



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

CIBELE APARECIDA LADEIA

**FORMULAÇÃO SEMI-DISCRETA APLICADA AS
EQUAÇÕES 1D DE CONVECÇÃO-DIFUSÃO-REAÇÃO E
DE BURGERS**

Londrina
2012

CIBELE APARECIDA LADEIA

**FORMULAÇÃO SEMI-DISCRETA APLICADA AS
EQUAÇÕES 1D DE CONVECÇÃO-DIFUSÃO-REAÇÃO E
DE BURGERS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Neyva Maria Lopes
Romeiro

Londrina
2012

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da
Universidade Estadual de Londrina**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

L154f Ladeia, Cibele Aparecida.

Formulação semi-discreta aplicada as equações 1D de convecção-difusão-
reação e de Burgers / Cibele Aparecida Ladeia. – Londrina, 2012.
150 f. : il.

Orientador: Neyva Maria Lopes Romeiro.

Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade
Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em
Matemática Aplicada e Computacional, 2012.

Inclui bibliografia.

1. Equações lineares – Teses. 2. Burgers, Equação de – Teses. 3. Método dos
elementos finitos – Teses. 4. Padé, Aproximante de – Teses. 5. Espaços lineares
normados – Teses. I. Romeiro, Neyva Maria Lopes. II. Universidade Estadual de
Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática
Aplicada e Computacional. III. Título.

CDU 517.95

CIBELE APARECIDA LADEIA

**FORMULAÇÃO SEMI-DISCRETA APLICADA AS EQUAÇÕES 1D DE
CONVECÇÃO-DIFUSÃO-REAÇÃO E DE BURGERS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dr^a. Neyva Maria Lopes Romeiro
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Valdemir Garcia Ferreira
Universidade de São Paulo/ São Carlos

Prof. Dr. Paulo Laerte Natti
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 9 de março de 2012.

A minha mãe
Aparecida

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus e a minha família, que sempre estiveram presentes, pelo amor, pelo incentivo e pelo apoio nos momentos de fraqueza.

Agradeço à minha orientadora professora Neyva Maria Lopes Romeiro, pelo seus ensinamentos, sua dedicação, e principalmente, pelo incentivo que tornaram possível a conclusão deste trabalho.

Agradeço também a todos os professores, pois construíram com a minha formação profissional, em especial, ao professor Paulo Laerte Natti, um grande exemplo e que me incentivou a seguir a carreira acadêmica.

Agradeço aos funcionários, Odete, Eduardo e Verginia, pelo apoio durante todo o curso.

Agradeço aos meus colegas de curso, Poliane (Polly), Rodrigo (Didji), Daniela e Vinícius que me incentivaram neste trabalho.

Agradeço também aos meus amigos, Camila, Cláudia, Luana, Amanda, Cássia, Michelle, Juliana, Rubens, Fabiano, que são de grande importância para mim e que participaram ativamente de minha vida no mestrado.

Por fim, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

LADEIA, Cibele Aparecida. **Formulação semi-discreta aplicada as equações 1D de convecção-difusão-reação e de Burgers**. 2012. 150. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

RESUMO

Neste trabalho aplicamos a formulação semi-discreta, caracterizada pela combinação de aproximações distintas para as variáveis temporal e espacial, onde a variável temporal é discretizada utilizando métodos implícitos multi-estágios e a espacial usando métodos de elementos finitos, para a obtenção de soluções numéricas para as equações 1D de convecção-difusão-reação e de Burgers, cujas soluções analíticas são conhecidas.

Métodos multi-estágios são obtidos através dos aproximantes de Padé. Em particular, neste trabalho consideramos os métodos implícitos multi-estágios de segunda ordem, R_{11} , e de quarta ordem, R_{22} , na discretização temporal. Quanto à discretização espacial, utilizamos três formulações do método de elementos finitos, ou seja, mínimos quadrados (MEFMQ), Galerkin (MEFG) e *streamline-upwind* Petrov-Galerkin (SUPG). Apresentamos análises quanto à influência dos números de Péclet e de Courant-Friedrichs-Lewy, da influência da malha e dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} nas formulações MEFMQ, MEFG e SUPG. Apresentamos uma análise do erro utilizando a norma L^2 , comparando as soluções numéricas com a solução analítica das equações avaliadas. Verificamos que o método implícito multi-estágio de quarta ordem, R_{22} , quando adicionado aos MEFMQ, MEFG e SUPG aumentou a região de convergência das soluções numéricas das equações e que o MEFMQ apresentou uma melhor performance, quando comparado as formulações MEFG e SUPG.

Palavras-chave: Equações 1D de convecção-difusão-reação e de Burgers. Métodos implícitos multi-estágios. Métodos de elementos finitos.

LADEIA, Cibele Aparecida. **Semidiscrete formulation applied the 1D convection-diffusion-reaction and Burgers equations**. 2012. 150. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

ABSTRACT

In this work we apply the semidiscrete formulation, characterized by the combination of distinct approaches to the time and space variables, where the time variable is discretized using implicit multi-stages methods and space variable is discretized using finite element methods, for obtaining numerical solutions for the 1D convection-diffusion-reaction and Burgers equations, whose analytical solutions are known.

Multi-stage methods are obtained through of Padé approximants. In particular, in this work we consider of the implicit multi-stage method of second-order R_{11} and of fourth-order R_{22} , for time discretization. As for space discretization, we use three formulations of the finite elements methods, namely, least square (LSFEM), Galerkin (GFEM) and *streamline-upwind* Petrov-Galerkin (SUPG). We present analysis of the influence of the Péclet and Courant-Friedrichs-Lewy numbers, of the influence of the grid, of the Padé approximants R_{11} and R_{22} in the formulations LSFEM, GFEM and SUPG. We present a analysis of the error using the L^2 -norm, comparing the numerical solutions with analytical solutions. We verify that of the implicit multi-stage method of second-order when combined with the LSFEM, GFEM and SUPG, increased region of convergence of the numerical solutions, and that LSFEM presented a better performance when compared to the GFEM and SUPG formulations.

Keywords: 1D convection-diffusion-reaction and Burgers equations. Implicit multi-stages methods. Finite element methods.

SUMÁRIO

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 18 |
| 2 | PRELIMINARES | 20 |
| 2.1 | ESPAÇOS NORMADOS | 20 |
| 2.1.1 | Propriedades | 20 |
| 2.1.2 | Espaço com produto interno | 20 |
| 2.2 | PROBLEMA VARIACIONAL | 21 |
| 2.3 | FORMULAÇÃO VARIACIONAL ABSTRATA | 22 |
| 2.4 | ESPAÇOS DE SOBOLEV | 22 |
| 2.5 | FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS À GÂTEAUX | 24 |
| 2.6 | APROXIMANTES DE PADÉ | 24 |
| 3 | FORMULAÇÃO SEMI-DISCRETA PARA A EQUAÇÃO 1D DE CONVECÇÃO-DIFUSÃO-REAÇÃO | 30 |
| 3.1 | EQUAÇÃO 1D DE CONVECÇÃO-DIFUSÃO-REAÇÃO | 30 |
| 3.2 | DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL | 31 |
| 3.2.1 | Aproximação multi-estágio | 31 |
| 3.3 | DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL | 34 |
| 3.3.1 | Método de elementos finitos (MEF) | 34 |
| 3.3.2 | Método de elementos finitos unidimensional | 35 |
| 3.3.3 | Método de mínimos quadrados | 36 |
| 3.3.4 | Método de elementos finitos via mínimos quadrados (MEFMQ) | 40 |
| 3.3.5 | Método de Galerkin | 41 |
| 3.3.6 | Método de elementos finitos via Galerkin (MEFG) | 45 |
| 3.3.7 | Método estabilizado <i>streamline-upwind</i> Petrov-Galerkin (SUPG) | 46 |
| 4 | SOLUÇÕES NUMÉRICAS PARA A EQUAÇÃO 1D DE CONVECÇÃO-DIFUSÃO-REAÇÃO | 48 |
| 4.1 | MEFMQ COM O MÉTODO IMPLÍCITO MULTI-ESTÁGIO | 48 |
| 4.1.1 | MEFMQ com o R_{11} | 48 |
| 4.1.2 | MEFMQ com o R_{22} | 52 |
| 4.2 | MEFG COM O MÉTODO IMPLÍCITO MULTI-ESTÁGIO | 64 |
| 4.2.1 | MEFG com o R_{11} | 64 |
| 4.2.2 | MEFG com o R_{22} | 67 |
| 4.3 | SUPG COM O MÉTODO IMPLÍCITO MULTI-ESTÁGIO | 73 |

| | |
|---|------------|
| | 10 |
| 4.3.1 SUPG com o R_{11} | 73 |
| 4.3.2 SUPG com o R_{22} | 77 |
| 5 RESULTADOS NUMÉRICOS PARA A EQUAÇÃO | |
| 1D DE CONVECÇÃO-DIFUSÃO-REAÇÃO | 86 |
| 5.1 EQUAÇÃO DE CONVECÇÃO-DIFUSÃO-REAÇÃO | 87 |
| 5.1.1 A influência do número de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) | 94 |
| 5.1.2 A influência da malha | 96 |
| 5.1.3 A influência dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} | 99 |
| 5.1.4 Equação de convecção-difusão | 102 |
| 5.1.5 A influência do número de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) | 102 |
| 5.1.6 A influência da malha | 104 |
| 5.1.7 A influência dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} | 106 |
| 6 FORMULAÇÃO SEMI-DISCRETA PARA A EQUAÇÃO DE BURGERS | 110 |
| 6.1 EQUAÇÃO DE BURGERS | 110 |
| 6.2 DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL | 111 |
| 6.3 DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL | 111 |
| 6.3.1 Método de mínimos quadrados | 111 |
| 6.3.2 Método de elementos finitos via mínimos quadrados (MEFMQ) | 115 |
| 6.3.3 Método de Galerkin | 116 |
| 6.3.4 Método de elementos finitos via Galerkin (MEFG) | 118 |
| 6.3.5 Método estabilizado <i>streamline-upwind</i> Petrov-Galerkin (SUPG) | 119 |
| 7 SOLUÇÕES NUMÉRICAS PARA A EQUAÇÃO DE BURGERS | 121 |
| 7.1 LINEARIZAÇÃO DO TERMO CONVECTIVO | 121 |
| 7.2 MEFMQ COM O MÉTODO IMPLÍCITO MULTI-ESTÁGIO | 122 |
| 7.3 MEFG COM O MÉTODO IMPLÍCITO MULTI-ESTÁGIO | 123 |
| 7.4 SUPG COM O MÉTODO IMPLÍCITO MULTI-ESTÁGIO | 124 |
| 8 RESULTADOS NUMÉRICOS PARA A EQUAÇÃO DE BURGERS | 127 |
| 8.1 PROPAGAÇÃO UNIFORME DE CHOQUE | 127 |
| 8.1.1 A influência do passo de tempo | 127 |
| 8.1.2 A influência da malha | 130 |
| 8.1.3 A influência dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} | 133 |
| 8.2 SOLUÇÃO TESTE PARA A EQUAÇÃO DE BURGERS | 135 |
| 8.2.1 A influência do passo de tempo | 135 |
| 8.2.2 A influência da malha | 139 |
| 9 CONCLUSÃO | 146 |

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|------|---|-----|
| 3.1 | Função base associada a cada nó. | 36 |
| 5.1 | A formulação MEFG+ R_{11} para a equação 1D de convecção-difusão-reação. . . | 88 |
| 5.2 | A formulação MEFMQ+ R_{11} para a equação 1D de convecção-difusão-reação. . | 89 |
| 5.3 | A formulação SUPG+ R_{11} para a equação 1D de convecção-difusão-reação. . . | 90 |
| 5.4 | A formulação MEFG+ R_{22} para a equação 1D de convecção-difusão-reação. . . | 91 |
| 5.5 | A formulação MEFMQ+ R_{22} para a equação 1D de convecção-difusão-reação. . | 92 |
| 5.6 | A formulação SUPG+ R_{22} para a equação 1D de convecção-difusão-reação. . . | 93 |
| 5.7 | As condições CFL nas soluções numéricas a) MEFG+ R_{11} e b) MEFG+ R_{22} . . . | 94 |
| 5.8 | As condições CFL nas soluções numéricas a) MEFMQ+ R_{11} e b) MEFMQ+ R_{22} . . | 95 |
| 5.9 | As condições CFL nas soluções numéricas a) SUPG+ R_{11} e b) SUPG+ R_{22} | 95 |
| 5.10 | Convergência dos resultados numéricos para $t = 1$, $h = 2/100$, $v = 1$, $\sigma = 0.1$ e $D = 1 \times 10^{-4}$, em função do passo de tempo. | 96 |
| 5.11 | a) MEFG+ R_{11} e b) MEFG+ R_{22} para $C = 1$ fixo. | 97 |
| 5.12 | a) MEFMQ+ R_{11} e b) MEFMQ+ R_{22} para $C = 1$ fixo. | 97 |
| 5.13 | a) SUPG+ R_{11} e b) SUPG+ R_{22} para $C = 1$ fixo. | 98 |
| 5.14 | Convergência dos resultados numéricos para $t = 1$, $C = 1$, $v = 1$, $\sigma = 0.1$ e $D = 1 \times 10^{-4}$, em função do refinamento da malha. | 99 |
| 5.15 | Superfície da solução analítica, equação (5.8). | 100 |
| 5.16 | a) Comparações entre os aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados a for- mulação MEFG, considerando um corte da solução para o tempo final de sim- ulação, $t = 1$; b) e c) Superfícies das soluções dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionadas a formulação MEFG. | 100 |
| 5.17 | a) Comparações entre os aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados a for- mulação MEFMQ, considerando um corte da solução para o tempo final de simulação, $t = 1$; b) e c) Superfícies das soluções dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionadas a formulação MEFMQ. | 101 |
| 5.18 | a) Comparações entre os aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados a for- mulação SUPG, considerando um corte da solução para o tempo final de simu- lação, $t = 1$; b) e c) Superfícies das soluções dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionadas a formulação SUPG. | 101 |
| 5.19 | Convergência dos resultados numéricos para $t = 0.6$, $v = 1$ e $D = 5 \times 10^{-5}$, em função do passo de tempo. | 104 |
| 5.20 | Convergência dos resultados numéricos para $t = 0.6$, $v = 1$ e $D = 5 \times 10^{-5}$, em função do refinamento da malha. | 106 |

| | | |
|------|--|-----|
| 5.21 | Superfície da solução analítica, equação (5.12). | 107 |
| 5.22 | a) Comparações entre os aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados a formulação MEFG, considerando um corte da solução para o tempo final de simulação, $t = 0.6$; b) e c) Superfícies das soluções dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionadas a formulação MEFG. | 107 |
| 5.23 | a) Comparações entre os aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados a formulação MEFMQ, considerando um corte da solução para o tempo final de simulação, $t = 0.6$; b) e c) Superfícies das soluções dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionadas a formulação MEFMQ. | 108 |
| 5.24 | a) Comparações entre os aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados a formulação SUPG, considerando um corte da solução para o tempo final de simulação, $t = 0.6$; b) e c) Superfícies das soluções dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionadas a formulação SUPG. | 108 |
| 8.1 | Influência do passo de tempo nas soluções numéricas a) MEFG+ R_{11} e b) MEFG+ R_{22} . | 128 |
| 8.2 | Influência do passo de tempo nas soluções numéricas b) MEFMQ+ R_{11} e c) MEFMQ+ R_{22} | 128 |
| 8.3 | Influência do passo de tempo nas soluções numéricas a) SUPG+ R_{11} e b) SUPG+ R_{22} | 129 |
| 8.4 | a) MEFG+ R_{11} e b) MEFG+ R_{22} , para $t = 0.1$ e $Re = 10000$ | 131 |
| 8.5 | a) MEFMQ+ R_{11} e b) MEFMQ+ R_{22} , para $t = 0.1$ e $Re = 10000$ | 131 |
| 8.6 | a) SUPG+ R_{11} e b) SUPG+ R_{22} , para $t = 0.1$ e $Re = 10000$ | 132 |
| 8.7 | Superfície da solução analítica, equação (8.2). | 133 |
| 8.8 | a) Comparações entre os aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados a formulação MEFG, considerando um corte da solução para o tempo final de simulação, $t = 0.1$; b) e c) Superfícies das soluções dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionadas a formulação MEFG. | 133 |
| 8.9 | a) Comparações entre os aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados a formulação MEFMQ, considerando um corte da solução para o tempo final de simulação, $t = 0.1$; b) e c) Superfícies das soluções dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionadas a formulação MEFMQ. | 134 |
| 8.10 | a) Comparações entre os aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados a formulação SUPG, considerando um corte da solução para o tempo final de simulação, $t = 0.1$; b) e c) Superfícies das soluções dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionadas a formulação SUPG. | 134 |
| 8.11 | Influência do passo de tempo nas soluções numéricas a) MEFG+ R_{11} e b) MEFG+ R_{22} | 136 |
| 8.12 | Influência do passo de tempo nas soluções numéricas a) MEFMQ+ R_{11} e b) MEFMQ+ R_{22} | 136 |
| 8.13 | Influência do passo de tempo nas soluções numéricas a) SUPG+ R_{11} e b) SUPG+ R_{22} | 137 |

| | | |
|------|--|-----|
| 8.14 | Convergência dos resultados numéricos para $t = 1$, $h = 1/50$ e $Re = 100000$, em função do passo de tempo. | 139 |
| 8.15 | a) MEFG+ R_{11} e b) MEFG+ R_{22} para $t = 1$ e $Re = 100000$ | 140 |
| 8.16 | a) MEFMQ+ R_{11} e b)MEFMQ+ R_{22} para $t = 1$ e $Re = 100000$ | 140 |
| 8.17 | a) SUPG+ R_{11} e b) SUPG+ R_{22} para $t = 1$ e $Re = 100000$ | 141 |
| 8.18 | Convergência dos resultados numéricos para $t = 1$ e $Re = 100000$, em função do refinamento da malha. | 143 |
| 8.19 | Superfície da solução analítica, equação (8.3). | 143 |
| 8.20 | a), b) e c) Superfícies das soluções dos aproximante de Padé R_{11} e adicionada as formulações MEFG, MEFMQ e SUPG. | 144 |
| 8.21 | a), b) e c) as superfícies das soluções dos aproximante de Padé R_{22} e adicionada as formulações MEFG, MEFMQ e SUPG. | 144 |

LISTA DE TABELAS

| | | |
|-----|--|-----|
| 2.1 | Alguns aproximantes de Padé da função exponencial. | 28 |
| 2.2 | Valores fornecidos pelos aproximantes de Padé quando $h = 1$, para o valor de e | 29 |
| 5.1 | Erro das aproximações para $h = 2/100$, $C = 1$ e $Pe = 100$ | 102 |
| 5.2 | Erro das aproximações para $h = 1/100$ e $Pe = 100$ | 103 |
| 5.3 | Erro das aproximações para $t = 0.6$, $v = 1$ e $C = 1$ | 105 |
| 5.4 | Erro das aproximações para $h = 1/100$, $C = 1$ e $Pe = 100$ | 109 |
| 8.1 | Erro das aproximações para $t = 0.1$, $h = 1/3000$ e $Re = 10000$ | 130 |
| 8.2 | Erro das aproximações para $t = 0.1$ e $Re = 10000$ | 132 |
| 8.3 | Erro das aproximações para $h = 1/3000$ e $Re = 10000$ | 134 |
| 8.4 | Erro das aproximações para $t = 1$ e $Re = 100000$ | 138 |
| 8.5 | Erro das aproximações para $t = 1$ e $Re = 100000$ | 142 |
| 8.6 | Erro das aproximações para $h = 1/50$ e $Re = 10000$). | 144 |

LISTA DE SÍMBOLOS E NOTAÇÕES

Δx : espaçamento da malha

Δt : passo de tempo

m : inclinação da reta

R_{11} : aproximante de Padé de segunda ordem

R_{22} : aproximante de Padé de quarta ordem

D : coeficiente de difusão

v : coeficiente de velocidade

σ : coeficiente de reação linear

ϵ : coeficiente de viscosidade

t : tempo

L : tamanho da malha

N : partição do tempo

Pe : número de Péclet

C : número de Courant

Re : número de Reynolds

1D: unidimensional

LISTA DE ABREVIATURAS

MEF – “Método de elementos finitos”

MEFG – “Método de elementos finitos via Galerkin”

MEFMQ – “Método de elementos finitos via mínimos quadrados”

SUPG – “Método *streamline-upwind* Petrov-Galerkin”

EDPs – “Equações Diferencias Parciais”

CFL – “Courant-Friedrichs-Lewy”

1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, com evolução da mecânica computacional, desenvolveram uma extensa pesquisa sobre resolução numérica, que tiveram impactos importantes para a sociedade [1]. Em particular, interessamos nos procedimentos que possam ser adaptados em problemas que envolvem processos convectivos, difusivos e reativos. Esses problemas têm uma vasta aplicabilidade [2, 3, 4], tais como na simulação dos efeitos da poluição de rios; mares e atmosfera; na modelagem de evolução das reservas de petróleo e gás natural no subsolo; no fluxo em meios porosos como em simulações de reservatórios e na injeção de traçadores; na modelagem de problemas de transferência de calor; dispersão de poluentes; crescimento de populações; irrigação; potenciais elétricos em semicondutores; cosmologia; sismologia; turbulência; na teoria ondas de choque; em processos estocásticos contínuos; e em muitas outras aplicações.

O método de elementos finitos surgiu em processos de análise de estruturas nos séculos XVIII e XIX. Em 1795, Carl Friedrich Gauss [5, 6] iniciou a corrida para o surgimento do método de elementos finitos para soluções de problemas matemáticos. A idéia principal de Gauss era aproximar soluções de problemas através de funções apropriadas, utilizando as técnicas de regressão linear e mínimos quadrados, já conhecidas na época. Sua maior dificuldade era de encontrar as funções apropriadas que resultariam em aproximações aceitáveis. Já em 1943, o matemático Richard Courant [7] sugeriu que a solução fosse aproximada em todo o domínio de interesse, não apenas utilizando uma única função, mas que se partisse para funções válidas em uma parte do domínio. Enfim, em 1956, M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin e L.J. Topp [5] desenvolveram o método de elemento finitos. Neste mesmo ano, trabalhando no projeto de aeronaves para a empresa Boeing, esses autores propuseram com base na análise matricial um método que modelasse painéis de aeronave a partir de pequenos triângulos capazes de cobrir toda a superfície de cada peça. Após quatro anos, em 1960, o método de elementos finitos foi nomeado. Desde então a utilização dos métodos de elementos finitos teve crescimento exponencial [8].

No contexto dos métodos de elementos finitos, o método de elementos finitos via mínimos quadrados (MEFMQ) é baseado na minimização de um residual no sentido de mínimos quadrados e, apesar de ter uma formulação simples, quando comparado ao método de elementos finitos via Galerkin (MEFG), as aproximações são melhores [8, 9]. O MEFG é o método de elementos finitos clássico para aproximar soluções de problemas matemáticos. Este método utiliza em resíduos ponderados, isto é, apoia-se no conceito de ortogonalidade [8]. Contudo, para contornar certas limitações que podem ocorrer no MEFG [10, 11, 12], utiliza-se o método *streamline-upwind* Petrov-Galerkin (SUPG), que é um método estabilizado, que consiste em adicionar um termo de perturbação associado ao operador e contém parâmetros estabilizados dependentes da malha [13]. Usualmente estudam os métodos implícitos multi-

estágios adicionado aos métodos de elementos finitos, para aumentar a região de convergência de seus resultados [14, 15, 16, 17].

Neste trabalho temos por objetivo estudar uma formulação semi-discreta, caracterizada pela combinação de aproximações distintas para as variáveis temporal e espacial, onde a variável temporal é discretizada utilizando métodos implícitos multi-estágios e a variável espacial usando métodos de elementos finitos, para obtenção de soluções numéricas para as equações 1D de convecção-difusão-reação e de Burgers, cujas soluções analíticas são conhecidas. Métodos multi-estágios são obtidos através dos aproximantes de Padé. Em particular, consideramos os métodos implícitos multi-estágios de segunda ordem, R_{11} , e de quarta ordem, R_{22} , para a discretização do domínio temporal e utilizamos três formulações do método de elementos finitos, para a discretização do domínio espacial, ou seja, mínimos quadrados (MEFMQ), Galerkin (MEFG) e *streamline-upwind* Petrov-Galerkin (SUPG).

Este trabalho encontram-se dividido em 9 capítulos. No Capítulo 2 apresentamos uma formalização do espaços normados, do problema variacional, da formulação variacional, dos espaços de Sobolev, das funções diferenciáveis à Gâteaux e dos aproximantes de Padé. No Capítulo 3 apresentamos a equação 1D de convecção-difusão-reação e as abordagens dos métodos multi-estágios e dos métodos de elementos finitos. No Capítulo 4 aplicamos a formulação semi-discreta para resolver a equação 1D de convecção-difusão-reação. No Capítulo 5 apresentamos os resultados numéricos obtidos através da formulação semi-discreta em três exemplos. Apresentamos também, uma análise de erro utilizando a norma L^2 , comparando as soluções numéricas com a solução analítica. No Capítulo 6 apresentamos a equação de Burgers e as abordagens dos métodos multi-estágios e dos métodos de elementos finitos. No Capítulo 7 fazemos uma linearização do termo convectivo da equação de Burgers, onde altera-se o tamanho do elemento em cada etapa utilizando a informação do passo anterior, tornando a equação de Burgers um problema linear local e posteriormente, aplicamos a formulação semi-discreta. No Capítulo 8 apresentamos os resultados numéricos obtidos através da formulação semi-discreta, para a equação de Burgers, para dois exemplos. Finalmente, apresentamos as considerações finais deste trabalho.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo enunciamos os resultados necessários para o entendimento deste trabalho, cujas demonstrações podem ser encontradas nas referências citadas.

2.1 ESPAÇOS NORMADOS

Nesta seção apresentamos os espaços normados e suas propriedades [18]. O espaço normado é um espaço vetorial com norma.

2.1.1 Propriedades

Definição 2.1. *Seja U um espaço vetorial sobre os números reais \mathbb{R} . Uma norma sobre U é uma função $\| \cdot \| : U \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que verifica as seguintes propriedades:*

- i) $\|u\| \geq 0$
- ii) $\|u\| = 0 \iff u = 0$
- iii) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in U$
- iv) $\|u + w\| \leq \|u\| + \|w\| \quad \forall u, w \in U$ (desigualdade triangular)

O par $(U, \| \cdot \|)$ é definido como sendo o espaço vetorial normado. Um espaço normado é um espaço de Banach se for completo, isto é, toda sequência de Cauchy é convergente em U [18].

2.1.2 Espaço com produto interno

Definição 2.2. *Seja V um espaço vetorial. Um produto interno em V é um funcional bilinear em $V \times V$ que associa a cada par de vetores $u, u_1, u_2, w \in V$ um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que, as seguintes condições sejam satisfeitas:*

- i) $(u_1 + u_2, w) = (u_1, w) + (u_2, w)$
- ii) $(\alpha u, w) = \alpha(u, w)$
- iii) $(u, w) = (w, u)$
- iv) $(u, u) \geq 0$ e $(u, u) = 0$ se, e somente se, $u = 0$

para cada $u, u_1, u_2, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Um produto interno em V define uma norma em V dado por

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}, \quad \forall u \in V. \quad (2.1)$$

Teorema 2.3. Desigualdade de Cauchy-Schwarz: *Se u e w são elementos de um espaço vetorial V , com produto interno (\cdot, \cdot) e norma $\|\cdot\|$, então*

$$|(u, w)| \leq \|u\|\|w\|. \quad (2.2)$$

A demonstração do teorema pode ser obtida em [18].

Definição 2.4. *H é dito um espaço de Hilbert se ele é completo segundo a métrica induzida pelo produto interno [18].*

2.2 PROBLEMA VARIACIONAL

Nesta seção apresentamos algumas definições necessárias e conceitos importantes do problema variacional relacionado ao funcional bilinear e ao Teorema de Lax-Milgram, que serão utilizados para obter a existência e unicidade da solução. Portanto, consideramos o espaço de Hilbert V , com norma, e o funcional bilinear, representados respectivamente, por $\|\cdot\|$ e $a(\cdot, \cdot)$.

Definição 2.5. *O funcional $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, a função numérica a definida em $V \times V$ é linear em V , se é linear em cada uma das componentes.*

Definição 2.6. *O funcional bilinear $a(\cdot, \cdot)$ é contínuo em V , se existe uma constante $\alpha_1 \geq 0$ tal que*

$$|a(u, w)| \leq \alpha_1 \|u\| \|w\|, \quad \forall u, w \in V. \quad (2.3)$$

Definição 2.7. *O funcional bilinear $a(\cdot, \cdot)$ é coercivo em V , se existe uma constante $\alpha_2 \geq 0$, tal que*

$$a(w, w) \geq \alpha_2 \|w\|^2, \quad \forall w \in V. \quad (2.4)$$

Definição 2.8. *O funcional bilinear $a(\cdot, \cdot)$ é simétrico em V , se*

$$a(u, w) = a(w, u), \quad \forall u, w \in V. \quad (2.5)$$

Definição 2.9. *O funcional linear $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ é contínuo se existe uma constante $\alpha_3 \geq 0$, tal que*

$$F(w) \leq \alpha_3 \|w\|, \quad \forall w \in V, \quad (2.6)$$

onde F é dito um elemento do dual de V , denotado por V' .

2.3 FORMULAÇÃO VARIACIONAL ABSTRATA

Seja um problema variacional abstrato: Achar $u \in V$ tal que

$$a(u, w) = f(w) \quad \forall w \in V \quad (2.7)$$

onde V é um espaço vetorial, cuja norma é dada por $\|\cdot\|_V$. No nosso caso V é um espaço de Hilbert.

Fazemos uma análise preliminar do problema (2.7), e especificaremos quais condições que torna o problema bem-posto, para isto, utilizamos a definição:

Definição 2.10. (Hadamard) *O problema (2.7) é bem-posto se ele admite uma única solução $u \in V$ e se a seguinte propriedade se verifica, a priori:*

$$\exists c > 0, \forall f \in V', \|\cdot\|_V \leq c\|f\|_{V'}.$$

Logo, o problema (2.7) é bem-posto, no sentido de Hadamard, se admite uma única solução e se essa solução depende continuamente dos dados. Na literatura, existem dois resultados importantes para designar se um problema é ou não bem-posto, estes são: o Teorema de Lax-Milgram e o Teorema de Banach-Nečas-Babuška. O primeiro resultado fornece apenas uma condição suficiente, enquanto que o outro, depende de hipóteses um pouco mais sofisticadas, fornecendo condições necessárias e suficientes para que (2.7) seja bem-posto [19]. Nesse trabalho, é suficiente apenas o Teorema de Lax-Milgram, uma vez que, V é um espaço de Hilbert.

Teorema 2.11. (Lax-Milgram) *Se $a(\cdot, \cdot)$ for um funcional bilinear contínuo e coercivo e $F(\cdot)$ um funcional linear e contínuo em V , então, o problema (2.7) possui uma única solução $u \in V$. Além disso, a aplicação $F \mapsto u$ é contínua de V' em V .*

A demonstração do teorema pode ser obtida em Ver Ern e Guermond [19].

2.4 ESPAÇOS DE SOBOLEV

A seguir, estudaremos os espaços de Sobolev. Seja Ω um conjunto aberto em \mathbb{R} , V e H espaços de Hilbert. Vamos denotar por $L^2(\Omega)$ o espaço de funções quadrado-integráveis, no sentido de Lebesgue, sobre o domínio Ω .

O espaço $L^2(\Omega)$ é definido como [20]:

$$L^2(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é Lebesgue mensurável, } \|f\|_{L^2(\Omega)} < \infty\} \quad (2.8)$$

onde $\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$. O espaço $L^2(\Omega)$ é equipado com produto interno, definido da seguinte forma

$$(u, w) = \int_{\Omega} u w dx \quad (2.9)$$

e a norma é definida como

$$\|u\|_0 = [(u, u)]^{1/2} = \left(\int_{\Omega} u^2 dx\right)^{1/2} \quad \forall u \in L^2(\Omega). \quad (2.10)$$

Temos ainda que dado, duas funções f e $g \in L^2(\Omega)$,

$$\|f + g\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.11)$$

onde a desigualdade em (2.11) é conhecida como a desigualdade de Minkowski.

Se f e $g \in L^2(\Omega)$ então f e $g \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.12)$$

é conhecida como sendo a desigualdade de Schwarz.

Definição 2.12. *Seja o espaço de Sobolev definido por $H^k(\Omega)$ para algum k inteiro e não negativo, utilizando a notação multi-índices dada pela n -upla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, onde $|\alpha|$ é um número inteiro não negativo dado por $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$,*

$$H^k(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \in L^2(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq k \right\}. \quad (2.13)$$

Portanto, $H^k(\Omega)$ consiste de todas as funções e suas derivadas de ordem $k - 1$ quadrados-integráveis. O espaço $H^k(\Omega)$ é equipado com a norma

$$\|u\|_k = \left(\sum_{s=0}^k \sum_{|\alpha|=s} \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_0^2 \right)^{1/2}. \quad (2.14)$$

Observamos que $L^2(\Omega)$ é de fato um espaço de Sobolev $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$, enquanto o espaço de Sobolev para $k = 1$ é definido por

$$H^1(\Omega) = \left\{ w \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial w}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \quad i = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (2.15)$$

e tem como produto interno definido como

$$(u, w)_1 = \int_{\Omega} (u' w' dx + u w) dx \quad \forall u, w \in H^1(\Omega). \quad (2.16)$$

Sendo assim podemos também encontrar sua norma

$$\begin{aligned}\|u\|_1 &= [(u, u)_1]^{1/2} = \left[\int_{\Omega} (u'u' + uu) dx \right]^{1/2} \\ &= \left(\int_{\Omega} u'^2 dx + \int_{\Omega} u^2 dx \right)^{1/2} \\ &= (\|u'\|_0^2 + \|u\|_0^2)^{1/2} \quad \forall u \in H^1(\Omega).\end{aligned}$$

Logo a norma $H^1(\Omega)$ é

$$\|u\|_1 = (\|u'\|_0^2 + \|u\|_0^2)^{1/2}. \quad (2.17)$$

Dizemos que $H_0^1(\Omega)$ é um subespaço de $H^1(\Omega)$ sendo

$$H_0^1(\Omega) = \{w \in H^1(\Omega) | w = 0 \text{ sobre } \Gamma\}$$

onde $H_0^1(\Omega)$ satisfaz o produto interno definido em (2.17) e denotamos a fronteira por Γ .

Informações adicionais sobre o espaço de Sobolev podem ser obtidas em [20].

2.5 FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS À GÂTEAUX

Nesta seção apresentamos o conceito de diferenciabilidade em espaços de Banach, ou seja, a derivada no sentido de Gâteaux [21].

Definição 2.13. *Seja $\mathcal{F} : U \rightarrow V$ uma aplicação que leva vetores do espaço de Banach U no espaço de Banach V e $u \in U$. Assim, \mathcal{F} é dita diferenciável à Gâteaux se existe o limite:*

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{F}(u + sw) - \mathcal{F}(u)\|}{s} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial w}(u), \quad \forall w \in U \text{ e } s \in \mathbb{R}, \quad (2.18)$$

onde $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial w}(u)$ define a derivada direcional de \mathcal{F} em u na direção de w .

2.6 APROXIMANTES DE PADÉ

Em 1892, Henri Padé publicou um trabalho onde apresentou uma metodologia para obter representações aproximadas de uma função por funções racionais [22]. Atualmente, esse trabalho se reveste da maior importância em várias áreas do conhecimento, por fornecer algoritmos que convergem rapidamente. As representações de Padé são hoje conhecidas como *Aproximantes de Padé* [23]. Aproximantes de Padé são geralmente superiores às expansões de Taylor, porque não somente convergem mais rapidamente como também se estendem a regiões muito além da definida pelo raio de convergência da série de Taylor correspondente [22]. Nesta seção iremos definir e estudar as propriedades dos aproximantes de Padé.

Definição 2.14. *Os aproximantes de Padé são funções racionais, ou seja, quocientes de dois polinômios, que representam a expansão*

$$f(h) = \sum_{i=0}^N f_i h^i, \quad (2.19)$$

onde os coeficientes f_i são chamados de “peças de informações”. Os polinômios dessas funções racionais são representados pelos números inteiros L e M , graus do numerador e denominador, respectivamente, e denotado por R_{LM} . Assim, os aproximantes de Padé R_{LM} , associados a $f(h)$, têm a forma:

$$R_{LM} = \frac{P_L(h)}{Q_M(h)}, \quad L, M \geq 0 \quad (2.20)$$

com

$$P_L(h) = p_0 + p_1 h + p_2 h^2 + \dots + p_L h^L \quad (2.21)$$

e

$$Q_M(h) = q_0 + q_1 h + q_2 h^2 + \dots + q_M h^M, \quad (2.22)$$

onde tomamos $q_0 = 1$ em (2.22) para que o polinômio $Q_M(h)$ seja diferente do polinômio nulo.

Em (2.21) e (2.22) os coeficientes p_k e q_j são obtidos a partir das f_i , através da condição

$$f(h) - \frac{P_L(h)}{Q_M(h)} = O(h^{L+M+1}), \quad (2.23)$$

de modo que $f(h)$ e o aproximante de Padé diferem apenas por termos da ordem h^{L+M+1} . Podemos escrever a condição (2.23) da seguinte forma

$$P_L(h) = f(h)Q_M(h) + O(h^{L+M+1}), \quad (2.24)$$

ou de forma mais explícita,

$$\begin{aligned} p_0 + p_1 h + p_2 h^2 + \dots + p_L h^L &= \\ &= (f_0 + f_1 h + f_2 h^2 + \dots + f_L h^L)(1 + q_1 h + q_2 h^2 + \dots + q_M h^M) + O(h^{L+M+1}). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Desenvolvendo o termo do lado direito de (2.25) até termos da ordem h^{L+M+1} e comparando termos de mesma potência em h , encontramos o sistema linear de $(L + M + 1)$ equações algébricas para os coeficientes p_k e q_j em termos dos coeficientes f_i . Se o sistema admitir

solução, o aproximante de Padé existirá e será único, sendo

$$\begin{aligned}
 p_0 &= f_0 \\
 p_1 &= f_1 + q_1 f_0 \\
 p_2 &= f_2 + q_1 f_1 + q_2 f_0 \\
 &\vdots \\
 p_L &= f_L + q_1 f_{L-1} + \dots + q_L f_0 \\
 0 &= f_{L+1} + q_1 f_L + \dots + q_M f_{L-M+1} \\
 0 &= f_{L+2} + q_1 f_{L+1} + \dots + q_M f_{L-M+2} \\
 &\vdots \\
 0 &= f_{L+M} + q_1 f_{L+M-1} + \dots + q_M f_L .
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

O sistema (2.26) determina os coeficientes dos polinômios $P_L(h)$ e $Q_M(h)$ em termos dos coeficientes f_i da expansão original. Portanto, deve haver pelo menos $(L + M + 1)$ "peças de informações" disponíveis da expansão básica (2.19), ou seja,

$$L + M + 1 \leq N. \tag{2.27}$$

Esta condição limita as possibilidades para os graus dos polinômios $P_L(h)$ e $Q_M(h)$, e consequentemente, a família de aproximantes de Padé que podemos construir [22].

Examinando a estrutura do sistema (2.26), constatamos que para resolvê-lo, podemos considerar primeiramente as últimas M equações que envolvem apenas os coeficientes q_j . Uma vez determinados esses coeficientes, eles podem ser inseridos nas $(L + 1)$ primeiras equações, que resolvidas fornecerão os coeficientes p_k . Observa-se imediatamente que os aproximantes R_{LM} , com $M = 0$, coincidem com a expansão original (2.19) até o termo $f_L h^L$. Se $L = M$, o aproximante de Padé é dito ser diagonal [23].

A existência do aproximante de Padé R_{LM} , a uma série de potências (2.19), depende da existência da solução do sistema (2.26), mais especificamente das M últimas equações, que podemos escrever na forma

$$\begin{aligned}
 q_1 f_L + \dots + q_M f_{L-M+1} &= -f_{L+1} \\
 q_1 f_{L+1} + \dots + q_M f_{L-M+2} &= -f_{L+2} \\
 &\vdots \\
 q_1 f_{L+M-1} + \dots + q_M f_L &= -f_{L+M} ,
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

ou matricialmente como

$$\begin{bmatrix} f_L & \cdots & f_{L-M+1} \\ f_{L+1} & \cdots & f_{L-M+2} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{L+M-1} & \cdots & f_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{L+1} \\ -f_{L+2} \\ \vdots \\ -f_{L+M} \end{bmatrix},$$

ou ainda,

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}, \quad (2.29)$$

onde \mathbf{A} é a matriz dos coeficientes, \mathbf{X} é o vetor coluna das incógnitas q_j e \mathbf{B} é o vetor coluna dos termos independentes. Como uma aplicação dos aproximantes de Padé consideremos a série geométrica

$$f(h) = 1 + h + h^2 + h^3 + h^4 + \dots, |h| < 1 \quad (2.30)$$

determinando o Padé associado

$$R_{22} = \frac{p_0 + p_1h + p_2h^2}{1 + q_1h + q_2h^2}. \quad (2.31)$$

De (2.24) segue a relação

$$p_0 + p_1h + p_2h^2 = (1 + h + h^2 + h^3 + h^4 + \dots)(1 + q_1h + q_2h^2) + O(h^5),$$

de onde obtemos

$$p_0 + p_1h + p_2h^2 = 1 + (1 + q_1)h + (1 + q_1 + q_2)h^2 + (1 + q_1 + q_2)h^3 + (1 + q_1 + q_2)h^4. \quad (2.32)$$

Comparando os termos de mesma potência de h nos dois membros da igualdade de (2.32), obtemos o sistema de equações

$$\begin{aligned} h^0 : & \quad p_0 = 1 \\ h^1 : & \quad p_1 = 1 + q_1 \\ h^2 : & \quad p_2 = 1 + q_1 + q_2 \\ h^3 : & \quad 0 = 1 + q_1 + q_2 \\ h^4 : & \quad 0 = 1 + q_1 + q_2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Das duas últimas equações de (2.33) resulta que

$$q_1 = -1 - q_2,$$

de forma que, q_1 , assim como p_1 e p_2 , dependem da quantidade q_2 , isto é,

$$\begin{aligned} p_1 &= -q_2 \\ p_2 &= 0. \end{aligned}$$

Substituindo estes valores em (2.31) obtemos

$$R_{22} = \frac{1 - q_2 h}{1 + (-1 - q_2)h + q_2 h^2}. \quad (2.34)$$

O denominador da fração em (2.34) pode ser reescrito de forma

$$1 + (-1 - q_2)h + q_2 h^2 = (1 - h)(1 - q_2 h),$$

de maneira que o Padé toma a forma final

$$R_{22} = \frac{1}{1 - h}. \quad (2.35)$$

Neste exemplo notamos que o sistema (2.26) possui infinitas soluções e depois dos cancelamentos, o aproximante de Padé se torna único. Observamos que o resultado encontrado em (2.35) é justamente a soma dos infinitos termos da série geométrica considerada em (2.30). Qualquer outro aproximante de Padé reproduzirá esse resultado.

Teorema 2.15. (Unicidade) *Se existir o aproximante de Padé R_{LM} , então ele é único.*

A demonstração pode ser obtida em [22].

Exemplo 1. (Função Exponencial)

Seja a função exponencial e sua representação em série de Taylor

$$f(h) = e^h = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!}. \quad (2.36)$$

Usando construções similares a apresentada pela série geométrica, podemos construir a tabela parcial, Tabela 1.1, de aproximante de Padé para a função exponencial.

Tabela 2.1: Alguns aproximantes de Padé da função exponencial.

| R_{LM} | M=0 | M=1 | M=2 | M=3 |
|----------|---------------------------|---------------------------------|---------------------------------------|---|
| L=0 | 1 | $\frac{1}{1-h}$ | $\frac{2}{2-2h+h^2}$ | $\frac{6}{6-6h+3h^2-h^3}$ |
| L=1 | $\frac{1+h}{1}$ | $\frac{2+h}{2-h}$ | $\frac{6+2h}{6-4h+h^2}$ | $\frac{24+6h}{24-18h+6h^2-h^3}$ |
| L=2 | $\frac{2+2h+h^2}{2}$ | $\frac{6+4h+h^2}{6-2h}$ | $\frac{12+6h+h^2}{12-6h+h^2}$ | $\frac{60+24h+3h^2}{60-36h-9h^2-h^3}$ |
| L=3 | $\frac{6+6h+3h^2+h^3}{6}$ | $\frac{24+18h+6h^2+h^3}{24-6h}$ | $\frac{60+36h+9h^2+h^3}{60-24h+3h^2}$ | $\frac{120+60h+12h^2+h^3}{120-60h+12h^2-h^3}$ |

Para $h = 1$, a expansão (2.36) nos dá o número transcendental $e = 2,71828\dots$. A Tabela 2.2 fornece aproximações para e , com base na Tabela 2.1.

Tabela 2.2: Valores fornecidos pelos aproximantes de Padé quando $h = 1$, para o valor de e .

| R_{LM} | M=0 | M=1 | M=2 | M=3 |
|----------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| L=0 | 1 | $\#$ | 2 | 3 |
| L=1 | 2 | 3 | 2,666666... | 2,727272... |
| L=2 | 2,5 | 2,75 | 2,714285... | 2,718750... |
| L=3 | 2,666666... | 2,722222... | 2,717948... | 2,718309... |

Note das Tabelas 2.1 e 2.2 que quando $M = 0$ os aproximantes de Padé coincidem com as expansões de Taylor, correspondentes. Enfim, para um L fixo, conforme M cresce, verificamos que o aproximante de Padé correspondente fornece uma melhor aproximação para $e = 2,71828\dots$

Neste trabalho faremos uso dos aproximantes de Padé, Tabela 2.1, da função exponencial (2.36) para a aproximação temporal das equações 1D de convecção-difusão-reação e de Burgers, que abordaremos nos próximos capítulos.

3 FORMULAÇÃO SEMI-DISCRETA PARA A EQUAÇÃO 1D DE CONVECÇÃO-DIFUSÃO-REAÇÃO

Neste capítulo apresentamos a equação 1D de convecção-difusão-reação e maneiras para resolver esta equação. Primeiramente vamos descrever o problema e em seguida faremos as abordagens dos procedimentos sobre as discretizações no tempo e no espaço.

3.1 EQUAÇÃO 1D DE CONVECÇÃO-DIFUSÃO-REAÇÃO

Considere a equação 1D de convecção-difusão-reação que consiste em encontrar $u(x, t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo

$$u_t(x, t) + vu_x(x, t) - Du_{xx}(x, t) + \sigma u(x, t) = f(x, t), \quad em \Omega \quad (3.1)$$

$$u(0, t) = 0 = u(l, t) \quad em \Gamma, \quad (3.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad (3.3)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}$ é um domínio limitado aberto com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$. Os coeficientes em (3.1) são: $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, o campo de velocidade; Em princípio $D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$, o coeficiente de difusão; $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, o coeficiente linear da reação; $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, o termo fonte e, (3.2) representa as condições de fronteira do tipo Dirichlet, e (3.3) a condição inicial. Em particular, para o problema 1D de convecção-difusão-reação utilizaremos apenas as condições de fronteira do tipo Dirichlet.

Podemos reescrever (3.1) na seguinte forma:

$$u_t + \mathcal{L}(u) = f, \quad (3.4)$$

onde o operador espacial é definido como

$$\mathcal{L}(u) = vu_x - Du_{xx} + \sigma u \quad (3.5)$$

e $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{conv} + \mathcal{L}_{dif} + \mathcal{L}_{reac}$ representa a soma dos operadores lineares convectivos, difusivos e reativos. A solução numérica de (3.1)-(3.3) será obtida por meio de dois processos de discretizações do tempo e três processos de discretizações no espaço.

3.2 DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL

Muitas técnicas numéricas para a discretização no tempo são utilizadas para resolver equações diferenciais [14, 24]. A seguir vamos introduzir a técnica passo de tempo através dos aproximantes de Padé [25]. Considere a aproximação dado pelo operador

$$\mathcal{E}(\Delta t) : u(t^n) \rightarrow u(t^{n+1}) \quad (3.6)$$

que permite transportar a solução numérica em um determinado tempo $t^n = n\Delta t$ para o próximo tempo $t^{n+1} = t^n + \Delta t$. A partir do desenvolvimento da série de Taylor, temos que

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= \left(1 + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2!} \Delta t^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{3!} \Delta t^3 \frac{\partial^3}{\partial t^3} + \dots \right) u^n \\ &= \exp \left(\Delta t \frac{\partial}{\partial t} \right) u^n, \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde a evolução do operador $\mathcal{E}(\Delta t)$ é dado pela função exponencial na equação (3.7). Portanto, é evidente que a técnica de passo de tempo de várias ordens pode ser concebida através dos aproximantes de Padé para a função exponencial [14]. Observe que os aproximantes de Padé para a função exponencial e^x , $x = \Delta t \frac{\partial}{\partial t}$, foram apresentados na Tabela 2.1.

3.2.1 Aproximação multi-estágio

Nesta subseção vamos detalhar um pouco mais a técnica passo de tempo através dos aproximantes de Padé. Para isso, vamos dividir nossa abordagem em métodos explícitos multi-estágio e métodos implícitos multi-estágio.

Método explícito multi-estágio

Os aproximantes de Padé R_{L0} na primeira linha da Tabela 1.1, descrevem a técnica passo de tempo do tipo explícito, onde

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t u_t^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt}^n + \dots \quad (3.8)$$

Para evitar, derivadas de segunda e ordens superiores no tempo, que são difíceis de expressar em termos das derivadas espaciais usando a equação convecção-difusão-reação, o método explícito multi-estágio, derivado das aproximações R_{L0} , foi proposto na literatura [14, 26].

Método de segunda ordem: Como os aproximantes de Padé R_{20} são requeridos, foi sugerido por Richtmyer uma aproximação em duas etapas no contexto de diferenças finitas [27]. Assim, escrevemos as duas etapas da técnica na forma

$$\begin{aligned} u^{n+(1/2)} &= u^n + \frac{1}{2} \Delta t u_t^n, \\ u^{n+1} &= u^n + \Delta t u_t^n + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 u_{tt}^n, \end{aligned} \quad (3.9)$$

que procede da fatoração dos seguintes aproximante Padé de R_{20} :

$$1 + h + \frac{1}{2}h^2 = 1 + h \left(1 + \frac{1}{2} \right). \quad (3.10)$$

Método de terceira ordem: Similarmente para os aproximante de Padé R_{30} , foi sugerido uma aproximação em três etapas envolvendo somente as primeiras derivadas no tempo [27]. Da mesma forma, fatorando o aproximante Padé de R_{30} :

$$1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 = 1 + h \left(1 + \frac{1}{2}h \left(1 + \frac{1}{3}h \right) \right) \quad (3.11)$$

o que produz um esquema de três etapas

$$\begin{aligned} u^{n+(1/3)} &= u^n + \frac{1}{3}\Delta t u_t^n, \\ u^{n+(1/2)} &= u^n + \frac{1}{2}\Delta t u_t^{n+(1/3)}, \\ u^{n+1} &= u^n + \Delta t u_t^{n+(1/2)}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Informações adicionais sobre o método explícito multi-estágio podem ser encontrado em [14, 26].

Métodos implícito multi-estágio

Vamos considerar agora os métodos implícitos multi-estágio que correspondem aos aproximantes de Padé da Tabela 2.1 para $M \neq 0$. Os métodos implícitos multi-estágio são de ordem $2n$ [25].

Método de segunda ordem: O método implícito correspondente à R_{11} (Crank - Nicolson)

$$\left(1 - \frac{1}{2}h \right) u^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2}h \right) u^n \quad (3.13)$$

produz um esquema em duas etapas [28]

$$u^{n+1} = u^n + \frac{1}{2}\Delta t (u_t^n + u_t^{n+1}). \quad (3.14)$$

Método de quarta ordem: O método implícito correspondente à R_{22}

$$\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{12} \right) u^{n+1} = \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{12} \right) u^n, \quad (3.15)$$

produz um esquema em quatro etapas [28]

$$u^{n+1} = u^n + \frac{1}{2}\Delta t (u_t^n + u_t^{n+1}) + \frac{1}{2}\Delta t (u_{tt}^n - u_{tt}^{n+1}). \quad (3.16)$$

Para evitar derivadas de segunda ordem no tempo, reescrevemos a equação (3.15) na forma fatorada:

$$\left(1 - \frac{h}{2} \left(1 - \frac{h}{6}\right)\right) u^{n+1} = \left(1 + \frac{h}{2} \left(1 + \frac{h}{6}\right)\right) u^n \quad (3.17)$$

que gera quatro etapas, incorporando duas etapas explícitas e duas implícitas, dadas por [14]

$$\begin{aligned} \text{etapas explícitas} & \begin{cases} u^{n+(1/6)} = u^n + \frac{\Delta t}{6} u_t^n \\ u^{n+(1/2)} = u^n + \frac{\Delta t}{2} u_t^{n+1/6} \end{cases} \\ \text{etapas implícitas} & \begin{cases} u^{n+(5/6)} - u^{n+1} = -\frac{\Delta t}{6} u_t^{n+1} \\ u^{n+1} = \frac{\Delta t}{2} u_t^{n+(5/6)} + u^{n+(1/2)} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Note que as duas etapas implícitas em (3.18) são acopladas, que resulta em uma solução simultânea.

Em [29, 30] os autores mostram que a R_{LM} é incondicionalmente estável se satisfaz a condição

$$M - 2 \leq N \leq M \iff R_{LM} \text{ é incondicionalmente estável.} \quad (3.19)$$

Logo, os aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} são incondicionalmente estáveis, assim como os demais aproximantes implícitos de Padé [14].

Neste trabalho, estamos interessado somente nas técnicas de multi-estágio implícitas na parte da discretização temporal. Logo, podemos reescrever o método implícito multi-estágio da seguinte forma

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} - \mathbf{W} \Delta u_t = \mathbf{w} u_t^n, \quad (3.20)$$

onde $\Delta u \in \mathbb{R}^n$ é um vetor com dimensão n e Δu_t é a derivada parcial de Δu com respeito ao tempo. Substituindo (3.4) e (3.5) em (3.20) e considerando que o operador \mathcal{L} é linear com coeficientes constantes, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\Delta u}{\Delta t} - \mathbf{W}[\Delta f - D\Delta u_{xx} + v\Delta u_x + \sigma\Delta u] &= \mathbf{w}[f^n + Du_{xx}^n - vu_x^n - \sigma u^n] \\ \frac{\Delta u}{\Delta t} + \mathbf{W}[-D\Delta u_{xx} + v\Delta u_x + \sigma\Delta u] &= \mathbf{w}[f^n + Du_{xx}^n - vu_x^n - \sigma u^n] + \mathbf{W}\Delta f \\ \frac{\Delta u}{\Delta t} + \mathbf{W}\mathcal{L}(\Delta u) &= \mathbf{w}[f^n - \mathcal{L}(u^n)] + \mathbf{W}\Delta f \end{aligned} \quad (3.21)$$

com Δu definido em (3.20), onde \mathbf{W} , Δf , \mathbf{w} dependem do método escolhido. Para ilustrar, segue os métodos que utilizaremos neste trabalho:

Método de segunda ordem: Uma formulação compacta do R_{11} (Crank - Nicolson) [26]

$$\begin{aligned}\Delta u &= u^{n+1} - u^n, & \Delta f &= f^{n+1} - f^n \\ \mathbf{W} &= 1/2, & \mathbf{w} &= 1.\end{aligned}\tag{3.22}$$

Neste caso $n = 1$ e conseqüentemente os vetores e matrizes são escalares.

Método de quarta ordem: Uma formulação compacta do R_{22} [26]

$$\Delta u = \begin{Bmatrix} u^{n+1/2} - u^n \\ u^{n+1} - u^{n+1/2} \end{Bmatrix}, \quad \Delta f = \begin{Bmatrix} f^{n+1/2} - f^n \\ f^{n+1} - f^{n+1/2} \end{Bmatrix},\tag{3.23}$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 13 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Similarmente podemos estender a ordem do método do tipo R_{33} como pode ser encontrado em [14].

3.3 DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL

A seguir apresentamos três formulações para a discretização espacial que são utilizadas para resolver a equação 1D de convecção-difusão-reação. Uma das formulações é realizada através do método elementos finitos via mínimos quadrados (MEFMQ), uma outra através do método elementos finitos via Galerkin (MEFG) e por último através do método estabilizado *streamline-upwind* Petrov-Galerkin (SUPG). A seguir descrevemos estas formulações.

3.3.1 Método de elementos finitos (MEF)

Os método de elementos finitos no sentido de princípios variacionais são classificados em método de Galerkin e método de mínimos quadrados. O método de elementos finitos via mínimos quadrados (MEFMQ) refere-se a minimização do resíduo no sentido de mínimos quadrados, isto é, considerando o problema (3.1) e definindo uma função resíduo aproximada $r(x)$ por

$$r(x) = vu_x(x) - Du_{xx}(x) + \sigma u(x) - f(x), \quad \forall x \in (0, l).\tag{3.24}$$

Assim constrói-se um funcional quadrático na norma de $L^2(0, l)$ a ser minimizado com respeito a u . O MEFMQ leva a matrizes simétricas definidas positivas [9]. Por outro lado, o método de elementos finitos de Galerkin (MEFG) refere-se a resíduos ponderados, isto é, no conceito de

ortogonalidade. Porém, nem sempre o MEEG leva a matrizes simétricas [31, 33]. O método de Galerkin quando aplicado a problemas predominantemente convectivos perde a estabilidade gerando oscilações perto das camadas limites ou das discontinuidades da solução. Para contornar a perda de estabilidade, o operador *streamline-upwind* Petrov-Galerkin [10, 11, 32] é adicionado ao método de Galerkin gerando, o método estabilizado SUPG. O método estabilizado *streamline-upwind* Petrov-Galerkin não leva a matrizes simétricas [12].

3.3.2 Método de elementos finitos unidimensional

O objetivo do método de elementos finitos é o de introduzir funções bases $\{\varphi_0, \dots, \varphi_m\}$ que geram o subespaço onde está sendo procurada a solução exata, com suporte localizado nos pontos nodais dos elementos [9, 34]. Para definir tais funções bases é feita uma discretização do intervalo $[0, l]$, isto é, $0 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m = l$, onde $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m$. Esta partição divide o intervalo $[0, l]$ em m sub-intervalos ou elementos $e_j = (x_{j-1}, x_j)$, $j = 1, 2, \dots, m$, de comprimento $h_j = x_j - x_{j-1}$.

Vamos construir uma função teste u_h , tal que, u_h é linear em cada elemento e_j e é contínua sobre $[0, l]$ e satisfaz as condições de fronteira $u_h(0) = 0$. Essas funções constituem o subespaço V_h sendo $V_h \subset V$. Assim, como parâmetros para descrever u_h , podemos escolher os valores $u_0, u_1, u_2, \dots, u_m$ nos nós x_j . Conseqüentemente, sobre cada elemento $e_j = (x_{j-1}, x_j)$, $u_h(x)$ pode ser expressado como

$$u_h(x) = \psi_1^{(j)}(x)u_{j-1} + \psi_2^{(j)}(x)u_j \quad x \in e_j, \quad (3.25)$$

em que as funções

$$\psi^{(j)}(x) = \begin{pmatrix} \psi_1^{(j)} \\ \psi_2^{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_j - x)/h_j \\ (x - x_{j-1})/h_j \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Portanto, sobre todo domínio $[0, l]$ podemos escrever $u_h(x)$ como

$$u_h(x) = \varphi_0(x)u_0 + \varphi_1(x)u_1 + \dots + \varphi_m(x)u_m, \quad (3.27)$$

em que

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \psi_2^{(j)}(x), & x \in e_j; \\ \psi_1^{(j+1)}(x), & x \in e_{j+1} \quad 1 \leq j \leq m-1 \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases} \quad (3.28)$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \psi_1^{(1)}(x), & x \in e_1; \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases} \quad (3.29)$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \psi_2^{(m)}(x), & x \in e_m; \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases} \quad (3.30)$$

são chamadas de funções bases e $\varphi_j(x)$ é uma função linear seccionalmente contínua, com valor l para o nó x_j e nulo para os outros nós. Portanto, $u_h(x_j) = u_j$. Especificamente, se temos $u_0 = 0$ então (3.27) satisfaz as condições de fronteira (3.2) e para outros parâmetros u_1, u_2, \dots, u_n valores arbitrários. Todas as funções $u_h(x)$ constituem o espaço das funções teste V_h . Geometricamente, as funções φ_i são representadas por meio da Figura 3.1.

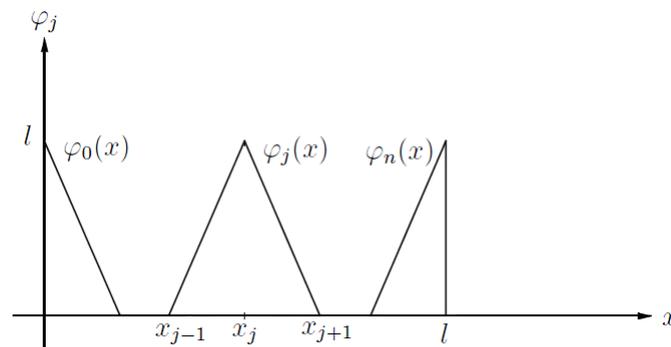


Figura 3.1: Função base associada a cada nó.

3.3.3 Método de mínimos quadrados

Para aproximar o problema (3.1)-(3.3), fazemos uso do método de elemento finitos via mínimos quadrados, é necessário primeiramente calcular sua formulação variacional para que seja possível aplicar o método de elementos finitos [9]. Esta formulação é obtida usando o método de mínimos quadrados que consiste em minimizar o quadrado da integral do resíduo. Assim, dado o espaço de Hilbert $V = H_0^1(0, l)$, onde V é chamado de conjunto das soluções tentativas, e $r(x) = -Du_{xx}(x) + vu_x(x) + \sigma u(x) - f(x)$, $\forall x \in (0, l)$, uma função resíduo aproximada, pode-se resolver numericamente o problema. (3.1)-(3.3).

Definição 3.1. O funcional quadrático na norma de $L^2(0, l)$ é definido como

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \mathcal{F}(u) \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde $\mathcal{F}(u) = (\|r(x)\|_0)^2 = \int_0^l [-Du_{xx}(x) + vu_x(x) + \sigma u(x) - f(x)]^2 dx$ para todo $x \in (0, l)$ sobre todos os $u \in V$.

Além disso, \mathcal{F} é um funcional que tem seu domínio no espaço V das soluções testes levado ao conjunto dos números reais. Uma condição necessária para que $u \in V$ seja um minimizador do funcional \mathcal{F} em (3.31) é equivalente a calcular um mínimo usando a derivada

de Gâteaux, isto é,

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial w}(u) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{F}(u + sw) - \mathcal{F}(u)\|}{s} = 0 \quad \forall w \in V, \quad (3.32)$$

com u e w definidos em $[0, l]$ e $s \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial w}(u) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{\int_0^l [-D(u + sw)_{xx} + v(u + sw)_x + \sigma(u + sw) - f]^2 dx}{s} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\int_0^l [-Du_{xx} + vu_x + \sigma u - f]^2 dx}{s} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

$\forall w \in V$, fazendo os cálculos temos que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial w}(u) &= \int_0^l [2D^2u_{xx}w_{xx} - 2Dvu_{xx}w_x - 2D\sigma u_{xx}w - 2Dvu_xw_{xx}]dx + \\ &\quad + \int_0^l [-2D\sigma uw_{xx} + 2Dw_{xx}f + 2v^2u_xw_x + 2\sigma vu_xw]dx + \\ &\quad + \int_0^l [2\sigma vuw_x - 2vw_xf + 2\sigma^2uw - 2\sigma uwf]dx = 0 \quad \forall w \in V, \end{aligned} \quad (3.34)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} &\int_0^l [D^2u_{xx}w_{xx} - Dvu_{xx}w_x - D\sigma u_{xx}w - Dvu_xw_{xx}]dx + \\ &\quad + \int_0^l [-D\sigma uw_{xx} + v^2u_xw_x + \sigma vu_xw + \sigma vuw_x + \sigma^2uw]dx = \\ &\quad = \int_0^l [-Dw_{xx}f + vw_xf + \sigma uwf]dx \quad \forall w \in V. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Assim, definimos o funcional bilinear $a_M(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ de (3.35) como sendo:

$$\begin{aligned} a_M(u, w) &= \int_0^l [D^2u_{xx}w_{xx} - Dvu_{xx}w_x - D\sigma u_{xx}w - Dvu_xw_{xx}]dx + \\ &\quad + \int_0^l [-D\sigma uw_{xx} + v^2u_xw_x + \sigma vu_xw + \sigma vuw_x + \sigma^2uw]dx, \end{aligned} \quad (3.36)$$

que aplicando o teorema de Green [33] nos seguintes termos da equação (3.36),

$$-Dv \int_0^l u_{xx}w_x dx = Dv \int_0^l u_xw_x dx \quad (3.37)$$

$$-D\sigma \int_0^l u_{xx}w dx = D\sigma \int_0^l uw_{xx} dx \quad (3.38)$$

$$v\sigma \int_0^l u_x w dx = v\sigma \int_0^l u w_x dx, \quad (3.39)$$

ou seja, substituindo (3.37)-(3.39) em (3.36) e efetuando os cálculos, reduzimos o funcional bilinear $a_M(u, w)$ para

$$a_M(u, w) = \int_0^l [D^2 u_{xx} w_{xx} + v^2 u_x w_x + \sigma^2 u w] dx \quad (3.40)$$

Definindo o funcional linear $F_M(\cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$ de (3.35) por

$$F_M(w) = \int_0^l [-D w_{xx} + v w_x + \sigma u w] dx \quad (3.41)$$

para todo $w \in V$. Portanto, podemos dizer que o problema (3.35) é equivalente a resolver o seguinte problema variacional: Achar $u \in V$, tal que,

$$a_M(u, w) = F_M(w), \quad \forall w \in V, \quad (3.42)$$

Vamos utilizar o Teorema 2.11 do Capítulo 2, para provar a existência e unicidade do problema (3.42). 1. Vamos mostrar que $a_M(\cdot, \cdot)$ é bilinear e simétrica.

Dem: Sejam u, z , e w funções pertencentes ao espaço V e escalares α, β, λ e μ .

Usando o funcional bilinear (3.40) temos,

$$\begin{aligned} a_M(\alpha u + \beta z, w) &= \int_0^l [D^2((\alpha u_{xx} + \beta z_{xx})w_{xx}) + v^2((\alpha u_x + \beta z_x)w_x)] dx + \\ &+ \int_0^l [\sigma^2((\alpha u + \beta z)w)] dx \end{aligned} \quad (3.43)$$

fazendo os cálculos

$$\begin{aligned} a_M(\alpha u + \beta z, w) &= \alpha \int_0^l [D^2 u_{xx} w_{xx} + v^2 u_x w_x + \sigma^2 u w] dx + \\ &+ \beta \int_0^l [D^2 z_{xx} w_{xx} + v^2 z_x w_x + \sigma^2 z w] dx \end{aligned} \quad (3.44)$$

Logo,

$$a_M(\alpha u + \beta z, w) = \alpha a_M(u, w) + \beta a_M(z, w) \quad \forall u, z, w \in V. \quad (3.45)$$

De maneira análoga, temos que

$$a_M(u, \mu w + \lambda z) = \mu a_M(u, w) + \lambda a_M(u, z) \quad \forall u, z, w \in V. \quad (3.46)$$

Das igualdades (3.45) e (3.46) podemos concluir que $a_M(\cdot, \cdot)$ é bilinear. A seguir, verificamos

a simetria

$$\begin{aligned}
 a_M(u, w) &= D^2 \int_0^l u_{xx} w_{xx} dx + v^2 \int_0^l u_x w_x dx + \sigma^2 \int_0^l u w dx \\
 &= D^2 \int_0^l w_{xx} u_{xx} dx + v^2 \int_0^l w_x u_x dx + \sigma^2 \int_0^l w u dx \\
 &= a_M(w, u).
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Logo, $a_M(\cdot, \cdot)$ é simétrica. ■

2. Vamos mostrar que $a_M(\cdot, \cdot)$ é contínua.

Dem: Utilizando a equação (3.40), pela desigualdade de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned}
 |a_M(u, w)| &= \left| D^2 \int_0^l u_{xx} w_{xx} dx + v^2 \int_0^l u_x w_x dx + \sigma^2 \int_0^l u w dx \right| \\
 &\leq D^2 \|u_{xx}\|_0 \|w_{xx}\|_0 + v^2 \|u_x\|_0 \|w_x\|_0 + \sigma^2 \|u\|_0 \|w\|_0 \\
 &\leq \max\{D^2, v^2, \sigma^2\} (\|u_{xx}\|_0 + \|u_x\|_0) (\|w_{xx}\|_0 + \|w_x\|_0)
 \end{aligned}$$

como $(\|u_{xx}\|_0 + \|u\|_0)$ e $\|u\|_1$ são equivalentes em $H_0^1(\Omega)$ [13], assim

$$a_M(u, w) \leq c_1 \|u\|_1 \|w\|_1, \tag{3.48}$$

onde $c_1 = \max\{D^2, v^2, \sigma^2\}$. Logo por (3.48) $a_M(\cdot, \cdot)$ é contínua. ■

3. Mostraremos agora que $a_M(\cdot, \cdot)$ é coerciva.

Dem:

$$\begin{aligned}
 a_M(u, u) &= D^2 \int_0^l u_{xx} u_{xx} dx + v^2 \int_0^l u_x u_x dx + \sigma^2 \int_0^l u u dx \\
 &= D^2 \|u_{xx}\|_0^2 + v^2 \|u_x\|_0^2 + \sigma^2 \|u\|_0^2 \\
 &\geq \min\{D^2, v^2, \sigma^2\} \|u\|_1^2.
 \end{aligned}$$

Temos que,

$$a_M(u, u) \geq c_2 \|u\|_1^2, \tag{3.49}$$

onde $c_2 = \min\{D^2, v^2, \sigma^2\}$. Logo por (3.49) $a_M(\cdot, \cdot)$ é coerciva. ■

4. Por último, vamos mostrar que $F_M(\cdot)$ é linear e contínuo em V .

Dem: Pela definição de funcional e funcional linear, $F_M(\cdot)$ e $a_M(\cdot, \cdot)$ são lineares. Agora segue a demonstração da continuidade de $F_M(w)$, onde o funcional linear $F_M(w)$ dado por (3.41) é limitado em V , pois, para transformações lineares, continuidade e limitação

significam o mesmo [18]. Suponha que existe v_0 tal que, $0 < v_0 \leq v - \sigma u_x$. Considerando o funcional $F_M(\cdot)$ e utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\begin{aligned}
F_M(w) &= \left| \int_0^l [-Dw_{xx} + vw_x + \sigma uw]f dx \right| \\
&= \left| \int_0^l -Dw_{xx}f dx + \int_0^l vw_xf dx + \int_0^l \sigma uwf dx \right| \\
&= \left| -\int_0^l Dw_{xx}f dx + \int_0^l (v - \sigma u_x)w_xf dx \right| \\
&\leq -\int_0^l Dw_{xx}f dx + \int_0^l v_0w_xf dx \\
&\leq \int_0^l |Dw_{xx}f| dx + \int_0^l v_0w_xf dx \\
&\leq D\|w_{xx}\|_0\|f\|_0 + v_0\|w_x\|\|f\|_0 \\
&\leq \max\{D\|f\|_0, v_0\|f\|_0\}\|w\|_1,
\end{aligned}$$

logo,

$$F_M(w) \leq c_3\|w\|_1, \quad (3.50)$$

onde $c_3 = \max\{D\|f\|_0, v_0\|f\|_0\}$. Assim, $F_M(\cdot)$ é contínuo. ■

Portanto, podemos afirmar, com o uso do Teorema 2.11 do Capítulo 2, a existência e unicidade do problema (3.42).

3.3.4 Método de elementos finitos via mínimos quadrados (MEFMQ)

O método de elementos finitos via mínimos quadrados (MEFMQ) tem por objetivo aproximar o espaço das soluções tentativas e o espaço das funções teste por subespaço de dimensão finita. Iniciamos este estudo construindo um subespaço de dimensão finita V_h do espaço de dimensão infinita $V = H_0^1(0, l)$, formado por funções lineares seccionais geradoras de um conjunto de m elementos de V denotado por $V_h = [\varphi_0, \dots, \varphi_m]$. As funções bases φ_j são as mesmas obtidas na seção 2.3.2 a partir do método de elementos finitos, considerando a partição $x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{m-1} < x_m$. O problema agora consiste em determinar uma solução aproximada $u_h = u_h(x) \in V_h$ tal que

$$u_h = \sum_{j=0}^m \varphi_j(x)u_j, \quad \forall \varphi_j \in V_h. \quad (3.51)$$

Deste modo, o problema aproximado da equação (3.42) consiste em determinar $u_h \in V_h$ tal que

$$a_M(u_h, w_h) = F_M(w_h), \quad \forall w_h \in V_h. \quad (3.52)$$

Da solução aproximada (3.51), a equação (3.52) mostra ser válida a igualdade $w_h = \varphi_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$, definida como função teste. A equação (3.52) pode ser reescrita como

$$\sum_{j=0}^m a_M(\varphi_i, \varphi_j) u_j = F_M(\varphi_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (3.53)$$

A equação (3.53) representa um sistema linear de equações algébricas com m equações e m incógnitas $u_0, u_1, u_2, \dots, u_m$. Em forma matricial, este sistema pode ser escrito como

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (3.54)$$

onde $\mathbf{A} = [A_{ij}]_{m \times m}$, com entradas $A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$, é a matriz global; $\mathbf{U}^T = [u_0, u_1, u_2, \dots, u_m]$ é o vetor incógnita e $\mathbf{F}^T = [F_0, F_1, F_2, \dots, F_m]$ é o vetor de força global.

3.3.5 Método de Galerkin

Nesta seção apresentamos o método de Galerkin para resolver o problema (3.1)-(3.3). Para aproximação do problema (3.1)-(3.3), seja $V = H_0^1(0, l)$ assim definido, onde V é chamado de conjunto das soluções teste. Em seguida, a formulação variacional fraca do problema (3.1) é calculada multiplicando ambos membros desta equação por uma função teste $w \in V$. Temos,

$$-Du_{xx}w + vu_xw + \sigma uw = fw \quad \forall w \in V. \quad (3.55)$$

Aplicando a integral em ambos os lados da equação (3.55), segue que

$$\int_0^l [-Du_{xx}w + vu_xw + \sigma uw] dx = \int_0^l fwdx \quad \forall w \in V \quad (3.56)$$

e integrando por partes obtemos

$$\int_0^l -Du_{xx}w dx = \int_0^l Du_xw_x dx. \quad (3.57)$$

Substituindo (3.57) em (3.56) temos que,

$$\int_0^l [Du_xw_x + vu_xw + \sigma uw] dx = \int_0^l fwdx. \quad (3.58)$$

Assim definimos os funcionais bilineares $a_G(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ e $F_G(\cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$a_G(u, w) = \int_0^l [Du_xw_x + vu_xw + \sigma uw] dx \quad (3.59)$$

e

$$F_G(w) = \int_0^l f w dx \quad (3.60)$$

para todo $w \in V$.

Consequentemente, podemos dizer que o problema (3.58) é equivalente a resolver o seguinte problema variacional: Determinar $u \in V$ tal que

$$a_G(u, w) = F_G(w) \quad \forall w \in V. \quad (3.61)$$

Assim, podemos afirmar, com o uso do Teorema 2.11 do Capítulo 2, a existência e unicidade do problema (3.61).

1. Vamos mostrar que $a_G(\cdot, \cdot)$ é bilinear.

Dem: Sejam u, z , e w funções pertencentes ao espaço V e escalares α, β, λ e μ .

Utilizando o funcional bilinear (3.59), temos que

$$\begin{aligned} a_G(\alpha u + \beta z, w) &= \int_0^l [D(\alpha u_x + \beta z_x)w_x + v(\alpha u_x + \beta z_x)w + \sigma(\alpha u + \beta z)w] dx \\ &= \alpha \int_0^l [D u_x w_x + v u_x w + \sigma u w] dx + \beta \int_0^l [D u_x z_x + v z_x w + \sigma z w] dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$a_G(\alpha u + \beta z, w) = \alpha a_G(u, w) + \beta a_G(z, w) \quad \forall u, z, w \in V \quad (3.62)$$

De maneira análoga, segue que

$$a_G(u, \mu w + \lambda z) = \mu a_G(u, w) + \lambda a_G(u, z) \quad \forall u, z, w \in V \quad (3.63)$$

Das igualdades (3.62) e (3.63) concluímos que $a_G(\cdot, \cdot)$ é bilinear. ■

Observação 3.2. O funcional bilinear $a_G(\cdot, \cdot)$ não é simétrica devido ao termo $v \int_0^l u_x w dx$. De fato, integrando por partes temos que,

$$v \int_0^l u_x w dx = -v \int_0^l w_x u dx.$$

2. Vamos mostrar que $a_G(\cdot, \cdot)$ é contínua e coerciva.

Dem: Utilizando a equação (3.59) pela desigualdade de Cauchy-Schwartz,

temos

$$\begin{aligned}
|a_G(u, w)| &= \left| \int_0^l Du_x w_x dx + \int_0^l vu_x w dx + \int_0^l \sigma u w dx \right| \\
&\leq D \|u_x\|_0 \|w_x\|_0 + v \|u_x\|_0 \|w\|_0 + \sigma \|u\|_0 \|w\|_0 \\
&\leq \max\{D, v, \sigma\} (\|u_x\|_0 + \|u\|_0) (\|w_x\|_0 + \|w\|_0) \\
&\leq \max\{D, v, \sigma\} \|u\|_1 \|w\|_1.
\end{aligned}$$

Logo,

$$a_G(u, w) \leq c_4 \|u\|_1 \|w\|_1 \quad (3.64)$$

onde $c_4 = \max\{D, v, \sigma\}$. Assim por (3.64), segue que, $a_G(\cdot, \cdot)$ é contínua. ■

Antes de demonstrar que $a_G(\cdot, \cdot)$ é coerciva. Vamos supor que

$$\sigma - \frac{1}{2}v_x \geq \sigma_0 > 0.$$

Podemos reescrever a equação (3.59) como

$$\begin{aligned}
a_G(u, w) &= \int_0^l Du_x w_x dx + \int_0^l vu_x w dx + \int_0^l \sigma u w dx \\
&= \int_0^l Du_x w_x dx + \int_0^l [vu_x + \sigma u] w dx \\
&= \int_0^l Du_x w_x dx + b_G(u, w)
\end{aligned} \quad (3.65)$$

onde

$$b_G(u, w) = \int_0^l [vu_x + \sigma u] w dx \quad (3.66)$$

Observação 3.3. Para todo $u \in V$ temos que

$$b_G(u, u) = \left(\left(\sigma - \frac{1}{2}v_x \right) u, u \right)$$

(Informações adicionais pode ser encontrado em [13]).

De fato, considerando o primeiro termo de $b_G(u, u)$ em (3.66), temos

$$\begin{aligned}
\int_0^l v u_x u dx &= \frac{1}{2} \int_0^l v \frac{d}{dx} u^2 dx \\
&= \frac{1}{2} v u \Big|_0^l - \frac{1}{2} \int_0^l v_x u^2 dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^l v_x u^2 dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
b_G(u, u) &= \int_0^l \sigma u^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l v_x u^2 dx \\
&= \int_0^l \left(\sigma - \frac{1}{2} v_x \right) u^2 dx \\
&= \left(\left(\sigma - \frac{1}{2} v_x \right) u, u \right)
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Para coercividade, da equação (3.65) temos,

$$\begin{aligned}
a_G(u, u) &= \int_0^l D u_x u_x dx + b_G(u, u) \\
&= \int_0^l D u_x^2 dx + \int_0^l \left(\sigma - \frac{1}{2} v_x \right) u^2 dx \\
&= D \|u_x\|_0^2 + \left(\left(\sigma - \frac{1}{2} v_x \right) u, u \right) \\
&\geq D \|u_x\|_0^2 + \sigma_0 \|u\|_0^2 \\
&\geq c_5 \|u\|_1^2,
\end{aligned} \tag{3.68}$$

onde $c_5 = \min\{D, \sigma_0\}$. Logo, $a_G(\cdot, \cdot)$ é coerciva. ■

3. E por último, vamos mostrar que $F_G(w)$ é linear e contínuo.

Dem: Pela definição de funcional e funcional bilinear, $F_G(\cdot)$ e $a_G(\cdot, \cdot)$ são lineares. Agora segue a demonstração da continuidade de $F_G(w)$, onde o funcional linear $F_G(w)$ dado por (3.60) é limitado em V , pois, para transformações lineares, continuidade e limitação significam o mesmo [18]. Considerando o funcional $F_G(\cdot)$ pela desigualdade de Cauchy - Schwartz, temos

$$\begin{aligned}
|F_G(w)| &= \left| \int_0^l w f dx \right| \\
&\leq \|f\|_0 \|w\|_1,
\end{aligned}$$

Assim,

$$F_G(w) \leq c_6 \|w\|_1, \quad (3.69)$$

onde $c_6 = \|f\|_0$. Logo por (3.69) temos que, $F_G(\cdot)$ é contínuo. ■

Portanto, podemos afirmar com o uso do Teorema 2.11 do capítulo 2, a existência e unicidade do problema (3.61).

3.3.6 Método de elementos finitos via Galerkin (MEFG)

O método de elementos finitos via Galerkin (MEFG) tem como objetivo aproximar o espaço das soluções tentativas e o espaço das funções teste por subespaço de dimensão finita. Iniciamos este estudo construindo um subespaço de dimensão finita V_h do espaço de dimensão infinita $V = H_0^1(0, l)$, formado por funções lineares seccionais geradoras de um conjunto de m elementos de V denotado por $V_h = [\varphi_0, \dots, \varphi_m]$. As funções bases φ_j são as mesmas obtidas na seção 2.3.2 a partir do método de elementos finitos.

Seja a partição $x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{m-1} < x_m$. O problema agora consiste em determinar uma solução aproximada $u_h = u_h(x) \in V_h$ tal que

$$u_h = \sum_{j=0}^m \varphi_j(x) u_j, \quad \forall \varphi_j \in V_h. \quad (3.70)$$

Deste modo, o problema aproximado da equação (3.61) consiste em determinar $u_h \in V_h$ tal que

$$a_G(u_h, w_h) = F_G(w_h), \quad \forall w_h \in V_h. \quad (3.71)$$

Substituindo a solução aproximada (3.70) na equação (3.71) temos a igualdade $w_h = \varphi_i, i = 0, 1, 2, \dots, m$, definida como função teste. A equação (3.71) pode ser reescrita como

$$\sum_{j=0}^m a_G(\varphi_i, \varphi_j) u_j = F_G(\varphi_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (3.72)$$

A equação (3.72) representa um sistema linear de equações algébricas com m equações e m incógnitas $u_0, u_1, u_2, \dots, u_m$. Em forma matricial, este sistema pode ser escrito como

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (3.73)$$

onde $\mathbf{A} = [A_{ij}]_{m \times m}$, com entradas $A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$, é a matriz global; $\mathbf{U}^T = [u_0, u_1, u_2, \dots, u_m]$ é o vetor incógnita e $\mathbf{F}^T = [F_0, F_1, F_2, \dots, F_m]$ é o vetor de força global.

A forma matricial do MEFG é equivalente ao MEFMQ, porém a matriz obtida pelo método MEFMQ é simétrica [8].

3.3.7 Método estabilizado *streamline-upwind* Petrov-Galerkin (SUPG)

O método de Galerkin quando aplicado a problemas predominantemente convectivos perde a estabilidade gerando oscilações espúrias perto das camadas limites ou das descontinuidades da solução [10, 11]. O método estabilizado *streamline-upwind* Petrov-Galerkin (SUPG) foi proposto por A. N. Brooks e T. J. R. Hughes, em 1982 [10], para contornar estas limitações do método de Galerkin [10]. O SUPG é uma combinação da formulação de Galerkin com termos baseados no resíduo, a nível de elementos. Estes termos são balanceados por parâmetros de estabilização, resultando em formulações variacionais consistentes com as propriedades de estabilização superiores as da aproximação de Galerkin [12, 10, 13].

O método estabilizado SUPG para a equação (3.1) pode ser definido por: Determinar $u_h \in V_h$ tal que

$$a_G(u_h, w_h) + E_{\text{SUPG}}(u_h, w_h) = F_G(w_h), \quad \forall w_h \in V_h, \quad (3.74)$$

onde $E_{\text{SUPG}}(u_h, w_h)$ indica os termos de perturbação que são adicionados à formulação variacional padrão (3.71). Como mencionamos anteriormente, estes termos são adicionados de forma a preservar a consistência do método para obter a estabilidade numérica, dada pela expressão

$$\begin{aligned} E_{\text{SUPG}}(u_h, w_h) &= \sum_{e_j} \int_{e_j} v \frac{\partial w_h}{\partial x} \tau \left(v \frac{\partial u_h}{\partial x} - D \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} + \sigma u_h - f \right) d\Omega \\ &= \sum_{e_j} (\mathcal{P}(w_h), \tau \mathcal{R}(u_h))_{\Omega_j}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

onde a perturbação da função teste $\mathcal{P}(w)$, o termo residual \mathcal{R} e o parâmetro τ são definidos por [12] como :

$$\mathcal{P}(w) = v \frac{\partial w_h}{\partial x}, \quad (3.76)$$

$$\mathcal{R} = v \frac{\partial u_h}{\partial x} - D \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} + \sigma u_h - f, \quad (3.77)$$

$$\tau = \left(\frac{2v}{h} + \frac{4D}{h^2} + \sigma \right)^{-1} = \frac{h}{2v} \left(1 + \frac{1}{Pe} + \frac{h\sigma}{2v} \right)^{-1}, \quad (3.78)$$

onde h é o tamanho da malha, Pe é o número de Péclet e v , D , σ são os mesmos coeficientes definidos na equação (3.1).

O método estabilizado SUPG adiciona difusão artificial somente na direção das linhas de corrente [10, 12, 13], já os métodos clássicos de difusão artificial adicionam difusão extra em toda malha de elementos finitos. Isto representou um avanço em direção ao

desenvolvimento de técnicas numéricas para estabilização da equação de convecção-difusão, com convecção dominante, sobre os métodos clássicos como viscosidade artificial, upwind, diferenças centrais, elementos finitos via Galerkin e Petrov-Galerkin com funções pesos contínuas [11]. Em [35] é apresentada a análise de estabilidade e convergência do método SUPG.

4 SOLUÇÕES NUMÉRICAS PARA A EQUAÇÃO 1D DE CONVECÇÃO-DIFUSÃO-REAÇÃO

Neste capítulo aplicamos a formulação semi-discreta para resolver a equação 1D de convecção-difusão-reação. A formulação semi-discreta, caracterizada pela combinação de aproximações distintas para as variáveis temporal e espacial, nesta formulação, a variável temporal é discretizada utilizando métodos implícitos multi-estágios e a espacial usando métodos de elementos finitos.

4.1 MEFMQ COM O MÉTODO IMPLÍCITO MULTI-ESTÁGIO

Utilizamos o método implícito multi-estágio como definido em (3.20).

4.1.1 MEFMQ com o R_{11}

Considerando o método implícito multi-estágio de segunda ordem R_{11} (Crank-Nicolson) descrito em (3.22) aplicado em (3.20) e lembrando que $\mathcal{L}(\Delta u) = -D\Delta u_{xx} + v\Delta u_x + \sigma\Delta u$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - \frac{1}{2}[-D(u^{n+1} - u^n)_{xx} + v(u^{n+1} - u^n)_x + \sigma(u^{n+1} - u^n)] = \\ = [f^n + Du_{xx}^n - vu_x^n - \sigma u^n] + \frac{1}{2}[f^{n+1} - f^n] \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde $u^{n+1} = u^{n+1}(x, t_{n+1})$, $u^n = u^n(x, t_n)$, $f^{n+1} = f^{n+1}(x, t_{n+1})$ e $f^n = f^n(x, t_n)$ para uma partição no tempo $n = 0, 1, 2, \dots, N$. O método de mínimos quadrados é aplicado em cada t_{n+1} , $n = 0, 1, 2, \dots, N$, supondo u^n conhecido. Para isso, definimos o conjunto das soluções $V = H_0^1(0, l)$ e o funcional

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ u^{n+1} &\mapsto \mathcal{F}(u^{n+1}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u^{n+1}) = \int_0^l \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - \frac{1}{2}[-D(u^{n+1} - u^n)_{xx} + v(u^{n+1} - u^n)_x + \sigma(u^{n+1} - u^n)] - \right. \\ \left. - f^n - [Du_{xx}^n + vu_x^n + \sigma u^n] - \frac{1}{2}[f^{n+1} - f^n] \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Minimizar o funcional \mathcal{F} com respeito u^{n+1} para $n = 0, 1, 2, \dots, N$ é equivalente a calcular o mínimo usando a derivada de Gatêaux, ou seja,

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial w}(u^{n+1}) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{F}(u^{n+1} + sw) - \mathcal{F}(u^{n+1})\|}{s} = 0 \quad \forall w \in V. \quad (4.4)$$

Resolvendo o limite (4.4) quando $s \rightarrow 0$, temos que

$$\int_0^l \left(\frac{1}{2} Dw_{xx} - \frac{1}{2} vw_x - \frac{1}{2} \sigma w + \frac{w}{\Delta t} \right) (Du_{xx}^{n+1} + Du_{xx}^n - f^{n+1} - vu_x^{n+1} + 2 \frac{u^{n+1}}{\Delta t} - \sigma u^n - f^n - vu_x^n - \sigma u^{n+1} - 2 \frac{u^n}{\Delta t}) dx. \quad (4.5)$$

Reescrevendo a equação (4.5) temos

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left(\frac{u^{n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} Du_{xx}^{n+1} - \frac{1}{2} vu_x^{n+1} - \frac{1}{2} \sigma u^{n+1} \right) \left(Dw_{xx} - \frac{1}{2} vw_x - \frac{1}{2} \sigma w + 2 \frac{w}{\Delta t} \right) dx = \\ & = \int_0^l \left(-\frac{u^n}{\delta t} - \frac{1}{2} Du_{xx}^n + \frac{1}{2} vu_x^n + \frac{1}{2} \sigma u^n + \frac{1}{2} [f^{n+1} + f^n] \right) \left(Dw_{xx} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} vw_x + \frac{1}{2} \sigma w + 2 \frac{w}{\Delta t} \right) dx, \quad \forall w \in V \end{aligned} \quad (4.6)$$

Assim podemos definir o funcional bilinear $a_M(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ e o funcional linear $F_M(\cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$\begin{aligned} a_M(u^{n+1}, w) &= \int_0^l \left(\frac{u^{n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} Du_{xx}^{n+1} - \frac{1}{2} vu_x^{n+1} - \frac{1}{2} \sigma u^{n+1} \right) \left(Dw_{xx} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} vw_x - \frac{1}{2} \sigma w + 2 \frac{w}{\Delta t} \right) dx, \quad \forall w \in V \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} F_M(w) &= \int_0^l \left(-\frac{u^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} Du_{xx}^n + \frac{1}{2} vu_x^n + \frac{1}{2} \sigma u^n + \frac{1}{2} [f^{n+1} + f^n] \right) \left(Dw_{xx} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} vw_x + \frac{1}{2} \sigma w + 2 \frac{w}{\Delta t} \right) dx, \quad \forall w \in V \end{aligned} \quad (4.8)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots, N$. De tal forma, a equação (4.6) é equivalente a resolver o seguinte problema variacional: Determinar $u^{n+1} \in V$ tal que

$$a_M(u^{n+1}, w) = F_M(w), \quad \forall w \in V, \quad (4.9)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Para resolver o problema aproximado utilizando o MEFMQ, consideramos o mesmo subespaço V_h do Capítulo 3.

O problema agora consiste em determinar uma solução aproximada $u_h^{n+1} =$

$u_h^{n+1}(\cdot, t_{n+1}) \in V_h$ para $n = 0, 1, 2, \dots, N$ dada por

$$u_h^{n+1} = \sum_{j=0}^m \varphi_j(x) u_j^{n+1}, \quad \forall \varphi_j(x) \in V_h. \quad (4.10)$$

Assim, o problema aproximado de (4.9) é determinar $u_h^{n+1} \in V_h$ tal que

$$a_M(u_h^{n+1}, w_h) = F_M(w_h), \quad \forall w_h \in V_h. \quad (4.11)$$

Da solução aproximada (4.10) e com a equação (4.11), mostra ser válida a igualdade $w_h = \varphi_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$, definida como função teste. Assim podemos expressar a equação (4.11) como sendo

$$a_M \left(\sum_{j=0}^m \varphi_j(x) u_j^{n+1}, \varphi_i(x) \right) = F_M(\varphi_i(x)), \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h. \quad (4.12)$$

ou

$$\sum_{j=0}^m a_M(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) u_j^{n+1} = F_M(\varphi_i(x)), \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h. \quad (4.13)$$

A equação (4.13) representa um sistema linear de equações algébricas com m equações e m incógnitas $u_0, u_1, u_2, \dots, u_m$. As definições (4.7) e (4.8) levam ao seguinte sistema de equações algébricas:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\frac{\varphi_j(x)}{\delta t} + \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} - \frac{1}{2} v \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} - \frac{1}{2} \sigma \varphi_j(x) \right) \left(D \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} - \right. \\ & - \frac{1}{2} v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} - \frac{1}{2} \sigma \varphi_i(x) + 2 \frac{\varphi_i(x)}{\Delta t} \left. \right) u_j^{n+1} dx = \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\frac{\varphi_j(x)}{\Delta t} + \right. \\ & + \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} - \frac{1}{2} v \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} - \frac{1}{2} \sigma \varphi_j(x) \left. \right) \left(D \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} - \frac{1}{2} v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} - \right. \\ & - \frac{1}{2} \sigma \varphi_i(x) + 2 \frac{\varphi_i(x)}{\Delta t} \left. \right) u_j^n dx + \int_0^l \frac{1}{2} [f^{n+1} + f^n] \left(D \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} - \right. \\ & - \frac{1}{2} v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} - \frac{1}{2} \sigma \varphi_i(x) + 2 \frac{\varphi_i(x)}{\Delta t} \left. \right) dx, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h \end{aligned} \quad (4.14)$$

para $i = 0, 1, 2, \dots, m$.

Considerando a equação (4.14) e separando cada termo, temos que

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\varphi_j(x) + \frac{1}{2}D\Delta t \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} - \frac{1}{2}v\Delta t \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} - \frac{1}{2}\sigma\Delta t \varphi_j(x) \right) \left(D\Delta t \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} - \right. \\
& - \left. \frac{1}{2}v\Delta t \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} - \frac{1}{2}\sigma\Delta t \varphi_i(x) + 2\varphi_i(x) \right) u_j^{n+1} dx = \sum_{j=0}^m \left\{ D\Delta t \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \varphi_j(x) dx - \right. \\
& - \frac{1}{2}v\Delta t \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx - \frac{1}{2}\sigma\Delta t \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + 2 \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \\
& + \frac{1}{2}D^2\Delta t^2 \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx - \frac{1}{4}Dv\Delta t^2 \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx - \\
& - \frac{1}{4}D\sigma\Delta t^2 \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + D\Delta t \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx - \\
& - \frac{1}{2}Dv\Delta t^2 \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \frac{1}{2}v^2\Delta t^2 \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \\
& + \frac{1}{4}v\sigma\Delta t^2 \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx - v\Delta t \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx - \frac{1}{2}D\sigma\Delta t^2 \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \varphi_j(x) dx + \\
& + \left. \frac{1}{4}v\sigma\Delta t^2 \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx + \frac{1}{4}\sigma^2\Delta t^2 \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx - \sigma\Delta t \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right\} u_j^{n+1},
\end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\varphi_j(x) + \frac{1}{2}D\Delta t \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} - \frac{1}{2}v\Delta t \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} - \frac{1}{2}\sigma\Delta t \varphi_j(x) \right) \\
& \left(D\Delta t \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} - \frac{1}{2}v\Delta t \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} - \frac{1}{2}\sigma\Delta t \varphi_i(x) + 2\varphi_i(x) \right) u_j^n dx = \\
& = \sum_{j=0}^m \left\{ D\Delta t \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \varphi_j(x) dx - \frac{1}{2}v\Delta t \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx - \frac{1}{2}\sigma\Delta t \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx - \right. \\
& - 2 \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \frac{1}{2}D^2\Delta t^2 \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx - \frac{1}{4}Dv\Delta t^2 \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx - \\
& - \frac{1}{4}D\sigma\Delta t^2 \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + D\Delta t \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx - \frac{1}{2}Dv\Delta t^2 \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \\
& + \frac{1}{4}v^2\Delta t^2 \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \frac{1}{4}v\sigma\Delta t \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx - v\Delta t \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} (x) dx - \\
& - \frac{1}{2}D\sigma\Delta t \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \varphi_j(x) dx + \frac{1}{4}v\sigma\Delta t^2 \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx + \frac{1}{4}\sigma^2\Delta t^2 \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx - \\
& - \left. \sigma\Delta t \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right\} u_j^n
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^l [f^{n+1} + f^n] \left(D \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} - \frac{1}{2} v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} - \frac{1}{2} \sigma \varphi_i(x) + 2 \frac{\varphi_i(x)}{\Delta t} \right) dx = \\
& = \frac{1}{4} D \Delta t \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} [f^{n+1} + f^n] dx + \frac{1}{4} v \Delta t \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} [f^{n+1} + f^n] dx + \\
& + \sigma \Delta t \int_0^l \varphi_i(x) [f^{n+1} + f^n] - \int_0^l \varphi_i(x) [f^{n+1} + f^n] dx
\end{aligned}$$

para $i = 0, 1, 2, \dots, m$. Assim o sistema de equações algébricas (4.14) pode ser escrito na forma matricial como segue

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\left(-\frac{3}{2} \sigma + \frac{1}{4} \sigma^2 \right) \Delta t + 2 \right) [\mathbf{M}] + \left(\left(-\frac{1}{2} D \sigma + \frac{1}{4} v \sigma \right) \Delta t^2 + \left(D - \frac{1}{2} v \right) \Delta t \right) [\mathbf{C}] + \right. \\
& + \left. \left(\left(\frac{1}{4} v \sigma - \frac{1}{4} D \sigma \right) \Delta t^2 + (D - v) \Delta t \right) [\mathbf{C}^T] + \left(\frac{1}{2} D^2 + \frac{1}{2} v^2 - \frac{3}{4} D v \right) \Delta t^2 [\mathbf{K}] \right] \mathbf{U}^{n+1} = \\
& = \left[\left(\frac{1}{4} \sigma^2 \Delta t^2 - \frac{3}{2} \sigma \Delta t - 2 \right) [\mathbf{M}] + \left(\frac{1}{4} v \sigma \Delta t^2 + \left(D - \frac{1}{2} v - \frac{1}{2} \sigma \right) \Delta t \right) [\mathbf{C}] + \right. \quad (4.15) \\
& + \left. \left(\left(\frac{1}{4} v^2 + \frac{1}{4} v \sigma - \frac{1}{4} D \sigma \right) \Delta t^2 + (D - v) \Delta t \right) [\mathbf{C}^T] + \left(\frac{1}{2} - D v \right) \Delta t^2 [\mathbf{K}] \right] \mathbf{U}^n + [\mathbf{F}]
\end{aligned}$$

onde as matrizes de massa \mathbf{M} , de amortecimento \mathbf{C} (dependente da velocidade), de rigidez \mathbf{K} e os vetores de força global \mathbf{F} e incógnitas \mathbf{U}^{n+1} e \mathbf{U}^n são

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= [M_{ij}]_{m \times m} = \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \\
\mathbf{C} &= [C_{ij}]_{m \times m} = \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx, \\
\mathbf{K} &= [K_{ij}]_{m \times m} = \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx, \\
\mathbf{F} &= [F_i]_{m \times 1} = \int_0^l \frac{1}{2} [f^{n+1} + f^n] \left(D \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} - \frac{1}{2} v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} - \frac{1}{2} \sigma \varphi_i(x) + 2 \frac{\varphi_i(x)}{\Delta t} \right) dx, \\
\mathbf{U}^{n+1} &= [u_0^{n+1}, u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_{m-1}^{n+1}, u_m^{n+1}]^T, \\
\mathbf{U}^n &= [u_0^n, u_1^n, u_2^n, \dots, u_{m-1}^n, u_m^n]^T.
\end{aligned}$$

4.1.2 MEFMQ com o R_{22}

Agora consideramos o método implícito multi-estágio de quarta ordem R_{22} apresentado na equação (3.23) aplicada a (3.20) e lembrando que $\mathcal{L}(\Delta u) = -D \Delta u_{xx} + v \Delta u_x +$

$\sigma \Delta u$, obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \begin{Bmatrix} u^{n+1/2} - u^n \\ u^{n+1} - u^{n+1/2} \end{Bmatrix} - \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 13 & 5 \end{bmatrix} \left(-D \begin{Bmatrix} u_{xx}^{n+1/2} - u_{xx}^n \\ u_{xx}^{n+1} - u_{xx}^{n+1/2} \end{Bmatrix} \right) + \\
& + v \begin{Bmatrix} u_x^{n+1/2} - u_x^n \\ u_x^{n+1} - u_x^{n+1/2} \end{Bmatrix} + \sigma \begin{Bmatrix} u^{n+1/2} - u^n \\ u^{n+1} - u^{n+1/2} \end{Bmatrix} \Big) = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} (f^n - \\
& - Du_{xx}^n + vu_x^n + \sigma u^n) + \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 13 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f^{n+1/2} - f^n \\ f^{n+1} - f^{n+1/2} \end{Bmatrix}, \tag{4.16}
\end{aligned}$$

onde $u^{n+1} = u^{n+1}(x, t_{n+1})$, $u^n = u^n(x, t_n)$, $f^{n+1} = f^{n+1}(x, t_{n+1})$ e $f^n = f^n(x, t_n)$ para uma partição no tempo $n = 0, 1, 2, \dots, N$.

O método de mínimos quadrados é aplicado em cada t_{n+1} , supondo u^n conhecido. Portanto, definimos o conjunto das soluções tentativas $V = H_0^1(0, l)$ e funcional \mathcal{F} ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} : V & \rightarrow \mathbb{R} \\
u^{n+1} & \mapsto \mathcal{F}(u^{n+1}) \tag{4.17}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u^{n+1}) & = \int_0^l \left(\frac{1}{\Delta t} \begin{Bmatrix} u^{n+1/2} - u^n \\ u^{n+1} - u^{n+1/2} \end{Bmatrix} - \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 13 & 5 \end{bmatrix} \left(-D \begin{Bmatrix} u_{xx}^{n+1/2} - u_{xx}^n \\ u_{xx}^{n+1} - u_{xx}^{n+1/2} \end{Bmatrix} \right) + \right. \\
& + v \begin{Bmatrix} u_x^{n+1/2} - u_x^n \\ u_x^{n+1} - u_x^{n+1/2} \end{Bmatrix} + \sigma \begin{Bmatrix} u^{n+1/2} - u^n \\ u^{n+1} - u^{n+1/2} \end{Bmatrix} \Big) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} (f^n - \\
& - Du_{xx}^n + vu_x^n + \sigma u^n) + \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 13 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f^{n+1/2} - f^n \\ f^{n+1} - f^{n+1/2} \end{Bmatrix} \Big)^2 dx \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Minimizar o funcional \mathcal{F} com respeito a u^{n+1} para $n = 0, 1, 2, \dots, N$ é equivalente a calcular o mínimo usando a derivada de Gatêaux, ou seja,

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial w}(u^{n+1}) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{F}(u^{n+1} + sw) - \mathcal{F}(u^{n+1})\|}{s} = 0, \quad \forall w \in V. \tag{4.19}$$

Resolvendo o limite (4.19) quando $s \rightarrow 0$, temos que

$$\int_0^l A(x) dx = \int_0^l a_{ij}(x) dx, \quad \mathbf{A}_{2 \times 1}$$

onde

$$\begin{aligned} \int_0^l a_{11}(x)dx &= \int_0^l -\frac{1}{288\Delta t} (Dw_{xx} - vw_x - \sigma w) \left(-Du_{xx}^{n+1} + vu_x^{n+1} + \sigma u^{n+1} + \frac{24u^{n+1/2}}{\Delta t} - \right. \\ &\quad - \frac{24u^n}{\Delta t} - 8Du_{xx}^{n+1/2} + 19Du_{xx}^n + 8vu_x^{n+1/2} - 19vu_x^n + 8\sigma u^{n+1/2} - \\ &\quad \left. - 19\sigma u^n - 5f^n - 8f^{n+1/2} + f^{n+1} \right) dx \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \int_0^l a_{21}(x)dx &= \int_0^l \frac{1}{288\Delta t} \left(5Dw_{xx} - 5vw_x - 5\sigma w - \frac{24w}{\Delta t} \right) \left(5Du_{xx}^{n+1} + 5vu_x^{n+1} + 5\sigma u^{n+1} - \right. \\ &\quad - \frac{24u^{n+1}}{\Delta t} - \frac{24u^{n+1/2}}{\Delta t} + 8Du_{xx}^{n+1/2} - 25Du_{xx}^n - 8vu_x^n + 25vu_x^n + \\ &\quad \left. + 8\sigma u^{n+1/2} + 25\sigma u^n - f^n + 8f^{n+1/2} + 5f^{n+1} \right) dx \end{aligned} \quad (4.21)$$

Reescrevendo as equações (4.20) e (4.21) temos

$$\begin{aligned} \int_0^l a_{11}(x)dx &= \int_0^l \frac{1}{288\Delta t} (-Du_{xx}^{n+1} + vu_x^{n+1} + \sigma u^{n+1}) (-Dw_{xx} + vw_x + \sigma w) dx \\ &= \int_0^l \frac{1}{288\Delta t} \left(-\frac{24u^{n+1/2}}{\Delta t} + \frac{24u^n}{\Delta t} + 8Du_{xx}^{n+1/2} - 19Du_{xx}^n - \right. \\ &\quad - 8vu_x^{n+1/2} + 19vu_x^n - 8\sigma u^{n+1/2} + 19\sigma u^n + 5f^n + 8f^{n+1/2} - \\ &\quad \left. - f^{n+1} \right) (Dw_{xx} - vw_x - \sigma w) dx, \quad \forall w \in V. \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \int_0^l a_{21}(x)dx &= \int_0^l \frac{1}{288\Delta t} \left(5Du_{xx}^{n+1} + 5vu_x^{n+1} + 5\sigma u^{n+1} - \frac{24u^{n+1}}{\Delta t} \right) \left(5Dw_{xx} - 5vw_x - \right. \\ &\quad - 5\sigma w - \frac{24w}{\Delta t} \left. \right) dx = \int_0^l \frac{1}{288\Delta t} \left(\frac{24u^{n+1/2}}{\Delta t} - 8Du_{xx}^{n+1/2} + 25Du_{xx}^n + \right. \\ &\quad + 8vu_x^{n+1/2} - 25vu_x^n + 8\sigma u^{n+1/2} - 25\sigma u^n + f^n - 8f^{n+1/2} \\ &\quad \left. - 5f^{n+1} \right) \left(-5Dw_{xx} + 5vw_x + 5\sigma w + \frac{24w}{\Delta t} \right) dx, \quad \forall w \in V. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Assim podemos definir os funcionais bilineares $a_m(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $b_m(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ e os funcionais lineares $F_M(\cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$ e $G_M(\cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$\begin{aligned} a_m(u^{n+1}, w) &= \int_0^l \frac{1}{288\Delta t} (-Du_{xx}^{n+1} + vu_x^{n+1} + \sigma u^{n+1}) (-Dw_{xx} + \\ &\quad + vw_x + \sigma w) dx, \quad \forall w \in V \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned}
b_m(u^{n+1}, w) &= \int_0^l \frac{1}{288\Delta t} \left(-5Du_{xx}^{n+1} + 5vu_x^{n+1} + 5\sigma u^{n+1} + \frac{24u^{n+1}}{\Delta t} \right) (5Dw_{xx} - 5vw_x - \\
&- 5\sigma w - \frac{24w}{\Delta t}) dx, \quad \forall w \in V
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
F_M(w) &= \int_0^l \frac{1}{288\Delta t} \left(-\frac{24u^{n+1/2}}{\Delta t} + \frac{24u^n}{\Delta t} + 8Du_{xx}^{n+1/2} - 19Du_{xx}^n - \right. \\
&- 8vu_x^{n+1/2} + 19vu_x^n - 8\sigma u^{n+1/2} + 19\sigma u^n + 5f^n + 8f^{n+1/2} - \\
&- \left. f^{n+1} \right) (Dw_{xx} - vw_x - \sigma w) dx, \quad \forall w \in V
\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}
G_M(w) &= \int_0^l \frac{1}{288\Delta t} \left(\frac{24u^{n+1/2}}{\Delta t} - 8Du_{xx}^{n+1/2} + 25Du_{xx}^n - 8vu_x^{n+1/2} + 25vu_x^n - \right. \\
&- 8\sigma u^{n+1/2} + 25\sigma u^n + f^n - 8f^{n+1/2} - 5f^{n+1} \left. \right) (-5Dw_{xx} + \\
&+ 5vw_x + 5\sigma w + \frac{24w}{\Delta t}) dx, \quad \forall w \in V
\end{aligned} \tag{4.27}$$

para $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Desta forma as equações (4.22) e (4.23) são equivalentes a resolver os seguintes problemas variacionais: Determinar $u^{n+1} \in V$ tal que

$$a_M(u^{n+1}, w) = F_M(w), \quad \forall w \in V, \tag{4.28}$$

$$b_M(u^{n+1}, w) = G_M(w), \quad \forall w \in V, \tag{4.29}$$

para $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Para resolver os problemas aproximados utilizando o MEFMQ, consideramos o mesmo subespaço V_h do Capítulo 3. Os problemas variacionais, equações (4.28) e (4.29), consistem em determinar uma solução aproximada $u_h^{n+1} = u_h^{n+1}(\cdot, t_{n+1}) \in V_h$ para $n = 0, 1, 2, \dots, N$ dada por

$$u_h^{n+1} = \sum_{j=0}^m \varphi_j(x) u_j^{n+1}, \quad \forall \varphi_j(x) \in V_h. \tag{4.30}$$

Assim, os problemas aproximados de (4.28) e (4.29) são determinados por $u_h^{n+1} \in V_h$ tal que

$$a_M(u_h^{n+1}, w_h) = F_M(w_h), \quad \forall w_h \in V_h \tag{4.31}$$

$$b_M(u_h^{n+1}, w_h) = G_M(w_h), \quad \forall w_h \in V_h. \tag{4.32}$$

Da solução aproximada (4.30) e com as equações (4.31) e (4.32), mostra-se válida a igualdade $w_h = \varphi_i(x)$ $i = 0, 1, 2, \dots, m$, definida como função teste. Assim as equações (4.31) e (4.32)

podem ser expressas como

$$a_M \left(\sum_{j=0}^m \varphi_j(x) u_j^{n+1}, \varphi_i(x) \right) = F_M(\varphi_i(x)), \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h. \quad (4.33)$$

$$b_M \left(\sum_{j=0}^m \varphi_j(x) u_j^{n+1}, \varphi_i(x) \right) = G_M(\varphi_i(x)), \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h. \quad (4.34)$$

ou

$$\sum_{j=0}^m a_M(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) u_j^{n+1} = F_M(\varphi_i(x)) \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h, \quad (4.35)$$

$$\sum_{j=0}^m b_M(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) u_j^{n+1} = G_M(\varphi_i(x)). \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h \quad (4.36)$$

As equações (4.35) e (4.36) representam sistemas de equações algébricas lineares com m equações e m incógnitas $u_0, u_1, u_2, \dots, u_m$.

As definições (4.24) e (4.26) levam ao seguinte sistema de equações algébricas:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m \int_0^l \frac{1}{288\Delta t} \left(-D \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + v \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \sigma \varphi_j(x) \right) \left(-D \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} + v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} + \right. \\ & + \left. \sigma \varphi_i(x) \right) u_j^{n+1} dx + \sum_{j=0}^m \int_0^l \frac{1}{288\Delta t} \left(\frac{24\varphi_j(x)}{\Delta t} - 8D \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + 8v \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \right. \\ & + \left. 8\sigma \varphi_j(x) \right) \left(-D \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} + v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} + \sigma \varphi_i(x) \right) u_j^{n+1/2} dx = \quad (4.37) \\ & = \sum_{j=0}^m \int_0^l \frac{1}{288\Delta t} \left(\frac{24\varphi_j(x)}{\Delta t} - 19D \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + 19v \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + 19\sigma \varphi_j(x) \right) \left(D \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} - \right. \\ & - \left. v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} - \sigma \varphi_i(x) \right) u_j^n dx + \int_0^l \frac{1}{288\Delta t} (5f^n + 8f^{n+1/2} - f^{n+1}) \left(D \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} - \right. \\ & - \left. v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} - \sigma \varphi_i(x) \right) dx \end{aligned}$$

e as definições (4.25) e (4.27) levam ao seguinte sistemas de equações algébricas:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^m \int_0^l \frac{1}{288\Delta t} \left(5D \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} - 5v \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} - 5\sigma \varphi_j(x) - \frac{24\varphi_j(x)}{\Delta t} \right) \left(-5D \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} + \right. \\
& + 5v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} + 5\sigma \varphi_i(x) + \frac{24\varphi_i(x)}{\Delta t} \left. \right) u_j^{n+1} dx + \sum_{j=0}^m \int_0^l \frac{1}{288\Delta t} \left(\frac{24\varphi_j(x)}{\Delta t} - 8D \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \right. \\
& + 8v \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + 8\sigma \varphi_j(x) \left. \right) \left(-5D \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} + 5v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} + 5\sigma \varphi_i(x) + \right. \\
& + \frac{24\varphi_i(x)}{\Delta t} \left. \right) u_j^{n+1/2} dx = \sum_{j=0}^m \int_0^l \frac{1}{288\Delta t} \left(-25D \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + 25v \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + 25\sigma \varphi_j(x) + \right. \\
& + \frac{24\varphi_j(x)}{\Delta t} \left. \right) \left(-5D \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} + 5v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} + 5\sigma \varphi_i(x) + \frac{24\varphi_i(x)}{\Delta t} \right) u_j^n dx + \int_0^l \frac{1}{288\Delta t} (f^n - \\
& - 8f^{n+1/2} - 5f^{n+1}) \left(-5D \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} + 5v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} + 5\sigma \varphi_i(x) + \frac{24\varphi_i(x)}{\Delta t} \right) dx
\end{aligned} \tag{4.38}$$

para $i = 0, 1, 2, \dots, m$.

Considerando a equação (4.37) e separando cada termo, temos que:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^m \int_0^l \frac{1}{288} \left(-D\Delta t \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + v\Delta t \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \sigma \Delta t \varphi_j(x) \right) \left(-D\Delta t \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} + \right. \\
& + v\Delta t \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} + \sigma \Delta t \varphi_i(x) \left. \right) u_j^{n+1} dx = \sum_{j=0}^m \left\{ \frac{D^2 \Delta t^2}{288} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx - \right. \\
& - \frac{Dv\Delta t^2}{288} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx - \frac{D\sigma \Delta t^2}{288} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx - \\
& - \frac{vD\Delta t^2}{288} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \frac{v^2 \Delta t^2}{288} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \frac{v\sigma \Delta t^2}{288} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx - \\
& \left. - \frac{\sigma D \Delta t^2}{288} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \varphi_j(x) dx + \frac{\sigma v \Delta t^2}{288} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx + \frac{\sigma^2 \Delta t^2}{288} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right\} u_j^{n+1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^m \int_0^l \frac{1}{288} \left(24\varphi_j(x) - 8D\Delta t \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + 8v\Delta t \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + 8\sigma\Delta t \varphi_j(x) \right) \left(-D\Delta t \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} + \right. \\
& + \left. v\Delta t \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} + \sigma\Delta t \varphi_i(x) \right) u^{n+1/2} dx = \sum_{j=0}^m \left\{ \frac{-D\Delta t}{12} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \varphi_j(x) dx + \right. \\
& + \frac{v\Delta t}{12} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx + \frac{\sigma\Delta t}{12} \int_0^l \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx + \frac{D^2\Delta t^2}{36} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx - \\
& - \frac{Dv\Delta t^2}{36} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx - \frac{D\sigma\Delta t^2}{36} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx - \\
& - \frac{vD\Delta t^2}{36} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \frac{v^2\Delta t^2}{36} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \\
& + \frac{v\sigma\Delta t^2}{36} \int_0^l \varphi_j(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx - \frac{\sigma D\Delta t^2}{36} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \varphi_j(x) dx + \\
& + \left. \frac{\sigma v\Delta t^2}{36} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx + \frac{\sigma v\Delta t^2}{36} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right\} u_j^{n+1/2}, \\
\\
& \sum_{j=0}^m \int_0^l \frac{1}{288} \left(24\varphi_j(x) - 19D\Delta t \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + 19v\Delta t \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + 19\sigma\Delta t \varphi_j(x) \right) \left(D\Delta t \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} - \right. \\
& - \left. v\Delta t \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} - \sigma\Delta t \right) u_j^n = \sum_{j=0}^m \left\{ \frac{D\Delta t}{12} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \varphi_j(x) dx - \frac{v\Delta t}{12} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx - \right. \\
& - \frac{\sigma\Delta t}{12} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx - \frac{19D^2\Delta t^2}{288} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + \\
& + \frac{19Dv\Delta t^2}{288} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + \frac{19D\sigma\Delta t^2}{288} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + \\
& + \frac{19vD\Delta t^2}{288} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx - \frac{19v^2\Delta t^2}{288} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx - \\
& - \frac{19v\sigma\Delta t^2}{288} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \frac{19\sigma D\Delta t^2}{288} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \varphi_j(x) dx - \\
& - \left. \frac{19\sigma v\Delta t^2}{288} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx - \frac{19\sigma^2\Delta t^2}{288} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right\} u_j^n,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \frac{1}{288\Delta t} (5f^n + 8f^{n+1/2} - f^{n+1}) \left(D \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} - v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} - \sigma \varphi_i(x) \right) dx \\
= & \frac{5D}{288\Delta t} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} f^n dx - \frac{5v}{288\Delta t} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} f^n dx - \frac{5\sigma}{288\Delta t} \int_0^l \varphi_i(x) f^n dx + \\
& + \frac{8D}{288\Delta t} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} f^{n+1/2} dx - \frac{8v}{288\Delta t} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} f^{n+1/2} dx - \\
& - \frac{8\sigma}{288\Delta t} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1/2} dx - \frac{D}{288\Delta t} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} f^{n+1} dx + \frac{v}{288\Delta t} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} f^{n+1} dx + \\
& + \frac{\sigma}{288\Delta t} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1} dx
\end{aligned}$$

para $i = 0, 1, 2, \dots, m$. Assim o sistema de equações algébricas (4.37) pode ser escrito na forma matricial como segue

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\sigma^2 \Delta t^2}{288} [\mathbf{M}] + \left(\frac{\sigma v \Delta t^2}{288} - \frac{\sigma D \Delta t^2}{288} \right) ([\mathbf{C}] + [\mathbf{C}^T]) + \left(\frac{v^2 \Delta t^2}{288} + \frac{D^2 \Delta t^2}{288} + \right. \right. \\
& + \left. \frac{Dv \Delta t^2}{288} \right) [\mathbf{K}] \mathbf{U}^{n+1} + \left[\frac{\sigma v \Delta t^2}{36} [\mathbf{M}] + \left(-\frac{D \Delta t}{12} - \frac{v \Delta t}{12} \right) [\mathbf{C}] + \left(\frac{\sigma v \Delta t^2}{36} - \right. \right. \\
& - \left. \frac{\sigma D \Delta t^2}{36} \right) ([\mathbf{C}] + [\mathbf{C}^T]) + \left(\frac{D^2 \Delta t^2}{36} - \frac{Dv \Delta t^2}{36} + \frac{v^2 \Delta t^2}{36} \right) [\mathbf{K}] \mathbf{U}^{n+1/2} = \\
= & \left[\left(-\frac{\sigma \Delta t}{12} - \frac{19\sigma^2 \Delta t^2}{288} \right) [\mathbf{M}] + \left(\frac{19\sigma D \Delta t^2}{288} - \frac{19\sigma v \Delta t^2}{288} \right) ([\mathbf{C}] + [\mathbf{C}^T]) + \right. \quad (4.39) \\
& + \left. \left(\frac{D \Delta t}{12} - \frac{v \Delta t}{12} \right) [\mathbf{C}] + \left(-\frac{19D^2 \Delta t^2}{288} + \frac{19Dv \Delta t^2}{288} - \frac{19v^2 \Delta t^2}{288} \right) [\mathbf{K}] \right] \mathbf{U}^n + [\mathbf{F}]
\end{aligned}$$

Agora, considerando a equação (4.38) e separando cada termo , temos que:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^m \int_0^l \frac{1}{288} \left(5D\Delta t \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} - 5v\Delta t \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} - 5\sigma\Delta t \varphi_j(x) - 24\varphi_j(x) \right) \left(-5D\Delta t \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} + \right. \\
& + \left. 5v\Delta t \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} + 5\sigma\Delta t \varphi_i(x) + 24\varphi_i(x) \right) u_j^{n+1} dx = \sum_{j=0}^m \left\{ -\frac{25D^2\Delta t^2}{288} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + \right. \\
& + \frac{25Dv\Delta t^2}{288} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + \frac{25D\sigma\Delta t^2}{288} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + \\
& + \frac{5D\Delta t}{12} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + \frac{25vD\Delta t^2}{288} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx - \\
& - \frac{25v^2\Delta t^2}{288} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx - \frac{25v\sigma\Delta t^2}{288} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx - \\
& - \frac{5v\Delta t}{12} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \frac{25\sigma D\Delta t^2}{288} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \varphi_j(x) dx - \\
& - \frac{25\sigma v\Delta t^2}{288} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx - \frac{25\sigma^2\Delta t^2}{288} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx - \\
& - \frac{5\sigma\Delta t}{12} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \frac{5D\Delta t}{12} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \varphi_j(x) dx - \\
& - \frac{5v\Delta t}{12} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx - \frac{5\sigma\Delta t}{12} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx - \\
& \left. - 2 \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right\} u_j^{n+1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^m \int_0^l \frac{1}{288} \left(-8D\Delta t \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + 8v\Delta t \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + 8\sigma\Delta t \varphi_j(x) + 24\varphi_j(x) \right) \left(-5D\Delta t \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} + \right. \\
& + \left. 5v\Delta t \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} + 5\sigma\Delta t \varphi_i(x) + 24\varphi_i(x) \right) u_j^{n+1/2} dx = \sum_{j=0}^m \left\{ \frac{5D^2\Delta t^2}{36} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx - \right. \\
& - \frac{5Dv\Delta t^2}{36} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx - \frac{5D\sigma\Delta t^2}{36} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx - \\
& - \frac{D\Delta t}{3} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx - \frac{5vD\Delta t^2}{36} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \\
& + \frac{5v^2\Delta t^2}{36} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \frac{5v\sigma\Delta t^2}{36} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \\
& + \frac{v\Delta t}{3} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx - \frac{5\sigma D\Delta t^2}{36} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \varphi_j(x) dx + \\
& + \frac{5\sigma v\Delta t^2}{36} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx + \frac{5\sigma^2\Delta t^2}{36} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \\
& + \frac{\sigma\Delta t}{3} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx - \frac{5D\Delta t}{12} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \varphi_j(x) dx + \\
& + \frac{5v\Delta t}{12} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx + \frac{5\sigma\Delta t}{12} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \\
& + \left. 2 \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right\} u_j^{n+1/2} dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^m \int_0^l \frac{1}{288} \left(-25D\Delta t \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + 25v\Delta t \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + 25\sigma\Delta t \varphi_j(x) + 24\varphi_j(x) \right) \left(-5D\Delta t \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} + \right. \\
& + 5v\Delta t \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} + 5\sigma\Delta t \varphi_i(x) + 24\varphi_i(x) \left. \right) u_j^n dx = \sum_{j=0}^m \left\{ \frac{125D^2\Delta t^2}{288} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx - \right. \\
& - \frac{125Dv\Delta t^2}{288} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx - \frac{125D\sigma\Delta t^2}{288} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx - \\
& - \frac{25D\Delta t}{12} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx - \frac{125vD\Delta t^2}{288} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \\
& + \frac{125v^2\Delta t^2}{288} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \frac{125v\sigma\Delta t^2}{288} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \\
& + \frac{25v\Delta t}{288} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx - \frac{125\sigma D\Delta t^2}{288} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \varphi_j(x) dx + \\
& + \frac{125\sigma v\Delta t^2}{288} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx + \frac{125\sigma^2\Delta t^2}{288} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \\
& + \frac{25\sigma\Delta t}{12} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx - \frac{5D\Delta t}{12} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} \varphi_j(x) dx + \\
& + \frac{5v\Delta t}{12} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx + \frac{5\sigma\Delta t}{12} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \\
& \left. + 2 \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right\} u_j^n
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \frac{1}{288} (\Delta t f^n - 8\Delta t f^{n+1/2} - 5\Delta t f^{n+1}) \left(-5D\Delta t \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} + 5v\Delta t \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} + 5\sigma\Delta t \varphi_i(x) + \right. \\
& + \varphi_i(x) \left. \right) dx = -\frac{5D\Delta t^2}{288} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} f^n dx + \frac{5v\Delta t^2}{288} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} f^n dx + \frac{5\sigma\Delta t^2}{288} \int_0^l \varphi_i(x) f^n dx + \\
& + \frac{\Delta t}{12} \int_0^l \varphi_i(x) f^n dx + \frac{5D\Delta t^2}{36} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} f^{n+1/2} dx - \frac{5v\Delta t^2}{36} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} f^{n+1/2} dx - \\
& - \frac{5\sigma\Delta t^2}{36} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1/2} dx - \frac{2\Delta t}{3} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1/2} dx + \frac{25D\Delta t^2}{288} \int_0^l \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} f^{n+1} dx - \\
& - \frac{25v\Delta t^2}{288} \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} f^{n+1} dx - \frac{25\sigma\Delta t^2}{288} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1} dx - \frac{5\Delta t}{12} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1} dx
\end{aligned}$$

para $i = 0, 1, 2, \dots, m$.

Logo, o sistema de equações algébricas (4.38) pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{aligned}
& \left[\left(-\frac{25\sigma^2\Delta t^2}{288} - \frac{5\sigma\Delta t}{6} - 2 \right) [\mathbf{M}] + \left(\frac{25\sigma D\Delta t^2}{288} - \frac{25\sigma v\Delta t^2}{288} + \frac{5D\Delta t}{12} + \frac{5v\Delta t}{12} \right) [\mathbf{C}] + \right. \\
& + \left(-\frac{5v\Delta t}{12} + \frac{145\sigma D\Delta t^2}{288} - \frac{25\sigma v\Delta t^2}{288} \right) [\mathbf{C}^T] + \left(\frac{25Dv\Delta t^2}{144} - \frac{25v^2\Delta t^2}{288} - \right. \\
& - \left. \frac{25D^2\Delta t^2}{288} \right) [\mathbf{K}] \Big] \mathbf{U}^{n+1} + \left[\left(\frac{5\sigma^2\Delta t^2}{36} + \frac{3\sigma\Delta t}{4} + 2 \right) [\mathbf{M}] + \left(-\frac{5\sigma D\Delta t^2}{36} + \right. \right. \\
& + \left. \frac{5\sigma v\Delta t^2}{36} - \frac{5v\Delta t}{12} \right) [\mathbf{C}] + \left(-\frac{D\Delta t}{3} - \frac{5\sigma D\Delta t^2}{36} + \frac{v\Delta t}{3} + \frac{5\sigma v\Delta t^2}{36} \right) [\mathbf{C}^T] + \quad (4.40) \\
& + \left(-\frac{5vD\Delta t^2}{18} - \frac{5v^2\Delta t^2}{36} + \frac{5D^2\Delta t^2}{36} \right) [\mathbf{K}] \Big] \mathbf{U}^{n+1/2} = \left[\left(-\frac{\sigma\Delta t}{12} - \frac{19\sigma^2\Delta t^2}{288} \right) [\mathbf{M}] + \right. \\
& + \left(\frac{D\Delta t}{12} - \frac{v\Delta t}{12} + \frac{19\sigma D\Delta t^2}{288} - \frac{19\sigma v\Delta t^2}{288} \right) [\mathbf{C}] + \left(-\frac{19\sigma v\Delta t^2}{288} + \frac{19\sigma D\Delta t^2}{288} \right) [\mathbf{C}^T] + \\
& + \left. \left(-\frac{19D^2\Delta t^2}{288} + \frac{19Dv\Delta t^2}{144} - \frac{19v^2\Delta t^2}{288} \right) [\mathbf{K}] \right] \mathbf{U}^n + [\mathbf{G}].
\end{aligned}$$

Nas equações obtidas em (4.39) e (4.40) representamos, as matrizes de massa \mathbf{M} , de amortecimento \mathbf{C} (dependente da velocidade), de rigidez \mathbf{K} e os vetores de forças globais \mathbf{F} e \mathbf{G} , e os vetores incógnitas \mathbf{U}^{n+1} , $\mathbf{U}^{n+1/2}$ e \mathbf{U}^n por

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= [M_{ij}]_{m \times m} = \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \\
\mathbf{C} &= [C_{ij}]_{m \times m} = \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx, \\
\mathbf{K} &= [K_{ij}]_{m \times m} = \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx, \\
\mathbf{F} &= [F_i]_{m \times 1} = \int_0^l \frac{1}{288\Delta t} (5f^n + 8f^{n+1/2} - f^{n+1}) \left(D \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} - \right. \\
& \left. - v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} - \sigma \varphi_i(x) \right) dx, \\
\mathbf{G} &= [G_i]_{m \times 1} = \int_0^l \frac{1}{288\Delta t} (f^n - 8f^{n+1/2} - 5f^{n+1}) \left(-5D \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} + \right. \\
& \left. + 5v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} + 5\sigma \varphi_i(x) + \frac{24\varphi_i(x)}{\Delta t} \right) dx, \\
\mathbf{U}^{n+1} &= [u_0^{n+1}, u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_{m-1}^{n+1}, u_m^{n+1}]^T, \\
\mathbf{U}^{n+1/2} &= [u_0^{n+1/2}, u_1^{n+1/2}, u_2^{n+1/2}, \dots, u_{m-1}^{n+1/2}, u_m^{n+1/2}]^T, \\
\mathbf{U}^n &= [u_0^n, u_1^n, u_2^n, \dots, u_{m-1}^n, u_m^n]^T.
\end{aligned}$$

4.2 MEEG COM O MÉTODO IMPLÍCITO MULTI-ESTÁGIO

4.2.1 MEEG com o R_{11}

Consideramos o método implícito multi-estágio de segunda ordem R_{11} (Crank-Nicolson) como apresentando na equação (4.1). Assim como no método de mínimos quadrados, o método de Galerkin é aplicado em cada t_{n+1} , $n = 0, 1, 2, \dots, N$, supondo u^n conhecido.

Definimos o conjunto das soluções tentativas $V = H_0^1(0, l)$. Multiplicando ambos os lados da igualdade da equação (4.1) por uma função teste $w \in V$, temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right) w - \frac{1}{2} [-D(u^{n+1} - u^n)_{xx} + v(u^{n+1} - u^n)_x + \sigma(u^{n+1} - u^n)] w &= \\ = [f^n - Du_{xx}^n + vu_x^n + \sigma u^n] w + \frac{1}{2} [f^{n+1} - f^n] w, \quad \forall w \in V \end{aligned} \quad (4.41)$$

assim,

$$\begin{aligned} \left(\frac{u^{n+1}}{\Delta t} + \frac{D}{2} u_{xx}^{n+1} - \frac{v}{2} u_x^{n+1} - \frac{\sigma}{2} u^{n+1} \right) w = \left(\frac{u^n}{\Delta t} - \frac{D}{2} u_{xx}^n + \frac{v}{2} u_x^n + \frac{\sigma}{2} u^n \right) w + \\ + \frac{1}{2} [f^{n+1} + f^n] w, \quad \forall w \in V. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Aplicando a integral em ambos os termos da equação (4.42), temos que

$$\begin{aligned} \int_0^l \left(\frac{u^{n+1}}{\Delta t} + \frac{D}{2} u_{xx}^{n+1} - \frac{v}{2} u_x^{n+1} - \frac{\sigma}{2} u^{n+1} \right) w dx = \int_0^l \left(\frac{u^n}{\Delta t} - \frac{D}{2} u_{xx}^n + \frac{v}{2} u_x^n + \frac{\sigma}{2} u^n + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} [f^{n+1} + f^n] \right) w dx, \quad \forall w \in V. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Reescrevendo a equação (4.43) como

$$\begin{aligned} \int_0^l \left(\frac{u^{n+1}}{\Delta t} + \frac{D}{2} u_{xx}^{n+1} - \frac{v}{2} u_x^{n+1} - \frac{\sigma}{2} u^{n+1} \right) w dx = \int_0^l \left(\frac{u^n}{\Delta t} - \frac{D}{2} u_{xx}^n + \frac{v}{2} u_x^n + \frac{\sigma}{2} u^n + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} [f^{n+1} + f^n] \right) w dx \quad \forall w \in V, \end{aligned} \quad (4.44)$$

podemos definir o funcional bilinear $a_G(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ e o funcional linear $F_G(\cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$a_G(u^{n+1}, w) = \int_0^l \left(\frac{u^{n+1}}{\Delta t} + \frac{D}{2} u_{xx}^{n+1} - \frac{v}{2} u_x^{n+1} - \frac{\sigma}{2} u^{n+1} \right) w dx, \quad \forall w \in V. \quad (4.45)$$

$$F_G(w) = \int_0^l \left(\frac{u^n}{\Delta t} - \frac{D}{2} u_{xx}^n + \frac{v}{2} u_x^n + \frac{\sigma}{2} u^n + \frac{1}{2} [f^{n+1} + f^n] \right) w dx, \quad \forall w \in V. \quad (4.46)$$

Portanto, a equação (4.44) é equivalente a resolver o problema variacional de determinar $u^{n+1} \in V$, tal que

$$a_G(u^{n+1}, w) = F_G(w), \quad \forall w \in V, \quad (4.47)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Para resolver o problema aproximado (4.47) usando o MEFG, consideramos o espaço de dimensão finita $V_h = [\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m] \in V$, constituído de funções lineares como definido no Capítulo 3. O problema agora consiste em determinar uma solução aproximada $u_h^{n+1} = u_h^{n+1}(\cdot, t_{n+1}) \in V_h$ para $n = 0, 1, 2, \dots, N$ dada por

$$u_h^{n+1} = \sum_{j=0}^m \varphi_j(x) u_j^{n+1}, \quad \forall \varphi_j \in V. \quad (4.48)$$

Logo, o problema aproximado de (4.47) consiste em determinar $u_h^{n+1} \in V_h$ tal que

$$a_G(u_h^{n+1}, w_h) = F_G(w_h), \quad \forall w_h \in V. \quad (4.49)$$

Da solução aproximada (4.48) e com a equação (4.49), mostra ser válida a igualdade $w_h = \varphi_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$, definida como função teste. A equação (4.49) pode ser escrita como

$$a_G \left(\sum_{j=0}^m \varphi_j(x) u_j^{n+1}, \varphi_i(x) \right) = F_G(\varphi_i(x)), \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h. \quad (4.50)$$

$$\sum_{j=0}^m a_G(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) u_j^{n+1} = F_G(\varphi_i(x)), \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h. \quad (4.51)$$

A equação (4.51) representa um sistema linear de equações algébricas com m equações e m incógnitas. As definições (4.45) e (4.46), levam ao seguinte sistema de equações algébricas:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\frac{\varphi_j(x)}{\Delta t} + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} - \frac{v}{2} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} - \frac{\sigma}{2} \varphi_j(x) \right) \varphi_i(x) u_j^{n+1} dx &= \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\frac{\varphi_j(x)}{\Delta t} - \right. \\ &\left. - \frac{D}{2} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \frac{v}{2} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{\sigma}{2} \varphi_j(x) \right) \varphi_i(x) u_j^n dx + \int_0^l \frac{1}{2} [f^{n+1} + f^n] dx \end{aligned} \quad (4.52)$$

para todo $\varphi_i \in V_h$ com $i = 0, 1, 2, \dots, m$. Logo, considerando a igualdade (4.52) e separado

cada termo, temos que

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\varphi_j(x) + \frac{D\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} - \frac{v\Delta t}{2} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} - \frac{\sigma\Delta t}{2} \varphi_j(x) \right) \varphi_i(x) u_j^{n+1} dx = \\ & = \sum_{j=0}^m \left\{ \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \frac{D\Delta t}{2} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx - \frac{v\Delta t}{2} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx - \right. \\ & \left. - \frac{\sigma\Delta t}{2} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right\} u^{n+1}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\varphi_j(x) - \frac{D\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \frac{v\Delta t}{2} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{\sigma\Delta t}{2} \varphi_j(x) \right) \varphi_i(x) u_j^n dx = \\ & \sum_{j=0}^m \left\{ \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx - \frac{D\Delta t}{2} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + \frac{v\Delta t}{2} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \right. \\ & \left. + \frac{\sigma\Delta t}{2} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right\} u_j^n, \end{aligned}$$

e

$$\int_0^l \frac{1}{2} [f^{n+1} + f^n] \varphi_i(x) dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1} dx + \int_0^l \varphi_i(x) f^n dx \right)$$

para todo $\varphi_i \in V_h$ com $i = 0, 1, 2, \dots, m$.

O sistema de equações algébricas (4.52) pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{aligned} & \left[\left(1 - \frac{\sigma\Delta t}{2} \right) [\mathbf{M}] + \left(\frac{D\Delta t}{2} - \frac{v\Delta t}{2} \right) [\mathbf{C}^T] \right] \mathbf{U}^{n+1} = \left[\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{2} \right) [\mathbf{M}] + \left(-\frac{D\Delta t}{2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{v\Delta t}{2} \right) [\mathbf{C}^T] \right] \mathbf{U}^n + [\mathbf{F}], \end{aligned}$$

onde as matrizes de massa \mathbf{M} , de amortecimento dependente da velocidade \mathbf{C} , de rigidez \mathbf{K} e os vetores força global \mathbf{F} e incógnitas \mathbf{U}^{n+1} e \mathbf{U}^n são

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= [M_{ij}]_{m \times m} = \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \\ \mathbf{C}^T &= [C_{ij}]_{m \times m}^T = \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx, \\ \mathbf{F} &= [F_i]_{m \times 1} = \frac{1}{2} \left(\int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1} dx + \int_0^l \varphi_i(x) f^n dx \right), \\ \mathbf{U}^{n+1} &= [u_0^{n+1}, u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_{m-1}^{n+1}, u_m^{n+1}]^T, \\ \mathbf{U}^n &= [u_0^n, u_1^n, u_2^n, \dots, u_{m-1}^n, u_m^n]^T. \end{aligned}$$

4.2.2 MEEG com o R_{22}

Agora, consideramos o método implícito multi-estágio de quarta ordem R_{22} como apresentado em (4.16). Denotando a equação (4.16) por \mathbf{B} , um vetor 2×1 , cujos elementos são representados por b_{ij} , segue que

$$\begin{aligned} b_{11} = & \frac{u^{n+1/2}}{\Delta t} - \frac{u^n}{\Delta t} - \frac{D}{24}u_{xx}^{n+1} + \frac{v}{24}u_x^{n+1} + \frac{\sigma}{24}u^{n+1} - \frac{D}{3}u_{xx}^{n+1/2} + \frac{19D}{24}u_{xx}^n + \\ & + \frac{v}{3}u_x^{n+1/2} - \frac{19v}{24}u_x^n + \frac{\sigma}{3}u^{n+1/2} - \frac{19\sigma}{24}u^{n+1/2} - \frac{5}{24}f^n - \frac{1}{3}f^{n+1/2} + \frac{1}{24}f^{n+1} \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} b_{21} = & \frac{u^{n+1}}{\Delta t} + \frac{u^{n+1/2}}{\Delta t} - \frac{5D}{24}u_{xx}^{n+1} + \frac{5v}{24}u_x^{n+1} + \frac{5\sigma}{24}u^{n+1} - \frac{D}{3}u_{xx}^{n+1/2} + \frac{25D}{24}u_{xx}^n + \\ & + \frac{v}{3}u_x^{n+1/2} - \frac{25v}{24}u_x^n + \frac{\sigma}{3}u^{n+1/2} - \frac{25\sigma}{24}u^n + \frac{1}{24}f^n - \frac{1}{3}f^{n+1/2} + \frac{5}{24}f^{n+1} \end{aligned} \quad (4.54)$$

O método de Galerkin é aplicado em cada t_{n+1} , $n = 0, 1, 2, \dots, N$ supondo u^n conhecido. Portanto, definimos o conjunto de soluções tentativas $V = H_0^1(0, l)$.

Em seguida, multiplicamos por uma função teste $w \in V$ todos termos da equações (4.53):

$$\begin{aligned} & \frac{u^{n+1/2}}{\Delta t}w - \frac{u^n}{\Delta t}w - \frac{D}{24}u_{xx}^{n+1}w + \frac{v}{24}u_x^{n+1}w + \frac{\sigma}{24}u^{n+1}w - \frac{D}{3}u_{xx}^{n+1/2}w + \frac{19D}{24}u_{xx}^nw + \\ & + \frac{v}{3}u_x^{n+1/2}w - \frac{19v}{24}u_x^nw + \frac{\sigma}{3}u^{n+1/2}w - \frac{19\sigma}{24}u^{n+1/2}w - \frac{5}{24}f^nw - \frac{1}{3}f^{n+1/2}w + \\ & + \frac{1}{24}f^{n+1}w, \quad \forall w \in V, \end{aligned} \quad (4.55)$$

analogamente, multiplicamos também todos os termos da equação (4.54) por w :

$$\begin{aligned} & \frac{u^{n+1}}{\Delta t}w + \frac{u^{n+1/2}}{\Delta t}w - \frac{5D}{24}u_{xx}^{n+1}w + \frac{5v}{24}u_x^{n+1}w + \frac{5\sigma}{24}u^{n+1}w - \frac{D}{3}u_{xx}^{n+1/2}w + \frac{25D}{24}u_{xx}^nw + \\ & + \frac{v}{3}u_x^{n+1/2}w - \frac{25v}{24}u_x^nw + \frac{\sigma}{3}u^{n+1/2}w - \frac{25\sigma}{24}u^nw + \frac{1}{24}f^nw - \frac{1}{3}f^{n+1/2}w + \\ & + \frac{5}{24}f^{n+1}w, \quad \forall w \in V. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Aplicamos a integral em todos os termos da equação (4.55)

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \frac{u^{n+1/2}}{\Delta t} w dx - \int_0^l \frac{u^n}{\Delta t} w dx - \int_0^l \frac{D}{24} u_{xx}^{n+1} w dx + \int_0^l \frac{v}{24} u_x^{n+1} w dx + \int_0^l \frac{\sigma}{24} u^{n+1} w dx - \\
& - \int_0^l \frac{D}{3} u_{xx}^{n+1/2} w dx + \int_0^l \frac{19D}{24} u_{xx}^n w dx + \int_0^l \frac{v}{3} u_x^{n+1/2} w dx - \int_0^l \frac{19v}{24} u_x^n w dx + \quad (4.57) \\
& + \int_0^l \frac{\sigma}{3} u^{n+1/2} w dx - \int_0^l \frac{19\sigma}{24} u^{n+1/2} w dx - \int_0^l \frac{5}{24} f^n w dx - \int_0^l \frac{1}{3} f^{n+1/2} w dx + \\
& + \int_0^l \frac{1}{24} f^{n+1} w dx, \quad \forall w \in V,
\end{aligned}$$

e em todos os termos da equação (4.56)

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \frac{u^{n+1}}{\Delta t} w dx + \int_0^l \frac{u^{n+1/2}}{\Delta t} w dx - \int_0^l \frac{5D}{24} u_{xx}^{n+1} w dx + \int_0^l \frac{5v}{24} u_x^{n+1} w dx + \int_0^l \frac{5\sigma}{24} u^{n+1} w dx - \\
& - \int_0^l \frac{D}{3} u_{xx}^{n+1/2} w dx + \int_0^l \frac{25D}{24} u_{xx}^n w dx + \int_0^l \frac{v}{3} u_x^{n+1/2} w dx - \int_0^l \frac{25v}{24} u_x^n w dx + \quad (4.58) \\
& + \int_0^l \frac{\sigma}{3} u^{n+1/2} w dx - \int_0^l \frac{25\sigma}{24} u^n w dx + \int_0^l \frac{1}{24} f^n w dx - \int_0^l \frac{1}{3} f^{n+1/2} w dx + \\
& + \int_0^l \frac{5}{24} f^{n+1} w dx, \quad \forall w \in V.
\end{aligned}$$

Reescrevendo as equações (4.57) e (4.58), segue que

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \left(-\frac{D}{24} u_{xx}^{n+1} + \frac{v}{24} u_x^{n+1} + \frac{\sigma}{24} u^{n+1} \right) w dx + \int_0^l \left(\frac{u^{n+1/2}}{\Delta t} - \frac{D}{3} u_{xx}^{n+1/2} + \frac{v}{3} u_x^{n+1/2} + \right. \\
& \left. + \frac{\sigma}{3} u^{n+1/2} \right) w dx = \int_0^l \left(\frac{u^n}{\Delta t} - \frac{19D}{24} u_{xx}^n + \frac{19v}{24} u_x^n + \frac{19\sigma}{24} u^n \right) w dx + \quad (4.59) \\
& + \int_0^l \left(\frac{5}{24} f^n + \frac{1}{3} f^{n+1/2} + \frac{1}{24} f^{n+1} \right) w dx, \quad \forall w \in V,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \left(\frac{u^{n+1}}{\Delta t} - \frac{5D}{24} u_{xx}^{n+1} + \frac{5v}{24} u_x^{n+1} + \frac{5\sigma}{24} u^{n+1} \right) w dx + \int_0^l \left(\frac{u^{n+1/2}}{\Delta t} - \frac{D}{3} u_{xx}^{n+1/2} + \frac{v}{3} u_x^{n+1/2} + \right. \\
& \left. + \frac{\sigma}{3} u^{n+1/2} \right) w dx = \int_0^l \left(-\frac{25D}{24} u_{xx}^n + \frac{25v}{24} u_x^n + \frac{25\sigma}{24} u^n \right) w dx + \quad (4.60) \\
& + \int_0^l \left(-\frac{1}{24} f^n + \frac{1}{3} f^{n+1/2} - \frac{5}{24} f^{n+1} \right) w dx, \quad \forall w \in V.
\end{aligned}$$

Assim podemos definir os funcionais bilineares $a_G(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $b_G(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ e

os funcionais lineares $F_G(\cdot)V \rightarrow \mathbb{R}$ e $G_G(\cdot)V \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$a_G(u^{n+1}, w) = \int_0^l \left(-\frac{D}{24}u_{xx}^{n+1} + \frac{v}{24}u_x^{n+1} + \frac{\sigma}{24}u^{n+1} + \frac{u^{n+1/2}}{\Delta t} - \frac{D}{3}u_{xx}^{n+1/2} + \frac{v}{3}u_x^{n+1/2} + \frac{\sigma}{3}u_x^{n+1/2} \right) w dx, \quad \forall w \in V, \quad (4.61)$$

$$F_G(w) = \int_0^l \left(\frac{u^n}{\Delta t} - \frac{19D}{24}u_{xx}^n + \frac{19v}{24}u_x^n + \frac{19\sigma}{24}u^n + \frac{5}{24}f^n + \frac{1}{3}f^{n+1/2} + \frac{1}{24}f^{n+1} \right) w dx, \quad \forall w \in V, \quad (4.62)$$

$$b_G(u^{n+1}, w) = \int_0^l \left(\frac{u^{n+1}}{\Delta t} - \frac{5D}{24}u_{xx}^{n+1} + \frac{5v}{24}u_x^{n+1} + \frac{5\sigma}{24}u^{n+1} + \frac{u^{n+1/2}}{\Delta t} - \frac{D}{3}u_{xx}^{n+1/2} + \frac{v}{3}u_x^{n+1/2} + \frac{\sigma}{3}u_x^{n+1/2} \right) w dx, \quad \forall w \in V, \quad (4.63)$$

$$G_G(w) = \int_0^l \left(-\frac{25D}{24}u_{xx}^n + \frac{25v}{24}u_x^n + \frac{25\sigma}{24}u^n - \frac{1}{24}f^n + \frac{1}{3}f^{n+1/2} - \frac{5}{24}f^{n+1} \right) w dx \quad (4.64)$$

Logo, as equações (4.59) e (4.60) são equivalentes a resolver os seguintes problemas variacionais: Determinar $u^{n+1} \in V$ tal que

$$a_G(u^{n+1}, w) = F_G(w), \quad \forall w \in V, \quad (4.65)$$

$$b_G(u^{n+1}, w) = G_G(w), \quad \forall w \in V, \quad (4.66)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Afim de resolver os problemas aproximados (4.65) e (4.66) utilizamos MEFG, consideramos o mesmo subespaço V_h como definido no Capítulo 3.

Os problemas agora consistem em determinarmos uma solução aproximada $u_h^{n+1} = u_h^{n+1}(\cdot, t_{n+1}) \in V_h$ para $n = 0, 1, 2, \dots, N$ dada por

$$u_h^{n+1} = \sum_{j=0}^m \varphi_j(x) u_j^{n+1} \quad \forall \varphi_j \in V_h. \quad (4.67)$$

Assim, os problemas aproximados (4.65) e (4.66) são determinados por $u_h^{n+1} \in V_h$ tal que

$$a_G(u_h^{n+1}, w_h) = F_G(w_h), \quad \forall w_h \in V, \quad (4.68)$$

$$b_G(u_h^{n+1}, w_h) = G_G(w_h), \quad \forall w_h \in V. \quad (4.69)$$

Da solução aproximada (4.67) e com as equações (4.68) e (4.69), mostra-se válida a igualdade $w_h = \varphi_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$, definida como função teste. Assim as equações (4.68) e (4.69) podem ser expressas como

$$a_G \left(\sum_{j=0}^m \varphi_j(x) u_j^{n+1}, \varphi_i(x) \right) = F_G(\varphi_i(x)) \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h, \quad (4.70)$$

$$b_G \left(\sum_{j=0}^m \varphi_j(x) u_j^{n+1}, \varphi_i(x) \right) = G_G(\varphi_i(x)) \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h, \quad (4.71)$$

logo

$$\sum_{j=0}^m a_G(\varphi_j(x), \varphi_i(x)) u_j^{n+1} = F_G(\varphi_i(x)) \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h, \quad (4.72)$$

$$\sum_{j=0}^m b_G(\varphi_j(x), \varphi_i(x)) u_j^{n+1} = G_G(\varphi_i(x)) \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h. \quad (4.73)$$

A equações (4.72) e (4.73) representam sistemas de equações algébricas com m equações e m incógnitas $u_0, u_1, u_2, \dots, u_m$.

As definições (4.61) e (4.62) levam ao sistema de equações algébricas:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(-\frac{D}{24} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \frac{v}{24} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{\sigma}{24} \varphi_j(x) \right) \varphi_i(x) u_j^{n+1} dx + \\ & + \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\frac{\varphi_j(x)}{\Delta t} - \frac{D}{3} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \frac{v}{3} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{\sigma}{3} \varphi_j(x) \right) \varphi_i(x) u_j^{n+1/2} dx = \quad (4.74) \\ & = \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\frac{\varphi_j(x)}{\Delta t} - \frac{19D}{24} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \frac{19v}{24} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{19\sigma}{24} \varphi_j(x) \right) \varphi_i(x) u_j^n dx + \\ & + \int_0^l \left(\frac{5}{24} f^n - \frac{1}{3} f^{n+1/2} + \frac{1}{24} f^{n+1} \right) \varphi_i(x) dx, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h \end{aligned}$$

e as definições(4.63) e (4.64) levam ao sistema de equações algébricas:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\frac{\varphi_j(x)}{\Delta t} - \frac{5D}{24} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \frac{5v}{24} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{5\sigma}{24} \varphi_j(x) \right) \varphi_i(x) u_j^{n+1} dx + \\ & + \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\frac{\varphi_j(x)}{\Delta t} - \frac{D}{3} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \frac{v}{3} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{\sigma}{3} \varphi_j(x) \right) \varphi_i(x) u_j^{n+1/2} dx = \\ & = \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(-\frac{25D}{24} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \frac{25v}{24} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{25v}{24} \varphi_j(x) \right) \varphi_i(x) u_j^n dx + \quad (4.75) \\ & + \int_0^l \left(-\frac{1}{24} f^n + \frac{1}{3} f^{n+1/2} + \frac{5}{24} f^{n+1} \right) \varphi_i(x) dx, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h \end{aligned}$$

para $i = 0, 1, 2, \dots, m$. Considerando a equação (4.74) e separando cada termo, temos que:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(-\frac{D}{24} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \frac{v}{24} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{\sigma}{24} \varphi_j(x) \right) \varphi_i(x) u_j^{n+1} dx = \\ & = \sum_{j=0}^m \left\{ -\frac{D}{24} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + \frac{v}{24} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \right. \\ & \left. + \frac{\sigma}{24} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right\} u_j^{n+1}, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\frac{\varphi_j(x)}{\Delta t} - \frac{D}{3} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \frac{v}{3} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{\sigma}{3} \varphi_j(x) \right) \varphi_i(x) u_j^{n+1/2} dx = \\ & = \sum_{j=0}^m \left\{ \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx - \frac{D\Delta t}{3} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + \right. \\ & \left. + \frac{v\Delta t}{3} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \frac{\sigma\Delta t}{3} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right\} u_j^{n+1/2}, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\frac{\varphi_j(x)}{\Delta t} - \frac{19D}{24} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \frac{19v}{24} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{19\sigma}{24} \varphi_j(x) \right) \varphi_i(x) u_j^n dx = \\ & = \sum_{j=0}^m \left\{ \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx - \frac{19D\Delta t}{24} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + \right. \\ & \left. + \frac{19v\Delta t}{24} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \frac{19\sigma\Delta t}{24} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right\} u_j^n, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h, \end{aligned}$$

e

$$\frac{5}{24} \int_0^l \varphi_i(x) f^n dx - \frac{1}{3} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1/2} dx + \frac{1}{24} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1} dx, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h.$$

Assim o sistema de equações algébricas (4.74) pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{aligned} & \left[\frac{v}{24} [\mathbf{M}] - \frac{D}{24} [\mathbf{C}^T] + \frac{v}{24} [\mathbf{C}] \right] \mathbf{U}^{n+1} + \left[\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{3} \right) [\mathbf{M}] + \left(-\frac{D\Delta t}{3} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{v\Delta t}{3} \right) [\mathbf{C}^T] \right] \mathbf{U}^{n+1/2} = \left[\left(1 + \frac{19\sigma\Delta t}{24} \right) [\mathbf{M}] + \left(-\frac{19D\Delta t}{24} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{19v\Delta t}{24} \right) [\mathbf{C}^T] \right] \mathbf{U}^n + [\mathbf{F}] \end{aligned} \quad (4.76)$$

Agora, considerando a equação (4.75) e separando cada termo, temos que:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\frac{\varphi_j(x)}{\Delta t} - \frac{5D}{24} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \frac{5v}{24} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{5\sigma}{24} \varphi_j(x) \right) \varphi_i(x) u_j^{n+1} dx = \\ & = \sum_{j=0}^m \left\{ \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx - \frac{5D\Delta t}{24} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + \right. \\ & \left. + \frac{5v\Delta t}{24} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \frac{5\sigma\Delta t}{24} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right\} u_j^{n+1}, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\frac{\varphi_j(x)}{\Delta t} - \frac{D}{3} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \frac{v}{3} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{\sigma}{3} \varphi_j(x) \right) \varphi_i(x) u_j^{n+1/2} dx = \\ & = \sum_{j=0}^m \left\{ \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx - \frac{D\Delta t}{3} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + \right. \\ & \left. + \frac{v\Delta t}{3} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \frac{\sigma\Delta t}{3} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right\} u_j^{n+1/2}, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(-\frac{25D}{24} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \frac{25v}{24} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{25\sigma}{24} \varphi_j(x) \right) \varphi_i(x) u_j^n dx = \\ & = \sum_{j=0}^m \int_0^l \left\{ -\frac{25D}{24} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + \frac{25v}{24} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \right. \\ & \left. + \frac{25\sigma}{24} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right\} u_j^n, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h, \end{aligned}$$

e

$$-\frac{1}{24} \int_0^l \varphi_i(x) f^n dx + \frac{1}{3} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1/2} dx + \frac{5}{24} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1} dx, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h.$$

para $i = 0, 1, 2, \dots, m$. Equivalentemente o sistema de equações algébricas (4.75) pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{aligned} & \left[\left(1 + \frac{5\sigma\Delta t}{24} \right) [\mathbf{M}] + \left(-\frac{5D\Delta t}{24} + \frac{5v\Delta t}{24} \right) [\mathbf{C}^T] \right] \mathbf{U}^{n+1} + \left[\left(1 + \frac{\sigma\Delta t}{3} \right) [\mathbf{M}] + \right. \\ & \left. + \left(-\frac{D\Delta t}{3} + \frac{D\Delta t}{3} \right) [\mathbf{C}^T] \right] \mathbf{U}^{n+1/2} = \left[\frac{25\sigma\Delta t}{24} [\mathbf{M}] + \left(-\frac{25D\Delta t}{24} + \right. \right. \quad (4.77) \\ & \left. \left. + \frac{25v\Delta t}{24} \right) [\mathbf{C}^T] \right] \mathbf{U}^n + [\mathbf{G}] \end{aligned}$$

Nas equações obtidas em (4.76) e (4.77) representamos, as matrizes de massa \mathbf{M} , de amortecimento \mathbf{C} (dependente da velocidade), de rigidez \mathbf{K} e os vetores de forças globais \mathbf{F} e \mathbf{G} e

vetores incógnitas \mathbf{U}^{n+1} , $\mathbf{U}^{n+1/2}$ e \mathbf{U}^n por

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= [M_{ij}]_{m \times m} = \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \\ \mathbf{C}^T &= [C_{ij}]_{m \times m}^T = \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx, \\ \mathbf{K} &= [K_{ij}]_{m \times m} = \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx, \\ \mathbf{F} &= [F_i]_{m \times 1} = \frac{5}{24} \int_0^l \varphi_i(x) f^n dx - \frac{1}{3} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1/2} dx + \frac{1}{24} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1} dx \\ \mathbf{G} &= [G_i]_{m \times 1} = -\frac{1}{24} \int_0^l \varphi_i(x) f^n dx + \frac{1}{3} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1/2} dx + \frac{5}{24} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1} dx \\ \mathbf{U}^{n+1} &= [u_0^{n+1}, u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_{m-1}^{n+1}, u_m^{n+1}]^T, \\ \mathbf{U}^{n+1/2} &= [u_0^{n+1/2}, u_1^{n+1/2}, u_2^{n+1/2}, \dots, u_{m-1}^{n+1/2}, u_m^{n+1/2}]^T, \\ \mathbf{U}^n &= [u_0^n, u_1^n, u_2^n, \dots, u_{m-1}^n, u_m^n]^T.\end{aligned}$$

4.3 SUPG COM O MÉTODO IMPLÍCITO MULTI-ESTÁGIO

Definimos o termo residual de (3.21), como sendo

$$\mathcal{R}(\Delta u) = \frac{\Delta u}{\Delta t} - \mathbf{W} \mathcal{L}(\Delta u) - w[f^n - \mathcal{L}(u^n)] - \mathbf{W} \Delta f \quad (4.78)$$

de modo que Δu definido em (3.20) onde \mathbf{W} , w e Δf dependem do método implícito multi-estágio. Posteriormente aplicamos SUPG no termo residual [12].

4.3.1 SUPG com o R_{11}

Considerando o método implícito multi-estágio de segunda ordem R_{11} (Crank-Nicolson) como apresentando na equação (4.1). Assim, como no método de mínimos quadrados e no método de Galerkin, o método estabilizado SUPG é aplicado em cada t_{n+1} , $n = 0, 1, 2, \dots, N$, supondo u^n conhecido. Contudo, definimos o conjunto das soluções tentativas $V = H_0^1(0, l)$.

A seguir, multiplicamos ambos os lados da equação (4.1) por $\tau v w_x$ para todo $w \in V$, obtemos

$$\begin{aligned}& \tau v w_x \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right) - \tau v w_x \frac{1}{2} [-D(u^{n+1} - u^n)_{xx} + v(u^{n+1} - u^n)_x + \sigma(u^{n+1} - u^n)] = \\ &= \tau v w_x [f^n - D u_{xx}^n + v u_x^n + \sigma u^n] + \tau v w_x \frac{1}{2} [f^{n+1} - f^n]\end{aligned} \quad (4.79)$$

onde τ é dado em (3.78) e v é campo de velocidade. Efetuamos os cálculos

$$\begin{aligned} \tau v w_x \left(\frac{u^{n+1}}{\Delta t} + \frac{D}{2} u_{xx}^{n+1} - \frac{v}{2} u_x^{n+1} - \frac{\sigma}{2} u^{n+1} \right) &= \tau v w_x \left(\frac{u^n}{\Delta t} - \frac{D}{2} u_{xx}^n + \frac{v}{2} u_x^n + \frac{\sigma}{2} u^n \right) + \\ + \tau v w_x \frac{1}{2} [f^{n+1} + f^n], \quad \forall w \in V. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Aplicamos a integral em ambos os lados da equação (4.80) temos

$$\begin{aligned} \int_0^l \tau v w_x \left(\frac{u^{n+1}}{\Delta t} + \frac{D}{2} u_{xx}^{n+1} - \frac{v}{2} u_x^{n+1} - \frac{\sigma}{2} u^{n+1} \right) dx &= \\ = \int_0^l \tau v w_x \left(\frac{u^n}{\Delta t} - \frac{D}{2} u_{xx}^n + \frac{v}{2} u_x^n + \frac{\sigma}{2} u^n \right) dx + & \quad (4.81) \\ + \int_0^l \tau v w_x \frac{1}{2} [f^{n+1} + f^n] dx, \quad \forall w \in V. \end{aligned}$$

Logo, podemos definir

$$\begin{aligned} \hat{a}_{SUPG}(u^{n+1}, w) &= \int_0^l \tau v w_x \left(\frac{u^{n+1}}{\Delta t} + \frac{D}{2} u_{xx}^{n+1} - \frac{v}{2} u_x^{n+1} - \right. \\ &\left. - \frac{\sigma}{2} u^{n+1} \right) dx, \quad \forall w \in V, \end{aligned} \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned} \hat{F}_{SUPG}(w) &= \int_0^l \tau v w_x \left(\frac{u^n}{\Delta t} - \frac{D}{2} u_{xx}^n + \frac{v}{2} u_x^n + \frac{\sigma}{2} u^n + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} [f^{n+1} + f^n] \right) dx, \quad \forall w \in V. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Assim, das equações (4.45), (4.46), (4.82) e (4.83) podemos resolver o seguinte problema variacional: Achar $u^{n+1} \in V$ tal que

$$a_G(u^{n+1}, w) + \hat{a}_{SUPG}(u^{n+1}, w) = F_G(w) + \hat{F}_{SUPG}(w), \quad \forall w \in V, \quad (4.84)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots, N$.

Para resolver o problema aproximado (4.84) usando o método SUPG, consideramos o espaço de dimensão finita $V_h = [\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m] \in V$ constituído de funções lineares definido no Capítulo 3.

O problema agora consiste em determinar uma solução aproximada $u_h^{n+1} = u_h^{n+1}(\cdot, t_{n+1}) \in V_h$ para $n = 0, 1, 2, \dots, N$ dada por

$$u_h^{n+1} = \sum_{j=0}^m \varphi_j(x) u_j^{n+1}, \quad \forall \varphi_j \in V. \quad (4.85)$$

Logo, o problema aproximado (4.84) consiste em: Determinar $u_h^{n+1} \in V_h$ tal que

$$a_G(u_h^{n+1}, w_h) + \hat{a}_{SUPG}(u_h^{n+1}, w_h) = F_G(w_h) + \hat{F}_{SUPG}(w_h), \quad \forall w_h \in V. \quad (4.86)$$

Da solução aproximada (4.85) e com a equação (4.86), mostra-se válida a igualdade $w_h = \varphi_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$, como função teste. A equação (4.86) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} a_G \left(\sum_{j=0}^m \varphi_i(x) u_j^{n+1}, \varphi_i(x) \right) + \hat{a}_{SUPG} \left(\sum_{j=0}^m \varphi_i(x) u_j^{n+1}, \varphi_i(x) \right) = \\ = F_G(\varphi_i(x)) + \hat{F}_{SUPG}(\varphi_i(x)), \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h, \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m a_G(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) u_j^{n+1} + \sum_{j=0}^m \hat{a}_{SUPG}(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) u_j^{n+1} = \\ = F_G(\varphi_i(x)) + \hat{F}_{SUPG}(\varphi_i(x)), \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h. \end{aligned} \quad (4.88)$$

A equação (4.88) representa um sistema linear de equações algébricas com m equações e m incógnitas. As definições (4.45), (4.46), (4.82) e (4.83) levam ao seguinte sistema de equações algébricas:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\frac{\varphi_j(x)}{\Delta t} + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} - \frac{v}{2} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} - \frac{\sigma}{2} \varphi_j(x) \right) \varphi_i(x) u_j^{n+1} dx + \\ + \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\frac{\varphi_j(x)}{\Delta t} + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} - \frac{v}{2} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} - \frac{\sigma}{2} \varphi_j(x) \right) \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} u_j^{n+1} dx = \\ = \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\frac{\varphi_j(x)}{\Delta t} - \frac{D}{2} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \frac{v}{2} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{\sigma}{2} \varphi_j(x) \right) \varphi_i(x) u_j^n dx + \\ + \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\frac{\varphi_j(x)}{\Delta} - \frac{D}{2} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \frac{v}{2} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{\sigma}{2} \varphi_j(x) \right) \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} u_j^n dx \\ + \int_0^l \frac{1}{2} \varphi_i(x) [f^{n+1} + f^n] dx + \int_0^l \frac{1}{2} \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} [f^{n+1} + f^n] dx \end{aligned} \quad (4.89)$$

para todo $\varphi_i \in V_h$ com $i = 0, 1, 2, \dots, m$.

Logo, considerando na igualdade (4.89) e separando cada termo, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m \left\{ \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \frac{D \Delta t}{2} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx - \right. \\ \left. - \frac{v \Delta t}{2} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx - \frac{\sigma \Delta t}{2} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right\} u^{n+1}, \end{aligned}$$

$$\sum_{j=0}^m \left\{ \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx + \frac{D\Delta t}{2} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx - \right. \\ \left. - \frac{v\Delta t}{2} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx - \frac{\sigma\Delta t}{2} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx \right\} u^{n+1},$$

$$\sum_{j=0}^m \left\{ \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx - \frac{D\Delta t}{2} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + \right. \\ \left. + \frac{v\Delta t}{2} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \frac{\sigma\Delta t}{2} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right\} u_j^n,$$

$$\sum_{j=0}^m \left\{ \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx - \frac{D\Delta t}{2} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + \right. \\ \left. + \frac{v\Delta t}{2} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \frac{\sigma\Delta t}{2} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx \right\} u_j^n,$$

$$\frac{1}{2} \left(\int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1} dx + \int_0^l \varphi_i(x) f^n dx \right)$$

e

$$\frac{1}{2} \left(\int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} f^{n+1} dx + \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} f^n dx \right)$$

O sistema de equações algébricas (4.89) pode agora, ser escrito na forma matricial

$$\left[[\mathbf{M}] + \frac{D\Delta t}{2} [\mathbf{C}^T] - \frac{v\Delta t}{2} [\mathbf{C}^T] - \frac{\sigma\Delta t}{2} [\mathbf{M}] + \tau v [\mathbf{C}] + \frac{\tau v D\Delta t}{2} [\mathbf{K}] - \right. \\ \left. - \frac{\tau v^2 \Delta t}{2} [\mathbf{K}] - \frac{\tau v \sigma \Delta t}{2} [\mathbf{C}] \right] \mathbf{U}^{n+1} = \left[[\mathbf{M}] - \frac{D\Delta t}{2} [\mathbf{C}^T] + \frac{v\Delta t}{2} [\mathbf{C}^T] + \right. \\ \left. + \frac{\sigma\Delta t}{2} [\mathbf{M}] - \tau v [\mathbf{C}] - \frac{\tau v D\Delta t}{2} [\mathbf{K}] + \frac{\tau v^2 \Delta t}{2} [\mathbf{K}] + \frac{\tau v \sigma \Delta t}{2} [\mathbf{C}] \right] \mathbf{U}^n + \\ + [\mathbf{F}] + [\hat{\mathbf{F}}], \quad (4.90)$$

onde as matrizes de massa \mathbf{M} , de amortecimento \mathbf{C} (dependente da velocidade), de rigidez \mathbf{K} e

os vetores de forças globais \mathbf{F} e $\hat{\mathbf{F}}$ e vetores incógnitas \mathbf{U}^{n+1} e \mathbf{U}^n são

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= [M_{ij}]_{m \times m} = \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \\
\mathbf{C} &= [C_{ij}]_{m \times m} = \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx, \\
\mathbf{C}^T &= [C_{ij}^T]_{m \times m} = \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx, \\
\mathbf{K} &= [K_{ij}]_{m \times m} = \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx, \\
\mathbf{F} &= [F_i]_{m \times 1} = \frac{1}{2} \left(\int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1} dx + \int_0^l \varphi_i(x) f^n dx \right), \\
\hat{\mathbf{F}} &= [\hat{F}_i]_{m \times 1} = \frac{1}{2} \left(\int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} f^{n+1} dx + \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} f^n dx \right), \\
\mathbf{U}^{n+1} &= [u_0^{n+1}, u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_{m-1}^{n+1}, u_m^{n+1}]^T, \\
\mathbf{U}^n &= [u_0^n, u_1^n, u_2^n, \dots, u_{m-1}^n, u_m^n]^T.
\end{aligned}$$

4.3.2 SUPG com o R_{22}

Agora consideramos o método implícito multi-estágio de quarta ordem R_{22} como apresentado em (4.16). Denotando a equação (4.16) por \mathbf{B} , um vetor 2×1 , cujos elementos são representados por (4.53) e (4.54). O método de SUPG é aplicado em cada t_{n+1} , $n = 0, 1, 2, \dots, N$ supondo u^n conhecido. Portanto, definimos o conjunto de soluções tentativas $V = H_0^1(0, l)$.

Em seguida, multiplicamos por $\tau v w_x$ em todos os termos da equação (4.53):

$$\begin{aligned}
&\frac{u^{n+1/2}}{\Delta t} \tau v w_x - \frac{u^n}{\Delta t} \tau v w_x - \frac{D}{24} u_{xx}^{n+1} \tau v w_x + \frac{v}{24} u_x^{n+1} \tau v w_x + \frac{\sigma}{24} u^{n+1} \tau v w_x - \\
&-\frac{D}{3} u_{xx}^{n+1/2} \tau v w_x + \frac{19D}{24} u_{xx}^n \tau v w_x + \frac{v}{3} u_x^{n+1/2} \tau v w_x - \frac{19v}{24} u_x^n \tau v w_x + \\
&+\frac{\sigma}{3} u^{n+1/2} \tau v w_x - \frac{19\sigma}{24} u^{n+1/2} \tau v w_x - \frac{5}{24} f^n \tau v w_x - \frac{1}{3} f^{n+1/2} \tau v w_x + \\
&+\frac{1}{24} f^{n+1} \tau v w_x, \quad \forall w \in V,
\end{aligned} \tag{4.91}$$

analogamente, multiplicamos em todos os termos da equação (4.54) por $\tau v w_x$:

$$\begin{aligned}
&\frac{u^{n+1}}{\Delta t} \tau v w_x + \frac{u^{n+1/2}}{\Delta t} \tau v w_x - \frac{5D}{24} u_{xx}^{n+1} \tau v w_x + \frac{5v}{24} u_x^{n+1} \tau v w_x + \frac{5\sigma}{24} u^{n+1} \tau v w_x - \\
&-\frac{D}{3} u_{xx}^{n+1/2} \tau v w_x + \frac{25D}{24} u_{xx}^n \tau v w_x + \frac{v}{3} u_x^{n+1/2} \tau v w_x - \frac{25v}{24} u_x^n \tau v w_x + \\
&+\frac{\sigma}{3} u^{n+1/2} \tau v w_x - \frac{25\sigma}{24} u^n \tau v w_x + \frac{1}{24} f^n \tau v w_x - \frac{1}{3} f^{n+1/2} \tau v w_x + \\
&+\frac{5}{24} f^{n+1} \tau v w_x, \quad \forall w \in V.
\end{aligned} \tag{4.92}$$

Aplicamos a integral em todos os termos da equação (4.91), temos

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \frac{u^{n+1/2}}{\Delta t} \tau v w_x dx - \int_0^l \frac{u^n}{\Delta t} \tau v w_x dx - \int_0^l \frac{D}{24} u_{xx}^{n+1} \tau v w_x dx + \int_0^l \frac{v}{24} u_x^{n+1} \tau v w_x dx + \\
& + \int_0^l \frac{\sigma}{24} u^{n+1} \tau v w_x dx - \int_0^l \frac{D}{3} u_{xx}^{n+1/2} \tau v w_x dx + \int_0^l \frac{19D}{24} u_{xx}^n \tau v w_x dx + \\
& + \int_0^l \frac{v}{3} u_x^{n+1/2} \tau v w_x dx - \int_0^l \frac{19v}{24} u_x^n \tau v w_x dx + \int_0^l \frac{\sigma}{3} u^{n+1/2} \tau v w_x dx - \\
& - \int_0^l \frac{19\sigma}{24} u^{n+1/2} \tau v w_x dx - \int_0^l \frac{5}{24} f^n \tau v w_x dx - \int_0^l \frac{1}{3} f^{n+1/2} \tau v w_x dx + \\
& + \int_0^l \frac{1}{24} f^{n+1} \tau v w_x dx, \quad \forall w \in V,
\end{aligned} \tag{4.93}$$

analogamente, aplicando a integral em todos os termos da equação (4.92)

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \frac{u^{n+1}}{\Delta t} \tau v w_x dx + \int_0^l \frac{u^{n+1/2}}{\Delta t} \tau v w_x dx - \int_0^l \frac{5D}{24} u_{xx}^{n+1} \tau v w_x dx + \int_0^l \frac{5v}{24} u_x^{n+1} \tau v w_x dx + \\
& + \int_0^l \frac{5\sigma}{24} u^{n+1} \tau v w_x dx - \int_0^l \frac{D}{3} u_{xx}^{n+1/2} \tau v w_x dx + \int_0^l \frac{25D}{24} u_{xx}^n \tau v w_x dx + \\
& + \int_0^l \frac{v}{3} u_x^{n+1/2} \tau v w_x dx - \int_0^l \frac{25v}{24} u_x^n \tau v w_x dx + \int_0^l \frac{\sigma}{3} u^{n+1/2} \tau v w_x dx - \\
& - \int_0^l \frac{25\sigma}{24} u^n \tau v w_x dx + \int_0^l \frac{1}{24} f^n \tau v w_x dx - \int_0^l \frac{1}{3} f^{n+1/2} \tau v w_x dx + \\
& + \int_0^l \frac{5}{24} f^{n+1} \tau v w_x dx, \quad \forall w \in V.
\end{aligned} \tag{4.94}$$

Reescrevendo as equações (4.93) e (4.94), segue que

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \left(-\frac{D}{24} u_{xx}^{n+1} + \frac{v}{24} u_x^{n+1} + \frac{\sigma}{24} u^{n+1} \right) \tau v w_x dx + \int_0^l \left(\frac{u^{n+1/2}}{\Delta t} - \frac{D}{3} u_{xx}^{n+1/2} + \frac{v}{3} u_x^{n+1/2} + \right. \\
& \left. + \frac{\sigma}{3} u^{n+1/2} \right) \tau v w_x dx = \int_0^l \left(\frac{u^n}{\Delta t} - \frac{19D}{24} u_{xx}^n + \frac{19v}{24} u_x^n + \frac{19\sigma}{24} u^n \right) \tau v w_x dx + \\
& + \int_0^l \left(\frac{5}{24} f^n + \frac{1}{3} f^{n+1/2} + \frac{1}{24} f^{n+1} \right) \tau v w_x dx, \quad \forall w \in V,
\end{aligned} \tag{4.95}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \left(\frac{u^{n+1}}{\Delta t} - \frac{5D}{24} u_{xx}^{n+1} + \frac{5v}{24} u_x^{n+1} + \frac{5\sigma}{24} u^{n+1} \right) \tau v w_x dx + \int_0^l \left(\frac{u^{n+1/2}}{\Delta t} - \frac{D}{3} u_{xx}^{n+1/2} + \right. \\
& \left. + \frac{v}{3} u_x^{n+1/2} + \frac{\sigma}{3} u^{n+1/2} \right) \tau v w_x dx = \int_0^l \left(-\frac{25D}{24} u_{xx}^n + \frac{25v}{24} u_x^n + \right. \\
& \left. + \frac{25\sigma}{24} u^n \right) \tau v w_x dx + \int_0^l \left(-\frac{1}{24} f^n + \frac{1}{3} f^{n+1/2} - \frac{5}{24} f^{n+1} \right) \tau v w_x dx, \quad \forall w \in V.
\end{aligned} \tag{4.96}$$

Assim, podemos definir

$$\begin{aligned} \hat{a}_{SUPG}(u^{n+1}, w) &= \int_0^l \left(-\frac{D}{24}u_x^{n+1} + \frac{v}{24}u_x^{n+1} + \frac{\sigma}{24}u^{n+1} \right) \tau v w_x dx + \\ &+ \int_0^l \left(\frac{u^{n+1/2}}{\Delta t} - \frac{D}{3}u_{xx}^{n+1/2} + \frac{v}{3}u_x^{n+1/2} + \frac{\sigma}{3}u^{n+1/2} \right) \tau v w_x dx, \end{aligned} \quad (4.97)$$

$$\begin{aligned} \hat{F}_{SUPG}(w) &= \int_0^l \left(\frac{u^n}{\Delta t} - \frac{19D}{24}u_{xx}^n + \frac{19v}{24}u_x^n + \frac{19\sigma}{24}u^n \right) \tau v w_x dx + \\ &+ \int_0^l \left(\frac{5}{24}f^n + \frac{1}{3}f^{n+1/2} + \frac{1}{24}f^{n+1} \right) \tau v w_x dx, \end{aligned} \quad (4.98)$$

$$\begin{aligned} \hat{b}_{SUPG}(u^{n+1}, w) &= \int_0^l \left(\frac{u^{n+1}}{\Delta t} - \frac{5D}{24}u_{xx}^{n+1} + \frac{5v}{24}u_x^{n+1} + \frac{5\sigma}{24}u^{n+1} \right) \tau v w_x dx + \\ &+ \int_0^l \left(\frac{u^{n+1/2}}{\Delta t} - \frac{D}{3}u_{xx}^{n+1/2} + \frac{v}{3}u_x^{n+1/2} + \frac{\sigma}{3}u^{n+1/2} \right) \tau v w_x dx, \end{aligned} \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned} \hat{G}_{SUPG}(w) &= \int_0^l \left(-\frac{25D}{24}u_{xx}^n + \frac{25v}{24}u_x^n + \frac{25\sigma}{24}u^n \right) \tau v w_x dx + \\ &+ \int_0^l \left(-\frac{1}{24}f^n + \frac{1}{3}f^{n+1/2} - \frac{5}{24}f^{n+1} \right) \tau v w_x dx \end{aligned} \quad (4.100)$$

para todo $w \in V$.

Logo, das definições (4.61)-(4.64), (4.97)-(4.100) podemos resolver os seguintes problemas variacionais: Achar $u^{n+1} \in V$ tal que

$$a_G(u^{n+1}, w) + \hat{a}_{SUPG}(u^{n+1}, w) = F_G(w) + \hat{F}_{SUPG}(w), \quad (4.101)$$

$$b_G(u^{n+1}, w) + \hat{b}_{SUPG}(u^{n+1}, w) = G_G(w) + \hat{G}_{SUPG}(w), \quad (4.102)$$

para todo $w \in V$. Afim de resolver os problemas aproximados utilizamos o método estabilizado SUPG, consideramos o mesmo subespaço V_h como definido no Capítulo 3.

Os problemas agora consistem em determinarmos uma solução aproximada $u_h^{n+1} = u_h^{n+1}(\cdot, t_{n+1}) \in V_h$ para $n = 0, 1, 2, \dots, N$ dada por

$$u_h^{n+1} = \sum_{j=0}^m \varphi_j(x) u_j^{n+1} \quad \forall \varphi_j \in V_h. \quad (4.103)$$

Assim, os problemas aproximados (4.101) e (4.102) são determinados por $u_h^{n+1} \in V_h$ tal que

$$a_G(u_h^{n+1}, w_h) + \hat{a}_{SUPG}(u_h^{n+1}, w_h) = F_G(w_h) + \hat{F}_{SUPG}(w_h), \quad \forall w_h \in V, \quad (4.104)$$

$$b_G(u_h^{n+1}, w_h) + \hat{b}_{SUPG}(u_h^{n+1}, w_h) = G_G(w_h) + \hat{G}_{SUPG}(w_h), \quad \forall w_h \in V. \quad (4.105)$$

Da solução aproximada (4.103) e com as equações (4.104) e (4.105), mostra-se válida a igualdade $w_h = \varphi_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$, definida como função teste. Assim as equações (4.104) e (4.105) podem ser expressas como

$$\begin{aligned} a_G \left(\sum_{j=0}^m \varphi_j(x) u_j^{n+1}, \varphi_i(x) \right) + \hat{a}_{SUPG} \left(\sum_{j=0}^m \varphi_j(x) u_j^{n+1}, \varphi_i(x) \right) &= \\ = F_G(\varphi_i(x)) + \hat{F}_{SUPG}(\varphi_i(x)), & \end{aligned} \quad (4.106)$$

$$\begin{aligned} b_G \left(\sum_{j=0}^m \varphi_j(x) u_j^{n+1}, \varphi_i(x) \right) + \hat{b}_{SUPG} \left(\sum_{j=0}^m \varphi_j(x) u_j^{n+1}, \varphi_i(x) \right) &= \\ = G_G(\varphi_i(x)) + \hat{G}_{SUPG}(\varphi_i(x)), & \end{aligned} \quad (4.107)$$

para todo $\varphi_i(x) \in V_h$. Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m a_G(\varphi_j(x), \varphi_i(x)) u_j^{n+1} + \sum_{j=0}^m \hat{a}_{SUPG}(\varphi_j(x), \varphi_i(x)) u_j^{n+1} &= \\ = F_G(\varphi_i(x)) + \hat{F}_{SUPG}(\varphi_i(x)), & \end{aligned} \quad (4.108)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m b_G(\varphi_j(x), \varphi_i(x)) u_j^{n+1} + \sum_{j=0}^m \hat{b}_{SUPG}(\varphi_j(x), \varphi_i(x)) u_j^{n+1} &= \\ = G_G(\varphi_i(x)) + \hat{G}_{SUPG}(\varphi_i(x)), & \end{aligned} \quad (4.109)$$

para todo $\varphi_i(x) \in V_h$.

A equações (4.108) e (4.109) representam sistemas de equações algébricas com m equações e m incógnitas $u_0, u_1, u_2, \dots, u_m$.

As definições (4.61)-(4.64), (4.97)-(4.100) levam aos seguintes sistemas de equações algébricas:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(-\frac{D}{24} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \frac{v}{24} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{\sigma}{24} \varphi_j(x) \right) \varphi_i(x) u_j^{n+1} dx + \\ + \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\frac{\varphi_j(x)}{\Delta t} - \frac{D}{3} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \frac{v}{3} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{\sigma}{3} \varphi_j(x) \right) \varphi_i(x) u_j^{n+1/2} dx = \\ = \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\frac{\varphi_j(x)}{\Delta t} - \frac{19D}{24} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \frac{19v}{24} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{19\sigma}{24} \varphi_j(x) \right) \varphi_i(x) u_j^n dx + \\ + \int_0^l \left(\frac{5}{24} f^n - \frac{1}{3} f^{n+1/2} + \frac{1}{24} f^{n+1} \right) \varphi_i(x) dx, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h, \end{aligned} \quad (4.110)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(-\frac{D}{24} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \frac{v}{24} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{\sigma}{24} \varphi_j(x) \right) \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} u_j^{n+1} dx + \\
& + \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\frac{\varphi_j(x)}{\Delta t} - \frac{D}{3} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \frac{v}{3} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \right. \\
& \left. + \frac{\sigma}{3} \varphi_j(x) \right) \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} u_j^{n+1/2} dx = \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\frac{\varphi_j(x)}{\Delta t} - \frac{19D}{24} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \right. \\
& \left. + \frac{19v}{24} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{19\sigma}{24} \varphi_j(x) \right) \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} u_j^n dx + \int_0^l \left(\frac{5}{24} f^n - \frac{1}{3} f^{n+1/2} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{24} f^{n+1} \right) \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} dx, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h,
\end{aligned} \tag{4.111}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\frac{\varphi_j(x)}{\Delta t} - \frac{5D}{24} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \frac{5v}{24} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{5\sigma}{24} \varphi_j(x) \right) \varphi_i(x) u_j^{n+1} dx + \\
& + \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\frac{\varphi_j(x)}{\Delta t} - \frac{D}{3} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \frac{v}{3} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{\sigma}{3} \varphi_j(x) \right) \varphi_i(x) u_j^{n+1/2} dx = \\
& = \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(-\frac{25D}{24} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \frac{25v}{24} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{25v}{24} \varphi_j(x) \right) \varphi_i(x) u_j^n dx + \\
& + \int_0^l \left(-\frac{1}{24} f^n + \frac{1}{3} f^{n+1/2} + \frac{5}{24} f^{n+1} \right) \varphi_i(x) dx, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h
\end{aligned} \tag{4.112}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\frac{\varphi_j(x)}{\Delta t} - \frac{5D}{24} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \frac{5v}{24} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{5\sigma}{24} \varphi_j(x) \right) \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} u_j^{n+1} dx + \\
& + \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\frac{\varphi_j(x)}{\Delta t} - \frac{D}{3} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \frac{v}{3} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{\sigma}{3} \varphi_j(x) \right) \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} u_j^{n+1/2} dx = \\
& = \sum_{j=0}^m \int_0^l \left(-\frac{25D}{24} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} + \frac{25v}{24} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{25v}{24} \varphi_j(x) \right) \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} u_j^n dx + \\
& + \int_0^l \left(-\frac{1}{24} f^n + \frac{1}{3} f^{n+1/2} + \frac{5}{24} f^{n+1} \right) \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} dx, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h
\end{aligned} \tag{4.113}$$

para $i = 0, 1, 2, \dots, m$.

Considerando a equação (4.110) e separando cada termo, temos que:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^m \left\{ -\frac{D}{24} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + \frac{v}{24} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \right. \\
& \left. + \frac{\sigma}{24} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right\} u_j^{n+1}, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h,
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=0}^m \left\{ \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx - \frac{D\Delta t}{3} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + \frac{v\Delta t}{3} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \frac{\sigma\Delta t}{3} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right\} u_j^{n+1/2}, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h,$$

$$\sum_{j=0}^m \left\{ \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx - \frac{19D\Delta t}{24} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + \frac{19v\Delta t}{24} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \frac{19\sigma\Delta t}{24} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right\} u_j^n, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h,$$

e

$$\frac{5}{24} \int_0^l \varphi_i(x) f^n dx - \frac{1}{3} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1/2} dx + \frac{1}{24} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1} dx, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h$$

para $i = 0, 1, 2, \dots, m$.

Agora, considerando a equação (4.111) e separando cada termo, temos que:

$$\sum_{j=0}^m \left\{ -\frac{D}{24} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + \frac{v}{24} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \frac{\sigma}{24} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx \right\} u_j^{n+1}, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h,$$

$$\sum_{j=0}^m \left\{ \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx - \frac{D\Delta t}{3} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + \frac{v\Delta t}{3} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \frac{\sigma\Delta t}{3} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx \right\} u_j^{n+1/2}, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h,$$

$$\sum_{j=0}^m \left\{ \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx - \frac{19D\Delta t}{24} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + \frac{19v\Delta t}{24} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \frac{19\sigma\Delta t}{24} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx \right\} u_j^n, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h,$$

e

$$\frac{5}{24} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} f^n dx - \frac{1}{3} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} f^{n+1/2} dx + \frac{1}{24} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} (x) f^{n+1} dx, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h$$

para $i = 0, 1, 2, \dots, m$. Assim, os sistemas de equações algébricas (4.110) e (4.111) podem ser

escritos na forma matricial como

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{D}{24} [\mathbf{C}^T] + \frac{v}{24} [\mathbf{C}^T] + \frac{\sigma}{24} [\mathbf{M}] - \frac{D\tau v}{24} [\mathbf{K}] + \frac{\tau v^2}{24} [\mathbf{K}] + \frac{\sigma\tau v}{24} [\mathbf{C}] \right] \mathbf{U}^{n+1} + [[\mathbf{M}] - \\
& + \frac{D\Delta t}{3} [\mathbf{C}^T] + \frac{v\Delta t}{3} [\mathbf{C}^T] + \frac{\sigma\Delta t}{3} [\mathbf{M}] + \tau v [\mathbf{C}] - \frac{D\tau v\Delta t}{3} [\mathbf{K}] + \frac{\tau v^2\Delta t}{3} [\mathbf{K}] + \\
& + \frac{\sigma\tau v\Delta t}{3} [\mathbf{C}]] \mathbf{U}^{n+1/2} = \left[[\mathbf{M}] - \frac{19D\Delta t}{24} [\mathbf{C}^T] + \frac{19v\Delta t}{24} [\mathbf{C}^T] + \frac{19\sigma\Delta t}{24} [\mathbf{M}] \right] \mathbf{U}^n + \\
& + [\mathbf{F}] + [\hat{\mathbf{F}}]. \tag{4.114}
\end{aligned}$$

Analogamente, consideremos a equação (4.112) e separando cada termo, temos

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^m \left\{ \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx - \frac{5D\Delta t}{24} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + \right. \\
& \left. + \frac{5v\Delta t}{24} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \frac{5\sigma\Delta t}{24} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right\} u_j^{n+1}, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^m \left\{ \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx - \frac{D\Delta t}{3} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + \right. \\
& \left. + \frac{v\Delta t}{3} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \frac{\sigma\Delta t}{3} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right\} u_j^{n+1/2}, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^m \int_0^l \left\{ -\frac{25D}{24} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + \frac{25v}{24} \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \right. \\
& \left. + \frac{25\sigma}{24} \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right\} u_j^n, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h,
\end{aligned}$$

e

$$-\frac{1}{24} \int_0^l \varphi_i(x) f^n dx + \frac{1}{3} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1/2} dx + \frac{5}{24} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1} dx, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h$$

para $i = 0, 1, 2, \dots, m$.

E por último, considerando a equação (4.113) e separando cada termo, temos

que:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^m \left\{ \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx - \frac{5D\Delta t}{24} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + \right. \\
& \left. + \frac{5v\Delta t}{24} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \frac{5\sigma\Delta t}{24} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx \right\} u_j^{n+1}, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h,
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=0}^m \left\{ \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx - \frac{D\Delta t}{3} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + \right. \\ \left. + \frac{v\Delta t}{3} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \frac{\sigma\Delta t}{3} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx \right\} u_j^{n+1/2}, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h,$$

$$\sum_{j=0}^m \int_0^l \left\{ -\frac{25D}{24} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} dx + \frac{25v}{24} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx + \right. \\ \left. + \frac{25\sigma}{24} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx \right\} u_j^n, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h,$$

e

$$-\frac{1}{24} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} f^n dx + \frac{1}{3} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} f^{n+1/2} dx + \frac{5}{24} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1} dx, \quad \forall \varphi_i(x) \in V_h.$$

para $i = 0, 1, 2, \dots, m$. Equivalentemente, os sistemas de equações algébricas (4.112) e (4.113) podem ser escritos na forma matricial como

$$\left[[\mathbf{M}] - \frac{5D\Delta t}{24} [\mathbf{C}^T] + \frac{5v\Delta t}{24} [\mathbf{C}^T] + \frac{5\sigma\Delta t}{24} [\mathbf{M}] + \tau v [\mathbf{C}] - \frac{5D\tau v\Delta t}{24} [\mathbf{K}] + \frac{5\tau v^2\Delta t}{24} [\mathbf{K}] + \right. \\ \left. - \frac{5\sigma\tau v\Delta t}{24} [\mathbf{C}] \right] \mathbf{U}^{n+1} + \left[[\mathbf{M}] - \frac{D\Delta t}{3} [\mathbf{C}^T] + \frac{v\Delta t}{3} [\mathbf{C}^T] + \frac{\sigma\Delta t}{3} [\mathbf{M}] + \tau v [\mathbf{C}] - \right. \\ \left. - \frac{D\tau v\Delta t}{3} [\mathbf{K}] + \frac{\tau v^2\Delta t}{3} [\mathbf{K}] + \frac{\sigma\tau v\Delta t}{3} [\mathbf{C}] \right] \mathbf{U}^{n+1/2} = \left[-\frac{25D}{24} [\mathbf{C}^T] + \frac{25v}{24} [\mathbf{C}^T] + \right. \\ \left. + \frac{25\sigma}{24} [\mathbf{M}] - \frac{25D\tau v}{24} [\mathbf{K}] + \frac{25\tau v^2}{24} [\mathbf{K}] + \frac{25\sigma\tau v}{24} [\mathbf{C}] \right] \mathbf{U}^n + [\mathbf{G}] + [\hat{\mathbf{G}}]. \quad (4.115)$$

Nas equações obtidas em (4.114) e (4.115) representamos, as matrizes de massa \mathbf{M} , de amortecimento dependente da velocidade \mathbf{C} , de rigidez \mathbf{K} e os vetores de forças globais \mathbf{F} , $\hat{\mathbf{F}}$, \mathbf{G} e $\hat{\mathbf{G}}$ e

os vetores incógnitas \mathbf{U}^{n+1} , $\mathbf{U}^{n+1/2}$ e \mathbf{U}^n por

$$\mathbf{M} = [M_{ij}]_{m \times m} = \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx,$$

$$\mathbf{C} = [C_{ij}]_{m \times m} = \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx,$$

$$\mathbf{C}^T = [C_{ij}]_{m \times m}^T = \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx,$$

$$\mathbf{K} = [K_{ij}]_{m \times m} = \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx,$$

$$\mathbf{F} = [F_i]_{m \times 1} = \frac{5}{24} \int_0^l \varphi_i(x) f^n dx - \frac{1}{3} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1/2} dx + \frac{1}{24} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1} dx,$$

$$\hat{\mathbf{F}} = [\hat{F}_i]_{m \times 1} = \frac{5}{24} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} f^n dx - \frac{1}{3} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} f^{n+1/2} dx + \frac{1}{24} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} (x) f^{n+1} dx,$$

$$\mathbf{G} = [G_i]_{m \times 1} = -\frac{1}{24} \int_0^l \varphi_i(x) f^n dx + \frac{1}{3} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1/2} dx + \frac{5}{24} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1} dx,$$

$$\hat{\mathbf{G}} = [\hat{G}_i]_{m \times 1} = -\frac{1}{24} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} f^n dx + \frac{1}{3} \int_0^l \tau v \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} f^{n+1/2} dx + \frac{5}{24} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1} dx,$$

$$\mathbf{U}^{n+1} = [u_0^{n+1}, u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_{m-1}^{n+1}, u_m^{n+1}]^T,$$

$$\mathbf{U}^{n+1/2} = [u_0^{n+1/2}, u_1^{n+1/2}, u_2^{n+1/2}, \dots, u_{m-1}^{n+1/2}, u_m^{n+1/2}]^T,$$

$$\mathbf{U}^n = [u_0^n, u_1^n, u_2^n, \dots, u_{m-1}^n, u_m^n]^T.$$

5 RESULTADOS NUMÉRICOS PARA A EQUAÇÃO 1D DE CONVECÇÃO-DIFUSÃO-REAÇÃO

Neste capítulo apresentamos os resultados numéricos para a equação 1D de convecção-difusão-reação e um exemplo particular para a equação 1D de convecção-difusão. Apresentamos análises quanto à influência dos números de Péclet, de Courant-Friedrichs-Lewy, da influência da malha e dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados MEFMQ, MEFG e SUPG. Fazemos uma análise do erro utilizando a norma L^2 , comparando as soluções numéricas com a solução analítica dos exemplos avaliados.

A relação entre os fenômenos convectivos, difusivos e reativos pode ser caracterizada pelo número de Péclet, dado por

$$Pe = \frac{vh}{2D}, \quad (5.1)$$

onde v é o coeficiente de velocidade; D é o coeficiente de difusão; $\Delta x = h$ é o comprimento característico na direção de x . A condição CFL é geralmente estabelecida para os termos em EDPs que representam a convecção [12]. No caso unidimensional a condição CFL é dada por

$$C = \frac{v\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (5.2)$$

onde Δt é o passo de tempo e C é chamado número de Courant. Devemos ressaltar que uma condição para obter estabilidade é que $C \leq 1$ [8, 12].

Por outro lado, se conhecemos a solução analítica de um dado problema, podemos calcular diretamente o erro na norma $L^2(0, l)$. Seja o erro definido por

$$E(x) = u_h(x) - u_{an}(x) \quad (5.3)$$

onde $u_h(x)$ é a solução aproximada e $u_{an}(x)$ é a solução analítica.

A norma em $L^2(0, l)$ do erro E é definida como

$$\|E\|_0 = \left(\int_0^l |E|^2 dx \right)^{1/2} \quad (5.4)$$

e pode ser calculada na forma discreta [38], como segue

$$\|E\|_0 = \left(h \sum_{j=0}^m (E_{j+1} - E_j)^2 \right)^{1/2} \quad (5.5)$$

onde $E_j = E(x_j)$. Em particular, neste trabalho vamos utilizar a norma do erro relativo dada

por [4],

$$\|E\| = \left(h \sum_{j=0}^m \left(\frac{(E_{j+1} - E_j)^2}{E_{j+1}^2} \right) \right)^{1/2} \quad (5.6)$$

onde $E_j = E(x_j)$.

5.1 EQUAÇÃO DE CONVECÇÃO-DIFUSÃO-REAÇÃO

Seja uma distribuição gaussiana para a equação 1D de convecção-difusão-reação (3.1)- (3.3), com $f(x, t) = 0$ e condição inicial dada por

$$u(x, 0) = \exp \left\{ - \left(\frac{x - x_0}{\ell} \right)^2 \right\} \quad (5.7)$$

cujas solução analítica, para o termo de decaimento linear $-\sigma u$, no domínio $-\infty < x < \infty$, é dada por [12]

$$u(x, t) = \frac{\exp(-\sigma t)}{\gamma(t)} \exp \left\{ - \left(\frac{x - x_0 - vt}{\ell \gamma(t)} \right)^2 \right\} \quad (5.8)$$

onde $\gamma(t) = \sqrt{1 + \frac{4Dt}{\ell^2}}$. Consideremos para este exemplo $0 \leq x \leq l$, $l = 2$ como sendo o domínio do problema 1D.

Para ilustrar os resultados numéricos desta seção, utilizamos $x_0 = 1/4$, $\ell = 1/25$, $v = 1$ e $\sigma = 0.1$ e um tempo total de simulação de $t = 1$.

Apresentamos os resultados dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados as formulações MEEG, MEFMQ e SUPG utilizando 100 elementos lineares, o que equivale a $\Delta x = 0.02$, para três conjuntos de valores de difusão, o que corresponde aos números de Péclet $Pe = 1$, $Pe = 10$ e $Pe = 100$ e avaliamos também situações onde $C = 1$ e $C = 1.5$, considerando o método implícito de segunda ordem R_{11} , Figuras 5.1-5.3, e $C = 1.5$ e $C = 2.5$ considerando o método implícito de quarta ordem R_{22} , Figuras 5.4-5.6.

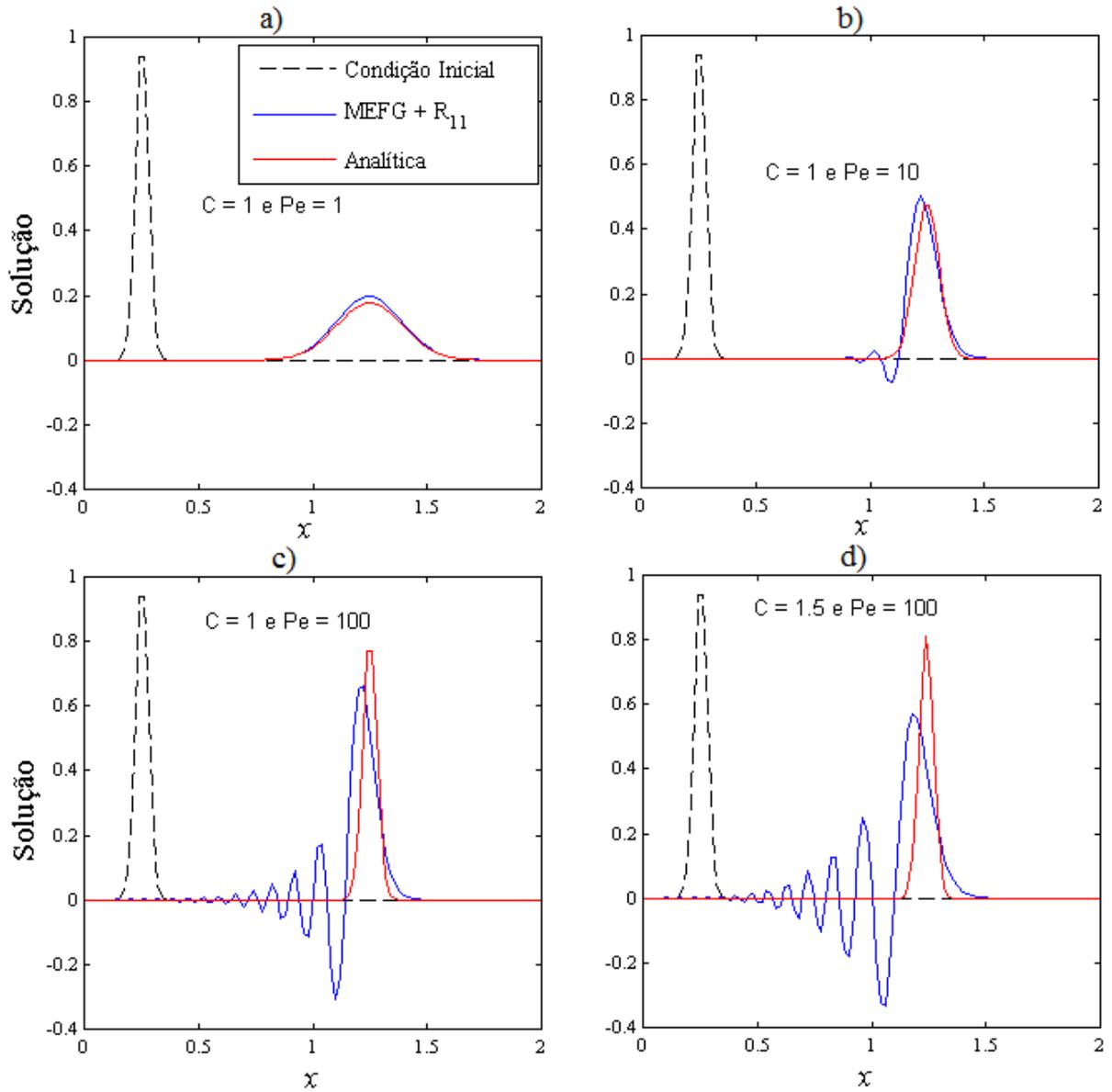


Figura 5.1: A formulação MEFG+ R_{11} para a equação 1D de convecção-difusão-reação.

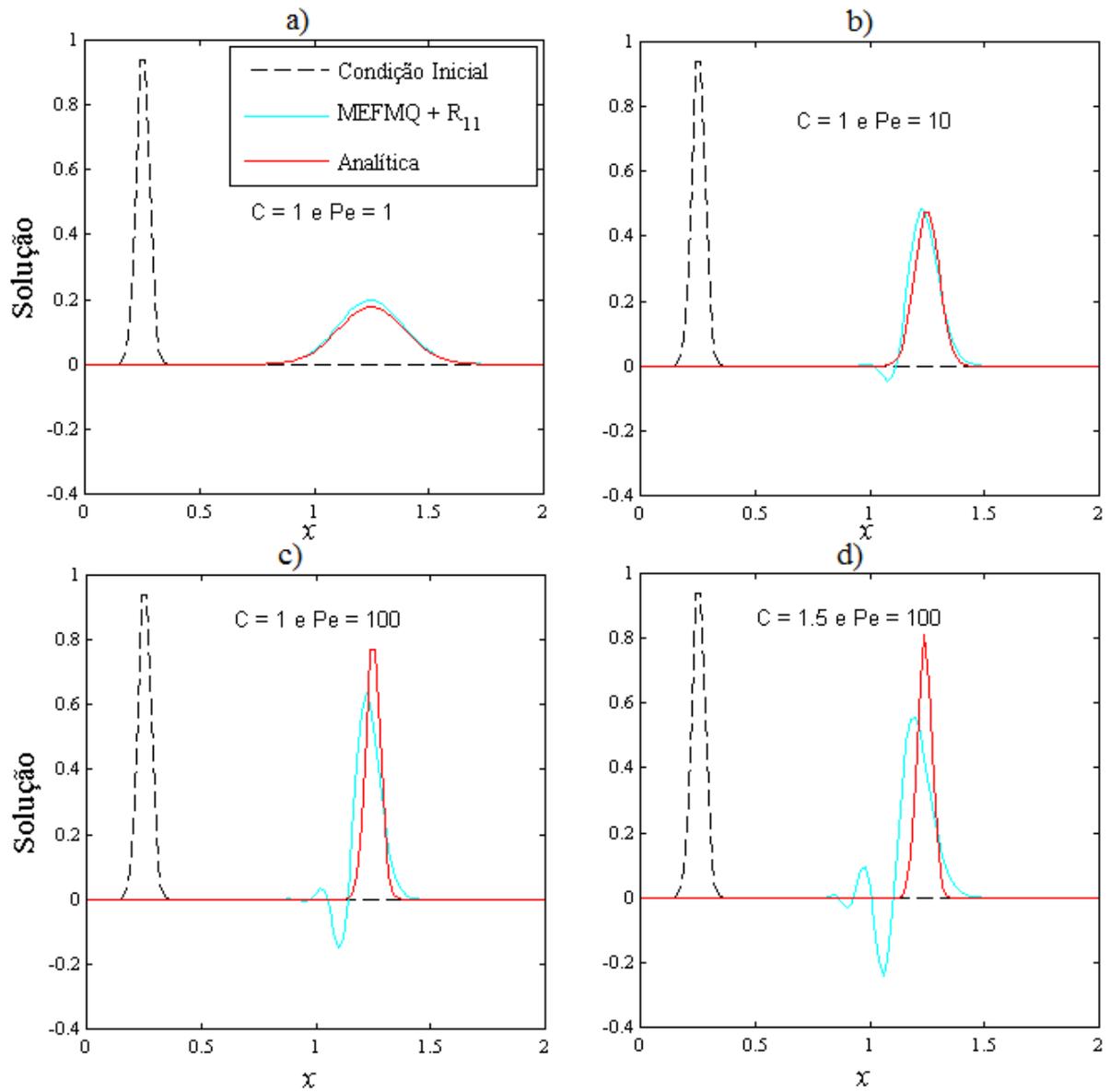


Figura 5.2: A formulação MEFMQ+ R_{11} para a equação 1D de convecção-difusão-reação.

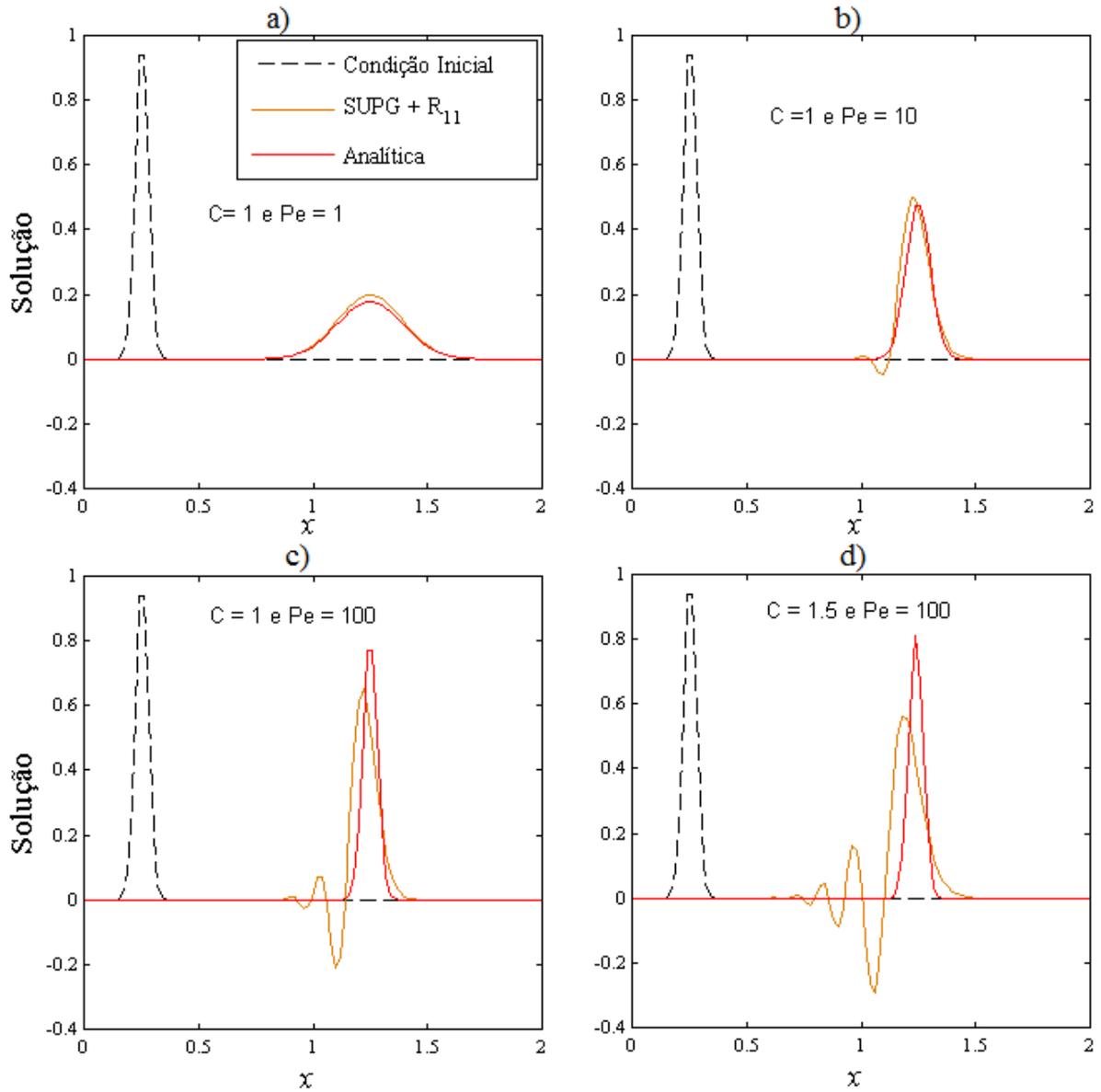


Figura 5.3: A formulação SUPG+ R_{11} para a equação 1D de convecção-difusão-reação.

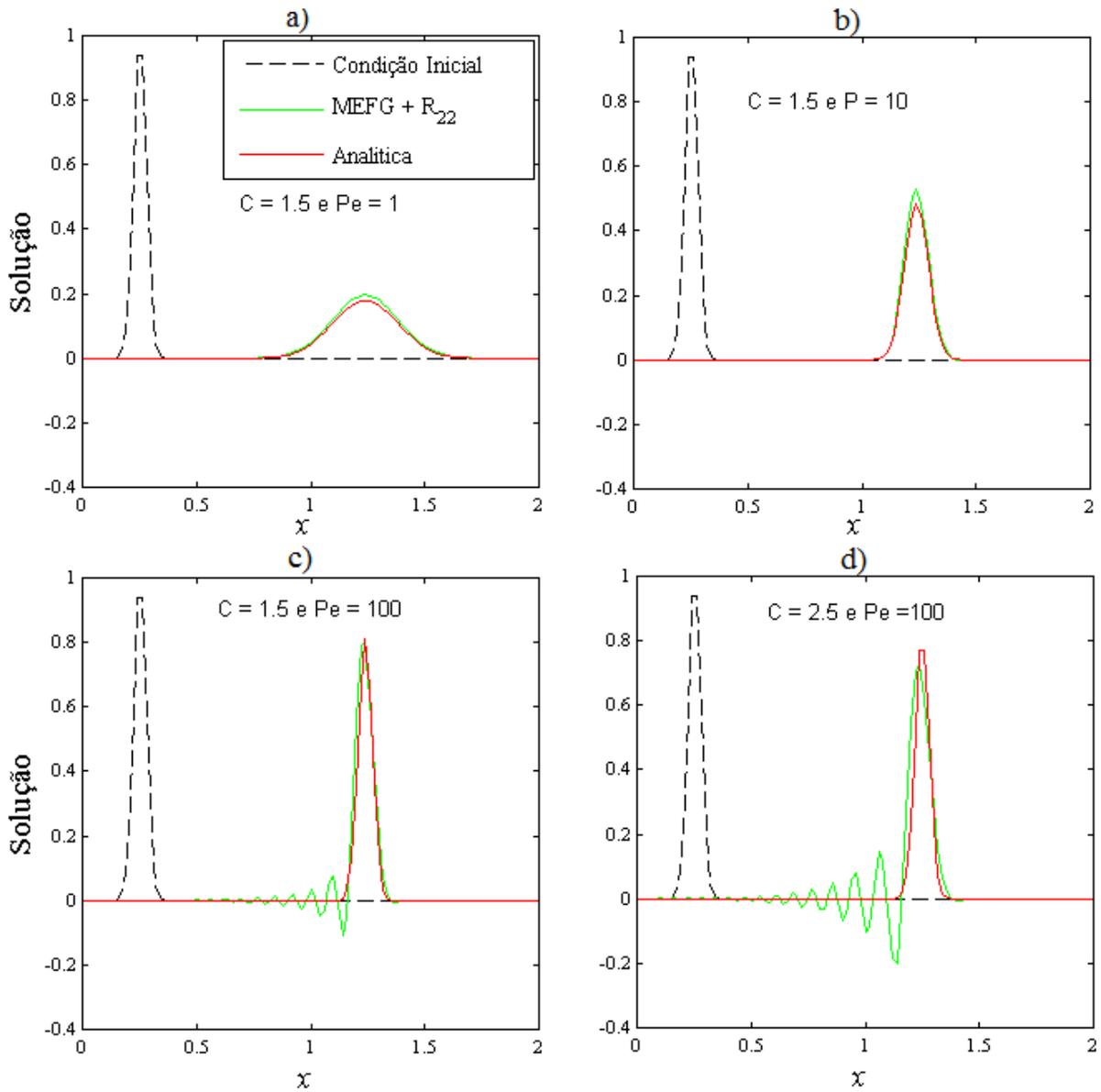


Figura 5.4: A formulação MEFG+ R_{22} para a equação 1D de convecção-difusão-reação.

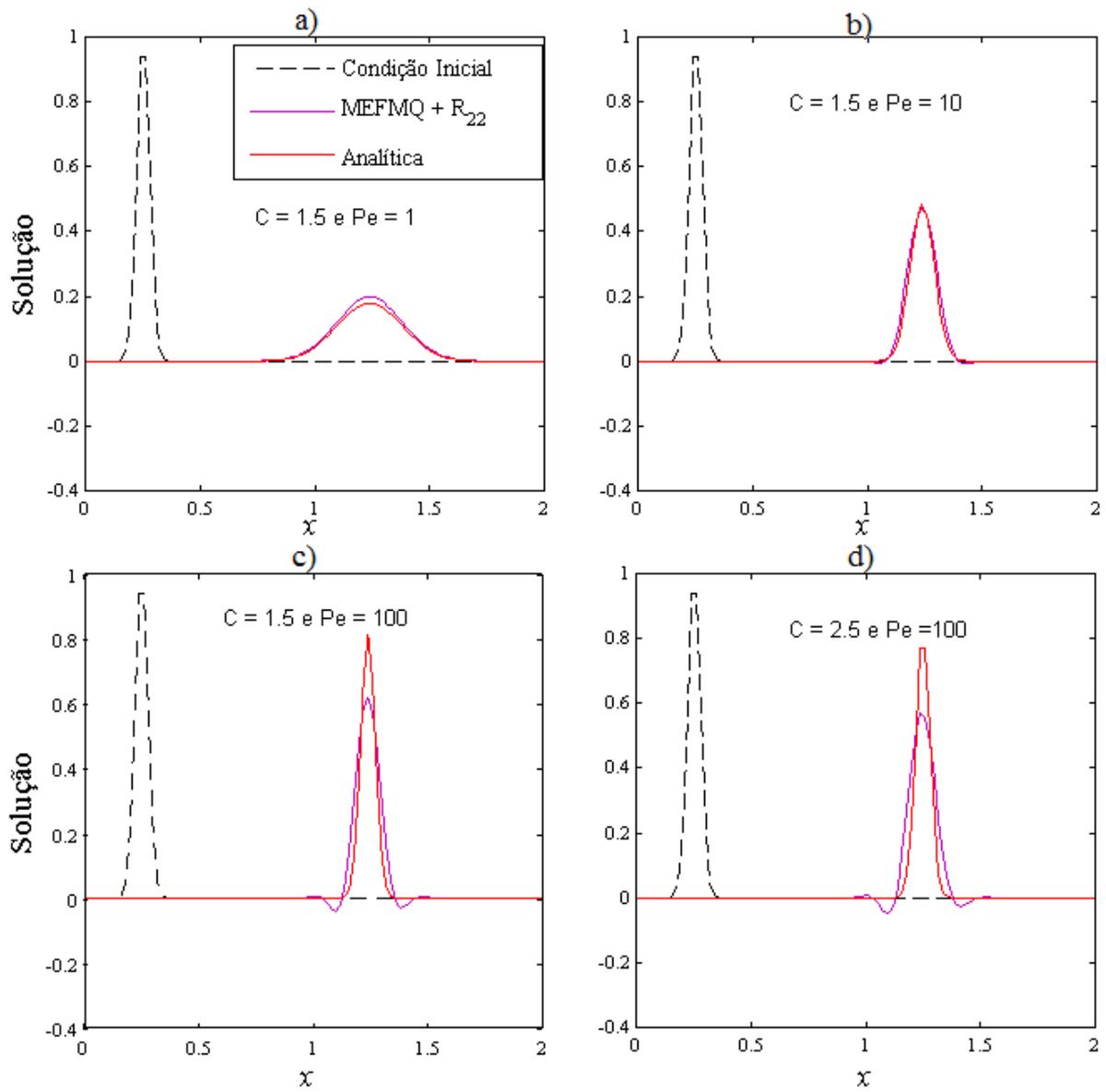


Figura 5.5: A formulação MEFMQ+ R_{22} para a equação 1D de convecção-difusão-reação.

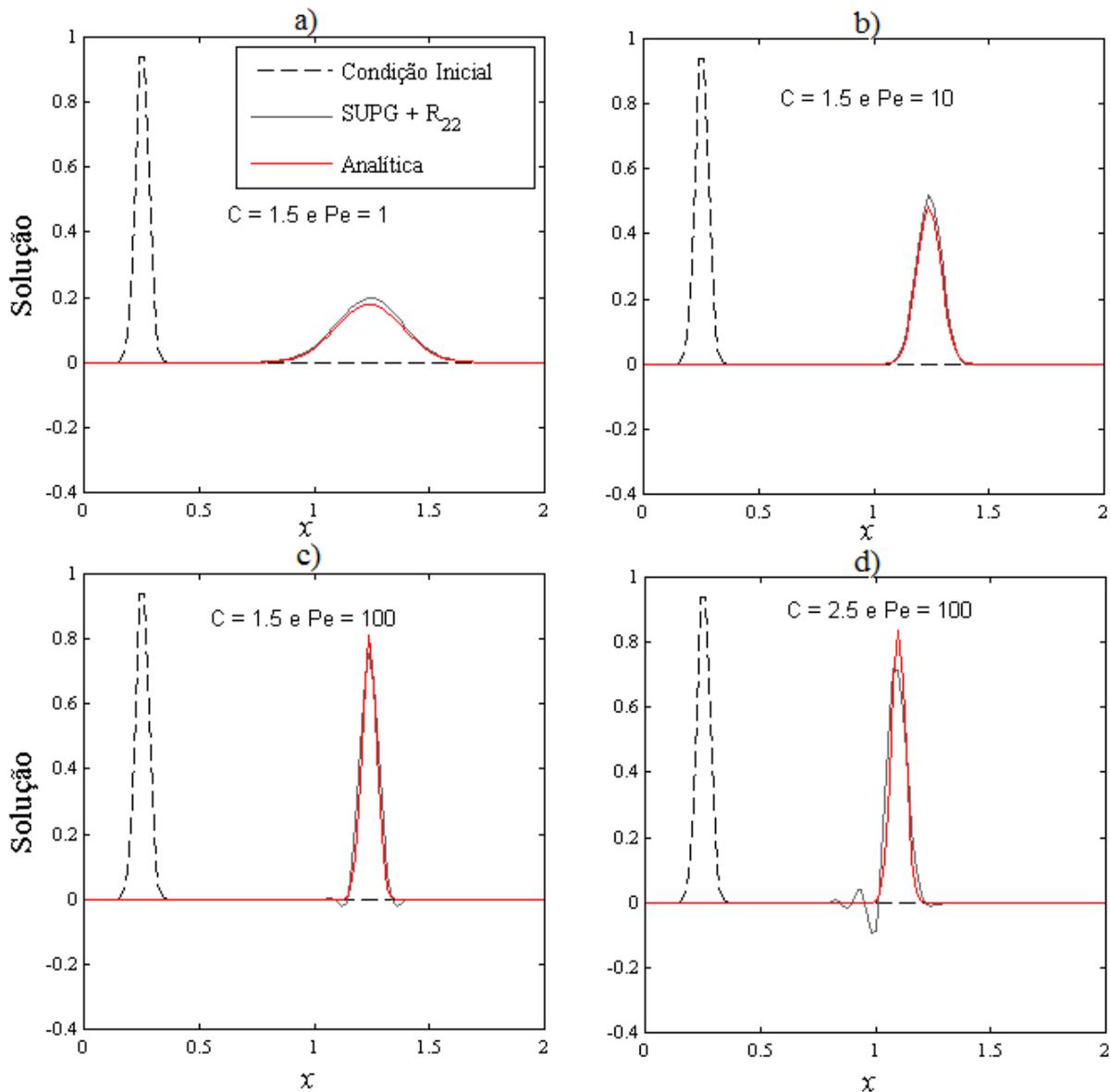


Figura 5.6: A formulação SUPG+ R_{22} para a equação 1D de convecção-difusão-reação.

Observamos nas Figuras 5.1a-c, que o aproximante de Padé R_{11} adicionado ao MEFM para o número de Courant $C = 1$ apresenta oscilações significativas conforme o número de Péclet aumenta (o que já era esperado pois o método de Galerkin é propenso a apresentar oscilações quando a convecção é dominante). Os resultados tornam-se piores, considerando ainda a análise para $Pe = 100$, ao aumentarmos o número de Courant de $C = 1$ para $C = 1.5$, como pode ser verificado na Figura 5.1-d.

Entretanto, observamos nas Figuras 5.2 e 5.3, que o aproximante de Padé R_{11} adicionado às formulações MEFMQ e SUPG, para os números de Courant $C = 1$, e $C = 1.5$, continuam apresentando oscilações, porém não tão significativas quanto às apresentadas nas Figuras 5.1. Desta forma, observamos que o método implícito multi-estágio de segunda ordem, R_{11} , adicionado às formulações MEFM, MEFMQ e SUPG, para situações onde a convecção é dominante, como ilustrados nas Figuras 5.1b-d a 5.3b-d, não apresentou um bom desempenho.

Um desempenho melhor é observado no método implícito multi-estágio de quarta ordem, R_{22} , adicionado as formulações MEEG, MEEMQ e SUPG, para todos os valores de Péclet, mesmo aumentando o passo de tempo, ou seja, considerando números de Courant maiores, como por exemplo, $C = 1.5$ e $C = 2.5$, como ilustrados nas Figuras 5.4-5.6. Obviamente, quando o passo de tempo é grande os resultados numéricos são degenerados para MEEG+ R_{22} e SUPG+ R_{22} , Figura 5.4d e Figura 5.6d, respectivamente, porém muito menos para SUPG+ R_{22} , devido ao parâmetro de estabilização. Contudo o MEEMQ+ R_{22} para $C = 2.5$ eliminou parcialmente as oscilações, porém altos valores Pe ainda apresenta picos, como pode ser verificado na Figura 5.5d.

5.1.1 A influência do número de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)

Com o propósito de deixar claro a ação da condição CFL, avaliamos a influência do número de Courant-Friedrichs-Lewy de tal forma a garantir a estabilidade dos métodos mesmo em situações onde $C > 1$, para a situação onde a convecção é dominante, quando $D = 1 \times 10^{-4}$. Para isto consideramos três valores para o número de Courant, sendo $C = 0.5$, $C = 1$ e $C = 1.5$ e apresentamos os resultados dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados as formulações MEEG, MEEMQ e SUPG, assim como uma análise sobre a região de convergência das soluções numéricas apresentadas, utilizando a norma L^2 .

Nas Figuras 5.7-5.9 apresentamos os resultados dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados as formulações MEEG, MEEMQ e SUPG para três valores do número de Courant, sendo $C = 0.5$, $C = 1$ e $C = 1.5$.

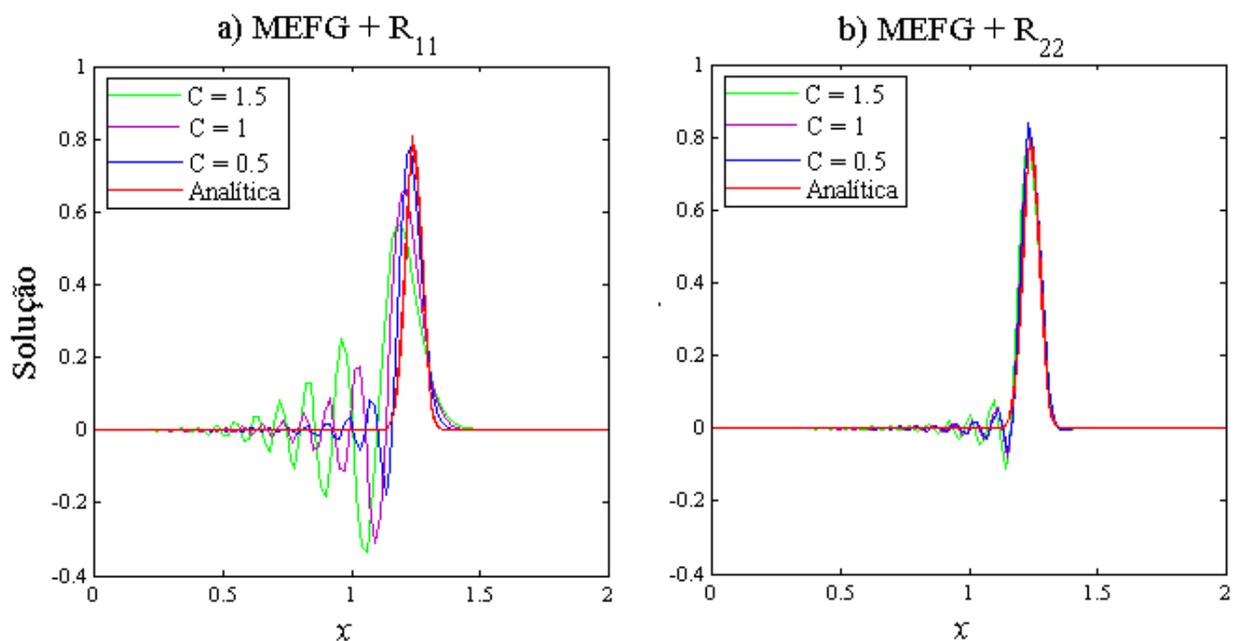


Figura 5.7: As condições CFL nas soluções numéricas a) MEEG+ R_{11} e b) MEEG+ R_{22} .

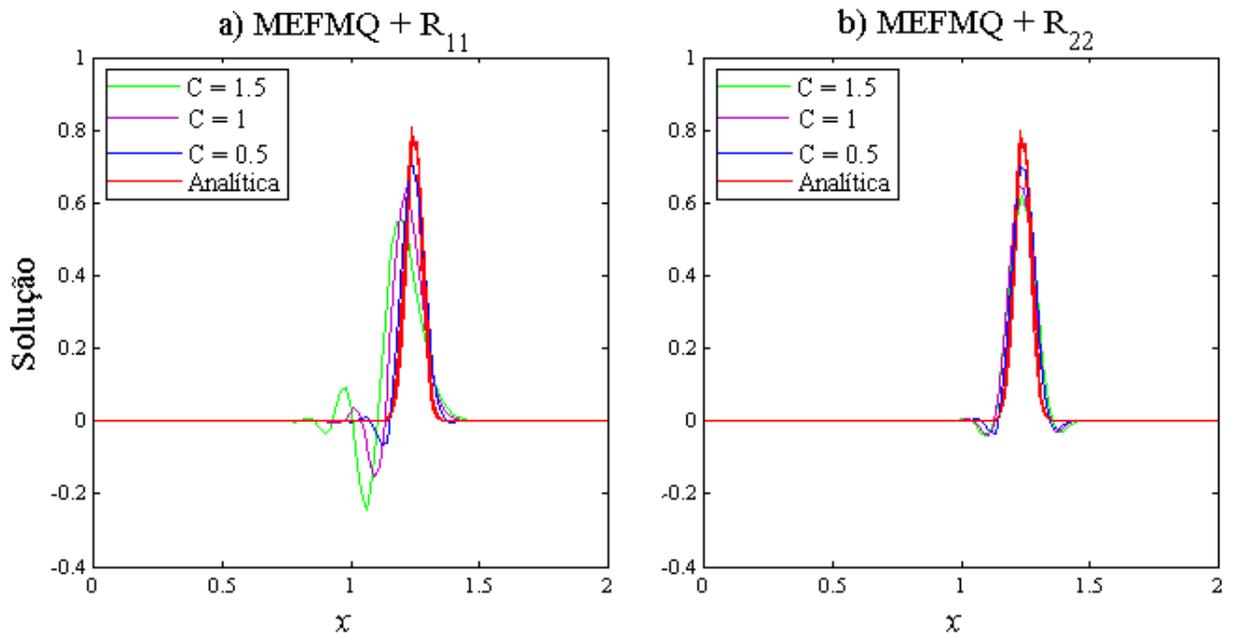


Figura 5.8: As condições CFL nas soluções numéricas a) MEFMQ+ R_{11} e b) MEFMQ+ R_{22} .

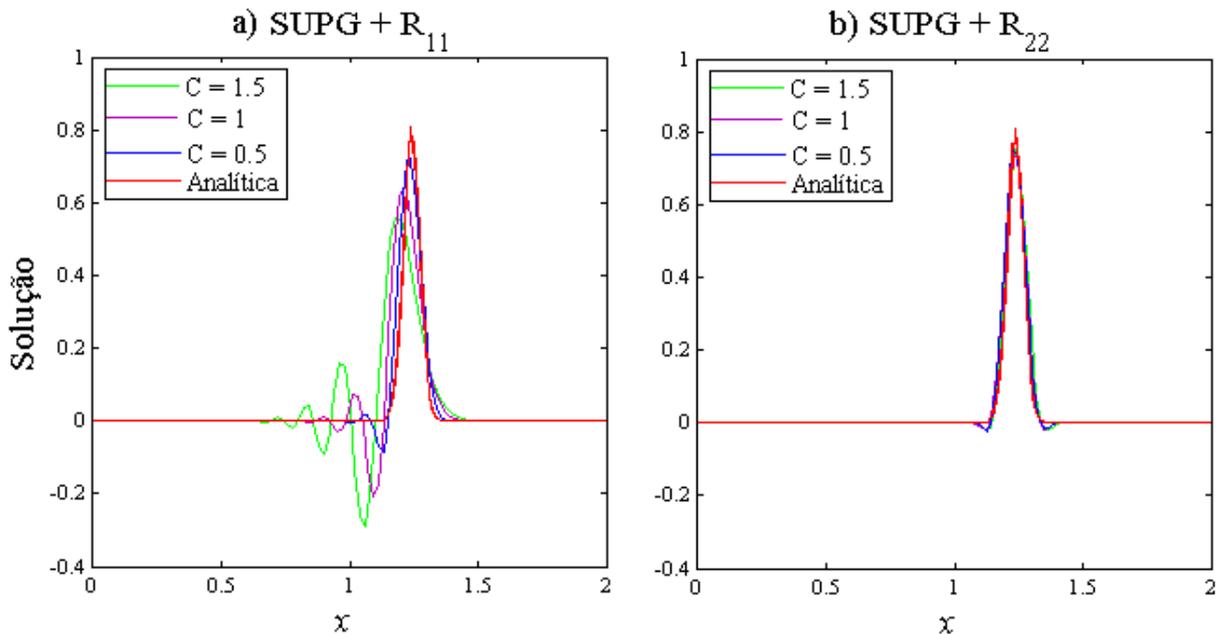


Figura 5.9: As condições CFL nas soluções numéricas a) SUPG+ R_{11} e b) SUPG+ R_{22} .

Podemos observar nas Figuras 5.7-5.9, que ao diminuirmos o passo de tempo, consequentemente o número de Courant, as oscilações das soluções numéricas diminuem consideravelmente. Como já observado na seção 5.1, os melhores resultados são obtidos quando utilizamos o método implícito multi-estágio de quarta ordem, R_{22} , adicionado as formulações de elementos finitos. Estes resultados ainda podem ser confirmados na Figura 5.10, onde apresentamos a evolução do erro entre os métodos avaliados em função do passo de tempo, utilizando a norma L^2 . Obtivemos o gráfico da Figura 5.10 na escala $\log_{10}(\Delta t) \times \log_{10} \|E\|$, onde

m na legenda do gráfico descreve a inclinação da reta.

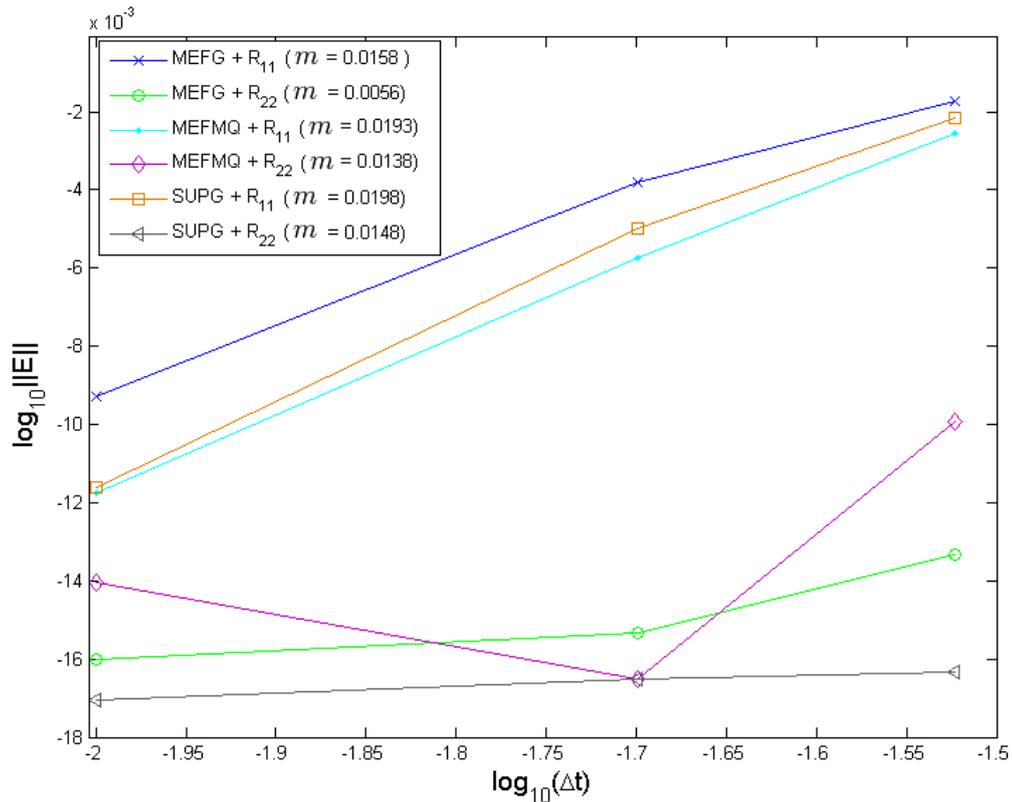


Figura 5.10: Convergência dos resultados numéricos para $t = 1$, $h = 2/100$, $v = 1$, $\sigma = 0.1$ e $D = 1 \times 10^{-4}$, em função do passo de tempo.

Observamos que a região de convergência é maior nos métodos MEFG+ R_{22} , MEFMQ+ R_{22} e SUPG+ R_{22} , quando comparados aos métodos MEFG+ R_{11} , MEFMQ+ R_{11} e SUPG+ R_{11} , tanto para passo de tempo grande quanto para passo de tempo pequeno.

5.1.2 A influência da malha

Avaliamos ainda a influência da malha, para a situação onde a convecção é dominante, quando $D = 1 \times 10^{-4}$. Fixamos o número de Courant em $C = 1$ e discretizamos o domínio em 50, 100 e 500 elementos lineares. Apresentamos os resultados dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados as formulações MEFG, MEFMQ e SUPG, assim como uma análise sobre a região de convergência das soluções numéricas apresentadas utilizando a norma L^2 .

Nas Figuras 5.11-5.13 apresentamos os resultados dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados as formulações MEFG, MEFMQ e SUPG, comparados com a solução analítica, para as três malhas, $h = 2/500$, $h = 2/100$ e $h = 2/50$, o que implica diretamente no número de Péclet, correspondendo a $Pe = 20$, 100 e 200, respectivamente.

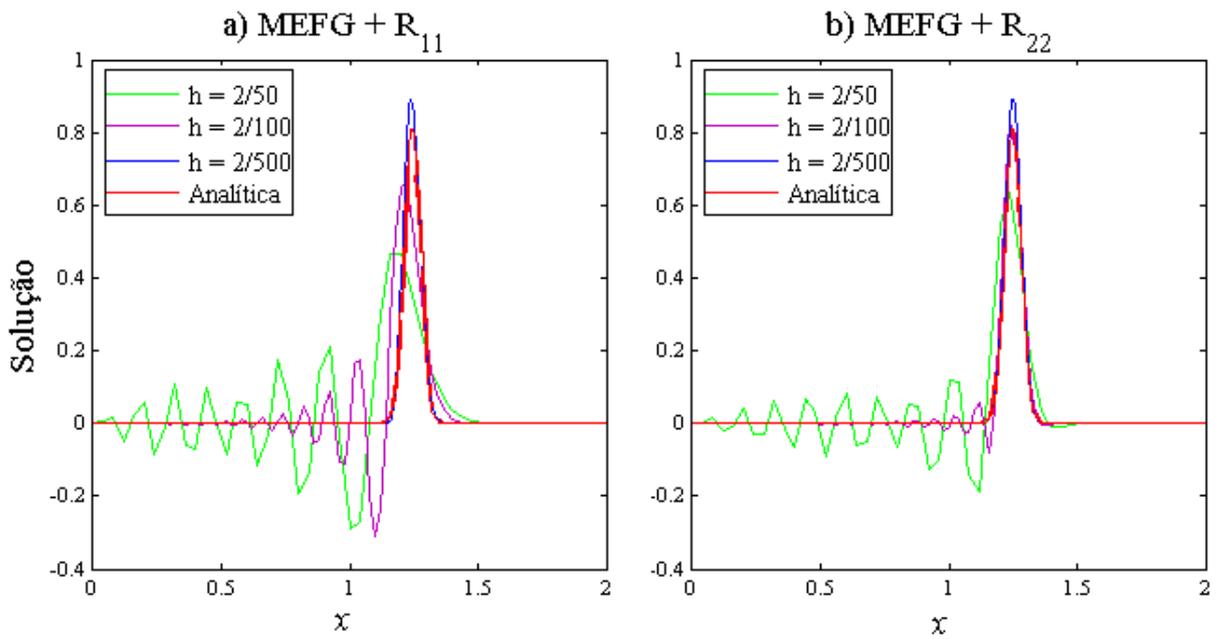


Figura 5.11: a) MEFG+ R_{11} e b) MEFG+ R_{22} para $C = 1$ fixo.

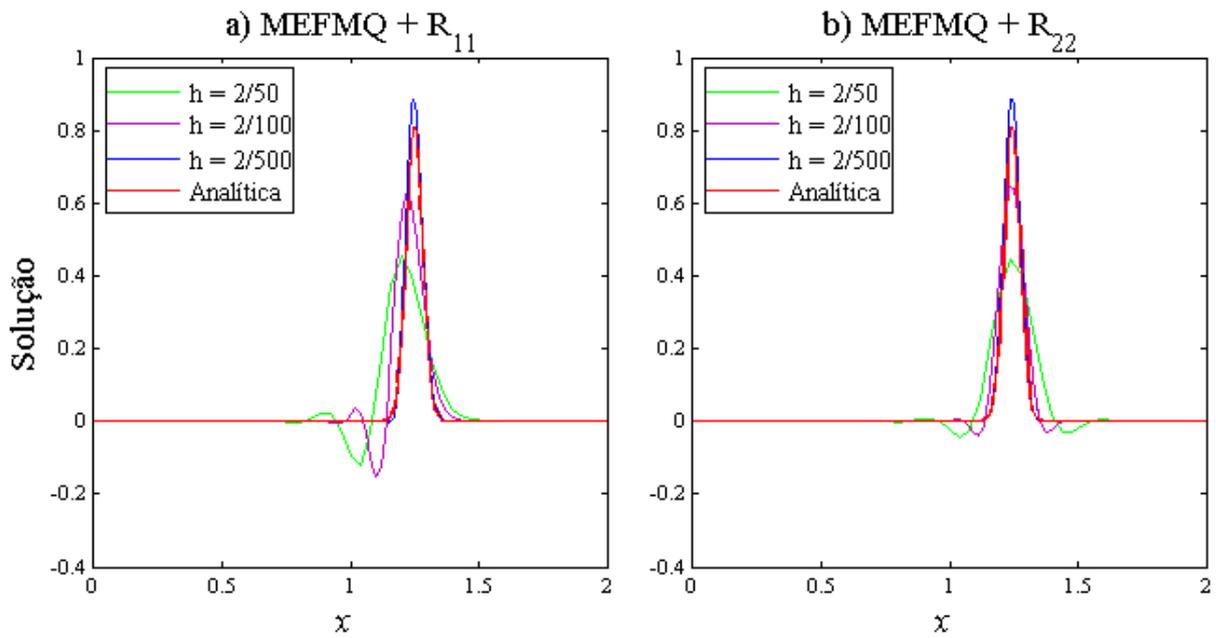


Figura 5.12: a) MEFMQ+ R_{11} e b) MEFMQ+ R_{22} para $C = 1$ fixo.

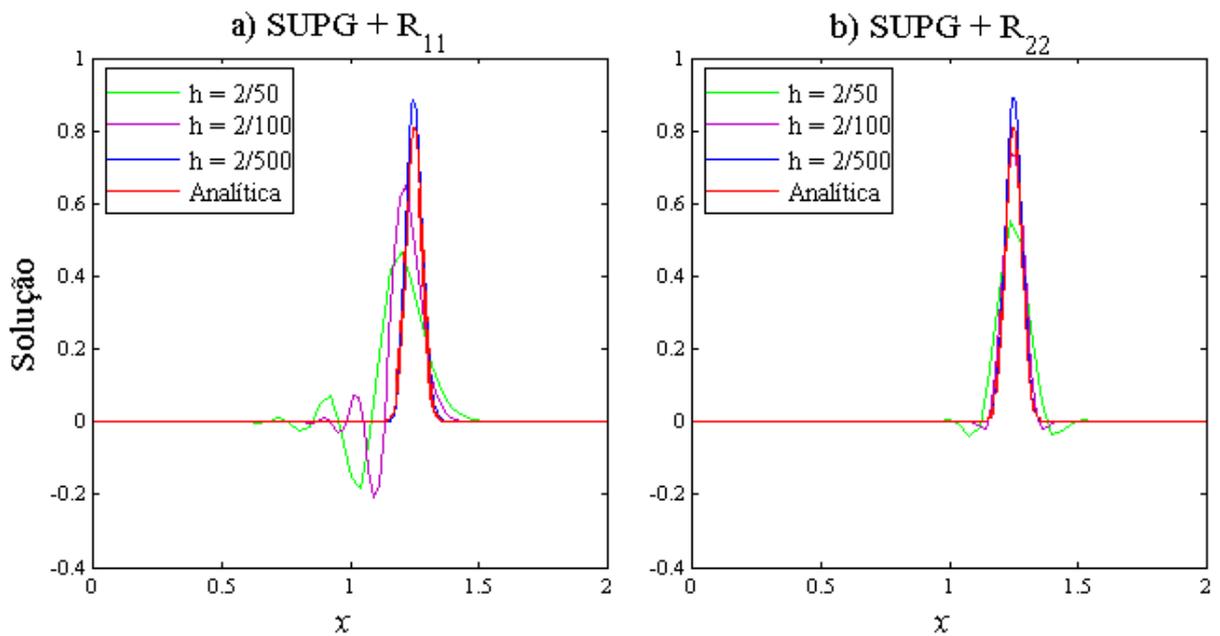


Figura 5.13: a) SUPG+ R_{11} e b) SUPG+ R_{22} para $C = 1$ fixo.

Podemos observar nas Figuras 5.11-5.13, que ao aumentamos o número de elementos na malha, conseqüentemente diminuimos o número de Péclét, as oscilações das soluções numéricas diminuem consideravelmente. Como já observado na seção 5.1, os melhores resultados são obtidos quando utilizamos o método implícito multi-estágio de quarta ordem, R_{22} , adicionado as formulações de elementos finitos. Estes resultados ainda podem ser confirmados na Figura 5.14, onde apresentamos a evolução do erro entre os métodos avaliados em função do refinamento da malha utilizando a norma L^2 . Obtivemos o gráfico da Figura 5.14 na escala $\log_{10}(\Delta x) \times \log_{10} \|E\|$, onde m na legenda do gráfico descreve a inclinação da reta.

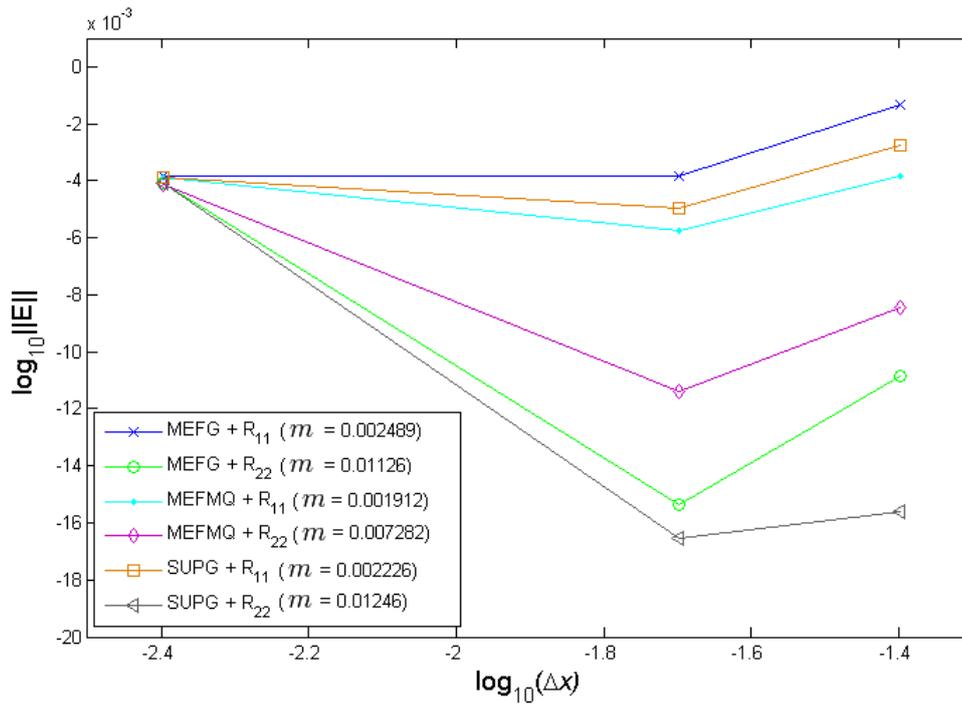


Figura 5.14: Convergência dos resultados numéricos para $t = 1$, $C = 1$, $v = 1$, $\sigma = 0.1$ e $D = 1 \times 10^{-4}$, em função do refinamento da malha.

Observamos que o método implícito multi-estágio de quarta ordem, R_{22} , aumentou a região de convergência, quando comparado com o método implícito multi-estágio de segunda ordem, R_{11} , tanto para poucos elementos na malha, quanto para muitos elementos. E ainda observamos que, os resultados numéricos obtidos por MEFG+ R_{22} e SUPG+ R_{22} são melhores em relação ao MEFMQ+ R_{22} .

5.1.3 A influência dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22}

Por fim, avaliamos a influência dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} sobre o intervalo de tempo $0 \leq t \leq 1$, tendo sempre como meta avaliar se o método está aumentando a região de convergência da solução numérica. Nossa análise aqui é, também, sobre a situação onde a convecção é dominante, quando $D = 1 \times 10^{-4}$. Para esta análise utilizamos 100 elementos lineares, $v = 1$, $\sigma = 0.1$, $C = 1$ e $Pe = 100$. Apresentamos os resultados numéricos e analítico, em forma de superfície onde consideramos uma malha 100×50 elementos em $0 \leq x \leq 2$ e $0 \leq t \leq 1$, respectivamente, e para uma análise mais precisa sobre a estabilidade e convergência dos mesmos, apresentamos os resultados dos modelos numéricos para o tempo final de simulação $t = 1$ e comparamos com a solução analítica [12].

Apresentamos na Figura 5.15 a superfície da solução analítica dada na equação (5.8), para $0 \leq x \leq 2$ e $0 \leq t \leq 1$, sendo $\Delta x = 0.02$.

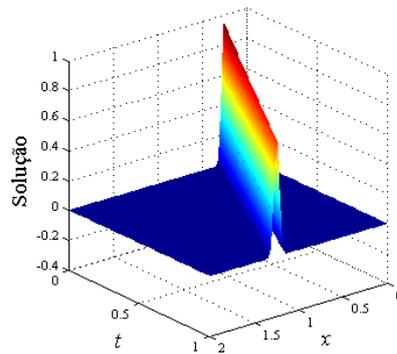


Figura 5.15: Superfície da solução analítica, equação (5.8).

Nas Figuras 5.16-5.18 apresentamos: a) Comparações entre os aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados as formulações MEFG, MEFMQ e SUPG, respectivamente, considerando um corte da solução para o tempo final de simulação, $t = 1$; b) e c) Superfícies das soluções dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionadas as formulações MEFG, MEFMQ e SUPG, respectivamente, para $0 \leq x \leq 2$ e $0 \leq t \leq 1$, sendo $\Delta x = \Delta t = 0.02$.

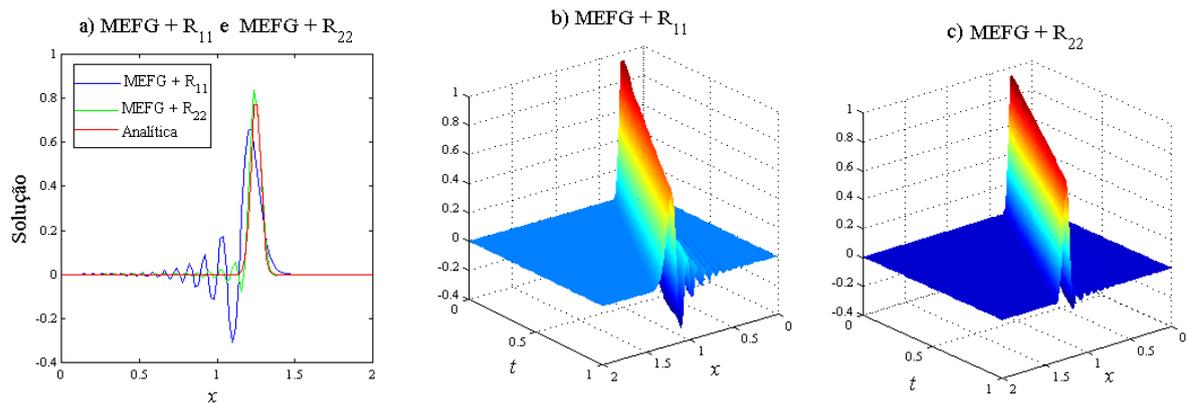


Figura 5.16: a) Comparações entre os aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados a formulação MEFG, considerando um corte da solução para o tempo final de simulação, $t = 1$; b) e c) Superfícies das soluções dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionadas a formulação MEFG.

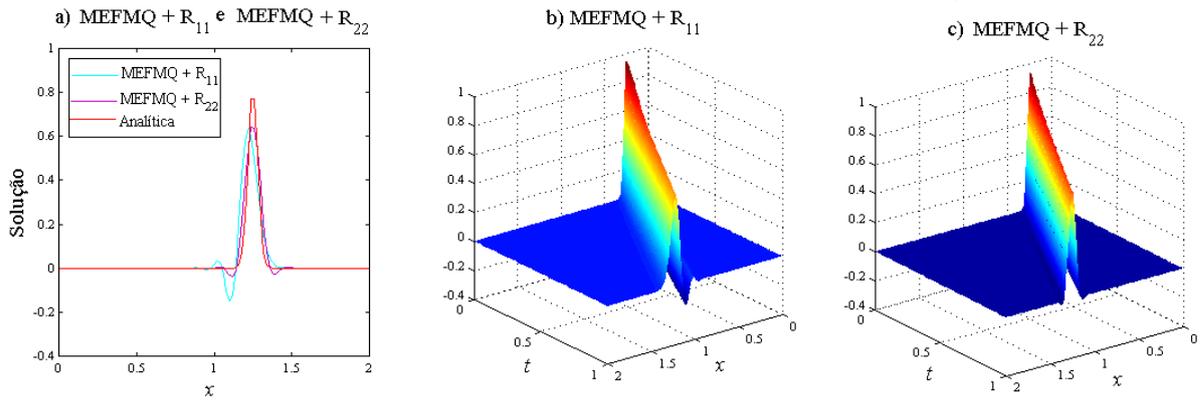


Figura 5.17: a) Comparações entre os aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados a formulação MEFMQ, considerando um corte da solução para o tempo final de simulação, $t = 1$; b) e c) Superfícies das soluções dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionadas a formulação MEFMQ.

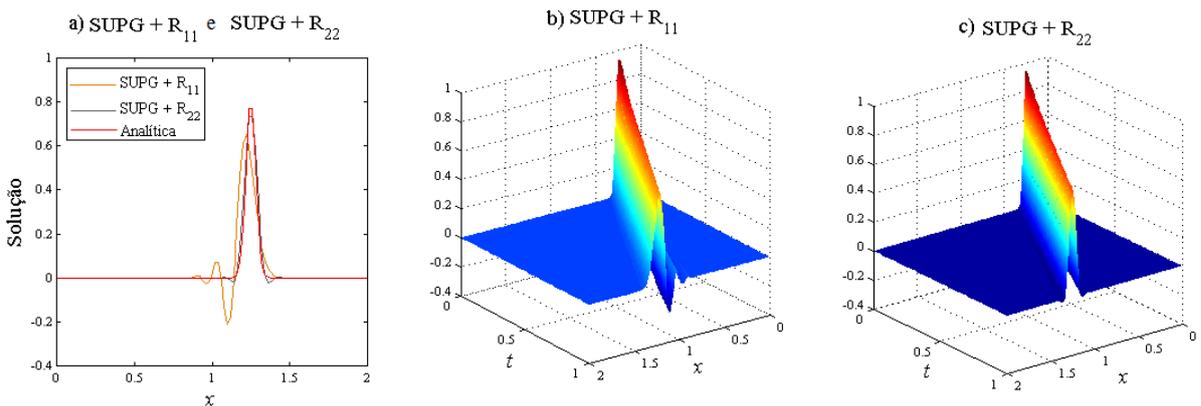


Figura 5.18: a) Comparações entre os aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados a formulação SUPG, considerando um corte da solução para o tempo final de simulação, $t = 1$; b) e c) Superfícies das soluções dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionadas a formulação SUPG.

Podemos observar nas Figuras 5.16-5.18, que o método implícito multi-estágio de quarta ordem, R_{22} , adicionado às formulações MEFMG, MEFMQ e SUPG aumentou a região de convergência das soluções, eliminando quase que completamente as oscilações em todas as três formulações. Porém, os resultados são mais precisos para MEFMQ+ R_{22} como pode ser confirmado na Tabela 5.1, onde apresentamos os erros dos métodos estudados para a equação 1D de convecção-difusão-reação.

Tabela 5.1: Erro das aproximações para $h = 2/100$, $C = 1$ e $Pe = 100$.

| Soluções numéricas | $\log_{10} \ E\ $ |
|--------------------|-------------------|
| MEFG+ R_{11} | $-3.8234e - 003$ |
| MEFG+ R_{22} | $-1.5345e - 002$ |
| MEFMQ+ R_{11} | $-5.7475e - 003$ |
| MEFMQ+ R_{22} | $-1.1398e - 002$ |
| SUPG+ R_{11} | $-4.9853e - 003$ |
| SUPG+ R_{22} | $-1.6522e - 002$ |

Assim como observamos na seção 5.1, problemas numéricos, como oscilações espúrias podem ser encontrados de acordo com a escolha da formulação, quando consideremos problemas com convecção dominante. Em razão disto, apresentamos exemplos particulares da equação (3.1), a fim de confirmar os resultados.

5.1.4 Equação de convecção-difusão

Seja a equação 1D de convecção-difusão, com $\sigma = 0$ e $f(x, t) = 0$ satisfazendo

$$u_t(x, t) + vu_x(x, t) - Du_{xx}(x, t) = 0, \quad x \in (0, 1) \quad (5.9)$$

$$u(0, t) = 0 = u(1, t) \quad (5.10)$$

com condição inicial

$$u(x, 0) = \frac{5}{7} \exp \left\{ - \left(\frac{x - x_0}{\ell} \right)^2 \right\}, \quad (5.11)$$

cuja a solução analítica é dado por [12]

$$u(x, t) = \frac{5}{7\gamma(t)} \exp \left\{ - \left(\frac{x - x_0 - vt}{\ell\gamma(t)} \right)^2 \right\} \quad (5.12)$$

onde $\gamma(t) = \sqrt{1 + \frac{4Dt}{\ell^2}}$. Para ilustrar os resultados desta seção, utilizamos $x_0 = 2/15$ e $\ell = 7\sqrt{(2)}/300$, $v = 1$ e um tempo total de simulação $t = 0.6$.

5.1.5 A influência do número de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)

Vamos mostrar a ação da condição CFL de tal forma a garantir a estabilidade dos métodos mesmo em situações onde $C > 1$, para a situação onde a convecção é dominante,

quando $D = 5 \times 10^{-5}$. A seguir, apresentamos resultados numéricos onde utilizamos 100 elementos lineares para discretizar o domínio, e apresentamos os resultados dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados as formulações MEFG, MEFMQ e SUPG, assim como uma análise sobre a região de convergência das soluções numéricas apresentadas, utilizando a norma L^2 .

Na Tabela 5.2, apresentamos os erros dos métodos MEFG+ R_{11} , MEFG+ R_{22} , MEFMQ+ R_{11} , MEFMQ+ R_{22} , SUPG+ R_{11} e SUPG+ R_{22} , para três passos de tempo $\Delta t = 0.05$, $\Delta t = 0.03$ e $\Delta t = 0.01$, e conseqüentemente nos números de Courant $C = 5$, $C = 3$ e $C = 1$, respectivamente.

Tabela 5.2: Erro das aproximações para $h = 1/100$ e $Pe = 100$.

| Solução numérica | Passo de tempo Δt | $\log_{10} \ E\ $ |
|------------------|---------------------------|-------------------|
| MEFG+ R_{11} | 0.05 | $-2.6946e - 004$ |
| | 0.03 | $-4.5035e - 004$ |
| | 0.01 | $-4.4354e - 003$ |
| MEFG+ R_{22} | 0.05 | $-3.0013e - 003$ |
| | 0.03 | $-6.8213e - 003$ |
| | 0.01 | $-1.5804e - 002$ |
| MEFMQ+ R_{11} | 0.05 | $-2.7958e - 004$ |
| | 0.03 | $-5.3217e - 004$ |
| | 0.01 | $-5.2110e - 003$ |
| MEFMQ+ R_{22} | 0.05 | $-3.8994e - 003$ |
| | 0.03 | $-6.3796e - 003$ |
| | 0.01 | $-9.2610e - 003$ |
| SUPG+ R_{11} | 0.05 | $-2.7495e - 004$ |
| | 0.03 | $-4.8054e - 004$ |
| | 0.01 | $-4.9003e - 003$ |
| SUPG+ R_{22} | 0.05 | $-3.3557e - 003$ |
| | 0.03 | $-8.0328e - 003$ |
| | 0.01 | $-1.3125e - 002$ |

Observamos na Tabela 5.2 que, a região de convergência é maior nos métodos MEFG+ R_{22} , MEFMQ+ R_{22} e SUPG+ R_{22} , quando comparados aos métodos MEFG+ R_{11} , MEFMQ+ R_{11} e SUPG+ R_{11} , tanto para passo de tempo grande, quanto para passo de tempo pequeno. E por último, na Figura 5.19, apresentamos a evolução do erro entre os métodos avaliados em função do passo de tempo utilizando a norma L^2 . Obtivemos o gráfico da Figura 5.19 na escala $\log_{10}(\Delta t) \times \log_{10} \|E\|$, onde m na legenda do gráfico descreve a inclinação da reta.

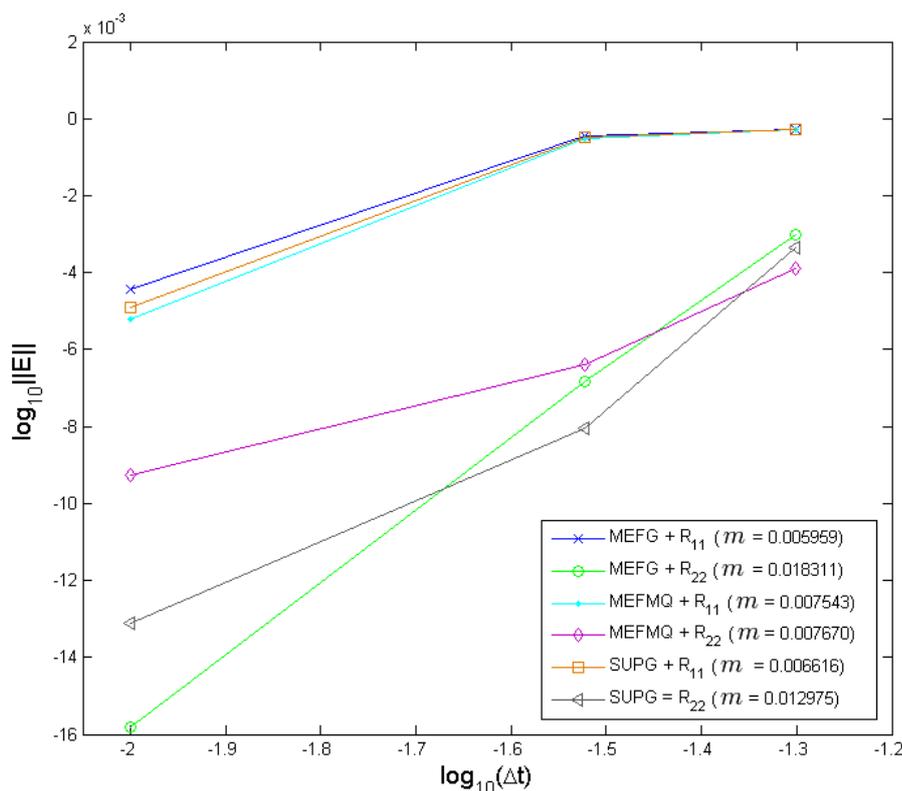


Figura 5.19: Convergência dos resultados numéricos para $t = 0.6$, $v = 1$ e $D = 5 \times 10^{-5}$, em função do passo de tempo.

5.1.6 A influência da malha

Agora avaliamos a influência da malha, também, para a situação onde a convecção é dominante, quando $D = 5 \times 10^{-5}$. Fixamos o número de Courant $C = 1$ e discretizamos o domínio em 50, 100 e 500 elementos lineares. Apresentamos os resultados dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados as formulações MEFG, MEFMQ e SUPG, assim como uma análise sobre a região de convergência das soluções numéricas apresentadas utilizando a norma L^2 .

Na Tabela 5.3, apresentamos os erros obtidos através dos métodos MEFG+ R_{11} , MEFG+ R_{22} , MEFMQ+ R_{11} , MEFMQ+ R_{22} , SUPG+ R_{11} e SUPG+ R_{22} , para três malhas com $h = 1/50$, $h = 1/100$ e $h = 1/500$, valores que implicam diretamente no número de Péclet, correspondendo a $Pe = 200$, 100 e 20.

Tabela 5.3: Erro das aproximações para $t = 0.6$, $v = 1$ e $C = 1$.

| Soluções numéricas | Elementos na malha | $\log_{10} \ E\ $ |
|--------------------|--------------------|-------------------|
| MEFG+ R_{11} | 50 | $-2.7629e - 003$ |
| | 100 | $-4.4354e - 003$ |
| | 500 | $-3.4709e - 002$ |
| MEFG+ R_{22} | 50 | $-1.2170e - 002$ |
| | 100 | $-1.5804e - 002$ |
| | 500 | $-8.1848e - 003$ |
| MEFMQ+ R_{11} | 50 | $-4.5589e - 003$ |
| | 100 | $-5.2110e - 003$ |
| | 500 | $-3.4772e - 003$ |
| MEFMQ+ R_{22} | 50 | $-8.2443e - 003$ |
| | 100 | $-9.2610e - 003$ |
| | 500 | $-5.6718e - 003$ |
| SUPG+ R_{11} | 50 | $-3.8315e - 003$ |
| | 100 | $-4.9003e - 003$ |
| | 500 | $-3.5391e - 003$ |
| SUPG+ R_{22} | 50 | $-1.3290e - 002$ |
| | 100 | $-1.3125e - 002$ |
| | 500 | $-6.0015e - 003$ |

Observamos na Tabela 5.3 que, tanto para poucos elementos na malha, quanto para muitos elementos na malha, o método implícito multi-estágio de quarta ordem R_{22} aumentou a região de convergência quando comparado ao implícito multi-estágio de segunda ordem R_{11} e ainda confirmamos as melhoras nos resultados obtidos por MEFG+ R_{22} e SUPG+ R_{22} em relação ao MEFMQ+ R_{22} . Na Figura 5.20, apresentamos a evolução do erro entre os métodos avaliados em função do refinamento da malha, utilizando a norma L^2 . Obtivemos o gráfico da Figura 5.20 na escala $\log_{10}(\Delta x) \times \log_{10} \|E\|$, onde m na legenda do gráfico descreve a inclinação da reta.

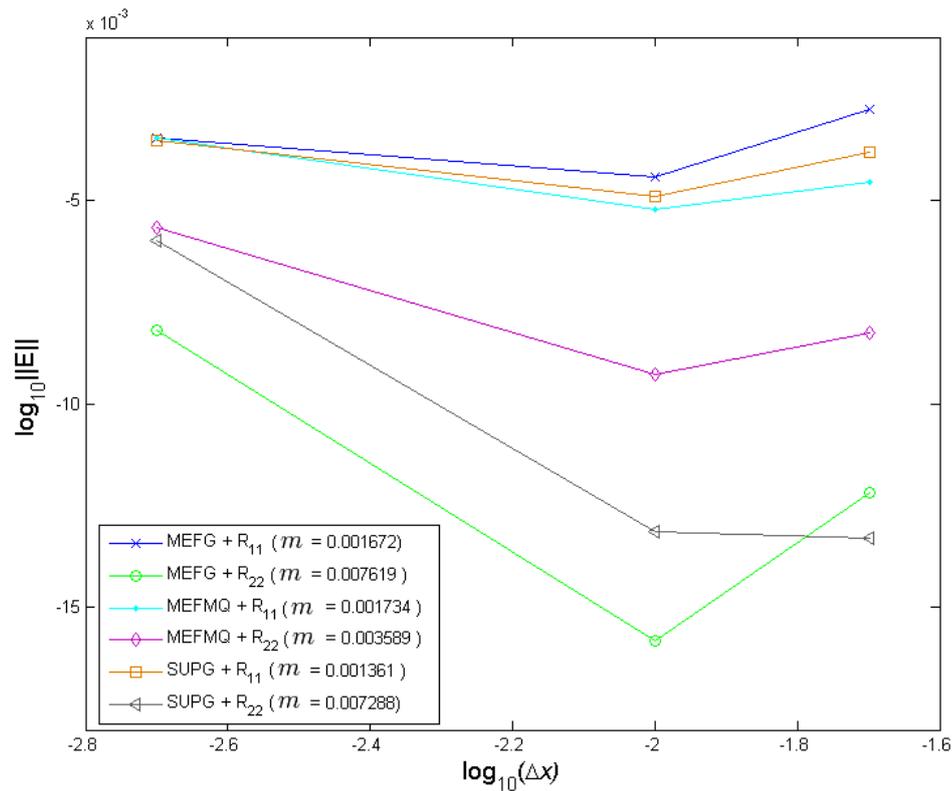


Figura 5.20: Convergência dos resultados numéricos para $t = 0.6$, $v = 1$ e $D = 5 \times 10^{-5}$, em função do refinamento da malha.

5.1.7 A influência dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22}

Por fim, avaliamos a influência dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} sobre o intervalo de tempo $0 \leq t \leq 0.6$, tendo sempre como meta avaliar se o método está aumentando a região de convergência da solução numérica. Nossa análise aqui é, também, sobre a situação onde a convecção é dominante, quando $D = 5 \times 10^{-5}$. Para esta análise utilizamos 100 elementos lineares, $v = 1$, $\sigma = 0.1$, $C = 1$ e $Pe = 100$. Apresentamos os resultados numéricos e analítico, em forma de superfície, onde consideramos uma malha 100×60 elementos em $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq t \leq 0.6$, respectivamente, e para uma análise mais precisa sobre a estabilidade e convergência dos mesmos, apresentamos os resultados dos modelos numéricos para o tempo final $t = 0.6$ e comparamos com a solução analítica [12].

Apresentamos na Figura 5.21 a superfície da solução analítica dada na equação (5.12), para $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq t \leq 0.6$, sendo $\Delta x = 0.01$.

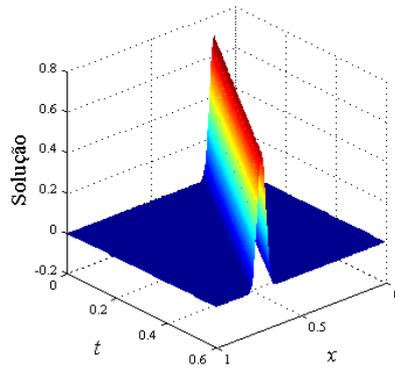


Figura 5.21: Superfície da solução analítica, equação (5.12).

Nas Figuras 5.22-5.24, apresentamos: a) Comparações entre os aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados as formulações MEFG, MEFMQ e SUPG, respectivamente, considerando um corte da solução para o tempo final de simulação, $t = 0.6$, b) e c) Superfícies das soluções dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionadas as formulações MEFG, MEFMQ e SUPG, respectivamente, para $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq t \leq 0.6$, sendo $\Delta x = \Delta t = 0.01$.

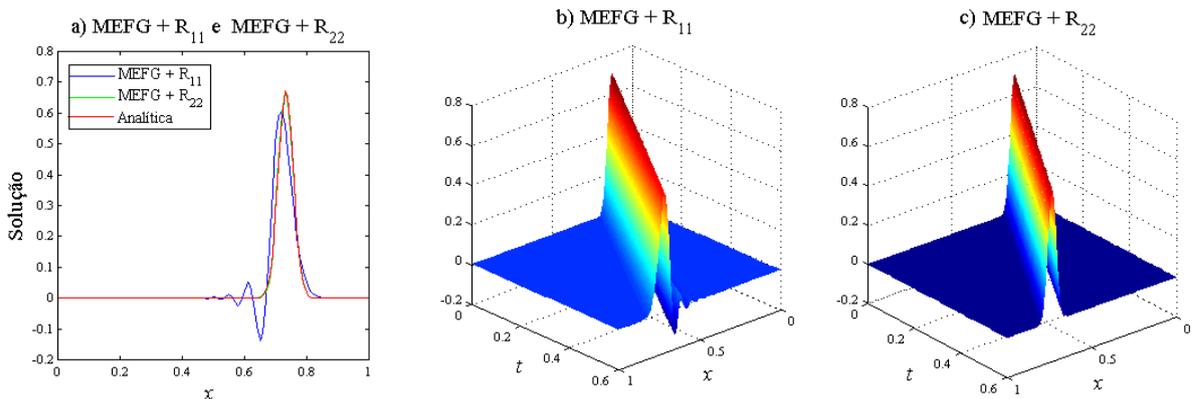


Figura 5.22: a) Comparações entre os aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados a formulação MEFG, considerando um corte da solução para o tempo final de simulação, $t = 0.6$; b) e c) Superfícies das soluções dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionadas a formulação MEFG.

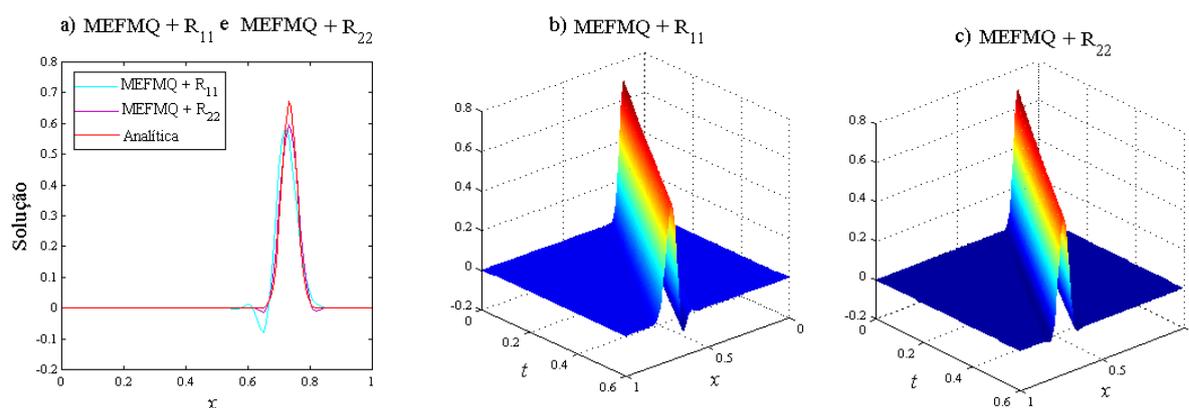


Figura 5.23: a) Comparações entre os aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados a formulação MEFMQ, considerando um corte da solução para o tempo final de simulação, $t = 0.6$; b) e c) Superfícies das soluções dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionadas a formulação MEFMQ.

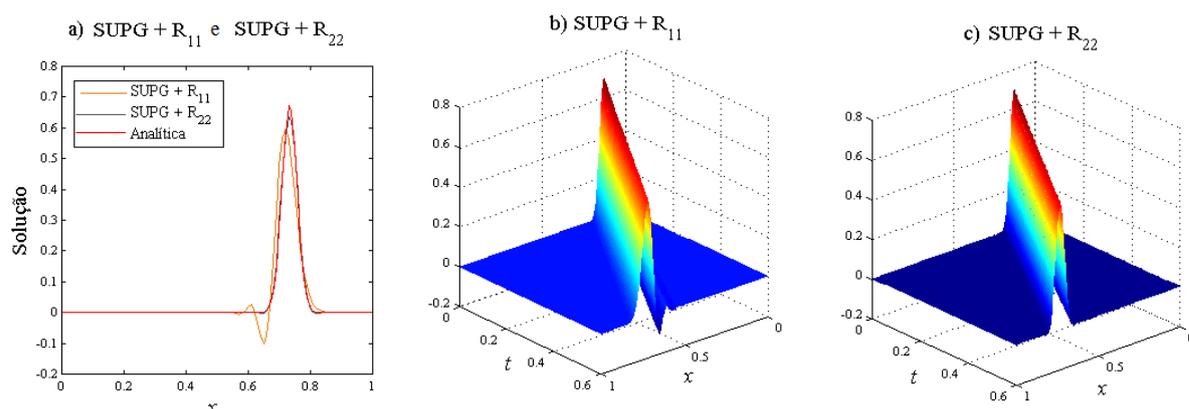


Figura 5.24: a) Comparações entre os aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados a formulação SUPG, considerando um corte da solução para o tempo final de simulação, $t = 0.6$; b) e c) Superfícies das soluções dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionadas a formulação SUPG.

Podemos observar, nas Figuras 5.22-5.24, que o método implícito multi-estágio de quarta ordem, R_{22} , adicionado as formulações MEFQ, MEFMQ e SUPG aumentam a região de convergência das soluções, eliminando quase que completamente as oscilações em todas as três formulações. Porém, os resultados são mais precisos para MEFQ+ R_{22} e SUPG+ R_{22} como pode ser confirmado na Tabela 5.4, onde apresentamos os erros dos métodos estudados para a equação convecção-difusão.

Tabela 5.4: Erro das aproximações para $h = 1/100$, $C = 1$ e $Pe = 100$.

| Soluções Numéricas | $\log_{10} \ E\ $ |
|--------------------|-------------------|
| MEFG+ R_{11} | $-4.4354e - 003$ |
| MEFG+ R_{22} | $-1.5804e - 002$ |
| MEFMQ+ R_{11} | $-5.2110e - 003$ |
| MEFMQ+ R_{22} | $-9.2610e - 003$ |
| SUPG+ R_{11} | $-4.9003e - 003$ |
| SUPG+ R_{22} | $-1.3125e - 002$ |

6 FORMULAÇÃO SEMI-DISCRETA PARA A EQUAÇÃO DE BURGERS

Neste capítulo apresentamos a equação de Burgers e resolvemos este problema utilizando as abordagens descritas no Capítulo 3. A equação de Burgers [36, 37] é uma forma simplificada da equação de Navier-Stokes e tem atraído a atenção de pesquisadores nas últimas décadas. Primeiramente vamos descrever o problema e em seguida faremos abordagens sobre as discretizações no tempo e no espaço.

6.1 EQUAÇÃO DE BURGERS

Seja a equação de Burgers satisfazendo

$$u_t(x, t) + u(x, t)u_x(x, t) - \epsilon u_{xx}(x, t) = f(x, t) \quad \text{em } \Omega, \quad (6.1)$$

$$u(0, t) = 0 = u(l, t) \quad \text{em } \Gamma, \quad (6.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad (6.3)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}$ é um domínio limitado aberto com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$. Os coeficientes desta equação são dados por: $\epsilon = \frac{1}{Re}$ é o coeficiente de viscosidade do fluido, Re é o número de Reynolds, é um número adimensional usado em mecânica dos fluidos para o cálculo do regime de escoamento de determinado fluido sobre uma superfície; $u(x, t)$ é a componente da velocidade do fluido na direção do eixo x ; $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, o termo fonte e, (6.2) representa as condições de fronteira do tipo Dirichlet, (6.3) descreve a condição inicial, onde u_0 é uma função dada.

A seguir podemos reescrever (6.1) de forma similar a equação 1D de convecção-difusão-reação abordada no Capítulo 3, ou seja:

$$u_t + \mathcal{L}(u) = f, \quad (6.4)$$

sendo que, agora o operador espacial é definido como

$$\mathcal{L}(u) = uu_x - \epsilon u_{xx} \quad (6.5)$$

onde $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{conv} + \mathcal{L}_{dif}$ representa a soma dos operadores não linear e linear, convectivo e difusivo, respectivamente. A solução numérica de (6.1)-(6.3) envolverá dois processos de discretizações no tempo e três processos de discretizações no espaço.

6.2 DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL

Algumas técnicas numéricas para a discretização no tempo são utilizadas para resolver equações diferenciais lineares e não lineares [14, 25, 24]. Neste trabalho, de acordo com o que já foi abordado no Capítulo 3, usaremos a técnica passo de tempo através dos aproximantes de Padé (3.20) e nosso foco continua sendo os métodos implícitos multi-estágio de segunda e quarta ordem, apresentados na equações (3.22) e (3.23), respectivamente.

6.3 DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL

Similarmente ao que foi apresentado no Capítulo 3 utilizaremos as formulações MEFMQ, MEEG e SUPG, para resolver a equação de Burgers. Faremos o uso dos resultados da seção 3.2.1 do Capítulo 3, onde introduzimos o suporte necessário para o desenvolvimento do método de elementos finitos unidimensional.

6.3.1 Método de mínimos quadrados

Para aproximar o problema (6.1)-(6.3), faremos uso do método de elemento finitos via mínimos quadrados, sendo necessário primeiramente calcular sua formulação variacional para que seja possível aplicar o método de elementos finitos [9]. Esta formulação é obtida usando o método de mínimos quadrados que consiste em minimizar o quadrado da integral do resíduo. Assim dado o espaço de Hilbert $V = H_0^1(0, l)$, onde V é chamado de conjunto das soluções tentativas, e $r(x) = u(x)u_x(x) - \epsilon u_{xx}(x) - f(x), \forall x \in (0, l)$, é uma função resíduo aproximada para o problema (6.1)-(6.3).

Definição 6.1. *O funcional quadrático na norma de $L^2(0, l)$ é definido como*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \mathcal{F}(u) \end{aligned} \quad (6.6)$$

onde $\mathcal{F}(u) = \|r(x)\|_0^2 = \int_0^l [u(x)u_x(x) - \epsilon u_{xx}(x) - f(x)]^2 dx$ para todo $x \in (0, l)$ sobre todo $u \in V$.

Além disso, \mathcal{F} é um funcional que tem seu domínio no espaço V das soluções testes levado ao conjunto dos números reais. Uma condição necessária para que $u \in V$ seja um minimizador do funcional \mathcal{F} em (6.6) é equivalente a calcular um mínimo usando a derivada de Gâteaux, isto é,

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial w}(u) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{F}(u + sw) - \mathcal{F}(u)\|}{s} = 0 \quad \forall w \in V, \quad (6.7)$$

com u e w definidos em $[0, l]$ e $s \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial w}(u) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{\int_0^l [(u + sw)(u + sw)_x - \epsilon(u + sw)_{xx} - f]^2 dx}{s} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\int_0^l [uu_x - \epsilon u_{xx} - f]^2 dx}{s} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

$\forall w \in V$, e fazendo os cálculos temos que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial w}(u) &= \int_0^l [2\epsilon^2 u_{xx} w_{xx} - 2\epsilon u u_x w_{xx} + 2\epsilon u_x u_{xx} w - 2\epsilon u u_{xx} w_x] dx + \\ &\quad + \int_0^l [2u u_x^2 w - 2u^2 u_x w_x + 2\epsilon w_{xx} f - 2u_x w f - 2u w_x f] dx = \\ &= 0 \quad \forall w \in V, \end{aligned} \quad (6.9)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial w}(u) &= \int_0^l [\epsilon^2 u_{xx} w_{xx} - \epsilon u u_x w_{xx} + \epsilon u_x u_{xx} w - \epsilon u u_{xx} w_x] dx + \\ &\quad + \int_0^l [u u_x^2 w - u^2 u_x w_x] dx = \\ &= \int_0^l [-\epsilon w_{xx} f + u_x w f + u w_x f] dx \quad \forall w \in V. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Assim, definimos o funcional bilinear $a_M(u; \cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a_M(u; u_x, w) &= \int_0^l [\epsilon^2 u_{xx} w_{xx} - \epsilon u u_x w_{xx} + \epsilon u_x u_{xx} w - \epsilon u u_{xx} w_x] dx + \\ &\quad + \int_0^l [u u_x^2 w - u^2 u_x w_x] dx, \end{aligned} \quad (6.11)$$

aplicando o teorema de Green [33] na equação (6.11), temos que

$$a_M(u; u_x, w) = \int_0^l [\epsilon^2 u_{xx} w_{xx} - \epsilon u u_x w_{xx}] dx \quad (6.12)$$

Definindo o funcional linear $F_M(u; \cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$F_M(u; w) = \int_0^l [-\epsilon w_{xx} f + u_x w f + u w_x f] dx \quad (6.13)$$

para todo $w \in V$. Portanto, podemos dizer que o problema (6.10) é equivalente a resolver o seguinte problema variacional: Determinar $u \in V$, tal que,

$$a_M(u; u_x, w) = F_M(w), \quad \forall w \in V, \quad (6.14)$$

Vamos utilizar o Teorema 2.11 do Capítulo 2, para provar a existência e unicidade do problema (6.14).

1. Vamos mostrar que $a_M(u; \cdot, \cdot)$ é bilinear e simétrica.

Dem: Sejam c, e, u e w funções pertencentes ao espaço V e escalares α, β, λ e μ .

Usando o funcional bilinear (6.12)

$$a_M(u; \alpha c + \beta e, w) = \int_0^l [\epsilon^2(\alpha c + \beta e)_{xx} w_{xx} - \epsilon u(\alpha c + \beta e)_x w_{xx}] dx \quad (6.15)$$

fazendo cálculos

$$\begin{aligned} a_M(u; \alpha c + \beta e, w) &= \alpha \int_0^l [\epsilon^2 c_{xx} w_{xx} - \epsilon u c_x w_{xx}] dx + \beta \int_0^l [\epsilon^2 e_{xx} w_{xx} - \epsilon u e_x w_{xx}] dx \\ &= \alpha a_M(u; c, w) + \beta a_M(u; e, w), \quad \forall c, e, u, w \in V. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Analogamente, temos que

$$a_M(u; u_x, \lambda c + \mu e) = \lambda a_M(u; u_x, c) + \mu a_M(u; u_x, e), \quad \forall c, e, u, w \in V. \quad (6.17)$$

Das igualdades (6.16) e (6.17) concluímos que $a_M(u; \cdot, \cdot)$ é bilinear. A seguir, verificamos a simetria:

$$\begin{aligned} a_M(u; u_x, w) &= \int_0^l [\epsilon^2 u_{xx} w_{xx} - \epsilon u u_x w_{xx}] dx \\ &= \int_0^l [\epsilon^2 w_{xx} u_{xx} - \epsilon w_{xx} u u_x] dx \\ &= a_M(w, u; u_x). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Logo $a_M(u; \cdot, \cdot)$ é simétrica. ■

2. Vamos mostrar que $a_M(u; \cdot, \cdot)$ é contínua.

Dem: Utilizando a equação (6.12), pela desigualdade de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned} |a_M(u; u_x, w)| &= \left| \epsilon^2 \int_0^l u_{xx} w_{xx} dx - \epsilon \int_0^l u u_x w_{xx} dx \right| \\ &\leq \epsilon^2 \|u_{xx}\|_0 \|w_{xx}\|_0 + \epsilon \|u\|_0 \|u_x\|_0 \|w_{xx}\|_0 \\ &\leq \max\{\epsilon^2, \epsilon\} (\|u_{xx}\|_0 + \|u\|_0) (\|w_{xx}\|_0) \end{aligned}$$

como $(\|u_{xx}\|_0 + \|u\|_0)$ e $\|u\|_1$ são equivalentes em $H_0^1(\Omega)$ [13], assim,

$$a_M(u; u_x, w) \leq \delta \|u\|_1 \|w\|_1, \quad (6.19)$$

onde $\delta = \max\{D^2, v^2, \sigma^2\}$. Logo por (6.19), a $a_M(u; \cdot, \cdot)$ é contínua.

Antes de demonstrar que $a_M(u; \cdot, \cdot)$ é coerciva, vamos supor que

$$\frac{1}{2}\epsilon_x > \tau > 0. \quad (6.20)$$

Podemos escrever a equação (6.12) como

$$\begin{aligned} a_M(u; u_x, w) &= \int_0^l [\epsilon^2 u_{xx} w_{xx} - \epsilon u u_x w_{xx}] dx \\ &= \int_0^l \epsilon^2 u_{xx} w_{xx} dx + b_M(u; u_x, w) \end{aligned} \quad (6.21)$$

onde

$$b_M(u; u_x, w) = - \int_0^l \epsilon u u_x w_{xx} dx \quad (6.22)$$

Para todo $u \in V$, temos que

$$\begin{aligned} b_M(u; u_x, u) &= - \int_0^l \epsilon u u_x u_{xx} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \epsilon_x u^2 u_{xx} dx. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Dem:

$$\begin{aligned} a_M(u; u_x, u) &= \int_0^l [\epsilon^2 u_{xx} u_{xx} - \epsilon u u_x u_{xx}] dx \\ &= \epsilon^2 \|u_{xx}\|_0^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \epsilon_x u^2 u_{xx} dx \\ &\geq \epsilon^2 \|u_{xx}\|_0^2 + \tau \|u\|_0^2 \|u_{xx}\|_0^2 \\ &\geq \delta_1 \|u\|_1^2. \end{aligned} \quad (6.24)$$

$\delta_1 = \min\{\epsilon^2, \tau\}$. Logo $a_M(u; \cdot, \cdot)$ é coerciva.

4. Por último, vamos mostrar que $F_M(u; \cdot)$ é linear e contínuo em V .

Dem: Pela definição de funcional e funcional bilinear, $F_M(u; \cdot)$ e $a_M(u; \cdot, \cdot)$ são lineares. Agora segue a demonstração da continuidade de $F_M(u; w)$, onde o funcional linear $F_M(u; w)$ dado por (6.25) é limitado em V , pois, para transformações lineares, continuidade e limitação significam o mesmo [18]. Considerando o funcional $F_M(u; w)$, e utilizando a de-

sigualdade de Cauchy-Schartz, temos que

$$\begin{aligned}
F_M(u; w) &= \left| \int_0^l [-\epsilon w_{xx} f + u_x w f + u w_x f] dx \right| \\
&= \left| - \int_0^l \epsilon w_{xx} f dx + \int_0^l u_x w f dx + \int_0^l u w_x f dx \right| \\
&\leq \left| - \int_0^l \epsilon w_{xx} f dx \right| + \int_0^l u_x w f dx + \int_0^l u w_x f dx \\
&\leq \int_0^l \epsilon w_{xx} f dx + \int_0^l u_x w f dx + \int_0^l u w_x f dx \\
&\leq \epsilon \|w_{xx}\|_0 \|f\|_0 + \|u_x\|_0 \|w\|_0 \|f\|_0 + \|u\|_0 \|w_x\|_0 \|f\|_0 \\
&\leq \delta_2 \|w\|_1,
\end{aligned} \tag{6.25}$$

onde $\delta_2 = \max\{\epsilon \|f\|_0, \|f\|_0\}$. Logo, $F_M(u; \cdot)$ é contínuo em V . ■

Logo afirmamos com o uso do Teorema 2.11 a existência e unicidade do problema (6.14).

6.3.2 Método de elementos finitos via mínimos quadrados (MEFMQ)

O método de elementos finitos via mínimos quadrados (MEFMQ) tem por objetivo aproximar o espaço das soluções tentativas e o espaço das funções teste por um subespaço de dimensão finita. Nosso estudo será feito da mesma forma que iniciamos no Capítulo 3, vamos construir um subespaço de dimensão finita V_h , de dimensão infinita $V = H_0^1(0, l)$, formado por funções lineares seccionais geradoras de um conjunto de m elementos de V denotado por $V_h = [\varphi_0, \dots, \varphi_m]$. As funções bases φ_j são as mesmas obtidas na seção 3.2.2 a partir do método de elementos finitos, considerando a partição $x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{m-1} < x_m$. O problema agora consiste em determinar uma solução aproximada $u_h = u_h(x) \in V_h$ tal que

$$u_h = \sum_{j=0}^m \varphi_j(x) u_j, \quad \forall \varphi_j \in V_h. \tag{6.26}$$

Deste modo, o problema aproximado da equação (6.14) consiste em determinar $u_h \in V_h$ tal que

$$a_M(u_h; v_h, w_h) = F_M(u_h; w_h), \quad \forall w_h \in V_h, \tag{6.27}$$

onde $v = u_x$. Da solução aproximada (6.26) e com a equação (6.27) mostra ser válida a igualdade $w_h = \varphi_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$, definida como função teste. A equação (6.27) pode ser escrita como

$$\sum_{j=0}^m a_M(\varphi_i, \varphi_j; \varphi_j) u_j = F_M(\varphi_j; \varphi_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, m. \tag{6.28}$$

A equação (6.28) representa um sistema linear de equações algébricas com m equações e m incógnitas $u_0, u_1, u_2, \dots, u_m$. Em forma matricial, este sistema pode ser escrito como

$$\mathbf{AU} = \mathbf{F}, \quad (6.29)$$

onde $\mathbf{A} = [A_{ij}]_{m \times m}$, com entradas $A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$, é a matriz global; $\mathbf{U}^T = [u_0, u_1, u_2, \dots, u_m]$ é o vetor incógnita e $\mathbf{F}^T = [F_0, F_1, F_2, \dots, F_m]$ é o vetor de força global.

6.3.3 Método de Galerkin

Nesta seção apresentamos o método de Galerkin para resolver o problema (6.1)-(6.3). Para aproximação do problema, seja $V = H_0^1(0, l)$ assim definido, onde V é chamado de conjunto das soluções teste. Em seguida, a formulação variacional fraca do problema (6.1) é calculada multiplicando ambos membros desta equação por uma função teste $w \in V$. Temos,

$$uu_x w - \epsilon u_x w = f w, \quad \forall w \in V. \quad (6.30)$$

Aplicando a integral em ambos os lados da equação (6.30), segue que

$$\int_0^l [uu_x w - \epsilon u_{xx} w] dx = \int_0^l f w dx, \quad \forall w \in V. \quad (6.31)$$

e integrando por partes,

$$- \int_0^l \epsilon u_{xx} w dx = \int_0^l \epsilon u_x w_x dx \quad (6.32)$$

substituindo (6.32) em (6.31) temos que

$$\int_0^l [uu_x w + \epsilon u_x w_x] dx = \int_0^l f w dx, \quad \forall w \in V. \quad (6.33)$$

Assim podemos definir o funcional bilinear $a_G(u; \cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ e o funcional linear $F_G(u; \cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$a_G(u; u_x, w) = \int_0^l [uu_x w + \epsilon u_x w_x] dx, \quad \forall w \in V. \quad (6.34)$$

e

$$F_G(u; w) = \int_0^l f w dx, \quad \forall w \in V. \quad (6.35)$$

Consequentemente, podemos dizer que o problema (6.33) é equivalente a resolver o seguinte problema variacional. Determinar $u \in V$ tal que

$$a_G(u; u_x, w) = F_G(u; w) \quad \forall w \in V. \quad (6.36)$$

Logo, afirmamos com o uso do Teorema 2.11 a existência e unicidade do problema (6.36).

1. Vamos mostrar que $a_G(u; \cdot, \cdot)$ é bilinear.

Dem: Sejam c, e, u e w funções pertencentes ao espaço V e escalares α, β, λ e μ .

Usando o funcional bilinear (6.34)

$$a_G(u; \alpha c + \beta e, w) = \int_0^l [u(\alpha c + \beta e)_x w + \epsilon(\alpha c + \beta e)_x w_x] dx, \quad \forall c, e, u, w \in V, \quad (6.37)$$

fazendo os cálculos

$$\begin{aligned} a_G(u; \alpha c + \beta e, w) &= \alpha \int_0^l [u c_x w + \epsilon c_x w_x] dx + \beta \int_0^l [u e_x w + \epsilon e_x w_x] dx, \\ &= \alpha a_G(u; c, w) + \beta a_G(u; e, w), \quad \forall c, e, u, w \in V. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Analogamente, temos que

$$a_G(u; u_x, \lambda c + \mu e) = \lambda a_G(u; u_x, c) + \mu a_G(u; u_x, e), \quad \forall c, e, u, w \in V. \quad (6.39)$$

Logo das igualdades (6.38) e (6.39) concluímos que $a_G(u; \cdot, \cdot)$ é bilinear. ■

2. Vamos mostrar que $a_G(u; \cdot, \cdot)$ é contínua e coerciva.

Dem: Utilizando a equação (6.34) pela desigualdade de Cauchy-Schwartz,

temos

$$\begin{aligned} |a_G(u; u_x, w)| &= \left| \int_0^l \epsilon u_x w dx + \int_0^l u u_x w dx \right| \\ &\leq \epsilon \|u_x\|_0 \|w_x\|_0 + \|u\|_0 \|u_x\|_0 \|w\|_0 \\ &\leq \max\{\epsilon\} (\|u_x\|_0 + \|u\|_0) (\|w_x\|_0 + \|w\|_0). \\ &\leq \max\{\epsilon\} \|u\|_1 \|w\|_1. \end{aligned}$$

Logo,

$$a_G(u; u_x, w) \leq \delta_4 \|u\|_1 \|w\|_1 \quad (6.40)$$

onde $\delta_4 = \max\{\epsilon\}$. Assim por (6.40), segue que, $a_G(u; \cdot, \cdot)$ é contínua. ■

Para coercividade, da equação (6.34) temos,

$$\begin{aligned}
 a_G(u; u_x, u) &= \int_0^l \epsilon u_x u_x dx + \int_0^l u u_x u_x dx \\
 &= \epsilon \|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2 \|u_x\|_0 \\
 &\geq \delta_5 \|u\|_1^2,
 \end{aligned} \tag{6.41}$$

onde $\delta_5 = \min\{\epsilon\}$. Logo, $a_G(u; \cdot, \cdot)$ é coerciva. ■

3. E por último, vamos mostrar que $F_G(u; w)$ é linear e contínuo.

Dem: Pela definição de funcional e funcional bilinear, $F_G(u; \cdot)$ e $a_G(u; \cdot, \cdot)$ são lineares. Agora segue a demonstração da continuidade de $F_G(u; w)$, onde o funcional linear $F_G(u; w)$ dado por (6.35) é limitado em V [18]. Considerando o funcional $F_G(u; \cdot)$ pela desigualdade de Cauchy - Schwartz, temos

$$\begin{aligned}
 |F_G(u; w)| &= \left| \int_0^l w f dx \right| \\
 &\leq \|f\|_0 \|w\|_1,
 \end{aligned}$$

Assim,

$$F_G(w) \leq \delta_6 \|w\|_1, \tag{6.42}$$

onde $\delta_6 = \|f\|_0$. Logo por (6.42) temos que, $F_G(\cdot)$ é contínuo. ■

Portanto, podemos afirmar com o uso do Teorema 2.11 a existência e unicidade do problema (6.36).

6.3.4 Método de elementos finitos via Galerkin (MEFG)

O método de elementos finitos via Galerkin (MEFG) tem por objetivo aproximar o espaço das soluções tentativas e o espaço das funções teste por subespaço de dimensão finita. Vamos construir um subespaço de dimensão finita V_h , de dimensão infinita $V = H_0^1(0, l)$, formado por funções lineares seccionais geradoras de um conjunto de m elementos de V denotado por $V_h = [\varphi_0, \dots, \varphi_m]$. As funções bases φ_j são as mesmas obtidas na seção 3.2.2 a partir do método de elementos finitos, considerando a partição $x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{m-1} < x_m$. O problema agora consiste em determinar uma solução aproximada $u_h = u_h(x) \in V_h$ tal que

$$u_h = \sum_{j=0}^m \varphi_j(x) u_j, \quad \forall \varphi_j \in V_h. \tag{6.43}$$

Deste modo, o problema aproximado da equação (6.36) consiste em determinar $u_h \in V_h$ tal que

$$a_G(u_h; v_h, w_h) = F_G(u_h; w_h), \quad \forall w_h \in V_h. \quad (6.44)$$

onde $v = u_x$. Da solução aproximada (6.43) e com a equação (6.44) tem-se que a igualdade é válida $w_h = \varphi_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$, definida como função teste. A equação (6.44) pode ser escrita como

$$\sum_{j=0}^m a_G(\varphi_i, \varphi_j; \varphi_j) u_j = F_G(\varphi_j; \varphi_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (6.45)$$

A equação (6.45) é um sistema linear de equações algébricas com m equações e m incógnitas $u_0, u_1, u_2, \dots, u_m$. Em forma matricial, este sistema pode ser escrito como

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (6.46)$$

onde $\mathbf{A} = [A_{ij}]_{m \times m}$, com entradas $A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$, é a matriz global; $\mathbf{U}^T = [u_0, u_1, u_2, \dots, u_m]$ é o vetor incógnita e $\mathbf{F}^T = [F_0, F_1, F_2, \dots, F_m]$ é vetor de força global.

Novamente observamos, que a forma matricial do MEEG é equivalente ao MEFMQ, porém a matriz obtida pelo método MEFMQ é simétrica.

6.3.5 Método estabilizado *streamline-upwind* Petrov-Galerkin (SUPG)

O método estabilizado SUPG para a equação (6.1) pode ser definido por: Achar $u_h \in V_h$ tal que

$$a_G(u_h; v_h, w_h) + E_{\text{SUPG}}(u_h; v_h, w_h) = F_G(u_h; w_h), \quad \forall w_h \in V_h, \quad (6.47)$$

onde $\frac{\partial u_h}{\partial x} = v_h$, $E_{\text{SUPG}}(u_h; u_h, w_h)$ indica os termos de perturbação que são adicionados à formulação variacional padrão (6.44). Da mesma forma, que mencionamos no Capítulo 3, estes termos são adicionados de tal forma a preservar a consistência do método para obter a estabilidade numérica, dada pela expressão

$$\begin{aligned} E_{\text{SUPG}}(u_h, w_h) &= \sum_{e_j} \int_{e_j} u_h \frac{\partial w_h}{\partial x} \tau \left(u_h \frac{\partial u_h}{\partial x} - \epsilon \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} - f \right) d\Omega \\ &= \sum_{e_j} (\mathcal{P}(u_h; w_h), \tau \mathcal{R}(u_h))_{\Omega_j} \end{aligned} \quad (6.48)$$

onde a perturbação da função teste $\mathcal{P}(u_h; w_h)$, o termo residual $\mathcal{R}(u_h)$ e o parâmetro τ são definidos por [12] como :

$$\mathcal{P}(w) = u_h \frac{\partial w_h}{\partial x}, \quad (6.49)$$

$$\mathcal{R}(u_h) = u_h \frac{\partial u_h}{\partial x} - \epsilon \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} - f, \quad (6.50)$$

$$\tau = \left(\left(\frac{2u}{h} \right)^2 + 9 \left(\frac{4\epsilon}{h^2} \right)^2 \right)^{-1/2} \quad (6.51)$$

onde h sendo tamanho da malha, $\epsilon = \frac{1}{Re}$, Re e u são os mesmos definidos em (6.1).

7 SOLUÇÕES NUMÉRICAS PARA A EQUAÇÃO DE BURGERS

Neste capítulo aplicamos a formulação semi-discreta para resolver a equação de Burgers. Primeiramente, fazemos a linearização para o termo convectivo da equação (6.1), onde altera o tamanho do elemento em cada etapa utilizando a informação a partir do passo anterior [4, 38], tornando a equação de Burgers um problema linear local. Assim o problema (6.1)-(6.3) torna um problema 1D linear local. Em seguida, aplicamos a formulação semi-discreta abordada no Capítulo 4.

7.1 LINEARIZAÇÃO DO TERMO CONVECTIVO

Considere a equação de Burgers dada em (6.1), multiplicando ambos os lados de (6.1) por uma função teste $w \in V$ e aplicando a integral, obtemos

$$\int_0^l (u_t + uu_x - \epsilon u_{xx} - f)w dx \quad (7.1)$$

A solução do problema (6.1)-(6.3) é procurada sobre o domínio $0 \leq x \leq l$, com condições de fronteira $x = 0$ e $x = l$. Assim, consideramos o subespaço de dimensão finita V_h , do subespaço de dimensão infinita V , formado por funções lineares seccionais geradoras de conjunto de m elementos de V denotado por $V_h = [\varphi_1, \dots, \varphi_m]$, onde as funções bases φ_j são as mesmas definidas na seção 3.2.2, a partir do método elementos finitos, considerando uma partição $x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_m$, de tamanho $h_j = x_j - x_{j-1}$. Logo podemos construir uma função teste u_h , também definida no Capítulo 3, como parâmetro para descrever a função teste u_h , escolhemos os valores $u_0, u_1, u_2 \dots, u_m$ nos nós x_j .

Assim podemos reecrever a equação (7.1) aproximada como

$$\sum_{j=0}^m \int_0^l \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \varphi_i(x) + \eta \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} \varphi_i(x) u_j - \epsilon \frac{\partial^2 \varphi_j(x)}{\partial x^2} \varphi_i(x) u_j - f \varphi_i u_j \right) dx \quad (7.2)$$

$\forall \varphi_i(x), \varphi_j(x) \in V_h.$

onde $\eta = u_0 \frac{\Delta t}{h_j}$ e Δt é passo de tempo, e ainda $w_h = \varphi_i(x)$, para $i = 0, 1, 2, \dots, m$, definida como uma função teste. Portanto, podemos aplicar a formulação semi-discreta a equação aproximada (7.2).

Sem perda de generalidade uma vez que a equação de Burgers torna-se um problema 1D linear local. Consideremos o desenvolvimento da formulação semi-discreta para a equação 1D de convecção-difusão-reação feita no Capítulo 4, neste caso, o termo reativo foi considerado como sendo nulo, isto é, $\sigma = 0$.

7.2 MEFMQ COM O MÉTODO IMPLÍCITO MULTI-ESTÁGIO

A formulação MEFMQ com o método implícito multi-estágio para a equação de Burgers assume as seguintes formas matriciais, sendo

MEFMQ com R_{11}

De (4.15) com $\sigma = 0$, $D = \epsilon$ e $v = \eta$, temos

$$\begin{aligned} & \left[2[\mathbf{M}] + \left(\epsilon - \frac{\eta}{2} \right) \Delta t [\mathbf{C}] + (\epsilon - \eta) \Delta t [\mathbf{C}^T] \right] \mathbf{U}^{n+1} = \left[-2[\mathbf{M}] + \left(\epsilon - \frac{\eta}{2} \right) \Delta t [\mathbf{C}] + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\eta^2 \Delta t}{4} + (\epsilon - \eta) \right) \Delta t [\mathbf{C}^T] \right] \mathbf{U}^n + [\mathbf{F}], \end{aligned} \quad (7.3)$$

onde as matrizes de massa \mathbf{M} , de amortecimento \mathbf{C} (dependente da velocidade), de rigidez \mathbf{K} e os vetores de força global \mathbf{F} e incógnitas \mathbf{U}^{n+1} e \mathbf{U}^n são

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= [M_{ij}]_{m \times m} = \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \\ \mathbf{C} &= [C_{ij}]_{m \times m} = \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx, \\ \mathbf{K} &= [K_{ij}]_{m \times m} = \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx, \\ \mathbf{F} &= [F_i]_{m \times 1} = \int_0^l \frac{1}{2} [f^{n+1} + f^n] \left(\epsilon \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} - \frac{1}{2} \eta \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} + 2 \frac{\varphi_i(x)}{\Delta t} \right) dx, \\ \mathbf{U}^{n+1} &= [u_0^{n+1}, u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_{m-1}^{n+1}, u_m^{n+1}]^T, \\ \mathbf{U}^n &= [u_0^n, u_1^n, u_2^n, \dots, u_{m-1}^n, u_m^n]^T. \end{aligned}$$

MEFMQ com R_{22}

De (4.39) com $\sigma = 0$, $D = \epsilon$ e $v = \eta$, temos

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\epsilon \eta}{288} \Delta t [\mathbf{K}] \right] \mathbf{U}^{n+1} + \left[(-\epsilon - \eta) \frac{\Delta t}{12} [\mathbf{C}] + (\epsilon^2 - \epsilon \eta - \eta^2) \frac{\Delta t^2}{36} [\mathbf{K}] \right] \mathbf{U}^{n+1/2} = \\ & = \left[(\epsilon - \eta) \frac{\Delta t}{12} [\mathbf{C}] + (-\epsilon^2 + \epsilon \eta - \eta^2) \frac{19 \Delta t^2}{144} [\mathbf{K}] \right] \mathbf{U}^n + [\mathbf{F}] \end{aligned} \quad (7.4)$$

e de (4.40) com $\sigma = 0$, $D = \epsilon$ e $v = \eta$, temos

$$\begin{aligned} & \left[-2[\mathbf{M}] + (\epsilon + \eta) \frac{5 \Delta t}{12} [\mathbf{C}] - \eta \frac{5 \Delta t}{12} [\mathbf{C}^T] + \left(-\frac{\epsilon^2}{2} + \epsilon \eta - \frac{\eta^2}{2} \right) \frac{25 \Delta t^2}{144} [\mathbf{K}] \right] \mathbf{U}^{n+1} + \\ & + \left[2[\mathbf{M}] - \eta \frac{5 \Delta t}{12} [\mathbf{C}] + (-\epsilon + \eta) \frac{\Delta t}{3} [\mathbf{C}^T] + (-\epsilon^2 + \epsilon \eta - \eta^2) \frac{5 \Delta t^2}{144} [\mathbf{K}] \right] \mathbf{U}^{n+1/2} = \\ & = \left[(\epsilon - \eta) \frac{\Delta t}{12} [\mathbf{C}] + (-\epsilon^2 + \epsilon \eta - \eta^2) \frac{19 \Delta t^2}{144} [\mathbf{K}] \right] \mathbf{U}^n + [\mathbf{G}] \end{aligned} \quad (7.5)$$

onde as matrizes de massa \mathbf{M} , de amortecimento \mathbf{C} (dependente da velocidade), de rigidez \mathbf{K} e

os vetores de forças globais \mathbf{F} e \mathbf{G} e os vetores incógnitas \mathbf{U}^{n+1} , $\mathbf{U}^{n+1/2}$ e \mathbf{U}^n são

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= [M_{ij}]_{m \times m} = \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \\ \mathbf{C} &= [C_{ij}]_{m \times m} = \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx, \\ \mathbf{K} &= [K_{ij}]_{m \times m} = \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx, \\ \mathbf{F} &= [F_i]_{m \times 1} = \int_0^l \frac{1}{288 \Delta t} (5f^n + 8f^{n+1/2} - f^{n+1}) \left(\epsilon \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} - \right. \\ &\quad \left. - \eta \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \right) dx, \\ \mathbf{G} &= [G_i]_{m \times 1} = \int_0^l \frac{1}{288 \Delta t} (f^n - 8f^{n+1/2} - 5f^{n+1}) \left(-5\epsilon \frac{\partial^2 \varphi_i(x)}{\partial x^2} + \right. \\ &\quad \left. + 5\eta \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} + \frac{24\varphi_i(x)}{\Delta t} \right) dx, \\ \mathbf{U}^{n+1} &= [u_0^{n+1}, u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_{m-1}^{n+1}, u_m^{n+1}]^T, \\ \mathbf{U}^{n+1/2} &= [u_0^{n+1/2}, u_1^{n+1/2}, u_2^{n+1/2}, \dots, u_{m-1}^{n+1/2}, u_m^{n+1/2}]^T, \\ \mathbf{U}^n &= [u_0^n, u_1^n, u_2^n, \dots, u_{m-1}^n, u_m^n]^T.\end{aligned}$$

7.3 MEEG COM O MÉTODO IMPLÍCITO MULTI-ESTÁGIO

A formulação MEEG com o método implícito multi-estágio para a equação de Burgers assume as seguintes formas matriciais, sendo

MEEG com R_{11}

De (4.53) com $\sigma = 0$, $D = \epsilon$ e $v = \eta$, temos

$$\left[[\mathbf{M}] + (\epsilon - \eta) \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{C}^T] \right] \mathbf{U}^{n+1} = \left[[\mathbf{M}] + (-\epsilon + \eta) \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{C}^T] \right] \mathbf{U}^n + [\mathbf{F}] \quad (7.6)$$

onde as matrizes de massa \mathbf{M} , de amortecimento \mathbf{C} (dependente da velocidade), de rigidez \mathbf{K} e os vetores de força global \mathbf{F} e o incógnitas \mathbf{U}^{n+1} e \mathbf{U}^n são

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= [M_{ij}]_{m \times m} = \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \\ \mathbf{C}^T &= [C_{ij}^T]_{m \times m} = \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx, \\ \mathbf{F} &= [F_i]_{m \times 1} = \frac{1}{2} \left(\int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1} dx + \int_0^l \varphi_i(x) f^n dx \right), \\ \mathbf{U}^{n+1} &= [u_0^{n+1}, u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_{m-1}^{n+1}, u_m^{n+1}]^T, \\ \mathbf{U}^n &= [u_0^n, u_1^n, u_2^n, \dots, u_{m-1}^n, u_m^n]^T.\end{aligned}$$

MEFG com R_{22}

De (4.76) com $\sigma = 0$, $D = \epsilon$ e $v = \eta$, temos

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\eta}{24} [\mathbf{M}] - \frac{\epsilon}{24} [\mathbf{C}^T] + \frac{\eta}{24} [\mathbf{C}] \right] \mathbf{U}^{n+1} + \left[[\mathbf{M}] + (-\epsilon + \eta) \frac{\Delta t}{3} [\mathbf{C}^T] \right] \mathbf{U}^{n+1/2} = \\ & = \left[[\mathbf{M}] + (-\epsilon + \eta) \frac{19\Delta t}{24} [\mathbf{C}^T] \right] \mathbf{U}^n + [\mathbf{F}] \end{aligned} \quad (7.7)$$

e de (4.77) com $\sigma = 0$, $D = \epsilon$ e $v = \eta$, temos

$$\begin{aligned} & \left[[\mathbf{M}] + (-\epsilon + \eta) \frac{5\Delta t}{24} [\mathbf{C}^T] \right] \mathbf{U}^{n+1} + \left[[\mathbf{M}] + (-\epsilon + \eta) \frac{\Delta t}{3} [\mathbf{C}^T] \right] \mathbf{U}^{n+1/2} = \\ & = \left[(-\epsilon + \eta) \frac{25\Delta t}{24} [\mathbf{C}^T] \right] \mathbf{U}^n + [\mathbf{G}] \end{aligned} \quad (7.8)$$

onde as matrizes de massa \mathbf{M} , de amortecimento \mathbf{C} (dependente da velocidade), de rigidez \mathbf{K} e os vetores de forças globais \mathbf{F} e \mathbf{G} e os vetores incógnitas \mathbf{U}^{n+1} , $\mathbf{U}^{n+1/2}$ e \mathbf{U}^n são

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= [M_{ij}]_{m \times m} = \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \\ \mathbf{C}^T &= [C_{ij}]_{m \times m}^T = \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx, \\ \mathbf{K} &= [K_{ij}]_{m \times m} = \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx, \\ \mathbf{F} &= [F_i]_{m \times 1} = \frac{5}{24} \int_0^l \varphi_i(x) f^n dx - \frac{1}{3} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1/2} dx + \frac{1}{24} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1} dx \\ \mathbf{G} &= [G_i]_{m \times 1} = -\frac{1}{24} \int_0^l \varphi_i(x) f^n dx + \frac{1}{3} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1/2} dx + \frac{5}{24} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1} dx \\ \mathbf{U}^{n+1} &= [u_0^{n+1}, u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_{m-1}^{n+1}, u_m^{n+1}]^T, \\ \mathbf{U}^{n+1/2} &= [u_0^{n+1/2}, u_1^{n+1/2}, u_2^{n+1/2}, \dots, u_{m-1}^{n+1/2}, u_m^{n+1/2}]^T, \\ \mathbf{U}^n &= [u_0^n, u_1^n, u_2^n, \dots, u_{m-1}^n, u_m^n]^T. \end{aligned}$$

7.4 SUPG COM O MÉTODO IMPLÍCITO MULTI-ESTÁGIO

A formulação SUPG com o método implícito multi-estágio para a equação de Burgers assume as seguintes formas matriciais, sendo

SUPG com R_{11}

De (4.90) com $\sigma = 0$, $D = \epsilon$ e $v = \eta$, temos

$$\begin{aligned} & \left[[\mathbf{M}] + \left(\frac{-\epsilon \Delta t}{2} + \frac{\eta \Delta t}{2} \right) [\mathbf{C}^T] + \tau \eta [\mathbf{C}] + \left(\frac{\tau \eta \epsilon \Delta t}{2} + \frac{\tau \eta^2 \Delta t}{2} \right) [\mathbf{K}] \right] \mathbf{U}^{n+1} = [[\mathbf{M}] + \\ & + \left(\frac{-\epsilon \Delta t}{2} + \frac{\eta \Delta t}{2} \right) [\mathbf{C}^T] + \tau \eta [\mathbf{C}] + \left(\frac{\tau \eta \epsilon \Delta t}{2} + \frac{\tau \eta^2 \Delta t}{2} \right) [\mathbf{K}]] \mathbf{U}^n + [\mathbf{F}] + [\hat{\mathbf{F}}] \end{aligned} \quad (7.9)$$

onde as matrizes de massa \mathbf{M} , de amortecimento \mathbf{C} (dependente da velocidade), de rigidez \mathbf{K} e os vetores de forças globais \mathbf{F} e $\hat{\mathbf{F}}$ e os vetores incógnitas \mathbf{U}^{n+1} e \mathbf{U}^n são

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= [M_{ij}]_{m \times m} = \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \\ \mathbf{C}^T &= [C_{ij}]_{m \times m}^T = \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx, \\ \mathbf{K} &= [K_{ij}]_{m \times m} = \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx, \\ \mathbf{F} &= [F_i]_{m \times 1} = \frac{1}{2} \left(\int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1} dx + \int_0^l \varphi_i(x) f^n dx \right) \\ \hat{\mathbf{F}} &= [\hat{F}_i]_{m \times 1} = \frac{1}{2} \left(\int_0^l \tau \eta \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} f^{n+1} dx + \int_0^l \tau \eta \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} f^n dx \right) \\ \mathbf{U}^{n+1} &= [u_0^{n+1}, u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_{m-1}^{n+1}, u_m^{n+1}]^T, \\ \mathbf{U}^n &= [u_0^n, u_1^n, u_2^n, \dots, u_{m-1}^n, u_m^n]^T.\end{aligned}$$

SUPG com R_{22}

De (4.114) com $\sigma = 0$, $D = \epsilon$ e $v = \eta$, temos

$$\begin{aligned}& \left[\left(\frac{-\epsilon}{24} + \frac{\eta}{24} \right) [\mathbf{C}^T] + \left(\frac{-\epsilon \tau \eta}{24} + \frac{\tau \eta^2}{24} \right) [\mathbf{K}] \right] \mathbf{U}^{n+1} + [[\mathbf{M}] + \\ & + \left(\frac{-\epsilon \Delta t}{3} + \frac{\eta \Delta t}{3} \right) [\mathbf{C}^T] + \tau \eta [\mathbf{C}] + \left(\frac{-\epsilon \Delta t}{3} + \frac{\eta \Delta t}{3} \right) [\mathbf{K}]] \mathbf{U}^{n+1/2} = \\ & = \left[[\mathbf{M}] + \left(\frac{-19\epsilon \tau \eta}{24} + \frac{19\tau \eta}{24} \right) [\mathbf{C}^T] \right] \mathbf{U}^n + [\mathbf{F}] + [\hat{\mathbf{F}}]\end{aligned}\quad (7.10)$$

e de (4.115) com $\sigma = 0$, $D = \epsilon$ e $v = \eta$, temos

$$\begin{aligned}& \left[[\mathbf{M}] + \left(\frac{-5\epsilon \Delta t}{24} + \frac{5\eta \Delta t}{24} \right) [\mathbf{C}^T] + \tau \eta [\mathbf{C}] + \left(\frac{-5\epsilon \tau \eta \Delta t}{24} + \frac{5\tau \eta^2 \Delta t}{24} \right) [\mathbf{K}] \right] \mathbf{U}^{n+1} + [[\mathbf{M}] + \\ & + \left(\frac{-\epsilon \Delta t}{3} + \frac{\eta \Delta t}{3} \right) [\mathbf{C}^T] + \tau \eta [\mathbf{C}] + \left(\frac{-\epsilon \Delta t}{3} + \frac{\eta \Delta t}{3} \right) [\mathbf{K}]] \mathbf{U}^{n+1/2} = \\ & = \left[[\mathbf{M}] + \left(\frac{-25\epsilon}{24} + \frac{25\eta}{24} \right) [\mathbf{C}^T] + \left(\frac{-25\epsilon \tau \eta}{24} + \frac{25\tau \eta^2}{24} \right) [\mathbf{K}] \right] \mathbf{U}^n + [\mathbf{G}] + [\hat{\mathbf{G}}]\end{aligned}\quad (7.11)$$

onde as matrizes de massa \mathbf{M} , de amortecimento \mathbf{C} (dependente da velocidade), de rigidez \mathbf{K} e

os vetores de forças globais \mathbf{F} , $\hat{\mathbf{F}}$, \mathbf{G} e $\hat{\mathbf{G}}$ e os vetores incógnitas \mathbf{U}^{n+1} , $\mathbf{U}^{n+1/2}$ \mathbf{U}^n são

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= [M_{ij}]_{m \times m} = \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \\
\mathbf{C}^T &= [C_{ij}]_{m \times m}^T = \int_0^l \varphi_i(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx, \\
\mathbf{K} &= [K_{ij}]_{m \times m} = \int_0^l \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx, \\
\mathbf{F} &= [F_i]_{m \times 1} = \frac{5}{24} \int_0^l \varphi_i(x) f^n dx - \frac{1}{3} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1/2} dx + \frac{1}{24} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1} dx \\
\hat{\mathbf{F}} &= [\hat{F}_i]_{m \times 1} = \frac{5}{24} \int_0^l \tau \eta \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_i(x) f^n dx - \frac{1}{3} \int_0^l \tau \eta \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_i(x) f^{n+1/2} dx + \\
&+ \frac{1}{24} \int_0^l \tau \eta \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_i(x) f^{n+1} dx, \\
\mathbf{G} &= [G_i]_{m \times 1} = -\frac{1}{24} \int_0^l \varphi_i(x) f^n dx + \frac{1}{3} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1/2} dx + \frac{5}{24} \int_0^l \varphi_i(x) f^{n+1} dx \\
\hat{\mathbf{G}} &= [\hat{G}_i]_{m \times 1} = -\frac{1}{24} \int_0^l \tau \eta \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} f^n dx + \frac{1}{3} \int_0^l \tau \eta \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} f^{n+1/2} dx + \frac{5}{24} \int_0^l \tau \eta \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} f^{n+1} dx \\
\mathbf{U}^{n+1} &= [u_0^{n+1}, u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_{m-1}^{n+1}, u_m^{n+1}]^T, \\
\mathbf{U}^{n+1/2} &= [u_0^{n+1/2}, u_1^{n+1/2}, u_2^{n+1/2}, \dots, u_{m-1}^{n+1/2}, u_m^{n+1/2}]^T, \\
\mathbf{U}^n &= [u_0^n, u_1^n, u_2^n, \dots, u_{m-1}^n, u_m^n]^T.
\end{aligned}$$

8 RESULTADOS NUMÉRICOS PARA A EQUAÇÃO DE BURGERS

Neste capítulo apresentamos os resultados numéricos para a equação de Burgers. Consideramos dois exemplos, cujas soluções analíticas são conhecidas. Apresentamos as análises quanto à influência do passo de tempo Δt , a influência da malha e a influência dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados as formulações MEFMQ, MEFG e SUPG. Para a análise de erro utilizamos a norma L^2 , comparando as soluções numéricas com a solução analítica dos exemplos avaliados. Como avaliado para a equação 1D de convecção-difusão-reação, nosso foco continua sobre situações onde predomina o termo de convecção.

8.1 PROPAGAÇÃO UNIFORME DE CHOQUE

Seja um problema de propagação uniforme de choque [39], para a equação de Burgers (6.1), com a condição inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_1 = 0.5, & \text{se } x < 0 \\ u_2 = 1.5, & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (8.1)$$

A solução analítica para este problema é dada por [39, 40]

$$u(x, t) = u_1 + \frac{(u_2 - u_1)}{\left[1 + \exp\left(-Re \frac{u_2 - u_1}{2}(x - Ut)\right)\right]}, \quad (8.2)$$

onde Re é número de Reynolds e $U = (u_1 + u_2)/2$. Vamos restringir o domínio, tal que, $x \in (-0.5, 0.5)$ e as condições de fronteira satisfazem $u(-0.5, 0) = 0.5$ e $u(0.5, 0) = 1.5$. A seguir, apresentamos os resultados numéricos para este problema. Fixamos o número de Reynolds $Re = 10000$, para o tempo final de simulação $t = 0.1$, lembrando que para este valor de Re , estamos avaliando a situação onde a convecção é dominante.

8.1.1 A influência do passo de tempo

Vamos mostrar a influência do passo de tempo Δt para $Re = 10000$. Para isto utilizamos 3000 elementos lineares para discretizar o domínio e dois valores de passo de tempo $\Delta t = 3.3 \times 10^{-4}$ e $\Delta t = 2 \times 10^{-4}$, que implica diretamente no número de Courant, este variando $0.6 < C < 1$. Apresentamos os resultados dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados as formulações MEFG, MEFMQ e SUPG. Fazemos uma análise sobre a região de convergência das soluções numéricas apresentadas, utilizando a norma L^2 .

Nas Figuras 8.1-8.3, apresentamos os resultados dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados as formulações MEFG, MEFMQ e SUPG para $\Delta t = 3.3 \times 10^{-4}$ e $\Delta t = 2 \times 10^{-4}$.

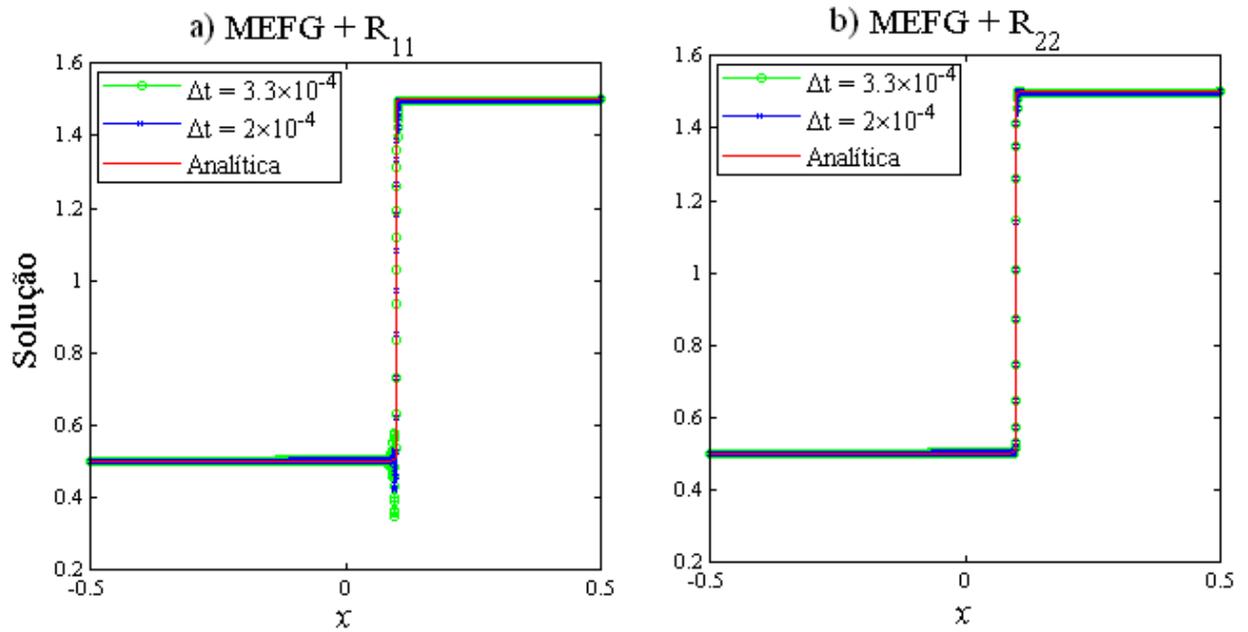


Figura 8.1: Influência do passo de tempo nas soluções numéricas a) MEFG+ R_{11} e b) MEFG+ R_{22} .

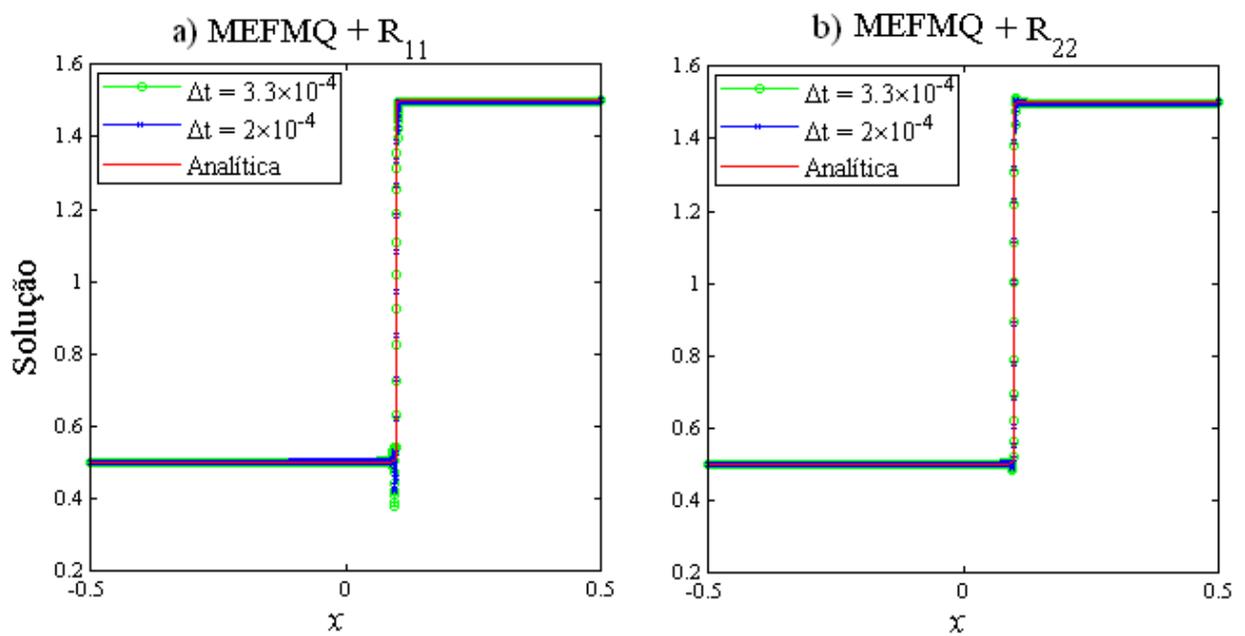


Figura 8.2: Influência do passo de tempo nas soluções numéricas b) MEFMQ+ R_{11} e c) MEFMQ+ R_{22} .

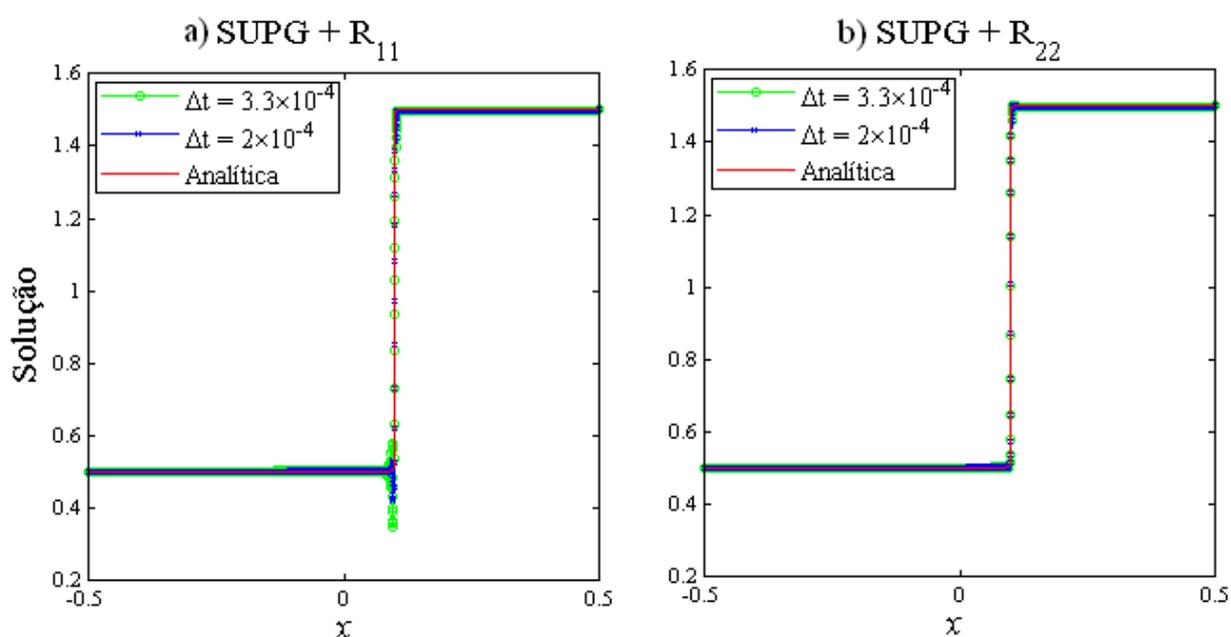


Figura 8.3: Influência do passo de tempo nas soluções numéricas a) SUPG+ R_{11} e b) SUPG+ R_{22} .

Podemos observar, Figuras 8.1-8.3, que a medida que diminuimos o passo de tempo, as dissipações das soluções numéricas diminuem significativamente, para os métodos MEEG+ R_{11} , MEFMQ+ R_{11} e SUPG+ R_{11} . Por outro lado, os resultados obtidos através dos aproximantes de Padé R_{22} adicionados aos métodos MEEG, MEFMQ e SUPG, para os passos de tempo avaliados apresentaram resultados melhores, observando que para $\Delta t = 0.00033$ os resultados são bem mais significativos do que os métodos MEEG+ R_{11} , MEFMQ+ R_{11} e SUPG+ R_{11} . Confirmamos os resultados numéricos na Tabelas 8.1, onde apresentamos o erro dos métodos aqui estudados em função do passo de tempo.

Tabela 8.1: Erro das aproximações para $t = 0.1$, $h = 1/3000$ e $Re = 10000$.

| Soluções numéricas | Passo de tempo Δt | $\log_{10} \ E\ $ |
|--------------------|---------------------------|-------------------|
| MEFG+ R_{11} | 0.00033 | $-8.8234e - 005$ |
| | 0.0002 | $-6.4891e - 004$ |
| MEFG+ R_{22} | 0.00033 | $-6.8995e - 004$ |
| | 0.0002 | $-6.9032e - 004$ |
| MEFMQ+ R_{11} | 0.00033 | $-9.7454e - 005$ |
| | 0.0002 | $-6.5115e - 004$ |
| MEFMQ+ R_{22} | 0.00033 | $-6.6109e - 004$ |
| | 0.0002 | $-6.6904e - 004$ |
| SUPG+ R_{11} | 0.00033 | $-8.8234e - 005$ |
| | 0.0002 | $-6.4891e - 004$ |
| SUPG+ R_{22} | 0.00033 | $-6.9093e - 004$ |
| | 0.0002 | $-6.9054e - 004$ |

8.1.2 A influência da malha

Avaliamos ainda a influência da malha também para a situação onde a convecção é dominante, quando $Re = 10000$. Discretizamos o domínio em 3000 e 4000 elementos lineares. Apresentamos os resultados dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados às formulações MEFG, MEFMQ e SUPG, assim como uma análise sobre a região de convergência das soluções numéricas apresentadas utilizamos a norma L^2 .

Nas Figuras 8.4-8.6, apresentamos os resultados numéricos dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados as formulações MEFG, MEFMQ e SUPG comparados com a solução analítica para duas malhas, $h = 1/3000$ e $h = 1/4000$.

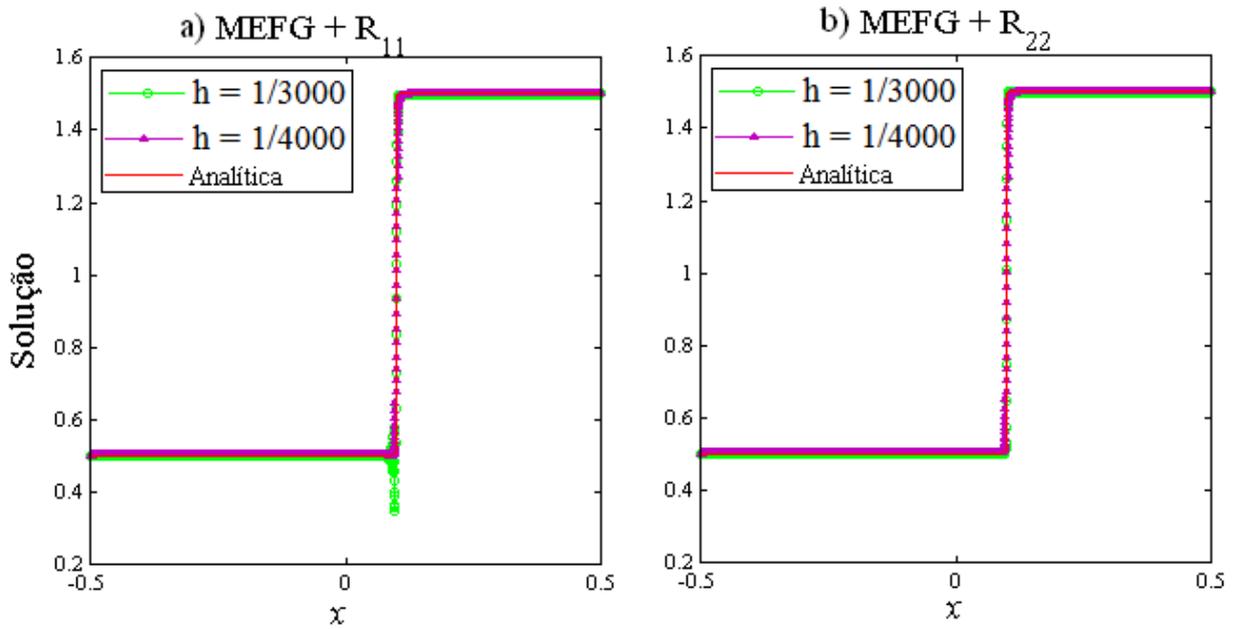


Figura 8.4: a) MEFG+ R_{11} e b) MEFG+ R_{22} , para $t = 0.1$ e $Re = 10000$.

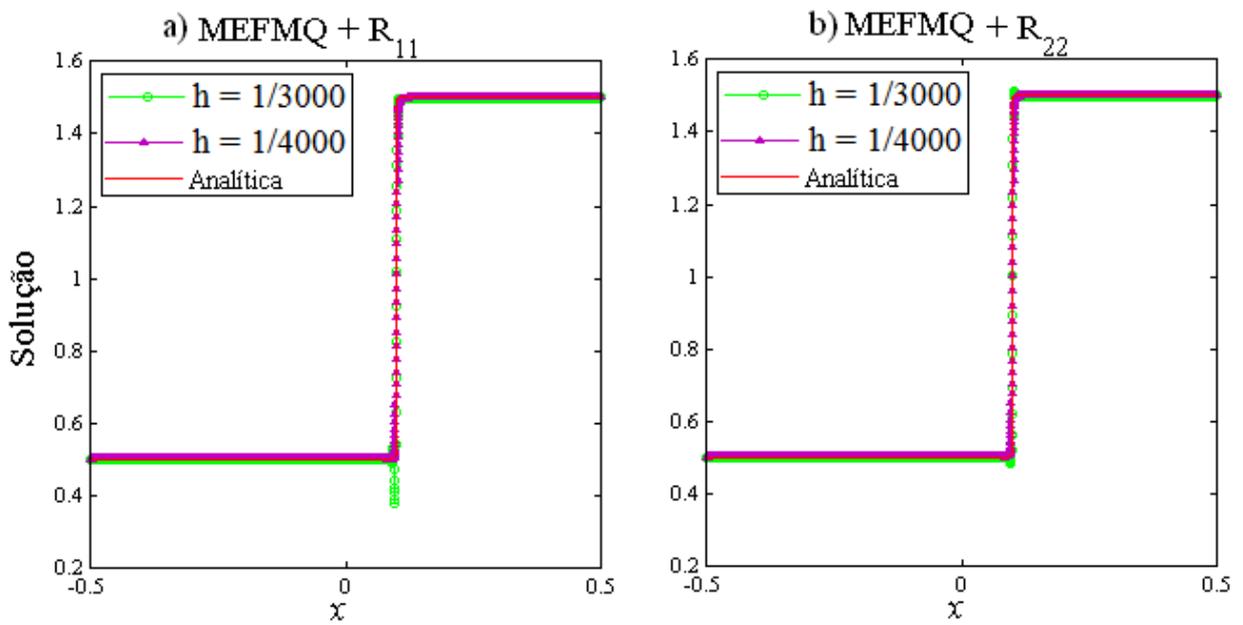


Figura 8.5: a) MEFMQ+ R_{11} e b) MEFMQ+ R_{22} , para $t = 0.1$ e $Re = 10000$.

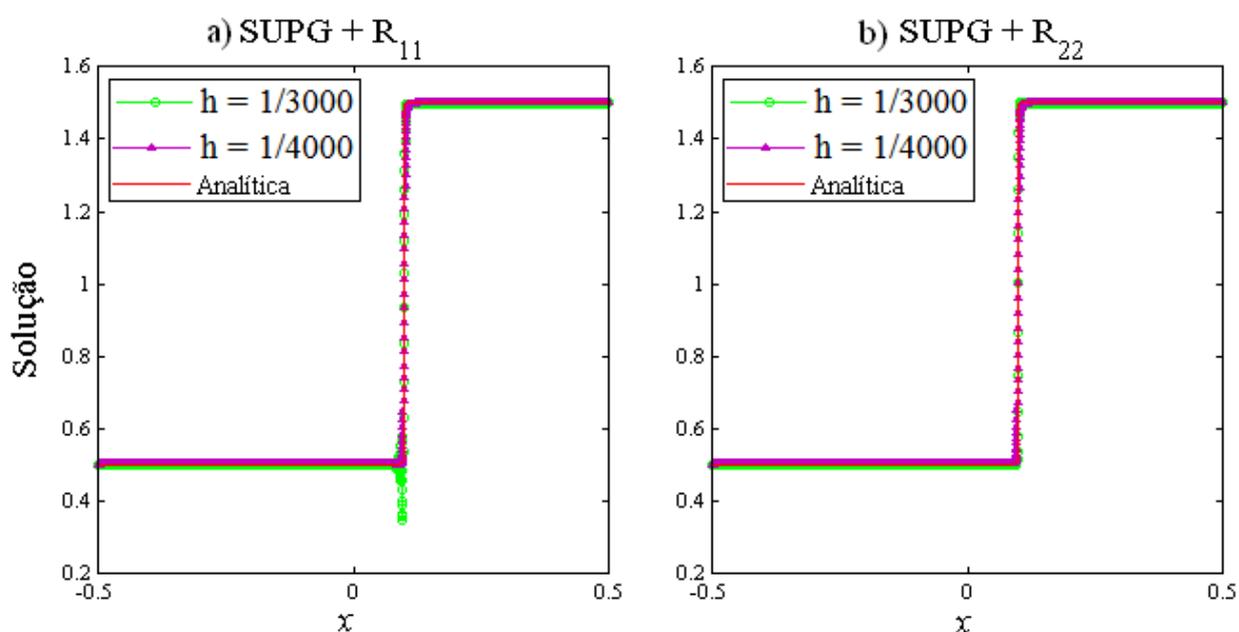


Figura 8.6: a) SUPG+ R_{11} e b) SUPG+ R_{22} , para $t = 0.1$ e $Re = 10000$.

Podemos observar, nas Figuras 8.4-8.6, que os resultados numéricos melhoraram consideravelmente, quando aumentamos o número de elementos na malha. Na Tabela 8.2, apresentamos o erro entre os métodos aqui estudados em função do refinamento da malha. Observamos que, os resultados obtidos pelos métodos MEFG+ R_{11} e SUPG+ R_{11} convergiram para os mesmo valores, assim como os resultados numéricos dos métodos MEFG+ R_{22} e SUPG+ R_{22} .

Tabela 8.2: Erro das aproximações para $t = 0.1$ e $Re = 10000$.

| Soluções numéricas | Elementos na malha | $\log_{10} \ E\ $ |
|--------------------|--------------------|-------------------|
| MEFG+ R_{11} | 3000 | $-8.8234e - 005$ |
| | 4000 | $-4.2977e - 004$ |
| MEFG+ R_{22} | 3000 | $-6.8995e - 004$ |
| | 4000 | $-4.3010e - 004$ |
| MEFMQ+ R_{11} | 3000 | $-9.7454e - 005$ |
| | 4000 | $-4.2953e - 004$ |
| MEFMQ+ R_{22} | 3000 | $-6.6109e - 004$ |
| | 4000 | $-4.2982e - 004$ |
| SUPG+ R_{11} | 3000 | $-8.8234e - 005$ |
| | 4000 | $-4.2977e - 004$ |
| SUPG+ R_{22} | 3000 | $-6.9093e - 004$ |
| | 4000 | $-4.3010e - 004$ |

8.1.3 A influência dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22}

Por fim, avaliamos a influência dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} sobre o intervalo de tempo $0 \leq t \leq 0.1$, tendo sempre como meta avaliar se o método está aumentando a região de convergência da solução numérica. Nossa análise aqui é também, sobre a situação onde a convecção é dominante $Re = 10000$. Para esta análise utilizamos 3000 elementos lineares. Apresentamos os resultados numéricos e analítico, em forma de superfície onde consideramos uma malha 3000×304 elementos em $-0.5 \leq x \leq 0.5$ e $0 \leq t \leq 0.1$, respectivamente, apresentamos os resultados numéricos para o tempo de simulação final $t = 0.1$ e comparamos com a solução analítica [39, 40].

Apresentamos, na Figura 8.7, a superfície da solução analítica dada na equação (8.2), para $-0.5 \leq x \leq 0.5$ e $0 \leq t \leq 0.1$, sendo $\Delta x = 3.3 \times 10^{-4}$.

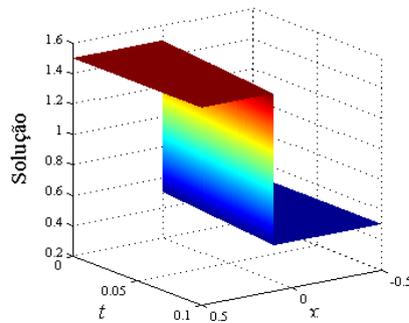


Figura 8.7: Superfície da solução analítica, equação (8.2).

Nas Figuras 8.8-8.10 apresentamos: a) Comparações entre os aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados às formulações MEFG, MEFMQ e SUPG, respectivamente, considerando um corte da solução para o tempo final de simulação, $t = 0.1$, b) e c) Superfícies das soluções dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionadas às formulações MEFG, MEFMQ e SUPG, respectivamente, para $-0.5 \leq x \leq 0.5$ e $0 \leq t \leq 0.1$, sendo $\Delta x = \Delta t = 3.3 \times 10^{-4}$.

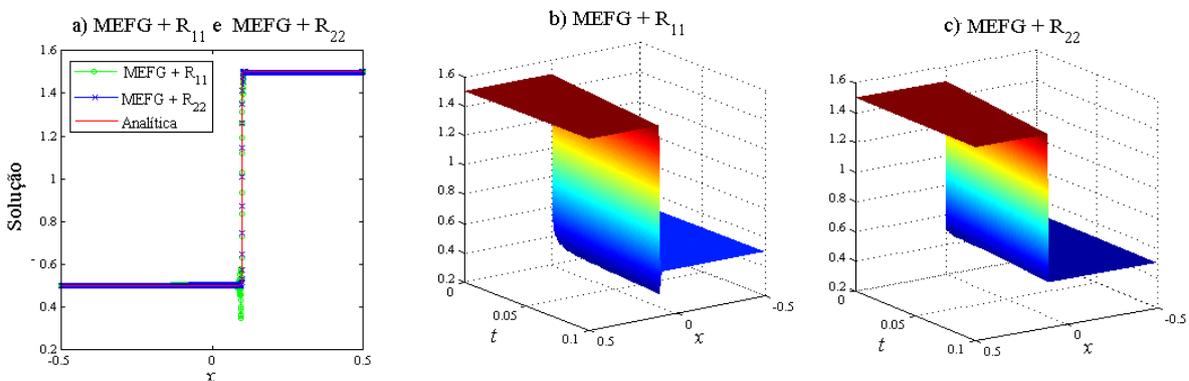


Figura 8.8: a) Comparações entre os aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados à formulação MEFG, considerando um corte da solução para o tempo final de simulação, $t = 0.1$; b) e c) Superfícies das soluções dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionadas à formulação MEFG.

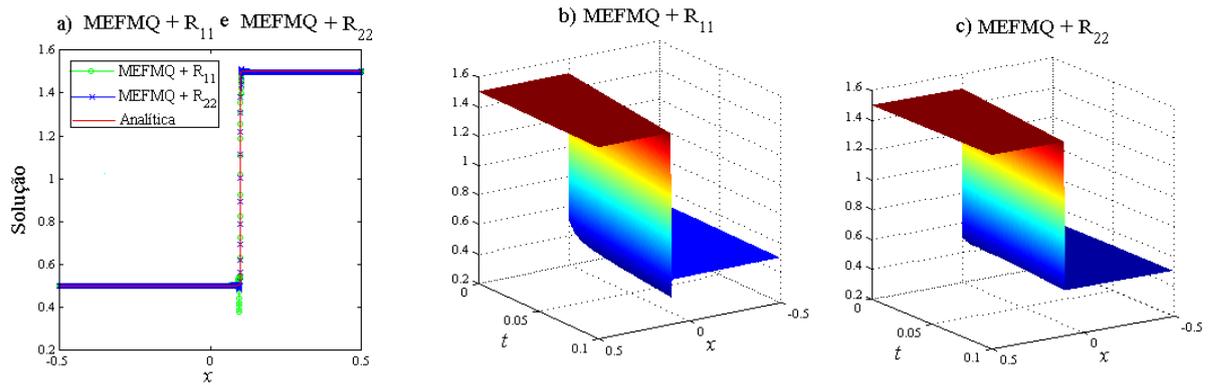


Figura 8.9: a) Comparações entre os aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados a formulação MEFMQ, considerando um corte da solução para o tempo final de simulação, $t = 0.1$; b) e c) Superfícies das soluções dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionadas a formulação MEFMQ.

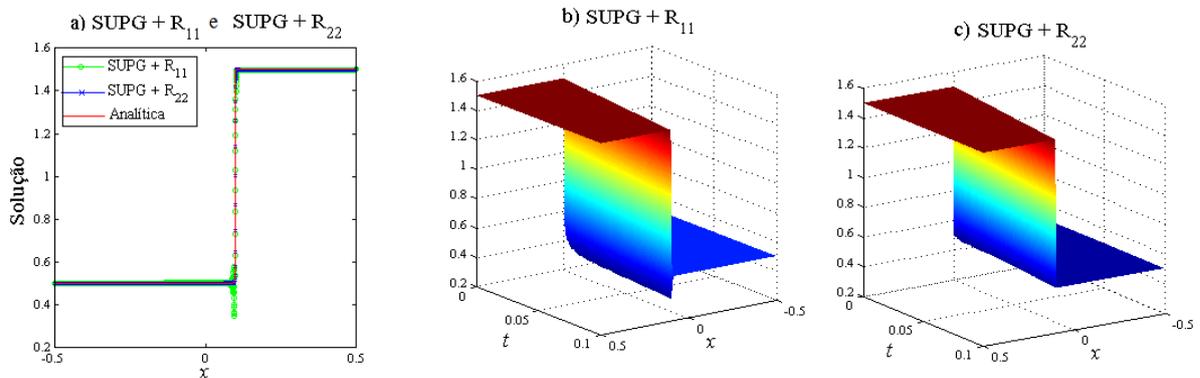


Figura 8.10: a) Comparações entre os aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados a formulação SUPG, considerando um corte da solução para o tempo final de simulação, $t = 0.1$; b) e c) Superfícies das soluções dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionadas a formulação SUPG.

Podemos observar, Figuras 8.8-8.10, que quando adicionamos os aproximantes de Padé R_{22} , as soluções numéricas melhoraram consideravelmente. Confirmamos estas melhoras na Tabela 8.3 onde apresentamos os erros dos métodos aqui estudados.

Tabela 8.3: Erro das aproximações para $h = 1/3000$ e $Re = 10000$.

| Soluções Numéricas | $\log_{10} \ E\ $ |
|--------------------|-------------------|
| MEFG+ R_{11} | $-8.8234e - 005$ |
| MEFG+ R_{22} | $-6.8995e - 004$ |
| MEFMQ+ R_{11} | $-9.7454e - 005$ |
| MEFMQ+ R_{22} | $-6.6109e - 004$ |
| SUPG+ R_{11} | $-8.8234e - 005$ |
| SUPG+ R_{22} | $-6.9093e - 004$ |

Finalmente podemos afirmar, que os resultados numéricos obtidos neste exemplo são consideravelmente melhor quando comparados ao resultado obtido em [39], visto que diminuimos o número de elementos na malha. Evidentemente, as formulações de método de elementos finitos aplicados ao problema com descontinuidade apresenta oscilações na solução numérica. Essas oscilações tornam os métodos pouco estáveis, obtendo soluções com fortes gradientes ou descontinuidades.

8.2 SOLUÇÃO TESTE PARA A EQUAÇÃO DE BURGERS

Considere uma solução analítica para a equação de Burgers (6.1)-(6.2) dada por [41]

$$u(x, t) = \frac{2\epsilon\pi \exp(\pi^2\epsilon t) \sin(\pi x)}{a + \exp(-\pi^2\epsilon t) \cos(\pi x)}, \quad \text{com } a > 1 \quad (8.3)$$

com condição inicial

$$u(x, 0) = \frac{2\epsilon\pi \sin(\pi x)}{a + \cos(\pi x)}, \quad a > 1 \quad (8.4)$$

onde $\epsilon = 1/Re$ é o coeficiente de viscosidade e Re é o número de Reynolds. Seja $0 \leq x \leq 1$ o domínio com as condições fronteira de $u(0, t) = 0 = u(1, t)$.

Para ilustrar os resultados desta seção, utilizamos $a = 2$, $Re = 100000$, para tempo de simulação final $t = 1$.

8.2.1 A influência do passo de tempo

Vamos mostrar a influência do passo de Δt , utilizamos 50 elementos lineares para discretizar o domínio. Avaliamos a situação onde convecção é dominante, isto é, $Re = 10000$. Para isto consideramos três valores de passo de tempo $\Delta t = 0.5$, $\Delta t = 0.05$ e $\Delta t = 0.01$, que implica diretamente no número de Courant, correspondendo $0.1 < C < 1$ e apresentamos os resultados dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados as formulações MEFG, MEFMQ e SUPG, assim como uma análise sobre a região de convergência das soluções numéricas apresentadas utilizamos a norma L^2 .

Nas Figuras 8.11-8.13, apresentamos os resultados dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados as formulações MEFG, MEFMQ e SUPG, para três valores de passo de tempo, sendo $\Delta t = 0.5$, $\Delta t = 0.05$ e $\Delta t = 0.01$.

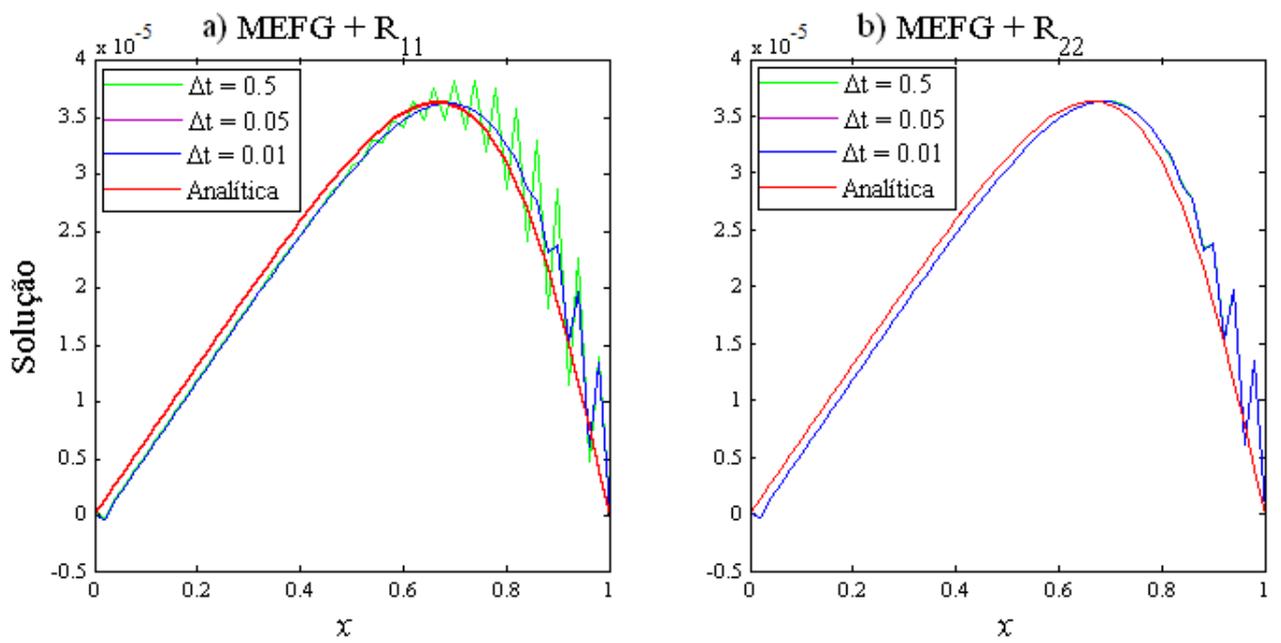


Figura 8.11: Influência do passo de tempo nas soluções numéricas a) MEFG+ R_{11} e b) MEFG+ R_{22}

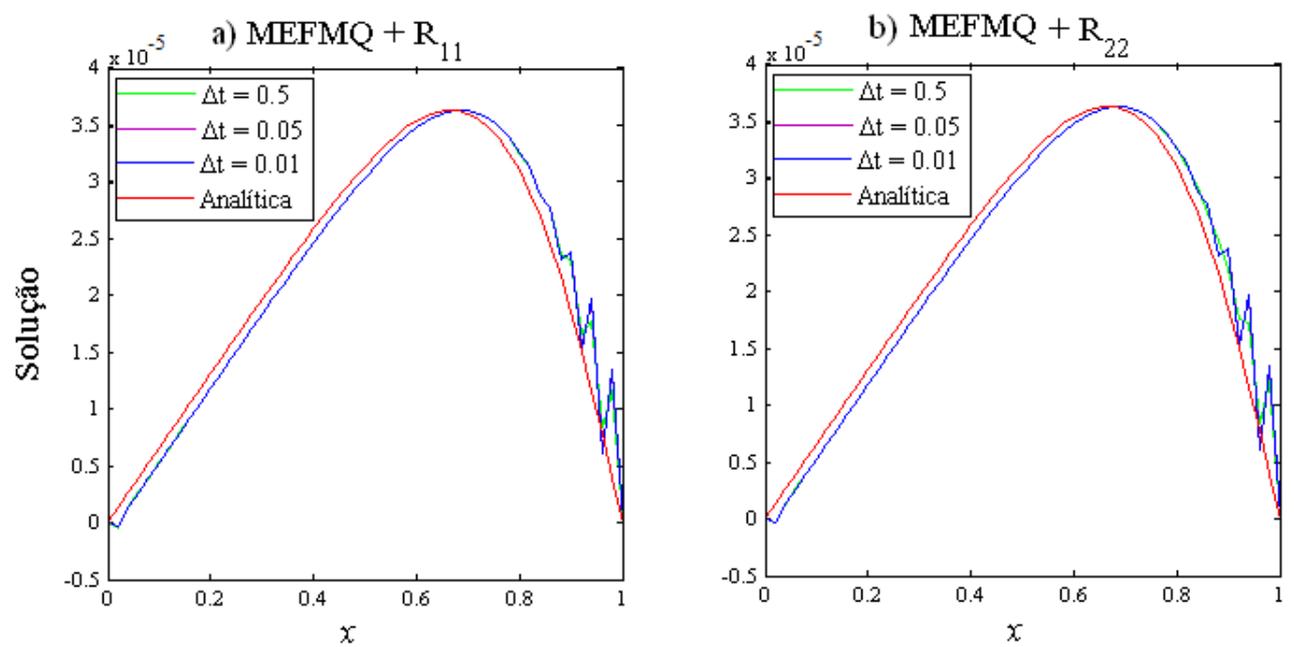


Figura 8.12: Influência do passo de tempo nas soluções numéricas a) MEFMQ+ R_{11} e b) MEFMQ+ R_{22}

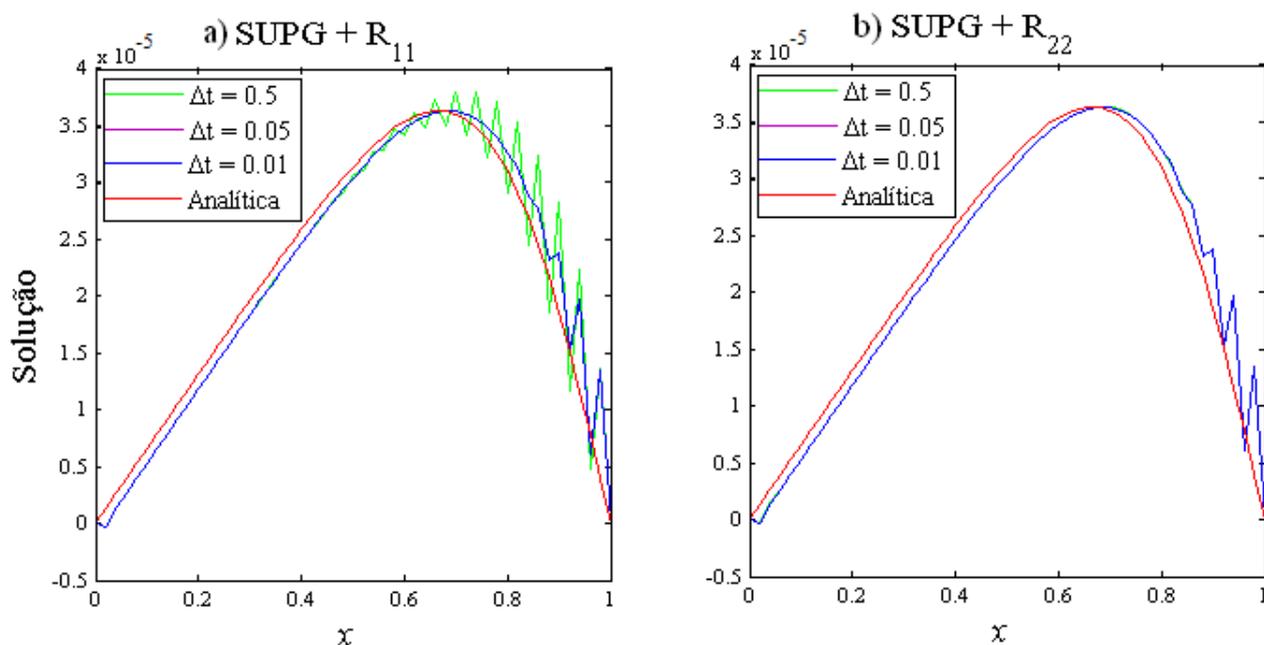


Figura 8.13: Influência do passo de tempo nas soluções numéricas a) SUPG+ R_{11} e b) SUPG+ R_{22}

Podemos observar, nas Figuras 8.11-8.13, que os métodos MEFMQ+ R_{11} e SUPG+ R_{11} obtiveram resultados ruins ao passo de $\Delta t = 0.5$, por outro lado, os métodos MEFG+ R_{22} , MEFMQ+ R_{11} , MEFMQ+ R_{22} e SUPG+ R_{11} , para o $\Delta t = 0.5$, apresentaram resultados melhores, porém esse resultados apresentaram pequenas oscilações. Contudo, quando diminuimos o passo de tempo, as soluções obtidas através dos métodos MEFG+ R_{11} e SUPG+ R_{11} , MEFMQ+ R_{11} melhoram e se assemelham as soluções obtidas através dos métodos MEFG+ R_{22} , MEFMQ+ R_{11} , MEFMQ+ R_{22} e SUPG+ R_{11} . Ainda, observamos que em todos os resultados obtidos apresentaram pequenas oscilações. Confirmamos os tais resultados numéricos, na Tabela 8.4, onde apresentamos o erro dos métodos em função do passo de tempo.

Tabela 8.4: Erro das aproximações para $t = 1$ e $Re = 100000$.

| Soluções numéricas | Passo de tempo Δt | $\log_{10} \ E\ $ |
|--------------------|---------------------------|-------------------|
| MEFG+ R_{11} | 0.5 | $-1.7279e - 003$ |
| | 0.05 | $-2.0710e - 002$ |
| | 0.01 | $-2.0724e - 002$ |
| MEFG+ R_{22} | 0.5 | $-2.0756e - 002$ |
| | 0.05 | $-2.0724e - 002$ |
| | 0.01 | $-2.0724e - 002$ |
| MEFMQ+ R_{11} | 0.5 | $-2.1945e - 002$ |
| | 0.05 | $-2.0798e - 002$ |
| | 0.01 | $-2.0724e - 002$ |
| MEFMQ+ R_{22} | 0.5 | $-2.2013e - 002$ |
| | 0.05 | $-2.0730e - 002$ |
| | 0.01 | $-2.0741e - 002$ |
| SUPG+ R_{11} | 0.5 | $-1.7636e - 003$ |
| | 0.05 | $-2.0730e - 002$ |
| | 0.01 | $-2.0729e - 002$ |
| SUPG+ R_{22} | 0.5 | $-2.0730e - 002$ |
| | 0.05 | $-2.0730e - 002$ |
| | 0.01 | $-2.0729e - 002$ |

E por último, na Figura 8.14, apresentamos a evolução do erro entre as formulações em função do passo de tempo. Obtivemos o gráfico da Figura 8.14 na escala $\log_{10}(\Delta t) \times \log_{10} \|E\|$, onde m na legenda do gráfico descreve a inclinação da reta.

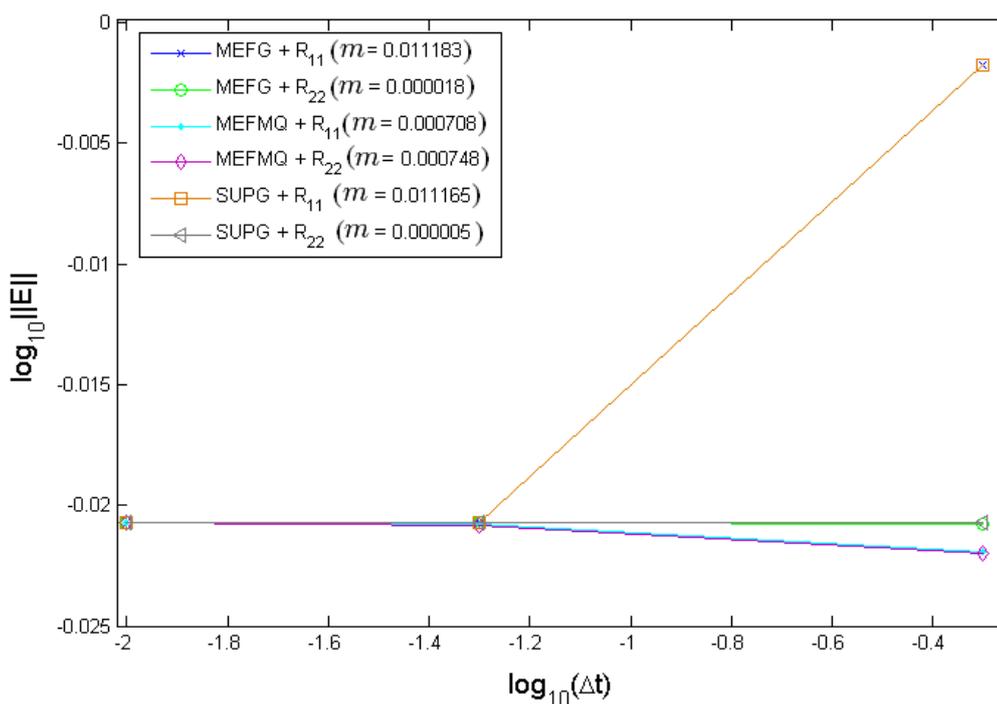


Figura 8.14: Convergência dos resultados numéricos para $t = 1$, $h = 1/50$ e $Re = 100000$, em função do passo de tempo.

8.2.2 A influência da malha

Avaliamos ainda a influência da malha também para a situação onde a convecção é dominante, quando $Re = 10000$. Discretizamos o domínio em 50, 680 e 1000 elementos lineares. Apresentamos os resultados dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados as formulações MEFQ, MEFMQ e SUPG, assim como uma análise sobre a região de convergência das soluções numéricas apresentadas utilizamos a norma L^2 .

Nas Figuras 8.15-8.8.17, apresentamos os resultados dos aproximantes de Padé R_{11} e R_{22} adicionados as formulações MEFQ, MEFMQ e SUPG, para três malhas, sendo $h = 1/50$, $h = 1/680$ e $h = 1000$.

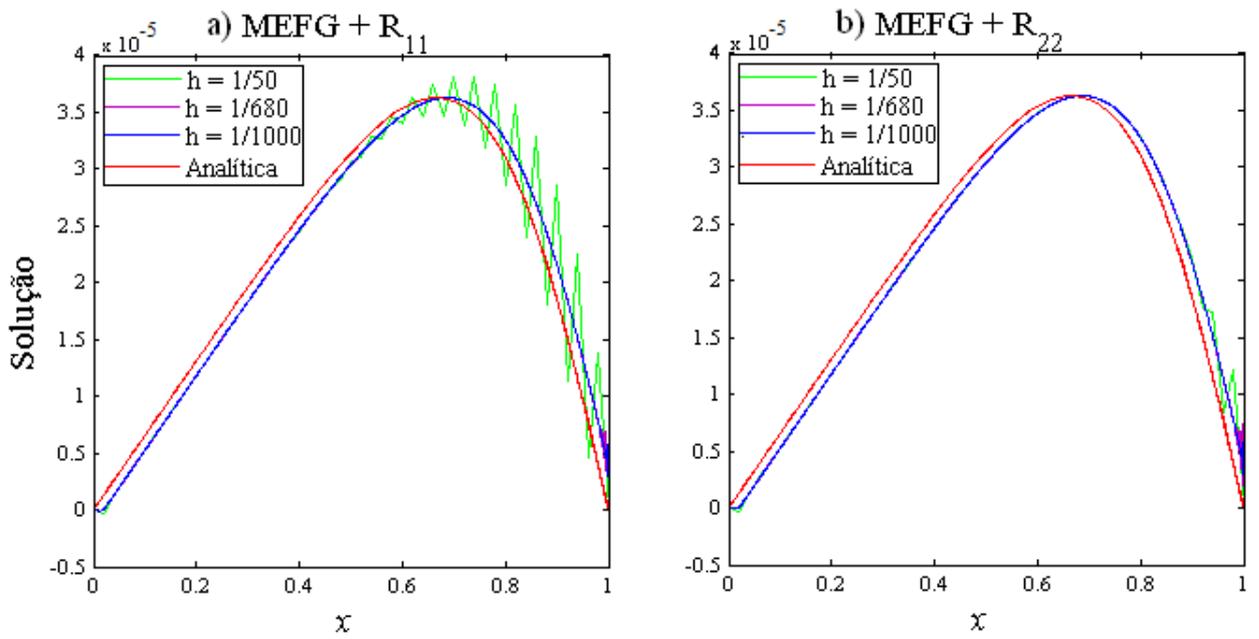


Figura 8.15: a) MEFG+ R_{11} e b) MEFG+ R_{22} para $t = 1$ e $Re = 100000$.

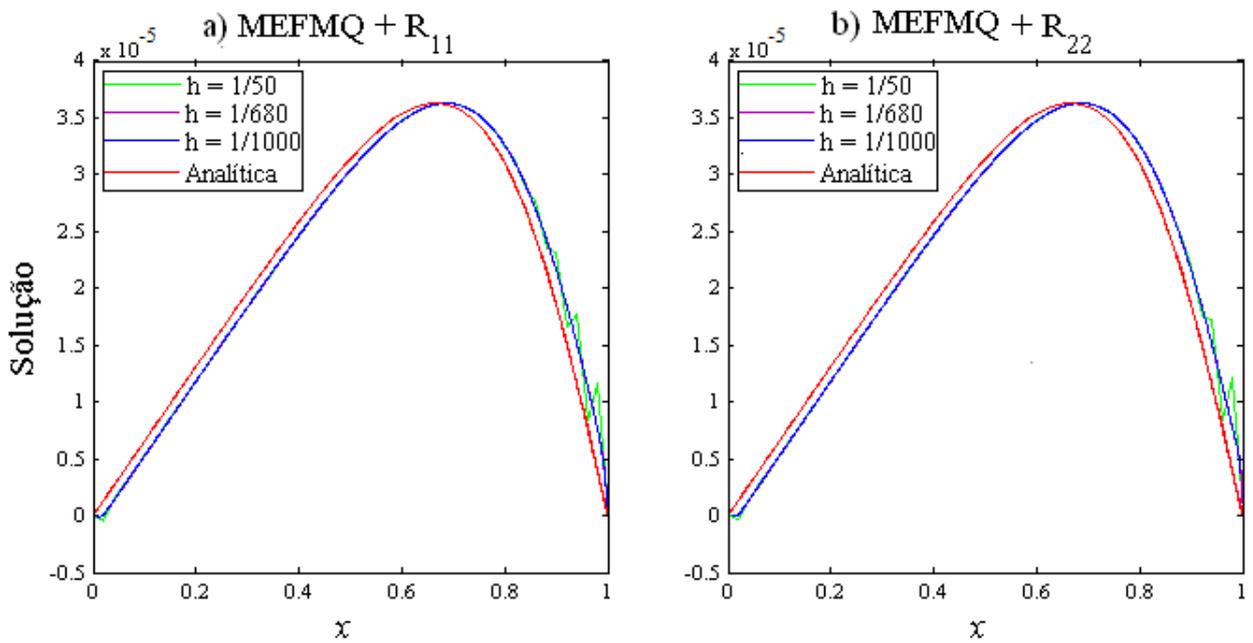


Figura 8.16: a) MEFMQ+ R_{11} e b) MEFMQ+ R_{22} para $t = 1$ e $Re = 100000$.

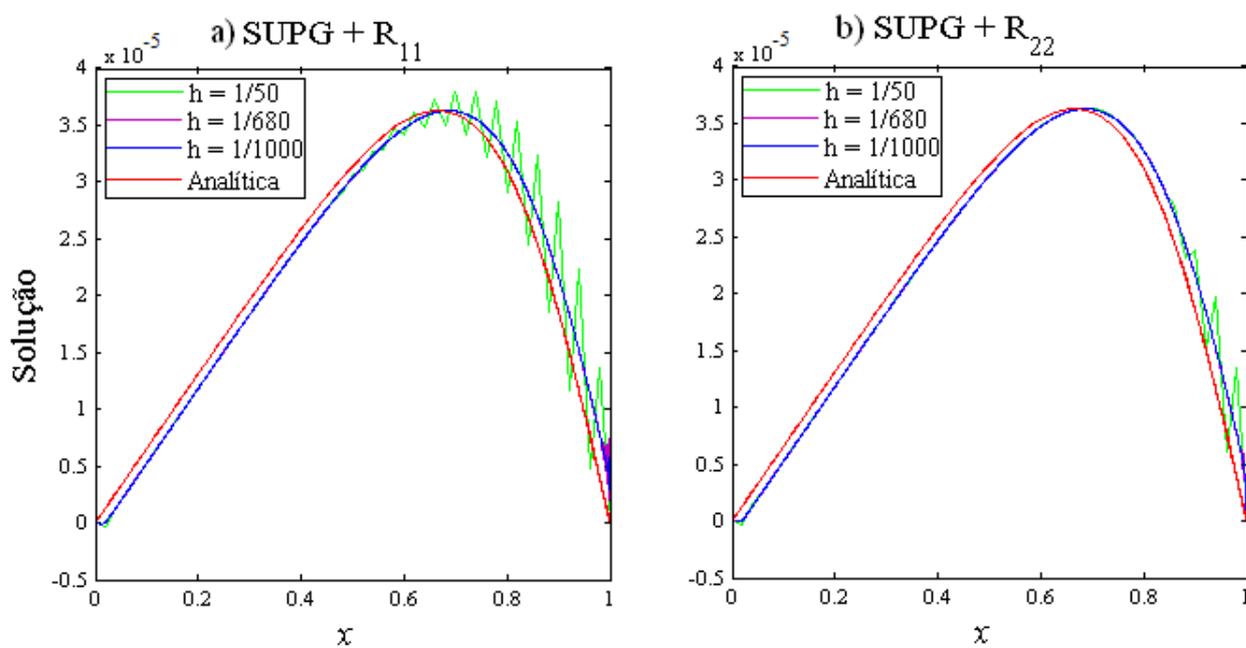


Figura 8.17: a) SUPG+ R_{11} e b) SUPG+ R_{22} para $t = 1$ e $Re = 100000$.

Podemos observar, nas Figuras 8.15-8.17, que os resultados numéricos melhoraram consideravelmente, quando aumentamos o número de elementos na malha. Observamos ainda que, as soluções numéricas obtidas pelos métodos MEFMQ+ R_{11} e MEFMQ+ R_{22} quase não apresentaram oscilações e confirmando os resultados na Tabela 8.5.

Tabela 8.5: Erro das aproximações para $t = 1$ e $Re = 100000$.

| Soluções numéricas | Elementos na malha | $\log_{10} \ E\ $ |
|--------------------|--------------------|-------------------|
| MEFG+ R_{11} | 50 | $-1.7279e - 003$ |
| | 680 | $-1.7100e - 003$ |
| | 1000 | $-1.1664e - 003$ |
| MEFG+ R_{22} | 50 | $-2.0756e - 002$ |
| | 680 | $-1.7101e - 003$ |
| | 1000 | $-1.1663e - 003$ |
| MEFMQ+ R_{11} | 50 | $-2.1945e - 002$ |
| | 680 | $-1.7289e - 003$ |
| | 1000 | $-1.1663e - 003$ |
| MEFMQ+ R_{22} | 50 | $-2.0730e - 002$ |
| | 680 | $-1.17191e - 003$ |
| | 1000 | $-1.1697e - 003$ |
| SUPG+ R_{11} | 50 | $-1.7636e - 003$ |
| | 680 | $-1.7101e - 003$ |
| | 1000 | $-1.1664e - 003$ |
| SUPG+ R_{22} | 50 | $-2.0730e - 002$ |
| | 680 | $-1.7187e - 003$ |
| | 1000 | $-1.1694e - 003$ |

Na Figura 8.18 apresentamos o erro entre os métodos aqui estudado em função do refinamento da malha. Obtivemos o gráfico da Figura 8.18 na escala $\log_{10}(\Delta x) \times \log_{10} \|E\|$, onde m na legenda do gráfico descreve a inclinação da reta.

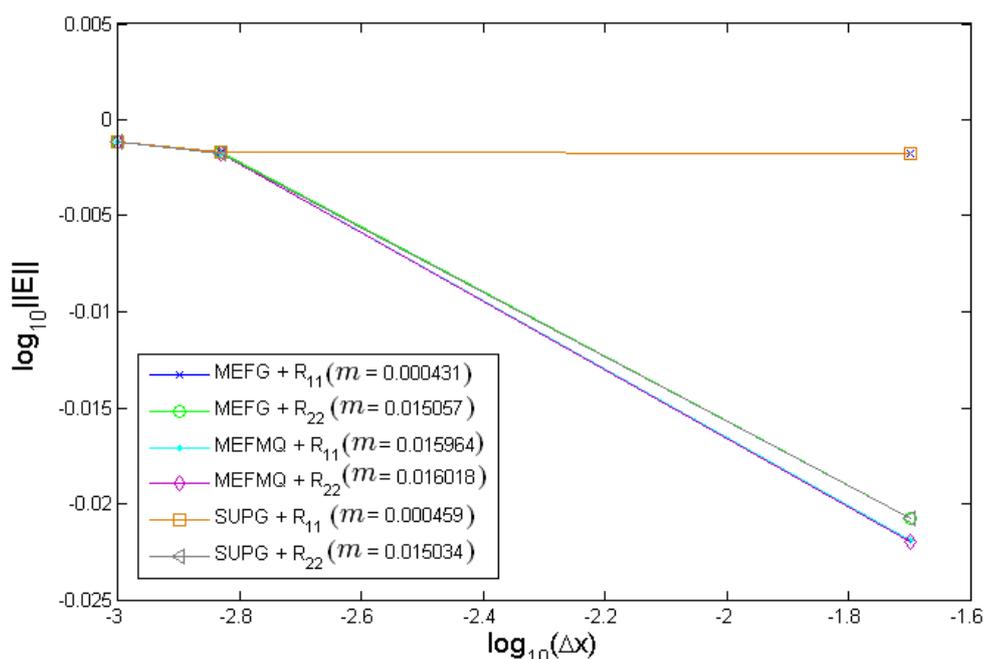


Figura 8.18: Convergência dos resultados numéricos para $t = 1$ e $Re = 100000$, em função do refinamento da malha.

Convém ressaltar, que nosso objetivo era testar a performance das formulações estudadas comparando com a solução analítica (8.3), proposta por [41]. Observamos que a influência dos aproximantes de Padé R_{22} , adicionados nas formulações MEFG e SUPG tiveram pequenas melhoras, porém ainda apresentaram oscilações, como pode ser verificado nas Figuras 8.11b-8.13b e Tabela 8.4. Observamos ainda que, predominou-se a escolha da formulação para a discretização espacial. Para deixar claro, a predominância na escolha da formulação para a discretização espacial, apresentamos os resultados numéricos e analítico, em forma de superfície onde consideramos uma malha 50×3 elementos em $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq t \leq 1$, respectivamente, e para uma análise mais precisa sobre a estabilidade e convergência dos mesmos, apresentamos os resultados dos modelos numéricos para o tempo final $t = 1$ e comparamos com a solução analítica [41].

Apresentamos, na Figura 8.19, a superfície da solução analítica dada na equação (8.3), para $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq t \leq 1$, sendo $\Delta x = 0.02$.

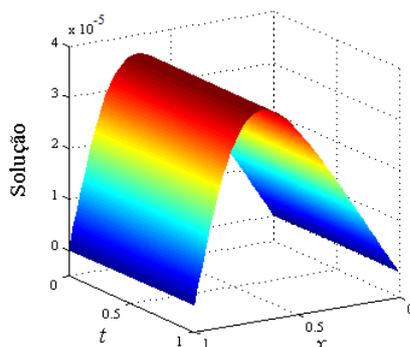


Figura 8.19: Superfície da solução analítica, equação (8.3).

Nas Figuras 8.20 e 8.21, apresentamos: a) b) e c) Superfícies das soluções dos aproximante de Padé R_{11} e R_{22} adicionados as formulações MEFG, MEFMQ e SUPG, respectivamente, para $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq t \leq 1$, sendo $\Delta x = 0.02$ e $\Delta t = 0.5$.

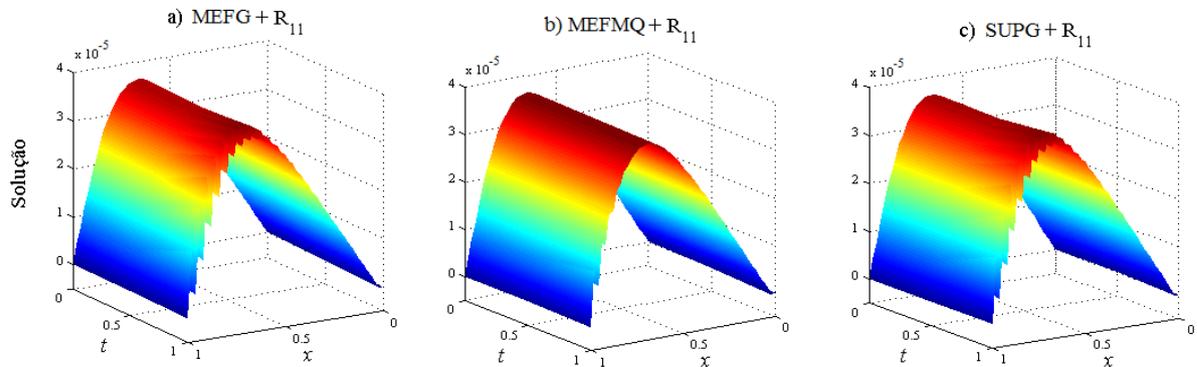


Figura 8.20: a), b) e c) Superfícies das soluções dos aproximante de Padé R_{11} e adicionada as formulações MEFG, MEFMQ e SUPG.

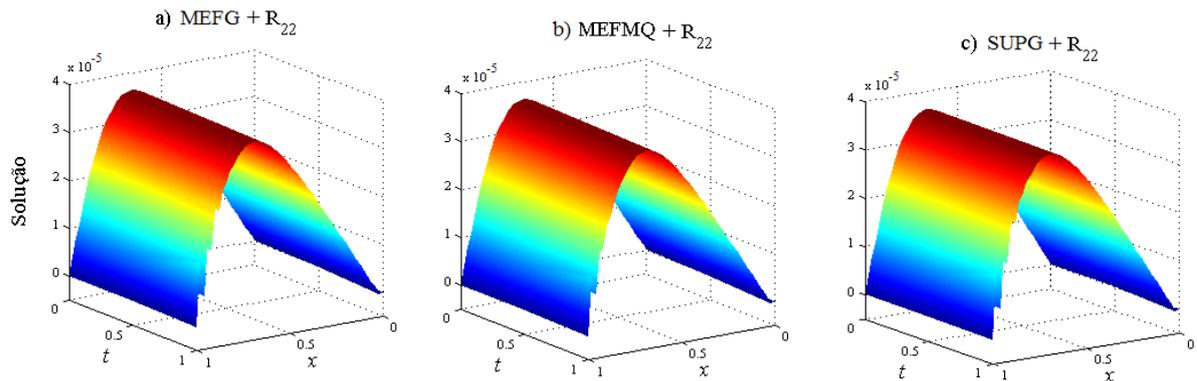


Figura 8.21: a), b) e c) as superfícies das soluções dos aproximante de Padé R_{22} e adicionada as formulações MEFG, MEFMQ e SUPG.

Podemos observar, nas Figuras 8.20 e 8.21, que os métodos $\text{MEFG}+R_{11}$ e $\text{SUPG}+R_{11}$ são sensíveis ao passo de tempo, por outro lado, os métodos $\text{MEFMQ}+R_{11}$, $\text{MEFG}+R_{22}$, $\text{MEFMQ}+R_{22}$ e $\text{SUPG}+R_{22}$, apresentaram resultados melhores. Confirmamos estes resultados, na Tabela 8.6.

Tabela 8.6: Erro das aproximações para $h = 1/50$ e $Re = 10000$).

| Soluções Numéricas | $\log_{10} \ E\ $ |
|-----------------------|-------------------|
| $\text{MEFG}+R_{11}$ | $-1.7279e - 003$ |
| $\text{MEFG}+R_{22}$ | $-2.0756e - 002$ |
| $\text{MEFMQ}+R_{11}$ | $-2.1945e - 002$ |
| $\text{MEFMQ}+R_{22}$ | $-2.2013e - 002$ |
| $\text{SUPG}+R_{11}$ | $-1.7636e - 003$ |
| $\text{SUPG}+R_{22}$ | $-2.0730e - 002$ |

Portanto, novamente confirmamos que o método implícito multi-estágio de quarta ordem R_{22} e o MEFMQ aplicados aos exemplos estudados neste capítulo, mostraram eficientes, visto que o aproximante de Padé R_{22} aumentou a região de convergência das soluções numéricas e que o MEFMQ eliminou parcialmente as oscilações das soluções numéricas.

9 CONCLUSÃO

Neste trabalho aplicamos a formulação semi-discreta, que consiste em discretizar o domínio temporal utilizando métodos implícitos multi-estágios, R_{11} e R_{22} , e o domínio espacial utilizando formulações do método de elementos finitos, MEFMQ, MEFG e SUPG, na obtenção de soluções numéricas para as equações 1D de convecção-difusão-reação e de Burgers, cujas soluções analíticas são conhecidas na literatura. Resolvendo as equações de convecção-difusão-reação e de Burgers, verificamos que as equações matriciais obtidas através do MEFMQ levam à uma matriz simétrica, o que não ocorre nas formulações do MEFG e SUPG.

No Capítulo 5, quando consideramos os exemplos que descrevem as equações 1D de convecção-difusão-reação e de convecção-difusão do morro Gaussiano, as análises feitas através das influências dos números de CFL e da malha mostraram que, o método implícito multi-estágio de quarta ordem R_{22} aumenta a região de convergência, quando comparado ao método implícito multi-estágio de segunda ordem R_{11} , onde apresentamos a evolução do erro dos métodos avaliados quanto aos refinamentos no tempo e no espaço através da norma do erro L^2 como pode ser verificado nas Figuras 5.10 e 5.14 e nas Figuras 5.19 e 5.20, respectivamente. Ainda no Capítulo 5, quando estudamos a equação 1D de convecção-difusão-reação, observamos que as formulações MEFMQ+ R_{22} e SUPG+ R_{22} quando avaliadas para o número de Courant $C = 1.5$ e $h = 2/100$, elimina parcialmente as oscilações em relação as formulações MEFG+ R_{11} , MEFG+ R_{22} , MEFMQ+ R_{11} e SUPG+ R_{11} , como pode ser verificado nas Figuras 5.7-5.14.

No Capítulo 8 apresentamos os resultados numéricos para a equação de Burgers, porém, devido a não linearidade do termo convectivo, utilizamos uma linearização que alterou o tamanho do elemento em cada etapa, utilizando a informação a partir do passo anterior, tornando a equação de Burgers um problema linear local. Resolvemos a equação através da formulação semi-discreta, novamente verificamos que o método implícito multi-estágio de quarta ordem R_{22} , aplicado ao problema de propagação uniforme de choque, aumenta a região de convergência, quando comparado ao método implícito multi-estágio de segunda ordem R_{11} . Apresentamos a evolução do erro dos métodos avaliados quanto aos refinamentos no tempo e no espaço através da norma do erro L^2 , como pode ser verificado nas Figuras 8.1 e 8.6, e Tabelas 8.1 e 8.2. Observamos que os resultados obtidos pelos métodos MEFG+ R_{11} e SUPG+ R_{11} convergiram para os mesmos valores, assim como os resultados numéricos dos métodos MEFG+ R_{22} e SUPG+ R_{22} , encontram-se próximos, Tabela 8.2. Ainda no Capítulo 8, aplicamos a formulação semi-discreta para uma solução teste da equação de Burgers, observamos que para o passo de tempo $\Delta t = 0.5$ as oscilações são mais intensas quando resolvemos através das formulações MEFG+ R_{11} e SUPG+ R_{11} . Por outro lado as oscilações tornam menores quando resolvemos a equação de Burgers através das formulações MEFG+ R_{22} , MEFMQ+ R_{11} , MEFMQ+ R_{22} e

SUPG+ R_{22} , como pode ser observado nas Figuras 8.11b-8.13b. Observamos que predomina-se a escolha da discretização espacial como pode ser verificado nas Figuras 8.19 e 8.21, e Tabela 8.6.

Concluimos que o método implícito multi-estágio de quarta ordem R_{22} , quando adicionados aos métodos de elementos finitos aqui estudados, mostrou-se eficiente visto que o aproximante de Padé R_{22} aumentou a região de convergência das soluções numéricas. Verificamos também que o MEFMQ eliminou parcialmente as oscilações das soluções numéricas. Para trabalhos futuros, podemos aplicar a formulação semi-discreta as equações 2D de convecção-difusão-reação e de Burgers com condições iniciais periódicas; utilizar elementos quadráticos e/ou cúbicos sobre os elementos finitos; utilizar um estabilizador no método de mínimos quadrados.

REFERÊNCIAS

- [1] Oden, J. T.; Belytschko, T.; Babuska, I., Hughes, J. R. *Research directions in computational mechanics*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 192, p.913-922, 2003.
- [2] Gomes, H.; Colominas, I.; Casteleiro, E. M. *Finite element model and applications*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 00, p.1-6, 2000.
- [3] Tabatabaei, A. E. A. H. H.; Shakour E.; Dehghan, M. *Some implicit methods for the numerical solution of Burgers' equation*, Applied Mathematics and Computation, v. 191, p.560-570, 2007.
- [4] Kutluay, S.; Esen A.; Dag, I. *Numerical solutions of the Burgers' equation by the least-squares quadratic B-spline finite element method*, Journal of Computational and Applied Mathematics, v.167, p. 21-33, 2004.
- [5] Oliveira, E. J. *Biomecânica básica para ortodontias*, 1 ed, Belo Horizonte, UFMG, 2000.
- [6] Lotti, R. S.; Machado, A. W.; Mazzeiro, E. T.; Landre JR, J. *Aplicabilidade científica do método dos elementos finitos*, Maringá, Revista Dental Press de Ortodontia e Ortopedia Facial, v.11, p.35-43, 2006.
- [7] Soriano, H. L.; Lima, S. S. *Método de elementos finitos em análises de estruturas*, São Paulo, Edusp, 2003.
- [8] Filete, A. F. *Métodos de Elementos Finitos de Mínimos Quadrados para um Problema de Advecção*, monografia, UENF, 2010.
- [9] Jiang, B. N. *The least-squares finite element method: theory and applications in computational fluid dynamics and electromagnetics*. Berlin: Springer, 1998.
- [10] Brooks, A. N.; Hughes, T.J.R. *Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v.32, p.199-259, 1982.
- [11] Hughes, T.J.R.; Scovazzi G.; Franca, L. P. *Multiscale and Stabilized Methods*, Encyclopedia of Computational Mechanics. John Wiley and Sons, 2004.
- [12] Donea, J.; Roig, B.; Huerta, A. *Finite Element Methods for Flow Problems*. Chichester, John Wiley and Sons, 2003.

- [13] Santos, P. I. *Métodos submalhas não lineares para o problema de convecção-difusão-reação*, Tese, LNCC, 2007.
- [14] Donea, J.; Roig, B.; Huerta, A. *Higher-order accurate time-stepping schemes for convection-difusion problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v.182, p. 249-275, 2000.
- [15] Venutelli M. *Time-stepping Padé-Petrov-Galerkin models for hydraulic jump simulation*. Mathematics and Computers in Simulation, v.66, p.585-604, 2004.
- [16] Rodríguez-Ferran, A.; Sandoval, M.L *Numerical performance of incomplete factorizations for 3D transient convection-diffusion problems*. Advances in Engineering Software, v.38, p.439-450, 2007.
- [17] Tian, Z.F; Yu, P.X *A High-order exponencial scheme for solving 1D unsteady convection-difusion equations*. Jornal of Computational and Applied Mathematics, v.235, p.2477-2491, 2011.
- [18] Kreyszig Erwin. *Introductoy functional analysis with applications*. New York, JohnWiley and Sons, 1989.
- [19] Alexandre E. e Guermond J. L. *Theory and Practice of Finite Elements*. New York, Springer Verlag, 2004.
- [20] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*. New York, Academic Press, 1975.
- [21] Daryoush B. e Encyeh N. D. *Introduction of Fréchet and Gâteaux Derivative*. Applied Mathematical Sciences, v. 2, p.975-980, 2008.
- [22] Aguilera-Navarro, M.C.K; Aguilera-Navarro, V.C; Ferreira, R.C.; Teramon, N. *Representações de funções especiais*. Revista matemática universitária, p. 49-66, 1999.
- [23] Baker, G. A. Jr. *Essentials of Padé Approximant*. New York, Academic Press, 1975.
- [24] Strikwerda, J. C. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, SIAM; Second Edition, 2004.
- [25] David, E. A.; Oscar, B. *Time tepping via one-dimensional Padé approximation*, Jornal of Scientific Computing, v.30, p. 83-115, 2005.
- [26] Huerta, A.; Roig, B.; Donea, J. *Time-accurate solution of stabilized convection-diffusion-reaction equations: II - accuracy analysis and examples*, Communications in Numerical Methods in Engineering, v. 18, p. 575-584, 2002.
- [27] Richtmyer, R. D.; Morton, K.W. *Difference Methods for Initial Value Problems*. Wiley Interscience, New York, 1967.

- [28] Harten, A.; Tal-Ezer, H. *On fourth-order accurate implicit finite difference scheme for hyperbolic conservation laws: I. Non-stiff strongly dynamic problems* Mathematics of Computation, v.36, p. 335-373, 1981.
- [29] Hairer, E.; Norsett, S.P; Wanner, G. *Solving ordinary differential equations I, Non-stiff Problems*, Springer Series in Computational Mathematics, 1987.
- [30] Lambert, J.D. *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems*, New York, Wiley, 1993.
- [31] Brenner, C. S.; Scott, R.L. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, New York, Springer-Verlag, 2008.
- [32] Codina, R. *On stabilized finite element methods for linear systems of convection-diffusion-reaction equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v.188, p.61-82, 2000.
- [33] Ciarlet, G. P. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North Holland, SIAM, 1978.
- [34] Fish J., Belytschko T. *A first Course in Finite Elements*. JohnWiley and Sons, 2007.
- [35] Johnson, C.; Nävert, U.; Pitkaranta, J. *Finite element methods for linear hyperbolic problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v.45, p.285-312, 1984.
- [36] Burgers, M. J. *Mathematical examples illustrating the theory of turbulence* Advances in Applied Mechanics, v.1, p. 171-199, New York, 1948.
- [37] Burgers, M. J. *Mathematical examples illustrating relations in the theory of tuburlent fluid motion*, Amsterdam, Noord-Hollandsche Uitg. Mij. 1939.
- [38] Dogan, A. *A Galerkin element approach to Burgers' equation* Applied Mathematics and Computation, v.154, p. 331-346, 2004.
- [39] Jain, P. C; Shankar, R.; Singh, T. V. *Numerical Technique for Solving Convection-Reaction-Diffusion Equation*, Mathematical and Computer Modelling, v.22, p. 113-125, 1995.
- [40] Sachdev, P. L. *Nonlinear Diffusive Waves*, Cambridge, Cambridge University Press, 1987.
- [41] Wood, W. L. *An exact for Burger's equation*, Communications in Numerical Methods in Engineering, v.22, p.797-798, 2006.