72] ZHANG, H., HUANG, W., HUANG, Z., AND ZHANG, B. A kernel autoassociator approach to pattern classification. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B* 35, 3 (2005), 593–606.
- [73] ZHENG, P., ZHANG, J., AND TANG, W. Color image associative memory on a class of Cohen–Grossberg networks. *Pattern Recognition* 43, 10 (2010), 3255–3260.