UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

RODRIGO NUNES MONTEIRO

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO PARA SISTEMAS DE BRESSE DISSIPATIVOS E TAXA ÓTIMA

Londrina
2011

RODRIGO NUNES MONTEIRO

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO PARA SISTEMAS DE BRESSE DISSIPATIVOS E TAXA ÓTIMA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientador: Profa. Dra. Luci Harue Fatori

Londrina
2011

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

M775c Monteiro, Rodrigo Nunes.
Comportamento assintótico para sistemas de Bresse dissipativos e taxa ótima / Rodrigo Nunes Monteiro. – Londrina, 2011.
80 f. : il.

Orientador: Luci Harue Fatori.
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2011.
Inclui bibliografia.

1. Matemática aplicada – Teses. 2. Equações diferenciais parciais – Teses. 3. Análise matemática – Comportamento assintótico – Teses. 4. Sistemas de equações – Teses. I. Fatori, Luci Harue. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

CDU 517.95

RODRIGO NUNES MONTEIRO

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO PARA SISTEMAS DE BRESSE DISSIPATIVOS E TAXA ÓTIMA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Luci Harue Fatori
UEL – Londrina – PR

Prof. Dr. Albo Carlos Cavalheiro
UEL – Londrina – PR

Prof. Dr. Jaime E. Muñoz Rivera
UFRJ – Rio de Janeiro – RJ

Londrina, 07 de fevereiro de 2011.

Aos meus Pais e Irmãos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a Deus, sem Ele nada seria possível.

Meu maior agradecimento é dirigido a minha maravilhosa família que sempre apoiou e depositou em mim a confiança para todas as horas. Aqui, em especial, preciso citar meu Pai e minha Mãe, que com uma paciência infinita suportaram firmemente meus dias de mau humor e sem o sacrifício dos dois dificilmente teria sido possível chegar até aqui. E aos meus irmãos, agradeço a motivação e a verdadeira amizade em todos os momentos e circunstâncias. Também não posso esquecer da minha Vó Maria, que sempre acreditou em mim.

Meus agradecimentos sinceros a Professora Dra. Luci Harue Fatori pela contínua orientação e amizade. Ao Professor Dr. Jaime Rivera, também deixo aqui meus agradecimentos pela colaboração neste trabalho. Também não poderia esquecer dos amigos que fiz aqui ao longo desses dois anos de curso, pois foram muitos os momentos felizes que compartilhamos juntos.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro.

MONTEIRO, Rodrigo Nunes. **Comportamento assintótico para sistemas de Bresse dissipativos e taxa ótima.** 2011. 91 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

RESUMO

Neste trabalho analisamos a existência, unicidade e o comportamento assintótico de solução para sistemas de Bresse dissipativos, também provamos alguns resultados sobre taxas ótimas de decaimento polinomial. A formulação faz uso de operadores definidos em espaços de Hilbert e usando a teoria de semigrupo de operados, demonstramos a existência e unidade de solução. Para a análise das propriedades assintóticas, utilizamos resultados obtidos por A. Borichev e Y. Tomilov [1] e Prüss [12]. A taxa de decaimento ótima é provada usando um resultado obtido por Fatori e Rivera [13] .

Palavras-chave: Matemática aplicada. Equações diferenciais parciais. Análise matemática. Teoria assintótica.

MONTEIRO, Rodrigo Nunes. **Comportamento assintótico para sistemas de Bresse dissipativos e taxa ótima.** 2011. 91 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

ABSTRACT

In this work we examined the existence, uniqueness and asymptotic behavior of solution for the dissipative Bresse systems. Moreover, we show some results on the optimality to the olynomial rate of decay. The formulation makes use of operators defined on Hilbert spaces and using the semigroup theory of operators we demonstrated the existence and uniqueness of the solution. For the analysis of asymptotic properties, we use results obtained by A. Borichev and Y. Tomilov [1] and Prüss [12]. The optimality is proved using a result by Fatori and Rivera [13].

Keywords: Applied mathematics. Partial differential equations. Mathematical analysis. Asymptotic theory.

LISTA DE NOTAÇÕES

$L^p(\Omega)$	espaço das funções u mensuráveis definidas em Ω com valores em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tais que $\lvert u\rvert^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω
$\Vert.\Vert_{L^p}$	norma em $L^p(\Omega)$
$H^m(\Omega)$	espaço das funções $u \in L^2(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ para todo $\lvert\alpha\rvert \leqslant m$
$\Vert.\Vert_{H^m}$	norma em $H^m(\Omega)$
$H_0^m(\Omega)$	fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$
$\Vert.\Vert_{H_0^m}$	norma em $H_0^m(\Omega)$
$\mathcal{L}$(X)	espaço dos operadores lineares contínuos em X
$\Vert.\Vert_{\mathcal{L}(X)}$	norma em $\mathcal{L}$(X)
$L^p(0,T;H)$	espaço das funções mensuráveis $u:[0,T]\rightarrow X$ e que $\Vert u(t)\Vert_H \in L^p(0,T)$
$C^0([0,T];X)$	espaço das funções contínuas $u:[0,T]\rightarrow X$ e que $\Vert u(t)\Vert_X \in C^0([0,T])$
$med(\Omega)$	medida n-dimensional de Lebesgue do conjunto Ω
$D(A)$	domínio do operador A
$\rho(A)$	conjunto resolvente do operador A
$R(\lambda, A)$	operador resolvente
$Im(A)$	conjunto imagem do operador A

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Neste trabalho estudamos a existência de soluções e taxas de decaimento associadas ao modelo matemático hiperbólico para vigas elásticas em forma de arco, conhecido como sistema de Bresse.

Este estudo é direcionado para a análise matemática de modelos dissipativos para vigas o qual é expresso pelas seguintes equações

$$\rho_1\varphi_{tt} = Q_x + lN + F_1$$
$$\rho_2\psi_{tt} = M_x - Q + F_2$$
$$\rho_1 w_{tt} = N_x - lQ + F_3$$

onde $N = k_0(w_x - l\varphi)$, $Q = k(\varphi_x + \psi + lw)$ e $M = b\psi_x$ e denotam respectivamente a força axial, força de atrito e o momento. As funções $\varphi = \varphi(t,x)$, $\psi = \psi(t,x)$ e $w = w(t,x)$ descrevem respectivamente o oscilação vertical, o ângulo de rotação da seção transversal e a oscilação longitudinal. Aqui $\rho_1 = \rho A$, $\rho_2 = \rho I$, $k = K'GA$, $k_0 = EA$, $b = EI$ e $l = R^{-1}$ onde ρ denota a densidade, E o módulo de elasticidade, G o módulo de cisalhamento, K' o fator de corte, A representa a área transversal, I o segundo momento de área da seção transversal e R o raio de curvatura. E ainda, por F_i estamos denotando forças externas. Veja Figura 1. Assim, as equações de movimento do sistema de Bresse são dadas por

$$\begin{aligned}
\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) &= F_1 \\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) &= F_2 \\
\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) &= F_3
\end{aligned}$$

A deducão rigorosa do modelo pode ser vista em Lagnese, Leugering e Schmidt [9].

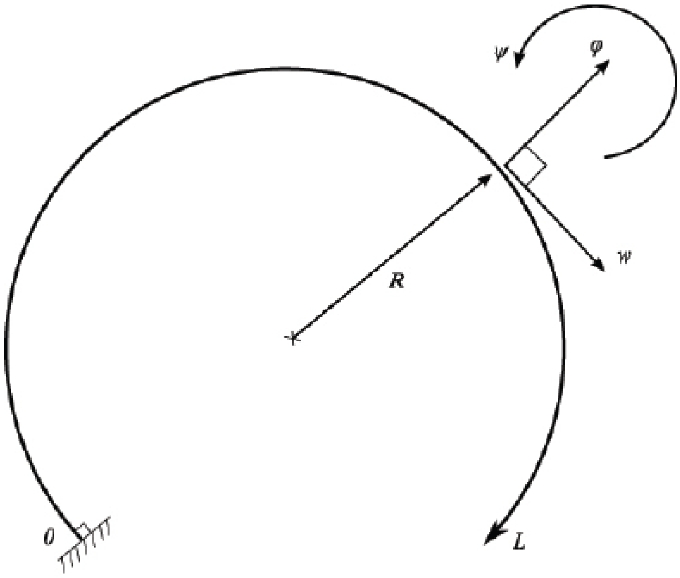

Figura 1: Arco circular

Mecanismos de liberação de energia adicionados ao modelo acima citado, são de grande interesse para matemáticos e engenheiros. Destacamos, por exemplo, os seguintes termos dissipativos: dissipações friccionais, viscosas, viscoelásticas, efeito da temperatura externa e efeito de memória.

Alguns autores introduziram diferentes tipos de mecanismos dissipativos no sistema. Em termoelasticidade, podemos citar o trabalho de Liu e Rao [19], onde eles estudaram o sistema de Bresse com dois mecanismos de dissipação termoelástico, provaram que o decaimento exponencial só existe quando as velocidades de propagação de ondas são as mesmas e quando a velocidade das ondas são diferentes, obtiveram decaimento do tipo polinomial. Este resultado também foi obtido por Fatori e Rivera [13]. Nesse trabalho, os autores consideraram o sistema Bresse com um único mecanismo de dissipação termoelástico. Agora, no contexto de dissipação friccional, podemos citar os trabalhos de Alabau F. Boussouira [5] e Santos e Almeida Júnior [15]. Em [5] a autora estudou o sistema de Bresse com dissipação friccional presente em somente uma equação e foi provado que este mecanismo de dissipação é suficiente para estabilizar exponencialmente todo o sistema desde que as velocidades de propagação das ondas seja a mesma, ou seja, quando $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b}$ e $k = k_0$. Em [15] os autores estudaram o sistema de Bresse com dissipação friccional atuando em cada uma das equações, e foi provado que sempre existe decaimento exponencial da solução independente da relação entre os coeficientes.

No caso onde a oscilação longitudinal é omitida e $l = 0$, o sistema de Bresse se reduz ao sistema de Timoshenko. Este sistema, com diferentes mecanismos dissipativos, já foi estudo por diversos autores, por exemplo, Rivera e Racke [10] consideraram o sistema com uma dissipação termoelástica e mostraram que há estabilidade exponencial da solução se, e somente, se $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b}$. Citamos as referências [6], [3] e [22] para o sistema de Timoshenko com outros tipos de mecanismos de dissipação.

A organização deste trabalho é a seguinte: No Capítulo 1, apresentamos algumas definições e resultados prévios que serão utilizados com frequência no decorrer do trabalho. Não faremos as demonstrações dos teoremas, porém, deixamos indicadas as referências onde podem ser encontrados os assuntos abordados e suas demonstrações. No Capítulo 2, estudamos a existência, unicidade e o comportamento assintótico de solução para o sistema de Bresse com dissipações atuando na oscilação vertical, no ângulo de rotação da seção transversal e na oscilação longitudinal, ou seja, consideramos o sistema de Bresse como em [15] e mostramos o mesmo resultado via argumento direto, diferente das dos autores da referência. No Capítulo 3, consideramos o sistema de Bresse com dissipação presente em duas equações, mais precisamente, estudamos o sistema com dissipação atuando na oscilação vertical e no ângulo de rotação da seção transversal. Para este modelo estudamos a existência e unicidade de solução e mostramos que há estabilidade exponencial, considerando uma relação envolvendo os coeficientes do sistema e que esta relação é uma condição necessária e suficiente para determinar a estabilidade exponencial e, além disto, quando esta relação não é válida mostramos que o sistema decai polinomialmente a uma taxa que é ótima. No Capítulo 4, consideramos o sistema de Bresse com dissipação friccional presente em somente uma equação, para este caso, mostramos que em geral o sistema não possui decaimento exponencial, mas sim polinomial e também mostramos para uma relação que a da taxa de decaimento polinomial obtida é ótima.

CAPÍTULO 1
PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos as notações e resultados fundamentais utilizados no desenvolvimento deste trabalho. Introduzimos os conceitos de Distribuição e Espaços de Sobolev. Destacamos, também, resultados básicos de Análise Funcional e também as principais definições e teoremas da teoria de semigrupos.

1.1 Distribuições e Espaços Funcionais

Nesta seção apresentaremos os espaços funcionais e a noção de derivada no sentido das distribuições. Para isso, considere Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$.

1.1.1 Noção de Derivada Fraca

No estudo de problemas descritos pelas equações diferenciais parciais cujos dados iniciais não são regulares o suficiente para possuírem derivada no sentido clássico, faz-se necessária a introdução de um novo conceito de derivada.
Para entendermos tal conceito necessitamos de algumas definições:

Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma aplicação. Denomina-se suporte de u em Ω o fecho do conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$ e representa-se por $supp(u)$, ou seja, $supp(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}$.

Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções definidas em Ω que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que possuem suporte compacto. Dizemos que uma sequência de funções $\{u_\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para a função $u \in C_0^\infty(\Omega)$ se as seguintes condições são satisfeitas

i) existe $K \subset \Omega$ compacto, tal que $supp(u_\mu - u) \subset K$, para todo μ;

ii) para cada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, a sequência $\{D^\alpha u_n\}_{u \in \mathbb{N}}$ converge para $D^\alpha u$ uniformemente em K, onde D^α representa o operador derivação de ordem α definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}, \quad \text{com} \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ com esta noção de convergência é denominado espaço das funções testes e será representado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Define-se distribuição sobre Ω a toda forma linear T sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínua no sentido da convergência definida sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial, o qual representa-se $\mathcal{D}'(\Omega)$. Neste espaço vetorial diz-se que uma sucessão $(T_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, quando a sequência numérica $(\langle T_\mu, u \rangle)_{\mu \in \mathbb{N}}$ converge para $\langle T, u \rangle$ em $\mathbb{R}$, para toda $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, onde $\langle T_\mu, u \rangle = T_\mu(u)$ e $\langle T, u \rangle = T(u)$.

Considere uma distribuição T sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T, no sentido das distribuições, é a forma linear $D^\alpha T$ definida por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Quando $\alpha \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, denotaremos $D^\alpha T$ como $\dfrac{d^\alpha T}{dx^\alpha}$. Verifica-se que $D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω, e que a aplicação

$$\begin{aligned} D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) &\rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ T &\mapsto D^\alpha T \end{aligned}$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que se

$$\lim_{\mu \to \infty} T_\mu = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \text{ então } \lim_{\mu \to \infty} D^\alpha T_\mu = D^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

1.1.2 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$, tais que $|u|^p$ é integrável a Lebesgue sobre Ω, e por $L^\infty(\Omega)$ o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que existe uma constante c com $|u(x)| \leq c$ quase sempre em Ω. Os espaços $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{L^p} := \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty} := \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c : |u(x)| \leq c \text{ quase sempre em } \Omega\},$$

são espaços de Banach. Em particular, o espaço $L^2(\Omega)$, cuja norma provém do produto interno

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x) \, dx$$

é um espaço de Hilbert.

1.1.3 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} := \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}} := \|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess} |D^\alpha u(x)|.$$

é um espaço de Banach e é denominado espaço de Sobolev. Para o caso particular $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, representado por $H^m(\Omega)$, com o produto interno dado por

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},\ \forall u,\ v, \in H^m(\Omega),$$

e é denominado espaço de Sobolev de ordem m. Quando $m = 0$, $H^m(\Omega)$ identifica-se com $L^2(\Omega)$.

Define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Quando Ω é limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$, então a norma em $W_0^{m,p}(\Omega)$ dada por

$$\|u\|_{W_0^{m,p}} := \|u\|_{W_0^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

é equivalente à norma induzida por $W^{m,p}(\Omega)$.

1.1.4 Espaços Funcionais à Valores Vetoriais

Considere X um espaço de Banach. Denotaremos por $\mathcal{D}(0,T;X)$ o espaço das funções vetoriais $\varphi : (0,T) \to X$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto contido no intervalo $(0,T)$. Dizemos que $\varphi_\nu \to \varphi$ em $\mathcal{D}(0,T;X)$ se

i) existe $K \subset (0,T)$ compacto, tal que $supp(\phi_\nu - \phi) \subset K$, para todo ν,

ii) para cada $k \in \mathbb{N}$, $\frac{d^k}{dt^k}\varphi_\nu(t) \to \frac{d^k}{dt^k}\varphi(t)$ em X uniformemente em $t \in (0,T)$.

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X será denotado por $\mathcal{D}'(0,T;X)$. Neste espaço dizemos que uma sucessão $(S_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ converge para $S \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ quando $\langle S_\nu, \varphi\rangle \to \langle S, \varphi\rangle$ em X, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T)$.

Denotaremos por $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$ o espaço de Banach das funções $u : (0,T) \to X$, tais que u é mensurável e $\|u(t)\|_X$ pertença a $L^p(0,T)$. Em $L^p(0,T;X)$ defini-se a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \inf\{c\,;\, \|u(t)\|_X \leq c \text{ quase sempre em } (0,T)\}.$$

Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, então $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert munido com o produto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X \, dt.$$

Representaremos por $W^{m,p}(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$ o espaço de Banach

$$W^{m,p}(0,T;X) = \{u \in L^p(0,T;X)\,; u^{(j)} \in L^p(0,T;X),\, 0 \leq j \leq m\},$$

onde $u^{(j)}$ representa a j-ésima derivada no sentido das distribuições, com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \left(\sum_{j=0}^{m} \|u^{(j)}\|^p_{L^p(0,T;X)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $W^{m,2}(0,T;X)$ é denotado por $H^m(0,T;X)$, que é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u,v)_{H^m(0,T;X)} = \sum_{j=0}^{m} (u^{(j)}, v^{(j)})_{L^2(0,T;X)}.$$

Representaremos por $C^0([0,T];X)$ o espaço das funções contínuas $u : [0,T] \to X$, tais que $\|u(t)\|_X$ pertença a $C^0([0,T])$, que juntamente com a norma

$$\|u\|_{C^0([0,T];X)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X,$$

é um espaço de Banach. Denotaremos por $C^m([0,T];X)$ o espaço de Banach das funções $u : [0,T] \to X$, tais que $\left\| \dfrac{d^k u}{dt^k}(t) \right\|_X$ pertença a $C^0([0,T])$ para $0 \leq k \leq m$. Em $C^m([0,T];X)$ defini-se a norma

$$\|u\|_{C^m([0,T];X)} = \|u\|_{C^0([0,T];X)} + \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{C^0([0,T];X)} + \ldots + \left\| \frac{d^m u}{dt^m} \right\|_{C^0([0,T];X)}.$$

1.2 Resultados Auxiliares

Nesta seção enunciaremos os resultados necessários para o nosso trabalho, cujas demonstrações podem ser encontradas nas referências citadas.

Proposição 1.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Seja H um espaço vetorial munido do produto interno $(\cdot,\cdot)$. Então, dadas $u,\, v \in H$, temos que*

$$|(u,v)| \leq \|u\|_H \, \|v\|_H,$$

onde $\|\cdot\|_H^2 = (\cdot,\cdot)$.

Demonstração: Ver [4]. ■

Proposição 1.2 (Desigualdade de Young). *Sejam $1 < p,q < \infty$ tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ e $a,b > 0$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Ver Teorema IV.6 de [8]. ■

Proposição 1.3 (Desigualdade de Poincaré). *Suponhamos que Ω seja um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Então para todo $1 \leq p < \infty$, existe uma constante c_p, tal que*

$$||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq c_p ||\nabla u||_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração: Ver Corolário IX.19 de [8]. ■

Observação 1.4. *A desigualdade de Poincaré também é válida para funções que se anulam em apenas uma parte da fronteira $\partial\Omega$ e também para as funções que tem média nula, isto é, $\frac{1}{med(\Omega)} \int_\Omega u\, dx = 0$. Ver Teorema 5.6.2 de [11].*

Definição 1.5. *Seja X um espaço de Banach. Representaremos por X^* o seu dual topológico, isto é,*

$$X^* = \{L : X \to \mathbb{C};\, L \text{ é linear e contínuo}\}.$$

E, denotaremos por $L(x)$, o valor de L em $x \in X$.

Lema 1.6 (Lax-Milgram). *Seja H um espaço de Hilbert complexo e $a : H \times H \to \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear, para a qual, existem constantes positivas c_1 e c_2, tais que*

$$|a[u,v]| \leq c_1 \|u\|_H \|v\|_H \qquad e \qquad c_2 \|u\|_H^2 \leq a[u,u], \quad u,v \in H.$$

Seja $L : H \to \mathbb{R}$, um funcional linear e limitado em H. Então existe um único $w \in H$ tal que

$$a[w,v] = L(v), \quad \forall \quad v \in H.$$

Demonstração: Ver Corolário V8.16 em [8]. ■

Lema 1.7 (Equivalêcia de Normas). *Sejam* $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ *e* $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ *espaços de Banach. Se existe uma constante positiva* c_1*, tal que*

$$\|x\|_1 \leq c_1 \|x\|_2$$

para todo $x \in X$*, então existe uma constante positiva* c_2*, tal que*

$$\|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$$

para todo $x \in X$*. (Logo as duas normas são equivalentes).*

Demonstração: Defina o operador linear $L : X_2 \to X_1$, dado por $x \longmapsto x$. Uma vez que por hipótese

$$\frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \leq c_1$$

temos que L e contínuo e é bijetivo por definição, assim pelo Teorema da Aplicação Aberta L^{-1} é contínuo e portanto limitado. ■

1.3 Semigrupo de Operadores

Nesta seção, apresentamos a definição de semigrupo de classe C_0, algumas propriedades, bem como a caracterização dos geradores infinitesimais de um semigrupo. Para isto, considere X um espaço de Banach real ou complexo e por

$$\mathcal{L}(\mathrm{X}) = \{\mathrm{S} : \mathrm{X} \to \mathrm{X} : \mathrm{S} \text{ é linear e contínuo}\}$$

denotaremos o espaço dos operadores lineares contínuos de X em X com a norma usual

$$\|S\|_{\mathcal{L}(\mathrm{X})} = \sup_{x \in X} \left\{ \frac{\|Sx\|_X}{\|x\|_X} : x \neq 0 \right\}.$$

Definição 1.8. *Seja* X *um espaço de Banach real. Uma família* $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *de operadores lineares limitados de* X *em* X *é chamada de semigrupo se satisfazem as propriedades* *(i)* $S(0)w = w, \quad w \in X,$

(ii) $S(t+s)w = S(t)S(s)w = S(s)S(t)w, \quad s, t \geq 0, \quad w \in X.$

Definição 1.9. *Um semigrupo de operadores lineares $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é dito ser de classe C_0, ou de fortemente contínuo, se para todo $x \in X$ a função $t \longmapsto S(t)x$ é continua no ponto zero.*

Um exemplo de semigrupo de classe C_0 é a função exponencial $S(t) = e^{At}$ que pode ser definida quando A for um operador linear limitado de um espaço de Banach X. No caso em que A seja um operador linear não limitado, com certas propriedades, pode-se também definir e^{At}. Isto é feito pela teoria de semigrupos. Ver [2] e [11].

Definição 1.10. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 de operadores lineares em X. Dizemos $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de contrações se $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ para todo $t \geq 0$.*

Definição 1.11. *Considere o operador $A : D(A) \to X$, dado por*

$$Au = \lim_{t\to 0+} \frac{S(t)u - u}{t}, \; u \in D(A),$$

onde

$$D(A) = \left\{ u \in X : \lim_{t\to 0+} \frac{S(t)u - u}{t} \quad \text{existe em } X \right\}.$$

Dizemos que A é o gerador infinitesimal do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ e $D(A)$ é o domínio de A.

Teorema 1.12. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 de contrações e o operador $A : D(A) \subset X \to X$ seu gerador infinitesimal. Então, $U(t) = S(t)U_0$ é a única solução do problema de valor inicial*

$$U_t = AU, \; U(0) = U_0$$

para $U_0 \in D(A)$. E, ainda $S(t)u \in C^1([0, \infty); X) \cap C([0, \infty); D(A))$.

Demonstração: Ver Corolário 2.3 e Teorema 2.4 em [2]. ∎

1.3.1 Caracterização dos Geradores de Semigrupos de Classe C_0

Nesta seção, apresentamos os teoremas de Hille-Yosida e Lummer-Phillips, os quais caracterizam geradores infinitesimais de semigrupos de classe C_0.

Definição 1.13. *Se A é um operador linear em X, não necessariamente limitado, o conjunto resolvente $\rho(A)$ de A é o conjunto de todos os números complexos λ, tais que, o operador $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ existe e limitado em X. O operador $R(\lambda, A)$ é chamado de operador resolvente.*

Teorema 1.14 (Hille-Yosida). *Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações se, e somente se*

(i) A é um operador fechado e $D(A) = X$,

(ii) O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém o conjunto $\mathbb{R}^+$ e para todo $\lambda > 0$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração: Ver Teorema 3.1 em [2]. ■

Definição 1.15. *Seja H um espaço de Hilbert. Dizemos que um operador A é dissipativo se*

$$Re(Au, u)_H \leq 0, \forall\, u \in H.$$

Teorema 1.16 (Lummer-Phillips). *Seja A um operador linear com domínio denso em um espaço de Hilbert H*

(i) Se A é dissipativo e existe λ tal que $Im(\lambda I - A) = H$,então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações.

(ii) Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações sobre o espaço H, então $Im(\lambda I - A) = H$ para todo $\lambda > 0$ e A é um operador dissipativo.

Demonstração: Ver Teorema 4.3 em [2]. ■

Agora, apresentamos um importante resultado que estabelece quais são as condições para que um operador linear seja o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações. Este resultado será usado na prova da existência e unicidade de soluções de todos os problemas deste trabalho.

Corolário 1.17. *Seja A um operador linear, dissipativo e com domínio denso. Se $0 \in \rho(A)$, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações.*

Demonstração: Ver Teorema 2.12.3 em [11]. ■

Lema 1.18. *Sejam $S : X \to X$ um operador linear limitado com inverso limitado e $B : X \to X$ um operador linear, tal que, $\|B\|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{1}{\|S^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}}$. Então $S + B$ é limitado e invertível.*

Demonstração: Ver Lema 2.12.1 em [11]. ■

Teorema 1.19. *Seja A um operador dissipativo em X. Se para algum $\lambda_0 > 0$ tivermos $Im(\lambda_0 I - A) = X$, então $Im(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração: Teorema 4.5 em [2]. ■

Teorema 1.20. *Seja A um operador dissipativo com $Im(I - A) = X$. Se X é reflexivo então $\overline{D(A)} = X$.*

Demonstração: Ver Teorema 4.6 em [2]. ■

1.3.2 Comportamento Assintótico de Semigrupos

Nesta seção, apresentaremos os resultados que estabelecem condições necessárias e suficientes para que um semigrupo de classe C_0 de contrações seja exponencialmente ou polinomialmente estável.

Teorema 1.21 (Prüss). *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 de contrações sobre um espaço de Hilbert H. Então $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é exponencialmente estável se, e somente, se*

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}$$

e

$$\overline{\lim_{|\beta|\to\infty}} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty.$$

Demonstração: Ver Teorema em [12]. ■

Teorema 1.22 (Borichev e Tomilov). *Seja* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um semigrupo de classe* C_0 *limitado sobre um espaço de Hilbert* H *com gerador infinitesimal* A*, tal que,* $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$*. Então para uma constante* $\alpha > 0$ *fixada, as seguintes condições são equivalentes*

$$(i) \qquad \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(H)} = O(|\lambda|^{\alpha}), \quad |\lambda| \to \infty.$$

$$(ii) \qquad \|S(t)(-A)^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(H)} = O(t^{-1}), \quad t \to \infty.$$

$$(iii) \qquad \|S(t)(-A)^{-\alpha}x\|_{H} = o(t^{-1}), \quad t \to \infty, \quad x \in H.$$

$$(iv) \qquad \|S(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} = O(t^{-1/\alpha}), \quad t \to \infty.$$

$$(v) \qquad \|S(t)A^{-1}x\|_{H} = o(t^{-1/\alpha}), \quad t \to \infty, \quad x \in H.$$

Demonstração: Ver Teorema 2.4 em [1]. ■

Para provar que taxa de decaimento polinomial obtida é ótima precisamos do seguinte resultado.

Teorema 1.23. *Seja* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um semigrupo de classe* C_0 *de contrações sobre um espaço de Hilbert* H *com gerador infinitesimal* A*. Se*

$$\|S(t)U_0\|_H \leq \frac{1}{t^{\gamma}}\|U_0\|_{D(A)}$$

então, para todo $\epsilon > 0$*, existe uma constante positiva* c_ϵ*, tal que*

$$\frac{1}{|\lambda|^{\frac{1}{\gamma}+\epsilon}}\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq c_\epsilon$$

Demonstração: Ver Teorema 5.3 em [13]. ■

CAPÍTULO 2
SISTEMA DE BRESSE COM TRÊS DISSIPAÇÕES FRICCIONAIS

Neste capítulo, estudamos a existência, unicidade e comportamento assintótico de soluções para o sistema de Bresse com termos dissipativos atuando na oscilação vertical, longitudinal e no ângulo de rotação da seção transversal, ou seja, vamos analisar o seguinte modelo com dissipação friccional presente nas três equações:

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) = F_1 \text{ em } (0,\infty) \times (0,L), \tag{2.1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) = F_2 \text{ em } (0,\infty) \times (0,L), \tag{2.2}$$

$$\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = F_3 \text{ em } (0,\infty) \times (0,L), \tag{2.3}$$

onde $F_1 = -\gamma_1\varphi_t$, $F_2 = -\gamma_2\psi_t$ e $F_3 = -\gamma_3 w_t$.

O sistema está sujeito à condições iniciais

$$\varphi(0,\cdot) = \varphi_0,\ \varphi_t(0,\cdot) = \varphi_1,\ \psi(0,\cdot) = \psi_0,\ \psi_t(0,\cdot) = \psi_1,\ w(0,\cdot) = w_0,\ w_t(0,\cdot) = w_1 \tag{2.4}$$

e condições de contorno Dirichlet-Neumann-Neumann

$$\varphi(t,0) = \varphi(t,L) = \psi_x(t,0) = \psi_x(t,L) = w_x(t,0) = w_x(t,L) = 0 \text{ em } (0,\infty). \tag{2.5}$$

As constantes b, ρ_1, ρ_2, k, k_0, l, γ_1,γ_2 e γ_3 são números reais positivos.

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na seção 2.1, apresentamos a formulação do semigrupo associado ao problema. Na seção 2.2 mostramos a existência e unicidade de solução do sistema e na seção 2.3 estudamos a estabilidade exponencial para o semigrupo associado.

2.1 Formulação do Semigrupo

Nesta seção, vamos apresentar a formulação do semigrupo associado ao sistema de Bresse dissipativo. Para isto, vamos escrever o sistema (2.1)-(2.3) como um problema de valor inicial

$$U_t = AU, \quad U(0) = U_0$$

onde $U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t)^T$, $U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1)^T$, T denota o transposto do vetor e A é o operador linear $A : D(A) \subset H \to H$ dado por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1}\partial_x^2 - \frac{k_0 l^2}{\rho_1}I & -\frac{\gamma_1}{\rho_1}I & \frac{k}{\rho_1}\partial_x & 0 & \frac{(k+k_0)l}{\rho_1}\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ -\frac{k}{\rho_2}\partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{k}{\rho_2}I & -\frac{\gamma_2}{\rho_2}I & -\frac{kl}{\rho_2}I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{(k_0+k)l}{\rho_1}\partial_x & 0 & -\frac{kl}{\rho_1}I & 0 & \frac{k_0}{\rho_1}\partial_x^2 - \frac{kl^2}{\rho_1}I & -\frac{\gamma_3}{\rho_1}I \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Seja H o espaço vetorial

$$H = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H_*^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H^1(0,L) \times L^2(0,L)$$

onde $H_*^1(0,L) = L_*^2(0,L) \cap H^1(0,L)$ e $L_*^2(0,L) = \left\{ u \in L^2(0,L) : \int_0^L u(x)\, dx = 0 \right\}$.

O espaço H é munido do produto interno

$$\begin{aligned}(U, U^*)_H &= \rho_1 \int_0^L \Phi\overline{\Phi^*}\, dx + \rho_2 \int_0^L \Psi\overline{\Psi^*}\, dx + \rho_1 \int_0^L W\overline{W^*}\, dx + b \int_0^L \psi_x \overline{\psi_x^*}\, dx \\ &+ k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{(\varphi_x^* + \psi^* + lw^*)}\, dx + k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{(w_x^* - l\varphi^*)}\, dx \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ e $U^* = (\varphi^*, \Phi^*, \psi^*, \Psi^*, w^*, W^*)$.

Este produto interno induz uma norma em H, dada por

$$\begin{aligned}\|U\|_H^2 &= \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_1\|W\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2 \\ &+ k\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

e o domínio de A é

$$\begin{aligned} D(A) = \{U \in H \mid \varphi \in H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L),\ \ \psi \in H^2(0,L) \cap H_*^1(0,L),\ \ w \in H^2(0,L) \\ \psi_x, w_x \in H_0^1(0,L),\ \ \Phi \in H_0^1(0,L),\ \ \Psi \in H_*^1(0,L),\ \ W \in H^1(0,L)\}. \end{aligned}$$

A seguir, vamos estabelecer dois resultados sobre o espaço H.

Lema 2.1. *Os espaços vetoriais $L_*^2(0,L)$ e $H_*^1(0,L)$ são de Hilbert.*

Demonstração: Vamos inicialmente provar que $L^2_*(0,L)$ é de Hilbert. Para isto basta mostrar que este espaço é fechado. Com efeito, seja $u \in \overline{L^2_*(0,L)}$, então $\|u_\mu - u\|_{L^2} \to 0$, com $(u_\mu) \subset L^2_*(0,L)$. Assim, para todo, $\mu \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$\int_0^L u_\mu(x)\,dx = 0.$$

Uma vez que (u_μ) é convergente, segue que a sequência (u_μ) é de Cauchy em $L^2(0,L)$. Sendo $L^2(0,L)$ um espaço completo, temos que, $u \in L^2(0,L)$. Resta mostrar que a média da função u é nula. Com efeito,

$$\left|\int_0^L u_\mu(x)\,dx - \int_0^L u(x)\,dx\right| = \left|\int_0^L u_\mu(x) - u(x)\,dx\right| \leq \int_0^L |u_\mu(x) - u(x)|\,dx$$

Decorre da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\left|\int_0^L u_\mu(x)\,dx - \int_0^L u(x)\,dx\right| \leq \sqrt{L}\|u_\mu - u\|_{L^2} \to 0$$

quando $\mu \to \infty$. Assim, u tem média nula, concluindo que $u \in L^2_*(0,L)$. O que mostra que $L^2_*(0,L)$ é fechado e portanto completo.

Agora, para mostrar que $H^1_*(0,L)$ é completo, basta notar que este espaço é a interseção de espaços fechados $L^2_*(0,L)$ e $H^1(0,L)$, ou seja, $H^1_*(0,L)$ é fechado, e portanto completo. ■

A partir deste Lema podemos enunciar o seguinte resultado

Lema 2.2. *H é um espaço de Hilbert com a norma (2.8).*

Demonstração: Do Lema anterior concluímos que H é espaço de Hilbert com norma usual

$$|U|^2_H = \|\varphi_x\|^2_{L^2} + \|\Phi\|^2_{L^2} + \|\psi\|^2_{L^2} + \|\psi_x\|^2_{L^2} + \|\Psi\|^2_{L^2} + \|w\|^2_{L^2} + \|w_x\|^2_{L^2} + \|W\|^2_{L^2} \quad (2.9)$$

Vamos mostrar $(H, \|\cdot\|_H)$ é um espaço de Banach. De fato, aplicando a desigualdade triangular em (2.8), temos que

$$\|U\|^2_H \leq c_1\|\Phi\|^2_{L^2} + c_1\|\Psi\|^2_{L^2} + c_1\|W\|^2_{L^2} + c_1\|\psi_x\|^2_{L^2}$$
$$+ c_1(\|\varphi_x\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2} + \|w\|_{L^2})^2 + c_1(\|w_x\|_{L^2} + \|\varphi\|_{L^2})^2.$$

onde $c_1 = \text{máx}\{\rho_1,\ \rho_2,\ k,\ k_0,\ kl\ , k_0 l,\ b\}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \|U\|_H^2 \leq c_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + c_1\|\Psi\|_{L^2}^2 + c_1\|W\|_{L^2}^2 + c_1\|\psi_x\|_{L^2}^2 + c_1\|\psi\|_{L^2}^2 + c_1\|\varphi\|_{L^2}^2 + c_1\|\varphi_x\|_{L^2}^2 \\ + c_1\|w\|_{L^2}^2 + c_1\|w_x\|_{L^2}^2 + 2c_1\|\varphi_x\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2} + 2c_1\|\varphi_x\|_{L^2}\|w\|_{L^2} + 2c_1\|\psi\|_{L^2}\|w\|_{L^2} \\ + 2c_1\|w_x\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young nos quatro últimos termos da desigualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \|U\|_H^2 \leq c_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + c_1\|\Psi\|_{L^2}^2 + c_1\|W\|_{L^2}^2 + c_1\|\psi_x\|_{L^2}^2 + 3c_1\|\psi\|_{L^2}^2 + 2c_1\|\varphi\|_{L^2}^2 + 3c_1\|\varphi_x\|_{L^2}^2 \\ + 3c_1\|w\|_{L^2}^2 + 2c_1\|w_x\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Deste modo, existe uma constante positiva, tal que, $\|U\|_H \leq C_1|U|_H$. Desta desigualdade concluímos que $(H,\ \|\cdot\|_H)$ é um espaço de Banach. E, além disto pelo Lema 1.7, existe $C_2 > 0$, de modo que, $|U|_H \leq C_2\|U\|_H$, isto é, as normas $\|U\|_H$ e $|U|_H$ são equivalentes. ∎

2.2 Existência e Unicidade

Nesta seção, mostramos usando a teoria de semigrupos, a existência e unicidade de solução para o sistema (2.1)-(2.3) com as condições iniciais (2.4) e condições de contorno (2.5).

Teorema 2.3. *O operador A dado em (2.6) é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações sobre o espaço de Hilbert H, denotado por $S(t)$.*

Demonstração: Vamos mostrar que A é um operador dissipativo, que $0 \in \rho(A)$ e que seu domínio $D(A)$ é denso em H.

(i) A é dissipativo. De fato, observe que se $U \in D(A)$ então

$$
\begin{aligned}
(AU,U)_H = {} & \underbrace{k\int_0^L (\varphi_x+\psi+lw)_x\overline{\Phi}\,dx}_{:=i_1} + k_0 l\int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{\Phi}\,dx - \gamma_1\int_0^L |\Phi|^2\,dx \\
& + \underbrace{b\int_0^L \psi_{xx}\overline{\Psi}}_{:=i_2} - k(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\Psi}\,dx - \gamma_2\int_0^L |\Psi|^2\,dx + \underbrace{k_0\int_0^L (w_x - l\varphi)_x\overline{W}\,dx}_{:=i_3} \\
& - kl\int_0^L (\varphi_x+\psi+lw)\overline{W}\,dx - \gamma_3\int_0^L |W|^2\,dx + b\int_0^L \Psi_x\overline{\psi_x}\,dx \\
& + k\int_0^L (\Phi_x+\Psi+lW)\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx + k_0\int_0^L (W_x - l\Phi)\overline{(w_x - l\varphi)}\,dx.
\end{aligned}
$$

Integrando por partes os termos $i_1,\ i_2,\ i_3$ e tomando a parte real, obtemos

$$
\operatorname{Re}(AU,U)_H = -\gamma_1\|\Phi\|^2_{L^2} - \gamma_2\|\Psi\|^2_{L^2} - \gamma_3\|W\|^2_{L^2} \le 0
$$

e portanto o operador A é dissipativo.

(ii) $0 \in \rho(A)$. Com efeito, para toda $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \in H$, devemos mostrar que existe uma única

$U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W) \in D(A)$ de modo que $AU = -F$, ou seja, que o operador A é invertível.

Observe que da igualdade

$$
AU = \begin{pmatrix} \Phi \\ k/\rho_1(\varphi_x+\psi+lw)_x + k_0 l/\rho_1(w_x - l\varphi) - \gamma_1/\rho_1\Psi \\ \Psi \\ b/\rho_2\psi_{xx} - k/\rho_2(\varphi_x+\psi+lw) - \gamma_2/\rho_2\Psi \\ W \\ k_0/\rho_1(w_x - l\varphi)_x - kl/\rho_1(\varphi_x+\psi+lw) - \gamma_3/\rho_1 W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ -f_3 \\ -f_4 \\ -f_5 \\ -f_6 \end{pmatrix} = -F
$$

segue que

$$
\Phi = -f_1 \in H_0^1(0,L), \quad \Psi = -f_3 \in H_*^1(0,L) \quad \text{e} \quad W = -f_5 \in H^1(0,L). \tag{2.10}
$$

Resta então mostrar que existem φ, ψ e w satisfazendo as seguintes equações

$$
k(\varphi_x+\psi+lw)_x + k_0 l(w_x - l\varphi) = -\rho_1 f_2 + \gamma_1\Phi, \tag{2.11}
$$

$$
b\psi_{xx} - k(\varphi_x+\psi+lw) = -\rho_2 f_4 + \gamma_2\Psi, \tag{2.12}
$$

$$
k_0(w_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x+\psi+lw) = -\rho_1 f_6 + \gamma_3 W. \tag{2.13}
$$

Para isto, considere o espaço de Hilbert $V = H_0^1(0,L) \times H_*^1(0,L) \times H^1(0,L)$, munido da norma usual

$$|(\varphi,\psi,w)|_V^2 = \|\varphi\|_{H_0^1}^2 + \|\psi\|_{H^1}^2 + \|w\|_{H^1}^2.$$

Vamos mostrar que V com norma

$$\|(\varphi,\psi,w)\|_V^2 = k\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2$$

é um espaço de Banach e que as normas $|\cdot|_V$ e $\|\cdot\|_V$ são equivalentes. Com efeito, note que, da desigualdade triangular podemos mostrar que

$$\|(\varphi,\psi,w)\|_V^2 \leq C_1|(\varphi,\psi,w)|_V^2$$

onde $C_1 = \text{máx}\,\{k,\ k_0,\ b\}$. Desta desigualdade concluímos que $(V,\ \|\cdot\|_V)$ é um espaço de Banach. E, assim do Lema 1.7, temos que existe uma constante positiva C_2, tal que

$$|(\varphi,\psi,w)|_V \leq C_2\|(\varphi,\psi,w)\|_V,$$

ou seja, as normas são equivalentes.

Agora, defina a forma sesquilinear $a[\cdot,\cdot] : V \times V \to \mathbb{C}$ por

$$\begin{aligned} a[(\varphi,\psi,w),(\varphi^*,\psi^*,w^*)] &= k\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{(\varphi_x^* + \psi^* + lw^*)}\,dx \\ &+ k_0\int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{(w_x^* - l\varphi^*)}\,dx + b\int_0^L \psi_x\overline{\psi_x^*}\,dx \end{aligned}$$

e seja $\Lambda : H_0^1(0,L) \times H_*^1(0,L) \times H_*^1(0,L) \to \mathbb{C}$ o funcional linear limitado, dado por

$$\Lambda((\varphi,\psi,w)) = \int_0^L (\rho_1 f_2 + \gamma_1 f_1)\overline{\varphi}\,dx + \int_0^L (\rho_2 f_4 + \gamma_2 f_3)\overline{\psi}\,dx + \int_0^L (\rho_1 f_6 + \gamma_3 f_5)\overline{w}\,dx.$$

Vamos mostrar que $a = a[\cdot,\cdot]$ satisfaz as hipóteses do Lema de Lax-Milgram.

(a) $a[\cdot,\cdot]$ é contínua: Com efeito, usando as desigualdades triangular e de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} |a[(\varphi,\psi,w),(\varphi^*,\psi^*,w^*)]| &\leq k\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}\|\varphi_x^* + \psi^* + lw^*\|_{L^2} \\ &+ k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}\|w_x^* - l\varphi^*\|_{L^2} + b\|\psi_x\|_{L^2}\|\psi_x^*\|_{L^2} \\ &\leq c_1\|(\varphi,\psi,w)\|_V\|(\varphi^*,\psi^*,w^*)\|_V \end{aligned}$$

com $c_1 = \max\{k,\ k_0,\ b\}$. Agora, usando a equivalência das normas no espaço vetorial V, obtemos

$$|a[(\varphi,\psi,w),(\varphi^*,\psi^*,w^*)]| \leq c_2|(\varphi,\psi,w)|_V|(\varphi^*,\psi^*,w^*)|_V.$$

Portanto, a forma sesquilinear $a[\cdot,\cdot]$ é contínua.

(b) $a[\cdot,\cdot]$ é coerciva: Note que

$$a[(\varphi,\psi,w),(\varphi,\psi,w)] = k\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2.$$

Usando o fato de que as normas $\|\cdot\|_V$ e $|\cdot|_V$ são equivalentes, segue que existe uma constante positiva c_3, tal que

$$a[(\varphi,\psi,w),(\varphi,\psi,w)] \geq c_3\|(\varphi,\psi,w)\|_V^2.$$

Assim, do Lema de Lax-Milgram, existe uma única solução

$$(\varphi,\psi,w) \in H_0^1(0,L)\times H_*^1(0,L)\times H^1(0,L)$$

para o problema

$$a[(\varphi,\psi,w),(\varphi^*,\psi^*,w^*)] = \lambda((\varphi,\psi,w)).$$

Note que da equação (2.11), temos que $\varphi \in H^2(0,L)$, assim $\varphi \in H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)$.

Agora, para mostrar que $\psi_x \in H_0^1(0,L)$, considere $a_\psi : H^1(0,L)\times H^1(0,L) \to \mathbb{C}$, uma forma sesquilinear, definida por

$$a_\psi[\psi,\psi^*] = b\int_0^L \psi_x\overline{\psi_x^*}\,dx + k\int_0^L \psi\overline{\psi^*}\,dx$$

e o funcional linear limitado $L_\psi : H^1(0,L) \to \mathbb{C}$, dado por

$$L_\psi[\psi] = \int_0^L (\rho_2 f_4 + \gamma_2 f_3 - k\varphi_x - klw)\overline{\psi}\,dx.$$

Note que, da desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$|a_\psi[\psi,\psi^*]| \leq c_4\|\psi_x\|_{L^2}\|\psi_x^*\|_{L^2} + c_4\|\psi\|_{L^2}\|\psi^*\|_{L^2} \leq c_4\|\psi\|_{H^1}\|\psi^*\|_{H^1}$$

onde $c_4 = \max\{b,\ k\}$. E portanto, a forma a_ψ é contínua.

Agora a_ψ é coerciva, pois

$$a_\psi[\psi,\psi] = b\|\psi_x\|_{L^2}^2 + k\|\psi\|_{L^2}^2 \geq c_5\|\psi\|_{H^1}$$

onde $c_5 = \text{mín}\{b,\ k\}$.

Assim, do Lema de Lax-Milgram temos que existe uma única $\psi \in H^1(0,L)$, tal que

$$a_\psi[\psi,\psi^*] = L_\psi[\psi] \quad \forall \psi^* \in H^1(0,L).$$

Agora, note que, para toda $\psi^* \in H^1(0,L)$, temos que

$$\int_0^L (-b\psi_{xx} + k\psi - f)\psi^*\,dx + b\psi_x(L)\psi^*(L) - b\psi_x(0)\psi^*(0) = 0 \tag{2.14}$$

onde $f = \rho_2 f_4 + \gamma_2 f_3 - k\varphi_x - klw$. Em particular, para $\psi^* \in H_0^1(0,L)$, de (2.14) temos que $-b\psi_{xx} + k\psi - f = 0$ q.t.p.

Assim, de (2.14), segue que, para toda $\psi^* \in H^1(0,L)$

$$\psi_x(L)\psi^*(L) - \psi_x(0)\psi^*(0) = 0.$$

Uma vez que $\psi^*(0)$ e $\psi^*(L)$ são arbitrários, concluímos que $\psi_x(0) = \psi_x(L) = 0$. E deste modo, $\psi_x \in H_0^1(0,L)$.

Analogamente, podemos mostrar que $w_x \in H_0^1(0,L)$. Para isto, basta considerar a forma sesquilinear

$$a_w[w,w^*] = k_0\int_0^L w_x\overline{w_x^*}\,dx + kl^2\int_0^L w\overline{w^*}\,dx$$

e o funcional linear limitado $L_w : H^1(0,L) \to \mathbb{C}$, dado por

$$L_w[w] = \int_0^L (\rho_1 f_6 + \gamma_3 f_5\,dx - [k_0 + k]l\varphi_x - kl\psi)\overline{w}\,dx.$$

Logo, para toda $F \in H$, existe única solução $U = (\varphi,\ \Phi,\ \psi\ , \Phi, w,\ W) \in D(A)$, tal que, $AU = -F$. E portanto, o operador A^{-1} existe.

Resta então mostrar que o operador A^{-1} é limitado. Para isto, vamos multiplicar (2.11), (2.12) e (2.13) respectivamente por $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$ e $\overline{w}$ e integrar sobre o intervalo $[0,L]$, obtendo

$$k\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2 = \int_0^L (\rho_1 f_2\overline{\varphi} - \gamma_1\Phi\overline{\varphi})\,dx$$
$$+ \int_0^L (\rho_2 f_4\overline{\psi} - \gamma_2\Psi\overline{\psi})\,dx + \int_0^L (\rho_1 f_6\overline{w} - \gamma_3 W\overline{w})\,dx.$$

Assim desta desigualdade, temos

$$\|U\|_H^2 = \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_1\|W\|_{L^2}^2 + \int_0^L (\rho_1 f_2\overline{\varphi} - \gamma_1\Phi\overline{\varphi})\, dx + \int_0^L (\rho_2 f_4\overline{\psi} - \gamma_2\Psi\overline{\psi})\, dx + \int_0^L (\rho_1 f_6\overline{w} - \gamma_3 W\overline{w})\, dx.$$

Agora, segue de (2.10), que

$$\|U\|_H^2 = \rho_1\|f_1\|_{L^2}^2 + \rho_2\|f_3\|_{L^2}^2 + \rho_1\|f_5\|_{L^2}^2 + \int_0^L (\rho_1 f_2\overline{\varphi} + \gamma_1 f_1\overline{\varphi})\, dx + \int_0^L (\rho_2 f_4\overline{\psi} + \gamma_2 f_3\overline{\psi})\, dx + \int_0^L (\rho_1 f_6\overline{w} + \gamma_3 f_5\overline{w})\, dx.$$

Usando as desigualdades triangular e de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\|U\|_H^2 \leq c_6(\|f_1\|_{L^2}^2 + \|f_3\|_{L^2}^2 + \|f_5\|_{L^2}^2 + \|f_2\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} + \|f_1\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}) + c_6(\|f_4\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2} + \|f_3\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2} + \|f_6\|_{L^2}\|w\|_{L^2} + \|f_5\|_{L^2}\|w\|_{L^2})$$

onde $c_6 = \text{máx}\{\rho_1,\ \rho_2,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3\}$.

Da definição de norma usual no espaço H, temos que

$$\|U\|_H^2 \leq c_6|F|_H^2 + 6c_6|U|_H|F|_H.$$

Decorre da equivalência das normas $|\cdot|_H$ e $\|\cdot\|_H$, que existe uma constante positiva c_7, tal que

$$\|U\|_H^2 \leq c_7\|F\|_H^2 + c_7\|U\|_H\|F\|_H.$$

Aplicando da desigualdade de Young, temos que

$$\|U\|_H \leq c_8\|F\|_H$$

onde $c_8 = 2\left(c_7 + \frac{c_7^2}{2}\right)$.

E deste modo concluímos que o operador A^{-1} é limitado. Portanto $0 \in \rho(A)$.

(iii) Finalmente, vamos mostrar que o domínio do operador A é denso em H. Uma vez que $0 \in \rho(A)$, temos que A^{-1} existe e é limitado. Note que

$$I\lambda_0 - A = A(\lambda_0 A^{-1} - I). \tag{2.15}$$

Então, pelo Lema 1.18, para $B = \lambda_0 A^{-1}$ e $S = I$, com $|\lambda_0| < \frac{1}{\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)}}$, temos que o operador $\lambda_0 A^{-1} - I$ é invertível. E, assim de (2.15), temos $Im(\lambda_0 I - A) = H$, então pelo Teorema 1.19, $Im(\lambda I - A) = H$, $\forall \lambda > 0$, em particular para $\lambda = 1$, o operador $I - A$ é sobrejetor. E, como A é dissipativo segue do Teorema 1.20 que $\overline{D(A)} = H$.

Por (i), (ii) e (iii) temos do Corolário 1.17 que o operador A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações. ■

Assim, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.4. *Suponhamos que os dados iniciais* $(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1) \in D(A)$, *então existe uma única solução* $(\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t)$ *para o sistema* (4.1)-(4.3) *satisfazendo*

$$(\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t) \in C([0, \infty); D(A)) \cap C^1([0, \infty); H).$$

Demonstração: Decorre do Teorema 1.12. ■

2.3 Decaimento Exponencial

Nesta seção vamos mostrar que a solução do sistema de Bresse é exponencialmente estável. Para mostrar a estabilidade, mostraremos que o semigrupo associado ao sistema (2.1)-(2.3) satisfaz as hipóteses do Teorema 1.21. Sabemos

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{F \in H} \left\{ \frac{\|(\lambda I - A)^{-1} F\|_H}{\|F\|_H} \ : \ \|F\|_H \neq 0 \right\}$$

então, se

$$(\lambda I - A)^{-1} F = U$$

temos,

$$\lambda U - AU = F. \tag{2.16}$$

Para isto temos que olhar para a solução da equação resolvente (2.16). Deste modo, se a solução é $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$, então a equação resolvente em termos de suas componentes é dada por

$$\lambda\varphi - \Phi = f_1, \tag{2.17}$$

$$\lambda\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + \gamma_1\Phi = \rho_1 f_2, \tag{2.18}$$

$$\lambda\psi - \Psi = f_3, \tag{2.19}$$

$$\lambda\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma_2\Psi = \rho_2 f_4, \tag{2.20}$$

$$\lambda w - W = f_5, \tag{2.21}$$

$$\lambda\rho_1 W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma_3 W = \rho_1 f_6. \tag{2.22}$$

Assim, para mostrar que a solução possui decaimento exponencial, vamos precisar dos seguintes resultados.

Lema 2.5. *Se $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ é solução da equação resolvente então*

$$\gamma_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \gamma_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \gamma_3\|W\|_{L^2}^2 \leq \|F\|_H\|U\|_H.$$

Demonstração: Multiplicando (2.17), (2.19) e (2.21) por $-k\overline{(\varphi_x + \psi + lw)_x}$, $-b\overline{\psi_{xx}}$ e $k_0\overline{(w_x - l\varphi)_x}$ e (2.18), (2.20) e (2.22) por $\overline{\Phi}$, $\overline{\Psi}$ e $\overline{W}$ respectivamente, integrando sobre o intervalo $[0, L]$ e tomando a parte a real, obtemos

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\Big(-\lambda k \underbrace{\int_0^L \varphi\overline{(\varphi_x + \psi + lw)_x}\,dx}_{:=i_1} + \lambda\rho_1\int_0^L |\Phi|^2\,dx - k_0 l \underbrace{\int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{\Phi}\,dx}_{:=i_2}\Big) \\
&+ \mathrm{Re}\Big(-\lambda b \underbrace{\int_0^L \psi\overline{\psi_{xx}}\,dx}_{:=i_3} + \lambda\rho_2\int_0^L |\Psi|^2 + k \underbrace{\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{\Psi}\,dx}_{:=i_4}\Big) \\
&+ \mathrm{Re}\Big(-\lambda k_0 \underbrace{\int_0^L w\overline{(w_x - l\varphi)_x}\,dx}_{:=i_5} + \lambda\rho_1\int_0^L |W|^2\,dx + kl \underbrace{\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{W}\,dx}_{:=i_6}\Big) \\
&+ \gamma_1\int_0^L |\Phi|^2\,dx + \gamma_2\int_0^L |\Psi|^2\,dx + \gamma_3\int_0^L |W|^2\,dx = \\
&\mathrm{Re}\Big(-k \underbrace{\int_0^L f_1\overline{(\varphi_x + \psi + lw)_x}\,dx}_{:=i_7} + \rho_1\int_0^L f_2\overline{\Phi}\,dx - b \underbrace{\int_0^L f_3\overline{\psi_{xx}}\,dx}_{:=i_8} + \rho_2\int_0^l f_4\overline{\Psi}\,dx\Big) \\
&+ \mathrm{Re}\Big(-k_0 \underbrace{\int_0^L f_5\overline{(w_x - l\varphi)_x}\,dx}_{:=i_9} + \rho_2\int_0^L f_6\overline{W}\,dx\Big).
\end{aligned}$$

Agora, integrando por partes os termos i_1, i_3, i_5, i_7, i_8, i_9 e usando as relações (2.17), (2.19) e (2.21) em i_2, i_4 e i_6 respectivamente, obtemos

$$\text{Re}\lambda\|U\|_H^2 + \gamma_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \gamma_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \gamma_3\|W\|_{L^2}^2 \leq \text{Re}(F,U)_H \leq \|F\|_H\|U\|_H.$$

Tomando na desigualdade anterior $\lambda = i\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, temos o resultado. ∎

Lema 2.6. *O conjunto resolvente do operador A contém o conjunto $i\mathbb{R} = \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\}$.*

Demonstração: Afirmamos que se $(\lambda I - A)U = (0,0,0,0,0,0)$ então $U = (0,0,0,0,0,0)$.

De fato, considerando $F = (0,0,0,0,0,0)$, segue do Lema 2.5, que $\Phi = \Psi = W = 0$. Agora, das equações (2.17), (2.19) e (2.21) concluímos que $\varphi = \psi = w = 0$, ou seja, $U = (0,0,0,0,0,0)$.

Deste modo, segue que o operador $(\lambda I - A)^{-1} : Im(A) \to D(A)$ existe. Uma vez que $0 \in \rho(A)$, segue que $Im(A) = H$. Concluindo que $(\lambda I - A)^{-1} : H \to D(A)$ existe. Como no Teorema 2.3, podemos mostrar que, para cada λ, o operador resolvente é limitado. E, assim temos a conclusão. ∎

Lema 2.7. *Se $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ é solução da equação resolvente então existe uma constante positiva c_1, tal que*

$$b\|\psi_x\|_{L^2}^2 \leq c_1\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H + c_1\|F\|_H\|U\|_H$$

para $\lambda \in i\mathbb{R}$ e $|\lambda| \geq 1$.

Demonstração: Multiplicando a equação (2.20) por $\overline{\psi}$ e integrando sobre o intervalo $[0,L]$, obtemos

$$\underbrace{b\int_0^L \psi_{xx}\overline{\psi}\,dx}_{:=i_1} = \lambda\rho_2\int_0^L \Psi\overline{\psi}\,dx + k\int_0^L(\varphi_x + \psi + lw)\overline{\psi}\,dx + \gamma_2\int_0^L \Psi\overline{\psi}\,dx - \rho_2\int_0^L f_4\overline{\psi}\,dx.$$

Integrando por partes do termo i_1 e usando (2.19), segue que

$$\begin{aligned} b\int_0^L |\psi_x|^2\,dx =& \rho_2\int_0^L \Psi\overline{(\Psi + f_3)}\,dx - \frac{k}{\lambda}\int_0^L(\varphi_x + \psi + lw)\overline{(\Psi + f_3)}\,dx \\ &- \frac{\gamma_2}{\lambda}\int_0^L \Psi\overline{(\Psi + f_3)}\,dx + \rho_2\int_0^L f_4\overline{\psi}\,dx. \end{aligned}$$

Das desigualdades triangular e de Cauchy-Schwarz, temos

$$b\|\psi_x\|_{L^2}^2 \leq \rho_2\|\Psi\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}\|f_3\|_{L^2} + \frac{k}{|\lambda|}\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2}$$
$$+ \frac{k}{|\lambda|}\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}\|f_3\|_{L^2} + \frac{\gamma_2}{|\lambda|}\|\Psi\|_{L^2}(\|\Psi\|_{L^2} + \|f_3\|_{L^2}) + \rho_2\|f_4\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}.$$

Segue da desigualdade de Poincaré que existem constantes positivas c_{p_1} e c_{p_2}, tais que, $\|f_3\|_{L^2} \leq c_{p_1}\|f_{3,x}\|_{L^2}$ e $\|\psi\|_{L^2} \leq c_{p_2}\|\psi_x\|_{L^2}$. Assim, a desigualdade anterior pode ser escrita como

$$b\|\psi_x\|_{L^2}^2\,dx \leq \rho_2\|\Psi\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + c_{p_1}\rho_2\|\Psi\|_{L^2}\|f_{3,x}\|_{L^2} + \frac{k}{|\lambda|}\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2}$$
$$+ c_{p_1}\frac{k}{|\lambda|}\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}\|f_{3,x}\|_{L^2} + \frac{\gamma_2}{|\lambda|}\|\Psi\|_{L^2}(\|\Psi\|_{L^2} + c_{p_1}\|f_{3,x}\|_{L^2}) + c_{p_2}\rho_2\|f_4\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2}.$$

Agora, usando o Lema 2.5 para estimar a norma de Ψ e da definição de norma em H, temos que

$$b\|\psi_x\|_{L^2}^2 \leq \frac{\sqrt{k}}{|\lambda|}\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H$$
$$+ \left(\frac{\rho_2}{\gamma_2} + c_{p_1}\frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}} + c_{p_1}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{b}|\lambda|} + \frac{1}{|\lambda|} + c_{p_1}\frac{\gamma_2}{\sqrt{\rho_2 b}|\lambda|} + c_{p_2}\frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}}\right)\|F\|_H\|U\|_H.$$

Deste modo, temos o Lema demonstrado com

$$c_1 = \text{máx}\left\{\sqrt{k},\ \frac{\rho_2}{\gamma_2} + c_{p_1}\frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}} + c_{p_1}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{b}} + 1 + c_{p_1}\frac{\gamma_2}{\sqrt{\rho_2 b}} + c_{p_2}\frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}}\right\}.$$

■

Lema 2.8. *Se $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ é solução da equação resolvente então existe uma constante positiva c_2, tal que*

$$k\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 \leq c_2\|\Phi\|_{L^2}\|U\|_H + c_2\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H + c_2\|W\|_{L^2}\|U\|_H + c_2\|F\|_H\|U\|_H$$

para $\lambda \in i\mathbb{R}$ e $|\lambda| \geq 1$.

Demonstração: Derivando em relação a variável x a equação (2.17) e somando com (2.19) e com o produto de l por (2.21), obtemos a seguinte igualdade

$$\Phi_x + \Psi + lW = \lambda(\varphi_x + \psi + lw) - (f_{1,x} + f_3 + lf_5). \tag{2.23}$$

Agora, multiplicando (2.18) por $\overline{\Phi}$ e integrando sobre o intervalo $[0, L]$, temos

$$\lambda\rho_1 \int_0^L |\Phi|^2\,dx - \underbrace{k\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)_x \overline{\Phi}\,dx}_{:=i_1} - k_0 l \int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{\Phi}\,dx$$
$$+ \gamma_1 \int_0^L |\Phi|^2\,dx = \int_0^L \rho_1 f_2 \overline{\Phi}\,dx.$$

Integrando por partes o termo i_1, obtemos

$$\lambda\rho_1 \int_0^L |\Phi|^2\,dx + k\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{(\Phi_x + \Psi + lW)}\,dx - k\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{\Psi}\,dx$$
$$- kl\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{W}\,dx - k_0 l \int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{\Phi}\,dx + \gamma_1 \int_0^L |\Phi|^2\,dx = \int_0^L \rho_1 f_2 \overline{\Phi}\,dx.$$

Agora, usando a igualdade (2.23), segue que

$$k\int_0^L |\varphi_x + \psi + lw|^2\,dx = \rho_1 \int_0^L |\Phi|^2\,dx + \frac{k}{\overline{\lambda}} \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{(f_{1,x} + f_3 + l f_5)}\,dx$$
$$+ \frac{k}{\overline{\lambda}} \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{\Psi}\,dx + \frac{k}{\overline{\lambda}} l \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{W}\,dx + \frac{k_0}{\overline{\lambda}} l \int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{\Phi}\,dx$$
$$- \frac{\gamma_1}{\overline{\lambda}} \int_0^L |\Phi|^2\,dx + \frac{\rho_1}{\overline{\lambda}} \int_0^L f_2 \overline{\Phi}\,dx.$$

Deste modo, das desigualdades triangular e de Cauchy-Schwarz, temos que

$$k\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 \le \rho_1 \|\Phi\|_{L^2}^2 + \frac{k}{|\lambda|}\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}\|f_{1,x} + f_3 + l f_5\|_{L^2}$$
$$+ \frac{k}{|\lambda|}\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + \frac{k}{|\lambda|} l\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}\|W\|_{L^2} + \frac{k_0}{|\lambda|} l\|w_x - l\varphi\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2}$$
$$+ \frac{\gamma_1}{|\lambda|}\|\Phi\|_{L^2} + \frac{\rho_1}{|\lambda|}\|f_2\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2}.$$

Assim, da definição de norma em H e do Lema 2.5 para estimar a norma de Φ, concluímos

$$k\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 \le \frac{\sqrt{k_0}}{|\lambda|} l\|\Phi\|_{L^2}\|U\|_H + \frac{\sqrt{k}}{|\lambda|}\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H$$
$$+ \frac{\sqrt{k}}{|\lambda|} l\|W\|_{L^2}\|U\|_H + \left(\frac{\rho_1}{\gamma_1} + \frac{3}{|\lambda|}\right)\|F\|_H\|U\|_H.$$

Portanto, o Lema fica demonstrado com $c_2 = \text{máx}\left\{\sqrt{k_0}l, \sqrt{k}, \sqrt{k}l, \dfrac{\rho_1}{\gamma_1} + 3\right\}$. $\blacksquare$

Lema 2.9. *Se $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ é solução da equação resolvente então existe uma constante positiva c_3, tal que*

$$k_0\|w_x + l\varphi\|_{L^2}^2 \leq c_3\|\Phi\|_{L^2}\|U\|_H + c_3\|W\|_{L^2}\|U\|_H + c_3\|F\|_H\|U\|_H$$

para $\lambda \in i\mathbb{R}$ e $|\lambda| \geq 1$.

Demonstração: Derivando a equação (2.21) em relação a variável x e somando com o produto de l por (2.17), obtemos

$$W_x - l\Phi = \lambda(w_x - l\varphi) - (f_{5,x} - lf_1). \tag{2.24}$$

Agora, multiplicando a equação (2.22) por $\overline{W}$ e integrando sobre o intervalo $[0, L]$, temos

$$\begin{aligned}\lambda\rho_1\int_0^L |W|^2\,dx \underbrace{- k_0\int_0^L (w_x - l\varphi)_x\overline{W}\,dx}_{:=i_1} &+ kl\int_0^L(\varphi_x + \psi + lw)\overline{W}\,dx \\ &+ \gamma_3\int_0^L |W|^2\,dx = \rho_1\int_0^L f_6\overline{W}\,dx.\end{aligned}$$

Integrando por parte o termo i_1, segue que

$$\begin{aligned}\lambda\rho_1\int_0^L |W|^2\,dx + k_0\int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{(W_x - l\Phi)}\,dx + k_0 l\int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{\Phi}\,dx \\ + kl\int_0^L(\varphi_x + \psi + lw)\overline{W}\,dx + \gamma_3\int_0^L |W|^2\,dx = \rho_1\int_0^L f_6\overline{W}\,dx.\end{aligned}$$

Agora, da relação (2.24), podemos escrever a igualdade anterior como

$$\begin{aligned}k_0\int_0^L |w_x - l\varphi|^2\,dx = \rho_1\int_0^L |W|^2\,dx + \frac{k_0}{\lambda}\int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{(f_{5,x} - lf_1)}\,dx \\ -\frac{k_0}{\lambda}l\int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{\Phi}\,dx - \frac{k}{\lambda}l\int_0^L(\varphi_x + \psi + lw)\overline{W}\,dx - \frac{\gamma_3}{\lambda}\int_0^L |W|^2\,dx + \frac{\rho_1}{\lambda}\int_0^L f_6\overline{W}\,dx.\end{aligned}$$

Decorre das desigualdades triangular e de Cauchy-Schwarz, que

$$\begin{aligned}k_0\|w_x + l\varphi\|_{L^2}^2 \leq \rho_1\|W\|_{L^2}^2 + \frac{k_0}{|\lambda|}\|w_x - l\varphi\|_{L^2}\|f_{5,x} - lf_1\|_{L^2} + \frac{k_0}{|\lambda|}l\|w_x - l\varphi\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2} \\ + \frac{k}{|\lambda|}l\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}\|W\|_{L^2} + \frac{\gamma_3}{|\lambda|}\|W\|_{L^2}^2 + \frac{\rho_1}{|\lambda|}\|f_6\|_{L^2}\|W\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Assim, da definição de norma em H e do Lema 2.5 para estimar a norma de W, temos que

$$k_0\|w_x + l\varphi\|_{L^2}^2 \leq \frac{\sqrt{k_0}}{|\lambda|}l\|\Phi\|_{L^2}\|U\|_H + \frac{\sqrt{k}}{|\lambda|}l\|W\|_{L^2}\|U\|_H + \left(\frac{\rho_1}{\gamma_1} + \frac{3}{|\lambda|}\right)\|F\|_H\|U\|_H.$$

Portanto, o Lema fica demonstrado com $c_3 = \text{máx}\left\{\sqrt{k_0}l, \sqrt{k}l, \frac{\rho_1}{\gamma_1} + 3\right\}$. ■

O principal resultado deste capítulo será estabelecido pelo seguinte teorema:

Teorema 2.10. *O semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ associado ao problema determinado pelo sistema (2.1)-(2.3) com condições iniciais (2.4) e condições de contorno (2.5) é exponencialmente estável, ou seja, existem constantes positivas c e ϵ, tais que*

$$\|S(t)U_0\|_H \leq ce^{-\epsilon t}\|U_0\|_H.$$

Demonstração: Dos Lemas anteriores, temos que

$$\begin{aligned} \|U\|_H^2 \leq{}& \frac{\rho_1}{\gamma_1}\|F\|_H\|U\|_H + \frac{\rho_2}{\gamma_2}\|F\|_H\|U\|_H + \frac{\rho_1}{\gamma_3}\|F\|_H\|U\|_H \\ & (c_2 + c_3)\|\Phi\|_{L^2}\|U\|_H + (c_1 + c_2)\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H \\ & + (c_2 + c_3)\|W\|_{L^2}\|U\|_H + (c_1 + c_2 + c_3)\|F\|_H\|U\|_H \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|U\|_H^2 \leq c_4\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H + c_4\|\Phi\|_{L^2}\|U\|_H + c_4\|W\|_{L^2}\|U\|_H + c_4\|F\|_H\|U\|_H$$

onde

$$c_4 = \frac{\rho_1}{\gamma_1} + \frac{\rho_2}{\gamma_2} + \frac{\rho_1}{\gamma_3} + c_1 + c_2 + c_3.$$

Dividindo a desigualdade anterior por $\|U\|_H$ e do Lema 2.5

$$\|U\|_H \leq \frac{c_4}{\sqrt{\gamma_1}}\|F\|_H^{1/2}\|U\|_H^{1/2} + \frac{c_4}{\sqrt{\gamma_2}}\|F\|_H^{1/2}\|U\|_H^{1/2} + \frac{c_4}{\sqrt{\gamma_3}}\|F\|_H^{1/2}\|U\|_H^{1/2} + c_4\|F\|_H.$$

Decorre da desigualdade de Young que

$$\|U\|_H \leq \frac{1}{2}\|U\|_H + \left(\frac{3c_4^2}{2\gamma_2} + \frac{3c_4^2}{2\gamma_1} + \frac{3c_4^2}{2\gamma_3} + c_4\right)\|F\|_H$$

ou seja,

$$\|U\|_H \leq c_5\|F\|_H, \text{ onde } c_5 = 2\left(\frac{3c_4^2}{2\gamma_2} + \frac{3c_4^2}{2\gamma_1} + \frac{3c_4^2}{2\gamma_3} + c_4\right).$$

Agora, lembrando que $(\lambda I - A)U = F$, com $\lambda \in \rho(A)$, segue que $U = (\lambda I - A)^{-1}F$ e então

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{H})} = \sup_{F \in H}\left\{\frac{\|(\lambda I - A)^{-1}F\|_H}{\|F\|_H} \,:\, \|F\|_H \neq 0\right\} \leq c_5$$

E assim, pelo Teorema 1.21 temos a conclusão. ∎

CAPÍTULO 3
SISTEMA DE BRESSE COM DUAS DISSIPAÇÕES FRICCIONAIS

Neste capítulo, estudamos o sistema de Bresse com dissipação friccional presente em duas equações. Mais especificamente, vamos considerar as dissipações atuando na oscilação vertical e no ângulo de rotação da seção transversal. O problema de valor inicial e de contorno é dado pelas seguintes equações

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) = F_1 \text{ em } (0,\infty)\times(0,L), \tag{3.1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) = F_2 \text{ em } (0,\infty)\times(0,L), \tag{3.2}$$

$$\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = 0 \text{ em } (0,\infty)\times(0,L), \tag{3.3}$$

onde $F_1 = -\gamma_1\varphi_t$ e $F_2 = -\gamma_2\psi_t$, com condições inicias

$$\varphi(0,\cdot) = \varphi_0,\ \varphi_t(0,\cdot) = \varphi_1,\ \psi(0,\cdot) = \psi_0,\ \psi_t(0,\cdot) = \psi_1,\ w(0,\cdot) = w_0,\ w_t(0,\cdot) = w_1, \tag{3.4}$$

e condições de contorno Dirichlet-Neumann-Neumann

$$\varphi(t,0) = \varphi(t,L) = \psi_x(t,0) = \psi_x(t,L) = w_x(t,0) = w_x(t,L) = 0 \text{ em } (0,\infty). \tag{3.5}$$

Todas as constantes do sistema são positivas.

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na seção 3.1 mostramos como no Capítulo 2 a existência e unicidade de solução do sistema de Bresse com duas dissipações.

Na seção 3.2, mostramos que a relação $k = k_0$ é uma condição necessária para que o semigrupo associado a este sistema seja exponencialmente estável. Na seção 3.3 demonstramos a falta de estabilidade exponencial para o problema no caso onde $k \neq k_0$. Considerando este mesmo caso, provamos na seção 3.4 o decaimento polinomial e que a taxa obtida para este decaimento é ótima.

A solução do sistema (3.1)-(3.3) pode ser gerada por meio de um semigrupo de contrações. De fato, este semigrupo é definido no espaço

$$H = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H_*^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H^1(0,L) \times L^2(0,L).$$

O espaço H é de Hilbert com produto interno dado em (2.7) que induz a norma (2.8).

Se $U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t)^T$, então o sistema (3.1)-(3.3) pode ser escrito como

$$U_t = AU, \; U(0) = U_0,$$

onde $U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1)^T$ e A é o operador linear dado por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1}\partial_x^2 - \frac{k_0 l^2}{\rho_1} I & -\frac{\gamma_1}{\rho_1} I & \frac{k}{\rho_1}\partial_x & 0 & \frac{(k+k_0)l}{\rho_1}\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ -\frac{k}{\rho_2}\partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{k}{\rho_2} I & -\frac{\gamma_2}{\rho_2} I & -\frac{kl}{\rho_2} I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{(k_0+k)l}{\rho_1}\partial_x & 0 & -\frac{kl}{\rho_1} I & 0 & \frac{k_0}{\rho_1}\partial_x^2 - \frac{kl^2}{\rho_1} I & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

com domínio

$$\begin{aligned} D(A) = \{U \in H \mid \varphi \in H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L), \;\; \psi \in H^2(0,L) \cap H_*^1(0,L), \;\; w \in H^2(0,L) \\ \psi_x, w_x \in H_0^1(0,L), \;\; \Phi \in H_0^1(0,L), \;\; \Psi \in H_*^1(0,L), \;\; W \in H^1(0,L)\}. \end{aligned}$$

Teorema 3.1. *O operador A dado em (3.6) é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações sobre o espaço de Hilbert H, denotado por $T(t)$.*

Demonstração: Note que, usando o mesmo raciocínio do Teorema 2.3 com $F_3 = 0$, temos que

$$Re\,(AU, U)_H = -\gamma_1 \|\Phi\|_{L^2}^2 - \gamma_2 \|\Psi\|_{L^2}^2 \leq 0$$

ou seja, o operador A é dissipativo.

E, ainda $0 \in \rho(A)$. E assim, pelo Corolário 1.17, temos que operador A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações. ∎

Portanto, temos o seguinte resultado de regularidade.

Teorema 3.2. *Suponhamos que os dados iniciais* $(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1) \in D(A)$, *então existe uma única solução* $(\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t)$ *para o sistema* (3.1)-(3.3) *satisfazendo*

$$(\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t) \in C([0, \infty); D(A)) \cap C^1([0, \infty); H)$$

Demonstração: Segue do Teorema 1.12. ∎

3.2 Decaimento Exponencial

O objetivo desta seção é mostrar que a condição $k = k_0$ é necessária para que o semigrupo associado ao sistema (3.1)-(3.3) seja exponencialmente estável.

Para o sistema de Bresse com duas dissipações friccionais, a equação resolvente em termos das suas componentes é dada por

$$\lambda\varphi - \Phi = f_1, \tag{3.7}$$

$$\lambda\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + \gamma_1\Phi = \rho_1 f_2, \tag{3.8}$$

$$\lambda\psi - \Psi = f_3, \tag{3.9}$$

$$\lambda\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma_2\Psi = \rho_2 f_4, \tag{3.10}$$

$$\lambda w - W = f_5, \tag{3.11}$$

$$\lambda\rho_1 W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = \rho_1 f_6. \tag{3.12}$$

Assim, para mostrar a estabilidade, precisamos dos seguintes resultados.

Lema 3.3. *Se* $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ *é a solução da equação resolvente então*

$$\gamma_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \gamma_2\|\Psi\|_{L^2}^2 \leq Re(F, U)_H.$$

Demonstração: Basta tomar $F_3 = 0$ no Lema 2.5. ∎

Lema 3.4. *O conjunto resolvente do operador* A *contém o conjunto* $i\mathbb{R} = \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\}$.

Demonstração: É suficiente mostrar que o núcleo do operador $\lambda I - A$ possui somente o vetor nulo, ou seja, se $(\lambda I - A)U = 0$ então $U = (0,0,0,0,0,0)$. Deste modo, considerando $F = (0,0,0,0,0,0)$, segue do Lema 3.3 que $\Phi = \Psi = 0$ e das equações (3.7), (3.9) e (3.10) concluímos que $\varphi = \psi = w = 0$. Agora, de (3.11) segue que $W = 0$. Portanto $U = (0,0,0,0,0,0)$, ou seja, o operador $(\lambda I - A)^{-1} : Im(A) \to D(A)$ existe. Uma vez que $0 \in \rho(A)$, segue que $Im(A) = H$. Assim $(\lambda I - A)^{-1} : H \to D(A)$ existe. Como no Teorema 2.3, podemos mostrar que, para cada λ, o operador resolvente é limitado. E, deste modo temos a conclusão. ∎

Lema 3.5. *Se $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ é a solução da equação resolvente então existe uma constante positiva c_2, tal que*

$$k\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 \leq c_2 b\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \frac{k_0^2}{k}\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + c_2\|\Phi\|_{L^2}\|U\|_H$$
$$+ c_2\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H + c_2\|F\|_H\|U\|_H$$

para $\lambda \in i\mathbb{R}$ e $|\lambda| \geq 1$.

Demonstração: Derivando em relação a variável x a equação (3.7) e somando com (3.9) e com o produto de (3.11) por l, temos a seguinte igualdade

$$\lambda(\varphi_x + \psi + lw) = (\Phi_x + \Psi + lW) + (f_{1,x} + f_3 + lf_5).$$

Agora, multiplicando a relação anterior por $k\overline{(\varphi_x + \psi + lw)}$ e integrando sobre o intervalo $[0, L]$, obtemos

$$k\lambda \int_0^L |\varphi_x + \psi + lw|^2\, dx = \underbrace{k\int_0^L \Phi_x\overline{(\varphi_x + \psi + lw)}\, dx}_{:=i_1} + k\int_0^L \Psi\overline{(\varphi_x + \psi + lw)}\, dx$$
$$+ kl\int_0^L W\overline{(\varphi_x + \psi + lw)}\, dx + k\int_0^L (f_{1,x} + f_3 + lf_5)\overline{(\varphi_x + \psi + lw)}\, dx. \qquad (3.13)$$

Note que, integrando por partes o termo i_1 e usando a relação (3.8), temos

$$k\int_0^L \Phi\overline{(\varphi_x + \psi + lw)_x}\, dx = -(\rho_1\overline{\lambda} + \gamma_1)\int_0^L |\Phi|^2\, dx + \int_0^L \Phi\overline{(k_0 l(w_x - l\varphi) + \rho_1 f_2)}\, dx.$$

Assim, desta igualdade podemos escrever (3.13) como

$$k\lambda\int_0^L|\varphi_x+\psi+lw|^2\,dx=-\rho_1\overline{\lambda}\int_0^L|\Phi|^2\,dx+\gamma_1\int_0^L|\Phi|^2\,dx+k_0l\int_0^L\Phi\overline{(w_x-l\varphi)}\,dx$$
$$+\rho_1\int_0^L\Phi\overline{f_2}\,dx+k\int_0^L\Psi\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx+kl\int_0^L W\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx$$
$$+k\int_0^L(f_{1,x}+f_3+lf_5)\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx.$$

Decorre das desigualdades triangular e de Cauchy-Schwarz, que

$$k\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2\leq\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2+\frac{\gamma_1}{|\lambda|}\|\Phi\|_{L^2}+\frac{k_0}{|\lambda|}l\|w_x-l\varphi\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2}$$
$$+\frac{\rho_1}{|\lambda|}\|\Phi\|_{L^2}\|f_2\|_{L^2}+\frac{k}{|\lambda|}\|\Psi\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}+\underbrace{\left|\frac{k}{\lambda}l\int_0^L W\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx\right|}_{:=i_2}$$
$$+\frac{k}{|\lambda|}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}\|f_{1,x}+f_3+lf_5\|_{L^2}.\tag{3.14}$$

Vamos estimar o termo i_2. Para isto, vamos multiplicar a equação (3.10) por $\overline{W}$ e integrar sobre o intervalo $[0,L]$, obtendo assim

$$k\int_0^L(\varphi_x+\psi+lw)\overline{W}\,dx=-\rho_2\lambda\int_0^L\Psi\overline{W}\,dx+b\underbrace{\int_0^L\psi_{xx}\overline{W}\,dx}_{:=i_3}$$
$$-\gamma_2\int_0^L\Psi\overline{W}\,dx+\rho_2\int_0^L f_4\overline{W}\,dx.$$

Integrando por partes o termo i_3, temos

$$k\int_0^L(\varphi_x+\psi+lw)\overline{W}\,dx=-\rho_2\lambda\int_0^L\Psi\overline{W}\,dx-b\int_0^L\psi_x\overline{(W_x-l\Phi)}\,dx$$
$$-bl\int_0^L\psi_x\overline{\Phi}\,dx-\gamma_2\int_0^L\Psi\overline{W}\,dx+\rho_2\int_0^L f_4\overline{W}\,dx.\tag{3.15}$$

Por outro lado, derivando em relação a variável x a equação (3.11) e somando com o produto de (3.7) por l, resulta que

$$W_x-l\Phi=\lambda(w_x-l\varphi)-(f_{5,x}-lf_1).$$

De igualdade anterior podemos reescrever (3.15) como

$$k\int_0^L (\varphi_x+\psi+lw)\overline{W}\,dx = -\rho_2\lambda\int_0^L \Psi\overline{W}\,dx - b\overline{\lambda}\int_0^L \psi_x\overline{(w_x-l\varphi)}\,dx$$
$$+\,b\int_0^L \psi_x\overline{(f_{5,x}-lf_1)}\,dx - bl\int_0^L \psi_x\overline{\Phi}\,dx - \gamma_2\int_0^L \Psi\overline{W}\,dx + \rho_2\int_0^L f_4\overline{W}\,dx.$$

Decorre das desigualdades triangular e de Cauchy-Schwarz, que

$$\left|\frac{k}{\overline{\lambda}}l\int_0^L (\varphi_x+\psi+lw)\overline{W}\,dx\right| \le \rho_2 l\|\Psi\|_{L^2}\|W\|_{L^2} + bl\|\psi_x\|_{L^2}\|w_x-l\varphi\|_{L^2}$$
$$+\,\frac{b}{|\lambda|}l\|\psi_x\|_{L^2}\|f_{5,x}-lf_1\|_{L^2} + \frac{b}{|\lambda|}l^2\|\psi_x\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2} + \frac{\gamma_2}{|\lambda|}l\|\Psi\|_{L^2}\|W\|_{L^2} + \frac{\rho_2}{|\lambda|}l\|f_4\|_{L^2}\|W\|_{L^2}.$$

Combinando a desigualdade anterior com (3.13), obtemos

$$k\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 \le \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma_1}{|\lambda|}\|\Phi\|_{L^2}^2 + \frac{k_0}{|\lambda|}l\|w_x-l\varphi\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2}$$
$$+\,\frac{\rho_1}{|\lambda|}\|f_2\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2} + \frac{k}{|\lambda|}\|\Psi\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2} + \rho_2 l\|\Psi\|_{L^2}\|W\|_{L^2} + \underbrace{bl\|\psi_x\|_{L^2}\|w_x-l\varphi\|_{L^2}}_{:=i_4}$$
$$+\,\frac{b}{|\lambda|}l\|\psi_x\|_{L^2}\|f_{5,x}-lf_1\|_{L^2} + \frac{b}{|\lambda|}l^2\|\psi_x\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2} + \frac{\gamma_2}{|\lambda|}l\|\Psi\|_{L^2}\|W\|_{L^2}$$
$$+\,\frac{\rho_2}{|\lambda|}l\|f_4\|_{L^2}\|W\|_{L^2} + \frac{k}{|\lambda|}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}\|f_{1,x}+f_3+lf_5\|_{L^2}.$$

Como $|\lambda|\ge 1$, aplicando a desigualdade de Young em i_4, usando a definição de norma em H e Lema 3.3 para estimar a norma de Φ, temos

$$k\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 \le a_1\|\Phi\|_{L^2}\|U\|_H + a_2\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H + a_3\|F\|_H\|U\|_H$$
$$+\,\frac{(bl)^2}{4k_0^2}k\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \frac{k_0^2}{k}\|w_x-l\varphi\|_{L^2}^2$$

onde

$$a_1 = \sqrt{k_0}l + \sqrt{b}l^2,$$
$$a_2 = \sqrt{k} + \frac{\rho_2}{\sqrt{\rho_1}}l + \frac{\gamma_2}{\sqrt{\rho_1}}l$$

e

$$a_3 = \frac{\rho_1}{\gamma_1} + 3 + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{k_0}}l + \frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1}}l.$$

Deste modo, o Lema fica provado com $c_2 = \text{máx}\left\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dfrac{bl^2}{4k_0^2}k\right\}$. ∎

Lema 3.6. *Se $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ é a solução da equação resolvente então existe uma constante positiva c_3, tal que*

$$\rho_1\|W\|_{L^2}^2 \leq c_3|\lambda|\left|\frac{k}{k_0} - 1\right| \|\Phi\|_{L^2}\|w_x - l\varphi\|_{L^2} + c_3 b\|\psi_x\|_{L^2}^2 + c_3\|\Phi\|_{L^2}\|U\|_H$$
$$+ c_3\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H + c_3\|F\|_H\|U\|_H$$

para $\lambda \in i\mathbb{R}$ e $|\lambda| \geq 1$.

Demonstração: Multiplicando a equação (3.8) por $\overline{w_x - l\varphi}$ e integrando sobre o intervalo $[0, L]$, temos

$$k_0 l \int_0^L |w_x - l\varphi|^2\,dx = \lambda\rho_1 \int_0^L \Phi(\overline{w_x + l\varphi})\,dx - k \underbrace{\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)_x(\overline{w_x - l\varphi})\,dx}_{:=i_1}$$
$$+ \gamma_1 \int_0^L \Phi(\overline{w_x - l\varphi})\,dx - \rho_1 \int_0^L f_2(\overline{w_x - l\varphi})\,dx.$$

Integrando por partes o termo i_1 e usando (3.12), obtemos

$$k_0 l \int_0^L |w_x - l\varphi|^2\,dx = \lambda\rho_1 \int_0^L \Phi\overline{(w_x - l\varphi)}\,dx + \frac{k}{k_0}\overline{\lambda}\rho_1 \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{W}\,dx$$
$$+ \frac{k^2}{k_0} l \int_0^L |\varphi_x + \psi + lw|^2\,dx - \frac{k}{k_0}\rho_1 \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{f_6}\,dx$$
$$+ \gamma_1 \int_0^L \Phi\overline{(w_x - l\varphi)}\,dx - \rho_1 \int_0^L f_2\overline{(w_x - l\varphi)}\,dx. \tag{3.16}$$

Agora, das equações (3.7), (3.9) e (3.11), podemos escrever

$$\lambda\rho_1 \int_0^L \Phi\overline{(w_x - l\varphi)}\,dx = -\rho_1 \int_0^L \Phi\overline{(W_x + f_{5,x} - l\Phi - lf_1)}\,dx \text{ e}$$
$$\frac{k}{k_0}\overline{\lambda}\rho_1 \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{W}\,dx = -\frac{k}{k_0}\rho_1 \int_0^L (\Phi_x + f_{1,x} + \Psi + f_3 + lW + lf_5)\overline{W}\,dx.$$

Substituindo essas duas igualdades em (3.16), obtemos

$$k_0 l \int_0^L |w_x - l\varphi|^2\,dx = -\rho_1 \int_0^L \Phi\overline{W_x}\,dx + \rho_1 l \int_0^L |\Phi|^2\,dx - \rho_1 \int_0^L \Phi\overline{(f_{5,x} - lf_1)}\,dx$$
$$\underbrace{- \frac{k}{k_0}\rho_1 \int_0^L \Phi_x\overline{W}\,dx}_{:=i_2} - \frac{k}{k_0}\rho_1 \int_0^L \Psi\overline{W}\,dx - \frac{k}{k_0}\rho_1 l \int_0^L |W|^2\,dx$$
$$- \frac{k}{k_0}\rho_1 \int_0^L (f_{1,x} + f_3 + lf_5)\overline{W}\,dx + \frac{k^2}{k_0} l \int_0^L |\varphi_x + \psi + lw|^2\,dx$$
$$- \frac{k}{k_0}\rho_1 \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{f_6}\,dx + \gamma_1 \int_0^L \Phi\overline{(w_x - l\varphi)}\,dx - \rho_1 \int_0^L f_2\overline{(w_x - l\varphi)}\,dx.$$

Integrando por partes o termo i_2, temos que

$$
\begin{aligned}
k_0 l \int_0^L |w_x - l\varphi|^2 + \frac{k}{k_0}\rho_1 l \int_0^L |W|^2\,dx &= \underbrace{\left(\frac{k}{k_0}-1\right)\rho_1 \int_0^L \Phi\overline{W_x}\,dx}_{:=i_3} + \rho_1 l \int_0^L |\Phi|^2\,dx \\
&- \rho_1 \int_0^L \Phi\overline{(f_{5,x} - lf_1)}\,dx - \frac{k}{k_0}\rho_1 \int_0^L \Psi\overline{W}\,dx - \frac{k}{k_0}\rho_1 \int_0^L (f_{1,x} + f_3 + lf_5)\overline{W}\,dx \\
&+ \frac{k^2}{k_0} l \int_0^L |\varphi_x + \psi + lw|^2\,dx - \frac{k}{k_0}\rho_1 \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{f_6}\,dx + \gamma_1 \int_0^L \Phi\overline{(w_x - l\varphi)}\,dx \\
&- \rho_1 \int_0^L f_2\overline{(w_x - l\varphi)}\,dx.
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

Vamos estimar o termo i_3. Derivando em relação a variável x a equação (3.11) e somando com o produto de (3.7) por l, segue a seguinte igualdade

$$
W_x - l\Phi = \lambda(w_x - l\varphi) - (f_{5,x} - lf_1). \tag{3.18}
$$

Note que, podemos escrever

$$
\int_0^L \Phi\overline{W_x}\,dx = \int_0^L \Phi\overline{(W_x - l\Phi)}\,dx + l\int_0^L |\Phi|^2\,dx.
$$

Assim, da igualdade anterior e de (3.18), temos que

$$
\int_0^L \Phi\overline{W_x}\,dx = \overline{\lambda}\int_0^L \Phi\overline{(w_x - l\varphi)}\,dx - \int_0^L \Phi\overline{(f_{5,x} - lf_1)}\,dx + l\int_0^L |\Phi|^2\,dx. \tag{3.19}
$$

Agora, substituindo (3.19) em (3.17), obtemos

$$
\begin{aligned}
k_0 l \int_0^L |w_x - l\varphi|^2 + \frac{k}{k_0}\rho_1 l \int_0^L |W|^2\,dx &= \overline{\lambda}\left(\frac{k}{k_0}-1\right)\rho_1 \int_0^L \Phi\overline{(w_x - l\varphi)}\,dx + \frac{k}{k_0}\rho_1 l \int_0^L |\Phi|^2\,dx \\
&- \frac{k}{k_0}\rho_1 \int_0^L \Phi\overline{(f_{5,x} - lf_1)}\,dx - \frac{k}{k_0}\rho_1 \int_0^L \Psi\overline{W}\,dx - \frac{k}{k_0}\rho_1 \int_0^L (f_{1,x} + f_3 + lf_5)\overline{W}\,dx \\
&+ \frac{k^2}{k_0} l \int_0^L |\varphi_x + \psi + lw|^2\,dx - \frac{k}{k_0}\rho_1 \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{f_6}\,dx + \gamma_1 \int_0^L \Phi\overline{(w_x - l\varphi)}\,dx \\
&- \rho_1 \int_0^L f_2\overline{(w_x - l\varphi)}\,dx.
\end{aligned}
$$

Agora, das desigualdades triangular e de Cauchy-Schwarz, segue que

$$
\begin{aligned}
k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + \frac{k}{k_0}\rho_1\|W\|_{L^2}^2 &\leq \frac{\rho_1}{l}|\lambda|\left|\frac{k}{k_0} - 1\right| \|\Phi\|_{L^2}\|w_x - l\varphi\|_{L^2} + \frac{k}{k_0}\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 \\
+ \frac{k}{k_0 l}\rho_1\|\Phi\|_{L^2}\|f_{5,x} - lf_1\|_{L^2} &+ \frac{k}{k_0 l}\rho_1\|\Psi\|_{L^2}\|W\|_{L^2}^2 + \frac{k}{k_0 l}\rho_1\|f_{1,x} + f_3 + lf_5\|_{L^2}\|W\|_{L^2} \\
+ \frac{k^2}{k_0}\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 &+ \frac{k}{k_0 l}\rho_1\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}\|f_6\|_{L^2} + \frac{\gamma_1}{l}\|\Phi\|_{L^2}\|w_x - l\varphi\|_{L^2} \\
&+ \frac{\rho_1}{l}\|f_2\|_{L^2}\|w_x - l\varphi\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Assim, usando os Lemas 3.5 e 3.3 para eliminar o termo $k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2$ e estimar a norma de Φ respectivamente e da definição de norma em H, obtemos

$$
\begin{aligned}
\rho_1\|W\|_{L^2}^2 \leq &\frac{k_0}{kl}\rho_1|\lambda|\left|\frac{k}{k_0} - 1\right| \|\Phi\|_{L^2}\|w_x - l\varphi\|_{L^2} + c_2 b\|\psi_x\|_{L^2}^2 \\
&+ \left(\frac{\sqrt{k_0}}{kl}\gamma_1 + c_2\right)\|\Phi\|_{L^2}\|U\|_H + \left(\frac{\sqrt{\rho_1}}{l} + c_2\right)\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H \\
&+ \left(\frac{\rho_1}{\gamma_1} + \frac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{k_0}l} + 2\frac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{k}l} + \frac{\sqrt{k_0\rho_1}}{kl} + c_2\right)\|F\|_H\|U\|_H.
\end{aligned}
$$

Portanto, o Lema fica demonstrado com

$$
c_3 = \max\left\{\frac{k_0}{kl}\rho_1, \frac{\sqrt{k_0}}{kl}\gamma_1 + c_2, \frac{\sqrt{\rho_1}}{l} + c_2, \frac{\rho_1}{\gamma_1} + \frac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{k_0}l} + 2\frac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{k}l} + \frac{\sqrt{k_0\rho_1}}{kl} + c_2\right\}.
$$

■

Lema 3.7. *Se $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ é a solução da equação resolvente então existe uma constante positiva c_4, tal que*

$$
k\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 \leq b\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \rho_1\|W\|_{L^2}^2 + c_4\|F\|_H\|U\|_H
$$

para $\lambda \in i\mathbb{R}$ e $|\lambda| \geq 1$.

Demonstração: Multiplicando (3.8), (3.10) e (3.12) por $\overline{\Phi}$, $\overline{\Psi}$ e $\overline{W}$ respectivamente, integrando sobre o intervalo $[0, L]$ e adicionando os produtos, obtemos

$$
\rho_1\lambda\int_0^L |\Phi|^2\,dx + \rho_2\lambda\int_0^L |\Psi|^2\,dx + \rho_1\lambda\int_0^L |W|^2\,dx - k\underbrace{\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)_x\overline{\Phi}\,dx}_{:=i_1}
$$

$$- k_0 l \int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{\Phi}\, dx + \gamma_1 \int_0^L |\Phi|^2\, dx - \rho_1 \int_0^L f_2\overline{\Phi}\, dx - b \underbrace{\int_0^L \psi_{xx}\overline{\Psi}\, dx}_{:=i_2}$$

$$+ k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{\Psi}\, dx + \gamma_2 \int_0^L |\Psi|^2\, dx - \rho_2 \int_0^L f_4\overline{\Psi}\, dx - k_0 \underbrace{\int_0^L (w_x - l\varphi)_x\overline{W}\, dx}_{:=i_3}$$

$$+ kl \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{W}\, dx - \rho_1 \int_0^L f_6\overline{W}\, dx = 0.$$

Integrando por partes i_1, i_2, i_3 e usando as relações (3.7), (3.9), (3.11), temos

$$\rho_1\lambda \int_0^L |\Phi|^2\, dx + \rho_2\lambda \int_0^L |\Psi|^2\, dx + \rho_1\lambda \int_0^L |W|^2\, dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{(\lambda\varphi_x - f_{1,x})}\, dx$$

$$- k_0 l \int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{(\lambda\varphi - f_1)}\, dx + \gamma_1 \int_0^L |\Phi|^2\, dx - \rho_1 \int_0^L f_2\overline{\Phi}\, dx$$

$$+ b \int_0^L \psi_x\overline{(\lambda\psi_x - f_{3,x})}\, dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{(\lambda\psi - f_3)}\, dx$$

$$+ \gamma_2 \int_0^L |\Psi|^2\, dx - \rho_2 \int_0^L f_4\overline{\Psi}\, dx + k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{(\lambda w_x - f_{5,x})}\, dx$$

$$+ kl \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{(\lambda w - f_5)}\, dx - \rho_1 \int_0^L f_6\overline{W}\, dx = 0$$

ou seja,

$$\rho_1\lambda \int_0^L |\Phi|^2\, dx + \rho_2\lambda \int_0^L |\Psi|^2\, dx + \rho_1\lambda \int_0^L |W|^2\, dx + k\overline{\lambda} \int_0^L |\varphi_x + \psi + lw|^2\, dx$$

$$+ k_0\overline{\lambda} \int_0^L |w_x - l\varphi|\, dx + b\overline{\lambda} \int_0^L |\psi_x|^2\, dx - k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{(f_{1,x} + f_3 + lf_5)}\, dx$$

$$- k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{(f_{5,x} - lf_1)}\, dx - b \int_0^L \psi_x\overline{f_{3,x}}\, dx + \gamma_1 \int_0^L |\Phi|^2\, dx$$

$$+ \gamma_2 \int_0^L |\Psi|^2\, dx - \rho_1 \int_0^L f_2\overline{\Phi}\, dx - \rho_2 \int_0^L f_4\overline{\Psi}\, dx - \rho_1 \int_0^L f_6\overline{W}\, dx = 0.$$

Dividindo a igualdade anterior por $\overline{\lambda}$ e usando as desigualdades triangular e de Cauchy Schwarz, temos

$$k\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 \leq \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_1\|W\|_{L^2}^2$$

$$+ b\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \frac{k}{|\lambda|}\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}\|f_{1,x} + f_3 + lf_5\|_{L^2} + \frac{k_0}{|\lambda|}\|w_x - l\varphi\|_{L^2}\|f_{5,x} - lf_1\|_{L^2}$$

$$+ \frac{b}{|\lambda|}\|\psi_x\|_{L^2}\|f_{3,x}\|_{L^2} + \frac{\gamma_1}{|\lambda|}\|\Phi\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma_2}{|\lambda|}\|\Psi\|_{L^2}^2$$

$$+ \frac{\rho_1}{|\lambda|}\|f_2\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2} + \frac{\rho_2}{|\lambda|}\|f_4\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + \frac{\rho_1}{|\lambda|}\|f_6\|_{L^2}\|W\|_{L^2}.$$

Usando o Lema o 3.3 para estimar a norma de Φ e Ψ e da definição de norma em H, segue que

$$k\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 \leq b\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \rho_1\|W\|_{L^2}^2 + \left(\frac{\rho_1}{\gamma_1} + \frac{\rho_2}{\gamma_2} + \frac{8}{|\lambda|}\right)\|F\|_H\|U\|_H.$$

Assim, para $|\lambda| \geq 1$, o Lema fica demonstrado com

$$c_4 = \frac{\rho_1}{\gamma_1} + \frac{\rho_2}{\gamma_2} + 8.$$

■

O principal resultado deste capítulo será estabelecido pelo seguinte teorema.

Teorema 3.8. *Se $k = k_0$ então o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ gerado pelo operador A é exponencialmente estável, ou seja, existem constantes positivas c e ϵ, tais que*

$$\|S(t)U_0\|_H \leq ce^{-\epsilon t}\|U_0\|_H.$$

Demonstração: Dos Lemas 3.7, 3.3 e 3.6, segue que

$$\|U\|_H^2 \leq b(2+2c_3)\|\psi_x\|_{L^2}^2 + 2c_3\|\Phi\|_{L^2}\|U\|_H + 2c_3\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H + \left(\frac{\rho_1}{\gamma_1} + \frac{\rho_2}{\gamma_2} + 2c_3 + c_4\right)\|F\|_H\|U\|_H + 2c_3|\lambda|\left|\frac{k}{k_0} - 1\right|\|\Phi\|_{L^2}\|w_x - l\varphi\|_{L^2}.$$

Agora, decorre do Lema 2.7, que

$$\|U\|_H^2 \leq 2c_3\|\Phi\|_{L^2}\|U\|_H + ([2+2c_3]c_1 + 2c_3)\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H + \left(\frac{\rho_1}{\gamma_1} + \frac{\rho_2}{\gamma_2} + [2+2c_3]c_1 + 2c_3 + c_4\right)\|F\|_H\|U\|_H + 2c_3|\lambda|\left|\frac{k}{k_0} - 1\right|\|\Phi\|_{L^2}\|w_x - l\varphi\|_{L^2}.$$

Por hipótese, $k = k_0$, assim temos da desigualdade anterior

$$\|U\|_H^2 \leq a_1\|\Phi\|_{L^2}\|U\|_H + a_1\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H + a_1\|F\|_H\|U\|_H$$

onde $a_1 = \dfrac{\rho_1}{\gamma_1} + \dfrac{\rho_2}{\gamma_2} + [2+2c_3]c_1 + 2c_3 + c_4$.

Dividindo a desigualdade anterior por $\|U\|_H$ e do Lema 3.3

$$\|U\|_H \leq \frac{a_1}{\sqrt{\gamma_1}}\|F\|_H^{1/2}\|U\|_H^{1/2} + \frac{a_1}{\sqrt{\gamma_2}}\|F\|_H^{1/2}\|U\|_H^{1/2} + a_1\|F\|_H.$$

Decorre da desigualdade de Young que

$$\|U\|_H \leq \frac{1}{2}\|U\|_H + \|F\|_H \left(\frac{a_1^2}{\gamma_1} + \frac{a_1^2}{\gamma_2} + a_1 \right),$$

ou seja,

$$\|U\|_H \leq a_2 \|F\|_H$$

onde $a_2 = 2\left(\dfrac{a_1^2}{\gamma_2} + \dfrac{a_1^2}{\gamma_1} + a_1 \right)$.

Uma vez que $(\lambda I - A)U = F$, com $\lambda \in \rho(A)$, segue que $U = (\lambda I - A)^{-1}F$ e então

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{H})} = \sup_{F \in H} \left\{ \frac{\|(\lambda I - A)^{-1}F\|_H}{\|F\|_H} \ : \ \|F\|_H \neq 0 \right\} \leq a_2.$$

A conclusão segue do Teorema 1.21. ∎

3.3 Falta de Estabilidade Exponencial

Nesta seção mostramos que a solução do sistema não decai exponencialmente para zero quando o tempo tende ao infinito, se $k \neq k_0$. Mais precisamente, mostraremos que o operador resolvente $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ não é limitado quando $k \neq k_0$. Assim, pelo Teorema de Prüss que estabelece uma condição necessária e suficiente para que haja decaimento exponencial de um semigrupo de classe C_0 de contrações, temos que o semigrupo associado ao nosso problema não é exponencialmente estável. Para isto, usamos fortemente o fato de que a condição de contorno é do tipo mista (Dirichlet-Neumann-Neumann).

Teorema 3.9. *Suponhamos que $k \neq k_0$, então o semigrupo associado ao sistema determinado pelas equações* (3.1)-(3.3) *com condições iniciais* (3.4) *e condições de contorno* (3.5) *não é exponencialmente estável.*

Demonstração: É suficiente mostrar que existe uma sequência de números complexos $(\lambda_\mu) \subset i\mathbb{R}$, com $\lim\limits_{\mu \to \infty} |\lambda_\mu| = \infty$, tais que,

$$\|(\lambda_\mu I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \to \infty \tag{3.20}$$

o que é equivalente a provar a existência de uma sequência $(F_\mu) \subset H$ de funções limitadas, satisfazendo

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{1}{\|F_\mu\|_H} \|(\lambda_\mu I - A)^{-1} F_\mu\|_H = \infty. \tag{3.21}$$

Seja, $U_\mu = (\lambda_\mu I - A)^{-1}$, isto é,

$$\lambda_\mu U_\mu - AU_\mu = F_\mu \tag{3.22}$$

onde $U_\mu = (\varphi_\mu, \Phi_\mu, \psi_\mu, \Psi_\mu, w_\mu, W_\mu)$ e $F_\mu = (f_{1,\mu}, f_{2,\mu}, f_{3,\mu}, f_{4,\mu}, f_{5,\mu}, f_{6,\mu})$.

Escrevendo a equação resolvente (3.22) em termos de suas componentes, temos

$$\lambda_\mu \varphi_\mu - \Phi_\mu = f_{1,\mu}, \tag{3.23}$$

$$\lambda_\mu \rho_1 \Phi_\mu - k(\varphi_{\mu,x} + \psi_\mu + lw_\mu)_x - k_0 l(w_{\mu,x} - l\varphi_\mu) + \gamma_1 \Phi_\mu = \rho_1 f_{2,\mu}, \tag{3.24}$$

$$\lambda_\mu \psi_\mu - \Psi_\mu = f_{3,\mu}, \tag{3.25}$$

$$\lambda_\mu \rho_2 \Psi_\mu - b\psi_{\mu,xx} + k(\varphi_{\mu,x} + \psi_\mu + lw_\mu) + \gamma_2 \Psi_\mu = \rho_2 f_{4,\mu}, \tag{3.26}$$

$$\lambda_\mu w_\mu - W_\mu = f_{5,\mu}, \tag{3.27}$$

$$\lambda_\mu \rho_1 W_\mu - k_0(w_{\mu,x} - l\varphi_\mu)_x + kl(\varphi_{\mu,x} + \psi_\mu + lw_\mu) = \rho_1 f_{6,\mu}. \tag{3.28}$$

Agora, usando as equações (3.23), (3.25) e (3.27) para eliminarmos as funções Φ_μ, Ψ_μ e W_μ de (3.24), (3.26) e (3.28), obtemos assim o seguinte sistema

$$\rho_1 \lambda_\mu^2 \varphi_\mu - k(\varphi_{\mu,x} + \psi_\mu + lw_\mu)_x - k_0 l(w_{\mu,x} - l\varphi_\mu) + \gamma_1 \lambda_\mu \varphi_\mu = g_{1,\mu} \tag{3.29}$$

$$\rho_2 \lambda_\mu^2 \psi_\mu - b\psi_{\mu,xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma_2 \lambda_\mu \psi_\mu = g_{2,\mu} \tag{3.30}$$

$$\rho_1 \lambda_\mu^2 w_\mu - k_0(w_{\mu,x} - l\varphi_\mu)_x + kl(\varphi_{\mu,x} + \psi_\mu + lw_\mu) = g_{3,\mu} \tag{3.31}$$

onde

$$g_{1,\mu} = \rho_1 f_{2,\mu} + (\lambda_\mu \rho_1 + \gamma_1) f_{1,\mu}$$

$$g_{2,\mu} = \rho_2 f_{4,\mu} + (\lambda_\mu \rho_2 + \gamma_2) f_{3,\mu}$$

$$g_{3,\mu} = \rho_1 f_{6,\mu} + \lambda_\mu \rho_1 f_{5,\mu}.$$

Escolhendo $F_\mu = \left(0, \frac{1}{\rho_1}\text{sen}\left(\frac{\mu\pi}{L}x\right), 0, 0, 0, \frac{l}{\rho_1}\cos\left(\frac{\mu\pi}{L}x\right)\right)^T$, temos que $\|F_\mu\|_H^2 = \frac{L}{2}(1+l)$ e devido as condições de contorno podemos supor que

$$\varphi_\mu(x) = A_\mu \text{sen}\left(\frac{\mu\pi}{L}x\right), \ \psi_\mu(x) = B_\mu \cos\left(\frac{\mu\pi}{L}x\right), \ w_\mu(x) = C_\mu \cos\left(\frac{\mu\pi}{L}x\right) \tag{3.32}$$

onde as constantes A_μ, B_μ e C_μ dependem de μ e serão determinadas a seguir. Substituindo as funções (3.32) em (3.29)-(3.31), obtemos

$$A_\mu\left[\rho_1\lambda_\mu^2+\gamma_1\lambda_\mu+k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2+k_0l^2\right]+B_\mu k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)+C_\mu l\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)[k+k_0]=1, \tag{3.33}$$

$$A_\mu k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)+B_\mu\left[\rho_2\lambda_\mu^2+\gamma_2\lambda_\mu+b\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2+k\right]+C_\mu kl=0, \tag{3.34}$$

$$A_\mu l\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)[k+k_0]+B_\mu lk+C_\mu\left[\rho_1\lambda_\mu^2+k_0\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2+kl^2\right]=l. \tag{3.35}$$

Escolhendo (λ_μ), tal que, $\dfrac{k}{l(k+k_0)}\left[\rho_1\lambda_\mu^2+k_0\left(\dfrac{\mu\pi}{L}\right)^2+kl^2\right]=kl$, isto é, λ_μ tais que,

$$\rho_1\lambda_\mu^2+k_0\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2-k_0l^2=0, \text{ ou seja, } \lambda_\mu=\pm\sqrt{-\frac{k_0}{\rho_1}\left[\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2-l^2\right]}.$$

Logo, para $\left[\left(\dfrac{\mu\pi}{L}\right)^2-l^2\right]>0$, temos que, $(\lambda_\mu)\subset i\mathbb{R}$ e $\lim\limits_{\mu\to\infty}|\lambda_\mu|=\infty$.

Assim, multiplicando (3.35) por $\dfrac{k}{l(k+k_0)}$ e usando a definição de λ_μ, podemos escrever o sistema (3.33)-(3.35) como:

$$A_\mu\left[\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2(k-k_0)+\gamma_1\lambda_\mu+2k_0l^2\right]+B_\mu k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)+C_\mu\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)[k+k_0]l=1, \tag{3.36}$$

$$A_\mu k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)+B_\mu\left[(b-k_0\frac{\rho_2}{\rho_1})\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2+\gamma_2\lambda_\mu+\frac{\rho_2}{\rho_1}k_0l^2+k\right]+C_\mu kl=0, \tag{3.37}$$

$$A_\mu k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)+B_\mu\frac{k^2}{k+k_0}+C_\mu kl=\frac{k}{k+k_0}. \tag{3.38}$$

Subtraindo as equações (3.37) e (3.38), obtemos

$$B_\mu=-\frac{\frac{k}{k+k_0}}{(b-k_0\frac{\rho_2}{\rho_1})\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2+\frac{\rho_2}{\rho_1}k_0l^2+\gamma_2\lambda_\mu+\frac{kk_0}{k+k_0}}. \tag{3.39}$$

Multiplicando (3.35) por $\dfrac{1}{l}\left(\dfrac{\mu\pi}{L}\right)$ e usando a definição de (λ_μ), temos

$$A_\mu\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2[k+k_0]+B_\mu k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)+C_\mu l\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)[k+k_0]=\left(\frac{\mu\pi}{L}\right). \tag{3.40}$$

Agora, subtraindo as equação (3.40) e (3.36), segue que

$$A_\mu=\frac{\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)-1}{2k_0\left[\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2-l^2\right]-\gamma_1\lambda_\mu}. \tag{3.41}$$

Deste modo, quando $\mu \to \infty$, resulta que

$$\frac{\mu\pi}{L}A_\mu = \frac{1 - \frac{1}{\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)}}{2k_0\left(1 - \frac{l^2}{\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2}\right) - \frac{\gamma_1}{\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2}} \to \frac{1}{2k_0} \neq 0$$

e de (3.39), segue que

$$\lim_{\mu\to\infty} B_\mu = 0.$$

Logo, de (3.38)

$$C_\mu \to \frac{1}{[k+k_0]l} - \frac{1}{2k_0 l} \neq 0$$

quando $\mu \to \infty$.

Deste modo, existe uma constante positiva, tal que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|F_\mu\|_H^2}\|U_\mu\|_H^2 &\geq \frac{k_0}{\|F_\mu\|_H^2}\int_0^L |w_{\mu,x} - l\varphi_\mu|^2\, dx \\
&= c\int_0^L \left|\left[C_\mu\frac{\mu\pi}{L} - lA_\mu\right]\operatorname{sen}\left(\frac{\mu\pi}{L}x\right)\right|^2\, dx \\
&= c\left|C_\mu\frac{\mu\pi}{L} - lA_\mu\right|^2\frac{L}{2} \to \infty
\end{aligned}$$

quando $\mu \to \infty$.

Portanto, a condição do Teorema de Prüss não é satisfeita quando temos por hipótese $k \neq k_0$. E, assim temos a conclusão. ■

Observação 3.10. *Note que dos Teoremas 3.8 e 3.9, a relação $k = k_0$ é uma condição necessária e suficiente para que o semigrupo associado ao sistema de Bresse com duas dissipações friccionais seja exponencialmente estável.*

3.4 Decaimento Polinomial e Taxa Ótima

Na seção anterior mostramos que a solução associada ao sistema (3.1)-(3.3) não decai exponencialmente quando relação $k = k_0$ não é satisfeita. Agora, nosso objetivo é mostrar que existe decaimento polinomial para a solução deste mesmo sistema. E também mostraremos que a taxa de decaimento polinomial obtida é ótima.

Teorema 3.11. *Suponha que os dado iniciais* $U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1) \in D(A)$ *e* $k \neq k_0$. *Então a solução do sistema* (3.1)-(3.3) *decai polinomialmente para zero, ou seja, existe uma constante positiva* c, *tal que*

$$\|S(t)U_0\|_H \leq \frac{c}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{D(A)}.$$

e mais, taxa $t^{\frac{1}{2}}$ *é ótima.*

Demonstração: Prosseguindo como no Teorema 3.8, obtemos a seguinte desigualdade

$$\|U\|_H^2 \leq 2c_3\|\Phi\|_{L^2}\|U\|_H + ([2+2c_3]c_1 + 2c_3)\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H$$
$$+\left(\frac{\rho_1}{\gamma_1} + \frac{\rho_2}{\gamma_2} + [2+2c_3]c_1 + 2c_3 + c_4\right)\|F\|_H\|U\|_H + 2c_3|\lambda|\left|\frac{k}{k_0} - 1\right|\|\Phi\|_{L^2}\|w_x - l\varphi\|_{L^2}.$$

Da definição de norma em H e para $|\lambda| \geq 1$, temos

$$\|U\|_H^2 \leq |\lambda|\left(2c_3 + \frac{2c_3}{\sqrt{k_0}}\left|\frac{k}{k_0} - 1\right|\right)\|\Phi\|_{L^2}\|U\|_H + ([2+2c_3]c_1 + 2c_3)\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H$$
$$+\left(\frac{\rho_1}{\gamma_1} + \frac{\rho_2}{\gamma_2} + [2+2c_3]c_1 + 2c_3 + c_4\right)\|F\|_H\|U\|_H.$$

ou seja,

$$\|U\|_H^2 \leq a_1|\lambda|\|\Phi\|_{L^2}\|U\|_H + a_2\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H + a_3\|F\|_H\|U\|_H.$$

onde

$$a_1 = 2c_3\left|\frac{k}{k_0} - 1\right|\frac{1}{\sqrt{k_0}} + 2c_3,$$

$$a_2 = [2+2c_3]c_1 + 2c_3$$

e

$$a_3 = \frac{\rho_1}{\gamma_1} + \frac{\rho_2}{\gamma_2} + [2+2c_3]c_1 + 2c_3 + c_4.$$

Assim, para $a_4 = \text{máx}\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$, temos que

$$\|U\|_H^2 \leq a_4|\lambda|\|\Phi\|_{L^2}\|U\|_H + a_4\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H + a_4\|F\|_H\|U\|_H. \tag{3.42}$$

Dividindo a desigualdade (3.42) por $\|U\|_H$ e usando o Lema 3.3 para estimar as normas de Φ e Ψ, obtemos

$$\|U\|_H \leq |\lambda|\frac{a_4}{\sqrt{\gamma_1}}\|F\|_H^{1/2}\|U\|_H^{1/2} + \frac{a_4}{\sqrt{\gamma_2}}\|F\|_H^{1/2}\|U\|_H^{1/2} + a_4\|F\|_H.$$

Segue da desigualdade de Young e de $|\lambda| \geq 1$, que

$$\|U\|_H \leq \frac{1}{2}\|U\|_H + |\lambda|^2\|F\|_H \left(\frac{a_4^2}{\gamma_1} + \frac{a_4^2}{\gamma_2} + a_4\right),$$

ou seja,

$$\|U\|_H \leq a_5|\lambda|^2\|F\|_H, \text{ onde } a_5 = 2\left(\frac{a_4^2}{\gamma_1} + \frac{a_4^2}{\gamma_2} + a_4\right).$$

Portanto

$$\|(\lambda I - A)^{-1}F\|_H \leq a_5|\lambda|^2\|F\|_H, \ \forall F \in H,$$

isto é,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq a_5|\lambda|^2.$$

Do Teorema 1.22, temos

$$\|S(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(t^{-1/2})$$

ou seja,

$$\|S(t)A^{-1}F\|_H \leq \frac{c}{t^{1/2}}\|F\|_H.$$

Uma vez que $0 \in \rho(A)$, segue que o operador A é bijetor, assim existe $U_0 \in D(A)$, tal que $AU_0 = F$, deste modo obtemos

$$\|S(t)U_0\|_H \leq \frac{c}{t^{1/2}}\|AU_0\|_H$$

o que é equivalente

$$\|S(t)U_0\|_H \leq \frac{c}{t^{1/2}}\|U_0\|_{D(A)}.$$

Portanto, a solução decai polinomialmente. Finalmente vamos provar que a taxa de decaimento é ótima . Para isto, seja $0 < \delta < 2$, então $\dfrac{1}{2-\delta} > \dfrac{1}{2}$. Deste modo, supondo que o semigrupo associado ao sistema de Bresse decai polinomialmente a uma taxa $t^{1/(2-\delta)}$, então pelo Teorema 1.23, para todo $\epsilon > 0$ e $\lambda \in \rho(A)$, o operador

$$\frac{1}{|\lambda|^{(2-\delta)+\epsilon}}\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{H})}$$

deveria ser limitado.

Por outro lado, para $\epsilon = \dfrac{\delta}{2}$, mostraremos que existe uma sequência de números complexos $(\lambda_\mu) \subset \rho(A)$ e uma sequência de funções limitadas $(F_\mu) \subset H$, tal que, a solução do seguinte sistema

$$(\lambda_\mu I - A)U_\mu = F_\mu$$

verifica

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{1}{|\lambda_\mu|^{2-\frac{\delta}{2}}}\|U_\mu\|_H = \infty.$$

Usando a mesma notação da seção anterior, vamos considerar

$$F_\mu = \left(0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{\rho_1}\cos\left(\frac{\mu\pi}{L}x\right)\right)^T$$

e φ_μ, ψ_μ e w_μ sendo as mesmas de (3.32), então (3.29)-(3.31) é escrito como

$$\begin{aligned}
A_\mu\left[\rho_1\lambda_\mu^2 + \gamma_1\lambda_\mu + k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + k_0 l^2\right] + B_\mu k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right) + C_\mu l\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)[k + k_0] &= 0\\
A_\mu k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right) + B_\mu\left[\rho_2\lambda_\mu^2 + \gamma_2\lambda_\mu + b\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + k\right] + C_\mu kl &= 0\\
A_\mu l\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)[k + k_0] + B_\mu lk + C_\mu\left[\rho_1\lambda_\mu^2 + k_0\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + kl^2\right] &= 1.
\end{aligned}$$

A matriz simétrica associada ao sistema anterior é dada por

$$M = \begin{pmatrix} p_1(\lambda_\mu) & k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right) & l\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)[k + k_0] \\ k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right) & p_2(\lambda_\mu) & kl \\ l\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)[k + k_0] & kl & p_3(\lambda_\mu) \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned}
p_1(\lambda_\mu) &= \rho_1\lambda_\mu^2 + \gamma_1\lambda_\mu + k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + k_0 l^2\\
p_2(\lambda_\mu) &= \rho_2\lambda_\mu^2 + \gamma_2\lambda_\mu + b\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + k\\
p_3(\lambda_\mu) &= \rho_1\lambda_\mu^2 + k_0\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + kl^2.
\end{aligned}$$

Sob estas condições, temos que

$$C_\mu = \frac{p_1p_2 - \left(k\frac{\mu\pi}{L}\right)^2}{p_1p_2p_3 + 2kl^2(k+k_0)\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 - (kl)^2p_1 - l^2(k+k_0)^2\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2p_2 - (k\frac{\mu\pi}{L})^2p_3}.$$

Escolhendo a sequência (λ_μ) que satisfazem

$$p_3(\lambda_\mu) = \rho_1\lambda_\mu^2 + k_0\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + kl^2 = -\frac{l^2(k+k_0)^2}{k_0-k} := c_0.$$

Temos

$$\lambda_\mu = \pm i\sqrt{\frac{k_0}{\rho_1}\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + \frac{kl^2}{\rho_1} + \frac{l^2(k+k_0)^2}{\rho_1(k_0-k)}} \approx ic_1\mu \quad \text{quando} \quad \mu \to \infty$$

para $c_1 \neq 0$. Devido nossa escolha de (λ_μ), resulta que

$$\begin{aligned} p_1p_2p_3 - l^2(k+k_0)^2\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2p_2 &= p_2\left[-\frac{l^2(k+k_0)^2}{k_0-k}p_1 - l^2(k+k_0)^2\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)\right] \\ &= p_2\left[-(k_0l^2 - kl^2 + \gamma_1\lambda_\mu + c_0)\frac{l^2(k+k_0)^2}{k-k_0}\right] \\ &\approx c_2\mu^3 \quad \text{quando} \quad \mu \to \infty \end{aligned}$$

para $c_2 \neq 0$.

Assim, temos

$$C_\mu \approx \frac{p_1p_2 - \left(k\frac{\mu\pi}{L}\right)^2}{m_1\mu^3 - (kl)^2p_1 - (k\frac{\mu\pi}{L})^2c_0 + 2k^2l^2(k+k_0)\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2} \approx c_3\mu \quad \text{quando} \quad \mu \to \infty$$

para $c_3 \neq 0$.

Deste modo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|F_\mu\|_H^2}\|U_\mu\|_H^2 &\geq \frac{\rho_1}{\|F_\mu\|_H^2}\|W_\mu\|_{L^2}^2 \\ &= \frac{\rho_1}{\|F_\mu\|_H^2}|\lambda_\mu|^2\|w_\mu\|_{L^2}^2 \\ &= c_4|\lambda_\mu|^2|C_\mu|^2 \end{aligned}$$

então

$$\frac{|\lambda_\mu|^{-2+\delta/2}}{\|F_\mu\|_H}\|U_\mu\|_H \geq \sqrt{c_4}|\lambda_\mu|^{-2+\delta/2}|\lambda_\mu||C_\mu| \geq c_5|\mu|^{-2+\delta/2}|\mu|^2 = c_5|\mu|^{\delta/2} \to \infty$$

quando $\mu \to \infty$.

Portanto, pelo Teorema 1.23 o semigrupo não decai polinomialmente a uma taxa $t^{1/(2-\delta)}$, concluindo então que a taxa $t^{1/2}$ é ótima. ■

CAPÍTULO 4
SISTEMA DE BRESSE COM UMA DISSIPAÇÃO FRICCIONAL

Neste capítulo vamos considerar o sistema de Bresse com dissipação friccional atuando somente no ângulo de rotação da seção transversal, ou seja, vamos considerar o sistema de Bresse com dissipação presente em somente uma equação

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) = 0 \text{ em } (0,\infty)\times(0,L), \tag{4.1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) = F_2 \text{ em } (0,\infty)\times(0,L), \tag{4.2}$$

$$\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = 0 \text{ em } (0,\infty)\times(0,L), \tag{4.3}$$

onde $F_2 = -\gamma_2\psi_t$ e as funções $\varphi = \varphi(t,x)$, $\psi = \psi(t,x)$ e $w = w(t,x)$ devem satisfazer as condições iniciais

$$\varphi(0,\cdot) = \varphi_0,\ \varphi_t(0,\cdot) = \varphi_1,\ \psi(0,\cdot) = \psi_0,\ \psi_t(0,\cdot) = \psi_1,\ w(0,\cdot) = w_0,\ w_t(0,\cdot) = w_1 \tag{4.4}$$

e condições de contorno

$$\varphi(t,0) = \varphi(t,L) = \psi_x(t,0) = \psi_x(t,L) = w_x(t,0) = w_x(t,L) = 0 \text{ em } (0,\infty). \tag{4.5}$$

Aqui, todas as constantes são positivas.

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na seção 4.1, mostramos a existência e unicidade de solução do sistema. Na seção 4.2, mostramos que há estabilidade exponencial do semigrupo associado desde que a relação $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b}$ e $k = k_0$ seja válida. Na seção 4.3 mostramos que se esta relação não é satisfeita há falta de estabilidade exponencial para o problema. Considerando o caso onde não se tem estabilidade exponencial, mostramos na seção 4.4 o decaimento polinomial e que quando satisfeita uma certa relação com os coeficientes provamos que a taxa obtida é ótima.

4.1 Existência e Unicidade

Vamos provar a existência e unicidade de solução do problema (4.1)-(4.3). Para isso, utilizaremos os resultados da Teoria de Semigrupos. Assim, considere o espaço vetorial

$$H = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H_*^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H^1(0,L) \times L^2(0,L)$$

onde $H_*^1(0,L) = L_*^2(0,L) \cap H^1(0,L)$ e $L_*^2(0,L) = \left\{ u \in L^2(0,L) : \int_0^L u(x)\,dx = 0 \right\}$.

O espaço H é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(U,U^*)_H = \rho_1 \int_0^L \Phi\overline{\Phi^*}\,dx + \rho_2 \int_0^L \Psi\overline{\Psi^*}\,dx + \rho_1 \int_0^L W\overline{W^*}\,dx + b\int_0^L \psi_x\overline{\psi_x^*}\,dx$$
$$+ k\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{(\varphi_x^* + \psi^* + lw^*)}\,dx + k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{(w_x^* - l\varphi^*)}\,dx$$

onde $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ e $U^* = (\varphi^*, \Phi^*, \psi^*, \Psi^*, w^*, W^*)$. Este produto interno induz uma norma em H dada por

$$\|U\|_H^2 = \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_1\|W\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2 + k\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2.$$

Definamos o operador linear $A : D(A) \subset H \to H$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1}\partial_x^2 - \frac{k_0 l^2}{\rho_1} I & 0 & \frac{k}{\rho_1}\partial_x & 0 & \frac{(k+k_0)l}{\rho_1}\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ -\frac{k}{\rho_2}\partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{k}{\rho_2} I & -\frac{\gamma_2}{\rho_2} I & -\frac{kl}{\rho_2} I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{(k_0+k)l}{\rho_1}\partial_x & 0 & -\frac{kl}{\rho_1} I & 0 & \frac{k_0}{\rho_1}\partial_x^2 - \frac{kl^2}{\rho_1} I & 0 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

com domínio

$$D(A) = \{U \in H \mid \varphi \in H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L),\ \ \psi \in H^2(0,L) \cap H_*^1(0,L),\ \ w \in H^2(0,L)$$
$$\psi_x, w_x \in H_0^1(0,L),\ \ \Phi \in H_0^1(0,L),\ \ \Psi \in H_*^1(0,L),\ \ W \in H^1(0,L)\}.$$

Deste modo, podemos escrever (4.1)-(4.3) como um problema de valor inicial

$$U_t = AU, \quad U(0) = U_0,$$

onde $U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t)^T$ e $U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1)^T$.

Teorema 4.1. *O operador A dado em (4.6) é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações sobre o espaço de Hilbert H, denotado por $T(t)$.*

Demonstração: Vamos mostrar que A é um operador dissipativo e que 0 pertence ao resolvente de A.

(i) A é dissipativo. De modo análogo ao Teorema 2.3, para $U \in D(A)$ temos

$$Re\,(AU, U)_H = -\gamma_2 \|\Psi\|_2^2 \leq 0$$

ou seja, o operador A é dissipativo.

(ii) $0 \in \rho(A)$. De fato, basta tomar $F_1 = F_3 = 0$ no Teorema 2.3.

A conclusão segue do Corolário 1.17. ■

E assim, temos o seguinte Teorema

Teorema 4.2. *Suponhamos que os dados iniciais* $(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1) \in D(A)$, *então existe uma única solução* $(\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t)$ *para o sistema* (4.1)-(4.3) *satisfazendo*

$$(\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t) \in C([0, \infty); D(A)) \cap C^1([0, \infty); H)$$

Demonstração: Decorre do Teorema 1.12. ■

4.2 Decaimento Exponencial

O objetivo para esta seção é mostrar que a relação

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b} \quad \text{e} \quad k = k_0 \tag{4.7}$$

é uma condição necessária para que o semigrupo associado ao sistema (4.1)-(4.3) seja exponencialmente estável. Neste caso, o operador resolvente $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ em termos de suas componentes, é dada por

$$\lambda\varphi - \Phi = f_1, \tag{4.8}$$

$$\lambda\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) = \rho_1 f_2, \tag{4.9}$$

$$\lambda\psi - \Psi = f_3, \tag{4.10}$$

$$\lambda\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma_2\Psi = \rho_2 f_4, \tag{4.11}$$

$$\lambda w - W = f_5, \tag{4.12}$$

$$\lambda\rho_1 W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = \rho_1 f_6. \tag{4.13}$$

Para mostrar que o semigrupo associado ao sistema de Bresse com uma dissipação é exponencialmente estável, usamos os seguintes resultados.

Lema 4.3. *Se $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ é a solução da equação resolvente então*

$$\gamma_2 \|\Psi\|_{L^2}^2 \leq \|F\|_H \|U\|_H.$$

Demonstração: Basta tomar $F_1 = F_3 = 0$ no Lema 2.5. ■

Lema 4.4. *O conjunto resolvente do operador A contém o conjunto $i\mathbb{R} = \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\}$.*

Demonstração: Para provar que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ é suficiente mostrar que se $\lambda U - AU = (0,0,0,0,0,0)$ então $U = (0,0,0,0,0,0)$. De fato, se considerarmos $F = (0,0,0,0,0,0)$, do Lema 4.3, temos que, $\Psi = 0$ e de (4.10) concluímos que $\psi = 0$. Agora, de (4.11) temos que $\varphi_x + lw = 0$. Das equações (4.9) e (4.13), obtemos respectivamente

$$\lambda \rho_1 \Phi - k_0 l (w_x - l\varphi) = 0 \tag{4.14}$$

e

$$\lambda \rho_1 W - k_0 (w_x - l\varphi)_x = 0. \tag{4.15}$$

Derivando (4.14) em relação a variável x e igualando com o produto de l por (4.15), obtemos $\varphi_x = lw$, uma vez que $\varphi_x + lw = 0$, concluímos que $w = 0$, consequentemente de (4.12), $W = 0$. Assim, de (4.14) segue que $\varphi = 0$. Portanto $U = (0,0,0,0,0,0)$. Assim, segue que o operador $(\lambda I - A)^{-1} : Im(A) \to D(A)$ existe. Como $0 \in \rho(A)$, segue que $Im(A) = H$. Concluindo que $(\lambda I - A)^{-1} : H \to D(A)$ existe. De forma análoga ao Teorema 2.3, podemos mostrar que, para cada λ, o operador resolvente é limitado. E, deste modo temos a conclusão. ■

Lema 4.5. *Se $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ é a solução da equação resolvente então existe uma constante positiva c_2, tal que*

$$k\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 \, dx \leq c_2 \|\Psi\|_{L^2} \|U\|_H + c_2 \|F\|_H \|U\|_H + \frac{|\lambda|^2}{k} \left| \rho_2 - \frac{b}{k}\rho_1 \right|^2 \|\Psi\|_{L^2}^2$$

para $\lambda \in i\mathbb{R}$ e $|\lambda| \geq 1$.

Demonstração: Multiplicando a equação (4.11) por $\overline{\varphi_x+\psi+lw}$ e integrando sobre o intervalo $[0,L]$, temos

$$k\int_0^L|\varphi_x+\psi+lw|^2\,dx=-\lambda\rho_2\int_0^L\Psi\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx+b\underbrace{\int_0^L\psi_{xx}\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx}_{:=i_1}$$

$$-\gamma_2\int_0^L\Psi\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx+\rho_2\int_0^L f_4\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx.$$

Integrando por partes o termo i_1 e usando (4.9), obtemos

$$k\int_0^L|\varphi_x+\psi+lw|^2\,dx=-\lambda\rho_2\int_0^L\Psi\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx-\frac{b\overline{\lambda}}{k}\rho_1\int_0^L\psi_x\overline{\Phi}\,dx$$
$$+\frac{bk_0}{k}l\underbrace{\int_0^L\psi_x\overline{(w_x-l\varphi)}\,dx}_{:=i_2}+\frac{b}{k}\rho_1\int_0^L\psi_x\overline{f_2}\,dx+\int_0^L(-\gamma_2\Psi+\rho_2f_4)\,\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx.$$

Agora, integrando por partes o termo i_2 e de (4.13), segue que

$$k\int_0^L|\varphi_x+\psi+lw|^2\,dx=-\lambda\rho_2\underbrace{\int_0^L\Psi\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx}_{:=i_3}-\frac{b\overline{\lambda}}{k}\rho_1\int_0^L\psi_x\overline{\Phi}\,dx$$
$$-\frac{b\overline{\lambda}}{k}\rho_1 l\int_0^L\psi\overline{W}\,dx-bl^2\int_0^L\psi\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx+\frac{b}{k}\rho_1 l\int_0^L\psi\overline{f_6}\,dx$$
$$+\frac{b}{k}\rho_1\int_0^L\psi_x\overline{f_2}\,dx+\int_0^L(-\gamma_2\Psi+\rho_2f_4)\,\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx.$$

Das equações (4.8), (4.10) e (4.12) podemos reescrever i_3, resultando

$$k\int_0^L|\varphi_x+\psi+lw|^2\,dx=-\frac{\lambda\rho_2}{\overline{\lambda}}\int_0^L\Psi\overline{(\Phi_x+f_{1,x}+\Psi+f_3+lW+lf_5)}\,dx$$
$$-\frac{b\overline{\lambda}}{k}\rho_1\underbrace{\int_0^L\psi_x\overline{\Phi}\,dx}_{:=i_4}+\frac{b\overline{\lambda}}{k}\rho_1 l\underbrace{\int_0^L\psi\overline{W}\,dx}_{:=i_5}-bl^2\underbrace{\int_0^L\psi\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx}_{:=i_6}$$
$$+\frac{b}{k}\rho_1 l\int_0^L\psi\overline{f_6}\,dx+\frac{b}{k}\rho_1\int_0^L\psi_x\overline{f_2}\,dx+\int_0^L(-\gamma_2\Psi+\rho_2f_4)\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx.$$

Usando (4.10) nas integrais i_4, i_5, i_6 e integrando por partes o termo i_4, obtemos

$$k\int_0^L |\varphi_x+\psi+lw|^2\,dx = \left(\rho_2-\frac{b}{k}\rho_1\right)\underbrace{\int_0^L \Psi\overline{\Phi_x}\,dx}_{:=i_7} + \rho_2\int_0^L \Psi\overline{(f_{1,x}+f_3+lf_5)}\,dx$$
$$+\rho_2\int_0^L |\Psi|^2\,dx + \rho_2 l\int_0^L \Psi\overline{W}\,dx + \frac{b}{k}\rho_1\int_0^L f_{3,x}\overline{\Phi}\,dx - \frac{b}{k}\rho_1 l\int_0^L (\Psi+f_3)\overline{W}\,dx$$
$$-\frac{b}{\lambda}l^2\int_0^L (\Psi+f_3)\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx + \frac{b}{k}\rho_1 l\int_0^L \psi\overline{f_6}\,dx + \frac{b}{k}\rho_1\int_0^L \psi_x\overline{f_2}\,dx$$
$$-\gamma_2\int_0^L \Psi\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx + \rho_2\int_0^L f_4\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx. \qquad (4.16)$$

Agora, estimaremos o termo i_7 e para isto, vamos derivar em relação a variável x a equação (4.8) e somar com (4.10) e com o produto de l por (4.12), e assim obtemos a seguinte igualdade

$$\Phi_x+\Psi+lW = \lambda(\varphi_x+\psi+lw) - (f_{1,x}+f_3+lf_5). \qquad (4.17)$$

Note que

$$\int_0^L \Psi\overline{\Phi_x}\,dx = \int_0^L \Psi\overline{(\Phi_x+\Psi+lW)}\,dx - \int_0^L \Psi\overline{(\Psi+lW)}\,dx.$$

Usando a relação (4.17) na equação anterior, obtemos

$$\int_0^L \Psi\overline{\Phi_x}\,dx = \overline{\lambda}\int_0^L \Psi\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx - \int_0^L \Psi\overline{(f_{1,x}+f_3+lf_5)}\,dx - \int_0^L \Psi\overline{(\Psi+lW)}\,dx.$$

Substituindo a igualdade anterior em (4.16), temos que

$$k\int_0^L |\varphi_x+\psi+lw|^2\,dx = \overline{\lambda}\left(\rho_2-\frac{b}{k}\rho_1\right)\int_0^L \Psi\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx$$
$$+\frac{b}{k}\rho_1\int_0^L \Psi\overline{(f_{1,x}+f_3+lf_5)}\,dx + \frac{b}{k}\rho_1\int_0^L |\Psi|^2\,dx + \frac{b}{k}\rho_1 l\int_0^L \Psi\overline{W}\,dx + \frac{b}{k}\rho_1\int_0^L f_{3,x}\overline{\Phi}\,dx$$
$$-\frac{b}{k}\rho_1 l\int_0^L (\Psi+f_3)\overline{W}\,dx - \frac{b}{\lambda}l^2\int_0^L (\Psi+f_3)\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx + \frac{b}{k}\rho_1 l\int_0^L \psi\overline{f_6}\,dx$$
$$+\frac{b}{k}\rho_1\int_0^L \psi_x\overline{f_2}\,dx - \gamma_2\int_0^L \Psi\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx + \rho_2\int_0^L f_4\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}\,dx.$$

Segue das desigualdades triangular e de Cauchy-Schwarz, que

$$k\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2\,dx \leq |\lambda|\left|\rho_2-\frac{b}{k}\rho_1\right|\underbrace{\|\Psi\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}}_{:=i_8}+\frac{b}{k}\rho_1\|\Psi\|_{L^2}\|f_{1,x}+f_3+lf_5\|_{L^2}$$
$$+\frac{b}{k}\rho_1\|\Psi\|_{L^2}^2+\frac{b}{k}\rho_1 l\|\Psi\|_{L^2}\|W\|_{L^2}+\frac{b}{k}\rho_1\|f_{3,x}\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2}+\frac{b}{k}l\rho_1\|\Psi\|_{L^2}\|W\|_{L^2}$$
$$+\frac{b}{k}\rho_1 l\|f_3\|_{L^2}\|W\|_{L^2}+\frac{b}{|\lambda|}l^2\|\Psi\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}+\frac{b}{|\lambda|}l^2\|f_3\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}$$
$$+\frac{b}{k}\rho_1 l\|\psi\|_{L^2}\|f_6\|_{L^2}+\frac{b}{k}\rho_1\|\psi_x\|_{L^2}\|f_2\|_{L^2}+\gamma_2\|\Psi\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}$$
$$+\rho_2\|f_4\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}.$$

Aplicando as desigualdades de Young e Poincaré respectivamente em i_8 e nas funções ψ, f_3, temos que

$$k\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2\,dx \leq \frac{|\lambda|^2}{k}\left|\rho_2-\frac{b}{k}\rho_1\right|^2\|\Psi\|_{L^2}^2+2\frac{b}{k}\rho_1\|\Psi\|_{L^2}\|f_{1,x}+f_3+lf_5\|_{L^2}$$
$$+2\frac{b}{k}\rho_1\|\Psi\|_{L^2}^2+2\frac{b}{k}\rho_1 l\|\Psi\|_{L^2}\|W\|_{L^2}+2\frac{b}{k}\rho_1\|f_{3,x}\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2}+2\frac{b}{k}\rho_1 l\|\Psi\|_{L^2}\|W\|_{L^2}$$
$$+2c_{p_1}\frac{b}{k}\rho_1 l\|f_{3,x}\|_{L^2}\|W\|_{L^2}+2\frac{b}{|\lambda|}l^2\|\Psi\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}$$
$$+2c_{p_1}\frac{b}{|\lambda|}l^2\|f_{3,x}\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}+2c_{p_2}\frac{b}{k}\rho_1 l\|\psi_x\|_{L^2}\|f_6\|_{L^2}+2\frac{b}{k}\rho_1\|\psi_x\|_{L^2}\|f_2\|_{L^2}$$
$$+2\gamma_2\|\Psi\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}+2\rho_2\|f_4\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}.$$

Usando o Lema 4.3 para estimar a norma de Ψ e a definição de norma em H, para $|\lambda|\geq 1$, obtemos

$$k\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2\,dx \leq \frac{|\lambda|^2}{k}\left|\rho_2-\frac{b}{k}\rho_1\right|^2\|\Psi\|_{L^2}^2+2\left(2\frac{b}{k}\sqrt{\rho_1}l+\frac{b}{\sqrt{k}}l^2+\frac{\gamma_2}{\sqrt{k}}\right)\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H$$
$$+2\left(\frac{b\sqrt{k}}{\sqrt{\rho_2}}\rho_1+\frac{b}{k\gamma_2}\rho_1+2\frac{\sqrt{b\rho_1}}{k}+c_{p_1}\frac{\sqrt{b\rho_1}}{k}l+c_{p_1}\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{k}|\lambda|}l^2+c_{p_2}\frac{\sqrt{b\rho_1}}{k}l+\frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{k}}\right)\|F\|_H\|U\|_H.$$

Deste modo o Lema fica demonstrado com

$$c_2=\text{máx}\,\{a_1,\ a_2\}.$$

onde

$$a_1=2\left(\frac{\rho_2}{\sqrt{\rho_1}}l+b\frac{\sqrt{\rho_1}}{k}l+\frac{b}{\sqrt{k}}l^2+\frac{\gamma_2}{\sqrt{k}}\right)$$

e

$$a_2=2\left(2\frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{k}}+\frac{\rho_2}{\gamma_2}+2\frac{\sqrt{b\rho_1}}{k}+c_{p_1}\frac{\sqrt{b\rho_1}}{k}l+c_{p_1}\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{k}}l^2+c_{p_2}\frac{\sqrt{b\rho_1}}{k}l\right).$$

■

Lema 4.6. *Se $U=(\varphi,\Phi,\psi,\Psi,w,W)$ é a solução da equação resolvente então existe uma constante positiva c_3, tal que*

$$k_0\|w_x-l\varphi\|^2_{L^2}\leq \rho_1\|\Phi\|^2_{L^2}+c_3k\left(|\lambda|^2\left|1-\frac{k}{k_0}\right|^2+1\right)\|\varphi_x+\psi+lw\|^2_{L^2}$$
$$+c_3\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H+c_3\|F\|_H\|U\|_H$$

para $\lambda\in i\mathbb{R}$ e $|\lambda|\geq 1$.

Demonstração: Multiplicando a equação (4.9) por $\overline{w_x-l\varphi}$ e integrando sobre $[0,L]$, temos

$$k_0l\int_0^L|w_x-l\varphi|^2\,dx=\lambda\rho_1\int_0^L\Phi\overline{(w_x-l\varphi)}\,dx-k\underbrace{\int_0^L(\varphi_x+\psi+lw)_x\overline{(w_x-l\varphi)}\,dx}_{:=i_1}$$
$$-\rho_1\int_0^L f_2\overline{(w_x-l\varphi)}\,dx.$$

Integrando por partes o termo i_1 e usando (4.13), obtemos

$$k_0l\int_0^L|w_x-l\varphi|^2\,dx=\lambda\rho_1\int_0^L\Phi\overline{(w_x-l\varphi)}\,dx+\frac{k}{k_0}\overline{\lambda}\rho_1\int_0^L(\varphi_x+\psi+lw)\overline{W}\,dx$$
$$+\frac{k^2}{k_0}l\int_0^L|\varphi_x+\psi+lw|^2\,dx-\frac{k}{k_0}\rho_1\int_0^L(\varphi_x+\psi+lw)\overline{f_6}\,dx-\rho_1\int_0^L f_2\overline{(w_x-l\varphi)}\,dx.$$

Agora, das equações (4.8), (4.10) e (4.12), podemos escrever

$$\lambda\rho_1\int_0^L\Phi\overline{(w_x-l\varphi)}\,dx=-\rho_1\int_0^L\Phi\overline{(W_x+f_{5,x}-l\Phi-lf_1)}\,dx,$$
$$\frac{k}{k_0}\overline{\lambda}\rho_1\int_0^L(\varphi_x+\psi+lw)\overline{W}\,dx=-\frac{k}{k_0}\rho_1\int_0^L(\Phi_x+f_{1,x}+\Psi+f_3+lW+lf_5)\overline{W}\,dx.$$

Deste modo, a igualdade anterior pode ser escrita como

$$k_0l\int_0^L|w_x-l\varphi|^2\,dx=-\rho_1\underbrace{\int_0^L\Phi\overline{W_x}\,dx}_{:=i_2}+\rho_1l\int_0^L|\Phi|^2\,dx-\rho_1\int_0^L\Phi\overline{(f_{5,x}-lf_1)}\,dx$$
$$-\frac{k}{k_0}\rho_1\int_0^L\Phi_x\overline{W}\,dx-\frac{k}{k_0}\rho_1\int_0^L\Psi\overline{W}\,dx-\frac{k}{k_0}\rho_1l\int_0^L|W|^2\,dx$$
$$-\frac{k}{k_0}\rho_1\int_0^L(f_{1,x}+f_3+lf_5)\overline{W}\,dx+\frac{k^2}{k_0}l\int_0^L|\varphi_x+\psi+lw|^2\,dx$$
$$-\frac{k}{k_0}\rho_1\int_0^L(\varphi_x+\psi+lw)\overline{f_6}\,dx-\rho_1\int_0^L f_2\overline{(w_x+l\varphi)}\,dx.$$

Integrando por partes o termo i_2, obtemos

$$
\begin{aligned}
k_0 l \int_0^L |w_x - l\varphi|^2 + \frac{k}{k_0}\rho_1 l \int_0^L |W|^2\, dx &= \rho_1 \left(1 - \frac{k}{k_0}\right) \underbrace{\int_0^L \Phi_x \overline{W}\, dx}_{:= i_3} + \rho_1 l \int_0^L |\Phi|^2\, dx \\
&- \rho_1 \int_0^L \Phi\overline{(f_{5,x} - l f_1)}\, dx - \frac{k}{k_0}\rho_1 \int_0^L \Psi\overline{W}\, dx - \frac{k}{k_0}\rho_1 \int_0^L (f_{1,x} + f_3 + l f_5)\overline{W}\, dx \\
+ \frac{k^2}{k_0} l \int_0^L |\varphi_x + \psi + lw|^2\, dx &- \frac{k}{k_0}\rho_1 \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{f_6}\, dx - \rho_1 \int_0^L f_2\overline{(w_x + l\varphi)}\, dx.
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

Vamos estimar o termo i_3. Derivando em relação a variável x a equação (4.8), somando (4.10) e com o produto de l por (4.12), segue então a seguinte igualdade

$$
\Phi_x + \Psi + lW = \lambda(\varphi_x + \psi + lw) - (f_{1,x} + f_3 + l f_5). \tag{4.19}
$$

Note que

$$
\int_0^L \Phi_x \overline{W}\, dx = \int_0^L (\Phi_x + \Psi + lW)\overline{W}\, dx - \int_0^L (\Psi + lW)\overline{W}\, dx.
$$

Assim, da igualdade anterior e de (4.19), podemos escrever

$$
\int_0^L \Phi_x \overline{W}\, dx = \lambda \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{W}\, dx - \int_0^L (f_{1,x} + f_3 + l f_5)\overline{W}\, dx - \int_0^L (\Psi + lW)\overline{W}\, dx.
$$

Agora, substituindo a relação anterior em (4.18), concluímos que

$$
\begin{aligned}
k_0 l \int_0^L |w_x - l\varphi|^2 + \rho_1 l \int_0^L |W|^2\, dx &= \left(1 - \frac{k}{k_0}\right) \lambda\rho_1 \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{W}\, dx \\
&- \rho_1 \int_0^L (f_{1,x} + f_3 + l f_5)\overline{W}\, dx - \rho_1 \int_0^L \Psi\overline{W}\, dx + \rho_1 l \int_0^L |\Phi|^2\, dx \\
&- \rho_1 \int_0^L \Phi\overline{(f_{5,x} - l f_1)}\, dx + \frac{k^2}{k_0} l \int_0^L |\varphi_x + \psi + lw|^2\, dx \\
&- \frac{k}{k_0}\rho_1 \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{f_6}\, dx - \rho_1 \int_0^L f_2\overline{(w_x + l\varphi)}\, dx.
\end{aligned}
$$

Agora, das desigualdades triangular e de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + \rho_1\|W\|_{L^2}^2 \leq |\lambda| \left|1 - \frac{k}{k_0}\right| \frac{\rho_1}{l} \underbrace{\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}\|W\|_{L^2}}_{:=i_4}$$

$$+ \frac{\rho_1}{l}\|f_{1,x} + f_3 + lf_5\|_{L^2}\|W\|_{L^2} + \frac{\rho_1}{l}\|\Psi\|_{L^2}\|W\|_{L^2} + \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2$$

$$+ \frac{\rho_1}{l}\|\Phi\|_{L^2}\|f_{5,x} - lf_1\|_{L^2} + \frac{k^2}{k_0}\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2$$

$$+ \frac{k}{k_0 l}\rho_1\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}\|f_6\|_{L^2} + \frac{\rho_1}{l}\|f_2\|_{L^2}\|w_x - l\varphi\|_{L^2}.$$

Da desigualdade de Young aplicada no termo i_4 e da definição de norma em H, temos

$$k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 \leq \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + k\left(|\lambda|^2\left|1 - \frac{k}{k_0}\right|^2 \frac{\rho_1}{4kl^2} + \frac{k}{k_0}\right)\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2$$

$$+ \frac{\sqrt{\rho_1}}{l}\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H + \left(\frac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{k}l} + 2\frac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{k_0}l} + \frac{\sqrt{\rho_1 k}}{k_0 l}\right)\|F\|_H\|U\|_H.$$

Assim

$$k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 \leq \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + c_3 k\left(|\lambda|^2\left|1 - \frac{k}{k_0}\right|^2 + 1\right)\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2$$

$$+ c_3\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H + c_3\|F\|_H\|U\|_H$$

onde $c_3 = \text{máx}\left\{\frac{\rho_1}{4kl^2}, \frac{k}{k_0}, \frac{\sqrt{\rho_1}}{l}, \frac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{k}l} + 2\frac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{k_0}l} + \frac{\sqrt{\rho_1 k}}{k_0 l}\right\}$. ■

Lema 4.7. *Se $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ é a solução da equação resolvente então existe uma constante positiva c_4, tal que*

$$\rho_1\|W\|_{L^2}^2 \leq b\|\psi_x\|_{L^2}^2 + c_4 k\left(|\lambda|^2\left|1 - \frac{k}{k_0}\right|^2 + 2\right)\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2$$

$$+ c_4\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H + c_4\|F\|_H\|U\|_H.$$

para $\lambda \in i\mathbb{R}$ e $|\lambda| \geq 1$.

Demonstração: Multiplicando (4.9), (4.11) e (4.13) por $\overline{\Phi}$, $\overline{\Psi}$ e $\overline{W}$ respectivamente, integrando sobre o intervalo $[0, L]$ e adicionando os produtos, obtemos

$$\rho_1\lambda\int_0^L |\Phi|^2\,dx + \rho_1\lambda\int_0^L |W|^2\,dx = -\rho_2\lambda\int_0^L |\Psi|^2\,dx + k\underbrace{\int_0^L (\varphi + \psi + lw)_x\overline{\Phi}\,dx}_{:=i_1}$$

$$+ k_0 l\int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{\Phi}\,dx + \rho_1\int_0^L f_2\overline{\Phi}\,dx + b\underbrace{\int_0^L \psi_{xx}\overline{\Psi}\,dx}_{:=i_2} - k\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{\Psi}\,dx$$

$$- \gamma_2\int_0^L |\Psi|^2\,dx + \rho_2\int_0^L f_4\overline{\Psi}\,dx + k_0\underbrace{\int_0^L (w_x - l\varphi)_x\overline{W}\,dx}_{:=i_3} - k\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{W}\,dx$$

$$+ \rho_1\int_0^L f_6\overline{W}\,dx.$$

Integrando por partes i_1, i_2, i_3 e de (4.8), (4.10), (4.12), temos

$$\rho_1\lambda\int_0^L |\Phi|^2\,dx+\rho_1\lambda\int_0^L |W|^2\,dx=-\rho_2\lambda\int_0^L |\Psi|^2\,dx$$
$$-k\int_0^L(\varphi+\psi+lw)\overline{(\lambda\varphi_x-f_{1,x})}\,dx+k_0l\int_0^L(w_x-l\varphi)\overline{(\lambda\varphi-f_1)}\,dx+\rho_1\int_0^L f_2\overline{\Phi}\,dx$$
$$-b\int_0^L\psi_x\overline{(\lambda\psi_x-f_{3,x})}\,dx-k\int_0^L(\varphi_x+\psi+lw)\overline{(\lambda\psi-f_3)}\,dx$$
$$-\gamma_2\int_0^L|\Psi|^2\,dx+\rho_2\int_0^L f_4\overline{\Psi}\,dx-k_0\int_0^L(w_x-l\varphi)\overline{(\lambda w_x-f_{5,x})}\,dx$$
$$-k\int_0^L(\varphi_x+\psi+lw)\overline{(\lambda w-f_5)}\,dx+\rho_1\int_0^L f_6\overline{W}\,dx$$

ou ainda,

$$\rho_1\lambda\int_0^L |\Phi|^2\,dx+\rho_1\lambda\int_0^L |W|^2\,dx=-\rho_2\lambda\int_0^L |\Psi|^2\,dx-k\overline{\lambda}\int_0^L|\varphi+\psi+lw|^2\,dx$$
$$-k_0\overline{\lambda}\int_0^L|w_x-l\varphi|\,dx-b\overline{\lambda}\int_0^L|\psi_x|^2\,dx+k\int_0^L(\varphi_x+\psi+lw)\overline{(f_{1,x}+f_3+lf_5)}\,dx$$
$$+k_0\int_0^L(w_x-l\varphi)\overline{(f_{5,x}-lf_1)}\,dx+b\int_0^L\psi_x\overline{f_{3,x}}\,dx-\gamma_2\int_0^L|\Psi|^2\,dx$$
$$+\rho_1\int_0^L f_2\overline{\Phi}\,dx+\rho_2\int_0^L f_4\overline{\Psi}\,dx+\rho_1\int_0^L f_6\overline{W}\,dx.$$

Agora, decorre das desigualdades triangular e de Cauchy-Schwarz, que

$$\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2+\rho_1\|W\|_{L^2}^2\le\rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2+k\|\varphi+\psi+lw\|_{L^2}^2+k_0\|w_x-l\varphi\|_{L^2}^2$$
$$+b\|\psi_x\|_{L^2}^2+\frac{k}{|\lambda|}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}\|f_{1,x}+f_3+lf_5\|_{L^2}+\frac{k_0}{|\lambda|}\|w_x-l\varphi\|_{L^2}\|f_{5,x}-lf_1\|_{L^2}$$
$$+\frac{b}{|\lambda|}\|\psi_x\|_{L^2}\|f_{3,x}\|_{L^2}+\frac{\gamma_2}{|\lambda|}\|\Psi\|_{L^2}^2+\frac{\rho_1}{|\lambda|}\|f_2\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2}$$
$$+\frac{\rho_2}{|\lambda|}\|f_4\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2}+\frac{\rho_1}{|\lambda|}\|f_6\|_{L^2}\|W\|_{L^2}.$$

Usando os Lemas 4.6 e 4.3 para eliminar o termo $\|\Phi\|_{L^2}^2$ e estimar a norma de Ψ, respectivamente

$$\rho_1\|W\|_{L^2}^2\le b\|\psi_x\|_{L^2}^2+k\left[c_3\left(|\lambda|^2\left|1-\frac{k}{k_0}\right|^2+1\right)+1\right]\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2$$
$$+c_3\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H+\left(\frac{\rho_2}{\gamma_2}+c_3+\frac{7}{|\lambda|}\right)\|F\|_H\|U\|_H.$$

Assim, para $|\lambda| \geq 1$, o Lema fica demonstrado com $c_4 = \dfrac{\rho_2}{\gamma_2} + c_3 + 7$. ∎

Lema 4.8. *Se $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ é a solução da equação resolvente então existe uma constante positiva c_5, tal que*

$$\rho_1 \|\Phi\|_{L^2}^2 \leq c_5 \rho_1 \|W\|_{L^2}^2 + c_5 k \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + c_5 \|\Psi\|_{L^2} \|U\|_H + c_5 \|F\|_H \|U\|_H$$

para $\lambda \in i\mathbb{R}$ e $|\lambda| \geq 1$.

Demonstração: Multiplicando (4.9) por $\overline{\Phi}$ e integrando sobre $[0, L]$, obtemos que

$$\rho_1 \int_0^L |\Phi|^2\, dx = \frac{k}{\lambda} \underbrace{\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)_x \overline{\Phi}\, dx}_{:=i_1} + \frac{k_0 l}{\lambda} \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{\Phi}\, dx + \frac{\rho_1}{\lambda} \int_0^L f_2 \overline{\Phi}\, dx.$$

Integrando por partes i_1, temos que

$$\rho_1 \int_0^L |\Phi|^2\, dx = -\frac{k}{\lambda} \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\Phi_x + \Psi + lW)}\, dx$$
$$+ \frac{k}{\lambda} \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\Psi + lW)}\, dx + \frac{k_0 l}{\lambda} \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{\Phi}\, dx + \frac{\rho_1}{\lambda} \int_0^L f_2 \overline{\Phi}\, dx.$$

Agora, derivando a equação (4.8) em relação a variável x e somando com (4.10) e (4.12) multiplicado por l, obtemos

$$\Phi_x + \Psi + lW = \lambda(\varphi_x + \psi + lw) - (f_{1,x} + f_3 + l f_5). \tag{4.20}$$

Substituindo (4.20) na igualdade anterior, segue

$$\rho_1 \int_0^L |\Phi|^2\, dx = k \int_0^L |\varphi_x + \psi + lw|^2\, dx + \frac{k}{\lambda} \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(f_{1,x} + f_3 + l f_5)}\, dx$$
$$+ \frac{k}{\lambda} \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\Psi + lW)}\, dx + \frac{k_0 l}{\lambda} \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{\Phi}\, dx + \frac{\rho_1}{\lambda} \int_0^L f_2 \overline{\Phi}\, dx.$$

Resulta das desigualdades triangular e Cauchy-Schwarz, que

$$\rho_1 \|\Phi\|_{L^2}^2 \leq k \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + \frac{k}{|\lambda|} \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2} \|f_{1,x} + f_3 + l f_5\|_{L^2}$$
$$+ \frac{k}{|\lambda|} \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2} \|\Psi\|_{L^2} + \underbrace{\frac{k}{|\lambda|} l \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2} \|W\|_{L^2}}_{:=i_2}$$
$$+ \left| \frac{k_0 l}{\lambda} \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{\Phi}\, dx \right| + \frac{\rho_1}{|\lambda|} \|f_2\|_{L^2} \|\Phi\|_{L^2}.$$

Aplicando a desigualdade de Young no termo i_2 e usando a definição de norma em H, segue que

$$\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 \leq k\left(1+\frac{k}{|\lambda|^2\rho_1}l^2\right)\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2+\rho_1\|W\|_{L^2}$$
$$\frac{\sqrt{k}}{|\lambda|}\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H+\frac{2}{|\lambda|}\|F\|_H\|U\|_H+\underbrace{\left|\frac{k_0 l}{\lambda}\int_0^L (w_x-l\varphi)\overline{\Phi}\,dx\right|}_{:=i_3}. \tag{4.21}$$

Vamos estimar o termo i_3. Para isto, multiplicamos (4.13) por $\dfrac{l}{\lambda}$ e integrando sobre $[0,x]\subset[0,L]$, assim temos

$$\frac{k_0 l}{\lambda}(w_x-l\varphi)=\rho_1 l\int_0^x W\,ds+\frac{k}{\lambda}l^2\int_0^x(\varphi_x+\psi+lw)\,ds-\frac{\rho_1}{\lambda}l\int_0^x f_6\,ds \tag{4.22}$$

Multiplicando (4.22) por $\overline{\Phi}$, integrando sobre o intervalo $[0,L]$ e usando a desigualdade triangular, obtemos

$$\left|\frac{k_0}{\lambda}l\int_0^L(w_x-l\varphi)\overline{\Phi}\,dx\right|\leq\rho_1 l\int_0^L\int_0^x|W\overline{\Phi}|\,ds\,dx+\frac{k}{|\lambda|}l^2\int_0^L\int_0^x|(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\Phi}|\,ds\,dx$$
$$+\frac{\rho_1}{|\lambda|}l\int_0^L\int_0^x|f_6\overline{\Phi}|\,ds\,dx$$

ou ainda,

$$\left|\frac{k_0}{\lambda}l\int_0^L(w_x-l\varphi)\overline{\Phi}\,dx\right|\leq\rho_1 l\int_0^L\int_0^L|W\overline{\Phi}|\,ds\,dx+\frac{k}{|\lambda|}l^2\int_0^L\int_0^L|(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\Phi}|\,ds\,dx$$
$$+\frac{\rho_1}{|\lambda|}l\int_0^L\int_0^L|f_6\overline{\Phi}|\,ds\,dx.$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\left|\frac{k_0}{\lambda}l\int_0^L(w_x-l\varphi)\overline{\Phi}\,dx\right|\leq\rho_1 lL\underbrace{\|W\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2}}_{:=i_4}+\frac{kL}{|\lambda|}l^2\underbrace{\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2}}_{:=i_5}$$
$$+\frac{\rho_1 L}{|\lambda|}l\|f_6\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2}.$$

Aplicando a desigualdade de Young nos termos i_4, i_5 e usando a definição de norma em H, resulta que

$$\left|\frac{k_0 l}{\lambda}\int_0^L(w_x-l\varphi)\Phi\,dx\right|\leq\frac{\rho_1}{2}\|\Phi\|_{L^2}^2+\rho_1(lL)^2\|W\|_{L^2}^2+\frac{(kLl^2)^2}{|\lambda|^2\rho_1}\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}$$
$$+\frac{L}{|\lambda|}l\|F\|_H\|U\|_H. \tag{4.23}$$

Combinando (4.21) e (4.23), concluímos

$$\rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 \leq \rho_1(2+2(lL)^2)\|W\|_{L^2}^2 + k\left(2+\frac{2k}{|\lambda|\rho_1}l^2+\frac{2k(Ll^2)^2}{|\lambda|^2\rho_1}\right)\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2$$
$$+2\frac{\sqrt{k}}{|\lambda|}\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H+\left(\frac{4}{|\lambda|}+\frac{2L}{|\lambda|}l\right)\|F\|_H\|U\|_H.$$

Deste modo, para $|\lambda| \geq 1$, o Lema fica demonstrado com

$$c_5 = \text{máx}\left\{2+\frac{2k}{\rho_1}l^2+\frac{2k(Ll^2)^2}{\rho_1},\ 2+2(lL)^2,\ 2\sqrt{k},\ 4+2Ll\right\}.$$

■

Lema 4.9. *Se $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ é solução da equação resolvente então existe uma constante positiva c_6, tal que*

$$k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 \leq c_6\|\Phi\|_{L^2}^2 + c_6\rho_1\|W\|_{L^2}^2 + c_6k\|\varphi_x+\psi+lw\|_{L^2}^2 + c_6\|F\|_H\|U\|_H.$$

para $\lambda \in i\mathbb{R}$ e $|\lambda| \geq 1$.

Demonstração: Multiplicando a equação (4.13) por $\overline{W}$ e integrando sobre $[0, L]$, segue que

$$\lambda\rho_1\int_0^L |W|^2\,dx - k_0\underbrace{\int_0^L (w_x-l\varphi)_x\overline{W}\,dx}_{:=i_1} + kl\int_0^L(\varphi_x+\psi+lw)\overline{W}\,dx = \rho_1\int_0^L f_6\overline{W}\,dx.$$

Integrando por parte o termo i_1, obtemos

$$\lambda\rho_1\int_0^L |W|^2\,dx + k_0\int_0^L(w_x-l\varphi)\overline{(W_x-l\Phi)}\,dx + k_0l\int_0^L(w_x-l\varphi)\overline{\Phi}\,dx$$
$$+kl\int_0^L(\varphi_x+\psi+lw)\overline{W}\,dx = \rho_1\int_0^L f_6\overline{W}\,dx.$$

Note que, das equações (4.8) e (4.12), temos

$$W_x - l\Phi = \lambda(w_x - l\varphi) - (f_{5,x} - lf_1). \tag{4.24}$$

Resulta da substituição de (4.24) na igualdade anterior, que

$$k_0\int_0^L |w_x-l\varphi|^2\,dx = \rho_1\int_0^L |W|^2\,dx + \frac{k_0}{\overline{\lambda}}\int_0^L(w_x-l\varphi)\overline{(f_{5,x}-lf_1)}\,dx$$
$$-\frac{k_0}{\overline{\lambda}}l\int_0^L(w_x-l\varphi)\overline{\Phi}\,dx - \frac{k}{\overline{\lambda}}l\int_0^L(\varphi_x+\psi+lw)\overline{W}\,dx + \frac{\rho_1}{\overline{\lambda}}\int_0^L f_6\overline{W}\,dx.$$

Segue das desigualdades triangular e de Cauchy-Schwarz, que

$$k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 \leq \rho_1\|W\|_{L^2}^2 + \frac{k_0}{|\lambda|}\|w_x - l\varphi\|_{L^2}\|f_{5,x} - l f_1\|_{L^2} + \underbrace{\frac{k_0}{|\lambda|}l\|w_x - l\varphi\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^2}}_{:=i_2}$$
$$+\underbrace{\frac{k}{|\lambda|}l\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}\|W\|_{L^2}}_{:=i_3} + \frac{\rho_1}{|\lambda|}\|f_6\|_{L^2}\|W\|_{L^2}.$$

Assim, da desigualdade de Young aplicada nos termos i_2, i_3 e da definição de norma em H, obtemos

$$k_0\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 \leq 3\rho_1\|W\|_{L^2}^2 + \frac{k_0}{|\lambda|^2}l^2\|\Phi\|_{L^2}^2 + \frac{k^2}{|\lambda|^2\rho_1}l^2\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + \frac{2}{|\lambda|}\|F\|_H\|U\|_H.$$

Portanto, para $|\lambda| \geq 1$, o Lema fica demonstrado com $c_6 = \text{máx}\left\{3,\ k_0 l^2,\ \frac{k}{\rho_1}l^2\right\}$. ∎

Agora, vamos enunciar e demonstrar o principal resultado desta seção.

Teorema 4.10. *Se* $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b}$ *e* $k = k_0$, *então o semigrupo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *associado ao sistema (4.1)-(4.3) é exponencialmente estável, isto é, existem constantes positivas* c *e* ϵ, *tais que*

$$\|S(t)U_0\|_H \leq ce^{-\epsilon t}\|U_0\|_H$$

Demonstração: Dos Lemas 4.9 e 4.3, temos

$$\|U\|_H^2 \leq b\|\psi_x\|_{L^2}^2 + (\rho_1 + c_6)\|\Phi\|_{L^2}^2 + (1 + c_6)\rho_1\|W\|_{L^2}^2$$
$$+k(1 + c_6)\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + \left(c_6 + \frac{\rho_2}{\gamma_2}\right)\|F\|_H\|U\|_H.$$

Agora, segue do Lema 4.8, que

$$\|U\|_H^2 \leq b\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \left[c_5\left(1 + \frac{c_6}{\rho_1}\right) + 1 + c_6\right]\rho_1\|W\|_{L^2}^2$$
$$+\left[c_5\left(1 + \frac{c_6}{\rho_1}\right) + 1 + c_6\right]k\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + c_5\left(1 + \frac{c_6}{\rho_1}\right)\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H$$
$$+\left[c_5\left(1 + \frac{c_6}{\rho_1}\right) + c_6 + \frac{\rho_2}{\gamma_2}\right]\|F\|_H\|U\|_H.$$

Do Lema 4.7, obtemos

$$\|U\|_H^2 \leq (1+a_1)\, b\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \left[a_1 + a_1 c_4 \left(|\lambda|^2 \left|1 - \frac{k}{k_0}\right|^2 + 2\right)\right] k\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2$$

$$+ \left[c_4 a_1 + c_5\left(1 + \frac{c_6}{\rho_1}\right)\right] \|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H + \left[c_4 a_1 + c_5\left(1 + \frac{c_6}{\rho_1}\right) + c_6 + \frac{\rho_2}{\gamma_2}\right] \|F\|_H\|U\|_H$$

onde $a_1 = c_5\left(1 + \dfrac{c_6}{\rho_1}\right) + 1 + c_6$.

Seja $a_2 = \text{máx}\left\{1 + a_1,\ c_4 a_1 + c_5\left(1 + \frac{c_6}{\rho_1}\right) + c_6 + \frac{\rho_2}{\gamma_2}\right\}$. Assim, segue da desigualdade anterior que

$$\|U\|_H^2 \leq a_2 b\|\psi_x\|_{L^2}^2 + a_2\left(|\lambda|^2\left|1 - \frac{k}{k_0}\right|^2 + 3\right) k\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2$$
$$+ a_2\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H + a_2\|F\|_H\|U\|_H.$$

Do Lema 4.5, temos

$$\|U\|_H^2 \leq a_2 b\|\psi_x\|_{L^2}^2 + a_2\left[c_2\left(|\lambda|^2\left|1 - \frac{k}{k_0}\right|^2 + 3\right) + 1\right]\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H$$
$$+ a_2\left[c_2\left(|\lambda|^2\left|1 - \frac{k}{k_0}\right|^2 + 3\right) + 1\right]\|F\|_H\|U\|_H$$
$$+ c_2 a_2\left(|\lambda|^2\left|1 - \frac{k}{k_0}\right|^2 + 3\right)|\lambda|^2\left|\rho_2 - \frac{b}{k}\rho_1\right|^2\|\Psi\|_{L^2}^2.$$

E finalmente, pelo Lema 2.7, temos

$$\|U\|_H^2 \leq a_2\left[c_2\left(|\lambda|^2\left|1 - \frac{k}{k_0}\right|^2 + 3\right) + 1 + c_1\right]\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H$$
$$+ a_2\left[c_2\left(|\lambda|^2\left|1 - \frac{k}{k_0}\right|^2 + 3\right) + 1 + c_1\right]\|F\|_H\|U\|_H$$
$$+ c_2 a_2\left(|\lambda|^2\left|1 - \frac{k}{k_0}\right|^2 + 3\right)|\lambda|^2\left|\rho_2 - \frac{b}{k}\rho_1\right|^2\|\Psi\|_{L^2}^2.$$

Deste modo, da hipótese segue que

$$\|U\|_H^2 \leq a_3\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H + a_3\|F\|_H\|U\|_H$$

onde

$$a_3 = a_2 + a_2 c_1 + 3a_2 c_2.$$

Dividindo a desigualdade anterior por $\|U\|_H$ e usando o Lema 4.3

$$\|U\|_H \leq \frac{a_3}{\sqrt{\gamma_2}}\|F\|_H^{1/2}\|U\|_H^{1/2} + a_3\|F\|_H.$$

Decorre da desigualdade de Young que

$$\|U\|_H \leq \frac{1}{2}\|U\|_H + \left(\frac{a_3^2}{2\gamma_2} + a_3\right)\|F\|_H,$$

ou seja,

$$\|U\|_H \leq \underbrace{2\left(\frac{a_3^2}{2\gamma_2} + a_3\right)}_{:=a_4}\|F\|_H$$

Assim

$$\|U\|_H \leq a_4\|F\|_H,\ \forall F \in H.$$

Como $(\lambda I - A)U = F$, com $\lambda \in \rho(A)$, temos que $U = (\lambda I - A)^{-1}F$ e então

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{H})} = \sup_{F \in H}\left\{\frac{\|(\lambda I - A)^{-1}F\|_H}{\|F\|_H}\ :\ \|F\|_H \neq 0\right\} \leq c_5$$

A conclusão segue do Teorema 1.21. ■

4.3 Falta de Estabilidade Exponencial

Mostramos nesta seção que a solução do sistema (4.1)-(4.3) não decai exponencialmente para zero quando o tempo tende ao infinito quando a relação dos coeficientes (4.7) não é verdadeira, ou seja, quando são válidas as relações

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{k}{b} \text{ e } k \neq k_0, \tag{4.25}$$

ou

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b} \text{ e } k \neq k_0 \tag{4.26}$$

ou

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{k}{b} \text{ e } k = k_0. \tag{4.27}$$

Teorema 4.11. *Suponhamos que* $\dfrac{\rho_1}{\rho_2} \neq \dfrac{k}{b}$ ou $k \neq k_0$. *Então, o semigrupo associado ao sistema determinado pelas equações* (4.1)-(4.3) *com condições iniciais* (4.4) *e condições de contorno* (4.5) *não é exponencialmente estável.*

Demonstração: Vamos mostrar que existe uma sequência de funções limitadas (F_μ), para as quais a sequência de soluções obtidas da equação $(\lambda_\mu I - A)U_\mu = F_\mu$ não seja limitada. Desta forma, concluiremos que o operador resolvente $R(\lambda_\mu, A) = (\lambda_\mu I - A)^{-1}$ não limitado, pois, $U_\mu = (\lambda_\mu I - A)^{-1} F_\mu$.

Primeiramente, vamos analisar os casos onde ocorrem (4.25) e (4.26). Para isto, considere $U_\mu = (\varphi_\mu, \Phi_\mu, \psi_\mu, \Psi_\mu, w_\mu, W_\mu)$ e $F_\mu = (f_{1,\mu}, f_{2,\mu}, f_{3,\mu}, f_{4,\mu}, f_{5,\mu}, f_{6,\mu})$. Então a equação resolvente em termos das suas componentes é dada por

$$\lambda_\mu \varphi_\mu - \Phi_\mu = f_{1,\mu}, \tag{4.28}$$

$$\lambda_\mu \rho_1 \Phi_\mu - k(\varphi_{\mu,x} + \psi_\mu + l w_\mu)_x - k_0 l(w_{\mu,x} - l\varphi_\mu) = \rho_1 f_{2,\mu}, \tag{4.29}$$

$$\lambda_\mu \psi_\mu - \Psi_\mu = f_{3,\mu}, \tag{4.30}$$

$$\lambda_\mu \rho_2 \Psi_\mu - b\psi_{\mu,xx} + k(\varphi_{\mu x} + \psi_\mu + l w_\mu) + \gamma_2 \Psi_\mu = \rho_2 f_{4,\mu}, \tag{4.31}$$

$$\lambda_\mu w_\mu - W_\mu = f_{5,\mu}, \tag{4.32}$$

$$\lambda_\mu \rho_1 W_\mu - k_0(w_{\mu,x} - l\varphi_\mu)_x + kl(\varphi_{\mu,x} + \psi_\mu + l w_\mu) = \rho_1 f_{6,\mu}. \tag{4.33}$$

Usando as equações (4.28), (4.30) e (4.32) para eliminarmos os termos Φ_μ, Ψ_μ e W_μ de (4.29), (4.31) e (4.33), resultando

$$\rho_1 \lambda_\mu^2 \varphi_\mu - k(\varphi_{\mu,x} + \psi_\mu + l w_\mu)_x - k_0 l(w_{\mu,x} - l\varphi_\mu) = g_{1,\mu}, \tag{4.34}$$

$$\rho_2 \lambda_\mu^2 \psi_\mu - b\psi_{\mu,xx} + k(\varphi_x + \psi + l w) + \gamma_2 \lambda_\mu \psi_\mu = g_{2,\mu}, \tag{4.35}$$

$$\rho_1 \lambda_\mu^2 w_\mu - k_0(w_{\mu,x} - l\varphi_\mu)_x + kl(\varphi_{\mu,x} + \psi_\mu + l w_\mu) = g_{3,\mu}, \tag{4.36}$$

onde

$$g_{1,\mu} = \rho_1 f_{2,\mu} + \lambda_\mu \rho_1 f_{1,\mu},$$

$$g_{2,\mu} = \rho_2 f_{4,\mu} + (\lambda_\mu \rho_2 + \gamma_2) f_{3,\mu},$$

$$g_{3,\mu} = \rho_1 f_{6,\mu} + \lambda_\mu \rho_1 f_{5,\mu}.$$

Escolhendo $F_\mu = (0, \dfrac{1}{\rho_1}\text{sen}\left(\dfrac{\mu\pi}{L}x\right), 0, 0, 0, \dfrac{l}{\rho_1}\cos\left(\dfrac{\mu\pi}{L}x\right))^T$, temos, $\|F_\mu\|_H^2 = \dfrac{L}{2}(1+l)$.

Devido as condições de contorno podemos supor que

$$\varphi_\mu(x) = A_\mu \text{sen}\left(\frac{\mu\pi}{L}x\right),\ \ \psi_\mu(x) = B_\mu \cos\left(\frac{\mu\pi}{L}x\right),\ \ w_\mu(x) = C_\mu \cos\left(\frac{\mu\pi}{L}x\right) \tag{4.37}$$

onde A_μ, B_μ e C_μ dependem de μ e serão determinadas a seguir. Note que as escolhas de φ_μ, ψ_μ e w_μ são compatíveis com as condições de contorno. Substituindo (4.37) em (4.34)-(4.36), temos

$$A_\mu\left[\rho_1\lambda_\mu^2 + k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + k_0 l^2\right] + B_\mu k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right) + C_\mu l\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)[k+k_0] = 1, \tag{4.38}$$

$$A_\mu k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right) + B_\mu\left[\rho_2\lambda_\mu^2 + b\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + \gamma_2\lambda_\mu + k\right] + C_\mu kl = 0, \tag{4.39}$$

$$A_\mu l\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)[k+k_0] + B_\mu lk + C_\mu\left[\rho_1\lambda_\mu^2 + k_0\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + kl^2\right] = l. \tag{4.40}$$

Escolhendo (λ_μ), tal que, $\dfrac{k}{l(k+k_0)}\left[\rho_1\lambda_\mu^2 + k_0\left(\dfrac{\mu\pi}{L}\right)^2 + kl^2\right] = kl$, isto é, λ_μ tais que,

$$\rho_1\lambda_\mu^2 + k_0\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 = k_0 l^2.$$

Logo

$$\lambda_\mu = \pm\sqrt{-\frac{k_0}{\rho_1}\left[\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 - l^2\right]}$$

Com isso, para $\left(\dfrac{\mu\pi}{L}\right)^2 - l^2 > 0$, temos que, $(\lambda_\mu) \subset i\mathbb{R}$ e $\lim\limits_{\mu\to\infty}|\lambda_\mu| = \infty$.

Assim, multiplicando (4.40) por $\dfrac{k}{l(k+k_0)}$ e usando a definição de (λ_μ), temos que o sistema (4.38)-(4.40) pode ser escrito como

$$A_\mu\left[\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2(k-k_0) + 2k_0l^2\right] + B_\mu k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right) + C_\mu\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)[k+k_0]l = 1, \tag{4.41}$$

$$A_\mu k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right) + B_\mu\left[\left(b - k_0\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1}k_0l^2 + \gamma_2\lambda_\mu + k\right] + C_\mu kl = 0, \tag{4.42}$$

$$A_\mu k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right) + B_\mu\frac{k^2}{k+k_0} + C_\mu kl = \frac{k}{k+k_0}. \tag{4.43}$$

Subtraindo as equações (4.42) e (4.43), obtemos

$$B_\mu = -\frac{\frac{k}{k+k_0}}{\left(b - k_0\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1}k_0l^2 + \gamma_2\lambda_\mu + \frac{kk_0}{k+k_0}} \to 0. \tag{4.44}$$

quando $\mu \to \infty$. Agora, multiplicando (4.40) por $\frac{1}{l}\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)$, usando novamente a definição de (λ_μ) e subtraindo com a equação (4.41), temos

$$A_\mu = \frac{\left(\frac{\mu\pi}{L}\right) - 1}{2k_0\left[\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 - l^2\right]}.$$

Assim, quando $\mu \to \infty$, obtemos que

$$\left(\frac{\mu\pi}{L}\right) A_\mu \to \frac{1}{2k_0} \neq 0. \tag{4.45}$$

Logo, de (4.43) e das convergências (4.44) e (4.45)

$$C_\mu \to \frac{1}{[k+k_0]l} - \frac{1}{2k_0 l} \neq 0.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} \frac{\|U_\mu\|_H^2}{\|F_\mu\|_H^2} &\geq \frac{k_0}{\|F_\mu\|_H^2} \int_0^L |w_{\mu,x} - l\varphi_\mu|^2 \, dx \\ &= c\int_0^L \left|[C_\mu \frac{\mu\pi}{L} - lA_\mu]\text{sen}\left(\frac{\mu\pi}{L}x\right)\right|^2 \, dx \\ &= c\left|C_\mu \frac{\mu\pi}{L} - lA_\mu\right|^2 \frac{L}{2} \to \infty \end{aligned}$$

quando $\mu \to \infty$. Deste modo, $(\lambda I - A)^{-1}$ não é um operador limitado. Note que desta demonstração, concluímos a não estabilidade exponencial, independente das relações com ρ_1, ρ_2, k e b. Portanto, pelo Teorema 1.21, o semigrupo associado ao sistema quando ocorre (4.25) ou (4.26) não decai exponencialmente.

Agora, vamos analisar o caso em que é válida a relação $\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{k}{b}$ e $k = k_0$. Para isto, vamos escolher $F_\mu = (0, \frac{1}{\rho_1}\text{sen}\left(\frac{\mu\pi}{L}x\right), 0, 0, 0, 0)^T$, segue que, $\|F_\mu\|_H^2 = \frac{L}{2}$.

O sistema (4.34)-(4.36) pode ser solucionado por

$$\varphi_\mu(x) = A_\mu \text{sen}\left(\frac{\mu\pi}{L}x\right), \; \psi_\mu(x) = B_\mu \cos\left(\frac{\mu\pi}{L}x\right) \; e \; w_\mu(x) = C_\mu \cos\left(\frac{\mu\pi}{L}x\right).$$

Substituindo a solução $(\varphi_\mu, \psi_\mu, w_\mu)$ em (4.34)-(4.36), obtemos

$$A_\mu\left[\rho_1{\lambda_\mu}^2+k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2+k_0l^2\right]+B_\mu k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)+C_\mu l\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)[k+k_0]=1, \tag{4.46}$$

$$A_\mu k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)+B_\mu\left[\rho_2\lambda_\mu^2+b\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2+\gamma_2\lambda_\mu+k\right]+C_\mu kl=0, \tag{4.47}$$

$$A_\mu l\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)[k+k_0]+B_\mu lk+C_\mu\left[\rho_1\lambda_\mu^2+k_0\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2+kl^2\right]=0. \tag{4.48}$$

Escolhendo (λ_μ), tal que,

$$\rho_1\lambda_\mu^2+k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2+kl^2=2l\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)k$$

isto é,

$$\lambda_\mu=\pm\sqrt{-\frac{k_0}{\rho_1}\left[\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)-l\right]^2}.$$

Note que, para $\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)-l>0$, temos que $(\lambda_\mu)\subset i\mathbb{R}$ e $\lim\limits_{\mu\to\infty}|\lambda_\mu|=\infty$. Assim , da definição de (λ_μ) e do fato que $k=k_0$, podemos escrever (4.46)-(4.48) como:

$$A_\mu 2l\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)k+B_\mu k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)+C_\mu 2l\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)k=1, \tag{4.49}$$

$$A_\mu k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)+B_\mu\left[\rho_2\lambda_\mu^2+b\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2+\gamma_2\lambda_\mu+k\right]+C_\mu kl=0, \tag{4.50}$$

$$A_\mu 2l\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)k+B_\mu lk+C_\mu 2l\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)k=0. \tag{4.51}$$

Subtraindo as equações (4.49) e (4.51), que

$$B_\mu=\frac{1}{(\frac{\mu\pi}{L}-l)k}. \tag{4.52}$$

Agora, substituindo (4.52) em (4.51), temos que

$$A_\mu=-\frac{1}{2\frac{\mu\pi}{L}(\frac{\mu\pi}{L}-l)k}-C_\mu. \tag{4.53}$$

Substituindo (4.52) e (4.53) em (4.50), segue que

$$C_\mu=-\frac{1}{2(\frac{\mu\pi}{L}-l)^2k}+\frac{1}{(\frac{\mu\pi}{L}-l)^2k^2}\left[\rho_2\lambda_\mu^2+b\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2+\gamma_2\lambda_\mu+k\right].$$

Da definição de (λ_μ) podemos escrever a igualdade anterior como

$$\begin{aligned}C_\mu=&-\frac{1}{2(\frac{\mu\pi}{L}-l)^2k}+\frac{1}{(\frac{\mu\pi}{L}-l)^2k^2}\left[(b-\frac{\rho_2}{\rho_1}k)\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2+l\frac{\rho_2}{\rho_1}\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)k\right]\\&+\frac{1}{(\frac{\mu\pi}{L}-l)^2k^2}\left[\frac{\rho_2}{\rho_1}l\left(\frac{\mu\pi}{L}-l\right)k+\gamma_2\lambda_\mu+k\right].\end{aligned}$$

Note que, quando $\mu \to \infty$, temos que

$$C_\mu \to \frac{1}{k^2}(b - \frac{\rho_2}{\rho_1}k) \neq 0$$

e assim de (4.53)

$$A_\mu \to -\frac{1}{k^2}(b - \frac{\rho_2}{\rho_1}k) \neq 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\|U_\mu\|_H^2}{\|F_\mu\|_H^2} &\geq \frac{k_0}{\|F_\mu\|_H^2}\int_0^L |w_{\mu,x} - l\varphi_\mu|^2\, dx \\
&= c\int_0^L \left|[C_\mu \frac{\mu\pi}{L} - lA_\mu]\mathrm{sen}\left(\frac{\mu\pi}{L}x\right)\right|^2\, dx \\
&= c\left|C_\mu\frac{\mu\pi}{L} - lA_\mu\right|^2 \frac{L}{2} \to \infty
\end{aligned}$$

quando $\mu \to \infty$. Portanto, $(\lambda I - A)^{-1}$ é não um operador limitado.

E deste modo temos a conclusão. ∎

Observação 4.12. *Decorre dos Teoremas 4.10 e 4.11, que a relação* $\dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{k}{b}$ e $k = k_0$ *é uma condição necessária e suficiente para que o semigrupo associado ao sistema de Bresse com uma dissipação friccional seja exponencialmente estável.*

4.4 Decaimento Polinomial e Taxa Ótima

Nesta seção vamos mostrar que se as identidades $\dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{k}{b}$ e $k = k_0$ não são satisfeitas então o semigrupo associado ao sistema (4.1)-(4.3) possui decaimento polinomial.

Teorema 4.13. *Suponha que os dado iniciais* $U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1) \in D(A)$ *e que(4.26) ou (4.27) ocorrem. Então o semigrupo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *associado ao sistema (4.1)-(4.3) decai polinomialmente para zero, ou seja, existe uma constante positiva c, tal que*

$$\|S(t)U_0\|_H \leq \frac{c}{t^{\frac{1}{2}}}\|U_0\|_{D(A)}.$$

E mais, se (4.25) é válida, então existe uma constante $c > 0$*, tal que*

$$\|S(t)U_0\|_H \leq \frac{c}{t^{\frac{1}{4}}}\|U_0\|_{D(A)}.$$

Demonstração: Na demonstração do Teorema 4.10 obtemos a seguinte desigualdade

$$
\begin{aligned}
\|U\|_H^2 \leq a_2 & \left[c_2\left(|\lambda|^2\left|1-\frac{k}{k_0}\right|^2+3\right)+1+c_1\right]\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H \\
& +a_2\left[c_2\left(|\lambda|^2\left|1-\frac{k}{k_0}\right|^2+3\right)+1+c_1\right]\|F\|_H\|U\|_H \\
& +c_2 a_2\left(|\lambda|^2\left|1-\frac{k}{k_0}\right|^2+3\right)|\lambda|^2\left|\rho_2-\frac{b}{k}\rho_1\right|^2\|\Psi\|_{L^2}^2,
\end{aligned} \tag{4.54}
$$

onde as constantes a_1 e a_2 são dadas por

$$
a_1=c_5\left(1+\frac{c_6}{\rho_1}\right)+1+c_6
$$

e

$$
a_2=\operatorname{máx}\left\{1+a_1,\ c_4 a_1+c_5\left(1+\frac{c_6}{\rho_1}\right)+c_6+\frac{\rho_2}{\gamma_2}\right\}.
$$

Se assumimos por hipótese (4.27), então temos de (4.54), que

$$
\begin{aligned}
\|U\|_H^2 \leq a_2\left[3c_2+1+c_1\right]\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H + a_2\left[3c_2+1+c_1\right]\|F\|_H\|U\|_H \\
+3c_2 a_2|\lambda|^2\left|\rho_2-\frac{b}{k}\rho_1\right|^2\|\Psi\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

Seja $a_3=\operatorname{máx}\left\{a_2\left[3c_2+1+c_1\right], 3c_2 a_2\left|\rho_2-\frac{b}{k}\rho_1\right|^2\right\}$. Então, a desigualdade anterior pode ser escrita como

$$
\|U\|_H^2 \leq a_3\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H+a_3\|F\|_H\|U\|_H+a_3|\lambda|^2\|\Psi\|_{L^2}^2.
$$

Do Lema 4.3, temos que

$$
\|U\|_H^2 \leq \underbrace{\frac{a_3}{\sqrt{\gamma_2}}\|F\|_H^{1/2}\|U\|_H^{3/2}}_{:=i_1}+\left(a_3+\frac{a_3}{\gamma_2}|\lambda|^2\right)\|F\|_H\|U\|_H.
$$

Dividindo a desigualdade anterior por $\|U\|_H$, usando a desigualdade de Young no termo i_1 e para $|\lambda| \geq 1$, temos

$$
\|U\|_H \leq \frac{1}{2}\|U\|_H+\left(\frac{a_3^2}{2\gamma_2}+a_3+\frac{a_3}{\gamma_2}\right)|\lambda|^2\|F\|_H,
$$

ou seja,

$$
\|U\|_H \leq \underbrace{2\left(\frac{a_3^2}{2\gamma_2}+a_3+\frac{a_3}{\gamma_2}\right)}_{:=a_4}|\lambda|^2\|F\|_H.
$$

Portanto

$$\|(\lambda I - A)^{-1}F\|_H \leq a_4|\lambda|^2\|F\|_H, \ \forall F \in H,$$

isto é,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{H})} \leq a_4|\lambda|^2.$$

Do Teorema 1.22, temos

$$\|S(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(t^{-1/2}), \text{ ou seja, } \|S(t)A^{-1}F\|_H \leq \frac{c}{t^{1/2}}\|F\|_H.$$

Uma vez que $0 \in \rho(A)$, segue que o operador A é bijetor, então existe $U_0 \in D(A)$, tal que, $AU_0 = F$, assim obtemos

$$\|S(t)U_0\|_H \leq \frac{c}{t^{1/2}}\|AU_0\|_H$$

o que é equivalente

$$\|S(t)U_0\|_H \leq \frac{c}{t^{1/2}}\|U_0\|_{D(A)}.$$

Assim a solução decai polinomialmente. Analogamente, obtemos o mesmo resultado quando (4.26) é verdadeira por hipótese.

Agora, se por hipótese (4.25) é válida, assim a desigualdade (4.54) para $|\lambda| \geq 1$, é escrita como

$$\|U\|_H^2 \leq a_5|\lambda|^2\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_H + a_5|\lambda|^2\|F\|_H\|U\|_H + a_6|\lambda|^4\|\Psi\|_{L^2}^2,$$

onde $a_5 = a_2\left[c_2\left(\left|1 - \dfrac{k}{k_0}\right|^2 + 3\right) + 1 + c_1\right]$ e $a_6 = c_2a_2\left(\left|1 - \dfrac{k}{k_0}\right|^2 + 3\right)\left|\rho_2 - \dfrac{b}{k}\rho_1\right|^2$.

Seja $a_7 = \text{máx}\{a_5, a_6\}$. Do Lema 4.3 e novamente para $|\lambda| \geq 1$, podemos reescrever a desigualdade anterior como

$$\|U\|_H^2 \leq \underbrace{\frac{a_7}{\sqrt{\gamma_2}}|\lambda|^2\|F\|_H^{1/2}\|U\|_H^{3/2}}_{:=i_2} + \left(a_7 + \frac{a_7}{\gamma_2}\right)|\lambda|^4\|F\|_H\|U\|_H.$$

Dividindo a desigualdade anterior por $\|U\|_H$ e usando a desigualdade de Young no termo i_2, temos

$$\|U\|_H \leq \frac{1}{2}\|U\|_H + \left(\frac{a_7^2}{2\gamma_2} + a_7 + \frac{a_7}{\gamma_2}\right)|\lambda|^4\|F\|_H,$$

ou seja,

$$\|U\|_H \leq \underbrace{2\left(\frac{a_7^2}{2\gamma_2} + a_7 + \frac{a_7}{\gamma_2}\right)}_{:=a_8}|\lambda|^4\|F\|_H.$$

Assim

$$\|(\lambda I - A)^{-1}F\|_H \leq a_8|\lambda|^4\|F\|_H, \ \forall F \in H,$$

isto é,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{H})} \leq a_8|\lambda|^4.$$

Agora, do Teorema 1.22, temos

$$\|S(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(t^{-1/4})$$

Logo

$$\|S(t)A^{-1}F\|_H \leq \frac{c}{t^{1/4}}\|F\|_H.$$

Como $0 \in \rho(A)$, segue que o operador A é bijetor, existe $U_0 \in D(A)$, tal que, $AU_0 = F$, assim temos que

$$\|S(t)U_0\|_H \leq \frac{c}{t^{1/4}}\|AU_0\|_H$$

o que é equivalente

$$\|S(t)U_0\|_H \leq \frac{c}{t^{1/4}}\|U_0\|_{D(A)}.$$

Portanto a solução decai polinomialmente. ∎

A seguir provaremos que taxa de decaimento polinomial, quando temos por hipótese $\dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{k}{b}$ e $k \neq k_0$, é ótima no sentido de que a mesma não pode ser melhorada.

Teorema 4.14. *A taxa de decaimento polinomial obtida no Teorema (4.13), quando* $\dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{k}{b}$ *e* $k \neq k_0$ *é ótima.*

Demonstração: Vamos provar que a taxa obtida quando temos por hipótese $\dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{k}{b}$ e $k \neq k_0$ é ótima . Para isto, seja $0 < \delta < 2$, então $\dfrac{1}{2-\delta} > \dfrac{1}{2}$. Supondo que o semigrupo associado ao sistema de Bresse decai polinomialmente a uma taxa $t^{1/(2-\delta)}$, então pelo Teorema 1.23, para todo $\epsilon > 0$ e $\lambda \in \rho(A)$, o operador

$$\frac{1}{|\lambda|^{(2-\delta)+\epsilon}} \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{H})}$$

deveria ser limitado.

Por outro lado, para $\epsilon = \dfrac{\delta}{2}$, mostraremos que existe uma sequência de números complexos $(\lambda_\mu) \subset \rho(A)$ e uma sequência de funções limitadas $(F_\mu) \subset H$, tal que, a solução do seguinte sistema

$$(\lambda_\mu I - A)U_\mu = F_\mu$$

verifica

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{\|U_\mu\|_H}{|\lambda_\mu|^{2-\frac{\delta}{2}}} = \infty.$$

Usando a mesma notação da seção anterior, vamos considerar a sequência de funções limitadas

$$F_\mu = \left(0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{\rho_1}\cos\left(\frac{\mu\pi}{L}x\right)\right)^T$$

e φ_μ, ψ_μ e w_μ sendo as mesmas de (4.37), então (4.34)-(4.36) é escrito como

$$\begin{aligned} A_\mu \left[\rho_1\lambda_\mu^2 + k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + k_0 l^2\right] + B_\mu k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right) + C_\mu l\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)[k+k_0] &= 0 \\ A_\mu k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right) + B_\mu\left[\rho_2\lambda_\mu^2 + \gamma_2\lambda_\mu + b\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + k\right] + C_\mu kl &= 0 \\ A_\mu l\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)[k+k_0] + B_\mu lk + C_\mu\left[\rho_1\lambda_\mu^2 + k_0\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + kl^2\right] &= 1. \end{aligned}$$

A matriz simétrica associada ao sistema anterior é dada por

$$M = \begin{pmatrix} p_1(\lambda_\mu) & k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right) & l\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)[k+k_0] \\ k\left(\frac{\mu\pi}{L}\right) & p_2(\lambda_\mu) & kl \\ l\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)[k+k_0] & kl & p_3(\lambda_\mu) \end{pmatrix}$$

onde

Sob estas condições, temos que

$$A_\mu = \frac{k^2 l \left(\frac{\mu\pi}{L}\right) - l\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)[k+k_0]p_2}{p_1p_2p_3 - (kl)^2p_1 - l^2(k+k_0)^2\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 p_2 - (k\frac{\mu\pi}{L})^2p_3 + 2kl^2(k+k_0)\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2}.$$

Escolhendo a sequência (λ_μ) que satisfazem

$$p_3(\lambda_\mu) = \rho_1\lambda_\mu^2 + k_0\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + kl^2 = -\frac{l^2(k+k_0)^2}{k_0-k} := c_0.$$

Temos

$$\lambda_\mu = \pm i\sqrt{\frac{k_0}{\rho_1}\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + \frac{kl^2}{\rho_1} + \frac{l^2(k+k_0)^2}{\rho_1(k_0-k)}} \approx ic_1\mu \quad \text{quando} \quad \mu\to\infty$$

para $c_1\neq 0$. Devido a escolha de (λ_μ), temos

$$\begin{aligned} p_2(\lambda_\mu) &= \rho_2\lambda_\mu^2 + \gamma_2\lambda_\mu + b\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + k \\ &= \left(b - \frac{\rho_2}{\rho_1}k_0\right)\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + \gamma_2\lambda_\mu + k - \frac{\rho_2}{\rho_1}(kl^2+c_0) \\ &= b\left(1-\frac{k_0}{k}\right)\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 + \gamma_2\lambda_\mu + k - \frac{\rho_2}{\rho_1}(kl^2+c_0) \\ &\approx c_2\mu^2 \quad \text{quando} \quad \mu\to\infty \end{aligned}$$

para $c_2\neq 0$. E, ainda

$$\begin{aligned} p_1p_2p_3 - l^2(k+k_0)^2\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)^2 p_2 &= p_2\left[\frac{l^2(k+k_0)^2}{k_0-k}p_1 - l^2(k+k_0)^2\left(\frac{\mu\pi}{L}\right)\right] \\ &= p_2\left[-(k_0l^2 - kl^2 + c_0)\frac{l^2(k+k_0)^2}{k-k_0}\right] \\ &\approx c_3\mu^2 \quad \text{quando} \quad \mu\to\infty \end{aligned}$$

para $c_3\neq 0$.

Com isso, temos

$$A_\mu \approx c_4\mu \quad \text{quando} \quad \mu\to\infty$$

para $c_4\neq 0$.

Deste modo,

$$\begin{aligned} \frac{\|U_\mu\|_H^2}{\|F_\mu\|_H^2} &\geq \frac{\rho_1}{\|F_\mu\|_H^2}\|\Phi_\mu\|_{L^2}^2 \\ &= \frac{\rho_1}{\|F_\mu\|_H^2}|\lambda_\mu|^2\|\varphi_\mu\|_{L^2}^2 \\ &= c_5|\lambda_\mu|^2|A_\mu|^2 \end{aligned}$$

então

$$|\lambda_\mu|^{-2+\delta/2}\frac{\|U_\mu\|_H^2}{\|F_\mu\|_H^2} \geq \sqrt{c_5}|\lambda_\mu|^{-2+\delta/2}|\lambda_\mu||A_\mu| \geq c_6|\mu|^{-2+\delta/2}|\mu|^2 = c_6|\mu|^{\delta/2} \to \infty.$$

Portanto, a taxa $t^{1/(2-\delta)}$ não pode ocorrer, concluindo que $t^{1/2}$ é ótima. ■

CONCLUSÃO

Neste trabalho foi estudado o sistema de Bresse dissipativo homogêneo com condições de contorno mistas. Inicialmente foi considerado o sistema com três dissipações friccionais, posteriormente foi estudado o modelo com apenas duas dissipações e por fim foi abordado o sistema com apenas uma dissipação friccional. A existência e unicidade de solução para cada modelo foi obtida por meio da teoria de semigrupo de operadores. A principal contribuição deste trabalho foi estabelecer condições necessárias e suficientes para que a solução tenha decaimento exponencial e que estas condições dependem das relações com os coeficientes. Quando estas condições não são satisfeitas, foi mostrado que a solução decai polinomialmente e em alguns casos foi provado que a taxa obtida é ótima.

REFERÊNCIAS

[1] A. Borichev,Y. Tomilov, *Optimal polynomial decay of functions and operator semi-groups*, Mathematische Annalen Vol. 347, (2), pages 455- 478,(2009).

[2] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[3] A. Soufyane, *Stabilisation de la poutre de Timoshenko*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 328 (1999), 731–734.

[4] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications.* New York, John Wiley, 1989.

[5] F. Alabau Boussouira, *Stability to weak dissipative Bresse system*, J. Math. Anal. Appl (2010) 1-18.

[6] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, J.E.M. Rivera and R. Racke, *Energy decay for Timoshenko system of memory type*, J. Differential Equations 194 (2003), 82–115.

[7] F. Huang, *Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces.* Ann. Diff. Eqs. 1 (1985), 43–56.

[8] H. Brézis, *Análisis Funcional*, Teoría y Aplicaciones. Alianza Editorial,S.A., Madrid, 1984.

[9] J.E. Lagnese, G. Leugering and E.J.P.G. Schmidt, *Modelling of dynamic networks of thin thermoelastic beams*, Math. Meth. in Appl. Sci. 16 (1993), 327–358.

[10] J. E. M. Rivera, R. Racke, *Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems - global existence and exponential stability*, JMAA 276 (2002), 248–278.

[11] J. E. M. Rivera, *Estabilização de Semigrupos e Aplicações*, Academia das Contas, 2008.

[12] J. Prüss, *On the spectrum of C_0-semigroups.* Trans. AMS **284** (1984), 847–857.

[13] L. Fatori, J.E.M. Rivera, *Rates of decay to weak thermoelastic Bresse system*, IMA J. Appl. Math. (2010), 1-24.

[14] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*. University of California, Berkeley, 1998.

[15] M. L. Santos, D. S. Almeida Júnior, *Numerical Exponential Decay to Dissipative Bresse System*, Journal of Applied Mathematics, (2010), 1–17.

[16] M. Renardy, *On the type of certain C_0-semigroups*. Comm. PDE **18** (1993), 1299–1307.

[17] R.A. Adams, *Sobolev Spaces*. New York, Academic Press, 1975.

[18] Z. Liu, B. Rao, *Characterization of polynomial decay rate for the solution of linear evolution equation*, Z. Angew. Math. Phys. 56 (2005), 630–644.

[19] Z. Liu, B. Rao., *Energy decay rate of the thermoelastic Bresse system*. Z. Angew. Math. Phys. **60** (2009), 54–69,

[20] Z. Liu, S. Zheng, *Semigroups Associated with Dissipative Systems*, CRC Research Notes in Mathematics 398, p. 206, Chapman & Hall, Boca Raton, FL, 1999.

[21] Z. Liu, B. Rao,X. Zhang., *Stabilization of the wave equations with potential and indefinite damping*. J. Math. Anal. Appl. **269** (2002), 747-769.

[22] Z. Liu, K. Liu and B. Rao, *Exponential stability of an abstract nondissipative linear system*, SIAM J. Control Optim 40 (2001), 149–165.