Universidade Estadual de Londrina

RAFAEL PRADO DA SILVA

ESTABILIDADE DO MODELO DE MISTURA TERMOELÁSTICA DO TIPO III

Londrina
2013

RAFAEL PRADO DA SILVA

ESTABILIDADE DO MODELO DE MISTURA TERMOELÁSTICA DO TIPO III

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Profa. Dra. Luci Harue Fatori

Londrina
2013

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

S586e Silva, Rafael Prado da.
Estabilidade do modelo de mistura termoelástica do tipo III / Rafael Prado da Silva. – Londrina, 2013.
69 f.

Orientador: Luci Harue Fatori.
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2013.
Inclui bibliografia.

1. Termoelasticidade – Teses. 2. Semigrupos de operadores – Teses. 3. Equação de evolução – Teses. I. Fatori, Luci Harue. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

CDU 517.9

RAFAEL PRADO DA SILVA

ESTABILIDADE DO MODELO DE MISTURA TERMOELÁSTICA DO TIPO III

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Luci Harue Fatori
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Jaime Edilberto Muñoz Rivera
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Londrina, 31 de Janeiro de 2013.

Dedico este trabalho a meus pais, irmãos e todos aqueles que estiveram a minha volta durante os últimos anos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a meu Pai e minha Mãe, que sempre me apoiaram, acreditaram no meu potencial e me deram a chance para que eu pudesse chegar até aqui. Sem eles, nada disso seria possível. A meus irmãos, agradeço pelos momentos de alegria que me proporcionaram durante a minha caminhada. Não poderia me esquecer também dos amigos que fiz durante todos esse anos, que me apoiaram em todos os momentos, sendo eles de alegria ou de tristeza.

Meus sinceros agradecimentos a Professora Dra. Luci Harue Fatori por todos os anos em que me orientou e por todos os seus conselhos.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro.

SILVA, Rafael Prado . **Estabilidade do Modelo de Mistura Termoelástica do Tipo III** . 2013. 69 folhas. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

RESUMO

Neste trabalho analisamos a existência, unicidade e o comportamento assintótico de solução para o modelo de uma mistura termoelástica do tipo III. Utilizamos para este fim a teoria de semigrupos de operadores lineares, sendo utilizado na análise das propriedades assintóticas resultados obtidos por A. Borichev e Y. Tomilov [3] e Prüss[12].

Palavras-chave: Termoelásticidade tipo III. Semigrupos. Existência e Unicidade. Decaimento exponencial. Decaimento polinomial.

SILVA, Rafael Prado. **Stability of Thermoelastic Mixture of Type III Model** . 2013. 69 folhas. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

ABSTRACT

In this work we analyze the existence, uniqueness and asymptotic behavior of solution to the model of a thermoelastic mixture of type III. We use for this purpose the theory of semigroups of linear operators, being used results obtained by A. Borichev and Y. Tomilov[3] and Prüss[12] in the analysis of asymptotic properties.

Keywords: Termoelasticity type III. Semigroups. Existence and Uniqueness. Exponencial Decay. Polinomial Decay.

SUMÁRIO

Conteúdo

ÍNDICE DE NOTAÇÕES

$L^p(\Omega)$	espaço das funções u mensuráveis definidas em Ω com valores em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tais que $\|u\|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω
$\|.\|_{L^p}$	norma em $L^p(\Omega)$
$H^m(\Omega)$	espaço das funções $u \in L^2(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ para todo $\|\alpha\| \leqslant m$
$\|.\|_{H^m}$	norma em $H^m(\Omega)$
$H_0^m(\Omega)$	fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$
$\|.\|_{H_0^m}$	norma em $H_0^m(\Omega)$
$\mathcal{L}(\mathrm{X})$	espaço dos operadores lineares contínuos em X
$\|.\|_{\mathcal{L}(\mathrm{X})}$	norma em $\mathcal{L}(\mathrm{X})$
$L^p(0,T;H)$	espaço das funções mensuráveis $u : [0,T] \to X$ e que $\|u(t)\|_H \in L^p(0,T)$
$C^0([0,T];X)$	espaço das funções contínuas $u : [0,T] \to X$ e que $\|u(t)\|_X \in C^0([0,T])$
$med(\Omega)$	medida n-dimensional de Lebesgue do conjunto Ω
$D(A)$	domínio do operador A
$\rho(A)$	conjunto resolvente do operador A
$R(\lambda, A)$	operador resolvente
$Im(A)$	conjunto imagem do operador A

1 INTRODUÇÃO

Os trabalhos pioneiros da teoria de misturas termoelásticas de sólidos foram contribuições de **Truesdell e Toupin (1960)**, **Green e Naghdi (1965,1968)** e **Bowen e Wiese (1969)**. Grande parte da teoria de misturas contínuas são dedicadas para descrever situações onde fluidos e/ou gases estão presentes como componentes e então a descrição espacial é a mais adequada. Para uma mistura contínua de dois materiais, o movimento é descrito por duas componentes

$$x = x(X,t), y = y(Y,t)$$

e assumimos que as partículas x, y ocupam a mesma posição no tempo t.

Nos últimos anos este assunto tem merecido atenção e principalmente nos estudos das propriedades qualitativas das soluções desses problemas. Recentemente em [2] foi considerado o sistema de mistura termoelástica de sólidos, onde o efeito térmico é dado pela lei de Fourier, sendo estabelecido condições necessárias e suficientes para o decaimento exponencial da solução. Ou seja, satisfeitas certas relações entre os coeficientes do sistema, a dissipação térmica foi suficiente para garantir o decaimento da solução.

Em nosso trabalho, enfatizamos o estudo do decaimento da solução para o caso de uma viga unidimensional de tamanho L, composta pela mistura de dois sólidos termoelásticos onde são considerados leis não Fourier para o fluxo de calor. Mais especificamente, consideramos um problema de mistura termoelástica do tipo III, onde a diferença de temperatura é representada por uma equação hiperbólica. Podemos citar alguns trabalhos onde a termoelásticidade do tipo III é estudada, como por exemplo, [10], [13], [14], [15] e [17].

Denotemos o deslocamento das partículas no ponto $x \in (0, L)$ e tempo t por v e w, onde

$$v = v(x,t); w = w(x,t),$$

a diferença de temperatura em cada ponto x e tempo t por $\tau = \tau(x,t)$, a densidade de massa de cada componente no tempo $t = 0$ por ρ_i, as tensões parciais associadas aos componentes por T e S, a força interna difusiva por P, a densidade de entropia por R, o fluxo de calor por Q e a temperatuta absoluta na referente configuração por T_0. Na ausência de forças externas o sistema de equações que governa a teoria linear consiste das equações de movimento

$$\rho_1 v_{tt} = T_x - P, \tag{1.1}$$

$$\rho_2 w_{tt} = S_x + P, \tag{1.2}$$

da equação do balanço energia

$$(\rho_1 + \rho_2)T_0 R_t = Q_x, \tag{1.3}$$

e das equações constitutivas

$$T = a_{11}v_x + a_{12}w_x + \beta_1\tau, \tag{1.4}$$

$$S = a_{12}v_x + a_{22}w_x + \beta_2\tau, \tag{1.5}$$

$$P = \alpha(v - w), \tag{1.6}$$

$$R = -\beta_1 v_x - \beta_2 w_x + c\tau, \tag{1.7}$$

$$Q = k_1\theta_x + k_2\tau_x, \tag{1.8}$$

onde θ é uma variável chamada de deslocamento térmico que satisfaz $\theta_t = \tau$.

Substituindo as equações constitutivas na equação do balanço de energia (1.3) obtemos

$$c\theta_{tt} - k\theta_{xx} - \gamma\theta_{txx} - \beta_1 v_{tx} - \beta_2 w_{tx} = 0 \quad \text{em} \quad (0, L) \times (0, \infty), \tag{1.9}$$

onde $k = k_1 T_0^{-1}(\rho_1 + \rho_2)^{-1}$ e $\gamma = k_2 T_0^{-1}(\rho_1 + \rho_2)^{-1}$.

Agora, substituindo as equações constitutivas nas equações de movimento, obtemos o modelo, chamado problema de mistura com termoelásticidade do tipo III, que é dado pelo seguinte sistema

$$\rho_1 v_{tt} - a_{11}v_{xx} - a_{12}w_{xx} + \alpha(v - w) - \beta_1\theta_{tx} = 0 \quad \text{em} \quad (0, L) \times (0, \infty) \tag{1.10}$$

$$\rho_2 w_{tt} - a_{12}v_{xx} - a_{22}w_{xx} - \alpha(v - w) - \beta_2\theta_{tx} = 0 \quad \text{em} \quad (0, L) \times (0, \infty) \tag{1.11}$$

$$c\theta_{tt} - k\theta_{xx} - \gamma\theta_{txx} - \beta_1 v_{tx} - \beta_2 w_{tx} = 0 \quad \text{em} \quad (0, L) \times (0, \infty) \tag{1.12}$$

Assumimos que as constantes $\rho_1, \rho_2, \beta_1, \beta_2, c, k, \gamma$ e α são positivas, além disso, a matriz (a_{ij}) é definida positiva. Sendo assim, assumimos que os coeficientes da matriz satisfazem

$$a_{11}, a_{22} > 0 \quad \text{e} \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

Estudaremos o problema proposto pelo sistema $(1.10) - (1.12)$, com as condições iniciais

$$v(.,0) = v^0,\ v_t(.,0) = v^1,\ w(.,0) = w^0,\ w_t(.,0) = w^1,\ \theta(.,0) = \theta^0,\ \theta_t(.,0) = \theta^1 \tag{1.13}$$

e condições de fronteira dadas por

$$v(0,t) = v(L,t) = w(0,t) = w(L,t) = \theta_x(0,t) = \theta_x(L,t) = 0,\ \forall t > 0. \tag{1.14}$$

Nosso trabalho está organizado da seguinte forma: No Capítulo 2, apresentamos algumas definições e resultados prévios que serão utilizados com frequência no decorrer do trabalho. Não faremos as demonstrações dos teoremas, porém, deixamos indicadas as referências onde podem ser encontrados os assuntos abordados e suas demonstrações. No Capítulo 3, estudamos a existência e unicidade de solução para o sistema $(1.10) - (1.12)$ com condições iniciais dadas em (1.13) e condições de bordo fornecidas por (1.14). No Capítulo 4, estabelecemos condições suficientes para que a solução do nosso sistema tenha decaimento exponencial, e além disso, analisamos um caso onde a solução não decai exponencialmente. Finalmente, no Capítulo 5, provamos que, sob certas condições, apesar de nossa solução não apresentar decaimento exponencial, ela possui decaimento polinomial com taxa de decaimento ótima.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos as notações e resultados fundamentais utilizados no desenvolvimento deste trabalho. Introduzimos os conceitos de Distribuição e Espaços de Sobolev. Destacamos, também, resultados básicos de Análise Funcional e também as principais definições e teoremas da teoria de semigrupos.

2.1 Distribuições e espaços funcionais

Nesta seção apresentamos os espaços funcionais e a noção de derivada no sentido das distribuições. Para isso, considere Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$.

2.1.1 Noção de derivada fraca

No estudo de problemas descritos pelas equações diferenciais parciais cujos dados iniciais não são regulares o suficiente para possuírem derivada no sentido clássico, faz-se necessária a introdução de um novo conceito de derivada.

Para entendermos tal conceito necessitamos de algumas definições:

Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma aplicação contínua. Denomina-se suporte de u em Ω o fecho do conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$ e representa-se por $supp(u)$, ou seja,

$$supp(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}.$$

Denotamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções definidas em Ω que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que possuem suporte compacto. Dizemos que uma sequência de funções $\{u_\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para a função $u \in C_0^\infty(\Omega)$ se as seguintes condições são satisfeitas

i) existe $K \subset \Omega$ compacto, tal que $supp(u_\mu - u) \subset K$, para todo $\mu \in \mathbb{N}$;

ii) para cada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n,\ \ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, a sequência $\{D^\alpha u_\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ converge para $D^\alpha u$ uniformemente em K, onde D^α representa o operador derivação de ordem α definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\ldots\partial_{x_n}^{\alpha_n}}, \quad \text{com} \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ com esta noção de convergência é denominado espaço das funções testes e será representado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Define-se distribuição sobre Ω a toda forma linear T sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínua no sentido da convergência definida sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial, o qual representa-se $\mathcal{D}'(\Omega)$. Neste espaço vetorial diz-se que uma sucessão $(T_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, quando a sequência numérica $(T_\mu(u))_{\mu\in\mathbb{N}}$ converge para $T(u)$ em $\mathbb{R}$, para toda $u \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Considere uma distribuição T sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T, no sentido das distribuições, é a forma linear $D^\alpha T$ definida por

$$D^\alpha T(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Quando $\alpha \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, denotamos $D^\alpha T$ como $\dfrac{d^\alpha T}{dx^\alpha}$. Verifica-se que $D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω, e que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) & \to & \mathcal{D}'(\Omega) \\ T & \mapsto & D^\alpha T \end{array}$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que se

$$\lim_{\mu\to\infty} T_\mu = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \text{ então } \lim_{\mu\to\infty} D^\alpha T_\mu = D^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

2.1.2 Os espaços $L^p(\Omega)$

Representamos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$, tais que $|u|^p$ é integrável a Lebesgue sobre Ω, e por $L^\infty(\Omega)$ o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que existe uma constante c com $|u(x)| \leq c$ quase sempre em Ω. Os espaços $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{L^p} := \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty} := \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c : |u(x)| \leq c \text{ quase sempre em } \Omega\},$$

são espaços de Banach. Em particular, o espaço $L^2(\Omega)$, cuja norma provém do produto interno

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x) v(x) dx$$

é um espaço de Hilbert.

2.1.3 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} := \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}} := \|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess} |D^{\alpha} u(x)|.$$

é um espaço de Banach e é denominado espaço de Sobolev. Para o caso particular $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, representado por $H^m(\Omega)$, com o produto interno dado por

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^{\alpha} u, D^{\alpha} v \rangle_{L^2(\Omega)}, \ \forall u, \ v \in H^m(\Omega)$$

e é denominado espaço de Sobolev de ordem m. Quando $m = 0$, $H^m(\Omega)$ identifica-se com $L^2(\Omega)$.

Define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Quando Ω é limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$, então a norma em $W_0^{m,p}(\Omega)$ dada por

$$\|u\|_{W_0^{m,p}} := \|u\|_{W_0^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| = m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

é equivalente à norma induzida por $W^{m,p}(\Omega)$.

2.1.4 Espaços funcionais à valores vetoriais

Considere X um espaço de Banach. Denotamos por $\mathcal{D}(0,T;X)$ o espaço das funções vetoriais $\varphi : (0,T) \to X$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto contido no intervalo $(0,T)$. Dizemos que $\varphi_\nu \to \varphi$ em $\mathcal{D}(0,T;X)$ se

i) existe $K \subset (0,T)$ compacto, tal que $supp(\phi_\nu - \phi) \subset K$, para todo ν,

ii) para cada $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{d^k}{dt^k}\varphi_\nu(t) \to \dfrac{d^k}{dt^k}\varphi(t)$ em X uniformemente em $t \in (0,T)$.

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X é denotado por $\mathcal{D}'(0,T;X)$. Neste espaço dizemos que uma sucessão $(S_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ converge para $S \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ quando $S_\nu(\varphi) \to S(\varphi)$ em X, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T)$.

Denotamos por $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$ o espaço de Banach das funções

$$u : (0,T) \to X,$$

tais que u é mensurável e $\|u(t)\|_X$ pertença a $L^p(0,T)$. Em $L^p(0,T;X)$ defini-se a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \inf\{c \, ; \|u(t)\|_X \leq c \text{ quase sempre em } \ (0,T)\}.$$

Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, então $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert munido com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_X \, dt.$$

Representamos por $W^{m,p}(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$ o espaço de Banach

$$W^{m,p}(0,T;X) = \{u \in L^p(0,T;X) \, ; u^{(j)} \in L^p(0,T;X), \, 0 \leq j \leq m\},$$

onde $u^{(j)}$ é a j-ésima derivada no sentido das distribuições, com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \left(\sum_{j=0}^{m} \|u^{(j)}\|_{L^p(0,T;X)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $W^{m,2}(0,T;X)$ é denotado por $H^m(0,T;X)$, que é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^m(0,T;X)} = \sum_{j=0}^{m} \left\langle u^{(j)}, v^{(j)} \right\rangle_{L^2(0,T;X)}.$$

Representamos por $C^0([0,T];X)$ o espaço das funções contínuas $u : [0,T] \to X$, tais que $\|u(t)\|_X$ pertença a $C^0([0,T])$, que juntamente com a norma

$$\|u\|_{C^0([0,T];X)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X,$$

é um espaço de Banach. Denotamos por $C^m([0,T];X)$ o espaço de Banach das funções $u : [0,T] \to X$, tais que $\left\| \frac{d^k u}{dt^k}(t) \right\|_X$ pertença a $C^0([0,T])$ para $0 \leq k \leq m$. Em $C^m([0,T];X)$ defini-se a norma

$$\|u\|_{C^m([0,T];X)} = \|u\|_{C^0([0,T];X)} + \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{C^0([0,T];X)} + \ldots + \left\| \frac{d^m u}{dt^m} \right\|_{C^0([0,T];X)}.$$

2.2 Resultados auxiliares

Nesta seção enunciamos os resultados necessários para o nosso trabalho, cujas demonstrações podem ser encontradas nas referências citadas.

Proposição 2.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Seja H um espaço vetorial munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Então, dadas $u,\ v \in H$, temos que*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|_H \, \|v\|_H \,,$$

onde $\| \cdot \|_H^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Demonstração: Ver Lema 3.2-1 de [9].

■

Proposição 2.2 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam $1 < p, q < \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e $a, b > 0$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Ver Teorema IV.6 de [4].

■

Proposição 2.3 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Suponhamos que Ω seja um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Então, para todo $1 \leq p < \infty$, existe uma constante c_p, tal que*

$$||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq c_p ||\nabla u||_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração: Ver Corolário IX.19 de [4].

■

Observação. A desigualdade de Poincaré também é válida para funções que se anulam em apenas uma parte da fronteira $\partial\Omega$ e também para as funções que tem média nula, isto é, $\dfrac{1}{med(\Omega)} \displaystyle\int_\Omega u \, dx = 0$. Ver Teorema 5.6.2 de [7].

Definição 2.4. *Seja X um espaço de Banach. Representamos por X^* o seu dual topológico, isto é,*

$$X^* = \{L : X \to \mathbb{C}; L \text{ é linear e contínuo}\}.$$

E, denotaremos por $L(x)$, o valor de L em $x \in X$.

Lema 2.5 (Lax-Milgram)**.** *Seja H um espaço de Hilbert complexo e $a : H \times H \to \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear contínua e coerciva, isto é, existem constantes positivas c_1 e c_2, tais que*

$$|a[u, v]| \leq c_1 \|u\|_H \|v\|_H \qquad e \qquad c_2 \|u\|_H^2 \leq a[u, u], \quad u, v \in H.$$

Seja $L : H \to \mathbb{R}$, um funcional linear e limitado em H. Então existe um único $w \in H$ tal que

$$a[w, v] = L(v), \quad \forall \quad v \in H.$$

Demonstração: Ver Corolário V8.16 em [4].

■

Lema 2.6 (Equivalência de Normas)**.** *Sejam* $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ *e* $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ *espaços de Banach. Se existe uma constante positiva* c_1*, tal que*

$$\|x\|_1 \leq c_1 \|x\|_2$$

para todo $x \in X$*, então existe uma constante positiva* c_2*, tal que*

$$\|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$$

para todo $x \in X$*. (Logo as duas normas são equivalentes).*

Demonstração: Ver [4] página 19.

■

Lema 2.7 (Du Bois Raymond)**.** *Seja* u *uma função localmente integrável em* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*. Se*

$$\int_\Omega u\varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

então $u = 0$ *quase sempre em* Ω*.*

Demonstração: Ver Proposição 4, página 20 em [5].

■

Teorema 2.8 (Regularidade Elíptica)**.** *Seja* L *um operador diferencial elíptico de ordem* $2m$*,* $m \in \mathbb{N}$*, definido em um aberto regular* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *e* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$*. Se* u *é tal que* $Lu = f$*, no sentido distribucional, com* $f \in L^2(\Omega)$*, então* $u \in H^{2m}(\Omega)$*.*

Demonstração: Ver [1].

■

2.3 Semigrupo de operadores

Nesta seção, apresentamos a definição de semigrupo de classe C_0, algumas propriedades, bem como a caracterização dos geradores infinitesimais de um semigrupo. Para isto, considere X um espaço de Banach real ou complexo e por

$$\mathcal{L}(\mathrm{X}) = \{\mathrm{S} : \mathrm{X} \to \mathrm{X} : \mathrm{S} \text{ é linear e contínuo}\}$$

denotamos o espaço dos operadores lineares contínuos de X em X com a norma usual

$$\|S\|_{\mathcal{L}(\mathrm{X})} = \sup_{x \in X} \left\{ \frac{\|Sx\|_X}{\|x\|_X} : x \neq 0 \right\}.$$

Definição 2.9. *Seja X um espaço de Banach real. Uma família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares limitados de X em X é chamada de semigrupo se satisfazem as propriedades*

(i) $S(0)w = w, \quad w \in X,$

(ii) $S(t+s)w = S(t)S(s)w = S(s)S(t)w, \quad s,t \geq 0, \quad w \in X.$

Definição 2.10. *Um semigrupo de operadores lineares $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é dito ser de classe C_0, ou de fortemente contínuo, se para todo $x \in X$ a função $t \longmapsto S(t)x$ é continua no ponto zero.*

Um exemplo de semigrupo de classe C_0 é a função exponencial $S(t) = e^{At}$ que pode ser definida quando A for um operador linear limitado de um espaço de Banach X. No caso em que A seja um operador linear não limitado, com certas propriedades, pode-se também definir e^{At}. Isto é feito pela teoria de semigrupos. Ver [11] e [16].

Definição 2.11. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 de operadores lineares em X. Dizemos $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de contrações se $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ para todo $t \geq 0$.*

Definição 2.12. *Considere o operador $A : D(A) \to X$, dado por*

$$Au = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t},\ u \in D(A),$$

onde

$$D(A) = \left\{ u \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \quad \textit{existe em } X \right\}.$$

Dizemos que A é o gerador infinitesimal do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ e $D(A)$ é o domínio de A.

Teorema 2.13. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 de contrações e o operador*

$$A : D(A) \subset X \to X$$

seu gerador infinitesimal. Então, $U(t) = S(t)U_0$ é a única solução do problema de valor inicial

$$U_t = AU,\ U(0) = U_0$$

para $U_0 \in D(A)$. E, ainda $S(t)U_0 \in C^1([0,\infty); X) \cap C([0,\infty); D(A))$.

Demonstração: Ver Corolário 2.3 e Teorema 2.4 em [11].

■

2.3.1 Caracterização dos geradores de semigrupos de classe C_0

Nesta seção, apresentamos os teoremas de Hille-Yosida e Lummer-Phillips, os quais caracterizam geradores infinitesimais de semigrupos de classe C_0.

Definição 2.14. *Se A é um operador linear em X, não necessariamente limitado, o conjunto resolvente $\rho(A)$ de A é o conjunto de todos os números complexos λ, tais que, o operador $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ existe e é limitado em X. O operador $R(\lambda, A)$ é chamado de operador resolvente. Chamaremos de espectro de A o conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$.*

Teorema 2.15 (Hille-Yosida)**.** *Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações se, e somente se*

(i) A é um operador fechado e $\overline{D(A)} = X$,

(ii) O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém o conjunto $\mathbb{R}^+$ e para todo $\lambda > 0$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração: Ver Teorema 3.1 em [11].

■

Definição 2.16. *Seja H um espaço de Hilbert. Dizemos que um operador A é dissipativo se*

$$\mathit{Re}\, \langle Au, u \rangle_H \leq 0, \ \forall\, u \in D(A).$$

Teorema 2.17 (Lummer-Phillips)**.** *Seja A um operador linear com domínio denso em um espaço de Hilbert H.*

(i) Se A é dissipativo e existe λ tal que $Im(\lambda I - A) = H$, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações.

(ii) Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações sobre o espaço H, então $Im(\lambda I - A) = H$ para todo $\lambda > 0$ e A é um operador dissipativo.

Demonstração: Ver Teorema 4.3 em [11].

■

Agora, apresentamos um importante resultado que estabelece quais são as condições para que um operador linear seja o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações. Este resultado será usado na prova da existência e unicidade de solução do problema que estudamos neste trabalho.

Corolário 2.18. *Seja A um operador linear, dissipativo e com domínio denso. Se $0 \in \rho(A)$, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações.*

Demonstração: Ver Teorema 2.12.3 em [16].

■

Lema 2.19. *Sejam $S : X \to X$ um operador linear limitado com inverso limitado e*

$$B : X \to X$$

um operador linear, tal que, $\|B\|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{1}{\|S^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}}$. Então $S + B$ é limitado e invertível.

Demonstração: Ver Lema 2.12.1 em [16].

■

Teorema 2.20. *Seja A um operador dissipativo em X. Se para algum $\lambda_0 > 0$, $Im(\lambda_0 I - A) = X$, então $Im(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração: Ver Teorema 4.5 em [11].

■

Teorema 2.21. *Seja A um operador dissipativo com $Im(I - A) = X$. Se X é reflexivo, então $\overline{D(A)} = X$.*

Demonstração: Ver Teorema 4.6 em [11].

■

Definição 2.22. *Seja X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear. Dizemos que A é compacto se para todo subconjunto limitado M de $D(A)$, sua imagem $A(M)$ é um conjunto relativamente compacto, isto é, seu fecho $\overline{A(M)}$ é compacto.*

Definição 2.23. *Seja X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear fechado com resolvente não vazio. Diremos que A tem resolvente compacto se para algum $\lambda_0 \in \rho(A)$ temos que $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ é compacto.*

Teorema 2.24. *Se A é um operador linear fechado com domínio imerso compactamente em H e tal que $0 \in \rho(A)$, então A possui resolvente compacto.*

Demonstração: Ver [6] pag.47.

■

Teorema 2.25. *Seja X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear fechado com resolvente não vazio. Se A tem resolvente compacto então o espectro de A consiste de auto-valores isolados com multiplicidade finita e além disso, $(\lambda I - A)^{-1}$ é compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$.*

Demonstração: Ver Teorema 6.29 em [8].

■

2.3.2 Comportamento assintótico de semigrupos

Nesta seção, apresentamos os resultados que estabelecem condições necessárias e suficientes para que um semigrupo de classe C_0 de contrações seja exponencialmente ou polinomialmente estável.

Definição 2.26. *Um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é dito exponencialmente estável, se existem constantes $M > 0$ e $\omega < 0$ tais que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq Me^{\omega t},\ \forall t \geq 0.$$

Definição 2.27. *Diremos que um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é polinomialmente estável, se existem constantes $C, \alpha > 0$ de forma que*

$$\|S(t)u\|_H \leq \frac{C}{t^\alpha}\|u\|_{D(A)}.$$

Teorema 2.28 (Prüss)**.** *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 de contrações sobre um espaço de Hilbert H. Então $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é exponencialmente estável se, e somente, se*

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}$$

e

$$\overline{\lim_{|\beta|\to\infty}} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty.$$

Demonstração: Ver [12].

■

Teorema 2.29 (Borichev e Tomilov)**.** *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 limitado sobre um espaço de Hilbert H com gerador infinitesimal A, tal que, $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$. Então, para uma constante $\alpha > 0$ fixada, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(H)} = O(|\lambda|^\alpha), \quad |\lambda| \to \infty.$$

(ii) $$\|S(t)(-A)^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(H)} = O(t^{-1}), \quad t \to \infty.$$

(iii) $$\|S(t)(-A)^{-\alpha}x\|_H = o(t^{-1}), \quad t \to \infty, \quad x \in H.$$

(iv) $$\|S(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} = O(t^{-1/\alpha}), \quad t \to \infty.$$

(v) $$\|S(t)A^{-1}x\|_H = o(t^{-1/\alpha}), \quad t \to \infty, \quad x \in H.$$

Demonstração: Ver Teorema 2.4 em [3].

■

3 EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Neste capítulo, estabelecemos a existência e unicidade de solução para o sistema que modela uma mistura termoelástica do tipo III, ou seja, analisamos o seguinte sistema de equações

$$\rho_1 v_{tt} - a_{11}v_{xx} - a_{12}w_{xx} + \alpha(v-w) - \beta_1\theta_{tx} = 0 \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty) \tag{3.1}$$

$$\rho_2 w_{tt} - a_{12}v_{xx} - a_{22}w_{xx} - \alpha(v-w) - \beta_2\theta_{tx} = 0 \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty) \tag{3.2}$$

$$c\theta_{tt} - k\theta_{xx} - \gamma\theta_{txx} - \beta_1 v_{tx} - \beta_2 w_{tx} = 0 \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty) \tag{3.3}$$

onde as constantes $\rho_1, \rho_2, \beta_1, \beta_2, c, k, \gamma$ e α são positivas. Além disso, a matriz (a_{ij}) é definida positiva. Sendo assim, assumimos que os coeficientes da matriz satisfazem

$$a_{11}, a_{22} > 0 \quad \text{e} \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

As condições iniciais são

$$v(.,0) = v^0,\ v_t(.,0) = v^1,\ w(.,0) = w^0,\ w_t(.,0) = w^1,\ \theta(.,0) = \theta^0,\ \theta_t(.,0) = \theta^1 \tag{3.4}$$

e as condições de fronteira são dadas por

$$v(0,t) = v(L,t) = w(0,t) = w(L,t) = \theta_x(0,t) = \theta_x(L,t) = 0,\ \forall t > 0, \tag{3.5}$$

ou seja, supomos que a viga está fixa e que não há dissipação de calor em suas extremidades.

Este capítulo esta organizado da seguinte forma. Na seção 3.1 apresentamos a formulação do semigrupo associado ao problema e na seção 3.2 estabelecemos a existência e unicidade de solução do problema.

A partir de agora, com o intuito de simplificar nossas notações, denotamos a norma do espaço $L^2(0,L)$ simplesmente por $\|\cdot\|$.

3.1 FORMULAÇÃO DO SEMIGRUPO

Nesta seção, apresentamos a formulação do semigrupo associado ao sistema de mistura termoelástica do tipo III. Para isto, escrevemos o sistema $(3.1)-(3.3)$ como um problema de valor inicial do tipo

$$\begin{cases} U_t = AU, \\ U(0) = U_0. \end{cases}$$

Com este intuito, definamos o espaço

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \times H_*^1(0,L) \times L^2(0,L) \times L^2(0,L) \times L_*^2(0,L)$$

onde

$$L_*^2(0,L) = \left\{\varphi \in L^2(0,L); \int_0^L \varphi\, dx = 0\right\} \quad \text{e} \quad H_*^1(0,L) = \left\{\varphi \in H^1(0,L); \int_0^L \varphi\, dx = 0\right\},$$

com produto interno dado por

$$\left\langle (v,w,\theta,V,W,\Theta),(\widetilde{v},\widetilde{w},\widetilde{\theta},\widetilde{V},\widetilde{W},\widetilde{\Theta})\right\rangle_{\mathcal{H}} = a_{11}\int_0^L v_x\overline{\widetilde{v}}_x\, dx + a_{12}\int_0^L (v_x\overline{\widetilde{w}}_x + w_x\overline{\widetilde{v}}_x)\, dx$$

$$+a_{22}\int_0^L w_x\overline{\widetilde{w}}_x\, dx + \alpha\int_0^L (v-w)\overline{(\widetilde{v}-\widetilde{w})}\, dx + \rho_1\int_0^L V\overline{\widetilde{V}}\, dx + \rho_2\int_0^L W\overline{\widetilde{W}}\, dx$$

$$+k\int_0^L \theta_x\overline{\widetilde{\theta}}_x\, dx + c\int_0^L \Theta\overline{\widetilde{\Theta}}\, dx.$$

Considerando $U = (v,w,\theta,V,W,\Theta) \in \mathcal{H}$, temos que a norma induzida em $\mathcal{H}$ pelo produto interno definido acima é dada por

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = a_{11}\int_0^L |v_x|^2\, dx + a_{12}\int_0^L (v_x\overline{w}_x + w_x\overline{v}_x)\, dx + a_{22}\int_0^L |w_x|^2\, dx$$

$$+\alpha\int_0^L |v-w|^2\, dx + \rho_1\int_0^L |V|^2\, dx + \rho_2\int_0^L |W|^2\, dx + k\int_0^L |\theta_x|^2\, dx + c\int_0^L |\Theta|^2\, dx.$$

Sabemos que $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert em sua norma usual, que é definida por

$$\|U\|_1^2 = \int_0^L |v_x|^2\, dx + \int_0^L |w_x|^2\, dx + \int_0^L |V|^2\, dx + \int_0^L |W|^2\, dx + \int_0^L |\theta_x|^2\, dx + \int_0^L |\Theta|^2\, dx.$$

Com o objetivo de mostrar que $\mathcal{H}$ também é um espaço de Hilbert na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, vamos fazer a prova dos seguintes lemas:

Lema 3.1. *Existe uma constante positiva c_0 tal que*

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \geq c_0\,\|U\|_1^2, \quad \forall\, U \in \mathcal{H}.$$

Demonstração: Seja $U = (v,w,\theta,V,W,\Theta) \in \mathcal{H}$, utilizando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Young temos que

$$
\begin{aligned}
& a_{11}\int_0^L |v_x|^2\,dx + a_{12}\int_0^L (v_x\overline{w}_x + w_x\overline{v}_x)\,dx + a_{22}\int_0^L |w_x|^2\,dx \\
\geq\ & a_{11}\int_0^L |v_x|^2\,dx - |a_{12}|\left|\int_0^L v_x\overline{w}_x\,dx\right| + a_{22}\int_0^L |w_x|^2\,dx - |a_{12}|\left|\int_0^L w_x\overline{v}_x\,dx\right| \\
\geq\ & a_{11}\int_0^L |v_x|^2\,dx - |a_{12}|\frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\left\{\int_0^L |v_x|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^L |w_x|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}\sqrt{a_{22}} \\
& +a_{22}\int_0^L |w_x|^2\,dx - |a_{12}|\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\left\{\int_0^L |w_x|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^L |v_x|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}\sqrt{a_{11}} \\
\geq\ & a_{11}\int_0^L |v_x|^2\,dx - \frac{a_{12}^2}{2a_{22}}\int_0^L |v_x|^2\,dx - \frac{a_{22}}{2}\int_0^L |w_x|^2\,dx \\
& +a_{22}\int_0^L |w_x|^2\,dx - \frac{a_{12}^2}{2a_{11}}\int_0^L |w_x|^2\,dx - \frac{a_{11}}{2}\int_0^L |v_x|^2\,dx \\
=\ & \left(\frac{a_{11}}{2} - \frac{a_{12}^2}{2a_{22}}\right)\int_0^L |v_x|^2\,dx + \left(\frac{a_{22}}{2} - \frac{a_{12}^2}{2a_{11}}\right)\int_0^L |w_x|^2\,dx \\
=\ & \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{2a_{22}}\int_0^L |v_x|^2\,dx + \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{2a_{11}}\int_0^L |w_x|^2\,dx.
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
& a_{11}\int_0^L |v_x|^2\,dx + a_{12}\int_0^L (v_x\overline{w}_x + w_x\overline{v}_x)\,dx + a_{22}\int_0^L |w_x|^2\,dx \\
\geq\ & \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{2a_{22}}\int_0^L |v_x|^2\,dx + \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{2a_{11}}\int_0^L |w_x|^2\,dx.
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

Tomando $c_0 = \min\left\{\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{2a_{11}}, \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{2a_{22}}, \rho_1, \rho_2, k, c\right\}$, segue o resultado.

■

Lema 3.2. *Existe uma constante positiva c_1 tal que*

$$
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq c_1\,\|U\|_1^2, \quad \forall\, U \in \mathcal{H}.
$$

Demonstração: Seja $U = (v, w, \theta, V, W, \Theta) \in \mathcal{H}$. Note que, da desigualde de Cauchy-Schwarz, obtem-se

$$
\begin{aligned}
& a_{11}\int_0^L |v_x|^2\,dx + a_{12}\int_0^L (v_x\overline{w}_x + w_x\overline{v}_x)\,dx + a_{22}\int_0^L |w_x|^2\,dx + \alpha\int_0^L |v-w|^2\,dx \\
\leq\ & a_{11}\int_0^L |v_x|^2\,dx + 2\,|a_{12}|\left\{\int_0^L |v_x|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^L |w_x|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$+a_{22}\int_0^L |w_x|^2\,dx + \alpha\left(\int_0^L |v|^2\,dx + \int_0^L |w|^2\,dx + 2\left\{\int_0^L |v|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^L |w|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}\right).$$

Da desigualdade de Young, segue que

$$2\,|a_{12}|\left\{\int_0^L |v_x|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^L |w_x|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leq |a_{12}|\int_0^L |v_x|^2\,dx + |a_{12}|\int_0^L |w_x|^2\,dx$$

e

$$2\left\{\int_0^L |v|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^L |w|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^L |v|^2\,dx + \int_0^L |w|^2\,dx.$$

Sendo assim,

$$a_{11}\int_0^L |v_x|^2\,dx + a_{12}\int_0^L (v_x\overline{w}_x + w_x\overline{v}_x)\,dx + a_{22}\int_0^L |w_x|^2\,dx + \alpha\int_0^L |v-w|^2\,dx$$

$$\leq a_{11}\int_0^L |v_x|^2\,dx + |a_{12}|\int_0^L |v_x|^2\,dx + |a_{12}|\int_0^L |w_x|^2\,dx + a_{22}\int_0^L |w_x|^2\,dx$$

$$+2\alpha\left(\int_0^L |v|^2\,dx + \int_0^L |w|^2\,dx\right).$$

Como $v, w \in H_0^1(0,L)$, segue da desigualdade de Poincaré que existe uma constante $c^* > 0$ de forma que

$$a_{11}\int_0^L |v_x|^2\,dx + a_{12}\int_0^L (v_x\overline{w}_x + w_x\overline{v}_x)\,dx + a_{22}\int_0^L |w_x|^2\,dx + \alpha\int_0^L |v-w|^2\,dx \leq$$

$$a_{11}\int_0^L |v_x|^2\,dx + |a_{12}|\int_0^L |v_x|^2\,dx + |a_{12}|\int_0^L |w_x|^2\,dx + a_{22}\int_0^L |w_x|^2\,dx$$

$$+2\alpha c_*\left(\int_0^L |v_x|^2\,dx + \int_0^L |w_x|^2\,dx\right)$$

e com isso

$$a_{11}\int_0^L |v_x|^2\,dx + a_{12}\int_0^L (v_x\overline{w}_x + w_x\overline{v}_x)\,dx + a_{22}\int_0^L |w_x|^2\,dx + \alpha\int_0^L |v-w|^2\,dx \leq$$

$$(a_{11} + |a_{12}| + 2\alpha c_*)\int_0^L |v_x|^2\,dx + (a_{22} + |a_{12}| + 2\alpha c_*)\int_0^L |w_x|^2\,dx. \tag{3.7}$$

Tomando $c_1 = \max\{(a_{11} + |a_{12}| + 2\alpha c_*),\ (a_{22} + |a_{12}| + 2\alpha c_*),\ \rho_1, \rho_2, k, c\}$, segue o resultado.

■

Obtemos então, pelos lemas 3.1 e 3.2 que as normas $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ e $\|\cdot\|_1$ são equivalentes, e portanto, $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.

Note então que podemos escrever o sistema de equações $(3.1)-(3.3)$ como

$$v_t = V \tag{3.8}$$

$$w_t = W \tag{3.9}$$

$$\theta_t = \Theta \tag{3.10}$$

$$V_t = \frac{1}{\rho_1}(a_{11}v_{xx} + a_{12}w_{xx} - \alpha(v-w) + \beta_1\Theta_x) \tag{3.11}$$

$$W_t = \frac{1}{\rho_2}(a_{12}v_{xx} + a_{22}w_{xx} + \alpha(v-w) + \beta_2\Theta_x) \tag{3.12}$$

$$\Theta_t = \frac{1}{c}(\beta_1 V_x + \beta_2 W_x + k\theta_{xx} + \gamma\Theta_{xx}) \tag{3.13}$$

e assim o nosso problema é equivalente a

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}U \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

onde $U_0 = (v^0, w^0, \theta^0, v^1, w^1, \theta^1)$ e $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é definido por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ \frac{a_{11}}{\rho_1}(.)_{xx} - \frac{\alpha}{\rho_1}I & \frac{a_{12}}{\rho_1}(.)_{xx} + \frac{\alpha}{\rho_1}I & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_1}{\rho_1}(.)_x \\ \frac{a_{12}}{\rho_2}(.)_{xx} + \frac{\alpha}{\rho_2}I & \frac{a_{22}}{\rho_2}(.)_{xx} - \frac{\alpha}{\rho_2}I & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_2}{\rho_2}(.)_x \\ 0 & 0 & \frac{k}{c}(.)_{xx} & \frac{\beta_1}{c}(.)_x & \frac{\beta_2}{c}(.)_x & \frac{\gamma}{c}(.)_{xx} \end{pmatrix}$$

onde I é o operador identidade, $(.)_{xx}$ representa o operador diferencial de segunda ordem na variavel x e

$$D(\mathcal{A}) = \big\{U \in \mathcal{H} : v, w \in H^2(0,L); V, W \in H_0^1(0,L); \Theta \in H_*^1(0,L);$$

$$k\theta + \gamma\Theta \in H^2(0,L); \theta_x(0) = \theta_x(L) = 0\big\}.$$

Observação. Note que, como $\Theta = \theta_t$, então Θ satisfaz

$$\Theta_x(0) = \Theta_x(L) = 0.$$

3.2 EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Nesta seção, utilizamos a teoria de semigrupos de operadores lineares para estabelecer a existência e unicidade de solução para o sistema de mistura termoelástica do tipo III. Com o fim de utilizar o Corolário 2.18 em conjunto com o Teorema 2.13, faremos a prova dos seguintes resultados:

Lema 3.3. *O operador $\mathcal{A}$ é dissipativo.*

Demonstração: Dado $U \in D(\mathcal{A})$ note que

$$\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^L (a_{11}V_x\overline{v}_x + a_{12}(V_x\overline{w}_x + W_x\overline{v}_x) + a_{22}W_x\overline{w}_x)\, dx + \alpha \int_0^L (V-W)\overline{(v-w)}\, dx$$

$$+ \int_0^L (a_{11}v_{xx} + a_{12}w_{xx} - \alpha(v-w) + \beta_1\Theta_x)\overline{V}\, dx + k\int_0^L \Theta_x\overline{\theta}_x\, dx$$

$$+ \int_0^L (a_{12}v_{xx} + a_{22}w_{xx} + \alpha(v-w) + \beta_2\Theta_x)\overline{W}\, dx + \int_0^L (\beta_1 V_x + \beta_2 W_x + k\theta_{xx} + \gamma\Theta_{xx})\overline{\Theta}\, dx.$$

Utilizando integração por partes e as condições de fronteira segue que

$$\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = \left(\int_0^L a_{11}V_x\overline{v}_x\, dx - \int_0^L a_{11}v_x\overline{V}_x\, dx\right) + \left(\int_0^L a_{12}V_x\overline{w}_x\, dx - \int_0^L a_{12}w_x\overline{V}_x\, dx\right)$$

$$+ \left(\int_0^L a_{12}W_x\overline{v}_x\, dx - \int_0^L a_{12}v_x\overline{W}_x\, dx\right) + \left(\int_0^L a_{22}W_x\overline{w}_x\, dx - \int_0^L a_{22}w_x\overline{W}_x\, dx\right)$$

$$+ \left(\int_0^L \alpha(V-W)\overline{(v-w)}\, dx - \int_0^L \alpha(v-w)\overline{(V-W)}\, dx\right)$$

$$+ \left(\int_0^L \beta_1\Theta_x\overline{V}\, dx - \int_0^L \beta_1 V\overline{\Theta}_x\, dx\right) + \left(\int_0^L \beta_2\Theta_x\overline{W}\, dx - \int_0^L \beta_2 W\overline{\Theta}_x\, dx\right)$$

$$+ \left(k\int_0^L \Theta_x\overline{\theta}_x\, dx - k\int_0^L \theta_x\overline{\Theta}_x\, dx\right) - \gamma\int_0^L |\Theta_x|^2\, dx.$$

Como a parte real das expressões entre parenteses é nula, obtemos que

$$Re\,\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = -\gamma\int_0^L |\Theta_x|^2\, dx \leq 0. \tag{3.14}$$

Portanto $\mathcal{A}$ é dissipativo.

■

Lema 3.4. *O operador $\mathcal{A}$ é tal que $0 \in \rho(\mathcal{A})$.*

Demonstração: Seja $F = (f, g, h, p, q, r,) \in \mathcal{H}$, vamos mostrar inicialmente que existe um único $U = (v, w, \theta, V, W, \Theta) \in D(\mathcal{A})$ tal que $\mathcal{A}U = F$, ou seja

$$V = f \in H_0^1(0, L) \tag{3.15}$$

$$W = g \in H_0^1(0, L) \tag{3.16}$$

$$\Theta = h \in H_*^1(0, L) \tag{3.17}$$

$$a_{11}v_{xx} + a_{12}w_{xx} - \alpha(v - w) + \beta_1\Theta_x = \rho_1 p \in L^2(0, L) \tag{3.18}$$

$$a_{12}v_{xx} + a_{22}w_{xx} + \alpha(v - w) + \beta_2\Theta_x = \rho_2 q \in L^2(0, L) \tag{3.19}$$

$$k\theta_{xx} + \gamma\Theta_{xx} + \beta_1 V_x + \beta_2 W_x = cr \in L^2_*(0, L). \tag{3.20}$$

Note que as equações $(3.15), (3.16)$ e (3.17) são triviais. Assim, substituindo (3.15) e (3.16) em (3.20), obtemos

$$k\theta_{xx} + \gamma\Theta_{xx} = (cr - \beta_1 f_x - \beta_2 g_x) \in L^2_*(0, L). \tag{3.21}$$

Considerando então $k\theta + \gamma\Theta = \varphi$ e $(cr - \beta_1 f_x - \beta_2 g_x) = \tilde{r}$, temos que a equação (3.21) pode ser escrita como

$$\varphi_{xx} = \tilde{r} \in L^2_*(0, L).$$

Defina a forma sesquilinear $B_1 : H^1_*(0, L) \times H^1_*(0, L) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$B_1[\varphi, \psi] = \int_0^L \varphi_x \overline{\psi}_x \, dx$$

e considere em $H^1_*(0, L)$ a norma $\|\varphi\|_{H^1_*} = \|\varphi_x\|$. Tenho que

(i) $|B_1[\varphi, \psi]| = \left| \int_0^L \varphi_x \overline{\psi}_x \, dx \right| = |\langle \varphi_x, \psi_x \rangle| \leq \|\varphi_x\| \, \|\psi_x\|$

(ii) $B_1[\varphi, \varphi] = \int_0^L |\varphi_x|^2 \, dx = \|\varphi_x\|^2$

o que mostra que B_1 é contínua e coerciva.

Definindo o funcional linear limitado $T_{\tilde{r}} : H^1_*(0, L) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$T_{\tilde{r}}(\psi) = -\int_0^L \tilde{r}\overline{\psi} \, dx,$$

segue do Lema de Lax-Milgram que existe uma única $\varphi = k\theta + \gamma\Theta \in H^1_*(0, L)$ de forma que $B_1[\varphi, \psi] = T_{\tilde{r}}(\psi), \forall\, \psi \in H^1_*(0, L)$, ou seja

$$\int_0^L \varphi_x \overline{\psi}_x \, dx = -\int_0^L \tilde{r}\overline{\psi} \, dx, \ \forall\, \psi \in H^1_*(0, L). \tag{3.22}$$

Tomando em particular $\psi \in C_0^\infty(0, L)$ e utilizando integração por partes obtemos

$$\int_0^L (\varphi_{xx} - \tilde{r})\overline{\psi} \, dx = 0, \ \forall\, \psi \in C_0^\infty(0, L)$$

e segue do Lema de Du Bois Raymond que $\varphi_{xx} = \tilde{r}$. Como $\varphi = k\theta + \gamma\Theta$ e $\Theta \in H^1_*(0, L)$, segue que existe uma única $\theta \in H^1_*(0, L)$ que satisfaz a equação (3.20) e além disso, pelo Teorema de Regularidade Elíptica, temos que $\varphi = k\theta + \gamma\Theta \in H^2(0, L)$.

Note também que, se multiplicarmos (3.20) por $\overline{\psi} \in H^1_*(0,L)$, integrarmos de 0 a L e utilizarmos a relação (3.22), temos que

$$k\theta_x(0)\overline{\psi}(0) - k\theta_x(L)\overline{\psi}(L) + \gamma\Theta_x(0)\overline{\psi}(0) - \gamma\Theta_x(L)\overline{\psi}(L) = 0, \quad \forall\, \psi \in H^1_*(0,L)$$

de onde segue que $\theta_x(0) = \theta_x(L) = 0$ e $\Theta_x(0) = \Theta_x(L) = 0$.

Agora, substituindo (3.17) em (3.18) e (3.19), obtemos

$$a_{11}v_{xx} + a_{12}w_{xx} - \alpha(v-w) = \tilde{p} \in L^2(0,L) \tag{3.23}$$

$$a_{12}v_{xx} + a_{22}w_{xx} + \alpha(v-w) = \tilde{q} \in L^2(0,L) \tag{3.24}$$

onde $\tilde{p} = \rho_1 p - \beta_1 h_x$ e $\tilde{q} = \rho_2 q - \beta_2 h_x$.

Considere então o espaço $V = H^1_0(0,L) \times H^1_0(0,L)$ com norma dada por

$$\|(v,w)\|_V = \|v_x\| + \|w_x\|$$

e defina a forma sesquilinear $B_2 : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$B_2[(v,w),(\tilde{v},\tilde{w})] = a_{11}\int_0^L v_x\overline{\tilde{v}_x}\,dx + a_{12}\int_0^L (w_x\overline{\tilde{v}}_x + v_x\overline{\tilde{w}}_x)\,dx$$

$$+a_{22}\int_0^L w_x\overline{\tilde{w}}_x\,dx + \alpha\int_0^L (v-w)\overline{(\tilde{v}-\tilde{w})}\,dx.$$

Note que

(i)

$$\begin{aligned}
|B_2[(v,w),(\tilde{v},\tilde{w})]| &\le a_{11}\,|\langle v_x,\tilde{v}_x\rangle| + |a_{12}|\,(|\langle w_x,\tilde{v}_x\rangle| + |\langle v_x,\tilde{w}_x\rangle|)\\
&\quad + a_{22}\,|\langle w_x,\tilde{w}_x\rangle| + \alpha\,|\langle v-w,\tilde{v}-\tilde{w}\rangle|\\
&\le a_{11}\,\|v_x\|\,\|\tilde{v}_x\| + |a_{12}|\,(\|w_x\|\,\|\tilde{v}_x\| + \|v_x\|\,\|\tilde{w}_x\|)\\
&\quad + a_{22}\,\|w_x\|\,\|\tilde{w}_x\| + \alpha(\|v\| + \|w\|)(\|\tilde{v}\| + \|\tilde{w}\|)\\
&\le a(\|v_x\| + \|w_x\|)(\|\tilde{v}_x\| + \|\tilde{w}_x\|) + \alpha c_*^2(\|v_x\| + \|w_x\|)(\|\tilde{v}_x\| + \|\tilde{w}_x\|)\\
&= (a+\alpha c_*^2)(\|v_x\| + \|w_x\|)(\|\tilde{v}_x\| + \|\tilde{w}_x\|)\\
&= (a+\alpha c_*^2)\,\|(v,w)\|_V\,\|(\tilde{v},\tilde{w})\|_V
\end{aligned}$$

onde c^* é a constante proveniente do uso da desigualdade de Poincaré e $a = max\,\{a_{11}, |a_{12}|, a_{22}\}$.

(ii)

$$B_2[(v,w),(v,w)] = a_{11}\int_0^L |v_x|^2\,dx + a_{12}\int_0^L (w_x\overline{v}_x + v_x\overline{w}_x)\,dx$$

$$+a_{22}\int_0^L |w_x|^2\,dx + \alpha\int_0^L |v-w|^2\,dx$$

$$\geq a_{11}\int_0^L |v_x|^2\,dx + a_{12}\int_0^L (w_x\overline{v}_x + v_x\overline{w}_x)\,dx + a_{22}\int_0^L |w_x|^2\,dx.$$

Utilizando (3.6) segue que

$$B_2[(v,w),(v,w)] \geq c_1\left\{\int_0^L |v_x|^2\,dx + \int_0^L |w_x|^2\,dx\right\}$$

$$= c_1(\|v_x\|^2 + \|w_x\|^2) \geq \frac{c_1}{2}\,(\|v_x\| + \|w_x\|)^2 = \frac{c_1}{2}\,\|(v,w)\|_V^2\,,$$

onde $c_1 = \min\left\{\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{2a_{11}}, \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{2a_{22}}\right\}$.

Segue então que B_2 é contínua e coerciva.

Defina agora o funcional linear limitado $T : V \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$T(\tilde{v},\tilde{w}) = -\int_0^L \tilde{p}\overline{\tilde{v}}\,dx - \int_0^L \tilde{q}\overline{\tilde{w}}\,dx.$$

Pelo Lema de Lax-Milgram, existem únicas $v, w \in H_0^1(0,L)$ satisfazendo

$$B_2[(v,w),(\tilde{v},\tilde{w})] = T(\tilde{v},\tilde{w}), \quad \forall\, \tilde{v},\tilde{w} \in H_0^1(0,L),$$

ou seja

$$a_{11}\int_0^L v_x\overline{\tilde{v}_x}\,dx + a_{12}\int_0^L (w_x\overline{\tilde{v}}_x + v_x\overline{\tilde{w}}_x)\,dx + a_{22}\int_0^L w_x\overline{\tilde{w}}_x\,dx + \alpha\int_0^L (v-w)\overline{(\tilde{v}-\tilde{w})}\,dx$$

$$= -\int_0^L \tilde{p}\overline{\tilde{v}}\,dx - \int_0^L \tilde{q}\overline{\tilde{w}}\,dx,\ \forall\, \tilde{v},\tilde{w} \in H_0^1(0,L).$$

Tomando $\tilde{v} \in C_0^\infty(0,L)$, $\tilde{w} = 0$ e integrando por partes, temos que

$$\int_0^L (a_{11}v_{xx} + a_{12}w_{xx} + \alpha(v-w) - \tilde{p})\overline{\tilde{v}}\,dx = 0,\ \forall\, \tilde{v} \in C_0^\infty(0,L)$$

e do Lema de Du Bois Raymond segue que $a_{11}v_{xx} + a_{12}w_{xx} + \alpha(v-w) = \tilde{p}$. Analogamente, se considerarmos $\tilde{w} \in C_0^\infty(0,L)$ e $\tilde{v} = 0$, obtemos que $a_{12}v_{xx} + a_{22}w_{xx} - \alpha(v-w) = \tilde{q}$, e portanto, existem únicas $v, w \in H_0^1(0,L)$ que satisfazem (3.18) e (3.19). Além disso, segue do Teorema de Regularidade Elíptica que $a_{11}v + a_{12}w \in H^2(0,L)$ e $a_{12}v + a_{22}w \in H^2(0,L)$.

Mas como

$$v = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}(a_{11}v + a_{12}w) - \frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}(a_{12}v + a_{22}w)$$

e

$$w = -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}(a_{11}v + a_{12}w) + \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}(a_{12}v + a_{22}w),$$

segue que $v, w \in H^2(0, L)$.

Provamos então que existe um único $U = (v, w, \theta, V, W, \Theta) \in D(\mathcal{A})$ tal que $\mathcal{A}U = F$, assim o operador $\mathcal{A}^{-1}$ existe. Para concluir que $0 \in \rho(A)$ resta mostrar que A^{-1} é limitado. De fato, multiplicando as equações (3.15),(3.16) e (3.17) por $\overline{V}, \overline{W}$ e $\overline{\Theta}$, respectivamente, integrando de 0 a L e utilizando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Poincaré, segue que existem constantes positivas C_1, C_2 e C_3 tais que

$$\int_0^L |V|^2\, dx = \int_0^L f\overline{V} dx \leq \|f\|\,\|V\| \leq C_1\,\|f_x\|\,\|V\| \leq C_1\,\|F\|_{\mathcal{H}}\,\|U\|_{\mathcal{H}}\,. \tag{3.25}$$

$$\int_0^L |W|^2\, dx = \int_0^L g\overline{W} dx \leq \|g\|\,\|W\| \leq C_2\,\|g_x\|\,\|W\| \leq C_2\,\|F\|_{\mathcal{H}}\,\|U\|_{\mathcal{H}}\,. \tag{3.26}$$

$$\int_0^L |\Theta|^2\, dx = \int_0^L h\overline{\Theta} dx \leq \|h\|\,\|\Theta\| \leq C_3\,\|h_x\|\,\|\Theta\| \leq C_3\,\|F\|_{\mathcal{H}}\,\|U\|_{\mathcal{H}}\,. \tag{3.27}$$

Agora, substituindo (3.17) em (3.18) e (3.19), multiplicando-as por $\overline{v}$ e $\overline{w}$ respectivamente e integrando de 0 a L, obtemos

$$a_{11}\int_0^L |v_x|^2\, dx + a_{12}\int_0^L w_x\overline{v}_x\, dx + \alpha\int_0^L (v-w)\overline{v}\, dx$$

$$= \beta_1\int_0^L h_x\overline{v}\, dx - \rho_1\int_0^L p\overline{v}\, dx \tag{3.28}$$

e

$$a_{22}\int_0^L |w_x|^2\, dx + a_{12}\int_0^L v_x\overline{w}_x\, dx - \alpha\int_0^L (v-w)\overline{w}\, dx$$

$$= \beta_2\int_0^L h_x\overline{w}\, dx - \rho_2\int_0^L q\overline{w}\, dx. \tag{3.29}$$

Somando (3.28) e (3.29), obtem-se

$$a_{11}\int_0^L |v_x|^2\, dx + a_{12}\int_0^L (w_x\overline{v}_x + v_x\overline{w}_x)\, dx + a_{22}\int_0^L |w_x|^2\, dx + \alpha\int_0^L |v-w|^2\, dx$$

$$= \beta_1\int_0^L h_x\overline{v}\, dx + \beta_2\int_0^L h_x\overline{w}\, dx - \rho_1\int_0^L p\overline{v}\, dx - \rho_2\int_0^L q\overline{w}\, dx.$$

Utilizando (3.6) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz segue que existe uma constante positiva C_4 tal que

$$\int_0^L \left(|v_x|^2 + |w_x|^2\right) dx \leq C_4 \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.30}$$

Substituindo (3.15), (3.16) e (3.17) em (3.20), multiplicando-a por $\overline{\theta}$ e integrando de 0 a L temos que

$$k \int_0^L |\theta_x|^2 \, dx = \beta_1 \int_0^L f_x \overline{\theta} \, dx + \beta_2 \int_0^L g_x \overline{\theta} \, dx - \gamma \int_0^L h_x \overline{\theta}_x \, dx - c \int_0^L r \overline{\theta} \, dx.$$

E fazendo novamente o uso das desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Poincaré segue que existe uma constante positiva C_5 tal que

$$\int_0^L |\theta_x|^2 \, dx \leq C_5 \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} \tag{3.31}$$

Utilizando (3.25), (3.26), (3.27), (3.30) e (3.31) temos

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_6 \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}$$

para alguma constante positiva C_6. Aplicando então a desigualdade de Young de forma conveniente, obtemos uma constante positiva C_7 tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_7 \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Portanto $\mathcal{A}^{-1}$ é limitado e consequentemente $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

■

Temos agora condições de enunciar o seguinte Teorema:

Teorema 3.5. *O operador $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações.*

Demonstração: Pelos Lemas 3.3 e 3.4, sabemos que $\mathcal{A}$ é dissipativo e $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Note então que para qualquer $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ podemos escrever

$$\lambda_0 I - \mathcal{A} = \mathcal{A}(\lambda_0 \mathcal{A}^{-1} - I).$$

Pelo lema 2.19, segue que se $|\lambda_0| < \dfrac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}}$ então $(\lambda_0 \mathcal{A}^{-1} - I)$ é inversível e portanto $Im(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$. Agora, pelo Teorema 2.20, segue que $Im(\lambda I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$ para todo $\lambda > 0$. Considerando em particular $\lambda = 1$ temos que $Im(I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$ e como $\mathcal{H}$ é reflexivo(pois é um espaço de Hilbert) segue do Teorema 2.21 que $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$. Sendo assim, o operador $\mathcal{A}$ satisfaz todas as hipóteses do Corolário 2.18 e portanto concluimos que $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações.

■

Como consequência imediata do Teorema 3.5 demonstrado acima e do Teorema 2.13, obtemos o resultado final desta seção, que é dado por

Teorema 3.6. *Se* $U_0 \in D(\mathcal{A})$ *então* $U(t) = S(t)U_0$ *é a única solução do problema*

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}U \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

que satisfaz

$$S(t)U_0 \in C^1([0,\infty);\mathcal{H}) \cap C([0,\infty);D(\mathcal{A})).$$

O Resultado acima nos garante então a existência e unicidade de solução para o sistema de mistura termoelástica do tipo III.

4 ESTABILIDADE EXPONENCIAL

Neste capítulo, estabelecemos condições suficientes para que a solução do problema de mistura termoelástica do tipo III seja exponencialmete estável e verificamos uma situação onde a solução não decai exponencialmente. Para realizar este objetivo, analisamos sob quais condições o semigrupo associado ao sistema $(3.1) - (3.3)$ satisfaz as hipóteses do Teorema 2.28. Inicialmente, vamos verificar sob quais condições temos

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}).$$

No Capítulo 2, provamos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$ e que $\mathcal{A}$ é gerador infitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações, sendo assim, segue do Teorema 2.15 que $\mathcal{A}$ é fechado. Utilizando o fato de que a imersão de $D(\mathcal{A})$ em $\mathcal{H}$ é compacta, juntamente com o fato de $\mathcal{A}$ ser fechado e $0 \in \rho(\mathcal{A})$, obtemos pelos Teoremas 2.24 e 2.25 que $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ é compacto para todo $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$. Em particular, temos que $\mathcal{A}^{-1}$ é compacto, já que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Assim, $\sigma(\mathcal{A}^{-1})$ é formado apenas por autovalores e consequentemente $\sigma(A)$ também é formado apenas por autovalores. Este fato nos garante que, para que tenhamos $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$, basta apenas verificar que $\mathcal{A}$ não possui nenhum autovalor no eixo complexo. Temos então o seguinte resultado:

Teorema 4.1. *Temos que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ se uma das seguintes condições é verificada*

(i) $\chi_0 \neq 0$ *e* $1 + \frac{D_1\chi_1}{\chi_0} < 0$ *ou* $\chi_0 \neq 0$ *e* $\frac{L}{\pi}\sqrt{-\frac{\alpha(\beta_1+\beta_2)\chi_1}{\chi_0}} \notin \mathbb{N}$.

(ii) $\chi_0 = 0$ *e* $\chi_1 \neq 0$.

(iii) $\chi_0 = \chi_1 = 0$, $D_1 > 0$ *e* $L^2\alpha(\beta_1 + \beta_2) - D_1\pi^2 < 0$.

Sendo que

$$D_1 = a_{11}\beta_2 - a_{12}\beta_1,$$

$$D_2 = a_{12}\beta_2 - a_{22}\beta_1,$$

$$\chi_1 = \rho_1\beta_2 - \rho_2\beta_1,$$

$$\chi_0 = \rho_2\beta_1 D_1 + \rho_1\beta_2 D_2.$$

Demonstração: Sejam $U = (v, w, \theta, V, W, \Theta) \in D(\mathcal{A})$ e $\lambda \in (\mathbb{R} - \{0\})$ tais que $(i\lambda I - \mathcal{A})U = 0$, ou seja,

$$i\lambda v - V = 0 \tag{4.1}$$

$$i\lambda w - W = 0 \tag{4.2}$$

$$i\lambda\theta - \Theta = 0 \tag{4.3}$$

$$i\lambda\rho_1 V - a_{11}v_{xx} - a_{12}w_{xx} + \alpha(v-w) - \beta_1\Theta_x = 0 \tag{4.4}$$

$$i\lambda\rho_2 W - a_{12}v_{xx} - a_{22}w_{xx} - \alpha(v-w) - \beta_2\Theta_x = 0 \tag{4.5}$$

$$i\lambda c\Theta - (\beta_1 V_x + \beta_2 W_x) - (k\theta_{xx} + \gamma\Theta_{xx}) = 0. \tag{4.6}$$

Vamos mostrar que, se uma das condições citadas no teorema ocorre, então $U = 0$, o que é uma contradição, pois U é autovetor, logo $i\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}), \forall\lambda \in \mathbb{R}$ e consequentemente $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$. De fato, de (3.14) temos

$$0 = Re\left\langle (i\lambda I - A)U, U\right\rangle_H = -Re\left\langle AU, U\right\rangle_H = \gamma\int_0^L |\Theta_x|^2\,dx$$

e portanto $\Theta = 0$.

Da equação (4.3) obtemos que $\theta = 0$. Substituindo $\Theta = \theta = 0$ em (4.4), (4.5) e (4.6) temos

$$i\lambda\rho_1 V - a_{11}v_{xx} - a_{12}w_{xx} + \alpha(v-w) = 0 \tag{4.7}$$

$$i\lambda\rho_2 W - a_{12}v_{xx} - a_{22}w_{xx} - \alpha(v-w) = 0 \tag{4.8}$$

$$\beta_1 V_x + \beta_2 W_x = 0. \tag{4.9}$$

A igualdade (4.9) juntamente com a desigualdade de Poincaré nos fornece que $\beta_1 V + \beta_2 W = 0$, e então, multiplicando (4.1) por β_1, (4.2) por β_2 e somando os resultados, concluimos que

$$i\lambda(\beta_1 v + \beta_2 w) = \beta_1 V + \beta_2 W = 0, \text{ ou seja , } w = -\frac{\beta_1}{\beta_2}v. \tag{4.10}$$

Portanto, para que tenhamos $U = 0$, basta provar que $v = 0$.

Substituindo $(4.1), (4.2)$ e (4.10) em (4.7) e (4.8) obtemos

$$-\lambda^2\rho_1 v - a_{11}v_{xx} + \frac{a_{12}\beta_1}{\beta_2}v_{xx} + \alpha\left(1 + \frac{\beta_1}{\beta_2}\right)v = 0 \tag{4.11}$$

$$\frac{\lambda^2\rho_2\beta_1}{\beta_2}v - a_{12}v_{xx} + \frac{a_{22}\beta_1}{\beta_2}v_{xx} - \alpha\left(1 + \frac{\beta_1}{\beta_2}\right)v = 0. \tag{4.12}$$

Fazendo o produto de (4.11) e (4.12) por β_2 segue

$$-D_1 v_{xx} = \rho_1\beta_2\lambda^2 v - \alpha(\beta_1 + \beta_2)v \tag{4.13}$$

$$-D_2 v_{xx} = -\rho_2\beta_1\lambda^2 v + \alpha(\beta_1 + \beta_2)v. \tag{4.14}$$

Multiplicando (4.13) e (4.14) por $\rho_2\beta_1$ e $\rho_1\beta_2$, respectivamente, e somando os resultados obtemos

$$-\chi_0 v_{xx} = \alpha(\beta_1 + \beta_2)\chi_1 v. \tag{4.15}$$

Suponha então que $\chi_0 \neq 0$, desta forma

$$v_{xx} = -\frac{\alpha(\beta_1 + \beta_2)\chi_1}{\chi_0}\, v. \tag{4.16}$$

Note que, da equação característica de (4.16), se $v \neq 0$, então

$$-\frac{\alpha(\beta_1 + \beta_2)\chi_1}{\chi_0} = \left(\frac{\nu\pi}{L}\right)^2$$

para algum $\nu \in \mathbb{N}$, isto é,

$$\frac{L}{\pi}\sqrt{-\frac{\alpha(\beta_1 + \beta_2)\chi_1}{\chi_0}} \in \mathbb{N}.$$

Além disso, somando (4.13) e (4.14) teríamos que

$$\lambda^2 \chi_1 v = -(D_1 + D_2)v_{xx} = (D_1 + D_2)\frac{\alpha(\beta_1 + \beta_2)\chi_1}{\chi_0}\, v,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\lambda^2 = \alpha(\beta_1 + \beta_2)\frac{(D_1 + D_2)}{\chi_0} &= \frac{\alpha(\beta_1 + \beta_2)}{\rho_1\beta_2}\frac{(\rho_1\beta_2 D_1 + \rho_1\beta_2 D_2)}{\chi_0} \\
&= \frac{\alpha(\beta_1 + \beta_2)}{\rho_1\beta_2}\frac{(\rho_1\beta_2 D_1 + \rho_1\beta_2 D_2 + \rho_2\beta_1 D_1 - \rho_2\beta_1 D_1)}{\chi_0} \\
&= \frac{\alpha(\beta_1 + \beta_2)}{\rho_1\beta_2}\frac{(\chi_0 + \chi_1 D_1)}{\chi_0} = \frac{\alpha(\beta_1 + \beta_2)}{\rho_1\beta_2}\left(1 + \frac{D_1\chi_1}{\chi_0}\right).
\end{aligned}$$

Desta forma, temos que se $v \neq 0$, então

$$1 + \frac{D_1\chi_1}{\chi_0} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{L}{\pi}\sqrt{-\frac{\alpha(\beta_1 + \beta_2)\chi_1}{\chi_0}} \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $v = 0$ se

$$1 + \frac{D_1\chi_1}{\chi_0} < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{L}{\pi}\sqrt{-\frac{\alpha(\beta_1 + \beta_2)\chi_1}{\chi_0}} \notin \mathbb{N}$$

o que prova o caso (i).

Note agora que, se $\chi_0 = 0$ e $\chi_1 \neq 0$, então é imediato de (4.15) que $v = 0$, logo segue o caso (ii).

Finalmente, vamos supor que $\chi_0 = \chi_1 = 0$. De $\chi_1 = 0$ temos que $\rho_1\beta_2 = \rho_2\beta_1$ e de $\chi_0 = 0$ segue que

$$\chi_0 = \rho_2\beta_1 D_1 + \rho_1\beta_2 D_2 = \rho_2\beta_1(D_1 + D_2) = 0,$$

ou seja, $D_1 = -D_2$. Desta forma, temos que (4.13) e (4.14) são linearmente dependentes.

Note então que, da equação característica de (4.13), temos que se $v \neq 0$, então

$$\rho_1\beta_2\lambda^2 = \alpha(\beta_1+\beta_2) - D_1\left(\frac{\nu\pi}{L}\right)^2,$$

para algum $\nu \in \mathbb{N}$.

Se $D_1 > 0$ e $L^2\alpha(\beta_1+\beta_2) - D_1\pi^2 < 0$, temos

$$L^2\rho_1\beta_2\lambda^2 = L^2\alpha(\beta_1+\beta_2) - D_1\pi^2\nu^2 \leq L^2\alpha(\beta_1+\beta_2) - D_1\pi^2 < 0,$$

e assim $\lambda^2 < 0$, um absurdo, o que implica que só podemos ter $v = 0$. Com isto, o caso (iii) está provado.

■

Para verificar agora, que de fato sob certas condições, a solução do problema de mistura termoelástica do tipo III é exponencialmente estável, será necessário uma série de lemas. Antes de enunciá-los, é importante notar que, dado $F = (f,g,h,p,q,r) \in \mathcal{H}$, se $U = (v,w,\theta,V,W,\Theta) \in D(\mathcal{A})$ é solução da equação resolvente

$$i\lambda U - \mathcal{A}U = F \tag{4.17}$$

então ela pode ser escrita em termos de suas componentes como

$$i\lambda v - V = f \tag{4.18}$$

$$i\lambda w - W = g \tag{4.19}$$

$$i\lambda\theta - \Theta = h \tag{4.20}$$

$$i\lambda\rho_1 V - a_{11}v_{xx} - a_{12}w_{xx} + \alpha(v-w) - \beta_1\Theta_x = p \tag{4.21}$$

$$i\lambda\rho_2 W - a_{12}v_{xx} - a_{22}w_{xx} - \alpha(v-w) - \beta_2\Theta_x = q \tag{4.22}$$

$$i\lambda c\Theta - (\beta_1 V_x + \beta_2 W_x) - (k\theta_{xx} + \gamma\Theta_{xx}) = r. \tag{4.23}$$

Com isso, podemos agora enunciar os nossos resultados.

Lema 4.2. *Se $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ e $U = (v,w,\theta,V,W,\Theta) \in D(\mathcal{A})$ é solução de (4.17), então existe uma constante $K_1 > 0$ tal que*

$$\int_0^L |\Theta_x|^2\,dx \leq K_1 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Demonstração: Utilizando (3.14) temos

$$Re\,\langle F,U\rangle_{\mathcal{H}} = Re\,\langle (i\lambda I - A)U, U\rangle_{\mathcal{H}} = -Re\,\langle AU,U\rangle_{\mathcal{H}} = \gamma\int_0^L |\Theta_x|^2\,dx.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz na igualdade acima segue que existe $K_1 > 0$ tal que

$$\int_0^L |\Theta_x|^2\,dx \leq K_1\,\|U\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}}\,,$$

e segue o resultado.

■

Lema 4.3. *Se* $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ *e* $U = (v,w,\theta,V,W,\Theta) \in D(\mathcal{A})$ *é solução de* (4.17)*, então existe uma constante* $K_2 > 0$ *tal que se* $|\lambda| > 1$*,*

$$\int_0^L |\theta_x|^2\,dx \leq K_2\,\|U\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}} + K_2\,\|F\|_{\mathcal{H}}^2\,.$$

Demonstração: Derivando (4.20) com relação à variável x, fazendo o produto por $\overline{\theta}_x$ e integrando de 0 a L, obtemos

$$\int_0^L |\theta_x|^2\,dx = \frac{1}{i\lambda}\int_0^L h_x\overline{\theta}_x\,dx + \frac{1}{i\lambda}\int_0^L \Theta_x\overline{\theta}_x\,dx.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz na igualdade acima obtemos

$$\int_0^L |\theta_x|^2\,dx \leq \frac{1}{|\lambda|}\,\|\Theta_x\|\,\|\theta_x\| + \frac{1}{|\lambda|}\,\|\theta_x\|\,\|h_x\|\,.$$

Agora, utilizando a desigualde de Young, temos

$$\int_0^L |\theta_x|^2\,dx \leq \frac{1}{2\epsilon_1\,|\lambda|^2}\,\|\Theta_x\|^2 + \epsilon_1\,\|\theta_x\|^2 + \frac{1}{2\epsilon_1\,|\lambda|^2}\,\|h_x\|^2\,.$$

Utilizando a estimativa obtida no lema 4.2 e tomando $\epsilon_1 = \frac{1}{2}$, segue que existe uma constante $K_2 > 0$ tal que

$$\int_0^L |\theta_x|^2\,dx \leq \frac{K_2}{|\lambda|^2}\,\|U\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{K_2}{|\lambda|^2}\,\|F\|_{\mathcal{H}}^2$$

e então, se $|\lambda| > 1$, segue o resultado.

■

Lema 4.4. *Se* $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$*,* $U = (v,w,\theta,V,W,\Theta) \in D(\mathcal{A})$ *é solução de* (4.17) *e* $|\lambda| > 1$*, então* *existe uma constante $K_3 > 0$ tal que*

$$\int_0^L |\beta_1 v_x + \beta_2 w_x|^2\, dx \le K_3 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + K_3 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \epsilon_2 \|U\|_{\mathcal{H}}^2,$$

onde $\epsilon_2 > 0$ é arbitrário.

Demonstração: Substituindo (4.18) e (4.19) em (4.23), temos que

$$\beta_1 v_x + \beta_2 w_x = c\Theta - \frac{1}{i\lambda}(k\theta_{xx} + \gamma\Theta_{xx}) - \frac{1}{i\lambda} r + \frac{1}{i\lambda}(\beta_1 f_x + \beta_2 g_x).$$

Fazendo o produto da igualdade anterior com $\overline{\beta_1 v_x + \beta_2 w_x}$ e integrando de 0 a L, obtemos

$$\int_0^L |\beta_1 v_x + \beta_2 w_x|^2\, dx = c\int_0^L \Theta\overline{(\beta_1 v_x + \beta_2 w_x)}\, dx - \frac{1}{i\lambda}\int_0^L r\overline{(\beta_1 v_x + \beta_2 w_x)}\, dx$$

$$+\frac{1}{i\lambda}\int_0^L (k\theta_x + \gamma\Theta_x)\overline{(\beta_1 v_{xx} + \beta_2 w_{xx})}\, dx + \frac{1}{i\lambda}\int_0^L (\beta_1 f_x + \beta_2 g_x)\overline{(\beta_1 v_x + \beta_2 w_x)}\, dx. \quad (4.24)$$

Agora, note que as equações (4.21) e (4.22) nos fornece que

$$a_{11} v_{xx} + a_{12} w_{xx} = i\lambda\rho_1 V + \alpha(v - w) - \beta_1\Theta_x - p \quad (4.25)$$

e

$$a_{12} v_{xx} + a_{22} w_{xx} = i\lambda\rho_2 W - \alpha(v - w) - \beta_2\Theta_x - q. \quad (4.26)$$

Considerando $\sigma = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ temos que

$$-\frac{D_2}{\sigma}(a_{11} v_{xx} + a_{12} w_{xx}) + \frac{D_1}{\sigma}(a_{12} v_{xx} + a_{22} w_{xx})$$

$$= \frac{1}{\sigma}(\beta_1 a_{11}a_{22} v_{xx} + \beta_1 a_{12}a_{22} w_{xx} - \beta_2 a_{11}a_{12} v_{xx} - \beta_2 a_{12}^2 w_{xx}$$

$$+\beta_2 a_{11}a_{12} v_{xx} + \beta_2 a_{11}a_{22} w_{xx} - \beta_1 a_{12}^2 v_{xx} - \beta_1 a_{12}a_{22} w_{xx})$$

$$= \frac{1}{\sigma}(\beta_1\sigma v_{xx} + \beta_2\sigma w_{xx}) = \beta_1 v_{xx} + \beta_2 w_{xx},$$

ou seja,

$$-\frac{D_2}{\sigma}(a_{11} v_{xx} + a_{12} w_{xx}) + \frac{D_1}{\sigma}(a_{12} v_{xx} + a_{22} w_{xx}) = \beta_1 v_{xx} + \beta_2 w_{xx}. \quad (4.27)$$

Com isso, usando (4.25) e (4.26) em (4.27), temos

$$\beta_1 v_{xx} + \beta_2 w_{xx}$$

$$= \frac{1}{\sigma}(-i\lambda\rho_1 D_2 V - \alpha D_2(v-w) + \beta_1 D_2\Theta_x + D_2 p + i\lambda\rho_2 D_1 W - \alpha D_1(v-w) - \beta_2 D_1\Theta_x - D_1 q)$$

$$= \frac{1}{\sigma}\left[i\lambda(\rho_2 D_1 W - \rho_1 D_2 V) - \alpha(D_1 + D_2)(v - w) + (\beta_1 D_2 - \beta_2 D_1)\Theta_x + (D_2 p - D_1 q)\right].$$

Assim, substituindo a igualdade acima em (4.24), obtemos

$$\int_0^L |\beta_1 v_x + \beta_2 w_x|^2\, dx = c\int_0^L \Theta\overline{(\beta_1 v_x + \beta_2 w_x)}\, dx - \frac{1}{i\lambda}\int_0^L r\overline{(\beta_1 v_x + \beta_2 w_x)}\, dx$$

$$-\frac{1}{\sigma}\int_0^L (k\theta_x + \gamma\Theta_x)\overline{(\rho_2 D_1 W - \rho_1 D_2 V)}\, dx - \frac{\alpha(D_1 + D_2)}{i\sigma\lambda}\int_0^L (k\theta_x + \gamma\Theta_x)\overline{(v - w)}\, dx$$

$$+\frac{\beta_1 D_2 - \beta_2 D_1}{i\sigma\lambda}\int_0^L (k\theta_x + \gamma\Theta_x)\overline{\Theta}_x\, dx + \frac{1}{i\sigma\lambda}\int_0^L (k\theta_x + \gamma\Theta_x)\overline{(D_2 p - D_1 q)}\, dx$$

$$+\frac{1}{i\lambda}\int_0^L (\beta_1 f_x + \beta_2 g_x)\overline{(\beta_1 v_x + \beta_2 w_x)}\, dx. \tag{4.28}$$

Fazendo o uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz e de Poincaré em (4.28), obtemos

$$\int_0^L |\beta_1 v_x + \beta_2 w_x|^2\, dx \le cc_* \|\Theta_x\| \|\beta_1 v_x + \beta_2 w_x\| + \frac{1}{|\lambda|}\|r\| \|\beta_1 v_x + \beta_2 w_x\|$$

$$+\frac{k}{\sigma}\|\theta_x\| \|\rho_2 D_1 W - \rho_1 D_2 V\| + \frac{\gamma}{\sigma}\|\Theta_x\| \|\rho_2 D_1 W - \rho_1 D_2 V\|$$

$$+\frac{\alpha|D_1 + D_2|k}{\sigma|\lambda|}\|\theta_x\| \|v - w\| + \frac{\alpha|D_1 + D_2|\gamma}{\sigma|\lambda|}\|\Theta_x\| \|v - w\|$$

$$+\frac{|\beta_1 D_2 - \beta_2 D_1|k}{\sigma|\lambda|}\|\theta_x\| \|\Theta_x\| + \frac{|\beta_1 D_2 - \beta_2 D_1|\gamma}{\sigma|\lambda|}\|\Theta_x\|^2$$

$$+\frac{k}{\sigma|\lambda|}\|\theta_x\| \|D_2 p - D_1 q\| + \frac{\gamma}{\sigma|\lambda|}\|\Theta_x\| \|D_2 p - D_1 q\|$$

$$+\frac{1}{|\lambda|}\|\beta_1 f_x + \beta_2 g_x\| \|\beta_1 v_x + \beta_2 w_x\|.$$

Tomando $|\lambda| > 1$ e utilizando a desigualdade de Young de forma conveniente, segue que

$$\int_0^L |\beta_1 v_x + \beta_2 w_x|^2\, dx \le K^* \|\Theta_x\|^2 + K^* \|\theta_x\|^2 + K^* \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \epsilon_2 \|U\|_{\mathcal{H}}^2,$$

para alguma constante positiva K^* e $\epsilon_2 > 0$ arbitrário.

Utilizando as estimativas obtidas nos lemas 4.2 e 4.3, segue a existência de uma constante $K_3 > 0$ tal que

$$\int_0^L |\beta_1 v_x + \beta_2 w_x|^2\, dx \le K_3 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + K_3 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \epsilon_2 \|U\|_{\mathcal{H}}^2,$$

o que conclui o resultado.

■

Lema 4.5. *Se* $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$*,* $U = (v, w, \theta, V, W, \Theta) \in D(\mathcal{A})$ *é solução de* (4.17) *e* $|\lambda| > 1$*, então existe uma constante* $K_4 > 0$ *tal que*

$$\int_0^L |\beta_1 V + \beta_2 W|^2 \, dx \leq K_4 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + K_4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \epsilon_3 \|U\|_{\mathcal{H}}^2 ,$$

onde $\epsilon_3 > 0$ *é arbitrário.*

Demonstração: Defina $\varphi_1(x) = \displaystyle\int_0^x V(s)\, ds$ e $\varphi_2(x) = \displaystyle\int_0^x W(s)\, ds$. Note que

$$|\varphi_1(x)| = \left| \int_0^x V(s)\, ds \right| \leq \int_0^L |V(s)|\; ds \leq \left\{ \int_0^L 1^2 \, ds \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^L |V(s)|^2 \, ds \right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{L} \|V\| .$$

Portanto,

$$\|\varphi_1\| = \left\{ \int_0^L |\varphi_1|^2 \, dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{ \int_0^L L \|V\|^2 \, dx \right\}^{\frac{1}{2}} = L \|V\| . \tag{4.29}$$

De forma análoga podemos obter que

$$\|\varphi_2\| \leq L \|W\| . \tag{4.30}$$

Agora, fazendo o produto de (4.23) por $\overline{\beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2}$ e integrando de 0 a L, temos que

$$i\lambda c \int_0^L \Theta\overline{(\beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2)}\, dx + \int_0^L |\beta_1 V + \beta_2 W|^2 \, dx + \int_0^L (k\theta_x + \gamma\Theta_x)\overline{(\beta_1 V + \beta_2 W)}\, dx$$

$$= \int_0^L r\overline{(\beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2)}\, dx.$$

Considere então $\xi \in H^2(0, L) \cap L^2_*(0, L)$, solução do problema

$$\begin{cases} \xi_{xx} = \Theta, \\ \xi_x(0) = \xi_x(L) = 0. \end{cases}$$

Desta forma, a igualdade anterior é equivalente a

$$\int_0^L |\beta_1 V + \beta_2 W|^2 \, dx = i\lambda c \int_0^L \xi_x\overline{(\beta_1 V + \beta_2 W)}\, dx$$

$$- \int_0^L (k\theta_x + \gamma\Theta_x)\overline{(\beta_1 V + \beta_2 W)}\, dx + \int_0^L r\overline{(\beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2)}\, dx. \tag{4.31}$$

Fazendo o produto de (4.21) e (4.22) por $\beta_1\rho_2$ e $\beta_2\rho_1$, respectivamente, e somando os resultados, obtemos

$$
\begin{aligned}
&i\lambda\rho_1\rho_2(\beta_1 V + \beta_2 W) \\
&= A_1 v_{xx} + A_2 w_{xx} + \alpha\chi_1(v-w) + (\beta_1^2\rho_2 + \beta_2^2\rho_1)\Theta_x + (\beta_1\rho_2 p + \beta_2\rho_1 q),
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
A_1 &= a_{11}\beta_1\rho_2 + a_{12}\beta_2\rho_1 \\
A_2 &= a_{12}\beta_1\rho_2 + a_{22}\beta_2\rho_1.
\end{aligned}
$$

Substituindo (4.32) em (4.31) obtemos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^L |\beta_1 V + \beta_2 W|^2\,dx &= -\int_0^L (k\theta_x + \gamma\Theta_x)\overline{(\beta_1 V + \beta_2 W)}\,dx + \int_0^L r\overline{(\beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2)}\,dx \\
&+\frac{c}{\rho_1\rho_2}\int_0^L \Theta\overline{(A_1 v_x + A_2 w_x)}\,dx + \frac{c}{\rho_1\rho_2}(\beta_1^2\rho_2 - \beta_2^2\rho_1)\int_0^L |\Theta|^2\,dx \\
&-\frac{c}{\rho_1\rho_2}\int_0^L \xi_x\overline{(\beta_1\rho_2 p + \beta_2\rho_1 q)}\,dx - \frac{c\alpha\chi_1}{\rho_1\rho_2}\int_0^L \xi_x\overline{(v-w)}\,dx.
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

Fazendo uso das desigualdades de Cauchy-Schwarz e Poincaré em (4.33), temos

$$
\begin{aligned}
\int_0^L |\beta_1 V + \beta_2 W|^2\,dx &\le k\,\|\theta_x\|\,\|\beta_1 V + \beta_2 W\| + \gamma\,\|\Theta_x\|\,\|\beta_1 V + \beta_2 W\| \\
&+ \|r\|\,\|\beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2\| + \frac{cc_*}{\rho_1\rho_2}\|\Theta_x\|\,\|A_1 v_x + A_2 w_x\| + \frac{cc_*^2\,|\beta_1^2\rho_2 - \beta_2^2\rho_1|}{\rho_1\rho_2}\|\Theta_x\|^2 \\
&+\frac{c}{\rho_1\rho_2}\|\xi_x\|\,\|\beta_1\rho_2 p + \beta_2\rho_1 q\| + \frac{c\alpha\,|\chi_1|}{\rho_1\rho_2}\|\xi_x\|\,\|v-w\|.
\end{aligned}
$$

Como $\xi_{xx} = \Theta$ e $\xi_x(0) = \xi_x(L) = 0$, existe uma constante $\kappa_1 > 0$ tal que $\|\xi_x\| \le \kappa_1\|\Theta\|$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\int_0^L |\beta_1 V + \beta_2 W|^2\,dx &\le k\,\|\theta_x\|\,\|\beta_1 V + \beta_2 W\| + \gamma\,\|\Theta_x\|\,\|\beta_1 V + \beta_2 W\| \\
&+ \|r\|\,\|\beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2\| + \frac{cc_*}{\rho_1\rho_2}\|\Theta_x\|\,\|A_1 v_x + A_2 w_x\| + \frac{cc_*^2\,|\beta_1^2\rho_2 - \beta_2^2\rho_1|}{\rho_1\rho_2}\|\Theta_x\|^2 \\
&+\frac{c\kappa_1}{\rho_1\rho_2}\|\Theta\|\,\|\beta_1\rho_2 p + \beta_2\rho_1 q\| + \frac{c\alpha\kappa_1\,|\chi_1|}{\rho_1\rho_2}\|\Theta\|\,\|v-w\|.
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

Utilizando em (4.34) a desigualdade de Young de forma conveniente, a desigualdade de Poincaré e as estimativas (4.29) e (4.30), obtemos que

$$
\int_0^L |\beta_1 V + \beta_2 W|^2\,dx \le \kappa_2\,\|\theta_x\|^2 + \kappa_2\,\|\Theta_x\|^2 + \kappa_2\,\|U\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}} + \kappa_2\,\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \epsilon_3\,\|U\|_{\mathcal{H}}^2,
$$

para alguma constante positiva κ_2 e $\epsilon_3 > 0$ arbitrário.

Agora, fazendo uso das estimativas obtidas nos lemas 4.2 e 4.3, segue a existência de uma constante $K_4 > 0$ de forma que

$$\int_0^L |\beta_1 V + \beta_2 W|^2 \, dx \leq K_4 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + K_4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \epsilon_3 \|U\|_{\mathcal{H}}^2$$

e o resultado está provado.

■

Lema 4.6. *Suponha que* $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$, $U = (v, w, \theta, V, W, \Theta) \in D(\mathcal{A})$ *é solução de* (4.17) *e* $|\lambda| > 1$. *Então existe uma constante* $K_5 > 0$ *tal que*

$$\int_0^L |A_1 v_x + A_2 w_x|^2 \, dx \leq K_5 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + K_5 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{K_5}{|\lambda|^2} \|V - W\|^2 + \epsilon_4 \|U\|_{\mathcal{H}}^2,$$

com $\epsilon_4 > 0$ *arbitrário.*

Demonstração: Multiplicando (4.32) por $\overline{A_1 v + A_2 w}$ e integrando de 0 a L, obtemos

$$\int_0^L |A_1 v_x + A_2 w_x|^2 \, dx = -i\lambda\rho_1\rho_2 \int_0^L (\beta_1 V + \beta_2 W)\overline{(A_1 v + A_2 w)} \, dx$$

$$+\alpha\chi_1 \int_0^L (v - w)\overline{(A_1 v + A_2 w)} \, dx + (\beta_1^2 \rho_2 + \beta_2^2 \rho_1) \int_0^L \Theta_x \overline{(A_1 v + A_2 w)} \, dx$$

$$+ \int_0^L (\beta_1 \rho_2 p + \beta_2 \rho_1 q)\overline{(A_1 v + A_2 w)} \, dx.$$

De (4.18) e (4.19) segue que $i\lambda v = f + V$ e $i\lambda w = g + W$. Logo,

$$\int_0^L |A_1 v_x + A_2 w_x|^2 \, dx = \rho_1\rho_2 \int_0^L (\beta_1 V + \beta_2 W)\overline{(A_1 V + A_2 W)} \, dx$$

$$+\rho_1\rho_2 \int_0^L (\beta_1 V + \beta_2 W)\overline{(A_1 f + A_2 g)} \, dx + (\beta_1^2 \rho_2 + \beta_2^2 \rho_1) \int_0^L \Theta_x \overline{(A_1 v + A_2 w)} \, dx$$

$$+\frac{\alpha\chi_1}{i\lambda} \int_0^L (V - W)\overline{(A_1 v + A_2 w)} \, dx + \frac{\alpha\chi_1}{i\lambda} \int_0^L (f - g)\overline{(A_1 v + A_2 w)} \, dx$$

$$+ \int_0^L (\beta_1 \rho_2 p + \beta_2 \rho_1 q)\overline{(A_1 v + A_2 w)} \, dx.$$

Aplicando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Poincaré na igualdade anterior, obtemos

$$\int_0^L |A_1 v_x + A_2 w_x|^2 \, dx \leq \rho_1\rho_2 \|\beta_1 V + \beta_2 W\| \|A_1 V + A_2 W\|$$
$$+\rho_1\rho_2 \|\beta_1 V + \beta_2 W\| \|A_1 f + A_2 g\| + (\beta_1^2\rho_2 + \beta_2^2\rho_1)c_* \|\Theta_x\| \|A_1 v_x + A_2 w_x\|$$
$$+\frac{\alpha |\chi_1| c_*}{|\lambda|} \|V - W\| \|A_1 v_x + A_2 w_x\| + \frac{\alpha |\chi_1| c_*}{|\lambda|} \|f - g\| \|A_1 v_x + A_2 w_x\| .$$

Fazendo então o uso da desigualdade de Young de forma conveniente, obtemos

$$\int_0^L |A_1 v_x + A_2 w_x|^2 \, dx \leq \kappa_3 \|\beta_1 V + \beta_2 W\|^2 + \kappa_3 \|\Theta_x\|^2 + \epsilon_* \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \kappa_3 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\kappa_3}{|\lambda|^2} \|V - W\|^2 ,$$

onde κ_3 é uma constante positiva e $\epsilon_* > 0$ é arbitrário.

Aplicando as estimativas obtidas nos lemas 4.2 e 4.5, segue a existência de uma constante $K_5 > 0$ tal que

$$\int_0^L |A_1 v_x + A_2 w_x|^2 \, dx \leq K_5 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + K_5 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{K_5}{|\lambda|^2} \|V - W\|^2 + \epsilon_4 \|U\|_{\mathcal{H}}^2 ,$$

com $\epsilon_4 = \epsilon_3 + \epsilon_*$ arbitrário. O que conclui o resultado.

■

Lema 4.7. *Suponha que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ e $U = (v, w, \theta, V, W, \Theta) \in D(\mathcal{A})$ é solução de* (4.17)*. Se $\chi_0 = \chi_1 = 0$ e $D_1 > 0$ então existe uma constante $K_6 > 0$ tal que*

$$\int_0^L |V - W|^2 \, dx + \int_0^L |v - w|^2 \, dx + \int_0^L |v_x - w_x|^2 \, dx \leq K_6 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} .$$

Demonstração: Multiplicando (4.21) por β_2 e (4.22) por β_1, obtemos

$$i\lambda\rho_1\beta_2 V - a_{11}\beta_2 v_{xx} - a_{12}\beta_2 w_{xx} + \alpha\beta_2(v - w) - \beta_1\beta_2\Theta_x = \beta_2 p \tag{4.35}$$
$$i\lambda\rho_2\beta_1 W - a_{12}\beta_1 v_{xx} - a_{22}\beta_1 w_{xx} + \alpha\beta_1(v - w) - \beta_1\beta_2\Theta_x = \beta_1 q \tag{4.36}$$

Como por hipótese $\chi_1 = 0$, temos que $\beta_1\rho_2 = \beta_2\rho_1$. Assim, fazendo a diferença entre (4.35) e (4.36) segue que

$$i\lambda\rho_1\beta_2(V - W) - D_1 v_{xx} - D_2 w_{xx} + \alpha(\beta_1 + \beta_2)(v - w) = \beta_2 p - \beta_1 q. \tag{4.37}$$

Além disso, como $\chi_0 = 0$, temos

$$\chi_0 = \beta_1\rho_2 D_1 + \beta_2\rho_1 D_2 = \beta_1\rho_2(D_1 + D_2) = 0,$$

e então $D_2 = -D_1$.

Com isso, (4.37) pode ser reescrita como

$$i\lambda\rho_1\beta_2(V-W)-D_1(v_{xx}-w_{xx})+\alpha(\beta_1+\beta_2)(v-w)=\beta_2 p-\beta_1 q. \tag{4.38}$$

Fazendo o produto de (4.38) por $\overline{(v-w)}$ e integrando de 0 a L, temos

$$i\lambda\rho_1\beta_2\int_0^L (V-W)\overline{(v-w)}\,dx+D_1\int_0^L |v_x-w_x|^2\,dx$$

$$+\alpha(\beta_1+\beta_2)\int_0^L |v-w|^2\,dx=\int_0^L (\beta_2 p-\beta_1 q)\overline{(v-w)}\,dx. \tag{4.39}$$

Lembrando que $i\lambda v=f+V$ e $i\lambda w=g+W$, temos que (4.39) pode ser escrita como

$$\rho_1\beta_2\int_0^L |V-W|^2\,dx+D_1\int_0^L |v_x-w_x|^2\,dx$$

$$+\alpha(\beta_1+\beta_2)\int_0^L |v-w|^2\,dx=\int_0^L (\beta_2 p-\beta_1 q)\overline{(v-w)}\,dx-\int_0^L (f-g)\overline{(v-w)}\,dx. \tag{4.40}$$

Agora, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue a existência de $K_6>0$ tal que

$$\int_0^L |V-W|^2\,dx+\int_0^L |v-w|^2\,dx+\int_0^L |v_x-w_x|^2\,dx\le K_6\,\|U\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}}\,.$$

e segue o resultado.

$\blacksquare$

Enunciemos agora o resultado que estabelece condições suficientes para que o semigrupo associado ao problema de mistura termoelástica do tipo III seja exponencialmente estável.

Teorema 4.8. *Se ocorre a condição (i) ou (iii) do Teorema 4.1, então o semigrupo associado ao problema de mistura termoelástica do tipo III é exponencialmente estável, ou seja, existem constantes $M>0$ e $\omega<0$ tais que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)}\le Me^{\omega t},\ \forall t\ge 0.$$

Demonstração: Vamos supor inicialmente que ocorre (i). Do fato de termos $\chi_0\neq 0$, segue que

$$\det\begin{pmatrix} A_1 & A_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix}=A_1\beta_2-A_2\beta_1=a_{11}\beta_1\beta_2\rho_2+a_{12}\beta_2^2\rho_1-a_{12}\beta_1^2\rho_2-a_{22}\beta_1\beta_2\rho_1$$

$$=\rho_2\beta_1(a_{11}\beta_2-a_{12}\beta_1)+\rho_1\beta_2(a_{12}\beta_2-a_{22}\beta_1)=\chi_0\neq 0.$$

Assim, existem constantes M_1, M_2, N_1, N_2 tais que

$$v_x = M_1(\beta_1 v_x + \beta_2 w_x) + N_1(A_1 v_x + A_2 w_x)$$

e

$$w_x = M_2(\beta_1 v_x + \beta_2 w_x) + N_2(A_1 v_x + A_2 w_x).$$

Portanto, fazendo uso das estimativas obtidas nos lemas 4.4 e 4.6, segue que existe $K_7 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}&\int_0^L |v_x|^2\,dx + \int_0^L |w_x|^2\,dx\\ &\leq K_7\,\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + K_7\,\|U\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{K_7}{|\lambda|^2}\,\|V-W\|^2 + \epsilon_5\,\|U\|_{\mathcal{H}}^2\,,\end{aligned} \tag{4.41}$$

com $\epsilon_5 > 0$ arbitrário.

Agora, multiplicando (4.21) por $\overline{v}$ e integrando de 0 a L, obtemos

$$\begin{aligned}&i\lambda\rho_1\int_0^L V\overline{v}\,dx + a_{11}\int_0^L |v_x|^2\,dx + a_{12}\int_0^L w_x\overline{v}_x\,dx\\ &+\alpha\int_0^L (v-w)\overline{v}\,dx - \beta_1\int_0^L \Theta_x\overline{v}\,dx = \int_0^L p\overline{v}\,dx.\end{aligned}$$

Utilizando a igualdade (4.18), segue então que

$$\begin{aligned}\rho_1\int_0^L |V|^2\,dx = a_{11}\int_0^L |v_x|^2\,dx + a_{12}\int_0^L w_x\overline{v}_x\,dx + \alpha\int_0^L (v-w)\overline{v}\,dx - \beta_1\int_0^L \Theta_x\overline{v}\,dx\\ -\int_0^L p\overline{v}dx - \rho_1\int_0^L V\overline{f}dx.\end{aligned}$$

Aplicando as desigualdes de Cauchy-Schwarz, Poincaré e Young na igualdade acima, obtemos

$$\rho_1\int_0^L |V|^2\,dx \leq \kappa_4\left\{\int_0^L |v_x|^2\,dx + \int_0^L |w_x|^2\,dx\right\} + \kappa_4\,\|\Theta_x\|^2 + \kappa_4\,\|F\|_{\mathcal{H}}^2\,, \tag{4.42}$$

para alguma constante $\kappa_4 > 0$. Fazendo então o uso da estimativa do lema 4.2 e de (4.41), segue que existe uma constante $K_8 > 0$ tal que

$$\int_0^L |V|^2\,dx \leq K_8\,\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + K_8\,\|U\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{K_8}{|\lambda|^2}\,\|V-W\|^2 + \epsilon_6\,\|U\|_{\mathcal{H}}^2\,, \tag{4.43}$$

com $\epsilon_6 > 0$ arbitrário.

Multiplicando (4.22) por $\overline{w}$ e integrando de 0 a L temos que

$$i\lambda\rho_2\int_0^L W\overline{w}\,dx + a_{12}\int_0^L v_x\overline{w}_x\,dx + a_{22}\int_0^L |w_x|^2\,dx$$

$$-\alpha\int_0^L (v-w)\overline{w}\,dx - \beta_2\int_0^L \Theta_x\overline{w}\,dx = \int_0^L q\overline{w}\,dx.$$

Utilizando a igualdade (4.19), segue que

$$\rho_2\int_0^L |W|^2\,dx = a_{12}\int_0^L v_x\overline{w}_x\,dx + a_{22}\int_0^L |w_x|^2\,dx - \alpha\int_0^L (v-w)\overline{w}\,dx - \beta_2\int_0^L \Theta_x\overline{w}\,dx$$

$$-\int_0^L q\overline{w}\,dx - \rho_2\int_0^L W\overline{g}\,dx.$$

Aplicando as desigualdes de Cauchy-Schwarz, Poincaré e Young na igualdade acima, obtemos

$$\rho_1\int_0^L |W|^2\,dx \leq \kappa_5\left\{\int_0^L |v_x|^2\,dx + \int_0^L |w_x|^2\,dx\right\} + \kappa_5\left\|\Theta_x\right\|^2 + \kappa_5\left\|F\right\|_{\mathcal{H}}^2, \tag{4.44}$$

para alguma constante $\kappa_5 > 0$. Fazendo então o uso da estimativa do lema 4.2 e de (4.41), segue que existe uma constante $K_9 > 0$ tal que

$$\int_0^L |W|^2\,dx \leq K_9\left\|F\right\|_{\mathcal{H}}^2 + K_9\left\|U\right\|_{\mathcal{H}}\left\|F\right\|_{\mathcal{H}} + \frac{K_9}{|\lambda|^2}\left\|V-W\right\|^2 + \epsilon_7\left\|U\right\|_{\mathcal{H}}^2, \tag{4.45}$$

com $\epsilon_7 > 0$ arbitrário.

Com isto, utilizando os lemas 4.2 e 4.3 e as estimativas (4.41),(4.43) e (4.45) temos

$$\left\|U\right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq K_{10}\left\|F\right\|_{\mathcal{H}}^2 + K_{10}\left\|U\right\|_{\mathcal{H}}\left\|F\right\|_{\mathcal{H}} + \frac{K_{10}}{|\lambda|^2}\left\|V-W\right\|^2 + \epsilon_8\left\|U\right\|_{\mathcal{H}}^2, \tag{4.46}$$

para alguma constante $K_{10} > 0$, $\epsilon_8 > 0$ arbitrário e $|\lambda| > 1$.

No entanto, se considerarmos $|\lambda|$ suficientemente grande, ϵ_8 suficientemente pequeno e aplicarmos a desigualdade de Young de forma conveniente em (4.46), obtemos uma constante positiva K_{11} de forma que

$$\left\|U\right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq K_{11}\left\|F\right\|_{\mathcal{H}}^2 \tag{4.47}$$

e então

$$\left\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq K_{11},$$

para $|\lambda|$ suficientemente grande. Portanto

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty}\left\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\right\| < \infty.$$

Com isso, o resultado segue do Teorema 2.28.

Agora, vamos supor que ocorre (iii). Utilizando o fato de que $\beta_1 + \beta_2 > 0$ obtemos constantes $M_1^*, M_2^*, N_1^*, N_2^*$ tais que

$$v_x = M_1^*(\beta_1 v_x + \beta_2 w_x) + N_1^*(v_x - w_x)$$

e

$$w_x = M_2^*(\beta_1 v_x + \beta_2 w_x) + N_2^*(v_x - w_x).$$

Desta forma, utilizando as estimativas obtidas nos lemas 4.4 e 4.7, segue que existe uma constante positiva K_{12} de forma que

$$\int_0^L |v_x|^2 \, dx + \int_0^L |w_x|^2 \, dx \leq K_{12} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + K_{12} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \epsilon_9 \|U\|_{\mathcal{H}}^2 , \tag{4.48}$$

com $\epsilon_9 > 0$ arbitrário.

Fazendo uso da estimativa obtida no lema 4.2 e de (4.48) em (4.42) e (4.44), segue que

$$\int_0^L |V|^2 \, dx + \int_0^L |W|^2 \, dx \leq K_{13} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + K_{13} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \epsilon_{10} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 , \tag{4.49}$$

para alguma constante $K_{13} > 0$ e $\epsilon_{10} > 0$ arbitrário.

Com isto, utilizando utilizando os lemas 4.2 e 4.3 e as estimativas (4.48) e (4.49) temos

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq K_{14} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + K_{14} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \epsilon_{11} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 , \tag{4.50}$$

para alguma constante $K_{14} > 0$, $\epsilon_{11} > 0$ arbitrário e $|\lambda| > 1$.

Considerando ϵ_{11} suficientemente pequeno e utilizando a desigualdade de Young de forma conveniente em (4.50), obtemos uma contante positiva K_{15} tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq K_{15} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \tag{4.51}$$

e então

$$\left\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq K_{15},$$

para $|\lambda| > 1$. Portanto

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} \left\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\right\| < \infty.$$

Novamente, o resultado segue do Teorema 2.28.

■

4.1 Falta de estabilidade exponencial

Nesta seção, analisaremos uma condição em que o semigrupo associado ao sistema de mistura termoelástica do tipo III não é exponencialmente estável. Com esse intuito, provamos o seguinte resultado:

Teorema 4.9. *Se temos que a condição (ii) do Teorema 4.1 ocorre, então o semigrupo associado ao sistema de mistura termoelástica do tipo III não é exponencialmente estável.*

Demonstração: Para obter o nosso resultado, devemos mostrar que não temos

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} \left\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\right\| < \infty,$$

ou seja, mostraremos a existência de uma sequência real (λ_ν) com $\lambda_\nu \to \infty$ e uma sequência limitada F_ν em $\mathcal{H}$ tal que

$$\left\|(i\lambda_\nu I - \mathcal{A})^{-1} F_\nu\right\|_{\mathcal{H}} \to \infty, \quad \nu \to \infty.$$

Note inicialmente que, da hipótese $\chi_0 = 0$ temos

$$\rho_2\beta_1 D_1 = -\rho_1\beta_2 D_2 \tag{4.52}$$

e além disso,

$$\frac{D_1}{\rho_1\beta_2} > 0. \tag{4.53}$$

De fato, se supormos que

$$\frac{D_1}{\rho_1\beta_2} \leq 0$$

entao teremos

$$D_1 = (a_{11}\beta_2 - a_{12}\beta_1) \leq 0, \text{ ou seja, } a_{11} \leq \frac{a_{12}\beta_1}{\beta_2}.$$

De (4.52) obtemos também que

$$-D_2 = (a_{22}\beta_1 - a_{12}\beta_2) \leq 0 \Rightarrow a_{22} \leq \frac{a_{12}\beta_2}{\beta_1}$$

e portanto, como $a_{11}, a_{22} > 0$, tem-se

$$a_{11}a_{22} \leq a_{12}^2,$$

o que é absurdo.

Consideremos então, para cada $\nu \in \mathbb{N}$, $F_\nu = (0, 0, 0, \sin\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right), 0, 0)$ e seja

$U_\nu = (v_\nu, w_\nu, \theta_\nu, V_\nu, W_\nu, \Theta_\nu) \in D(\mathcal{A})$ solução da equação resolvente

$$i\lambda_\nu U_\nu - \mathcal{A}U_\nu = F_\nu$$

que em termos de suas componentes pode ser escrita como

$$i\lambda_\nu v_\nu - V_\nu = 0, \tag{4.54}$$

$$i\lambda_\nu w_\nu - W_\nu = 0, \tag{4.55}$$

$$i\lambda_\nu \theta_\nu - \Theta_\nu = 0, \tag{4.56}$$

$$i\lambda_\nu \rho_1 V_\nu - a_{11} v_{\nu xx} - a_{12} w_{\nu xx} + \alpha(v_\nu - w_\nu) - \beta_1 \Theta_{\nu x} = \sin\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right), \tag{4.57}$$

$$i\lambda_\nu \rho_2 W_\nu - a_{12} v_{\nu xx} - a_{22} w_{\nu xx} - \alpha(v_\nu - w_\nu) - \beta_2 \Theta_{\nu x} = 0, \tag{4.58}$$

$$i\lambda_\nu c\Theta_\nu - (\beta_1 V_{\nu x} + \beta_2 W_{\nu x}) - (k\theta_{\nu xx} + \gamma\Theta_{\nu xx}) = 0. \tag{4.59}$$

Substituindo (4.54), (4.55) e (4.56) em (4.57),(4.58) e (4.59), obtemos

$$-\lambda_\nu^2 \rho_1 v_\nu - a_{11} v_{\nu xx} - a_{12} w_{\nu xx} + \alpha(v_\nu - w_\nu) - i\lambda_\nu \beta_1 \theta_{\nu x} = \sin\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right) \tag{4.60}$$

$$-\lambda_\nu^2 \rho_2 w_\nu - a_{12} v_{\nu xx} - a_{22} w_{\nu xx} - \alpha(v_\nu - w_\nu) - i\lambda_\nu \beta_2 \theta_{\nu x} = 0 \tag{4.61}$$

$$-\lambda_\nu^2 c\theta_\nu - (i\lambda_\nu \beta_1 v_{\nu x} + i\lambda_\nu \beta_2 w_{\nu x}) - (k\theta_{\nu xx} + i\lambda_\nu \gamma\theta_{\nu xx}) = 0. \tag{4.62}$$

Assim, levando em conta as condições de fronteira, podemos considerar soluções da forma

$$v_\nu = A_\nu \sin\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right), \quad w_\nu = B_\nu \sin\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right) \quad \text{e} \quad \theta_\nu = C_\nu \cos\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right).$$

Substituindo estas soluções em $(4.60) - (4.62)$, obtemos

$$\begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ J_2 & J_4 & \frac{\beta_2}{\beta_1} J_3 \\ -J_3 & -\frac{\beta_2}{\beta_1} J_3 & J_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\nu \\ B_\nu \\ C_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

onde

$$J_1 = -\lambda_\nu^2 \rho_1 + a_{11}\frac{\nu^2\pi^2}{L^2} + \alpha, \quad J_2 = a_{12}\frac{\nu^2\pi^2}{L^2} - \alpha, \quad J_3 = i\lambda_\nu \beta_1 \frac{\nu\pi}{L},$$

$$J_4 = -\lambda_\nu^2 \rho_2 + a_{22}\frac{\nu^2\pi^2}{L^2} + \alpha, \quad J_5 = -\lambda_\nu^2 c + k\frac{\nu^2\pi^2}{L^2} + i\lambda_\nu \gamma \frac{\nu^2\pi^2}{L^2}.$$

Logo, da fórmula de Cramer, temos

$$A_\nu = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$$

onde

$$\Delta_1 = \det \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ J_2 & J_4 & \frac{\beta_2}{\beta_1} J_3 \\ -J_3 & -\frac{\beta_2}{\beta_1} J_3 & J_5 \end{pmatrix} = J_5(J_1 J_4 - J_2^2) + J_3^2(-2\frac{\beta_2}{\beta_1} J_2 + J_4 + \frac{\beta_2^2}{\beta_1^2} J_1). \quad (4.63)$$

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & J_2 & J_3 \\ 0 & J_4 & \frac{\beta_2}{\beta_1} J_3 \\ 0 & -\frac{\beta_2}{\beta_1} J_3 & J_5 \end{pmatrix} = J_4 J_5 + \frac{\beta_2^2}{\beta_1^2} J_3^2. \quad (4.64)$$

Veja agora que

$$-2\frac{\beta_2}{\beta_1} J_2 + J_4 + \frac{\beta_2^2}{\beta_1^2} J_1 = -2\frac{\beta_2}{\beta_1}\left(a_{12}\frac{\nu^2\pi^2}{L^2} - \alpha\right) + (-\lambda_\nu^2 \rho_2 + a_{22}\frac{\nu^2\pi^2}{L^2} + \alpha)$$

$$+\frac{\beta_2^2}{\beta_1^2}(-\lambda_\nu^2 \rho_1 + a_{11}\frac{\nu^2\pi^2}{L^2} + \alpha)$$

$$= \left(\frac{\beta_2^2 a_{11} - 2\beta_1\beta_2 a_{12} + \beta_1^2 a_{22}}{\beta_1^2}\right)\frac{\nu^2\pi^2}{L^2} - \lambda_\nu^2\left(\frac{\rho_1\beta_2^2 + \rho_2\beta_1^2}{\beta_1^2}\right) + \alpha\left(\frac{(\beta_1+\beta_2)^2}{\beta_1^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\beta_1^2}\left\{[\beta_2(a_{11}\beta_2 - a_{12}\beta_1) + \beta_1(a_{22}\beta_1 - a_{12}\beta_2)]\frac{\nu^2\pi^2}{L^2} - \lambda_\nu^2(\rho_1\beta_2^2 + \rho_2\beta_1^2) + \alpha(\beta_1+\beta_2)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{\beta_1^2}\left\{\left[\frac{\beta_2}{\beta_1\rho_2}(\rho_2\beta_1 D_1) + \frac{\beta_1}{\beta_2\rho_1}(-\rho_1\beta_2 D_2)\right]\frac{\nu^2\pi^2}{L^2} - \lambda_\nu^2(\rho_1\beta_2^2 + \rho_2\beta_1^2) + \alpha(\beta_1+\beta_2)^2\right\}.$$

Utilizando a igualdade (4.52), segue então que

$$-2\frac{\beta_2}{\beta_1} J_2 + J_4 + \frac{\beta_2^2}{\beta_1^2} J_1$$

$$= \frac{1}{\beta_1^2}\left\{(\rho_1\beta_2^2 + \rho_2\beta_1^2)\left[\frac{D_1}{\rho_1\beta_2}\frac{\nu^2\pi^2}{L^2} - \lambda_\nu^2\right] + \alpha(\beta_1+\beta_2)^2\right\}. \quad (4.65)$$

Tomando então

$$\lambda_\nu^2 = \frac{D_1}{\rho_1\beta_2}\frac{\nu^2\pi^2}{L^2} + d,$$

onde d é uma constante a ser fixada posteriormente, temos de (4.53) que $\lambda_\nu^2 > 0$ para ν suficientemente grande. Assim, obtemos

$$-2\frac{\beta_2}{\beta_1} J_2 + J_4 + \frac{\beta_2^2}{\beta_1^2} J_1 = \frac{1}{\beta_1^2}\left[-d(\rho_1\beta_2^2 + \rho_2\beta_1^2) + \alpha(\beta_1+\beta_2)^2\right] =: \sigma_0(cte). \quad (4.66)$$

Vejamos agora que

$$J_1J_4 - J_2^2 = \lambda_\nu^4\rho_1\rho_2 - \lambda_\nu^2\alpha(\rho_1+\rho_2) - \lambda_\nu^2\frac{\nu^2\pi^2}{L^2}(\rho_1a_{22}+\rho_2a_{11})$$
$$+\alpha(a_{11}+2a_{12}+a_{22})\frac{\nu^2\pi^2}{L^2} + \sigma\frac{\nu^4\pi^4}{L^4}. \tag{4.67}$$

Substituindo o valor de λ_ν em (4.67), temos que

$$J_1J_4 - J_2^2 =$$
$$\frac{\nu^4\pi^4}{L^4}\left\{\frac{\rho_2}{\rho_1\beta_2^2}D_1^2 + \sigma - \frac{(\rho_1a_{22}+\rho_2a_{11})}{\rho_1\beta_2}D_1\right\}$$
$$+\frac{\nu^2\pi^2}{L^2}\left\{\frac{2d}{\beta_2}D_1 - d(\rho_1a_{22}+\rho_2a_{11}) + \alpha(a_{11}+2a_{12}+a_{22}) - \alpha\frac{(\rho_1+\rho_2)}{\rho_1\beta_2}D_1\right\}$$
$$+\rho_1\rho_2d^2 - \alpha d(\rho_1+\rho_2).$$

Note então que

$$\frac{\rho_2}{\rho_1\beta_2^2}D_1^2 + \sigma - \frac{(\rho_1a_{22}+\rho_2a_{11})}{\rho_1\beta_2}D_1$$
$$= \frac{\rho_2\beta_1^2a_{12}^2}{\rho_1\beta_2^2} - \frac{\beta_1\rho_2a_{11}a_{12}}{\rho_1\beta_2} + \frac{\beta_1a_{12}a_{22}}{\beta_2} - a_{12}^2$$
$$= \frac{a_{12}(\rho_2\beta_1^2a_{12} - \rho_2\beta_1\beta_2a_{11} + \rho_1\beta_1\beta_2a_{22} - \rho_1\beta_2^2a_{12})}{\rho_1\beta_2^2}$$
$$= -\frac{a_{12}}{\rho_1\beta_2^2}\left[\rho_2\beta_1(a_{11}\beta_2 - a_{12}\beta_1) + \rho_1\beta_2(a_{12}\beta_2 - a_{22}\beta_1)\right]$$
$$= \frac{-a_{12}}{\rho_1\beta_2^2}\chi_0 = 0.$$

Assim, tomando d de forma que

$$\frac{2d}{\beta_2}(a_{11}\beta_2 - a_{12}\beta_1) - d(\rho_1a_{22}+\rho_2a_{11}) + \alpha(a_{11}+2a_{12}+a_{22}) - \alpha\frac{(\rho_1+\rho_2)}{\rho_1\beta_2}(a_{11}\beta_2 - a_{12}\beta_1) = 0,$$

temos

$$J_1J_4 - J_2^2 = \rho_1\rho_2d^2 - \alpha d(\rho_1+\rho_2) =: \sigma_1(cte) \tag{4.68}$$

De (4.63), (4.66) e (4.68) temos então que

$$\Delta_1 = \left(-\lambda_\nu^2c + k\frac{\nu^2\pi^2}{L^2} + i\lambda_\nu\gamma\frac{\nu^2\pi^2}{L^2}\right)\sigma_1 - \lambda_\nu^2\beta_1^2\frac{\nu^2\pi^2}{L^2}\sigma_0$$
$$= -\frac{\sigma_1D_1^2\nu^2\pi^2c}{\rho_1\beta_2L^2} - cd\sigma_1 + \frac{k\nu^2\pi^2}{L^2}\sigma_1 + \frac{i\gamma\nu^4\pi^4}{L^4}\frac{\sigma_1D_1}{\rho_1\beta_2} + i\gamma\sigma_1\frac{\nu^2\pi^2}{L^2}d$$
$$-\frac{\beta_1^2\sigma_0}{\rho_1\beta_2}\frac{\nu^4\pi^4}{L^4} - d\beta_1^2\frac{\nu^2\pi^2}{L^2}\sigma_0$$

$$= \frac{\nu^4\pi^4}{L^4}\left[-\frac{\sigma_1 D_1^2 L^2 c}{\rho_1\beta_2\nu^2\pi^2} - \frac{cd\sigma_1 L^4}{\nu^4\pi^4} + \frac{k\sigma_1 L^2}{\nu^2\pi^2} + \frac{i\gamma\sigma_1 D_1}{\rho_1\beta_2} + \frac{i\gamma\sigma_1 dL^2}{\nu^2\pi^2} - \frac{\beta_1^2\sigma_0}{\rho_1\beta_2} - \frac{d\beta_1^2\sigma_0 L^2}{\nu^2\pi^2}\right]$$
$$= \frac{\nu^4\pi^4}{L^4}\delta_{1\nu},$$

onde

$$\delta_{1\nu} = \left[-\frac{\sigma_1 D_1^2 L^2 c}{\rho_1\beta_2\nu^2\pi^2} - \frac{cd\sigma_1 L^4}{\nu^4\pi^4} + \frac{k\sigma_1 L^2}{\nu^2\pi^2} + \frac{i\gamma\sigma_1 D_1}{\rho_1\beta_2} + \frac{i\gamma\sigma_1 dL^2}{\nu^2\pi^2} - \frac{\beta_1^2\sigma_0}{\rho_1\beta_2} - \frac{d\beta_1^2\sigma_0 L^2}{\nu^2\pi^2}\right].$$

Note que

$$\delta_{1\nu} \to \frac{i\gamma\sigma_1 D_1}{\rho_1\beta_2} - \frac{\beta_1^2\sigma_0}{\rho_1\beta_2}, \quad \nu \to \infty.$$

Agora, de (4.64), temos

$$\Delta_2 = \left(-\lambda_\nu^2 c + k\frac{\nu^2\pi^2}{L^2} + i\lambda_\nu\gamma\frac{\nu^2\pi^2}{L^2}\right)\left(-\lambda_\nu^2\rho_2 + a_{22}\frac{\nu^2\pi^2}{L^2} + \alpha\right) - \frac{\beta_2^2}{\beta_1^2}\lambda_\nu^2\beta_1^2\frac{\nu^2\pi^2}{L^2}$$
$$= \lambda_\nu^4 c\rho_2 - \frac{\lambda_\nu^2 ca_{22}\nu^2\pi^2}{L^2} - \lambda_\nu^2 c\alpha - \frac{k\nu^2\pi^2}{L^2}\lambda_\nu^2\rho_2 + \frac{k\nu^4\pi^4 a_{22}}{L^4} + \frac{\alpha k\nu^2\pi^2}{L^2}$$
$$-\frac{i\lambda_\nu^3\gamma\rho_2\nu^2\pi^2}{L^2} - \frac{i\lambda_\nu\gamma\nu^4\pi^4 a_{22}}{L^4} + \frac{i\alpha\lambda_\nu\gamma\nu^2\pi^2}{L^2} - \frac{\beta_2^2}{\beta_1^2}\lambda_\nu^2\beta_1^2\frac{\nu^2\pi^2}{L^2}$$
$$= -\frac{D_1^2\nu^4\pi^4 c\rho_2}{\rho_1^2\beta_2 L^4} - \frac{2dD_1\nu^2\pi^2 c\rho_2}{\rho_1\beta_2 L^2} + d^2 c\rho_2 - \left(\frac{D_1\nu^2\pi^2}{\rho_1\beta_2 L^2} + d\right)\frac{ca_{22}\nu^2\pi^2}{L^2}$$
$$-c\alpha\left(\frac{D_1\nu^2\pi^2}{\rho_1\beta_2 L^2} + d\right) - \frac{k\nu^2\pi^2\rho_2}{L^2}\left(\frac{D_1\nu^2\pi^2}{\rho_1\beta_2 L^2} + d\right) + \frac{k\nu^4\pi^4 a_{22}}{L^4} + \frac{\alpha k\nu^2\pi^2}{L^2}$$
$$+\alpha i\gamma\frac{\nu^3\pi^3}{L^3}\sqrt{\frac{D_1}{\rho_1\beta_2} + \frac{dL^2}{\nu^2\pi^2}} - \frac{\beta_2^2\nu^2\pi^2}{L^2}\left(\frac{D_1\nu^2\pi^2}{\rho_1\beta_2 L^2} + d\right)$$
$$= \frac{\nu^5\pi^5}{L^5}\left[-\frac{D_1^2 c\rho_2 L}{\rho_1^2\beta_2\nu\pi} - \frac{2dD_1 c\rho_2}{\rho_1\beta_2}\frac{L^2}{\nu^2\pi^2} + \frac{d^2 c\rho_2 L^5}{\nu^5\pi^5} - \frac{D_1 ca_{22}}{\rho_1\beta_2}\frac{L}{\nu\pi} - \frac{c\alpha D_1 L^3}{\rho_1\beta_2\nu^2\pi^3}\right.$$
$$\left.-\frac{c\alpha dL^5}{\nu^5\pi^5} - \frac{\rho_2 kD_1 L}{\rho_1\beta_2\nu\pi} - \frac{kd\rho_2 L^3}{\nu^3\pi^3} + \frac{ka_{22}L}{\nu\pi} + \frac{\alpha kL^3}{\nu^3\pi^3} + \alpha i\gamma\sqrt{\frac{D_1}{\rho_1\beta_2} + \frac{dL^2}{\nu^2\pi^2}} - \frac{\beta_2^2 D_1 L}{\rho_1\nu\pi} - \frac{\beta_2^2 dL}{\nu\pi}\right]$$
$$= \frac{\nu^5\pi^5}{L^5}\delta_{2\nu},$$

onde

$$\delta_{2\nu} = \left[-\frac{D_1^2 c\rho_2 L}{\rho_1^2\beta_2\nu\pi} - \frac{2dD_1 c\rho_2}{\rho_1\beta_2}\frac{L^2}{\nu^2\pi^2} + \frac{d^2 c\rho_2 L^5}{\nu^5\pi^5} - \frac{D_1 ca_{22}}{\rho_1\beta_2}\frac{L}{\nu\pi} - \frac{c\alpha D_1 L^3}{\rho_1\beta_2\nu^2\pi^3}\right.$$
$$\left.-\frac{c\alpha dL^5}{\nu^5\pi^5} - \frac{\rho_2 kD_1 L}{\rho_1\beta_2\nu\pi} - \frac{kd\rho_2 L^3}{\nu^3\pi^3} + \frac{ka_{22}L}{\nu\pi} + \frac{\alpha kL^3}{\nu^3\pi^3} + \alpha i\gamma\sqrt{\frac{D_1}{\rho_1\beta_2} + \frac{dL^2}{\nu^2\pi^2}} - \frac{\beta_2^2 D_1 L}{\rho_1\nu\pi} - \frac{\beta_2^2 dL}{\nu\pi}\right].$$

Note que

$$\delta_{2\nu} \to \alpha i \gamma \sqrt{\frac{D_1}{\rho_1 \beta_2}}, \quad \nu \to \infty.$$

Desta forma, temos que

$$A_\nu = \frac{\frac{\nu^5 \pi^5}{L^5} \delta_{2\nu}}{\frac{\nu^4 \pi^4}{L^4} \delta_{1\nu}} = \frac{\nu \pi}{L} \frac{\delta_{2\nu}}{\delta_{1\nu}},$$

com

$$\frac{\delta_{2\nu}}{\delta_{1\nu}} \to cte, \quad \nu \to \infty.$$

Finalmente, sabemos que

$$\|U_\nu\|_{\mathcal{H}}^2 \geq c_0 \int_0^L |v_{\nu x}|^2 \, dx = \frac{c_0 \pi^2}{2L} (A_\nu)^2 \nu^2 \approx C \nu^4 \to \infty, \quad \nu \to \infty \tag{4.69}$$

e segue então o nosso resultado.

■

5 DECAIMENTO POLINOMIAL

Neste capítulo, estabelecemos uma taxa ótima de decaimento polinomial para a solução do problema de mistura com termoelásticidade tipo III, no caso em que a condição (ii) do Teorema 4.1 seja válida. Com o intuito de usar o Teorema 2.29, necessitamos de uma estimativa do tipo

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \mathcal{K} |\lambda|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 .$$

Nossa maior dificuldade está em obter uma estimativa para $\|V-W\|^2$. A chave para resolver este problema é estabelecer a igualdade (5.16), a ser apresentada na sequência.

Enunciamos então o seguinte resultado:

Teorema 5.1. *Se ocorre (ii) do Teorema 4.1, então o semigrupo associado ao sistema de mistura termoelástica do tipo III satisfaz*

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{\mathcal{K}}{t^{\frac{1}{2}}} \|U_0\|_{D(\mathcal{A})} ,$$

para alguma constante $\mathcal{K}$. Além disso, a taxa de decaimento é ótima.

Demonstração: Seja $U = (v, w, \theta, V, W, \Theta) \in D(\mathcal{A})$ solução de (4.17). Da desigualdade (4.34) obtida no Lema 4.5 temos

$$\int_0^L |\beta_1 V + \beta_2 W|^2 \, dx \leq k \|\theta_x\| \|\beta_1 V + \beta_2 W\| + \gamma \|\Theta_x\| \|\beta_1 V + \beta_2 W\|$$

$$+ \|r\| \|\beta_1 \varphi_1 + \beta_2 \varphi_2\| + \frac{cc_*}{\rho_1 \rho_2} \|\Theta_x\| \|A_1 v_x + A_2 w_x\| + \frac{cc_*^2 |\beta_1^2 \rho_2 - \beta_2^2 \rho_1|}{\rho_1 \rho_2} \|\Theta_x\|^2$$

$$+ \frac{c\kappa_1}{\rho_1 \rho_2} \|\Theta\| \|\beta_1 \rho_2 p + \beta_2 \rho_1 q\| + \frac{c\alpha\kappa_1 |\chi_1|}{\rho_1 \rho_2} \|\Theta\| \|v - w\| ,$$

e então, usando a desigualdade Poincaré e de Young de forma conveniente e as estimativas obtidas nos lemas 4.2 e 4.3, segue que

$$\int_0^L |\beta_1 V + \beta_2 W|^2 \, dx \leq \mathcal{K}_1 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \mathcal{K}_1 \|F\|_{\mathcal{H}}^2$$

$$+ \delta_1 \|A_1 v_x + A_2 w_x\|^2 + \delta_2 \|v - w\|^2 , \tag{5.1}$$

para alguma constante $\mathcal{K}_1 > 0$ e $\delta_1, \delta_2 > 0$ arbitrários.

Agora, como por hipótese temos que $\chi_0 = 0$, segue que

$$A_1 v_x + A_2 w_x = \gamma_0 (\beta_1 v_x + \beta_2 w_x)$$

e desta forma, (5.1) pode ser reescrita como

$$\int_0^L |\beta_1 V + \beta_2 W|^2 \, dx \leq \mathcal{K}_1 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \mathcal{K}_1 \|F\|_{\mathcal{H}}^2$$

$$+\delta_1 \gamma_0^2 \|\beta_1 v_x + \beta_2 w_x\|^2 + \delta_2 \|v - w\|^2 . \tag{5.2}$$

Além disso, susbstituindo $A_1 v_x + A_2 w_x = \gamma_0(\beta_1 v_x + \beta_2 w_x)$ na igualdade (4.32), temos

$$i\lambda \rho_1 \rho_2 (\beta_1 V + \beta_2 W)$$

$$= \gamma_0(\beta_1 v_{xx} + \beta_2 w_{xx}) + \alpha \chi_1 (v - w) + (\beta_1^2 \rho_2 + \beta_2^2 \rho_1)\Theta_x + (\beta_1 \rho_2 p + \beta_2 \rho_1 q). \tag{5.3}$$

Multiplicando (5.3) por $\overline{(\beta_1 V + \beta_2 W)}$ e integrando de 0 a L, obtemos

$$i\lambda \rho_1 \rho_2 \int_0^L |\beta_1 V + \beta_2 W|^2 \, dx = -\gamma_0 \int_0^L (\beta_1 v_x + \beta_2 w_x)\overline{(\beta_1 V_x + \beta_2 W_x)} dx$$

$$+\alpha \chi_1 \int_0^L (v - w)\overline{(\beta_1 V + \beta_2 W)} dx + (\beta_1^2 \rho_2 + \beta_2^2 \rho_1) \int_0^L \Theta_x \overline{(\beta_1 V + \beta_2 W)} dx$$

$$+ \int_0^L (\beta_1 \rho_2 p + \beta_2 \rho_1 q)\overline{(\beta_1 V + \beta_2 W)} dx. \tag{5.4}$$

Das equações (4.18) e (4.19) sabemos que

$$\beta_1 V_x + \beta_2 W_x = i\lambda(\beta_1 v_x + \beta_2 v_x) - (\beta_1 f_x + \beta_2 g_x),$$

assim, (5.4) pode ser escrita como

$$\gamma_0 \int_0^L |\beta_1 v_x + \beta_2 w_x|^2 \, dx = -\frac{\gamma_0}{i\lambda} \int_0^L (\beta_1 v_x + \beta_2 w_x)\overline{(\beta_1 f_x + \beta_2 g_x)} dx$$

$$-\frac{\alpha \chi_1}{i\lambda} \int_0^L (v - w)\overline{(\beta_1 V + \beta_2 W)} dx - \frac{(\beta_1^2 \rho_2 + \beta_2^2 \rho_1)}{i\lambda} \int_0^L \Theta_x \overline{(\beta_1 V + \beta_2 W)} dx$$

$$-\frac{1}{i\lambda} \int_0^L (\beta_1 \rho_2 p + \beta_2 \rho_1 q)\overline{(\beta_1 V + \beta_2 W)} dx - \rho_1 \rho_2 \int_0^L |\beta_1 V + \beta_2 W|^2 \, dx. \tag{5.5}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz em (5.5), obtemos

$$|\gamma_0| \int_0^L |\beta_1 v_x + \beta_2 w_x|^2 \, dx \leq \frac{|\gamma_0|}{|\lambda|} \|\beta_1 v_x + \beta_2 w_x\| \|\beta_1 f_x + \beta_2 g_x\|$$

$$+\frac{\alpha |\chi_1|}{|\lambda|} \|v - w\| \|\beta_1 V + \beta_2 W\| + \frac{(\beta_1^2 \rho_2 + \beta_2^2 \rho_1)}{|\lambda|} \|\Theta_x\| \|\beta_1 V + \beta_2 W\|$$

$$\frac{1}{|\lambda|} \|\beta_1 \rho_2 p + \beta_2 \rho_1 q\| \|\beta_1 V + \beta_2 W\| + \rho_1 \rho_2 \|\beta_1 V + \beta_2 W\|^2 .$$

E então, aplicando a desigualdade de Young de forma conveniente e fazendo uso das estimativas obtidas nos lemas 4.2 e 4.3, obtemos uma constante $\mathcal{K}_2 > 0$ tal que

$$\int_0^L |\beta_1 v_x + \beta_2 w_x|^2 \, dx \leq \frac{\mathcal{K}_2}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{\mathcal{K}_2}{|\lambda|^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \mathcal{K}_2 \|\beta_1 V + \beta_2 W\|^2$$

$$+ \frac{\mathcal{K}_2}{|\lambda|^2} \|v - w\|^2 . \tag{5.6}$$

Note então que, substituindo (5.6) em (5.2), tomando δ_1 suficientemente pequeno e $|\lambda| > 1$, temos que

$$\int_0^L |\beta_1 V + \beta_2 W|^2 \, dx \leq \mathcal{K}_3 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \mathcal{K}_3 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \delta_2 \|v - w\|^2 + \frac{\mathcal{K}_3}{|\lambda|^2} \|v - w\|^2 , \tag{5.7}$$

para alguma constante positiva $\mathcal{K}_3$.

Agora, de (4.21) e (4.22), temos

$$a_{11} v_{xx} + a_{12} w_{xx} = i\lambda \rho_1 V + \alpha(v - w) - \beta_1 \Theta_x - p \tag{5.8}$$

e

$$a_{12} v_{xx} + a_{22} w_{xx} = i\lambda \rho_2 W - \alpha(v - w) - \beta_2 \Theta_x - q. \tag{5.9}$$

Considerando $\sigma = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$, note que

$$v_{xx} = \frac{a_{22}}{\sigma}(a_{11} v_{xx} + a_{12} w_{xx}) - \frac{a_{12}}{\sigma}(a_{12} v_{xx} + a_{22} w_{xx})$$

e

$$w_{xx} = -\frac{a_{12}}{\sigma}(a_{11} v_{xx} + a_{12} w_{xx}) + \frac{a_{11}}{\sigma}(a_{12} v_{xx} + a_{22} w_{xx}).$$

Assim, substituindo (5.8) e (5.9) nas igualdades anteriores, temos

$$\sigma(v_{xx} - w_{xx}) = i\lambda \left[\rho_1 (a_{22} + a_{12}) V - \rho_2 (a_{11} + a_{12}) W\right] + \alpha(a_{11} + 2a_{12} + a_{22})(v - w)$$

$$+ \left[\beta_2 (a_{12} + a_{11}) - \beta_1 (a_{12} + a_{22})\right] \Theta_x + (a_{11} + a_{12}) q - (a_{12} + a_{22}) p,$$

ou seja,

$$-\sigma(v_{xx} - w_{xx}) + \alpha(a_{11} + 2a_{12} + a_{22})(v - w) + \left[\beta_2 (a_{12} + a_{11}) - \beta_1 (a_{12} + a_{22})\right] \Theta_x$$

$$= -i\lambda \left[\rho_1 (a_{22} + a_{12}) V - \rho_2 (a_{11} + a_{12}) W\right] - (a_{11} + a_{12}) q + (a_{12} + a_{22}) p. \tag{5.10}$$

Note que, como $\beta_1 + \beta_2 > 0$, então

$$\rho_1 (a_{22} + a_{12}) V - \rho_2 (a_{11} + a_{12}) W = \frac{\rho_1 (a_{22} + a_{12})(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_1 + \beta_2} V - \frac{\rho_2 (a_{11} + a_{12})(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_1 + \beta_2} W$$

$$= \frac{\rho_1(a_{22}+a_{12})\beta_1}{\beta_1+\beta_2}V + \frac{\rho_1(a_{22}+a_{12})\beta_2}{\beta_1+\beta_2}V - \frac{\rho_2(a_{11}+a_{12})\beta_1}{\beta_1+\beta_2}W - \frac{\rho_2(a_{11}+a_{12})\beta_2}{\beta_1+\beta_2}W$$

$$= \frac{[\rho_1(a_{12}+a_{22}-\rho_2(a_{11}+a_{12})]}{\beta_1+\beta_2}(\beta_1 V+\beta_2 W) + \frac{\rho_2(a_{11}+a_{12})\beta_1}{\beta_1+\beta_2}V$$

$$-\frac{\rho_1(a_{22}+a_{12})\beta_2}{\beta_1+\beta_2}W + \frac{\rho_1(a_{22}+a_{12})\beta_2}{\beta_1+\beta_2}V - \frac{\rho_2(a_{11}+a_{12})\beta_1}{\beta_1+\beta_2}W$$

$$= \frac{[\rho_1(a_{12}+a_{22}-\rho_2(a_{11}+a_{12})]}{\beta_1+\beta_2}(\beta_1 V+\beta_2 W) + \left[\frac{\beta_1\rho_2(a_{11}+a_{12})+\rho_1\beta_2(a_{22}+a_{12})}{\beta_1+\beta_2}\right]V$$

$$-\left[\frac{\beta_1\rho_2(a_{11}+a_{12})+\rho_1\beta_2(a_{22}+a_{12})}{\beta_1+\beta_2}\right]W$$

$$= \frac{[\rho_1(a_{12}+a_{22}-\rho_2(a_{11}+a_{12})]}{\beta_1+\beta_2}(\beta_1 V+\beta_2 W)$$

$$+\left[\frac{\beta_1\rho_2 a_{11}+\rho_1\beta_2 a_{22}+(\beta_2\rho_1+\beta_1\rho_2)a_{12}}{\beta_1+\beta_2}\right](V-W),$$

ou seja,

$$\rho_1(a_{22}+a_{12})V - \rho_2(a_{11}+a_{12})W = \sigma_1(\beta_1 V+\beta_2 W)+\sigma_0(V-W),$$

onde

$$\sigma_0 = \frac{\beta_2\rho_1 a_{22}+\beta_1\rho_2 a_{11}+(\beta_2\rho_1+\beta_1\rho_2)a_{12}}{\beta_1+\beta_2} \quad \text{e} \quad \sigma_1 = \frac{\rho_1(a_{12}+a_{22})-\rho_2(a_{11}+a_{12})}{\beta_1+\beta_2}.$$

Logo, podemos reescrever (5.10) como

$$i\lambda\sigma_0(V-W)-\sigma(v_{xx}-w_{xx})+\alpha(a_{11}+2a_{12}+a_{22})(v-w)+[\beta_2(a_{12}+a_{11})-\beta_1(a_{12}+a_{22})]\,\Theta_x$$

$$= -i\lambda\sigma_1(\beta_1 V+\beta_2 W)-(a_{11}+a_{12})q+(a_{12}+a_{22})p. \tag{5.11}$$

Agora, multiplicando (4.21) por ρ_2, (4.22) por ρ_1 e fazendo a diferença entre elas, obtemos

$$i\lambda\rho_1\rho_2(V-W)-(\rho_2 a_{11}-\rho_1 a_{12})v_{xx}-(\rho_2 a_{12}-\rho_1 a_{22})w_{xx}$$

$$+\alpha(\rho_1+\rho_2)(v-w)+\chi_1\Theta_x = \rho_2 p-\rho_1 q. \tag{5.12}$$

Novamente, usando o argumento de que $\beta+\beta_2>0$, temos que (5.12) é equivalente a

$$i\lambda\rho_1\rho_2(V-W)-\alpha_0(v_{xx}-w_{xx})+\alpha(\rho_1+\rho_2)(v-w)+\chi_1\Theta_x$$

$$= \alpha_1(\beta_1 v_{xx}+\beta_2 w_{xx})+\rho_2 p-\rho_1 q, \tag{5.13}$$

onde

$$\alpha_0 = \frac{\rho_2\beta_2 a_{11} + \rho_1\beta_1 a_{22} - a_{12}(\beta_1\rho_2 + \beta_2\rho_1)}{\beta_1+\beta_2} \quad \text{e} \quad \alpha_1 = \frac{-\rho_1(a_{12}+a_{22}) + \rho_2(a_{11}+a_{12})}{\beta_1+\beta_2}.$$

Note que $\sigma_1 = -\alpha_1$. Utilizando este fato em (5.11) temos que

$$i\lambda\sigma_0(V-W) - \sigma(v_{xx}-w_{xx}) + \alpha(a_{11}+2a_{12}+a_{22})(v-w) + [\beta_2(a_{12}+a_{11}) - \beta_1(a_{12}+a_{22})]\,\Theta_x$$

$$= i\lambda\alpha_1(\beta_1 V + \beta_2 W) - (a_{11}+a_{12})q + (a_{12}+a_{22})p. \tag{5.14}$$

Se $\alpha_1 \neq 0$, então, multiplicando (5.13) por $-\gamma_0$, (5.14) por $\rho_1\rho_2$ e somando-as, obtemos

$$i\lambda\rho_1\rho_2(\sigma_0-\gamma_0)(V-W) - (\rho_1\rho_2\sigma - \alpha_0\gamma_0)(v_{xx}-w_{xx})$$

$$+\left[\alpha\rho_1\rho_2(a_{11}+2a_{12}+a_{22}) - \alpha(\rho_1+\rho_2)\gamma_0\right](v-w)$$

$$+\left[\beta_2\rho_1\rho_2(a_{12}+a_{11}) - \beta_1\rho_1\rho_2(a_{12}+a_{22}) - \gamma_0\chi_1\right]\Theta_x$$

$$= \alpha_1\left[i\lambda\rho_1\rho_2(\beta_1 V + \beta_2 W) - \gamma_0(\beta_1 v_{xx} + \beta_2 w_{xx})\right] + \mathcal{F}_1, \tag{5.15}$$

onde

$$\mathcal{F}_1 = \left[\rho_1\rho_2(a_{12}+a_{22}) - \gamma_0\rho_2\right]p + \left[-\rho_1\rho_2(a_{11}+a_{12}) + \gamma_0\rho_1\right]q.$$

Substituindo (5.3) em (5.15), observamos então que existem constantes b_1, b_2, b_3 e b_4 de forma que

$$i\lambda b_1(V-W) - b_2(v_{xx}-w_{xx}) + b_3(v-w) + b_4\Theta_x = \mathcal{F}_2, \tag{5.16}$$

onde $\mathcal{F}_2$ é tal que $\|\mathcal{F}_2\| \leq \mathcal{C}_1\|F\|_{\mathcal{H}}$, para alguma constante $\mathcal{C}_1 > 0$.

Se $\alpha_1 = 0$, note então que (5.13) e (5.14) são do mesmo tipo que (5.16), enfim, uma igualdade como (5.16) sempre é valida.

Fazendo o produto de (5.16) por $\overline{(V-W)}$ e integrando de 0 a L, obtemos

$$i\lambda b_1\int_0^L |V-W|^2\,dx + b_2\int_0^L (v_x-w_x)\overline{(V_x-W_x)}dx$$

$$+b_3\int_0^L (v-w)\overline{(V-W)}dx + b_4\int_0^L \Theta_x\overline{(V-W)}dx = \int_0^L \mathcal{F}_2\overline{(V-W)}dx.$$

De (4.18) e (4.19) sabemos que $V-W = i\lambda(v-w) + (f-g)$, e assim, a igualdade anterior pode ser dada por

$$i\lambda b_1\int_0^L |V-W|^2\,dx - i\lambda b_2\int_0^L |v_x-w_x|^2\,dx$$

$$-i\lambda b_3\int_0^L |v-w|^2\,dx + b_4\int_0^L \Theta_x\overline{(V-W)}dx$$

$$= \int_0^L \mathcal{F}_2\overline{(V-W)}dx - b_2\int_0^L (v_x - w_x)\overline{(f_x - g_x)}dx - b_3\int_0^L (v-w)\overline{(f-g)}dx. \quad (5.17)$$

Tomando a parte real de (5.17), segue que

$$|Re\,\langle \Theta_x, (V-W)\rangle| \leq \mathcal{K}_4\,\|U\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}}\,, \quad (5.18)$$

onde $\mathcal{K}_4$ é uma constante positiva.

Agora, multiplicando (5.14) por $\frac{1}{\sigma}\overline{(\beta_1 v + \beta_2 w)}$ e integrando de 0 a L, vem que

$$\frac{i\lambda\sigma_0}{\sigma}\int_0^L (V-W)\overline{(\beta_1 v + \beta_2 w)}dx + \int_0^L (v_x - w_x)\overline{(\beta_1 v_x + \beta_2 w_x)}dx$$

$$+\frac{\alpha(a_{11}+2a_{12}+a_{22})}{\sigma}\int_0^L (v-w)\overline{(\beta_1 v + \beta_2 w)}dx$$

$$+\frac{[\beta_2(a_{12}+a_{11})-\beta_1(a_{12}+a_{22})]}{\sigma}\int_0^L \Theta_x\overline{(\beta_1 v + \beta_2 w)}dx$$

$$= \frac{i\lambda\alpha_1}{\sigma}\int_0^L (\beta_1 V + \beta_2 W)\overline{(\beta_1 v + \beta_2 w)}dx$$

$$-\frac{1}{\sigma}\int_0^L [(a_{11}+a_{12})q + (a_{12}+a_{22})p]\,\overline{(\beta_1 v + \beta_2 w)}dx.$$

Utilizando novamente as equações (4.18) e (4.19), obtemos

$$\int_0^L (v_x - w_x)\overline{(\beta_1 v_x + \beta_2 w_x)}dx = -\frac{\alpha_1}{\sigma}\int_0^L |\beta_1 V + \beta_2 W|^2\,dx$$

$$+\frac{\sigma_0}{\sigma}\int_0^L (V-W)\overline{(\beta_1 V + \beta_2 W)}dx - \frac{\alpha(a_{11}+2a_{12}+a_{22})}{\sigma}\int_0^L (v-w)\overline{(\beta_1 v + \beta_2 w)}dx$$

$$-\frac{[\beta_2(a_{12}+a_{11})-\beta_1(a_{12}+a_{22})]}{\sigma}\int_0^L \Theta_x\overline{(\beta_1 v + \beta_2 w)}dx + R_1, \quad (5.19)$$

onde R_1 é tal que

$$|R_1| \leq \mathcal{C}_2\,\|U\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}}\,,$$

para $\mathcal{C}_2 > 0$ constante.

Tomando a parte real de (5.19) e utilizando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Poincaré, segue que

$$|Re\,\langle (\beta_1 v_x + \beta_2 w_x), (v_x - w_x)\rangle| \leq \mathcal{K}_5\,\|\beta_1 V + \beta_2 W\|^2 + \mathcal{K}_5\,|Re\,\langle (\beta_1 V + \beta_2 W), (V-W)\rangle|$$

$$+\mathcal{K}_5\,\|v-w\|\,\|\beta_1 v_x + \beta_2 w_x\| + \mathcal{K}_5\,\|\Theta_x\|\,\|\beta_1 v_x + \beta_2 w_x\| + \mathcal{K}_5\,\|U\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}}\,, \quad (5.20)$$

para alguma constante positiva $\mathcal{K}_5$.

Note agora que, integrando (4.23) de 0 a x, obtemos

$$i\lambda c\xi_x - (\beta_1 V + \beta_2 W) - (k\theta_x + \gamma\Theta_x) = \int_0^x r ds, \tag{5.21}$$

onde $\xi \in H^2(0,L) \cap L^2_*(0,L)$ é tal que $\xi_{xx} = \Theta$, $\xi_x(0) = \xi_x(L) = 0$.

Fazendo o produto de (5.21) por $\overline{(V-W)}$ e integrando de 0 a L, temos

$$\int_0^L (\beta_1 V + \beta_2 W)\overline{(V-W)}dx = i\lambda c \int_0^L \xi_x \overline{(V-W)}dx - k\int_0^L \theta_x \overline{(V-W)}dx$$

$$-\gamma \int_0^L \Theta_x \overline{(V-W)}dx - \int_0^L \int_0^x r ds \overline{(V-W)}dx \tag{5.22}$$

Utilizando as igualdades (4.20) e (5.13) em (5.22), segue que

$$\int_0^L (\beta_1 V + \beta_2 W)\overline{(V-W)}dx = \frac{c\alpha_0}{\rho_1\rho_2}\int_0^L \Theta_x \overline{(v-w)}dx + \frac{c\alpha(\rho_1+\rho_2)}{\rho_1\rho_2}\int_0^L \xi_x \overline{(v-w)}dx$$

$$+\frac{c\chi_1}{\rho_1\rho_2}\int_0^L |\Theta|^2 dx + \frac{c\alpha_1}{\rho_1\rho_2}\int_0^L \Theta\overline{(\beta_1 v_x + \beta_2 w_x)}dx - \frac{c}{\rho_1\rho_2}\int_0^L \xi_x \overline{(\rho_2 p - \rho_1 q)}dx$$

$$-\frac{k}{i\lambda}\int_0^L \Theta_x \overline{(V-W)}dx - \frac{k}{i\lambda}\int_0^L h_x \overline{(V-W)}dx$$

$$-\gamma \int_0^L \Theta_x \overline{(V-W)}dx - \int_0^L \int_0^x r ds \overline{(V-W)}dx \tag{5.23}$$

Considerando então a parte real de (5.23) e utilizando as desigualdades de Cauchy-Schwarz, Poincaré, a estimativa obtida no lema 4.2 e a desigualdade (5.18), temos que

$$|Re\left\langle (\beta_1 V + \beta_2 W), (V-W)\right\rangle| \leq \mathcal{K}_6 \|\Theta_x\| \|v-w\| + \mathcal{K}_6 \|\Theta_x\| \|\beta_1 v_x + \beta_2 w_x\|$$

$$+\mathcal{K}_6 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \tag{5.24}$$

para alguma constante positiva $\mathcal{K}_6$.

Agora, fazendo o produto de (5.3) por $\overline{(v-w)}$ e integrando de 0 a L, obtemos

$$\alpha\chi_1 \int_0^L |v-w|^2 dx = -\rho_1\rho_2 \int_0^L (\beta_1 V + \beta_2 W)\overline{(V-W)}dx + \gamma_0 \int_0^L (\beta_1 v_x + \beta_2 w_x)\overline{(v_x - w_x)}dx$$

$$-(\beta_1^2 \rho_2 + \beta_2^2 \rho_1)\int_0^L \Theta_x \overline{(v-w)}dx + R_2, \tag{5.25}$$

onde R_2 é tal que

$$|R_2| \leq \mathcal{C}_3 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}},$$

para $\mathcal{C}_3 > 0$ constante.

Tomando a parte real de (5.25) e utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, vemos que existe uma constante $\mathcal{K}_7 > 0$ tal que

$$\int_0^L |v-w|^2\, dx \le \mathcal{K}_7 \left| Re \left\langle (\beta_1 V + \beta_2 W), (V-W) \right\rangle \right| + \mathcal{K}_7 \left| Re \left\langle (\beta_1 v_x + \beta_2 w_x), (v_x - w_x) \right\rangle \right|$$

$$+\mathcal{K}_7 \left\| \Theta_x \right\| \left\| v-w \right\| + \mathcal{K}_7 \left\| U \right\|_{\mathcal{H}} \left\| F \right\|_{\mathcal{H}}. \tag{5.26}$$

Fazendo então o uso de (5.20) e (5.24), segue que

$$\int_0^L |v-w|^2\, dx \le \mathcal{K}_8 \left\| \beta_1 V + \beta_2 W \right\|^2 + \mathcal{K}_8 \left\| v-w \right\| \left\| \beta_1 v_x + \beta_2 w_x \right\| + \mathcal{K}_8 \left\| \Theta_x \right\| \left\| \beta_1 v_x + \beta_2 w_x \right\|$$

$$+\mathcal{K}_8 \left\| \Theta_x \right\| \left\| v-w \right\| + \mathcal{K}_8 \left\| U \right\|_{\mathcal{H}} \left\| F \right\|_{\mathcal{H}}, \tag{5.27}$$

para alguma constante $\mathcal{K}_8 > 0$.

Utilizando em (5.27) a desigualdade de Young de forma conveniente, obtemos uma constante $\mathcal{K}_9 > 0$ satisfazendo

$$\int_0^L |v-w|^2\, dx \le \mathcal{K}_9 \left\| \beta_1 V + \beta_2 W \right\|^2 + \mathcal{K}_9 \left\| \beta_1 v_x + \beta_2 w_x \right\|^2 + \mathcal{K}_9 \left\| \Theta_x \right\|^2$$

$$+\mathcal{K}_9 \left\| U \right\|_{\mathcal{H}} \left\| F \right\|_{\mathcal{H}}. \tag{5.28}$$

E agora, utilizando o lema 4.2 e as estimativas (5.6) e (5.7) com δ_2 suficientemente pequeno e $|\lambda|$ suficientemente grande, obtemos

$$\int_0^L |v-w|^2\, dx \le \mathcal{K}_{10} \left\| U \right\|_{\mathcal{H}} \left\| F \right\|_{\mathcal{H}} + \mathcal{K}_{10} \left\| F \right\|_{\mathcal{H}}^2, \tag{5.29}$$

com $\mathcal{K}_{10} > 0$ constante.

Segue então das equações (4.18) e (4.19) e da estimativa (5.29) que existe uma constante $\mathcal{K}_{11} > 0$ tal que

$$\int_0^L |V-W|^2\, dx \le \mathcal{K}_{11} |\lambda|^2 \left\| U \right\|_{\mathcal{H}} \left\| F \right\|_{\mathcal{H}} + \mathcal{K}_{11} |\lambda|^2 \left\| F \right\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{5.30}$$

Como $\beta_1 + \beta_2 > 0$, existem constantes M_3, M_4, M_5 e M_6 de forma que

$$V = M_3(\beta_1 V + \beta_2 W) + M_4(V-W) \quad \text{e} \quad W = M_5(\beta_1 V + \beta_2 W) + M_6(V-W).$$

Com isso, obtemos das estimativas (5.7) e (5.30) que

$$\int_0^L (|V|^2 + |W|^2) dx \le \mathcal{K}_{12} |\lambda|^2 \left\| U \right\|_{\mathcal{H}} \left\| F \right\|_{\mathcal{H}} + \mathcal{K}_{12} |\lambda|^2 \left\| F \right\|_{\mathcal{H}}^2, \tag{5.31}$$

para alguma constante positiva $\mathcal{K}_{12}$.

Utilizando agora as equações (4.21), (4.22) e a estimativa (5.31), segue que existe uma constante $\mathcal{K}_{13} > 0$ satisfazendo

$$\int_0^L (|v_x|^2 + |w_x|^2)dx \leq \mathcal{K}_{13} |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \mathcal{K}_{13} |\lambda|^2 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 . \tag{5.32}$$

E então, utilizando os lemas 4.2 e 4.3 juntamente com as estimativas (5.31) e (5.32) e a desigualdade de Young, obtemos

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \mathcal{K}_{14} |\lambda|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 , \tag{5.33}$$

onde $\mathcal{K}_{14}$ é uma constante positiva. Com isso segue que

$$\left\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \mathcal{K}_{14} |\lambda|^2 ,$$

para $|\lambda|$ suficientemente grande. Utilizando o Teorema 2.29, obtemos uma constante positiva $\mathcal{K}$ de forma que

$$\left\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{\mathcal{K}}{t^{\frac{1}{2}}}. \tag{5.34}$$

Com isso, temos

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \left\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \|\mathcal{A}U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{\mathcal{K}}{t^{\frac{1}{2}}} \|\mathcal{A}U_0\|_{\mathcal{H}} = \frac{\mathcal{K}}{t^{\frac{1}{2}}} \|U_0\|_{D(\mathcal{A})} . \tag{5.35}$$

Desta forma, o decaimento polinomial segue da desigualdade (5.35).

Suponhamos agora que a taxa de decaimento possa ser melhorada, ou seja, que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\left\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{\mathcal{K}}{t^{\frac{1}{2-\epsilon}}}.$$

Desta forma, pelo Teorema 2.29, segue que

$$\left\|(i\lambda - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \mathcal{K} |\lambda|^{2-\epsilon} .$$

Temos então que, dado $F \in \mathcal{H}$,

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq \mathcal{K} |\lambda|^{2-\epsilon} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 , \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

onde $U \in D(\mathcal{A})$ é solução da equação resolvente $(i\lambda I - \mathcal{A})U = F$.

Isto é uma contradição já que, aproveitando o Teorema 4.9, podemos construir sequências $(\lambda_\nu) \subset \mathbb{R}$, $(U_\nu) \subset D(\mathcal{A})$ e $(F_\nu) \subset \mathcal{H}$, tais que

$$\|U_\nu\|_{\mathcal{H}} \geq \mathcal{K}_0 |\lambda_\nu|^2 \|F_\nu\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \text{(veja a desigualdade (4.69))}. \tag{5.36}$$

Desta forma, segue que a taxa de decaimento polinomial obtida é otima, o que conclui a demonstração do Teorema.

■

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi estudado o sistema que modela uma Mistura Termoelástica do Tipo III, sendo a existência e unicidade de solução para o modelo obtida por meio da teoria de semigrupo de operadores. A principal contribuição deste trabalho foi estabelecer condições suficientes para que a solução tenha decaimento exponencial e que estas condições dependem das relações com os coeficientes. Estabelecemos também um caso onde a solução do nosso problema não possui decaimento exponencial, e nestas condições, foi mostrado que a solução decai polinomialmente e que a taxa obtida é ótima.

Bibliografia

[1] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II*, Comm. Pure Appl. Math. 17, 35-92, 1964.

[2] M. S. Alves, J. E. M. Rivera, R. Quintanilla, *Exponential decay in a thermoelastic mixture of solids*, International Journal of Solids and Structures Vol. 46, pages 1659 - 1666, (2009).

[3] A. Borichev, Y. Tomilov, *Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups*, Mathematische Annalen Vol. 347, (2), pages 455- 478,(2009).

[4] H. Brézis, *Análisis Funcional*, Teoría y Aplicaciones. Alianza Editorial,S.A., Madrid, 1984.

[5] M. M. Cavalcanti, V. N. D. Cavalcanti, *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*, Eduem, Maringá, 2009.

[6] A. N. De Carvalho, *Análise Funcional II*, 2012.

[7] L. H. Fatori, J. E. M. Rivera, *Introdução às Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Pós-Graduação, Londrina, 2009.

[8] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, New York, Springer, 1980.

[9] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York, John Wiley, 1989.

[10] B. Lazzari, R. Nibbi, *On the exponential decay in thermoelasticity without energy dissipation and of type III in presence of an absorbing boundary*, Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol.338, pages 317-329, (2008).

[11] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[12] J. Prüss, *On the spectrum of C_0-semigroups*. Trans. AMS **284** (1984), 847–857.

[13] R. Quintanilla, R. Racke, *Stability for thermoelasticity os type III*, Konstanzer Schriften in Mathematik und Informatik Vol.180, pages 1-19, (2002).

[14] R. Quintanilla, B. Straughan, *A note on discontinuity waves in type III thermoelasticity*, Proc. R. Soc. Lond. A 460, 1169-1175, (2004).

[15] M. Reissig, Y. Wang, *Cauchy problems for linear thermoelastic systems of type III in one space variable*, Math. Meth. Appl. Sci. 2005; 28, 1359 - 1381, (2005).

[16] J. E. M. Rivera, *Estabilização de Semigrupos e Aplicações*, Academia das Contas, 2008.

[17] X. Zhang, E. Zuazua, *Decay of solutions of the system os thermoelasticity of type III*, Communications in Contemporary Mathematics Vol.5, pages 1-59, (2003).