Universidade Estadual de Londrina

CAMILA LEÃO CARDOZO

PROBLEMAS DISSIPATIVOS DE VIGAS EXTENSÍVEIS COM AMORTECIMENTO NÃO LINEAR NA FRONTEIRA

Londrina
2012

CAMILA LEÃO CARDOZO

PROBLEMAS DISSIPATIVOS DE VIGAS EXTENSÍVEIS COM AMORTECIMENTO NÃO LINEAR NA FRONTEIRA

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Luci Harue Fatori

Londrina
2012

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

C268p Cardozo, Camila Leão.
Problemas dissipativos de vigas extensíveis com amortecimento não linear na fronteira / Camila Leão Cardozo. – Londrina, 2012.
69 f. : il.

Orientador: Luci Harue Fatori.
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2012.
Inclui bibliografia.

1. Equações diferenciais parciais – Teses. 2. Galerkin, Métodos de – Teses. 3. Espaços de funções – Teses. 4. Equações de evolução – Teses. I. Fatori, Luci Harue. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III.Título.

CDU 517.95

CAMILA LEÃO CARDOZO

PROBLEMAS DISSIPATIVOS DE VIGAS EXTENSÍVEIS COM AMORTECIMENTO NÃO LINEAR NA FRONTEIRA

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Prof^{a}. Dr^{a}. Luci Harue Fatori
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. To Fu Ma
Universidade de São Paulo/São Carlos

Londrina, 16 de fevereiro de 2012.

Aos meus pais
Carlos e Marisa

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, o qual me deu paciência, saúde e por mostrar os caminhos nas horas incertas.

Agradeço à minha família e ao meu namorado Ricardo que sempre me apoiaram, deram força, carinho e incentivo.

À Profa. Dra. Luci Harue Fatori, pela orientação, apoio e confiança possibilitando a realização deste e por sua ajuda em sabedoria desde 2007.

Agradeço ao amigos de mestrado, em especial à Poliane (Polly) e à Cibele (Bota) pela amizade e companhia e ao Rodrigo (Didji) pela amizade e por compartilhar conhecimentos.

À dona Verginia pela colaboração nos serviços e pelas conversas amigas.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

CARDOZO, Camila Leão. **Problemas dissipativos de vigas extensíveis com amortecimento não linear na fronteira**. 2012. 69. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

RESUMO

Neste trabalho estamos interessados na existência, unicidade e na taxa de decaimento de solução para problemas de vigas extensíveis com amortecimento não linear na fronteira acoplados a diferentes termos dissipativos. A existência das soluções são mostradas usando o Método de Galerkin e o decaimento exponencial das soluções, em ambos os casos, são obtidas via técnicas multiplicativas e multiplicadores convenientes.

Palavras-chave: Vigas extensíveis. Amortecimento não linear. Decaimento exponencial.

CARDOZO, Camila Leão. **Dissipative problems of extensible beam with nonlinear damping on the boundary** . 2012. 69. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

ABSTRACT

In this work we are concerned in the existence, uniqueness and decay rates for the solutions to problems of the extensible beams with damping nonlinear in boundary coupled to different dissipative terms. The existence of solutions are showed using the Galerkin method and exponential decay of the solutions, in both cases, are obtained by multiplicative techniques and appropriate multipliers.

Keywords: Extensible beams. Damping nonlinear. Exponential decay.

SUMÁRIO

ÍNDICE DE NOTAÇÕES

$L^p(\Omega)$	espaço das funções u mensuráveis definidas em Ω com valores em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tais que $\lvert u\rvert^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω
$\lVert.\rVert_{L^p}$	norma em $L^p(\Omega)$
$(.,.)$	produto escalar em $L^2(\Omega)$
$H^m(\Omega)$	espaço das funções $u \in L^2(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ para todo $\lvert\alpha\rvert \leqslant m$
$\lVert.\rVert_{H^m}$	norma em $H^m(\Omega)$
$H_0^m(\Omega)$	fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$
$\lVert.\rVert_{H_0^m}$	norma em $H_0^m(\Omega)$
$\mathcal{L}(\mathrm{X})$	espaço dos operadores lineares contínuos em X
$\lVert.\rVert_{\mathcal{L}(\mathrm{X})}$	norma em $\mathcal{L}(\mathrm{X})$
$L^p(0,T;H)$	espaço das funções mensuráveis $u : [0,T] \to X$ e que $\lVert u(t)\rVert_H \in L^p(0,T)$
$C^0([0,T];X)$	espaço das funções contínuas $u : [0,T] \to X$ e que $\lVert u(t)\rVert_X \in C^0([0,T])$
$\mathcal{D}(\Omega)$	espaço das funções testes em Ω
$\mathcal{D}'(\Omega)$	espaço das distribuições vetoriais sobre Ω
$\to$	convergência forte
$\rightharpoonup$	convergência fraca
$\overset{*}{\rightharpoonup}$	convergência fraca estrela
$\hookrightarrow$	imersão contínua
$\int_\Omega$	integral em Ω

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho estudaremos a existência de soluções e taxas de decaimento associadas a problemas de vigas extensíveis com amortecimento não linear na fronteira baseados no problema

$$u_{tt} + u_{xxxx} - \left(\alpha + \beta \int_0^L |u_x(s,t)|^2 ds\right) u_{xx} = 0$$

proposta por Woinowsky-Krieger em [2] como um modelo para vibrações de vigas com extremidades articuladas. Problemas modelando vibrações de vigas sobre rolamentos elásticos foram considerados anteriormente por Feireisl em [3] e Feckan em [4], onde a existência de soluções por tempos periódicos de

$$\begin{aligned} u_{tt} + u_{xxxx} = 0 \; em \; [0,L] \times \mathbb{R} \\ u_{xx}(0,t) = u_{xx}(L,t) = 0 \\ u_{xxx}(0,t) = -f(u(0,t)) \\ u_{xxx}(L,t) = f(u(L,t)) \end{aligned} \tag{1.1}$$

são estudadas. O caso estacionário associado a (1.1) também foram considerados por outros autores. No artigo de Grossinho e Ma [5], foram consideradas a existência de soluções simétricas usando a teoria do ponto crítico e Transformações de Fenchel-Legendre. Um problema similar envolvendo uma função elástica descontínua foi considerada por Grossinho e Tersian em [6].

Por outro lado, a estabilização de fronteira e a controlabilidade de fronteira para vigas são considerados por vários autores. Uma das primeiras análises matemáticas da equação de vigas extensíveis foi feita por Ball em [7], o qual foi estendido depois para uma definição abstrata por Medeiros em [8]. Uma grande classe da equações de vigas não lineares foram estudadas por Munõz Rivera (vide [9]), que considerou a questão sobre efeitos viscoelásticos e propriedades regularizantes. Tucsnak em [10] considerou a equação da viga

$$u_{tt} + \Delta^2 u - M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u = 0 \; em \; \Omega \in \mathbb{R}^n \tag{1.2}$$

com fronteira amortecida. Ele obteve o decaimento exponencial da energia quando um amortecimento do tipo $a(x)u_t$ tem efeito próximo a fronteira. Na mesma direção, Kouemou Patcheu [11] obteve o decaimento exponencial da energia para (1.2) quando um amortecimento não-linear $g(u_t)$ tem efeito sobre Ω.

Os modelos estudados na presente dissertação são baseadas na equação

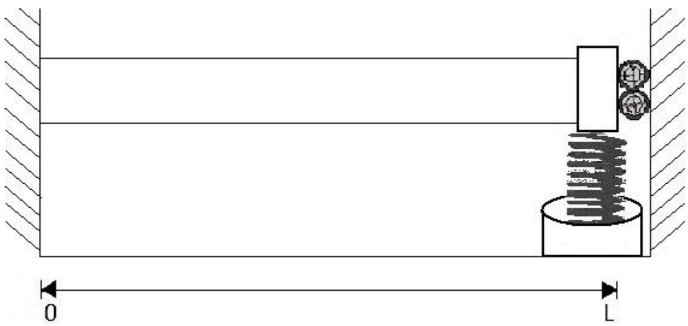
$$
\begin{aligned}
u_{tt} + u_{xxxx} - M\left(\int_0^L |u_x|^2 dx\right) u_{xx} = 0 \\
u(0,t) = u_x(0,t) = u_{xx}(L,t) = 0 \\
u_{xxx}(L,t) - M\left(\int_0^L |u_x(x,t)|^2 dx\right) u_x(L,t) = f(u(L,t)) + g(u_t(L,t))
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

proposta por Ma em [1], onde g representa um amortecimento e f uma força externa em $x = L$. O problema (1.3) descreve o movimento transversal de uma viga extensível que está presa em $x = 0$ e apoiada em $x = L$ por uma mola com reação não linear caracterizada pela função f. Foram obtidos resultados de existência global e decaimento exponencial supondo f e g monótonas não lineares. Entretanto, em [1] não foram consideradas termos dissipativos adicionais a equação além do mecanismo dissipativo o qual foi dado na fronteira pelo termo $g(u_t(L,t))$.

Pazoto e Perla Menzala (em [12]) estudaram o problema (1.3) assumindo uma dissipação térmica onde foi considerado com um termo de inercia rotacional u_{xxtt} na equação e $f = 0$. Eles obtiveram taxa de decaimento exponencial assumindo um outro termo de dissipação dado por $u_{xx}(L,t) = -u_{xt}(L,t)$.

O primeiro modelo dissipativo que estudaremos, em nosso trabalho, está relacionado com o problema (1.3) onde substituímos a condição de fronteira $u_{xx}(L,t) = 0$ por $u_x(L,t) = 0$. Mais precisamente,

$$
\begin{aligned}
& u_{tt} + u_{xxxx} - M\left(\int_0^L |u_x(t)|^2 dx\right) u_{xx} + h(u_t) = 0, \quad \text{em} \quad [0,L]\times\mathbb{R}_+, \\
& u(0,t) = u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \\
& u_{xxx}(L,t) = f(u(L,t)) + g(u_t(L,t)), \\
& u(x,0) = u^0(x), u_t(x,0) = u^1(x).
\end{aligned}
$$



O segundo modelo, que estudaremos no Capítulo 3, está relacionado a (1.3) onde substituímos a dissipação friccional por uma do tipo térmica, análogo ao estudado por Pazoto e Perla em [13]. A diferença fundamental com [13] foi que neste caso retiramos o termo

u_{xxtt} e consideramos outras condições de fronteira, a saber,

$$
\begin{aligned}
& u_{tt} + u_{xxxx} - M\left(\int_0^L |u_x(t)|^2 dx\right) u_{xx} + \alpha\theta_{xx} = 0, \quad \text{em} \quad [0,L]\times\mathbb{R}_+, \\
& \theta_t - \theta_{xx} - \alpha u_{xxt} = 0, \\
& u(0,t) = u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \\
& \theta(0,t) = \theta_x(L,t) = 0, \\
& u_{xxx}(L,t) = f(u(L,t)) + g(u_t(L,t)), \\
& u(x,0) = u^0(x),\ u_t(x,0) = u^1(x),\ \theta(x,0) = \theta^0(x),
\end{aligned}
$$

onde α é uma constante positiva.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo fixaremos notações e certos resultados sobre Distribuição e Espaços de Sobolev, resultados estes a serem utilizados no desenvolvimento deste trabalho.

2.1 ESPAÇOS FUNCIONAIS

Nesta seção apresentaremos os espaços funcionais e a noção de derivada no sentido das distribuições. Para isso, considere Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

2.1.1 Distribuições e Espaços das Funções Testes

Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma aplicação. Denomina-se suporte de u em Ω o fecho do conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$ e representa-se por $supp(u)$, ou seja, $supp(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}$.

Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções definidas em Ω que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que possuem suporte compacto. Dizemos que uma sequência de funções $\{u_\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para a função $u \in C_0^\infty(\Omega)$ se as seguintes condições são satisfeitas:

i) existe $K \subset \Omega$ compacto, tal que $supp(u_\mu - u) \subset K$, para todo μ,

ii) para cada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, a sequência $\{D^\alpha u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $D^\alpha u$ uniformemente em K, onde D^α representa o operador derivação de ordem α definido por

$$D^\alpha = \frac{D^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\ldots\partial_{x_n}^{\alpha_n}}, \quad \text{com} \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ com esta noção de convergência é denominado espaço das funções testes e será representado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Define-se distribuição sobre Ω a toda forma linear T sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínua no sentido da convergência definida sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial, o qual representa-se $\mathcal{D}'(\Omega)$. Neste espaço vetorial diz-se que uma sucessão $(T_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, quando a sequência numérica $(\langle T_\mu, u\rangle)_{\mu\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T, u\rangle$ em $\mathbb{R}$, para toda $u \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Considere uma distribuição T sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T, no sentido das distribuições, é a forma linear $D^\alpha T$ definida por

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Quando $\alpha \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, denotaremos $D^\alpha T$ como $\dfrac{d^\alpha T}{dx^\alpha}$. Verifica-se que $D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω, e que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) & \to & \mathcal{D}'(\Omega) \\ T & \mapsto & D^\alpha T \end{array}$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que se

$$\lim_{\mu\to\infty} T_\mu = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \text{ então } \lim_{\mu\to\infty} D^\alpha T_\mu = D^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

2.1.2 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$, tais que $|u|^p$ é integrável a Lebesgue sobre Ω, e por $L^\infty(\Omega)$ o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que existe uma constante c com $|u(x)| \le c$ quase sempre em Ω. Os espaços $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{L^p} := \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \le p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty} := \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c : |u(x)| \le c \text{ quase sempre em } \Omega\},$$

é um espaço de Banach. Em particular, o espaço $L^2(\Omega)$, cuja norma provém do produto interno

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x) \, dx$$

é um espaço de Hilbert.

2.1.3 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \le p \le \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\alpha| \le m$, $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições.
O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} := \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \le p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}} := \|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in\Omega} \text{ess} \, |D^\alpha u(x)|.$$

é um espaço de Banach e são denominados espaços de Sobolev. Para o caso particular $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, representado por $H^m(\Omega)$, com o produto interno dado por

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \ \forall u,\ v, \in H^m(\Omega),$$

e é denominado espaço de Sobolev de ordem m. Quando $m = 0$, $H^m(\Omega)$ identifica-se com $L^2(\Omega)$.

Define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Quando Ω é limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$, então a norma em $W_0^{m,p}(\Omega)$ dada por

$$\|u\|_{W_0^{m,p}} := \|u\|_{W_0^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

é equivalente à norma induzida por $W^{m,p}(\Omega)$.

2.1.4 Espaços Funcionais à Valores Vetoriais

Considere X um espaço de Banach. Denotaremos por $\mathcal{D}(0,T;X)$ o espaço das funções vetoriais $\varphi : (0,T) \to X$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto contido no intervalo $(0,T)$. Dizemos que $\varphi_\nu \to \varphi$ em $\mathcal{D}(0,T;X)$ se

i) existe $K \subset (0,T)$ compacto, tal que $supp(\phi_\nu - \phi) \subset K$, para todo ν,

ii) para cada $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{d^k}{dt^k}\varphi_\nu(t) \to \dfrac{d^k}{dt^k}\varphi(t)$ em X uniformemente em $t \in (0,T)$.

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X será denotado por $\mathcal{D}'(0,T;X)$. Neste espaço dizemos que uma sucessão $(S_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ converge para $S \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ quando $\langle S_\nu, \varphi\rangle \to \langle S, \varphi\rangle$ em X, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T)$.

Denotaremos por $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$ o espaço de Banach das funções $u : (0,T) \to X$, tais que u é mensurável e $\|u(t)\|_X$ pertença a $L^p(0,T)$. Em $L^p(0,T;X)$ defini-se a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \inf\{c \,;\, \|u(t)\|_X \leq c \text{ quase sempre em } (0,T)\}.$$

Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, então $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert munido com o produto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X \, dt.$$

Representaremos por $W^{m,p}(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$ o espaço de Banach

$$W^{m,p}(0,T;X) = \{u \in L^p(0,T;X)\,;\, u^{(j)} \in L^p(0,T;X),\ 0 \leq j \leq m\},$$

onde $u^{(j)}$ representa a j-ésima derivada no sentido das distribuições, com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \left(\sum_{j=0}^{m} \|u^{(j)}\|^p_{L^p(0,T;X)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $W^{m,2}(0,T;X)$ é denotado por $H^m(0,T;X)$, que é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u,v)_{H^m(0,T;X)} = \sum_{j=0}^{m} (u^{(j)}, v^{(j)})_{L^2(0,T;X)}.$$

Representaremos por $C^0([0,T];X)$ o espaço das funções contínuas $u : [0,T] \to X$, tais que $\|u(t)\|_X$ pertença a $C^0([0,T])$, que juntamente com a norma

$$\|u\|_{C^0([0,T];X)} = \max_{0 \le t \le T} \|u(t)\|_X,$$

é um espaço de Banach. Denotaremos por $C^m([0,T];X)$ o espaço de Banach das funções $u : [0,T] \to X$, tais que $\left\| \frac{d^k u}{dt^k}(t) \right\|_X$ pertença a $C^0([0,T])$ para $0 \le k \le m$. Em $C^m([0,T];X)$ defini-se a norma

$$\|u\|_{C^m([0,T];X)} = \|u\|_{C^0([0,T];X)} + \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{C^0([0,T];X)} + \ldots + \left\| \frac{d^m u}{dt^m} \right\|_{C^0([0,T];X)}.$$

2.2 Resultados Auxiliares

Nesta seção enunciaremos os resultados necessários para o nosso trabalho, cujas demons-trações podem ser encontradas nas referências citadas.

Proposição 2.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Seja H um espaço vetorial munido do produto interno $(\cdot,\cdot)$. Então, dadas $u,\ v \in H$, temos que*

$$|(u,v)| \le \|u\|_H \, \|v\|_H,$$

onde $\|\cdot\|_H^2 = (\cdot,\cdot)$.

Demonstração. Ver [17]. □

Proposição 2.2 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam $1 < p, q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $a, b > 0$. Então*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Ver Teorema IV.6 de [16]. □

Proposição 2.3 (Desigualdade de Poincaré). *Suponhamos que Ω seja um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Então para todo $1 \leq p < \infty$, existe uma constante c_p, tal que*

$$||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq c_p ||\nabla u||_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. Ver Corolário IX.19 de [16]. □

Definição 2.4. *Seja X um espaço de Banach. Representaremos por X^* o seu dual topológico, isto é,*

$$X^* = \{L : X \to \mathbb{C}; L \text{ é linear e contínuo}\}.$$

E, denotaremos por $L(x)$, o valor de L em $x \in X$.

Teorema 2.5 (Teorema da Aplicação Aberta). *Um operador linear limitado sobrejetor T definido em um espaço de Banach X a valores em um espaço de Banach Y é uma aplicação aberta, isto é, para todo conjunto aberto em X, sua imagem por T é um aberto em Y. Portanto, se T é bijetivo, T^{-1} é limitado.*

Demonstração. Teorema 4.12-2 em [17]. □

Lema 2.6 (Equivalência de Normas). *Sejam $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ e $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ espaços de Banach. Se existe uma constante positiva c_1, tal que*

$$\|x\|_1 \leq c_1 \|x\|_2$$

para todo $x \in X$, então existe uma constante positiva c_2, tal que

$$\|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$$

para todo $x \in X$. (Logo as duas normas são equivalentes).

Demonstração. Defina o operador linear $L : X_2 \to X_1$, dado por $x \longmapsto x$. Uma vez que por hipótese

$$\frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \leq c_1$$

temos que L e contínuo e é bijetivo por definição, assim pelo Teorema da Aplicação Aberta L^{-1} é contínuo e portanto limitado. □

Lema 2.7 (Lema de Gronwall). *Sejam $\varphi \in L^\infty(0,T)$ e $\beta \in L^1(0,T)$ tais que $\beta > 0$, $\varphi \geq 0$ e $C \geq 0$ uma constante. Se*

$$\varphi(t) \leq C + \int_0^t \beta(s)\varphi(s)ds, \ \ \forall t \in [0,T],$$

então tem-se

$$\varphi(t) \leq Ce^{\int_0^t \beta(s)ds}, \ \ \forall t \in (0,T).$$

Demonstração. Ver [15] em Appendices B.2.j. □

Lema 2.8 (Aubin-Lions)**.** *Sejam B_0, B e B_1 espaços de Banach tais que*

$$B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$$

onde B_0, B_1 são reflexivos, $\hookrightarrow$ denota imersão contínua e a imersão de B_0 em B é compacta. Defina

$$W = \left\{ u \in L^{p_0}(0,T;B_0) : u' = \frac{du}{dt} \in L^{p_1}(0,T;B_1) \right\}$$

onde $1 < p_0, p_1 < \infty$ e $T < \infty$. Então W munido da norma

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|u'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)},$$

é um espaço de Banach e a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.

Demonstração. Ver [14]. □

Lema 2.9 (Lions)**.** *Seja (g_ν) uma sucessão de funções $L^q(Q)$ e $1 < q < \infty$. Se*

(i) $g_\nu \to g$ *quase sempre em* Q*;*

(ii) $\|g_\nu\|_{L^q(Q)} \leq c, \forall \nu \in \mathbb{N}$*;*

então, $g_\nu \rightharpoonup g$ fraco em $L^q(Q)$.

Demonstração. Ver [14]. □

Lema 2.10. *Se $f \in L^p(0,T;X)$ e $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^p(0,T;X)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, então f é, a menos de um conjunto de medida nula, contínua de $[0,T] \to X$.*

Demonstração. Ver Lema 1.2 em [14]. □

Considere agora $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto cujos elementos serão denotados por (t,x), $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, a função $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ e o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ \quad x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Dizemos que $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições de Carathéodory sobre Ω se:

(i) $f(t,x)$ é mensurável em t para cada x fixado;

(ii) $f(t,x)$ é contínua em x para quase todo t fixado;

(iii) para cada compacto $\mathbb{K} \subset \Omega$, existe uma função real $m_{\mathbb{K}}(t)$ integrável tal que

$$|f(t,x)|_{\mathbb{R}^n} \leq m_{\mathbb{K}}(t), \ \forall (t,x) \in \mathbb{K}.$$

Teorema 2.11 (Carathéodory)**.** *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função que satisfaz as condições de Carathéodory sobre $\mathbb{R}$, então existe uma solução $x(t)$ de* (2.1) *sobre algum intervalo* $|t - t_0| \leq \beta(\beta > 0)$.

Demonstração. Ver Teorema 1.1, p.46 de [20]. □

Lema 2.12. *(Du Bois Raymond). Seja u uma função localmente integrável em $\Omega \subset \mathbb{R}$ tal que*

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = 0,$$

para toda $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, então $u = 0$ quase sempre (q.s.) em Ω.

Demonstração. Ver Proposição 1.3.1 em [19]. □

3 PROBLEMA DA VIGA EXTENSÍVEL COM DISSIPAÇÃO FRICCIONAL

Neste capítulo, estabeleceremos a existência e a unicidade de solução do problema da viga extensível com fronteira não linear e com um termo dissipativo do tipo friccional. Feito isso, mostraremos o decaimento exponencial a partir da construção de um funcional de Liapunov com derivada negativa associada à energia do sistema.

3.1 Existência de Solução

Consideremos $L > 0$ e o seguinte problema da viga extensível com amortecimento não linear na fronteira e com termo dissipativo

$$u_{tt} + u_{xxxx} - M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right) u_{xx} + h(u_t) = 0, \quad \text{em} \quad [0, L] \times \mathbb{R}_+, \tag{3.1}$$

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \text{ para } t > 0, \tag{3.2}$$

$$u_{xxx}(L,t) = f(u(L,t)) + g(u_t(L,t)) \text{ para } t > 0, \tag{3.3}$$

$$u(x,0) = u^0(x), u_t(x,0) = u^1(x) \text{ para } x \in [0, L]. \tag{3.4}$$

Nossas análises são baseadas sobre os espaços de Sobolev

$$V = \{u \in H^2(0,L) : u(0) = u_x(0) = u_x(L) = 0\}$$

e

$$W = V \cap H^4(0,L)$$

equipadas, respectivamente, com as normas $\|u\|_V = \|u_{xx}\|_2$ e $\|u\|_W = \|u_{xx}\|_2 + \|u_{xxxx}\|_2$, onde $\|.\|_p$ denota a norma de L^p. Da Desigualdade de Poincaré e do Teorema da Aplicação Aberta segue que $\|.\|_V$ e $\|.\|_W$ são equivalentes às normas padrões de $H^2(0,L)$ e $H^4(0,L)$. De $u(0) = u_x(0) = u_x(L) = 0$ para $u \in W$, temos

$$\|u\|_\infty \le \sqrt{L}\|u_x\|_2, \ \|u_x\|_\infty \le \sqrt{L}\|u_{xx}\|_2, \ \|u_x\|_2 \le L\|u_{xx}\|_2. \tag{3.5}$$

Precisamos impor hipóteses sobre as funções f, g e h. Assumimos que $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são continuamente diferenciáveis tais que

$$f(s)s \ge 0 \text{ e } f(s)s - 2\hat{f}(s) \ge 0, \forall s \in \mathbb{R} \tag{3.6}$$

onde $\hat{f}(s) = \int_0^s f(z)dz$,

$$\begin{aligned} g(0) = 0,\ (g(r) - g(s))(r - s) \geq \rho|r - s|^2,\ \forall r, s \in \mathbb{R} \\ \text{e} \quad |g(r)| \leq C_g|r|,\ \forall r \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{3.7}$$

para algum $\rho > 0$ e alguma constante $C_g > 0$. A condição (3.6) significa que f tem um comportamento superlinear enquanto a condição (3.7) é típica para perturbações monótonas de funções lineares. E finalmente consideremos a função $h \in C^1(\mathbb{R})$ satisfazendo

$$h(0) = 0,\ (h(r) - h(s))(r - s) \geq \sigma|r - s|^2,\ \ \forall r, s \in \mathbb{R} \tag{3.8}$$

$$|h(x) - h(y)| \leq C_h|x - y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}, \tag{3.9}$$

para alguma constante $C_h > 0$. A hipótese (3.9) pode ser descartada caso h seja linear.

A seguir, enunciaremos o que entendemos como uma solução relacionado ao problema $(3.1) - (3.4)$

Definição 3.1. *Dizemos que uma função $u : [0, L] \times [0, T] \to \mathbb{R}$ é solução fraca do problema de valor inicial e fronteira $(3.1) - (3.4)$ quando satisfaz a formulação fraca*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_0^L u_t w dx + \int_0^L u_{xx}w_{xx}dx + M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)\int_0^L u_x(t)w_x dx + \\ + f(u(L, t))w(L) + g(u_t(L, t))w(L) + \int_0^L h(u_t)w dx = 0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

para toda $w \in W$ no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$ e satisfaz as condições iniciais

$$u(x, 0) = u^0(x),\ \ \frac{d}{dt}u(x, 0) = u^1(x).$$

Nosso resultado de existência é:

Teorema 3.2. *Seja $M \in C^1([0, \infty])$, uma função não negativa e assuma que (3.6)-(3.9) valem. Então para cada $u^0, u^1 \in W$ satisfazendo a condição de compatibilidade*

$$u^0_{xxx}(L) = f(u^0(L)) + g(u^1(L))$$

existe uma única solução de $(3.1) - (3.4)$ satisfazendo

$$u \in L^2(0, \infty; W) \cap C^0([0, \infty]; V) \cap W^{2,\infty}([0, \infty]; L^2(0, L)).$$

Demonstração. A demonstração é feita usando as aproximações de Galerkin. Seja $\{w^j\}$ uma base de W ortonormal em $L^2(0, L)$, tais que

$$u^0, u^1 \in Span\{w^1, w^2\}.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, coloquemos

$$W^m = Span\{w^1, w^2, \dots, w^m\}.$$

Procuramos por uma função

$$u^m(t) =: u^m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} k_j(t) w^j \tag{3.11}$$

tal que, para cada $w \in W^m$, a equação aproximada é satisfeita, isto é,

$$\int_0^L u_{tt}^m(t) w dx + \int_0^L u_{xx}^m(t) w_{xx} dx + M\left(\|u_x^m(t)\|_2^2\right) \int_0^L u_x^m(t) w_x dx + \\ + f(u^m(L,t)) w(L) + g(u_t^m(L,t)) w(L) + \int_0^L h(u_t^m(t)) w dx = 0 \tag{3.12}$$

com as condições iniciais

$$u^m(0) = u^0 \ \text{ e } \ u_t^m(0) = u^1. \tag{3.13}$$

Observe que, para $w^i \in W^m$,

$$\left\langle u^m(0), w^i \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{m} k_j(0) w^j, w^i \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} k_j(0) \left\langle w_j, w_i \right\rangle = k_i(0)$$

e que

$$k_i'(0) = \left\langle u_t^m(0), w^i \right\rangle.$$

Usando (3.11) podemos reescrever (3.12) com $w = w^i$ como

$$\sum_{j=1}^{m} k_j''(t) \left\langle w^j, w^i \right\rangle + \sum_{j=1}^{m} k_j(t) \left\langle w_{xx}^j, w_{xx}^i \right\rangle + \\ + M\left(\left\| \sum_{j=1}^{m} k_j(t) w_x^j \right\|_2^2 \right) \sum_{j=1}^{m} k_j(t) \left\langle w_x^j, w_x^i \right\rangle + G_i^m(t) = 0,$$

onde

$$G_i^m(t) = f\left(u^m(L)\right) w^i(L) + g(u_t^m(L)) w^i(L) + \left\langle h\left(u_t^m\right), w^i \right\rangle.$$

Sendo $\{w^i\}$ ortonormal obteremos que os coeficiente k_i devem satisfazer o sistema

$$\begin{cases} k_i''(t) + k_i(t)\|w_{xx}^i\|_2^2 + M\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{m} k_j^2(t)\|w_x^j\|_2^2\right) k_i(t)\|w_x^i\|_2^2 + G_i^m(t) = 0, \ \ \forall i = 1, \dots, m \\ k_i(0) = k_i^0 \quad e \quad k_i'(0) = k_i^1, \quad \forall i = 1, \dots, m. \end{cases} \tag{3.14}$$

Escrevendo

$$X = \begin{bmatrix} k_1(t) \\ \vdots \\ k_m(t) \end{bmatrix}, \ X_0 = \begin{bmatrix} k_1^0 \\ \vdots \\ k_m^0 \end{bmatrix}, \ X_1 = \begin{bmatrix} k_1^1 \\ \vdots \\ k_m^1 \end{bmatrix}, \ G = \begin{bmatrix} G_1^m(t) \\ \vdots \\ G_m^m(t) \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} \|w_{xx}^1\|_2^2 & & & \\ & \|w_{xx}^2\| & & \\ & & \ddots & \\ & & & \|w_{xx}^m\|_2^2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} \|w_x^1\|_2^2 & & & \\ & \|w_x^2\| & & \\ & & \ddots & \\ & & & \|w_x^m\|_2^2 \end{bmatrix},$$

teremos que o sistema (3.14) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} & X'' + \left(A + M\left(X^T B X\right) B\right) X + G(X, X') = 0, \\ & X(0) = X_0, \ X'(0) = X_1, \end{aligned}$$

onde $X^T = \begin{bmatrix} k_1(t) & \dots & k_m(t) \end{bmatrix}$ e para $i = 1, \dots, m$ temos

$$\begin{aligned} (G(X, X'))_{1,i} \ = \ & f\left(\begin{bmatrix} w^1(L) & \dots & w^m(L) \end{bmatrix} X\right) w^i(L) + \\ & + g\left(\begin{bmatrix} w^1(L) & \dots & w^m(L) \end{bmatrix} X'\right) w^i(L) + \\ & + \left\langle h\left(\begin{bmatrix} w^1 & \dots & w^m \end{bmatrix} X'\right), w^i \right\rangle. \end{aligned}$$

Fazendo agora $Y = \begin{bmatrix} X \\ X' \end{bmatrix}$ teremos

$$Y' = \begin{bmatrix} X' \\ X'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X' \\ -\left(A + M\left(X^T B X\right) B\right) X - G(X, X') \end{bmatrix}, \ Y(0) = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o sistema anterior pode ser expresso como um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem da forma

$$\begin{aligned} & Y' = F(t, Y) \\ & Y(0) = Y_0 \end{aligned}$$

onde $F : [0,T] \times \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m+1}$ é definida por

$$F(t,Y) \;=\; \begin{bmatrix} X' \\ -\left(A + M\left(X^T B X\right) B\right) X - G(X,X') \end{bmatrix}.$$

Mostremos que esta função satisfaz as condições de Carathéodory.
Seja $E = [0,T] \times \mathbb{B}$, $\mathbb{B} = \{Y \in \mathbb{R}^n : |Y| < \xi\}$, $\xi > 0$, $Y_0 \in \mathbb{B}$ então

(i) Fixado Y, tem-se que $F(t,Y)$ é mensurável em $t \in [0,T]$ pois M é contínua e as funções coordenadas de G são contínuas em t.

(ii) Fixado t, as funções coordenadas de $F(t,Y)$ são contínuas, logo $F(t,Y)$ é contínua em t.

(iii) Aplicando a norma de $\mathbb{R}^{n+1}$ em F temos

$$\begin{aligned} \|F(t,Y)\|_{\mathbb{R}^{n+1}} &= \left\| \begin{matrix} X' \\ -\left(A + M\left(X^T B X\right) B\right) X - G(X,X') \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^{n+1}} \\ &\leq |X'| + \left|\left(A + M\left(X^T B X\right) B\right) X\right| + |G(X,X')| \\ &= m_E(t), \forall (t,Y) \in E. \end{aligned}$$

sendo $m_E(t)$ contínua, logo integrável em $[0,T]$.

Portanto existe uma solução u^m em $[0,t_m)$, para todo $t_m \in (0,T)$. A seguir faremos as estimativas a priori, as quais servirão para estender a solução a todo intervalo $[0,T]$.

Estimativa 1. Substituindo $w = u^m_t(t)$ em (3.12) teremos

$$\int_0^L u^m_{tt}(t) u^m_t(t) dx + \int_0^L u^m_{xx}(t) u^m_{txx}(t) dx + M(\|u^m_x(t)\|_2^2) \int_0^L u^m_x(t) u^m_{tx}(t) dx +$$
$$+ f(u^m(L,t)) u^m_t(L,t) + g(u^m_t(L,t)) u^m_t(L,t) + \int_0^L h(u^m_t(t)) u^m_t(t) dx = 0,$$

isto é,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|u^m_t(t)\|_2^2 + \|u^m_{xx}(t)\|_2^2 + \hat{M}(\|u^m_x(t)\|_2^2) + 2\hat{f}(u^m(L,t))\right\} \\ &+ g(u^m_t(L,t)) u^m_t(L,t) + \int_0^L h(u^m_t(t)) u^m_t(t) dx = 0 \end{aligned}$$

onde $\hat{M}(s) = \int_0^s M(z)dz$. Fazendo

$$E_m(t) = E(t,u^m) = \frac{1}{2}\|u^m_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u^m_{xx}(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\hat{M}(\|u^m_x(t)\|_2^2) + \hat{f}(u^m(L))$$

teremos

$$\frac{d}{dt}E_m(t) + g(u_t^m(L,t))u_t^m(L,t) + \int_0^L h(u_t^m(t))u_t^m(t)dx = 0.$$

Integrando de 0 a t, com $t \leq t_m$, obteremos

$$E_m(t) + \int_0^t g(u_t^m(L,s))u_t^m(L,s)ds + \int_0^t \int_0^L h(u_t^m(x,s))u_t^m(x,s)dxds = E_m(0)$$

onde

$$\begin{aligned} E_m(0) &= \frac{1}{2}\|u_t^m(0)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_{xx}^m(0)\|_2^2 + 2\hat{M}(\|u_x^m(0)\|_2^2) + \hat{f}(u^m(L,0)) \\ &= \frac{1}{2}\|u^1\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_{xx}^0\|_2^2 + 2\hat{M}(\|u_x^0\|_2^2) + \hat{f}(u^0(L)). \end{aligned}$$

De (3.6) e por M ser não-negativa, existe $M_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|u_t^m(t)\|_2^2 + \|u_{xx}^m(t)\|_2^2 + \int_0^T g(u_t^m(L,t))u_t^m(L,t)dt + \\ + \int_0^T \int_0^L h(u_t^m(s))u_t^m(s)dxds \leq M_1 \end{aligned} \tag{3.15}$$

para todo $t \in [0,T]$ e para todo $m \in \mathbb{N}$, ou seja, a solução pode ser estendida a todo intervalo $[0,T]$.

Estimativa 2. Vamos agora obter uma estimativa para $u_{tt}^m(0)$ na norma de L^2. De (3.12) com $w = u_{tt}^m(0)$ e $t = 0$, obteremos

$$\begin{aligned} \int_0^L |u_{tt}^m(x,0)|^2dx + \int_0^L u_{xx}^0 u_{ttxx}^m(x,0)dx + M(\|u_x^m(0)\|_2^2)\int_0^L u_x^m(x,0)u_{ttx}^m(x,0)dx + \\ + f(u^0)u_{tt}^m(L,0) + g(u^1)u_{tt}^m(L,0) + \int_0^L h(u_t^m(x,0))u_{tt}^m(x,0)dx = 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \|u_{tt}^m(0)\|_2^2 + \int_0^L u_{xx}^0 u_{xxtt}^m(x,0)dx + M(\|u_x^0\|_2^2)\int_0^L u_x^0 u_{xtt}^m(x,0)dx + \\ + \left[f(u^0(L)) + g(u^1(L))\right] u_{tt}^m(L,0) + \int_0^L h(u^1)u_{tt}^m(x,0)dx = 0. \end{aligned}$$

Assim, integrando por partes e usando (3.9)

$$\|u_{tt}^m(0)\|_2^2 \leq u_{xxx}^0(L)u_{tt}^m(L,0) - \int_0^L u_{xxxx}^0 u_{tt}^m(x,0)dx + M(\|u_x^0\|_2^2)\int_0^L u_{xx}^0 u_{tt}^m(x,0)dx +$$
$$-\left[f(u^0(L)) + g(u^1(L))\right] u_{tt}^m(L,0) + C_h \int_0^L |u^1||u_{tt}^m(x,0)|dx.$$

Usando a condição de compatibilidade, (3.3), (3.5) e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz teremos

$$\begin{aligned}\|u_{tt}^m(0)\|_2^2 \quad &\leq \quad \|u_{xxxx}^0\|_2\|u_{tt}^m(0)\|_2 + M(\|u_x^0\|_2^2)\|u_{xx}^0\|_2\|u_{tt}^m(0)\|_2 + \\ &\quad +C_h\|u^1\|_2\|u_{tt}^m(0)\|_2\end{aligned}$$

Logo

$$\|u_{tt}^m(0)\|_2^2 \leq C\left[\|u_{xxxx}^0\|_2 + M(\|u_x^0\|_2^2)\|u_{xx}^0\|_2 + \|u^1\|_2\right]\|u_{tt}^m(0)\|_2,$$

e portanto, aplicando a desigualdade de Young e hipóteses sobre os dados iniciais, existe $M_2 > 0$ tal que

$$\|u_{tt}^m(0)\|_2 \leq M_2, \ \ \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3.16}$$

Estimativa 3. Agora vamos obter uma estimativa para u_{tt}^m e u_{xxt}^m na norma de L^2. Fixe $t, \xi > 0$ tais que $\xi < T - t$. Tomando em (3.12) t valendo $t = t + \xi$ e fazendo a direrença com (3.12) com $t = t$ e substituindo w por $u_t^m(t+\xi) - u_t^m(t)$, obteremos

$$\begin{aligned}&\int_0^L (u_{tt}^m(t+\xi) - u_{tt}^m(t))(u_t^m(t+\xi) - u_t^m(t))dx + \\ &+\int_0^L (u_{xx}^m(t+\xi) - u_{xx}^m(t))(u_{txx}^m(t+\xi) - u_{txx}^m(t))dx + \\ &+\int_0^L M(\|u_x^m(t+\xi)\|_2^2)u_x^m(t+\xi)(u_{tx}^m(t+\xi) - u_{tx}^m(t))dx + \\ &-\int_0^L M(\|u_x^m(t)\|_2^2)u_x^m(t)(u_{tx}^m(t+\xi) - u_{tx}^m(t))dx + \\ &+(f(u^m(L,t+\xi)) - f(u^m(L,t)))(u_t^m(L,t+\xi) - u_t^m(L,t)) \\ &+(g(u_t^m(L,t+\xi)) - g(u_t^m(L,t)))(u_t^m(L,t+\xi) - u_t^m(L,t)) + \\ &+\int_0^L (h(u_t^m(t+\xi)) - h(u_t^m(t)))(u_t^m(t+\xi) - u_t^m(t))dx \\ &= 0\end{aligned}$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|u_t^m(t+\xi)-u_t^m(t)\|_2^2+\|u_{xx}^m(t+\xi)-u_{xx}^m(t)\|_2^2\right\}+\\
&+(f(u^m(L,t+\xi))-f(u^m(t)))(u_t^m(L,t+\xi)-u_t^m(L,t))+\\
&+(g(u_t^m(L,t+\xi))-g(u_t^m(t)))(u_t^m(L,t+\xi)-u_t^m(L,t))+\\
&+\int_0^L(h(u_t^m(t+\xi))-h(u_t^m(t)))(u_t^m(t+\xi)-u_t^m(t))dx+\\
&+\int_0^L M(\|u_x^m(t+\xi)\|_2^2)u_x^m(t+\xi)(u_x^m(t+\xi)-u_{xt}^m(t))dx+\\
&-\int_0^L M(\|u_t^m(t)\|_2^2)u_x^m(t)(u_x^m(t+\xi)-u_{xt}^m(t))dx=0. \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

Fazendo

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^L M(\|u_x^m(t+\xi)\|_2^2)u_x^m(t+\xi)(u_{xt}^m(t+\xi)-u_{xt}^m(t))dx+\\
&\quad -\int_0^L M(\|u_x^m(t)\|_2^2)u_x^m(t)(u_{xt}^m(t+\xi)-u_{xt}^m(t))dx
\end{aligned}
$$

vamos estimar $|I|$. Somando e subtraindo $M(\|u_x^m(t+\xi)\|_2^2)u_x^m(t)(u_{xt}^m(t+\xi)-u_{xt}^m(t))$ teremos

$$
\begin{aligned}
I &= M(\|u_x^m(t+\xi)\|_2^2)\int_0^L(u_x^m(t+\xi)-u_x^m(t))(u_{xt}^m(t+\xi)-u_{xt}^m(t))dx+\\
&\quad +\Delta M\int_0^L u_x^m(t)(u_{xt}^m(t+\xi)-u_{xt}^m(t))dx,
\end{aligned}
$$

onde $\Delta M=M(\|u_x^m(t+\xi)\|_2^2)-M(\|u_x^m(t)\|_2^2)$. Integrando por partes

$$
\begin{aligned}
I &= -M(\|u_x^m(t+\xi)\|_2^2)\int_0^L(u_{xx}^m(t+\xi)-u_{xx}^m(t))(u_t^m(t+\xi)-u_t^m(t))dx+\\
&\quad -\Delta M\int_0^L u_{xx}^m(t)(u_t^m(t+\xi)-u_t^m(t))dx.
\end{aligned}
$$

Agora, do Teorema do Valor Médio, da imersão (3.5) e da estimativa (3.15), existe uma constante $C_1>0$ tal que

$$
\begin{aligned}
|\Delta M| &= |M(\|u_x^m(t+\xi)\|_2^2)-M(\|u_x^m(t)\|_2^2)|=C(\|u_x^m(t+\xi)\|_2^2-\|u_x^m(t)\|_2^2)\\
&= C(\|u_x^m(t+\xi)\|_2-\|u_x^m(t)\|_2)(\|u_x^m(t+\xi)\|_2+\|u_x^m(t)\|_2)\\
&\le C\|u_x^m(t+\xi)-u_x^m(t)\|_2(\|u_x^m(t+\xi)\|_2+\|u_x^m(t)\|_2)\\
&\le C_1\|u_x^m(t+\xi)-u_x^m(t)\|_2.
\end{aligned}
$$

Da última desigualdade, de $M(\|u_x^m(t+\xi)\|_2^2)$ ser limitado e (3.5) segue utilizando a Desigualdade de Young que

$$
\begin{aligned}
|I| &\leq \int_0^L \frac{C^2}{2}|u_{xx}^m(t+\xi)-u_{xx}^m(t)|^2+\frac{1}{2}|u_t^m(t+\xi)-u_t^m(t)|^2dx+\\
&+\int_0^L \frac{C_1^2}{2}\|u_x^m(t+\xi)-u_x^m(t)\|_2^2|u_{xx}^m(t)|^2+\frac{1}{2}|u_t^m(t+\xi)-u_t^m(t)|^2dx\\
&\leq C_2\|u_{xx}^m(t+\xi)-u_{xx}^m(t)\|_2^2+\|u_t^m(t+\xi)-u_t^m(t)\|_2^2
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
\begin{aligned}
|I| &\leq C_2\|u_{xx}^m(t+\xi)-u_{xx}^m(t)\|_2^2+\|u_t^m(t+\xi)-u_t^m(t)\|_2^2+\\
&+\frac{\rho}{2}|u_t^m(L,t+\xi)-u_t^m(L,t)|^2
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

para certa constante positiva C_2. Faremos um argumento similar para f. Usando a Desigualdade de Young teremos

$$
\begin{aligned}
A &= |f(u^m(L,t+\xi))-f(u^m(L,t))||u_t^m(L,t+\xi)-u_t^m(L,t)|\\
&\leq \frac{1}{2\rho}|f(u^m(L,t+\xi))-f(u^m(L,t))|^2+\frac{\rho}{2}|u_t^m(L,t+\xi)-u_t^m(L,t)|^2.
\end{aligned}
$$

Agora, do Teorema do Valor Médio, existe uma constante C positiva, tal que

$$
\begin{aligned}
A &\leq \frac{C}{2\rho}|u^m(L,t+\xi)-u^m(L,t)|^2+\frac{\rho}{2}|u_t^m(L,t+\xi)-u_t^m(L,t)|^2\\
&\leq \frac{C}{2\rho}\|u^m(t+\xi)-u^m(t)\|_\infty^2+\frac{\rho}{2}|u_t^m(L,t+\xi)-u_t^m(L,t)|^2.
\end{aligned}
$$

Da imersão $H^2(0,L)\hookrightarrow L^\infty(0,L)$ segue que existe uma constante positiva C_3 tal que

$$
A \leq C_3\|u_{xx}^m(t+\xi)-u_{xx}^m(t)\|_2^2+\frac{\rho}{2}|u_t^m(L,t+\xi)-u_t^m(L,t)|^2. \tag{3.19}
$$

Fazendo

$$
\Phi_m(t,\xi)=\|u_{xx}^m(t+\xi)-u_{xx}^m(t)\|_2^2+\|u_t^m(t+\xi)-u_t^m(t)\|_2^2
$$

e levando em conta (3.18) e (3.19), deduzimos de (3.17) que

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Phi_m(t,\xi)+[(g(u_t^m(L,t+\xi))-g(u_t^m(t)))(u_t^m(L,t+\xi)-u_t^m(L,t))]\leq\\
&\leq (C_2+C_3)\Phi_m(t,\xi)+\rho|u_t^m(L,t+\xi)-u_t^m(L,t)|^2+\\
&+\int_0^L [h(u^m(t+\xi))-h(u^m(t))]\,(u_t^m(t+\xi)-u_t^m(t))dx.
\end{aligned}
$$

Da hipótese (3.9) sobre h, obteremos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L (h(u_t^m(t+\xi)) - h(u_t^m(t)))(u_t^m(t+\xi) - u_t^m(t))dx \leq \\
&\leq C_h \int_0^L |u_t^m(t+\xi) - u_t^m(t)|^2 dx \\
&\leq C\Phi_m(t,\xi).
\end{aligned}
$$

disso

$$
\frac{d}{dt}\Phi_m(t,\xi) \leq C\Phi_m(t,\xi)
$$

e portanto

$$
\Phi_m(t,\xi) \leq \Phi_m(0,\xi)e^{CT}, \quad \forall t \in [0,T).
$$

Dividindo a equação acima por ξ^2 e fazendo $\xi \to 0$ teremos

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\xi\to 0} \frac{\|u_{xx}^m(t+\xi) - u_{xx}^m(t)\|_2^2 + \|u_t^m(t+\xi) - u_t^m(t)\|_2^2}{\xi^2} \leq \\
&\leq \lim_{\xi\to 0} \frac{\|u_{xx}^m(\xi) - u_{xx}^m(0)\|_2^2 + \|u_t^m(\xi) - u_t^m(0)\|_2^2}{\xi^2} e^{CT} \\
&= \left(\|u_{txx}^m(0)\|_2^2 + \|u_{tt}^m(0)\|_2^2\right) e^{CT}
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\|u_{txx}^m(t)\|_2^2 + \|u_{tt}^m(t)\|_2^2 \leq (\|u_{xx}^1\|_2^2 + \|u_{tt}^m(0)\|_2^2)e^{CT}.
$$

e da estimativa (3.16), existe uma constante $M_3 > 0$, dependendo apenas de T, tal que

$$
\|u_{txx}^m(t)\|_2^2 + \|u_{tt}^m(t)\|_2^2 \leq M_3,\ \forall m \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,T]. \tag{3.20}
$$

Com as estimativas (3.15) e (3.20) podemos usar o Lema de Lions-Aubin para conseguir a compacidade necessária para passar o limite em (3.12). De onde segue a existência da solução geral em $[0,T]$.

Passagem ao limite. Da estimativa (3.15) temos

$$
(u_t^m) \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty;L^2(0,L)) \tag{3.21}
$$

$$
(u^m) \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty;W) \tag{3.22}
$$

Como $H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L)$ e $L^\infty(0,T;L^2(0,L)) = (L^1(0,T;L^2(0,L)))'$ e $L^1(0,T;L^2(0,L))$

é separável, existe uma subsequência de (u^m) que denotaremos da mesma forma e $\hat{u}$ em $L^\infty(0,T;L^2(0,L))$ tal que

$$u^m \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,\infty;W) \tag{3.23}$$

$$u_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} \hat{u}_t \text{ em } L^\infty(0,\infty;L^2(0,L)) \tag{3.24}$$

Observando que $L^\infty(0,T;L^2(0,L)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(0,L)) = L^2(Q)$, fazendo a identificação $L^2(0,T;L^2(0,L)) \equiv L^2(Q)$, usando sua reflexividade e de (3.23) obteremos uma subsequência de (u^m), que denotaremos da mesma forma, tal que

$$u^m \rightharpoonup u \text{ em } L^2(Q), \text{ onde } Q = [0,L] \times [0,T].$$

Pelo fato da convergência fraca em $L^2(Q)$ implicar na convergência no sentido das distribuições, temos

$$u^m \longrightarrow u \text{ em } \mathcal{D}'(Q).$$

Como o operador derivação é contínuo em $\mathcal{D}'(Q)$, temos que

$$u_t^m \longrightarrow u_t \text{ em } \mathcal{D}'(Q).$$

Da mesma forma, usando (3.24), obteremos

$$u_t^m \longrightarrow \hat{u} \text{ em } \mathcal{D}'(Q).$$

Assim, da unicidade do limite fraco em $\mathcal{D}'(Q)$, resulta que

$$\hat{u} = u_t \text{ q.s. em } Q.$$

Portanto

$$u_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} u_t \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(0,L)). \tag{3.25}$$

Multiplicando (3.12) por $\theta \in \mathcal{D}(0,t)$ e integrando de 0 a T, teremos

$$\int_0^T \Big[(u_{tt}^m(t), w_i) + (u_{xx}^m(t), w_{i,xx}) + M\left(\|u_x^m(t)\|_2^2\right)(u_x^m(t), w_{i,x}) + f(u^m(L,t))w_i(L) +$$
$$+ g(u_t^m(L,t))w_i(L) + (h(u^m(t)), w_i)\Big]\theta(t)dt = 0$$

usando integração por partes, obteremos

$$\int_0^T (u_t^m(t), w_i)\theta'(t)dt + \int_0^T (u_{xx}^m(t), w_{i,xx})\theta(t)dt + \int_0^T M\left(\|u_x^m(t)\|_2^2\right)(u_x^m, w_{i,x})\theta(t)dt +$$
$$+ \int_0^T f(u^m(L,t))w_i(L)\theta(t)dt + \int_0^T g(u_t^m(L,t))w_i(L)\theta(t)dt + \int_0^T (h(u^m(t)), w_i)\theta(t)dt = 0.$$

As condições (3.23) e (3.25) são suficientes para passar o limite na parte linear. Analisaremos agora a parte não linear. Considerando o conjunto

$$\hat{W} = \{u \in L^2(0,T;W) : u_t \in L^2(0,T;L^2(0,L))\}$$

munido da norma

$$\|u\|_{\hat{W}} = \|u\|_{L^2(0,T;V)} + \|u_t\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))}$$

temos de (3.21) e (3.22) que

$$(u^m) \text{ é limitada em } \hat{W}.$$

Logo, pelo Teorema de Aubin-Lions, obteremos uma subsequência de (u_m), a qual denotaremos da mesma forma, tal que

$$u^m \longrightarrow u \text{ forte em } L^2(0,\infty;L^2(0,L)). \tag{3.26}$$

De h ser contínua, de (3.22) e do Lema de Lions, segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^T [(h(u_t^m(t)), w_i) - (h(u_t(t)), w_i)]\theta(t)dt &= \int_0^T (h(u_t^m(t)) - h(u_t(t)), w_i)\theta(t)dt \\
&\leq \int_0^T \|h(u_t^m(t)) - h(u_t(t))\|_2 \|w_i\|\theta(t)dt \\
&\leq C_h \int_0^T \|u_t^m(t) - u_t(t)\|_2 \|w_i\|\theta(t)dt \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

quando $m \to \infty$. De M ser contínua e de (3.26), temos

$$M\left(\|u_x^m(t)\|_2^2\right) \longrightarrow M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right), \text{ q.s. em } [0,T].$$

Além disso, de (3.15) segue que

$$M(\|u^m(t)\|_2^2) < m_1$$

onde $m_1 = \max\{M(\lambda) : 0 < \lambda < \|u_x^m(t)\|_2^2\}$. Assim, pelo Lema de Lions segue que

$$M\left(\|u_x^m(t)\|_2^2\right) \rightharpoonup M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right) \text{ em } L^2(0,T).$$

Assim

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^T [M\left(\|u_x^m(t)\|_2^2\right)(u_x^m(t), w_{i,x})\theta(t) - M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)(u_x(t), w_{i,x})\theta(t)]dt\right| \leq \\
&\leq \int_0^T \left|\left(M\left(\|u_x^m(t)\|_2^2\right)u_x^m(t) - M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)u_x(t), w_{i,x}\right)\theta(t)\right| dt \\
&\leq \int_0^T \|M\left(\|u_x^m(t)\|_2^2\right)u_x^m(t) - M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)u_x(t)\|_2\|w_{i,x}\|_2|\theta(t)|dt \\
&\leq \int_0^T \left[\|u_x^m(t)\|_2^2\left|M\left(\|u_x^m(t)\|_2^2\right) - M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)\right|\right]\|w_{i,x}\|_2|\theta(t)|dx + \\
&\int_0^L \left[\left|M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)\right|\|u_x^m(t) - u_x(t)\|_2\|w_{i,x}\|_2|\theta(t)|\right]dt
\end{aligned}$$

converge a zero quando $m \to \infty$. Por outro lado, temos de f ser contínua que

$$f(u^m(L,t)) \longrightarrow f(u(L,t)) \text{ q.s. em } [0,T],$$

e pelo Teorema do Valor Médio, existe uma constante $C > 0$ de forma que

$$|f(u^m(L,t)) - f(u(L,t))| = C|u^m(L,t) - u(L,t)| \longrightarrow 0$$

quando $m \to \infty$. Assim

$$\int_0^T f(u^m(L,t))w_i(L)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T f(u(L,t))w_i(L)\theta(t)dt$$

para $m \to 0$. De g ser contínua, de (3.22) e do Teorema de Lions segue que

$$\int_0^T g(u_t^m(L,t))w_i(L)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T g(u_t^m(L,t))w_i(L)\theta(t)dt$$

quando $m \to \infty$. Das convergências anteriores segue que para toda $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (u_t(t), w_i)\theta'(t)dt + \int_0^T (u_{xx}(t), w_{i,xx})\theta(t)dt + \int_0^T M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)(u_x(t), w_{i,x})\theta(t)dt + \\
&+ \int_0^T f(u(L,t))w_i(L)\theta(t)dt + \int_0^T g(u_t(L,t))w_i(L)\theta(t)dt + \int_0^T (h(u_t(t)), w_i)\theta(t)dt = 0.
\end{aligned}$$

Concluindo, pelo Lema Du Bois Raymond, que u é solução do problema.

Regularidade. Da estimativa (3.20) obteremos

$$(u^m) \quad \text{é limitada em} \quad W^{2,\infty}(0,T;L^2(0,L)) \tag{3.27}$$
$$(u_t^m) \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;V). \tag{3.28}$$

Como anteriormente, de (3.27) e (3.28) obtemos

$$u^m \rightharpoonup u \text{ em } W^{2,\infty}(0,T;L^2(0,L)) \tag{3.29}$$
$$u_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} u_t \text{ em } L^\infty(0,T;V) \tag{3.30}$$

De $(3.23)-(3.25)$ e do Lema 2.10, segue que

$$u \in C(0,T;V), \text{ para todo } T>0. \tag{3.31}$$

Portanto, disto e de $(3.23), (3.25), (3.29), (3.30)$ concluímos que

$$u \in L^2(0,T;W) \cap C(0,T;V) \cap W^{2,\infty}(0,T;L^2(0,L)).$$

Condições iniciais. Considere $\theta \in C^1([0,T])$, com $\theta(0)=1$ e $\theta(T)=0$. De

$$u_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} u_t \text{ em } L^\infty(0,T;V)$$

tem-se

$$\int_0^T\int_0^L u_t^m w\theta dxdt \longrightarrow \int_0^T\int_0^L u_t w\theta dxdt \;\; \forall \in L^2(0,L).$$

Integrando por partes, teremos que

$$-\int_0^L u^m(0)wdx - \int_0^T\int_0^L u^m w\theta' dxdt \longrightarrow -\int_0^L u(0)wdx - \int_0^T\int_0^L uw\theta' dxdt$$

Agora de

$$u^m \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T,V)$$

teremos

$$\int_0^L u^m(0)wdx \longrightarrow \int_0^L u(0)wdx, \forall w \in L^(0,L).$$

Em contrapartida, de $u^m(0)=u^0$ então pela unicidade do limite fraco, $u(0)=u^0$. Analogamente temos $u_t(0)=u^1$. Com efeito, seja $\theta \in C^1([0,T])$, tal que $\theta(0)=1$ e $\theta(T)=0$.

De

$$u_{tt}^m \overset{*}{\rightharpoonup} u_{tt} \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(0,L))$$

teremos

$$\int_0^T \int_0^L u_{tt}^m w\theta dxdt \longrightarrow \int_0^T \int_0^L u_{tt} w\theta dxdt, \forall \theta \in L^2(0,L).$$

Integrando por partes

$$-\int_0^L u_t^m(0)wdx - \int_0^T \int_0^L u_t^m w\theta' dxdt \longrightarrow -\int_0^L u_t(0)wdx - \int_0^T \int_0^L u_t w\theta' dxdt$$

Como

$$u_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} u_t \text{ em } L^\infty(0,T;V)$$

segue

$$\int_0^T \int_0^L u_t^m w\theta' dxdt \longrightarrow \int_0^T \int_0^L u_t w\theta' dxdt,$$

de onde resulta

$$\int_0^L u_t^m(0)wdx \longrightarrow \int_0^L u_t(0)wdx, \forall w \in L^2(0,L).$$

Assim

$$u_t^m(0) \rightharpoonup u_t(0) \text{ em } L^2(0,L).$$

E como $u_t^m(0) = u^1$, assim, pela unicidade do limite fraco, que $u_t(0) = u^1$.

Unicidade. Sejam u, v duas soluções de $(3.1) - (3.4)$ com a mesma condição inicial. Então escrevendo $z = u - v$, vemos que $z(0) = z_t(0) = 0$ e de (3.10),

$$\begin{aligned} &\int_0^L z_{tt}(t)wdx + \int_0^L z_{xx}(t)w_{xx}dx + M(\|u_x(t)\|_2^2)\int_0^L u_x(t)w_xdx + \\ &-M(\|v_x(t)\|_2^2)\int_0^L v_x(t)w_xdx + [f(u(L,t)) - f(v(L,t))]w(L,t) + \\ &+[g(u_t(L,t)) - g(v_t(L,t))]w(L,t) + \int_0^L (h(u_t) - h(v_t))wdx = 0 \end{aligned}$$

Colocando $w = z_t$, usando o Teorema do Valor Médio, (3.15), (3.17) e a Desigualdade de

Young como na estimativa 3, deduzimos que para alguma constante $C > 0$,

$$\frac{d}{dt}\{\|z_t(t)\|_2^2 + \|z_{xx}(t)\|_2^2\} \leq C\{\|z_t(t)\|_2^2 + \|z_{xx}(t)\|_2^2\}, \ \forall t \in [0, T].$$

Do Lema de Gronwall vemos que $u = v$. □

3.2 Comportamento Assintótico

Nesta seção vamos estabelecer o decaimento exponencial do prolema da viga extensível (3.1)-(3.3) onde assumiremos que (3.6)-(3.9) sejam satisfeitas e com a hipótese adicional

$$M(s)s \geq \hat{M}(s), \ \ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.32}$$

Defina a energia do sistema $(3.1) - (3.3)$ por

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_{xx}(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\hat{M}\left(\|u_x(t)\|_2^2\right) + \hat{f}(u(L,t)).$$

Ao decorrer deste capítulo denotaremos $u = u(x,t)$ quando a omissão das variáveis não prejudica o significado. A energia do sistema satisfaz o seguinte Lema.

Lema 3.3. *Seja u solução de $(3.1) - (3.3)$, então a energia associada satisfaz*

$$\frac{d}{dt}E(t) = -g(u_t(L,t))u_t(L,t) - \int_0^L h(u_t)u_t dx.$$

Demonstração. Multiplicando (3.1) por u_t e integrando de 0 a L

$$\int_0^L u_t u_{tt} dx + \int_0^L u_t u_{xxxx} dx - M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)\int_0^L u_t u_{xx} dx + \int_0^L h(u_t)u_t dx = 0$$

usando integração por partes e as condições de contorno,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L |u_t|^2 + |u_{xx}|^2 dx + \hat{M}\left(\|u_x(t)\|_2^2\right) + 2\hat{f}\left(u(L,t)\right)\right\} = \\ &= -g(u_t(L,t))u_t(L,t) - \int_0^L h(u_t)u_t dx, \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}E(t) = -g(u_t(L,t))u_t(L,t) - \int_0^L h(u_t)u_t dx.$$

□

Consideremos o funcional

$$\Psi(t) = \int_0^L uu_t dx.$$

Lema 3.4. *Com as hipóteses do Lema* 3.3*, vale a seguinte desigualdade*

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) \leq C\|u_t(t)\|_2^2 - \frac{1}{2}E(t).$$

para algum $C > 0$.

Demonstração. Multiplicando a equação (3.1) por u e integrando de 0 a L

$$\int_0^L uu_{tt}dx + \int_0^L uu_{xxxx}dx + M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)\int_0^L uu_{xx}dx + \int_0^L h(u_t)udx = 0.$$

Integrando por partes teremos de $u(0,t) = 0$ que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L uu_t dx\right\} &= \int_0^L |u_t|^2 dx - u(L,t)u_{xxx}(L,t) + \int_0^L u_x u_{xxx} dx + \\ &\quad -M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)\int_0^L |u_x|^2 dx - \int_0^L h(u_t)udx.\end{aligned}$$

Usando a condição de contorno $(3.2) - (3.3)$ e integrando por partes novamente

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L uu_t dx\right\} &= \int_0^L |u_t|^2 dx - u(L,t)f(u(L,t)) - u(L,t)g(u_t(L,t)) + \\ &\quad -\int_0^L |u_{xx}|^2 dx - M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)\int_0^L |u_x|^2 dx - \int_0^L h(u_t)udx.\end{aligned}$$

Assim de (3.6) e (3.32)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L uu_t dx\right\} &\leq \int_0^L |u_t|^2 dx - 2\hat{f}(u(L,t)) + |u(L,t)||g(u_t(L,t))| + \\ &\quad -\int_0^L |u_{xx}|^2 dx - \hat{M}\left(\|u_x(t)\|_2^2\right) - \int_0^L h(u_t)udx. \qquad (3.33)\end{aligned}$$

Analisaremos os termos da última desigualdade. Da imersão (3.5) e da Desigualdade de Young

$$\begin{aligned}|u(L,t)||g(u_t(L,t))| &\leq L^{\frac{3}{2}}\|u_{xx}(t)\|_2|g(u_t(L,t))| \\ &\leq \frac{1}{4}\|u_{xx}(t)\|_2^2 + L^3|g(u_t(L,t))|^2.\end{aligned}$$

Agora, da hipótese (3.7)

$$|u(L,t)||g(u_t(L,t))| \leq \frac{1}{4}\|u_{xx}(t)\|_2^2 + L^3C_g|u_t(L,t)|^2 \tag{3.34}$$

Agora, utilizando a hipótese (3.9) juntamente com a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, (3.5) e a Desigualdade de Poincaré

$$-\int_0^L h(u_t)udx \leq C_h\|u_t(t)\|_2\|u(t)\|_2 \leq L^2C_h\|u_t(t)\|_2\|u_{xx}(t)\|_2.$$

Assim, da Desigualdade de Young

$$-\int_0^L h(u_t)udx \leq \frac{1}{4}\|u_{xx}(t)\|_2^2 + L^4C_h^2\|u_t(t)\|_2^2. \tag{3.35}$$

Substituindo as desigualdades (3.34) e (3.35) em (3.33) teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\{\int_0^L uu_t dx\right\} &\leq \left(1 + L^4C_h^2\right)\|u_t(t)\|_2^2 - 2\hat{f}(u(L,t)) + \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_0^L |u_{xx}|^2dx - \hat{M}\left(\|u_x(t)\|_2^2\right) \\ &\leq \left(\frac{3}{2} + L^4C_h^2\right)\|u_t(t)\|_2^2 - \frac{1}{2}E(t). \end{aligned}$$

Portanto segue a demonstração do lema. □

Lema 3.5. *Assuma as hipóteses do Lema* 3.3*. Fazendo* $E_\epsilon = E(t) + \epsilon\Psi(t)$*, então existe* C_0 *uma constante positiva tal que*

$$|E_\epsilon(t) - E(t)| \leq \epsilon C_0 E(t) \; \forall \epsilon > 0.$$

Demonstração. De fato, da Desigualdade de Cauchy-Schwarz segue que

$$\begin{aligned} |E_\epsilon(t) - E(t)| &= \epsilon|\Psi(t)| = \epsilon\left|\int_0^L uu_t dx\right| \\ &\leq \epsilon\|u(t)\|_2\|u_t(t)\|_2. \end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Poincaré e a Desigualdade de Young na primeira parcela do lado esquerdo obteremos

$$\begin{aligned} |E_\epsilon(t) - E(t)| &\leq C\frac{\epsilon}{2}\left[\|u_{xx}(t)\|_2^2 + \|u_t(t)\|_2^2\right] \\ &\leq \epsilon C_0 E(t). \end{aligned}$$

□

Lema 3.6. *Com as hipóteses do Lema* 3.3*, temos que existe* $\epsilon_1 > 0$ *tal que*

$$\frac{d}{dt}E_{\epsilon_1}(t) \leq -\frac{\epsilon_1}{4}E(t)\ \forall t \in [0,T].$$

Demonstração. De fato, dos Lemas 3.3 e 3.4 segue que

$$\frac{d}{dt}E_{\epsilon_1}(t) \leq -g(u_t(L,t))u_t(L,t) - \int_0^L h(u_t)u_t dx + C\epsilon_1\|u_t(t)\|_2^2 - \frac{\epsilon_1}{2}E(t).$$

Das hipóteses (3.7), (3.8) e fazendo ϵ_1 pequeno teremos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_{\epsilon_1}(t) &\leq -\rho|u_t(L,t)|^2 - (\sigma - C\epsilon_1)\|u_t(t)\|_2^2 - \frac{\epsilon_1}{2}E(t)\\ &\leq -\frac{\epsilon_1}{4}E(t).\end{aligned}$$

□

Teorema 3.7. *Seja* u *a solução do problema* (3.1) – (3.3)*. Então existe uma constante positiva* θ *tal que*

$$E(t) \leq 3E(0)e^{-\theta t}\ \forall t \geq 0.$$

Demonstração. Fazendo $\epsilon_0 = \min\left\{\frac{1}{2C_0}, \epsilon_1\right\}$ para $\epsilon < \epsilon_0$,

$$\frac{1}{2}E(t) \leq (-\epsilon C_0 + 1)E(t) \leq E_\epsilon(t) \leq (\epsilon C_0 + 1)E(t) \leq \frac{3}{2}E(t)$$

Assim do Lema 3.6 temos

$$\frac{d}{dt}E_\epsilon(t) \leq -\frac{\epsilon}{4}E(t) \leq -\frac{\epsilon}{6}E_\epsilon(t)$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\left\{E_\epsilon(t)e^{\frac{\epsilon}{6}t}\right\} \leq 0.$$

Portanto

$$\frac{1}{2}E(t) \leq E_\epsilon(t) \leq E_\epsilon(0)e^{-\frac{\epsilon}{6}t} \leq \frac{3}{2}E(0)e^{-\frac{\epsilon}{6}t}.$$

ou seja,

$$E(t) \leq 3E(0)e^{-\frac{\epsilon}{6}t}\ \forall t \geq 0,$$

o que conclui a demonstração do Teorema. □

Observação: O Teorema 3.7 permanece válido mesmo quando $f = 0$ na condição de fronteira, isto é, $u_{xxx}(L,t) = g(u_t(L,t))$.

4 PROBLEMA DA VIGA EXTENSÍVEL COM DISSIPAÇÃO TÉRMICA

Neste capítulo, estudamos a existência, unicidade e comportamento assintótico de soluções para o problema da viga extensível com amortecimento na fronteira não linear e dissipação térmica, dada por

$$u_{tt} + u_{xxxx} - M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)u_{xx} + \alpha\theta_{xx} = 0 \text{ em } [0, L] \times \mathbb{R}_+ \tag{4.1}$$

$$\theta_t - \theta_{xx} - \alpha u_{xxt} = 0 \text{ em } [0, L] \times \mathbb{R}_+ \tag{4.2}$$

$$u(0, t) = u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \text{ em } \mathbb{R}_+ \tag{4.3}$$

$$\theta(0, t) = \theta_x(L, t) = 0 \text{ em } \mathbb{R}_+ \tag{4.4}$$

$$u_{xxx}(L, t) = f(u(L, t)) + g(u_t(L, t)) \text{ em } \mathbb{R}_+ \tag{4.5}$$

$$u(x, 0) = u^0(x),\ u_t(x, 0) = u^1(x),\ \theta(x, 0) = \theta^0(x) \text{ em } [0, L] \tag{4.6}$$

onde α é uma constante positiva.

4.1 Existência de Solução

Nesta seção vamos mostrar a existência e unicidade para o problema $(4.1) - (4.6)$ via Método de Faedo-Galerkin.
Nossas análises são baseadas sobre os espaços de Sobolev

$$V = \left\{u \in H^2(0, L) : u(0) = u_x(0) = u_x(L) = 0\right\},$$
$$W = V \cap H^4(0, L),$$
$$U = \left\{\theta \in H^2(0, L) : \theta(0) = \theta_x(L) = 0\right\},$$

onde as normas em V, W e U são, respectivamente,

$$\|u\|_V = \|u_{xx}\|_2,\ \|u\|_W = \|u_{xx}\|_2 + \|u_{xxxx}\|_2 \ \text{ e } \ \|\theta\|_U = \|\theta_{xx}\|_2,$$

onde $\|.\|_p$ denota a norma de L^p. Da Desigualdade de Poincaré e do Teorema da Aplicação Aberta segue que $\|.\|_V$, $\|.\|_W$ e $\|.\|_U$ são equivalentes às normas padrões de $H^2(0, L)$, $H^4(0, L)$ e $H^2(0, L)$, respectivamente. De $u(0) = u_x(0) = 0$ para $u \in U$ e $\theta(0) = 0$ para $\theta \in W$, temos

$$\|u\|_\infty \le \sqrt{L}\|u_x\|_2,\ \|u_x\|_\infty \le \sqrt{L}\|u_{xx}\|_2,\ \|u_x\|_2 \le L\|u_{xx}\|_2,$$
$$\|\theta\|_\infty \le \sqrt{L}\|\theta_x\|_2,\ \|\theta\|_2 \le L\|\theta_x\|_2. \tag{4.7}$$

Precisamos impor hipóteses sobre as funções f e g. Assumimos que $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são continuamente diferenciáveis tais que

$$f(s)s \geq 0 \text{ e } f(s)s - 2\hat{f}(s) \geq 0, \forall s \in \mathbb{R} \tag{4.8}$$

onde $\hat{f}(s) = \int_0^s f(z)dz$,

$$\begin{gathered} g(0) = 0,\ (g(r) - g(s))(r - s) \geq \rho|r - s|^2,\ \forall r, s \in \mathbb{R} \\ \text{e} \quad |g(r)| \leq C_g|r|,\ \forall r \in \mathbb{R} \end{gathered} \tag{4.9}$$

para algum $\rho > 0$ e alguma constante $C_g > 0$. A condição significa que f tem um comportamento superlinear enquanto a condição (4.9) é típica para pertubações monótonas de funções lineares.
Enunciaremos, agora, o que entendemos como uma solução relacionado ao problema $(4.1) - (4.5)$.

Definição 4.1. *Consideremos as funções $u, \theta : [0, L] \times [0, T] \to \mathbb{R}$. Dizemos que o par (u, θ) é solução fraca do problema de valor inicial e de fronteira $(4.1) - (4.6)$ quando satisfaz a formulação fraca*

$$\begin{gathered} \int_0^L u_{tt}\varphi dx + \int_0^L u_{xx}\varphi_{xx}dx + M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)\int_0^L u_x\varphi_x dx + \\ -\alpha\int_0^L \theta_x\varphi_x dx + f(u(L,t))\varphi(L) + g(u_t(L,t))\varphi(L) = 0, \\ \int_0^L \theta_t w dx + \int_0^L \theta_x w_x dx + \alpha\int_0^L u_{xt}w_x dx = 0 \end{gathered}$$

para todas $\varphi \in W,\ w \in U$ no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$, e satisfaz as condições iniciais

$$u(x, 0) = u^0(x),\ \ \frac{d}{dt}u(x, 0) = u^1(x),\ \ \theta(x, 0) = \theta^0(x).$$

O resultado quanto à Existência e Unicidade do problema (4.1)-(4.5) será estabelecido pelo seguinte teorema:

Teorema 4.2. *Seja $M \in C^1([0, \infty])$, uma função não negativa e assuma que (4.8) e (4.9) valem. Então para cada $u^0, u^1 \in U$ e $\theta^0 \in W$ satisfazendo a condição de compatibilidade*

$$u^0_{xxx}(L) = f(u^0(L)) + g(u^1(L))$$

existe um único par de funções (u, θ) tal que

$$\begin{aligned} &u \in L^2(0, \infty; W) \cap C^0(0, \infty; V) \cap W^{2,\infty}\left(0, \infty; L^2(0, L)\right), \\ &\theta \in W^{1,\infty}\left(0, \infty; L^2(0, L)\right) \cap L^\infty(0, \infty; U). \end{aligned}$$

Demonstração. (Existência). A prova segue usando o método de Faedo-Galerkin. Escolheremos bases $\{\varphi^j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ dos espaços W e U, respectivamente, tais que

$$\begin{aligned}&u^0, u^1 \in Span\{\varphi^1, \varphi^2\}\\ &\theta^0 \in Span\{w^1\}.\end{aligned}$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ coloquemos

$$W^m = Span\{\varphi^1, \ldots, \varphi^m\} \text{ e } U^m\{w_1, \ldots, w^m\}.$$

Poderemos supor, sem perda de generalidade, que $\{\varphi^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ são ortonormais em $L^2(0,L)$. Procuramos $u^m(t) \in W^m$ e $\theta^m(t) \in U^m$ tal que para cada $\varphi \in W^m$ e $w \in U^m$

$$\int_0^L u_{tt}^m(t)\varphi dx + \int_0^L u_{xx}^m(t)\varphi_{xx} dx + M\left(\|u_x^m(t)\|_2^2\right)\int_0^L u_x^m(t)\varphi_x dx +$$

$$-\alpha\int_0^L \theta_x^m \varphi_x dx + f(u^m(L,t))\varphi(L) + g(u_t^m(L,t))\varphi(L) = 0, \tag{4.10}$$

$$\int_0^L \theta_t^m(t) w dx + \int_0^L \theta_x^m(t) w_x dx + \alpha\int_0^L u_{xt}^m(t) w_x dx = 0 \tag{4.11}$$

com condições iniciais

$$u^m(x,0) = u^0(x),\ u_t^m(x,0) = u^1(x),\ \theta^m(x,0) = \theta^0(x). \tag{4.12}$$

Mostraremos que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe solução do sistema $(4.10) - (4.12)$. Para isso, o reescreveremos como um sistema de equações diferenciais ordinárias e utilizaremos o Teorema de Carathéodory.

Sejam

$$u^m(x,t) = \sum_{j=1}^m h_j(t)\varphi^j(x), \quad \theta^m(x,t) = \sum_{j=1}^m p_j(t) w^j(x)$$

e tomando em (4.10) e (4.11), $\varphi = \varphi^i$ e $w = w^i$ temos

$$\sum_{j=1}^m h_j''(t)\left\langle \varphi^j, \varphi^i\right\rangle + \sum_{j=1}^m h_j(t)\left\langle \varphi^j, \varphi^i\right\rangle +$$

$$+M\left(\|\sum_{j=1}^m h_j(t)\varphi_x^j\|\right)\sum_{j=1}^m h_j(t)\left\langle \varphi_x^j, \varphi_x^i\right\rangle + H_i(t) = 0$$

$$\sum_{j=1}^m p_j'(t)\left\langle w^j, w^i\right\rangle + \sum_{j=1}^m p_j(t)\left\langle w_x^j, w_x^i\right\rangle + P_i(t) = 0,$$

onde,

$$
\begin{aligned}
H_i(t) &= -\alpha\left\langle\sum_{j=1}^{m} p_j(t)w_x^j, \varphi_x^i\right\rangle + f\left(\sum_{j=1}^{m} h_j(t)\varphi^j(L)\right)\varphi^i(L)\\
&\quad + g\left(\sum_{j=1}^{m} h_j'(t)\varphi^j(L)\right)\varphi^i(L),\\
P_i(t) &= \alpha\left\langle\sum_{j=1}^{m} h_j'(t)\varphi_x^j, w_x^i\right\rangle.
\end{aligned}
$$

Observe que, para $\varphi^i \in W^m$ e $w^i \in U^m$ teremos,

$$\left\langle u^m(0), \varphi^i\right\rangle = h_i(0), \;\; \left\langle u_t^m(0), \varphi^i\right\rangle = h_i'(0) \;\text{ e }\; \left\langle \theta^m(0), w^i\right\rangle = p_i'(0).$$

Usando o fato de que $\{\varphi^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ são ortonormais, os coeficiente h_i e p_i devem satisfazer o sistema,

$$
\begin{cases}
h_i''(t) + h_i(t)\|\varphi_{xx}^i\|_2^2 + M\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{m} h_j^2(t)\|\varphi_x^j\|_2^2\right)h_i(t)\|\varphi_x^i\|_2^2 + H_i(t) = 0\\
p_i'(t) + p_i(t)\|w_x^i\|_2^2 + P_i(t) = 0\\
h_i(0) = h_i^0,\; h_i'(0) = h_i^1,\; p_i(0) = p_i^0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, m.
\end{cases}
$$

Escrevendo

$$
X = \begin{bmatrix} h_1(t)\\ \vdots\\ h_m(t)\end{bmatrix},\;
Y = \begin{bmatrix} p_1(t)\\ \vdots\\ p_m(t)\end{bmatrix},\;
X_0 = \begin{bmatrix} h_1(0)\\ \vdots\\ h_m(0)\end{bmatrix},\;
X_1 = \begin{bmatrix} h_1'(0)\\ \vdots\\ h_m'(0)\end{bmatrix},
$$

$$
Y_0 = \begin{bmatrix} p_1(0)\\ \vdots\\ p_m(0)\end{bmatrix},\;
P = \begin{bmatrix} P_1(t)\\ \vdots\\ P_m(t)\end{bmatrix},\;
H = \begin{bmatrix} H_1^m(t)\\ \vdots\\ H_m^m(t)\end{bmatrix},
$$

$$
A = \begin{bmatrix} \|\varphi_{xx}^1\|_2^2 & & & \\ & \|\varphi_{xx}^2\|_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \|\varphi_{xx}^m\|_2^2\end{bmatrix},\;
B = \begin{bmatrix} \|\varphi_{x}^1\|_2^2 & & & \\ & \|\varphi_{x}^2\|_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \|\varphi_{x}^m\|_2^2\end{bmatrix},
$$

$$
C = \begin{bmatrix} \|w_{x}^1\|_2^2 & & & \\ & \|w_{x}^2\|_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \|w_{x}^m\|_2^2\end{bmatrix},
$$

obtemos

$$\begin{aligned} &X'' + \left(A + M\left(X^T B X\right) B\right) X + H\left(X, X', Y\right) = 0 \\ &Y' + CY + P\left(X'\right) = 0 \\ &X(0) = X_0,\ X'(0) = X_1,\ Y(0) = Y_0, \end{aligned} \tag{4.13}$$

onde $X^T = \begin{bmatrix} h_1(t) & \dots & h_m(t) \end{bmatrix}$ e para $i = 1, \dots, m$ temos

$$\begin{aligned} \left(H\left(X, X', Y\right)\right)_{1i} &= -\alpha \left\langle \sum_{j=1}^{m} p_j(t) w_x^j, \varphi_x^i \right\rangle + f\left(\sum_{j=1}^{m} h_j(t)\varphi^j(L)\right)\varphi^i(L) + \\ &\quad + g\left(\sum_{j=1}^{m} h_j'(t)\varphi^j(L)\right)\varphi^i(L) \\ &= -\alpha \left\langle \begin{bmatrix} w_x^1 & \dots & w_x^m \end{bmatrix} Y, \varphi_x^i \right\rangle + \\ &\quad + f\left(\begin{bmatrix} \varphi^1(L) & \dots & \varphi^m(L) \end{bmatrix} X\right)\varphi^i(L) + \\ &\quad + g\left(\begin{bmatrix} \varphi^1(L) & \dots & \varphi^m(L) \end{bmatrix} X'\right)\varphi^i(L) \end{aligned}$$

e

$$\left(P\left(X'\right)\right)_{1i} = \alpha \left\langle \sum_{j=1}^{m} h_j'(t)\varphi_x^j, w_x^i \right\rangle = \alpha \left\langle \begin{bmatrix} \varphi_x^1 & \dots & \varphi_x^m \end{bmatrix} X', w_x^i \right\rangle.$$

Fazendo $Z = \begin{bmatrix} X \\ X' \\ Y \end{bmatrix}$ temos

$$Z' = \begin{bmatrix} X' \\ X'' \\ Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X' \\ -\left(A + M\left(X^T B X\right) B\right) X - H\left(X, X', Y\right) \\ -CY - P\left(X'\right) \end{bmatrix},\ Z(0) = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ Y_0 \end{bmatrix}$$

reescrevemos, assim, (4.13) como

$$\begin{aligned} &Z' = F(t, Z) \\ &Z(0) = Z_0 \end{aligned}$$

onde

$$F(t, Z) = \begin{bmatrix} X' \\ -\left(A + M\left(X^T B X\right) B\right) X - H\left(X, X', Y\right) \\ -CY - P\left(X'\right) \end{bmatrix}.$$

Mostra-se por argumento semelhante ao Capítulo 2 que F satisfaz as condições de Caratheódory. Portanto, o sistema $(4.10)-(4.11)$ com as condições iniciais (4.12) admitem soluções locais (u^m, θ^m) em $[0, t_m)$, para todo $t_m \in (0, T)$. As estimativas a priori feitas a seguir mostrará que esta solução pode ser estendida para $(0, T)$ para todo $T > 0$.

Estimativas a priori

Estimativa 1. Substituindo $\varphi = u_t^m(t)$ e $w = \theta^m(t)$ em (4.10) e (4.11), respectivamente, teremos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L |u_t^m(t)|^2 dx + \int_0^L |u_{xx}^m(t)|^2 dx + \hat{M}\left(\|u_x^m(t)\|_2^2\right) + 2\hat{f}(u^m(L,t))\right\} =$$
$$= -u_t^m(L,t) g(u_t^m(L,t)) + \alpha \int_0^L \theta_x^m(t) u_{xt}^m(t) dx,$$

onde $\hat{M}(s) = \int_0^s M(z) dz$ e

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L |\theta^m(t)|^2 dx\right\} = -\int_0^L |\theta_x^m(t)|^2 dx - \alpha \int_0^L u_{xt}^m(t) \theta_x^m(t) dx.$$

Somando as duas últimas igualdades segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L \left[|u_t^m(t)|^2 + |u_{xx}^m(t)|^2 + |\theta^m(t)|^2\right] dx + \hat{M}\left(\|u_x^m(t)\|_2^2\right) + 2\hat{f}(u^m(L,t))\right\} =$$
$$= -u_t^m(L,t) g(u_t^m(L,t)) - \int_0^L |\theta_x^m(t)|^2 dx.$$

Fazendo

$$\begin{aligned} E_m(t) = E(t, u^m, \theta^m) &= \frac{1}{2}\int_0^L \left[|u_t^m(t)|^2 + |u_{xx}^m(t)|^2 + |\theta^m(t)|^2\right] dx + \\ &+ \frac{1}{2}\hat{M}\left(\|u_x^m(t)\|_2^2\right) + \hat{f}(u^m(L,t)) \end{aligned}$$

obtemos

$$\frac{d}{dt} E_m(t) + u_t^m(L,t) g(u_t^m(L,t)) + \int_0^L |\theta_x^m(t)|^2 dx = 0.$$

Integrando a igualdade anterior de 0 a t, com $t \leq t_m$, segue que

$$\begin{aligned} E_m(t) + \int_0^t u_t^m(L,s) g(u_t^m(L,s)) ds + \int_0^t \int_0^L |\theta_x^m(s)|^2 dx ds &= E(0) \\ &\leq 2\left[\|u^1\|_2^2 + \|u_{xx}^0\|_2^2 + \|\theta^0\|_2^2\right] \end{aligned}$$

independente de m e de t. Portanto, a solução aproximada pode ser estendida ao intervalo $[0, T]$.

Em particular, existe $M_1 > 0$ tal que

$$\|u_t^m(t)\|_2^2 + \|u_{xx}^m(t)\|_2^2 + \|\theta^m(t)\|_2^2 + \int_0^T u_t^m(L,t)g(u_t^m(L,t))dt \leq M_1 \tag{4.14}$$

para todo $t \in [0,T]$ e para todo $m \in \mathbb{N}$.

Estimativa 2. Agora vamos obter estimativas para $u_{tt}^m(0)$ e $\theta_t^m(0)$ na norma L^2. Substituindo $\varphi = u_{tt}^m(0)$, $w = \theta_t^m(0)$ em (4.10) e (4.11), respectivamente, com $t = 0$ temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^L |u_{tt}^m(x,0)|^2 dx + \int_0^L u_{xx}^m(x,0)u_{xxtt}^m(x,0)dx + \\
&+M\left(\|u_x^m(0)\|_2^2\right)\int_0^L u_x^m(x,0)u_{xtt}^m(x,0)dx + f(u^m(L,0))u_{tt}^m(L,0) + \\
&+g(u_t^m(L,0))u_{tt}^m(L,0) - \alpha\int_0^L \theta_x^m(x,0)u_{xtt}^m(x,0)dx = 0
\end{aligned}$$

e

$$\int_0^L |\theta_t^m(x,0)|^2 dx + \int_0^L \theta_x^m(x,0)\theta_{xt}^m(x,0)dx + \alpha\int_0^L u_{xt}^m(x,0)\theta_{xt}^m(x,0)dx = 0.$$

Usando integração por partes e as condições de contorno, temos

$$\begin{aligned}
&\|u_{tt}^m(0)\|_2^2 + \int_0^L u_{xxxx}^m(x,0)u_{tt}^m(x,0)dx + \\
&-M\left(\|u_x^m(0)\|_2^2\right)\int_0^L u_{xx}^m(x,0)u_{tt}^m(x,0)dx + \alpha\int_0^L \theta_{xx}^m(x,0)u_{tt}^m(x,0)dx = 0,
\end{aligned}$$

e

$$\|\theta_t^m(0)\|_2^2 - \int_0^L \theta_{xx}^m(x,0)\theta_t^m(x,0)dx - \alpha\int_0^L u_{xxt}^m(x,0)\theta_t^m(x,0)dx = 0.$$

Assim, da Desigualdade de Cauchy-Schwarz segue que,

$$\begin{aligned}
\|u_{tt}^m(0)\|_2^2 &\leq \left[\|u_{xxxx}^0\|_2 + M\left(\|u_x^0\|_2^2\right)\|u_{xx}^0\|_2 + \alpha\|\theta_{xx}^0\|_2\right]\|u_{tt}^m(0)\|_2, \\
\|\theta_t^m(0)\|_2^2 &\leq \left[\|\theta_{xx}^0\|_2 + \alpha\|u_{xx}^1\|_2\right]\|\theta_t^m(0)\|_2
\end{aligned}$$

portanto usando a Desigualdade de Young e regularidades dos dados iniciais segue que existe $M_2 > 0$ tal que

$$\|u_{tt}^m(0)\|_2 + \|\theta_t^m(0)\|_2 \leq M_2 \; \forall m \in \mathbb{N}. \tag{4.15}$$

Estimativa 3. Agora vamos obter uma estimativa para u_{tt}^m, u_{xxt}^m e θ_t^m na norma L^2. Fixe $t, \xi > 0$ tais que $\xi < T - t$. Tomando a diferença de (4.10) com t valendo $t+\xi$ e t e, fazendo $\varphi = u_t^m(t+\xi) - u_t^m(t)$, obteremos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|u_t^m(t+\xi) - u_t^m(t)\|_2^2 + \|u_{xx}^m(t+\xi) - u_{xx}^m(t)\|_2^2\right\} + \\
&+\int_0^L M(\|u_x^m(t+\xi)\|_2^2)u_x^m(t+\xi)(u_{xt}^m(t+\xi) - u_{xt}^m(t))dx + \\
&-\int_0^L M(\|u_x^m(t)\|_2^2)u_x^m(t)(u_{xt}^m(t+\xi) - u_{xt}^m(t))dx + \\
&+(f(u^m(L,t+\xi)) - f(u^m(L,t)))(u_t^m(L,t+\xi) - u_t^m(L,t)) \\
&+(g(u_t^m(L,t+\xi)) - g(u_t^m(L,t)))(u_t^m(L,t+\xi) - u_t^m(L,t)) + \\
&-\alpha\int_0^L (\theta_x^m(t+\xi) - \theta_x^m(t))(u_{xt}^m(t+\xi) - u_{xt}^m(t))dx = 0.
\end{aligned}$$

Agora, fazendo a diferença de (4.11) com t valendo $t+\xi$ e t e, colocando $w = \theta^m(t+\xi) - \theta^m(t)$, obteremos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|\theta^m(t+\xi) - \theta^m(t)\|_2^2\right\} + \|\theta_x^m(t+\xi) - \theta_x^m(t)\|_2^2 + \\
&+\alpha\int_0^L (u_{xt}^m(t+\xi) - u_{xt}^m(t))(\theta_x^m(t+\xi) - \theta_x^m(t))dx = 0.
\end{aligned}$$

Somando as duas últimas igualdades teremos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|u_t^m(t+\xi) - u_t^m(t)\|_2^2 + \|u_{xx}^m(t+\xi) - u_{xx}^m(t)\|_2^2\right\} + \\
&+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|\theta^m(t+\xi) - \theta^m(t)\|_2^2\right\} + \|\theta_x^m(t+\xi) - \theta_x^m(t)\|_2^2 + \\
&+\int_0^L M(\|u_x^m(t+\xi)\|_2^2)u_x^m(t+\xi)(u_{xt}^m(t+\xi) - u_{xt}^m(t))dx + \\
&-\int_0^L M(\|u_x^m(t)\|_2^2)u_x^m(t)(u_{xt}^m(t+\xi) - u_{xt}^m(t))dx + \\
&+(f(u^m(L,t+\xi)) - f(u^m(L,t)))(u_t^m(L,t+\xi) - u_t^m(L,t)) \\
&+(g(u_t^m(L,t+\xi)) - g(u_t^m(L,t)))(u_t^m(L,t+\xi) - u_t^m(L,t)) = 0. \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Denote por

$$I = \int_0^L (M(\|u_x^m(t+\xi)\|_2^2)u_x^m(t+\xi) - M(\|u_x^m(t)\|_2^2)u_x^m(t))(u_{xt}^m(t+\xi) - u_{xt}^m(t))dx.$$

Vamos estimar $|I|$. Somando e subtraindo o fator

$$M(\|u_x^m(t+\xi)\|_2^2)\int_0^L u_x^m(t)(u_{xt}^m(t+\xi) - u_{xt}^m(t))dx$$

em I, segue que

$$\begin{aligned} I &= M(\|u_x^m(t+\xi)\|_2^2)\int_0^L (u_x^m(t+\xi)-u_x^m(t))(u_{xt}^m(t+\xi)-u_{xt}^m(t))dx+ \\ &\quad +\Delta M\int_0^L u_x^m(t)(u_{xt}^m(t+\xi)-u_{xt}^m(t))dx, \end{aligned}$$

onde $\Delta M = M(\|u_x^m(t+\xi)\|_2^2) - M(\|u_x^m(t)\|_2^2)$. Usando integração por partes teremos

$$\begin{aligned} I &= -M(\|u_x^m(t+\xi)\|_2^2)\int_0^L (u_{xx}^m(t+\xi)-u_{xx}^m(t))(u_t^m(t+\xi)-u_t^m(t))dx+ \\ &\quad -\Delta M\int_0^L u_{xx}^m(t)(u_t^m(t+\xi)-u_t^m(t))dx. \end{aligned}$$

Agora, do Teorema do Valor Médio e da estimativa (4.14), existe uma constante $C_1>0$ tal que

$$\begin{aligned} |\Delta M| &= |M(\|u_x^m(t+\xi)\|_2^2) - M(\|u_x^m(t)\|_2^2)| = C(\|u_x^m(t+\xi)\|_2^2 - \|u_x^m(t)\|_2^2) \\ &= C(\|u_x^m(t+\xi)\|_2 - \|u_x^m(t)\|_2)(\|u_x^m(t+\xi)\|_2 + \|u_x^m(t)\|_2) \\ &\le C\|u_x^m(t+\xi)-u_x^m(t)\|_2(\|u_x^m(t+\xi)\|_2 + \|u_x^m(t)\|_2) \\ &\le C_1\|u_x^m(t+\xi)-u_x^m(t)\|_2. \end{aligned}$$

Da última desigualdade e de $M(\|u_x^m(t+\xi)\|_2^2)\le C$, segue que

$$\begin{aligned} |I| &\le C\int_0^L (u_{xx}^m(t+\xi)-u_{xx}^m(t))(u_t^m(t+\xi)-u_t^m(t))dx+ \\ &\qquad +C_1\|u_x^m(t+\xi)-u_x^m(t)\|_2\int_0^L u_{xx}^m(t)(u_t^m(t+\xi)-u_t^m(t))dx. \end{aligned}$$

Da Desigualdade de Young e de (4.14) obteremos que

$$\begin{aligned} |I| &\le \int_0^L\left[\frac{C^2}{2}|u_{xx}^m(t+\xi)-u_{xx}^m(t)|^2+\frac{1}{2}|u_t^m(t+\xi)-u_t^m(t)|^2\right]dx+ \\ &\quad +\int_0^L\left[\frac{C_1^2}{2}\|u_x^m(t+\xi)-u_x^m(t)\|_2^2|u_{xx}^m(t)|^2+\frac{1}{2}|u_t^m(t+\xi)-u_t^m(t)|^2\right]dx \\ &\le C_2\|u_{xx}^m(t+\xi)-u_{xx}^m(t)\|_2^2+\|u_t^m(t+\xi)-u_t^m(t)\|_2^2 \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} |I| &\le C_2\|u_{xx}^m(t+\xi)-u_{xx}^m(t)\|_2^2+\|u_t^m(t+\xi)-u_t^m(t)\|_2^2+ \\ &\quad +\frac{\rho}{2}|u_t^m(L,t+\xi)-u_t^m(L,t)|^2 \end{aligned} \tag{4.17}$$

para alguma constante C_2. Faremos um argumento similar para f. Usando a Desigualdade de

Young, o Teorema do Valor Médio e as imersões (4.7) teremos que

$$\begin{aligned}
&|f(u^m(L,t+\xi)) - f(u^m(L,t))||u_t^m(L,t+\xi) - u_t^m(L,t)| \leq \\
&\leq \frac{1}{2\rho}|f(u^m(L,t+\xi)) - f(u^m(L,t))|^2 + \frac{\rho}{2}|u_t^m(L,t+\xi) - u_t^m(L,t)|^2 \\
&= \frac{C}{2\rho}|u^m(L,t+\xi) - u^m(L,t)|^2 + \frac{\rho}{2}|u_t^m(L,t+\xi) - u_t^m(L,t)|^2 \\
&\leq \frac{C}{2\rho}\|u^m(t+\xi) - u^m(t)\|_\infty^2 + \frac{\rho}{2}|u_t^m(L,t+\xi) - u_t^m(L,t)|^2 \\
&\leq C_3\|u_{xx}^m(t+\xi) - u_{xx}^m(t)\|_2^2 + \frac{\rho}{2}|u_t^m(L,t+\xi) - u_t^m(L,t)|^2
\end{aligned} \tag{4.18}$$

para alguma constante C_3. Fazendo

$$\Phi_m(t,\xi) = \|u_{xx}^m(t+\xi) - u_{xx}^m(t)\|_2^2 + \|u_t^m(t+\xi) - u_t^m(t)\|_2^2 + \|\theta^m(t+\xi) - \theta^m(t)\|_2^2$$

e levando em conta (4.17) e (4.18), deduzimos de (4.16) que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Phi_m(t,\xi) + [(g(u_t^m(L,t+\xi)) - g(u_t^m(t)))(u_t^m(L,t+\xi) - u_t^m(L,t))] \leq \\
&\leq (C_2 + C_3)\Phi_m(t,\xi) + \rho|u_t^m(L,t+\xi) - u_t^m(L,t)|^2 - \|\theta_x^m(t+\xi) - \theta_x^m(t)\|_2^2.
\end{aligned}$$

Usando (4.9), a imersão (4.7) e uma constante $C > 0$ conveniente, temos

$$\frac{d}{dt}\Phi_m(t,\xi) \leq C\Phi_m(t,\xi)$$

e portanto

$$\Phi_m(t,\xi) \leq \Phi_m(0,\xi)e^{CT}, \quad \forall t \in [0,T).$$

Dividindo a equação acima por ξ^2 e fazendo $\xi \to 0$ temos

$$\begin{aligned}
&\lim_{\xi\to 0}\frac{\|u_{xx}^m(t+\xi) - u_{xx}^m(t)\|_2^2 + \|u_t^m(t+\xi) - u_t^m(t)\|_2^2 + \|\theta^m(t+\xi) - \theta^m(t)\|_2^2}{\xi^2} \leq \\
&\leq \lim_{\xi\to 0}\frac{\|u_{xx}^m(\xi) - u_{xx}^m(0)\|_2^2 + \|u_t^m(\xi) - u_t^m(0)\|_2^2 + \|\theta^m(\xi) - \theta^m(0)\|_2^2}{\xi^2}e^{CT}
\end{aligned}$$

isto é

$$\|u_{txx}^m(t)\|_2^2 + \|u_{tt}^m(t)\|_2^2 + \|\theta_t^m(t)\|_2^2 \leq (\|u_{xx}^1\|_2^2 + \|u_{tt}^m(0)\|_2^2 + \|\theta^m(0)\|_2^2)e^{CT}$$

e da estimativa (4.16), encontramos uma constante $M_3 > 0$, dependendo apenas de T, tal que

$$\|u_{txx}^m(t)\|_2^2 + \|u_{tt}^m(t)\|_2^2 + \|\theta_t^m(t)\|_2^2 \leq M_3, \ \forall m \in \mathbb{N}, \ \forall t \in [0,T]. \tag{4.19}$$

Com as estimativas (4.14) e (4.19) podemos usar o Lema de Lions-Aubin para conseguir a compacidade necessária para passar o limite em $(4.10)-(4.11)$. De onde segue a existência da solução geral em $[0,T]$.

Passagem ao limite. Pelo Capítulo 2, basta passarmos o limite nos termos da dissipação térmica. Pelas estimativas (4.14) e (4.19) temos

$$(\theta^m) \text{ é limitada em } L^\infty\left(0,\infty;L^2(0,L)\right),$$
$$(\theta_t^m) \text{ é limitada em } L^\infty\left(0,\infty;L^2(0,L)\right),$$

respectivamente. Como $H_0^1(0,L)\hookrightarrow L^2(0,L)$ e $L^\infty(0,T;L^2(0,L))=(L^1(0,T;L^2(0,L)))'$ e $L^1(0,T;L^2(0,L))$ é separável, existe uma subsequência de (θ^m) que denotaremos da mesma forma e $\hat{\theta}$ em $L^\infty(0,T;L^2(0,L))$ tal que

$$\theta^m \overset{*}{\rightharpoonup} \theta \text{ em } L^\infty(0,\infty;U) \tag{4.20}$$
$$\theta_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} \hat{\theta} \text{ em } L^\infty(0,\infty;L^2(0,L)) \tag{4.21}$$

Observando que $L^\infty(0,T;L^2(0,L))\hookrightarrow L^2(0,T;L^2(0,L))=L^2(Q)$, fazendo a identificação $L^2(0,T;L^2(0,L))\equiv L^2(Q)$, usando sua reflexividade e de (4.20) obtemos uma subsequência de (θ^m), que denotaremos da mesma forma, tal que

$$\theta^m \rightharpoonup \theta \text{ em } L^2(Q), \text{ onde } Q=[0,L]\times[0,T].$$

Pelo fato da convergência fraca em $L^2(Q)$ implicar na convergência no sentido das distribuições, temos

$$\theta^m \longrightarrow \theta \text{ em } \mathcal{D}'(Q).$$

Como o operador derivação é contínuo em $\mathcal{D}'(Q)$, temos que

$$\theta_t^m \longrightarrow \theta_t \text{ em } \mathcal{D}'(Q).$$

Da mesma forma, usando (3.24), obtemos

$$\theta_t^m \longrightarrow \hat{\theta} \text{ em } \mathcal{D}'(Q).$$

Assim, da unicidade do limite fraco em $\mathcal{D}'(Q)$, resulta que

$$\hat{\theta}=\theta_t \text{ q.s. em } Q.$$

Portanto

$$\theta_t^m \quad \overset{*}{\rightharpoonup} \theta_t \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(0,L)). \tag{4.22}$$

Multiplicando (4.10) por $\Phi \in \mathcal{D}(0,T)$ e (4.11) por $\Psi \in \mathcal{D}(0,T)$ integrando ambos de 0 a T obteremos

$$\begin{gathered}\int_0^T (u_{tt}^m(t),\varphi)\Phi dt + \int_0^T (u_{xx}^m(t),\varphi_{xx})\Phi dt + \int_0^T M\left(\|u_x^m(t)\|_2^2\right)(u_x^m(t),\varphi_x)\Phi dt + \\ -\alpha \int_0^T (\theta_x^m(t),\varphi_x)\Phi dt + \int_0^T f(u^m(L,t))\varphi(L)\Phi dt + \int_0^T g(u_t^m(L,t))\varphi(L)\Phi dt = 0 \\ \int_0^T (\theta_t^m(t),w)\Psi dt + \int_0^T (\theta_x^m(t),w_x)\Psi dt + \alpha \int_0^T (u_{xt}^m(t),w_x)\Psi dt = 0.\end{gathered} \tag{4.23}$$

As condições (4.20) e (4.22) são suficientes para a passagem ao limite na parte com o termo dissipativo. Assim, pelas convergências obtidas na passagem ao limite do Capítulo anterior e (4.23) segue via Lema Du Bois Raymond que (u,θ) é solução do problema $(4.1) - (4.6)$.

Regularidade. Análogo ao Capítulo anterior da estimativa (4.19) segue que

$$(u^m) \quad \rightharpoonup \quad u \text{ em } W^{2,\infty}(0,T;L^2(0,L)) \tag{4.24}$$

$$(u_t^m) \quad \overset{*}{\rightharpoonup} \quad u_t \text{ em } L^\infty(0,T;U). \tag{4.25}$$

Da estimativa (4.14) e do Lema 2.10, segue que

$$u \in C(0,T;V), \text{ para todo } T > 0. \tag{4.26}$$

Portanto, disto e da estimativa (4.14) concluímos que

$$u \in L^2(0,T;W) \cap C(0,T;V) \cap W^{2,\infty}(0,T;L^2(0,L)).$$

Condições iniciais. Segue como no Capítulo anterior que $u(0) = u^0$ e que $u_t(0) = u^1$. Vamos mostrar que $\theta(0) = \theta_0$. De fato, seja $\Psi \in C^1([0,T])$, com $\Psi(0) = 1$ e $\Psi(T) = 0$. De

$$\theta_t^m \quad \overset{*}{\rightharpoonup} \quad \theta_t \text{ em } L^\infty(0,T;W)$$

tem-se

$$\int_0^T \int_0^L \theta_t^m w \Psi dx dt \longrightarrow \int_0^T \int_0^L \theta_t w \Psi dx dt \;\; \forall w \in L^2(0,L).$$

Integrando por partes, teremos que

$$-\int_0^L \theta^m(0)wdx - \int_0^T\int_0^L \theta^m w\Psi' dxdt \longrightarrow -\int_0^L \theta(0)wdx - \int_0^T\int_0^L \theta w\Psi' dxdt$$

Agora de

$$\theta^m \overset{*}{\rightharpoonup} \theta \text{ em } L^\infty(0,T,W)$$

temos

$$\int_0^L \theta^m(0)wdx \longrightarrow \int_0^L \theta(0)wdx, \forall w \in L^2(0,L).$$

Em contrapartida, de $\theta^m(0) = \theta_0^m \to \theta_0$, segue que

$$\theta^m(0) \rightharpoonup \theta_0 \text{ em } L^2(0,L).$$

Logo, pela unicidade do limite fraco, $\theta(0) = \theta_0$.

Unicidade. Sejam $(u,\theta),(v,\tau)$ dois pares de soluções de $(4.1)-(4.5)$ com a mesma condição inicial. Então escrevendo $(z,\zeta) = (u-v,\theta-\tau)$, vemos que $z(0) = z_t(0) = 0$ e de (4.10) e (4.11),

$$\begin{gathered}
\int_0^L z_{tt}(t)\varphi dx + \int_0^L z_{xx}(t)\varphi_{xx}dx + M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)\int_0^L u_x(t)\varphi_x dx + \\
-M\left(\|v_x(t)\|_2^2\right)\int_0^L v_x(t)\varphi_x dx - \alpha\int_0^L \zeta_x(t)\varphi_x dx + f(u(L,t))\varphi(L,t) + \\
-f(v(L,t))\varphi(L,t) + g(u_t(L,t))\varphi(L,t) - g(v_t(L,t))\varphi(L,t) = 0 \\
\int_0^L \zeta_t(t)wdx + \int_0^L \zeta_x(t)w_x dx + \alpha\int_0^L z_{xt}(t)w_x dx = 0
\end{gathered}$$

Colocando $\varphi = z_t$, $w = \zeta$, usando o Teorema do Valor Médio, (4.14), (4.16) e a Desigualdade de Young como na estimativa 3, deduzimos que para alguma constante $C > 0$,

$$\frac{d}{dt}\left\{\|z_t(t)\|_2^2 + \|z_{xx}(t)\|_2^2 + \|\zeta(t)\|_2^2\right\} \le C\left\{\|z_t(t)\|_2^2 + \|z_{xx}(t)\|_2^2 + \|\zeta(t)\|_2^2\right\}, \ \forall t \in [0,T].$$

Do Lema de Gronwall vemos que $(u,\theta) = (v,\tau)$. □

4.2 Comportamento Assintótico

O objetivo desta seção é mostrar o decaimento exponencial do sistema $(4.1)-(4.5)$ a partir do método multiplicativo. Para isso, consideraremos uma hipótese adicional para

M

$$M(s)s \geq \hat{M}(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{4.27}$$

Neste capítulo, denotaremos $u = u(x,t)$ quando a omissão das variáveis não prejudica o significado. Defina a energia do sistema $(4.1) - (4.5)$ por

$$E(t) = \frac{1}{2}\left[\|u_t(t)\|_2^2 + \|u_{xx}(t)\|_2^2 + \|\theta(t)\|_2^2 + \hat{M}\left(\|u_x(t)\|_2^2\right) + 2\hat{f}(u(L,t))\right].$$

Lema 4.3. *Seja* $\{u, \theta\}$ *solução de* $(4.1) - (4.5)$*, então a energia associada satisfaz*

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -\rho|u_t(L,t)|^2 - \int_0^L |\theta_x|^2 dx.$$

Demonstração. Multiplicando (4.1) por u_t e integrando de 0 a L

$$\int_0^L u_t u_{tt} dx + \int_0^L u_t u_{xxxx} dx - M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)\int_0^L u_t u_{xx} dx + \alpha\int_0^L u_t \theta_{xx} dx = 0$$

usando integração por partes e as condições de contorno (4.3) e (4.4)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |u_t|^2 dx + u_t(L,t)u_{xxx}(L,t) + \int_0^L u_{xxt}u_{xx}dx + \\ + M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)\int_0^L u_{xt}u_x dx + \alpha\int_0^L u_{xxt}\theta dx = 0.\end{aligned}$$

Usando a condição de contorno (4.5)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L |u_t|^2 dx + \int_0^L |u_{xx}|^2 dx + \hat{M}\left(\|u_x(t)\|_2^2\right) + 2\hat{f}(u(L,t))\right\} = \\ = -g(u_t(L,t))u_t(L,t) - \alpha\int_0^L u_{xxt}\theta dx.\end{aligned} \tag{4.28}$$

Por outro lado, multiplicando a equação (4.2) por θ e integrando de 0 a L

$$\int_0^L \theta\theta_t dx - \int_0^L \theta\theta_{xx} dx - \alpha\int_0^L \theta u_{xxt} dx = 0$$

integrando por partes temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L |\theta|^2 dx\right\} = -\int_0^L |\theta_x|^2 dx + \alpha\int_0^L \theta u_{xxt} dx. \tag{4.29}$$

Somando (4.28) com (4.29)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L \left[|u_t|^2+|u_{xx}|^2+|\theta|^2\right]dx+\hat{M}\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)+2\hat{f}(u(L,t))\right\}=$$
$$=-u_t(L,t)g(u_t(L,t))-\int_0^L |\theta_x|^2dx,$$

portanto

$$\frac{d}{dt}E(t)=-u_t(L,t)g(u_t(L,t))-\int_0^L |\theta_x|^2dx,$$

e usando a hipótese (4.9) segue o resultado. □

Lema 4.4. *Com as condições do Lema* 4.3*, vale a seguinte desigualdade*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L uu_tdx\right\} \;\leq\;& \int_0^L |u_t|^2dx-2\hat{f}(u(L,t))-\hat{M}\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)-\frac{11}{8}\int_0^L |u_{xx}|^2dx+\\ &+4L^3C_g^2|u_t(L,t)|^2+4\alpha^2L^2\int_0^L |\theta_x|^2dx.\end{aligned}$$

Demonstração. Multiplicando (4.1) por u e integrando de 0 a L

$$\int_0^L uu_{tt}dx+\int_0^L uu_{xxxx}dx-M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)\int_0^L uu_{xx}dx+\alpha\int_0^L u\theta_{xx}dx=0$$

usando integração por partes e as condições de contorno

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L uu_tdx\right\} \;=\;& \int_0^L |u_t|^2dx-u(L,t)f(u(L,t))-u(L,t)g(u_t(L,t))+\\ &-\int_0^L |u_{xx}|^2dx-M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)\int_0^L |u_x|^2dx+\\ &+\alpha\int_0^L u_x\theta_xdx.\end{aligned}\tag{4.30}$$

Usando a imersão (4.7), a condição para a g e a Desigualdade de Young temos

$$\begin{aligned}-u(L,t)g(u_t(L,t)) \;\leq\;& L^{\frac{3}{2}}\|u_{xx}\|_2|g(u_t(L,t))|\leq L^{\frac{3}{2}}C_g\|u_{xx}\|_2|u_t(L,t)|\\ \leq\;& \frac{1}{16}\|u_{xx}(t)\|_2^2+4L^3C_g^2|u_t(L,t)|^2.\end{aligned}\tag{4.31}$$

Por outro lado usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, imersão (4.7) e a Desigualdade de

Young temos

$$\begin{aligned}\alpha\int_0^L u_x\theta_x dx &\leq \alpha\|u_x(t)\|_2\|\theta_x(t)\|_2 \leq \alpha L\|u_{xx}(t)\|_2^2\|\theta_x(t)\|_2 \\ &\leq \frac{1}{16}\|u_{xx}(t)\|_2^2 + 4\alpha^2L^2\|\theta_x(t)\|_2^2. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Assim, usando as desigualdades (4.31) e (4.32) em (4.30) e a condição da f e da M segue que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L uu_t dx\right\} &\leq \|u_t(t)\|_2^2 - 2\hat{f}(u(L,t)) - \hat{M}\left(\|u_x(t)\|_2^2\right) - \frac{7}{8}\|u_{xx}(t)\|_2^2 + \\ &\quad +4C_g^2L^3|u_t(L,t)|^2 + 4\alpha^2L^2\|\theta_x(t)\|_2^2.\end{aligned}$$

□

Para obtermos $\int_0^L |u_t|^2dx$ precisaremos introduzir a função $\sigma = \sigma(x,t) = \int_0^x \theta dy$. Assim, temos o seguinte lema

Lema 4.5. *Com as condições do Lema* 4.3 *temos*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L xu_t\left[\sigma - \sigma(L,t)\right]dx\right\} &\leq L^{\frac{3}{2}}\|\theta_x(t)\|_2|u_{xx}(0,t)| + L^{\frac{3}{2}}\|\theta_x(t)\|_2|u_{xx}(L,t)| \\ &\quad +\frac{\alpha L}{2}|u_t(L,t)|^2 + \left(3L + 2m_0L^3\right)\|\theta_x(t)\|_2\|u_{xx}(t)\|_2 + \\ &\quad + \left(3\alpha L^2 + \frac{4L^2}{2}\right)\|\theta_x(t)\|_2^2 - \frac{7\alpha}{16}\|u_t(t)\|_2^2.\end{aligned}$$

Demonstração. Integrando (4.2) de 0 a x obteremos

$$\sigma_t = \theta_x - \theta_x(0,t) + \alpha u_{xt}$$

multiplicando a última igualdade por xu_t e integrando de 0 a L

$$\int_0^L xu_t\sigma_t dx = \int_0^L xu_t\theta_x dx - \theta_x(0,t)\int_0^L xu_t dx + \alpha\int_0^L xu_tu_{xt}dx$$

integrando por partes

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L xu_t\sigma dx\right\} &= \int_0^L xu_{tt}\sigma dx + \int_0^L xu_t\theta_x dx - \theta_x(0,t)\int_0^L xu_t dx + \\ &\quad +\frac{\alpha L}{2}|u_t(L,t)|^2 - \frac{\alpha}{2}\int_0^L |u_t|^2dx.\end{aligned} \tag{4.33}$$

Utilizando a equação (4.1), integração por partes e as condições de contorno vemos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^L x u_{tt} \sigma dx &= \int_0^L x\sigma \left[-u_{xxxx} + M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right) u_{xx} - \alpha\theta_{xx}\right] dx \\
&= -L\sigma(L,t)u_{xxx}(L,t) + \int_0^L \sigma u_{xxx} dx + \int_0^L x\sigma_x u_{xxx} dx + \\
&\quad +M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right) \int_0^L x\sigma u_{xx} dx + \alpha \int_0^L \sigma\theta_x dx + \alpha \int_0^L x\sigma_x\theta_x dx,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\int_0^L x u_{tt}\sigma dx &= -L\sigma(L,t)u_{xxx}(L,t) + \sigma(L,t)u_{xx}(L,t) - \sigma(0,t)u_{xx}(0,t) + \\
&\quad - \int_0^L \sigma_x u_{xx} dx + L\sigma_x(L,t)u_{xx}(L,t) - \int_0^L \sigma_x u_{xx} dx + \\
&\quad - \int_0^L x\sigma_{xx} u_{xx} dx + M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right) \int_0^L x\sigma u_{xx} dx + \\
&\quad +\alpha \int_0^L \sigma\theta_x dx + \alpha \int_0^L x\sigma_x\theta_x dx.
\end{aligned}
$$

Usando que $\sigma(0,t) = 0$, $\sigma_x = \theta$, $\sigma_{xx} = \theta_x$ e substituindo a última equação em (4.33) teremos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L x u_t \sigma dx\right\} &= -L\sigma(L,t)u_{xxx}(L,t) + \sigma(L,t)u_{xx}(L,t) - 2\int_0^L \theta u_{xx} dx + \\
&\quad +L\theta(L,t)u_{xx}(L,t) - \int_0^L x\theta_x u_{xx} dx + \\
&\quad +M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right) \int_0^L x\sigma u_{xx} dx + \alpha \int_0^L \sigma\theta_x dx + \\
&\quad +\alpha \int_0^L x\theta\theta_x dx + \int_0^L x u_t \theta_x dx + \\
&\quad \underbrace{-\theta_x(0,t) \int_0^L x u_t dx}_{:=\mathrm{I}} + \frac{\alpha L}{2}|u_t(L,t)|^2 - \frac{\alpha}{2}\int_0^L |u_t|^2 dx. \qquad (4.34)
\end{aligned}
$$

Vamos estimar o termo I. Usando a condição de contorno (4.4) e a equação (4.2) teremos

$$
\begin{aligned}
-\theta_x(0,t) &= \int_0^L \theta_{xx} dx = \int_0^L \left[\theta_t - \alpha u_{xxt}\right] dx \\
&= \int_0^L \theta_t dx = \sigma_t(L,t).
\end{aligned}
$$

Com isso

$$\begin{aligned} -\theta_x(0,t)\int_0^L xu_t dx &= \sigma_t(L,t)\int_0^L xu_t dx \\ &= \frac{d}{dt}\left\{\sigma(L,t)\int_0^L xu_t dx\right\} - \sigma(L,t)\int_0^L xu_{tt}dx. \end{aligned}$$

Substituindo a equação (4.1) na última igualdade teremos

$$\begin{aligned} -\theta_x(0,t)\int_0^L xu_t dx &= \frac{d}{dt}\left\{\sigma(L,t)\int_0^L xu_t dx\right\} + \\ & -\sigma(L,t)\int_0^L x\left[-u_{xxxx} + M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)u_{xx} - \alpha\theta_{xx}\right]dx. \end{aligned}$$

Utilizando integração por partes e as condições de contorno

$$\begin{aligned} I = -\theta_x(0,t)\int_0^L xu_t dx &= \frac{d}{dt}\left\{\sigma(L,t)\int_0^L xu_t dx\right\} + L\sigma(L,t)u_{xxx}(L,t) + \\ & -\sigma(L,t)\int_0^L u_{xxx}dx - \alpha\sigma(L,t)\int_0^L \theta_x dx + \\ & -\sigma(L,t)M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)\int_0^L xu_{xx}dx \\ &= \frac{d}{dt}\left\{\sigma(L,t)\int_0^L xu_t dx\right\} + L\sigma(L,t)u_{xxx}(L,t) + \\ & -\sigma(L,t)u_{xx}(L,t) + \sigma(L,t)u_{xx}(0,t) + \\ & -\sigma(L,t)M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)\int_0^L xu_{xx}dx + \\ & -\alpha\sigma(L,t)\int_0^L \theta_x dx. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Substituindo (4.21) em (4.34) teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\{\int_0^L xu_t\left[\sigma - \sigma(L,t)\right]dx\right\} &= -2\int_0^L \theta u_{xx}dx + L\theta(L,t)u_{xx}(L,t) + \\ & -\int_0^L x\theta_x u_{xx}dx + \alpha\int_0^L x\theta\theta_x dx + \\ & +M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)\int_0^L x\sigma u_{xx}dx + \alpha\int_0^L \sigma\theta_x dx + \\ & +\int_0^L xu_t\theta_x dx + \frac{\alpha L}{2}|u_t(L,t)|^2 - \alpha\sigma(L,t)\int_0^L \theta_x dx + \\ & -\frac{\alpha}{2}\int_0^L |u_t|^2 dx + \sigma(L,t)u_{xx}(0,t) + \\ & -\sigma(L,t)M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)\int_0^L xu_{xx}dx. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Vamos estimar cada termo da última igualdade. Primeiramente, usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e a imersão (4.7) teremos as seguintes desigualdades

$$
\begin{aligned}
-2\int_0^L \theta u_{xx}dx &\leq 2\|\theta(t)\|_2\|u_{xx}(t)\|_2 \\
&\leq 2L\|\theta_x(t)\|_2\|u_{xx}(t)\|_2,
\end{aligned} \tag{4.37}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma(L,t)u_{xx}(0,t) &\leq \int_0^L |\theta|dx\,|u_{xx}(0,t)| \leq L^{\frac{1}{2}}\|\theta(t)\|_2|u_{xx}(0,t)| \\
&\leq L^{\frac{3}{2}}\|\theta_x(t)\|_2|u_{xx}(0,t)|,
\end{aligned} \tag{4.38}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha\int_0^L \sigma\theta_x dx &\leq \alpha\int_0^L |\theta|dy\int_0^L |\theta_x|dx \leq \alpha L\|\theta(t)\|_2\|\theta_x(t)\|_2 \\
&\leq \alpha L^2\|\theta_x(t)\|_2^2,
\end{aligned} \tag{4.39}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha\int_0^L x\theta\theta_x dx &\leq \alpha L\|\theta(t)\|_2\|\theta_x(t)\|_2 \\
&\leq \alpha L^2\|\theta_x(t)\|_2^2,
\end{aligned} \tag{4.40}
$$

$$
\begin{aligned}
-\alpha\sigma(L,t)\int_0^L \theta_x dx &\leq \alpha\int_0^L |\theta|dx\int_0^L |\theta_x|dx \\
&\leq \alpha L\|\theta(t)\|_2\|\theta_x(t)\|_2 \\
&\leq \alpha L^2\|\theta_x(t)\|_2^2
\end{aligned} \tag{4.41}
$$

e

$$
L\theta(L,t)u_{xx}(L,t) \leq L^{\frac{3}{2}}\|\theta_x(t)\|_2|u_{xx}(L,t)|. \tag{4.42}
$$

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos as desigualdades

$$
-\int_0^L x\theta_x u_{xx}dx \leq L\|\theta_x(t)\|_2\|u_{xx}(t)\|_2 \tag{4.43}
$$

e

$$
\int_0^L xu_t\theta_x dx \leq L\|\theta_x(t)\|_2\|u_t(t)\|_2 \tag{4.44}
$$

Considere $m_0 = \max\left\{M(s) : 0 < s < \max\limits_{[0,T]}\|u_x(t)\|_2^2\right\}$. Assim, pela Desigualdade de Cauchy-

Schwarz e pela imersão (4.7) teremos as seguintes desigualdades

$$
\begin{aligned}
M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)\int_0^L x\sigma u_{xx}dx &\leq m_0L\left(\int_0^L|\theta|dy\right)\left(\int_0^L|u_{xx}|dx\right)\\
&\leq m_0L^2\|\theta(t)\|_2\|u_{xx}(t)\|_2\\
&\leq m_0L^3\|\theta_x(t)\|_2\|u_{xx}(t)\|_2 \qquad (4.45)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
-\sigma(L,t)M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)\int_0^L xu_{xx}dx &\leq m_0L\left(\int_0^L|\theta|dy\right)\left(\int_0^L|u_{xx}|dx\right)\\
&\leq m_0L^3\|\theta_x(t)\|_2\|u_{xx}\|_2. \qquad (4.46)
\end{aligned}
$$

Substituindo as desigualdades de (4.37) a (4.46) em (4.36) teremos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L xu_t\left[\sigma-\sigma(L,t)\right]dx\right\} &\leq L^{\frac{3}{2}}\|\theta_x(t)\|_2|u_{xx}(0,t)|+L^{\frac{3}{2}}\|\theta_x(t)\|_2|u_{xx}(L,t)|\\
&+\frac{\alpha L}{2}|u_t(L,t)|^2+\left(3L+2m_0L^3\right)\|\theta_x(t)\|_2\|u_{xx}(t)\|_2+\\
&+3\alpha L^2\|\theta_x(t)\|_2^2+L\|u_t(t)\|_2\|\theta_x(t)\|_2-\frac{\alpha}{2}\|u_t(t)\|_2^2.
\end{aligned}
$$

Aplicando a Desigualdade de Young no penúltimo termo, segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L xu_t\left[\sigma-\sigma(L,t)\right]dx\right\} &\leq L^{\frac{3}{2}}\|\theta_x(t)\|_2|u_{xx}(0,t)|+L^{\frac{3}{2}}\|\theta_x(t)\|_2|u_{xx}(L,t)|\\
&+\frac{\alpha L}{2}|u_t(L,t)|^2+\left(3L+2m_0L^3\right)\|\theta_x(t)\|_2\|u_{xx}(t)\|_2+\\
&+\left(3\alpha L^2+\frac{4L^2}{\alpha}\right)\|\theta_x(t)\|_2^2-\frac{7\alpha}{16}\|u_t(t)\|_2^2.
\end{aligned}
$$

□

O próximo lema nos fornecerá uma estimativa para os termos pontuais $|u_{xx}(0,t)|$ e $|u_{xx}(L,t)|$.

Lema 4.6. *Com as condições do Lema* 4.3*, a seguinte desigualdade vale*

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L(-2x+L)\,u_xu_tdx\right\} &\leq -\frac{L}{2}|u_t(L,t)|^2-\frac{L}{2}|u_{xx}(L,t)|^2-\frac{L}{2}|u_{xx}(0,t)|^2+\|u_t(t)\|_2^2+\\
&+\left(\frac{13}{4}+m_0L^2\right)\|u_{xx}(t)\|_2^2+10\alpha^2L^2\|\theta_x(t)\|_2^2.
\end{aligned}
$$

Demonstração. Multiplicando a equação (4.1) por $q(x)u_x$, com $q\in C^2(0,L)$ e integrando de

0 a L teremos

$$\int_0^L q(x)u_x u_{tt}dx + \int_0^L q(x)u_x u_{xxxx}dx - M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)\int_0^L q(x)u_x u_{xx}dx +$$
$$+\alpha \int_0^L q(x)u_x\theta_{xx}dx = 0.$$

Note que da equação (4.1) e de (4.5) segue que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L q(x)u_x u_t dx\right\} &= \frac{1}{2}\int_0^L q(x)\frac{d}{dx}|u_t|^2dx + \int_0^L q'(x)u_x u_{xxx}dx + \\ &+\frac{1}{2}\int_0^L q(x)\frac{d}{dx}|u_{xx}|^2dx + \\ &-\frac{1}{2}M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)\int_0^L q'(x)|u_x|^2dx + \\ &+\alpha\int_0^L \left[q'(x)u_x\theta_x + q(x)u_{xx}\theta_x\right]dx.\end{aligned}$$

Integrando por partes novamente e utilizando a condição $u(0,t) = u_x(0,t) = 0$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L q(x)u_x u_t dx\right\} &= \frac{1}{2}q(L)|u_t(L,t)|^2 - \frac{1}{2}\int_0^L q'(x)|u_t|^2dx + \\ &-\frac{1}{2}\int_0^L q''(x)\frac{d}{dx}|u_x|^2dx + \frac{1}{2}q(L)|u_{xx}(L,t)|^2 + \\ &-\frac{1}{2}q(0)|u_{xx}(0,t)|^2 - \frac{3}{2}\int_0^L q'(x)|u_{xx}|^2dx + \\ &-\frac{1}{2}M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)\int_0^L q'(x)|u_x|^2dx + \\ &+\alpha\int_0^L \left[q'(x)u_x\theta_x + q(x)u_{xx}\theta_x\right]dx.\end{aligned}$$

Fazendo, em particular, $q(x) = (-2x + L)$ teremos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L (-2x+L)\,u_x u_t dx\right\} &= -\frac{L}{2}|u_t(L,t)|^2 + \int_0^L |u_t|^2dx - \frac{L}{2}|u_{xx}(L,t)|^2 + \\ &-\frac{L}{2}|u_{xx}(0,t)|^2 + 3\int_0^L |u_{xx}|^2dx + \\ &+M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)\int_0^L |u_x|^2dx + \\ &+\alpha\int_0^L \left[-2u_x\theta_x + (-2x+L)\,u_{xx}\theta_x\right]dx. \qquad (4.47)\end{aligned}$$

Usando a limitação de M e a imersão $H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L)$ tem-se

$$M\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)\int_0^L |u_x|^2dx \;\;\leq\;\; m_0L^2\int_0^L |u_{xx}|^2dx. \tag{4.48}$$

Assim, das Desigualdades de Cauchy-Schwarz, de Poincaré e de Young, teremos

$$\begin{aligned}
-2\alpha\int_0^L u_x\theta_x dx &\leq 2\alpha\|u_x(t)\|_2\|\theta_x(t)\|_2 \\
&\leq 2\alpha L\|u_{xx}(t)\|_2\|\theta_x(t)\|_2 \\
&\leq \frac{1}{8}\|u_{xx}(t)\|_2^2 + 8\alpha^2L^2\|\theta_x(t)\|_2^2.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Como $|-2x+L| \leq L$ em $[0,L]$, usando as Desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young teremos

$$\begin{aligned}
\alpha\int_0^L (-2x+L)\,u_{xx}\theta_x dx &\leq \alpha L\|u_{xx}(t)\|_2\|\theta_x(t)\|_2 \\
&\leq \frac{1}{8}\|u_{xx}(t)\|_2^2 + 2\alpha^2L^2\|\theta_x(t)\|_2^2.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Substituindo as desigualdades (4.48),(4.49) e (4.50) em (4.47) temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L (-2x+L)\,u_xu_tdx\right\} &\leq -\frac{L}{2}|u_t(L,t)|^2 + \int_0^L |u_t|^2dx - \frac{L}{2}|u_{xx}(L,t)|^2 + \\
&\quad -\frac{L}{2}|u_{xx}(0,t)|^2 + 3\int_0^L |u_{xx}|^2dx + \\
&\quad +m_0L^2\int_0^L |u_{xx}|^2dx + \frac{1}{8}\int_0^L |u_{xx}|^2dx + \\
&\quad +8\alpha^2L^2\int_0^L |\theta_x|^2dx + \frac{1}{8}\int_0^L |u_{xx}|^2dx + \\
&\quad +2\alpha^2L^2\int_0^L |\theta_x|^2dx \\
&= -\frac{L}{2}|u_t(L,t)|^2 - \frac{L}{2}|u_{xx}(L,t)|^2 - \frac{L}{2}|u_{xx}(0,t)|^2 + \\
&\quad +\int_0^L |u_t|^2dx + \left(\frac{13}{4} + m_0L^2\right)\int_0^L |u_{xx}|^2dx + \\
&\quad +10\alpha^2L^2\int_0^L |\theta_x|^2dx
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do lema. □

Consideremos o funcional

$$\Psi(t) = \frac{\alpha}{16}\int_0^L uu_tdx + \delta\int_0^L (-2x+L)\,u_xu_tdx + \int_0^L xu_t\left[\sigma - \sigma(L,t)\right]dx,$$

onde $0 < \delta < \min\left\{\frac{\alpha}{16}, \frac{\alpha}{32(13+4m_0L^2)}\right\}$.

Lema 4.7. *Com as condições do Lema* 4.3*, existe uma constante positiva* C *tal que*

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) \;\; \leq \;\; C\left(|u_t(L,t)|^2 + \|\theta_x(t)\|_2^2\right) - \frac{1}{8}E(t).$$

Demonstração. Da definição de Ψ e dos Lemas 4.4, 4.5 e 4.6 teremos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Psi(t) \;\; \leq \;\; & \frac{\alpha}{16}\|u_t(t)\|_2^2 - \frac{\alpha}{8}\hat{f}(u(L,t)) - \frac{\alpha}{16}\hat{M}\left(\|u_x(t)\|_2^2\right) - \frac{11\alpha}{128}\|u_{xx}(t)\|_2^2 + \\
& + L^3\frac{\alpha}{4}C_g^2|u_t(L,t)|^2 + \frac{\alpha^3L^2}{4}\|\theta_x(t)\|_2^2 + \\
& - \delta\frac{L}{2}|u_t(L,t)|^2 - \delta\frac{L}{2}|u_{xx}(L,t)|^2 - \delta\frac{L}{2}|u_{xx}(0,t)|^2 + \delta\|u_t(t)\|_2^2 + \\
& + \delta\left(\frac{13}{4} + m_0L^2\right)\|u_{xx}(t)\|_2^2 + \delta 10\alpha^2L^2\|\theta_x(t)\|_2^2 + \\
& + L^{\frac{3}{2}}\|\theta_x(t)\|_2|u_{xx}(L,t)| + L^{\frac{3}{2}}\|\theta_x(t)\|_2|u_{xx}(0,t)| + \\
& + \left[3L + 2m_0L^3\right]\|\theta_x(t)\|_2\|u_{xx}(t)\|_2 + \\
& + \frac{\alpha L}{2}|u_t(L,t)|^2 - \frac{7\alpha}{16}\|u_t(t)\|_2^2 + \\
& + \left[3\alpha L^2 + \frac{4L^2}{\alpha}\right]\|\theta_x(t)\|_2^2,
\end{aligned}$$

ou seja, agrupando os termos em comum

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Psi(t) \;\; \leq \;\; & -\frac{\alpha}{8}\hat{f}(u(L,t)) - \frac{\alpha}{16}\hat{M}\left(\|u_x(t)\|_2^2\right) + \\
& + \left(\frac{\alpha}{16} + \delta - \frac{7\alpha}{16}\right)\|u_t(t)\|_2^2 + \\
& + \left(L^3\frac{\alpha}{4}C_g^2 - \delta\frac{L}{2} + \frac{\alpha L}{2}\right)|u_t(L,t)|^2 + \\
& + \left(\frac{\alpha^3L^2}{4} + 3\alpha L^2 + \frac{4L^2}{\alpha} + \delta 10\alpha^2L^2\right)\|\theta_x(t)\|_2^2 + \\
& + \left(-\frac{11\alpha}{128} + \delta\left(\frac{13}{4} + m_0L^2\right)\right)\|u_{xx}(t)\|_2^2 + \\
& + \left(3L + 2m_0L^2\right)\|\theta_x(t)\|_2\|u_{xx}(t)\|_2 + \\
& - \delta\frac{L}{2}|u_{xx}(L,t)|^2 - \delta\frac{L}{2}|u_{xx}(0,t)|^2 + \\
& + L^{\frac{3}{2}}\|\theta_x(t)\|_2|u_{xx}(L,t)| + L^{\frac{3}{2}}\|\theta_x(t)\|_2|u_{xx}(0,t)|. \qquad (4.51)
\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Young obtemos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}\left(3L+2m_0L^2\right)\|\theta_x(t)\|_2\|u_{xx}(t)\|_2 &\leq \frac{\alpha}{64}\|u_{xx}(t)\|_2^2+\\ &+\frac{16}{\alpha}\left(3L+2m_0L^2\right)^2\|\theta_x(t)\|_2^2,\end{aligned}$$

$$L^{\frac{3}{2}}\|\theta_x(t)\|_2|u_{xx}(L,t)| \leq \frac{\delta L}{2}|u_{xx}(L,t)|^2+\frac{L^2}{2\delta}\|\theta_x(t)\|_2^2$$

e

$$L^{\frac{3}{2}}\|\theta_x(t)\|_2|u_{xx}(0,t)| \leq \frac{\delta L}{2}|u_{xx}(0,t)|^2+\frac{L^2}{2\delta}\|\theta_x(t)\|_2^2.$$

Substituindo as últimas três desigualdades na desigualdade (4.51) e pela escolha de δ teremos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Psi(t) &\leq -\frac{\alpha}{8}\hat{f}(u(L,t))-\frac{\alpha}{16}\hat{M}\left(\|u_x(t)\|_2^2\right)-\frac{5\alpha}{16}\|u_t(t)\|_2^2+\\ &+\left(L^3\frac{\alpha}{4}C_g^2+\frac{\alpha L}{2}\right)|u_t(L,t)|^2+\\ &+\left(\frac{\alpha^3L^2}{4}+3\alpha L^2+\frac{4L^2}{\alpha}+L^2 10\alpha^2L^2\right)\|\theta_x(t)\|_2^2+\\ &+\frac{16}{\alpha}\left(3L+2m_0L^2\right)^2\|\theta_x(t)\|_2^2+\\ &-\frac{\alpha}{64}\|u_{xx}(t)\|_2^2.\end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) \leq C\left(|u_t(L,t)|^2+\|\theta_x(t)\|_2^2\right)-\frac{\alpha}{8}E(t).$$

$\square$

Lema 4.8. *Com as condições do Lema* 4.3 *e fazendo* $E_\epsilon=E(t)+\epsilon\Psi(t)$*, existe* C_0 *tal que*

$$|E_\epsilon(t)-E(t)|\leq\epsilon C_0E(t)\ \forall\epsilon>0.$$

Demonstração. De fato, pela Desigualdade Triangular, Desigualdade de Cauchy-Schwarz e pela Desigualdade de Young temos

$$\begin{aligned}
|E_\epsilon(t) - E(t)| &= \epsilon\,|\Psi(t)| \\
&= \epsilon\left|\frac{\alpha}{16}\int_0^L uu_t dx\right| + \epsilon\left|\delta\int_0^L (-2x+L)\,u_x u_t dx\right| + \\
&\quad +\epsilon\left|\int_0^L xu_t\left[\sigma - \sigma(L,t)\right]dx\right| \\
&\leq \epsilon\left[\frac{\alpha}{16}\|u(t)\|_2\|u_t(t)\|_2 + \delta L\|u_x(t)\|_2\|u_t(t)\|_2 + 2L^{\frac{3}{2}}\|u_t(t)\|_2\|\theta(t)\|_2\right] \\
&\leq \epsilon\frac{C_0}{2}\left[\|u_{xx}(t)\|_2^2 + \|u_t(t)\|_2^2 + \|\theta_x(t)\|_2^2\right] \\
&\leq \epsilon C_0 E(t).
\end{aligned}$$

□

Lema 4.9. *Com as condições do Lema* 4.3 *existe* $\epsilon > 0$ *tal que*

$$\frac{d}{dt}E_\epsilon(t) \leq -\frac{\epsilon\alpha}{8}E(t).$$

Demonstração. De fato, dos Lemas 4.3 e 4.7 segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_\epsilon(t) &\leq -\rho|u_t(L,t)|^2 - \|\theta_x(t)\|_2^2 + \epsilon C\left(|u_t(L,t)|^2 + \|\theta_x(t)\|_2^2\right) - \frac{\epsilon\alpha}{8}E(t) \\
&\leq -\left(\rho - \epsilon C\right)|u_t(L,t)|^2 - \left(1-\epsilon C\right)\|\theta_x(t)\|_2^2 - \frac{\epsilon\alpha}{8}E(t).
\end{aligned}$$

Tomando ϵ suficientemente pequeno, concluímos que

$$\frac{d}{dt}E_\epsilon(t) \leq -\frac{\epsilon\alpha}{8}E(t).$$

□

Teorema 4.10. *Seja* (u,θ) *a solução do problema* $(4.1)-(4.5)$. *Então existe uma constante positiva* γ *tal que*

$$E(t) \leq 3E(0)e^{-\gamma t}\ \forall t \geq 0.$$

Demonstração. Observe que para $\epsilon < \frac{1}{2C_0}$ teremos

$$\frac{1}{2}E(t) \leq (-\epsilon C_0 + 1)E(t) \leq E_\epsilon(t) \leq (\epsilon C_0 + 1)E(t) \leq \frac{3}{2}E(t).$$

Agora, do Lema 4.9

$$\frac{d}{dt}E_\epsilon(t) \leq -\frac{\epsilon\alpha}{8}E(t) \leq -\gamma E_\epsilon(t)$$

onde $\gamma = \frac{3\epsilon\alpha}{16} > 0$. Assim,

$$\frac{d}{dt}\left\{E_\epsilon(t)e^{\gamma t}\right\} \leq 0$$

logo,

$$\frac{1}{2}E(t) \leq E_\epsilon(t) \leq E_\epsilon(0)e^{-\gamma t} \leq \frac{3}{2}E(0)e^{-\gamma t}.$$

Portanto

$$E(t) \leq 3E(0)e^{-\gamma t} \;\; \forall\, t \geq 0.$$

$\square$

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi estudado o problema da viga extensível com amortecimento não linear na fronteira acoplados a diferentes termos dissipativos. Inicialmente foi considerado o problema com dissipação friccional e então foi estudado o problema com dissipação térmica. A existência e unicidade de solução para cada problema foram obtidas via Método de Faedo-Galerkin.

A principal contribuição desde trabalho foi exibir a taxa de decaimento exponencial em ambos os casos, o que conseguimos por meio dos funcionais de Liapunov. Deste modo, concluímos que as dissipações friccional ou térmica foram suficientes pra obter o decaimento.

REFERÊNCIAS

[1] T. F. Ma; *Boundary stabilization for a non-linear beam on elastic bearings*. Mathematical Methods in the Applied Sciences; **24**:583-594, 2001.

[2] Wonowsky-Krieger S.; *The effect of axial force on the vibration of hinged bars*. Journal of Applied Mechanics; **17**:35-36, 1950.

[3] Feireisl E.; *Non-zero time periodic solutions to an equation of Petrovsky type with nonlinear boundary condition: slow oscillations of beams on elastic bearings*. Annali della Scuola Normale di Pisa; **20**:133-146, 1993.

[4] Feckan M.; *Free vibrations of beams on bearings with nonlinear elastic responses*. Journal of Differential Equations; **154**:55-72, 1999.

[5] Grossinho M. R., Ma T. F.; *Symmetric equilibria for a beam with an elastic foundation*. Portugalie Mathematica; **51**:375-393, 1994.

[6] Grossinho M. R., Tersian S.; *The dual variational pronciple and equilibria for a beam resting on a discontinuos nonlinear elastic foundation*. Nonlinear Analysis; **41**:417-431, 2000.

[7] Ball J.; *Initial boundary value problem for an extencible beam*. Journal of Mathematical Analysis and Application; **42**:61-90, 1973.

[8] Medeiros L. A.; *On a new class of nonlinear wave equations*. Journal of Mathematical Analysis ans Application; **69**:252-262, 1979.

[9] Muñoz Rivera J.E.; *Global solution and regularizing properties on a class of nonlinear evolution equation*. Journal of Differential Equations; **128**:103-124, 1996.

[10] Tucsnak M.; *Semi-internal stabilization for a nonlinear Euler-Bernoulli equation*. Mathematical Methods in the Applied Sciences; **19**:897-907, 1996.

[11] Kouemou Patcheu S.; *On a global solution and asymptotic behaviour for the generali-zed damped extensible beam equation*. Journal of Differential Equations; **135**:299-314, 1997.

[12] Pazoto A. F., Menzala G. P.; *Uniform rates of decay of a nonlinear beam with bounda-ry dissipation*. Report of LNCC/CNPq (Brazil), no 34/97, August 1997.

[13] Pazoto A. F., Menzala G. P.; *Uniform stabilization of a nonlinear beam model with thermal effects and nonlinear boundary dissipation*. Funkcialaj Ekvacioj; **43**:339-360, 2000.

[14] J. L. Lions; *Quélques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires.* Dunod, Paris, 1969.

[15] L.C. Evans; *Partial Differential Equations*. University of California, Berkeley, 1998.

[16] H. Brézis; *Análisis Funcional*: Teoría y Aplicaciones. Alianza Editorial,S.A., Madrid, 1984.

[17] E. Kreyszig; *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York, John Wiley, 1989.

[18] R.A. Adams; *Sobolev Spaces*. New York, Academic Press, 1975.

[19] M. A. M. Miranda; L. A. Medeiros. *Espaços de Sobolev*. Rio de Janeiro, Textos de Métodos Matemáticos 25, IM-UFRJ, 2000.

[20] E. A. Coddington & N. Levinson; *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill Inc., New York, 1955.