



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

DANIELA MARIA GRANDE VICENTE

**MEMÓRIAS AUTOASSOCIATIVAS ESPARSAS EM  
RETICULADOS COMPLETOS COM APLICAÇÕES EM  
RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS COLORIDAS**

DANIELA MARIA GRANDE VICENTE

**MEMÓRIAS AUTOASSOCIATIVAS ESPARSAS EM  
RETICULADOS COMPLETOS COM APLICAÇÕES EM  
RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS COLORIDAS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita

Londrina  
2011

Catálogo Elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da  
Universidade Estadual de Londrina

### **Dados Internacionais de Catalogação - na - Publicação (CIP)**

G751m Grande-Vicente, Daniela Maria.  
Memórias autoassociativas esparsas em reticulados completos com  
aplicações em reconstrução de imagens coloridas / Daniela Maria Grande  
Vicente. - Londrina, 2011. 94 f. : il.

Orientador: Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita.

Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) -  
Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós -  
Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2011.

Inclui bibliografia.

1. Memória associativa - Teses. 2. Sistemas de memória de computador -  
Teses. 3. Morfologia matemática - Teses. 4. Processamento de imagens - Teses. I.  
Mesquita, Marcos Eduardo Ribeiro do Valle. II. Universidade Estadual de Londrina.  
Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e  
Computacional. III. Título.

CDU 519.683

DANIELA MARIA GRANDE VICENTE

**MEMÓRIAS AUTOASSOCIATIVAS ESPARSAS EM RETICULADOS  
COMPLETOS COM APLICAÇÕES EM RECONSTRUÇÃO DE  
IMAGENS COLORIDAS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

**BANCA EXAMANIDORA**

---

Prof. Dr. Marcos Eduardo Ribeiro do Valle  
Mesquita UEL – Londrina – PR

---

Prof. Dr. Peter Sussner  
UNICAMPI – Campinas – SP

---

Prof. Dr. Paulo Laerte Natti  
UEL – Londrina – PR

Londrina, 04 de março de 2011.

GRANDE VICENTE, Daniela Maria. **Memórias autoassociativas esparsas em reticulados completos com aplicações em reconstrução de imagens coloridas**. 2011. 94 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

## RESUMO

Uma Memória Associativa (AM) é um modelo inspirado na forma com que o cérebro humano armazena e recorda informações. Estes modelos são projetados para armazenar pares de associações. Além disso, uma AM deve ser capaz de recordar um padrão memorizado mesmo após a apresentação de uma versão distorcida ou incompleta de um item memorizado. Esta dissertação apresenta um estudo detalhado das Memórias Autoassociativas Esparsas em Reticulados Completos (MAERCs) que são equipadas com neurônios que realizam operações de dilatação e erosão da morfologia matemática. Precisamente, a saída de um neurônio é dado ou pelo máximo ou pelo mínimo de algumas de suas entradas. Estas memórias são sintetizadas usando um esquema de armazenamento que geralmente fornece uma rede com conexões esparsas. Portanto, em geral, elas requerem pouco esforço computacional. Além disso, estes modelos são muito gerais, uma vez que necessitam somente de uma estrutura de reticulado. Nesta dissertação são demonstrados resultados teóricos sobre a convergência, capacidade de armazenamento e tolerância a ruído das MAERCs. Uma caracterização dos pontos fixos desses modelos também é apresentada. Adicionalmente, é discutida a relação entre as MAERCs e as memórias associativas morfológicas introduzidas por Ritter e Sussner. Por fim, foi estudada a aplicação das MAERCs para o armazenamento e recordação de imagens coloridas. Existem diversas representações para imagens coloridas como RGB, HSV, HSL e CIELab. Além disso, diferentes esquemas ordenados podem ser definidos de forma a obter uma estrutura de reticulado completo para o conjunto dos valores dos pixels nos diferentes espaços de cores. Dessa forma, são apresentados resultados experimentais sobre o desempenho das MAERCs, definidas em diferentes combinações de espaços de cores e esquemas ordenados, para a reconstrução de imagens coloridas corrompidas com ruído pepper, gaussiano e impulsivo.

**Palavras Chave:** Memórias autoassociativas. Redes esparsas. Morfologia matemática. Imagens coloridas.

GRANDE VICENTE, Daniela Maria. **Memories autoassociativas sparse complete lattices with applications in reconstruction of color images**. 2011. 94 f. Dissertation (Master's in Applied and Computational Mathematics) - University of Londrina, Londrina, 2011.

## ABSTRACT

An associative memory (AM) is a model inspired in the ability of the human brain to store and recall information. These models are designed for the storage of pairs of associations. Furthermore, an AM must to be able to recall a stored pattern even after the presentation of an incomplete or distorted version of a memorized item. This dissertation presents a detailed study of sparsely connected autoassociative lattice memories (SCALMs), which are AMs equipped with neurons that perform either a dilation or an erosion of mathematical morphology. Precisely, the output of a single neuron is given by either the maximum or the minimum of some of its inputs. These memories are synthesized using a recording recipe that usually yields a sparsely connected network. Therefore, they often require few computational resources. Furthermore, these models are very general because they rely only on a lattice structure. In this work, we demonstrate some theoretical results concerning the convergence, storage capacity, and noise tolerance of SCALMs. We also characterize the fixed points of these memory models. Moreover, we discuss the relationship between the SCALMs and the autoassociative morphological memories introduced by Ritter and Sussner. Finally, we investigate the application of SCALMs for the storage and recall of color images. There exist several representations of color images such as the RGB, HSV, HSL and CIE Lab color models. Furthermore, several different ordering schemes can be defined in order to obtain a complete lattice structure on the set of pixels values in different color spaces. Therefore, we present experimental results on the performance of SCALMs, defined on different combinations of color spaces and ordered schemes, for the reconstruction of color images corrupted by pepper, Gaussian and impulsive noise.

**Keywords:** Autoassociative memories. Sparsely connected neural networks. Mathematical morphology. Color images.

*Aos meus pais e ao meu esposo,  
Nelson Grande, Renata Maria  
Grande e André Vicente.*

## **AGRADECIMENTOS**

À minha família pelo apoio incondicional.

Ao meu esposo, André Vicente, pelo carinho e compreensão em todos os momentos.

Ao meu orientador, Marcos Eduardo Valle, pela excelente orientação, atenção e disponibilidade.

Aos meus colegas, Cibele, Camila, Geovani, Poliane, Vinicius e Rodrigo pela agradável convivência.

Aos professores do PGMAC que contribuíram para a minha formação. À CAPES, pelo apoio financeiro.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 2.1</b> – Imagem original binária, elemento estruturante, imagem original erodida e imagem original dilatada .....	25
<b>Figura 4.1</b> – Exemplo de imagem digital colorida.....	46
<b>Figura 4.2</b> – Interpretação geométrica do modelo de cores RGB.....	47
<b>Figura 4.3</b> – Interpretação geométrica do modelo de cores HSL.....	50
<b>Figura 4.4</b> – Interpretação geométrica do modelo de cores HSV .....	55
<b>Figura 5.1</b> – Imagens originais de tamanho 512×512 pixels no espaço RGB .....	64
<b>Figura 5.2</b> – Imagens ruidosas $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3$ e $\tilde{x}^4$ .....	65
<b>Figura 5.3</b> – Imagens recordadas pelos modelos $W$ no espaço RGB .....	67
<b>Figura 5.4</b> – Imagens recordadas pelos modelos $M$ no espaço RGB.....	69
<b>Figura 5.5</b> – Média do PSNR e Delta versus a probabilidade de adicionar ruído <i>pepper</i> e a variância do ruído gaussiano no espaço RGB .....	71
<b>Figura 5.6</b> – Imagens obtidas somando e subtraindo uma constante, respectivamente .....	72
<b>Figura 5.7</b> – Imagens recordadas pelos modelos $W$ no espaço HSL .....	74
<b>Figura 5.8</b> – Imagens recordadas pelos modelos $M$ no espaço HSL.....	75
<b>Figura 5.9</b> – Média do PSNR e Delta versus a probabilidade de adicionar ruído <i>pepper</i> e a variância do ruído gaussiano - modelo $W$ no espaço HSL .....	77
<b>Figura 5.10</b> – Média do PSNR e Delta versus a variância de adicionar ruído gaussiano - modelo $M$ no espaço HSL .....	78
<b>Figura 5.11</b> – Imagens recordadas pelos modelos $W$ e $M$ no espaço CIELab .....	80
<b>Figura 5.12</b> – Média do PSNR e Delta versus a probabilidade de adicionar ruído <i>pepper</i> , ruído gaussiano e ruído Impulsivo no espaço CIELab.....	82
<b>Figura 5.13</b> – Média do Delta versus a probabilidade de adicionar ruído <i>pepper</i> .....	83
<b>Figura 5.14</b> – Média do Delta versus a variância de adicionar ruído gaussiano .....	85

## LISTA DE SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

$\bigvee X$	Supremo do conjunto $X$
$\bigwedge X$	Ínfimo do conjunto $X$
$x \vee y$	Máximo entre $x$ e $y$
$x \wedge y$	Mínimo entre $x$ e $y$
$\bigvee \emptyset = 0_{\mathbb{L}}$	Elemento mínimo do reticulado $\mathbb{L}$
$\bigwedge \emptyset = 1_{\mathbb{L}}$	Elemento máximo do reticulado $\mathbb{L}$
$A \boxtimes B$	Produto máximo de $A$ por $B$
$A \boxdot B$	Produto mínimo de $A$ por $B$
$int(X)$	Interior do conjunto $X$
$\bar{X}$	Fecho do conjunto $X$
$Inv(A)$	Domínio de invariância do conjunto $A$
$\mathbb{L}, \mathbb{V}$	Reticulados completos
$\mathbb{V}^n$	Produto cartesiano $\mathbb{V} \times \dots \times \mathbb{V}$
$\mathbb{V}_{RGB}$	Reticulado completo das cores no sistema RGB
$\mathbb{V}_{HSL}$	Reticulado completo das cores no sistema HSL
$\mathbb{V}_{HSV}$	Reticulado completo das cores no sistema HSV
$\mathbb{V}_{TKL}$	Reticulado completo das cores no sistema TKL
$\mathbb{V}_{L^*a^*b^*}$	Reticulado completo das cores no sistema CIELab
$\mathcal{W}$	MAERC baseada na operação de supremo
$\mathcal{M}$	MAERC baseada na operação de ínfimo
$\mathcal{W}_{XX}$	Memória autoassociativa morfológica em tons de cinza
$\mathcal{M}_{XX}$	Memória autoassociativa morfológica em tons de cinza
$C$	Matriz de covariância

$\mathbf{m}$	Vetor das médias
$Q$	Matriz da transformação de Karhunen-Loève
$\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^p\}$	Conjunto das memórias fundamentais
$\Delta E_{ab}^*$	Distância Euclidiana entre dois pontos do espaço CIELab

## LISTA DE ABREVIACOES

SE	Elemento Estruturante
AM	Memória Associativa
MAM	Memória Associativa Morfológica
MM	Morfologia Matemática
MAERC	Memória Autoassociativa Esparsa em Reticulado Completo
FMAM	Memória Associativa Morfológica Nebulosa
KS-FAM	Memória Associativa Nebulosa baseada na medida de <i>subsethood</i> de Kosko
ECAM	Memória Associativa com Capacidade Exponencial
IFAM	Memória Associativa Implicativa Nebulosa
RGB	Sistema de Cores <i>Red, Green, Blue</i>
HSV	Sistema de Cores <i>Hue, Saturaco, Valor</i>
HSL	Sistema de Cores <i>Hue, Saturaco, Luminosidade</i>
CIELab	Sistema de Cores <i>L*a*b*</i>
TKL	Transformaco de Karhunen-Leve
MSE	Erro Quadrático Médio
PSNR	Razão Pico Sinal-Ruído

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO</b> .....	13
1.1 OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO .....	15
<b>CAPÍTULO 2 CONCEITOS BÁSICOS DA MORFOLOGIA MATEMÁTICA EM RETICULADO COMPLETO</b> .....	17
2.1 RETICULADOS COMPLETOS .....	17
2.1.1 Extensão de Reticulado Limitado com Ordem de Grupo.....	19
2.1.2 Operadores em Reticulados Completos.....	20
2.1.3 Adjunção.....	22
2.1.4 Aberturas e Fechamentos.....	22
2.2 DILATAÇÃO E EROÇÃO PARA IMAGENS BINÁRIAS .....	24
2.3 DILATAÇÃO E EROÇÃO PARA IMAGENS MULTIVALOR .....	25
<b>CAPÍTULO 3 TEORIA GERAL DAS MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS MORFOLÓGICAS</b> .....	27
3.1 MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS NEURAIS .....	27
3.2 MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS MORFOLÓGICAS EM TONS DE CINZA .....	28
3.3 MEMÓRIAS AUTOASSOCIATIVAS MORFOLÓGICAS EM TONS DE CINZA.....	29
3.4 A CLASSE DAS MEMÓRIAS AUTOASSOCIATIVAS ESPARSAS EM RETICULADOS COMPLETOS.....	32
3.4.1 Armazenamento de Padrões .....	32
3.5 PROPRIEDADES DAS MEMÓRIAS AUTOASSOCIATIVAS ESPARSAS EM RETICULADOS COMPLETOS.....	35
3.6 RELAÇÃO ENTRE AS MAERCs E AS MEMÓRIAS AUTOASSOCIATIVAS MORFOLÓGICAS EM TONS DE CINZA .....	42
<b>CAPÍTULO 4 REPRESENTAÇÃO DE IMAGENS COLORIDAS E EM TONS DE CINZA</b> .....	45
4.1 IMAGENS .....	45
4.2 REPRESENTAÇÃO RGB .....	46
4.2.1 Ordem das Cores no Sistema RGB .....	47
4.3 REPRESENTAÇÃO HSL.....	49

4.3.1 Esquemas Ordenados no Espaço HSL.....	52
4.4 REPRESENTAÇÃO HSV .....	54
4.4.1 Ordem Lexicográfica VSH.....	56
4.5 REPRESENTAÇÃO CIELAB.....	59
4.5.1 Ordem das Coresno Espaço CIELab .....	60
4.6 TRANSFORMAÇÃO DE KARHUNEN – LOÈVE.....	62
4.6.1 Ordem das Coresno Espaço TKL .....	63
<b>CAPÍTULO 5 RESULTADOS EXPERIMENTAIS .....</b>	<b>63</b>
5.1 MEDIDAS DE DISTORÇÃO .....	63
5.2 EXPERIMENTOS UTILIZANDO DIFERENTES ESQUEMAS ORDENADOS NO SISTEMA RGB.....	64
5.3 EXPERIMENTOS UTILIZANDO VARIAÇÕES DA ORDEM LEXICOGRÁFICA NOS SISTEMAS HSL E HSV.....	72
5.4 EXPERIMENTOS UTILIZANDO VARIAÇÕES DA ORDEM LEXICOGRÁFICA NO SISTEMA CIELAB.....	79
5.5 COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS DE MEMÓRIAS <i>W</i> E <i>M</i> .....	82
<b>6 CONCLUSÃO.....</b>	<b>87</b>
<b>REFERÊNCIA.....</b>	<b>89</b>

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Uma memória associativa é um sistema que permite uma determinada informação ser associada com outra. Estudos de como o cérebro humano é capaz de armazenar e recordar informação tem levado a vários modelos de redes neurais que atuam como memória associativa [6, 18]. O objetivo principal destas memórias é a recuperação de padrões corrompidos ou incompletos apresentados como dados de entrada. Aplicações de memórias associativas incluem problemas de classificação [51, 66], previsão [53, 54], controle [27, 28], visão computacional [14, 39, 40] e reconhecimento de padrões [64, 65].

Na década de 90, Ritter e Sussner introduziram a classe das *memórias associativas morfológicas* (MAMs) [36, 37, 38]. Estas MAMs são definidas em termos de operações matriciais definidas numa sub-álgebra da álgebra de imagens, chamada álgebra minimax [41], onde as operações de soma e multiplicação são substituídas por operações de reticulados. Como consequência, as propriedades desta classe de memórias são muito diferentes dos modelos de redes neurais tradicionais. Por exemplo, as MAMs exibem ótima capacidade absoluta de armazenamento e convergência em uma única iteração no caso autoassociativo. Além disso, estes modelos de memória tem sido efetivamente usados para reconstrução de imagens em tons de cinza [51]. Entretanto as MAMs originais de Ritter e Sussner não são indicadas para a reconstrução de grandes imagens coloridas, pois requerem uma grande quantidade de recursos computacionais.

Nos últimos anos diversos estudos tem levado ao desenvolvimento de modelos de memórias associativas (AMs) para o armazenamento e recordação de imagens coloridas [32, 58, 67]. Sabemos que existem duas abordagens para generalizar modelos em tons de cinza para padrões coloridos. A primeira, baseia-se na representação de imagens digitais coloridas onde o valor de cada pixel colorido varia de 0 a  $2^{24} - 1$ . Esta técnica tem sido usada por Monteros e Azuela para o armazenamento de imagens coloridas no modelo associativo com sinapses dinâmicas [32]. A segunda abordagem é baseada no sistema RGB, onde uma cor é representada por intensidades de vermelho, verde e azul. Portanto, uma imagem colorida pode ser decomposta em três imagens em tons de cinza. Esta segunda técnica armazena separadamente três imagens em tons de cinza, uma em cada memória associativa, e foi empregada por Zheng et al. para o armazenamento de imagens coloridas na classe das redes neurais de Cohen-Grossberg [67].

Neste trabalho estudamos a classe das *memórias autoassociativas esparsas em reticulados completos* (MAERCs), anteriormente denominadas *memórias autoassociativas morfológicas esparsas multivalor*, que não baseiam-se em modelos em tons de cinza [58]. Estas memórias tem como objetivo o armazenamento e recordação de padrões definidos em reticulados completos, que incluem imagens coloridas como caso particular.

As memórias autoassociativas esparsas em reticulados completos são constituídas por uma simples camada de  $n$  neurônios, onde cada neurônio realiza uma operação de dilatação ou erosão da *morfologia matemática*, uma teoria muito usada para a análise de forma e estrutura de imagens e sinais [44, 46]. Precisamente, a saída de um neurônio é dado pelo máximo ou mínimo dos padrões de entrada. Observamos que estes modelos são muito gerais, uma vez que são baseados somente em uma estrutura de reticulado, ou seja, um esquema ordenado onde as operações de supremo e ínfimo estão bem definidas.

Uma das principais vantagens destes modelos se refere ao seu aspecto computacional. Estas memórias são sintetizadas usando um esquema de armazenamento que geralmente fornece uma rede com conexões esparsas, e requer muito menos recursos computacionais que outros modelos de memória associativa. Por exemplo, para armazenar doze imagens coloridas de tamanho  $512 \times 512$  pixels, nos modelos de memórias autoassociativas esparsas em reticulados completos usando a ordem lexicográfica no sistema RGB, foram gastos num certo experimento computacional aproximadamente 162 MB de espaço de memória. Em contrapartida, aproximadamente 384 GB de espaço de memória seriam necessários para o armazenamento das mesmas imagens coloridas numa MAM clássica. Supondo que cada canal de cor é armazenado numa memória diferente e que os pesos sinápticos são representados usando inteiros com 16 bits [58].

Assim como as MAMs em tons de cinza, as memórias autoassociativas esparsas em reticulados completos também exibem características desejáveis como *ótima capacidade absoluta de armazenamento e convergência em uma única iteração* se usado com *feedback* [58]. Entretanto, as memórias baseadas nas operações de supremo são capazes de recordar um padrão original somente se o padrão de entrada for menor ou igual ao padrão de saída desejado. Dualmente, uma memória baseada nas operações de ínfimo recorda um padrão original somente se o padrão de entrada for maior ou igual ao padrão original. Em vista disto, a tolerância a ruído desta classe de memórias depende de uma estrutura de reticulado para as cores, ou seja, um esquema ordenado que induzirá a uma estrutura de reticulado.

Existem na literatura diversos esquemas ordenados com o propósito de ordenar padrões multivariador, incluindo as ordens marginal, lexicográfica e  $\alpha$ -módulo, sendo a ordem lexicográfica a mais usada devido as suas propriedades [3, 4, 5]. Além disso, existem várias representações de sistemas de cores para imagens coloridas. Faremos uma breve discussão sobre os sistemas RGB, HSV, HSL, CIELab e a transformação de Karhunen-Loève [1, 2, 13, 17], com o propósito de combinar os diferentes espaços de cores e esquemas ordenados a fim de obter uma estrutura de reticulado.

Em suma, nesta dissertação apresentaremos resultados teóricos sobre a capacidade de armazenamento e tolerância a ruído desta classe de memórias, baseadas em diferentes combinações de espaços de cores e esquemas ordenados. Também faremos experimentos computacionais para avaliar o desempenho destas memórias quando padrões corrompidos com ruído tipo *pepper*, gaussiano e impulsivo são introduzidos como dados de entrada.

## 1.1 OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Neste trabalho temos o objetivo de fornecer resultados teóricos, bem como resultados experimentais sobre a capacidade de armazenamento e tolerância a ruído das memórias autoassociativas esparsas em reticulados completos (MAERCs), baseadas em diversas combinações de sistemas de cores e esquemas ordenados. Especificamente, os objetivos desta dissertação de mestrado são:

1. Demonstrar que as memórias autoassociativas esparsas em reticulados possuem as mesmas características que as MAMs de Ritter e Sussner no caso autoassociativo, como:
  - i. Convergência em uma única iteração;
  - ii. Pode-se armazenar quantos padrões forem desejados;
  - iii. Os padrões recordados pelas memórias baseadas nas operações de supremo representam o menor ponto fixo do modelo maior ou igual ao padrão de entrada. Por dualidade, os padrões recordados pelas memórias baseadas nas operações de ínfimo representam o maior ponto fixo do modelo menor ou igual ao padrão de entrada;
  - iv. O conjunto dos pontos fixos incluem os padrões originais no conjunto de memórias fundamentais, bem como um grande número de padrões espúrios;
2. Os itens listados acima aparecem sem demonstração e para um reticulado completo particular em [58]. Nesta dissertação provamos e generalizamos estes resultados para um reticulado completo  $\mathbb{V}$  arbitrário.
3. Estabelecer uma relação entre as MAMs em tons de cinza e as memórias autoassociativas esparsas em reticulados;
4. Investigar o desempenho das memórias autoassociativas esparsas em reticulados, baseadas em diferentes combinações de espaços de cores e esquemas ordenados, para a reconstrução de imagens coloridas corrompidas com ruído *pepper*, gaussiano e impulsivo.

Esta dissertação de mestrado está dividida em 6 capítulos. No capítulo 2 revisamos os principais conceitos da morfologia matemática bem como a estrutura matemática em que esta teoria está baseada, que são os reticulados completos. Especificamente, são apresentados os operadores elementares da morfologia matemática, dilatação e erosão, a relação de dualidade com respeito a adjunção e as operações de abertura e fechamento. Também são definidos operadores de dilatação e erosão para imagens multivalores, que incluem imagens coloridas como caso particular.

O capítulo 3 apresenta uma breve revisão dos modelos de memórias associativas morfológicas introduzidas por Ritter e Sussner [36, 38]. Em particular, no caso autoassociativo, revê-se

alguns resultados que caracterizam os pontos fixos das memórias autoassociativas morfológicas em tons de cinza [51]. Este capítulo também apresenta uma discussão detalhada das memórias autoassociativas esparsas em reticulados introduzidas por Valle [58], incluindo resultados teóricos sobre a capacidade de armazenamento e tolerância a ruído desta classe de memórias. Por fim, uma relação entre as MAMs em tons de cinza e as memórias autoassociativas esparsas em reticulados é estabelecida. Para efeitos de organização, os resultados novos estão apresentados na forma de *teoremas* enquanto que resultados encontrados na literatura estão apresentados na forma de *proposições*.

O capítulo 4 tem como objetivo apresentar alguns sistemas de cores para imagens coloridas, como RGB, HSV, HSL e CIELab. Também discute a transformação de Karhunen-Loève, que resulta num sistema de coordenadas ortogonal em que as componentes são descorrelacionadas. Adicionalmente, em cada espaço de cor são apresentados esquemas ordenados que fornecem uma estrutura de reticulado completo para o conjunto das cores.

O capítulo 5 contém vários experimentos computacionais aplicando as memórias autoassociativas esparsas em reticulados para a reconstrução de imagens coloridas corrompidas com ruído *pepper*, gaussiano e impulsivo. Para uma melhor comparação entre os modelos de memórias sintetizados, são gerados gráficos a fim de comparar os diferentes modelos de memória. Terminamos a dissertação no capítulo 6 com a conclusão.

Finalmente, como frutos desta dissertação de mestrado, a autora e seu orientador submeteram um artigo para o congresso internacional de redes neurais, *International Joint Conference on Neural Networks, San Jose, California, July 31 - August 5, 2011*, intitulado: *Some Experimental Results on Sparsely Connected Autoassociative Morphological Memories for the Reconstruction of Color Images Corrupted by Either Impulsive or Gaussian Noise*. Além disso, está em elaboração um artigo de revista.

## CAPÍTULO 2

### CONCEITOS BÁSICOS DA MORFOLOGIA MATEMÁTICA EM RETICULADO COMPLETO

A Morfologia Matemática (MM) é uma teoria empregada no processamento e análise de objetos ou imagens. Suas aplicações abrangem textura, segmentação, detecção de bordas, reconstrução de imagens, decomposição de sinais entre outros [44, 46].

Essa teoria foi introduzida por Matheron e Serra [30, 44, 45], que desenvolveram uma coleção de ferramentas, chamados de operadores morfológicos, que se mostraram extremamente eficazes na análise de forma e estrutura em imagens binárias. Estas ferramentas estão baseadas nos trabalhos de Minkowski e Hadwiger [15, 31]. Diversas abordagens foram propostas para generalizá-la para imagens em tons de cinza, tais como a abordagem da umbra e *threshold* [50]. Posteriormente os mesmos conceitos foram estendidos para imagens coloridas e mais geralmente para imagens multivalor [4].

A morfologia matemática pode ser bem conduzida numa estrutura matemática chamada reticulado completo [42, 45]. Neste capítulo revisamos os principais conceitos da teoria dos reticulados completos como base para os operadores elementares da morfologia matemática.

#### 2.1 RETICULADOS COMPLETOS

A teoria dos reticulados completos está interessada na estrutura algébrica que surge ao impor algum tipo de ordem a um conjunto [7]. Lembremos a definição de conjuntos parcialmente ordenados.

**Definição 2.1.** *Dado um conjunto não vazio  $\mathbb{L}$ , uma relação de ordem  $\leq$  em  $\mathbb{L}$  é dito uma ordem parcial se as seguintes propriedades são satisfeitas para todo  $x, y, z \in \mathbb{L}$ :*

1. *Reflexividade:*  $x \leq x$ ;
2. *Anti-Simetria:*  $x \leq y$  e  $y \leq x \Rightarrow x = y$ ;
3. *Transitividade:*  $x \leq y$  e  $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ .

*Uma relação de ordem parcial diz-se total ou linear se para todo  $x, y \in \mathbb{L}$ , tem-se exclusivamente  $x \leq y$  ou  $x \geq y$ .*

Um conjunto  $\mathbb{L}$  munido de uma ordem parcial é dito um conjunto parcialmente ordenado, ou poset. Seja  $\mathbb{L}$  um conjunto parcialmente ordenado e  $X \subseteq \mathbb{L}$ . Um elemento  $a \in \mathbb{L}$  é dito um limitante inferior, ou cota inferior de  $X$ , se  $a \leq x$ ,  $\forall x \in X$ . Da mesma forma, um elemento  $b \in \mathbb{L}$  é um limitante superior, ou cota superior de  $X$ , se  $b \geq x$ ,  $\forall x \in X$ . Note que  $a$  e  $b$  não necessariamente pertencem a  $X$ .

O menor elemento de  $X$ , se existe, é uma cota inferior de  $X$ . Se o conjunto das cotas inferiores de  $X$ , que é um subconjunto de  $\mathbb{L}$ , contém um maior elemento  $a_0$ , então este elemento é chamado a maior cota inferior, ou ínfimo, de  $X$  e satisfaz:

- (i)  $a_0 \leq x \quad \forall x \in X$ , ou seja,  $a_0$  é uma cota inferior de  $X$ ;
- (ii)  $a \leq a_0$  para toda cota inferior  $a$  de  $X$ .

De forma análoga se define o conceito de supremo de conjunto. Um elemento  $b_0 \in \mathbb{L}$  chama-se supremo de um conjunto  $X$  quando  $b_0$  é a menor das cotas superiores de  $X$  em  $\mathbb{L}$ . Assim é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as duas condições abaixo:

- (i)  $x \leq b \quad \forall x \in X$ , ou seja,  $b$  é uma cota superior de  $X$ ;
- (ii)  $b_0 \leq b$  para toda cota superior  $b$  de  $X$ .

Observamos que o ínfimo e o supremo de um conjunto, se existem, são únicos. Denotamos o ínfimo de  $X$  por  $\bigwedge X$  ou  $\bigwedge_{j \in J} x_j$  quando  $X = \{x_j : j \in J\}$  para algum conjunto de índices  $J$ , e o supremo de  $X$  por  $\bigvee X$  ou  $\bigvee_{j \in J} x_j$ .

**Definição 2.2** (Reticulado e Reticulado Completo [7, 22]). *Um conjunto parcialmente ordenado  $\mathbb{L}$  é um reticulado se todo subconjunto finito de  $\mathbb{L}$  admitir um supremo e um ínfimo em  $\mathbb{L}$ . Um reticulado  $\mathbb{L}$  é completo se todo subconjunto, finito ou infinito, de  $\mathbb{L}$  admitir supremo e ínfimo em  $\mathbb{L}$ .*

O conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  é um exemplo de um reticulado, mas não é completo, pois não possui maior e menor elemento. Para obter um reticulado completo precisamos adicionar ao conjunto dos números reais os símbolos  $-\infty$  e  $+\infty$ , representando o menor e maior elemento do conjunto  $\mathbb{R}_{\pm\infty} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . Analogamente,  $\mathbb{Z}_{\pm\infty} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$  é também um exemplo de um reticulado completo.

Um reticulado  $\mathbb{L}$  é *limitado* se possui um elemento mínimo e um elemento máximo. Denotemos por  $0_{\mathbb{L}}$  ou alternativamente por  $-\infty$  o elemento mínimo e por  $1_{\mathbb{L}}$  ou  $+\infty$  o elemento máximo. Em um reticulado limitado definimos  $\bigvee \emptyset = 0_{\mathbb{L}}$  e  $\bigwedge \emptyset = 1_{\mathbb{L}}$ . Note que todo reticulado completo é limitado.

Um conjunto  $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{L}$ , onde  $\mathbb{L}$  é um reticulado, é chamado *subreticulado* se para quaisquer dois elementos  $x, y \in \mathbb{M}$  tivermos  $x \vee y \in \mathbb{M}$  e  $x \wedge y \in \mathbb{M}$ . Além disso, se para todo  $X \subseteq \mathbb{M}$  tem-se  $\bigvee X \in \mathbb{M}$  e  $\bigwedge X \in \mathbb{M}$ , então  $\mathbb{M}$  é chamado *subreticulado completo*. Por exemplo, o intervalo fechado  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}_{\pm\infty}$  é um subreticulado completo sobre a ordem usual.

**Definição 2.3** (Inf-fechado e Sup-fechado [7, 22]). *Seja  $X$  um subconjunto de um reticulado completo  $\mathbb{L}$ , então dizemos que  $X$  é inf-fechado se todo subconjunto de  $X$  possui um ínfimo em  $X$ . Por dualidade,  $X$  é chamado sup-fechado se o supremo de qualquer subconjunto de  $X$  está contido em  $X$ .*

### 2.1.1 Extensão de Reticulado Limitado com Ordem de Grupo

Operações básicas, como por exemplo adição, podem ser definidas em reticulados, além das operações de supremo e ínfimo, se tivermos uma estrutura de grupo. Consideremos um reticulado arbitrário  $\mathbb{L}$ . Segundo Birkhoff [7],  $\mathbb{L}$  é um *reticulado com ordem de grupo* ou um *l-grupo* se  $\mathbb{L}$  é um grupo com uma certa operação (a notação aditiva será usada para operar no grupo) e se toda translação de grupo é isótoma. Uma translação de grupo é isótoma se a seguinte condição for satisfeita para todo  $x$  e  $y$  em  $\mathbb{L}$  tal que  $x \leq y$ :

$$a + x + b \leq a + y + b \quad \forall a, b \in \mathbb{L}. \quad (2.1)$$

Observamos que o único reticulado com ordem de grupo que é também um reticulado limitado é o grupo trivial  $\{0\}$ , onde 0 denota o elemento neutro da operação adição [7].

Na teoria matemática da álgebra minimax [8], estruturas algébricas denominadas blogs - “bounded lattice ordered groups”, que são definidos por um reticulado limitado  $\mathbb{G}$  cujo conjunto dos elementos finitos  $\mathbb{F} = \mathbb{G} \setminus \{+\infty, -\infty\}$  forma um l-grupo, onde o símbolo  $+\infty$  denota o  $\bigvee \mathbb{G}$ , o maior elemento de  $\mathbb{G}$ , e o símbolo  $-\infty$  denota o  $\bigwedge \mathbb{G}$ , o menor elemento de  $\mathbb{G}$ , sugere a existência de estruturas de grupos em reticulados limitados diferente de  $\{0\}$ . Em [48] essa estrutura é chamada *extensão de reticulado limitado com ordem de grupo (ou extensão de l-grupo)* ao invés de blog. No caso onde a extensão de l-grupo  $\mathbb{G}$  é um reticulado completo dizemos *extensão de l-grupo completo*.

Para que a definição de extensão de l-grupo  $\mathbb{G}$  seja consistente é necessário definir duas operações “+” e “+’” como segue:

$$(-\infty) + (+\infty) = (+\infty) + (-\infty) = -\infty, \quad (2.2)$$

$$(-\infty) +' (+\infty) = (+\infty) +' (-\infty) = +\infty. \quad (2.3)$$

Desta forma, um l-grupo estendido pode ser denotado por  $(\mathbb{G}, \vee, \wedge, +, +')$ . Exemplos de extensões de l-grupos completos totalmente ordenados são  $(\mathbb{R}_{\pm\infty}, \vee, \wedge, +, +')$  e  $(\mathbb{Z}_{\pm\infty}, \vee, \wedge, +, +')$  onde  $+$  e  $+'$  coincidem com a operação usual de adição em  $\mathbb{R}$ .

A teoria da álgebra minimax inclui a teoria da conjugação [8]. Numa extensão de l-grupo completo, um elemento  $x \in \mathbb{G}$  corresponde a um elemento  $x^* \in \mathbb{G}$  chamado de conjugado de  $x$ , definido como:

$$x^* = \begin{cases} -x, & \text{se } x \in \mathbb{F}, \\ -\infty, & \text{se } x = +\infty, \\ +\infty, & \text{se } x = -\infty. \end{cases} \quad (2.4)$$

onde  $-x$  denota o inverso aditivo de  $x \in \mathbb{F}$ .

Uma matriz  $A \in \mathbb{G}^{m \times n}$  corresponde a uma matriz conjugada  $A^* \in \mathbb{G}^{n \times m}$ , onde cada componente  $a_{ij}^*$  de  $A^*$  é dado por

$$a_{ij}^* = (a_{ji})^*. \quad (2.5)$$

Logo  $(A^*)^* = A$ .

As operações de máximo e mínimo entre duas matrizes de dimensões compatíveis é realizada componente a componente. Por exemplo,  $C = A \vee B$  é dada por  $c_{ij} = [a_{ij} \vee b_{ij}]$ , para  $A, B \in \mathbb{G}^{m \times n}$ . De maneira semelhante, diz-se que  $A$  é menor ou igual a  $B$ , denotado por  $A \leq B$ , e  $A$  estritamente menor que  $B$ , denotado por  $A < B$ , se e somente se para cada entrada das matrizes tem-se  $a_{ij} \leq b_{ij}$  e  $a_{ij} < b_{ij}$ , respectivamente.

Os modelos de memórias associativas morfológicas, discutidos no próximo capítulo, utilizam dois tipos de produtos de matrizes. Sejam as matrizes,  $A$  de dimensão  $m \times p$  e  $B$  de dimensão  $p \times n$ , com entradas em  $\mathbb{G}$ , o produto-máximo de  $A$  por  $B$  é definido como a matriz  $C = A \boxtimes B$ , e o produto-mínimo de  $A$  por  $B$  é definido como a matriz  $D = A \boxdot B$ , e são dadas pelas seguintes equações:

$$c_{ij} = \bigvee_{k=1}^p (a_{ik} + b_{kj}) \quad \text{e} \quad d_{ij} = \bigwedge_{k=1}^p (a_{ik} +' b_{kj}). \quad (2.6)$$

A partir das definições anteriores, uma elegante relação de dualidade entre as operações de matrizes [8] são dadas por

$$(A \boxtimes B)^* = B^* \boxdot A^* \quad \text{e} \quad (A \boxdot B)^* = B^* \boxtimes A^*, \quad (2.7)$$

para matrizes  $A$  e  $B$  de dimensões apropriadas com entradas em  $\mathbb{R}_{\pm\infty}$ .

### 2.1.2 Operadores em Reticulados Completos

Neste trabalho usaremos a terminologia operador para uma aplicação entre dois reticulados completos. Estamos interessados em operadores com algumas propriedades específicas, tais como operadores que preservam a ordem e que comutam com as operações de supremo e ínfimo. Eis algumas definições que nos serão úteis.

**Definição 2.4** (Operadores Crescentes e Decrescentes). *Sejam  $\mathbb{L}$  e  $\mathbb{M}$  reticulados completos. O operador  $\psi : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$  é chamado:*

1. *crescente se  $x \leq y$  implica  $\psi(x) \leq \psi(y)$  para todo  $x, y \in \mathbb{L}$ ;*
2. *decrescente se  $x \leq y$  implica  $\psi(x) \geq \psi(y)$  para todo  $x, y \in \mathbb{L}$ ;*

**Definição 2.5** (Endomorfismo [7]). *Sejam  $\phi : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$  um operador num reticulado completo  $\mathbb{L}$ . Dizemos que  $\phi$  é um endomorfismo em um reticulado completo  $\mathbb{L}$  se as seguintes equações são verdadeiras para todo subconjunto  $X \subseteq \mathbb{L}$ :*

$$\phi \left( \bigvee X \right) = \bigvee_{x \in X} \phi(x) \quad e \quad \phi \left( \bigwedge X \right) = \bigwedge_{x \in X} \phi(x). \quad (2.8)$$

**Definição 2.6** (Domínio de invariância de um operador). *Seja  $\psi$  um operador em  $\mathbb{L}$  e seja  $x$  um elemento de  $\mathbb{L}$  tal que  $\psi(x) = x$  então  $x$  é um ponto fixo de  $\psi$  ou, alternativamente, dizemos que  $x$  é invariante sobre  $\psi$ . O conjunto de todos os elementos invariantes sobre  $\psi$  é denotado por  $Inv(\psi)$  e chamado de domínio invariante de  $\psi$ .*

**Definição 2.7** (Operadores Extensivos e Anti-extensivos). *Seja  $\mathbb{L}$  um reticulado completo. Um operador  $\psi$  em  $\mathbb{L}$  é chamado:*

1. *extensivo se  $\psi(x) \geq x$  para todo  $x \in \mathbb{L}$ ;*
2. *anti-extensivo se  $\psi(x) \leq x$  para todo  $x \in \mathbb{L}$ .*

Operadores que comutam com as operações de supremo e ínfimo desempenham um papel importante na MM. No contexto de reticulado completo, tem-se a seguinte definição algébrica para estes operadores.

**Definição 2.8** (Dilatação e Erosão [22, 23, 45]). *Sejam  $\mathbb{L}, \mathbb{M}$  reticulados completos. Um operador  $\delta : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ , que satisfaz a seguinte equação, para todo  $X \subseteq \mathbb{L}$ , é chamado de dilatação.*

$$\delta \left( \bigvee X \right) = \bigvee_{x \in X} \delta(x). \quad (2.9)$$

*De forma análoga, um operador  $\varepsilon : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$  representa uma erosão se satisfaz a seguinte equação, para todo  $X \subseteq \mathbb{L}$*

$$\varepsilon \left( \bigwedge X \right) = \bigwedge_{x \in X} \varepsilon(x). \quad (2.10)$$

Em outras palavras, um operador  $\delta$  representa uma dilatação quando comuta com a operação de supremo, e um operador  $\varepsilon$  representa um erosão quando comuta com a operação de ínfimo. Na literatura existem vários outros operadores morfológicos que podem ser obtidos combinando estes dois operadores elementares, mas neste trabalho focamos somente nos operadores de dilatação e erosão, e nos operadores de abertura e fechamento definidos na seção 2.1.4.

### 2.1.3 Adjunção

A adjunção desempenha um papel importante na teoria dos operadores morfológicos. Os operadores de dilatação e erosão estão geralmente relacionados por meio de uma relação de dualidade [7], que pode ser baseada no conceito de adjunção [22].

**Definição 2.9** (Adjunção [22, 23, 45]). *Sejam  $\mathbb{L}$  e  $\mathbb{M}$  reticulados completos. Considere os operadores  $\varepsilon : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$  e  $\delta : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{L}$ . O par  $(\varepsilon, \delta)$  representa uma adjunção entre  $\mathbb{L}$  e  $\mathbb{M}$  se*

$$\delta(y) \leq x \iff y \leq \varepsilon(x), \quad (2.11)$$

para todo  $x \in \mathbb{L}$  e para todo  $y \in \mathbb{M}$ .

A seguinte proposição mostra que a adjunção representa um conceito de dualidade entre os operadores de dilatação e erosão.

**Proposição 2.1** (Adjunção, Dilatação e Erosão [22, 23, 45]). *Sejam  $\mathbb{L}$  e  $\mathbb{M}$  reticulados completos e considere os operadores  $\varepsilon : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$  e  $\delta : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{L}$ .*

1. *Se  $(\varepsilon, \delta)$  é uma adjunção entre  $\mathbb{L}$  e  $\mathbb{M}$ , então  $\varepsilon$  é uma erosão e  $\delta$  é uma dilatação.*
2. *Para toda dilatação  $\delta$  existe uma única erosão  $\varepsilon$  tal que  $(\varepsilon, \delta)$  forma uma adjunção. A erosão adjunta é dada por:*

$$\varepsilon(x) = \bigvee \{y \in \mathbb{M} : \delta(y) \leq x\} \quad (2.12)$$

3. *Para toda erosão  $\varepsilon$  existe uma única dilatação  $\delta$  tal que  $(\varepsilon, \delta)$  forma uma adjunção. A dilatação adjunta é dada por:*

$$\delta(y) = \bigwedge \{x \in \mathbb{L} : y \leq \varepsilon(x)\}. \quad (2.13)$$

A proposição acima garante que existe uma única erosão via adjunção que pode ser associada com uma certa dilatação, e vice-versa.

### 2.1.4 Aberturas e Fechamentos

Aberturas e fechamentos são operações que ocorrem em vários ramos da matemática, como na topologia. Por exemplo, seja  $E$  um espaço topológico, todo subconjunto  $X \subseteq E$  pode ser associado com seu interior,  $\text{int}(X)$ , que é o maior conjunto aberto contido em  $X$ . Da mesma forma,  $X$  pode ser associado ao seu fecho  $\overline{X}$ , que é o menor conjunto fechado contendo  $X$ . Neste caso a aplicação que leva um conjunto em seu interior é uma abertura e a aplicação que

leva um conjunto em seu fecho é um fechamento [43]. As proposições seguintes são encontradas em [22].

**Definição 2.10** (Abertura e Fechamento [43]). *Um operador  $\psi : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ , onde  $\mathbb{L}$  é um reticulado completo, é chamado:*

1. *idempotente se  $\psi^2 = \psi$ ;*
2. *uma abertura se  $\psi$  é crescente, anti-extensivo e idempotente;*
3. *um fechamento se  $\psi$  é crescente, extensivo e idempotente.*

**Proposição 2.2.** *Seja  $\mathbb{L}$  um reticulado completo.*

1. *Se  $\mathcal{A}$  é uma abertura em  $\mathbb{L}$ , então  $Inv(\mathcal{A})$  é sup-fechado e*

$$\mathcal{A}(x) = \bigvee \{y \in Inv(\mathcal{A}) : y \leq x\}. \quad (2.14)$$

2. *Se  $\mathcal{B}$  é um fechamento em  $\mathbb{L}$ , então  $Inv(\mathcal{B})$  é inf-fechado e*

$$\mathcal{B}(x) = \bigwedge \{y \in Inv(\mathcal{B}) : y \geq x\}. \quad (2.15)$$

A proposição anterior afirma que todo subconjunto  $X \subseteq Inv(\mathcal{A})$ , onde  $\mathcal{A}$  é uma abertura, possui um supremo em  $Inv(\mathcal{A})$ . Por dualidade, todo subconjunto  $X \subseteq Inv(\mathcal{B})$ , onde  $\mathcal{B}$  é um fechamento, possui um ínfimo em  $Inv(\mathcal{B})$ . O resultado seguinte relaciona aberturas e fechamentos com seus respectivos domínios de invariância.

**Proposição 2.3.** *Seja  $\mathbb{L}$  um reticulado completo:*

**a-)** *Sejam  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  aberturas em  $\mathbb{L}$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $\mathcal{A}_1(x) \leq \mathcal{A}_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{L}$ ;
- (ii)  $Inv(\mathcal{A}_1) \subseteq Inv(\mathcal{A}_2)$ ,  
*em particular,  $\mathcal{A}_1(x) = \mathcal{A}_2(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{L}$ , se e somente se  $Inv(\mathcal{A}_1) = Inv(\mathcal{A}_2)$ .*

**b-)** *Sejam  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  fechamentos em  $\mathbb{L}$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $\mathcal{B}_1(x) \geq \mathcal{B}_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{L}$ ;
- (ii)  $Inv(\mathcal{B}_1) \subseteq Inv(\mathcal{B}_2)$ ,  
*em particular,  $\mathcal{B}_1(x) = \mathcal{B}_2(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{L}$ , se e somente se  $Inv(\mathcal{B}_1) = Inv(\mathcal{B}_2)$ .*

Nas seções anteriores apresentamos a caracterização da morfologia matemática sobre a estrutura dos reticulados completos numa forma algébrica. Contudo, a morfologia matemática, especificamente a MM binária, não surgiu dessa abordagem. Na próxima seção mostraremos o sentido intuitivo no qual surgiu a morfologia matemática.

## 2.2 DILATAÇÃO E EROÇÃO PARA IMAGENS BINÁRIAS

A morfologia matemática inicialmente foi desenvolvida como uma ferramenta para a análise de imagens binárias. Uma imagem binária  $A$  é identificada como um subconjunto de  $X$ , onde  $X$  denota o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^d$  ou o espaço  $\mathbb{Z}^d$  [55].

Os operadores elementares da morfologia matemática binária, erosão e dilatação, podem ser descritos respectivamente em termos de inclusões e interseções entre conjuntos. Especificamente, estes operadores são associados com um subconjunto  $S$  de  $X$ , chamado de *elemento estruturante* (SE), que pode ser visto como uma imagem de acordo com a definição de imagem binária acima.

Sejam  $A \subseteq X$  uma imagem binária e  $S \subseteq X$  um elemento estruturante binário. A erosão binária  $\mathcal{E}_B(A, S)$  e a dilatação binária  $\mathcal{D}_B(A, S)$  de uma imagem  $A$  pelo elemento estruturante  $S$  são definidas em termos de translações e reflexões de conjuntos. Por exemplo, a *translação*  $S_x$  de  $S$  por  $x \in X$  é dado por  $S_x = \{s + x : s \in S\}$ , e a *reflexão* de  $S$  em torno da origem é dada por  $\bar{S} = \{-s \in X : s \in S\}$ , e  $\bar{S}_x$  denota a translação de  $\bar{S}$  por  $x$ . Assim a erosão  $\mathcal{E}_B(A, S)$  e a dilatação  $\mathcal{D}_B(A, S)$  de uma imagem binária  $A$  por um elemento estruturante  $S$  são definidas como [55]

$$\mathcal{E}_B(A, S) = \{x \in X : S_x \subseteq A\} = \bigcap_{s \in \bar{S}} A_s, \quad (2.16)$$

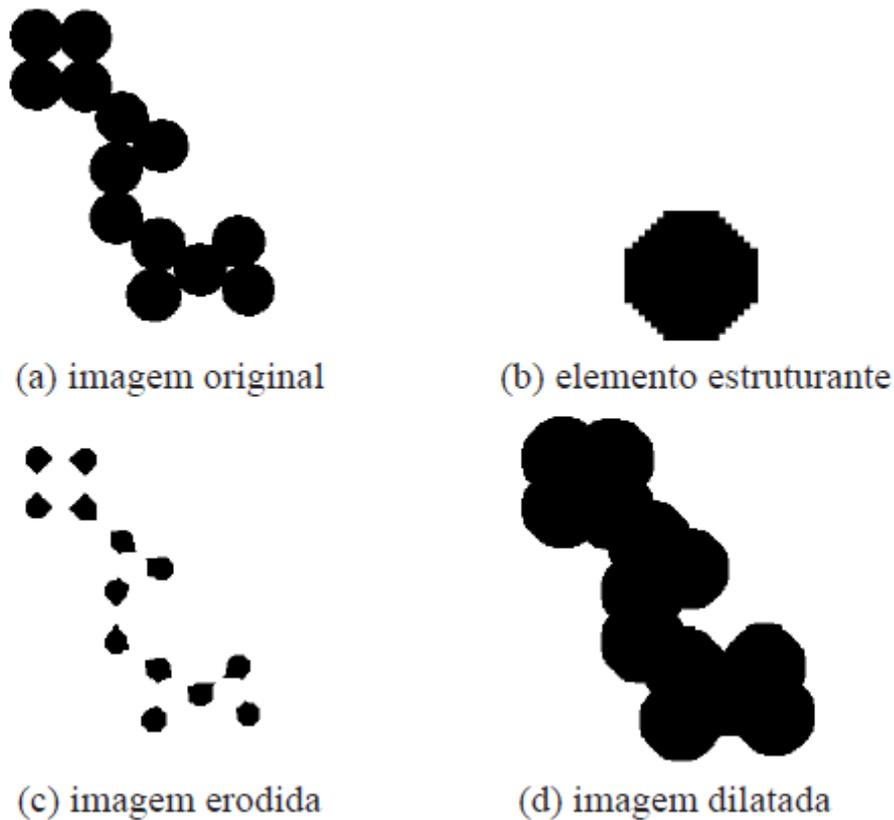
$$\mathcal{D}_B(A, S) = \{x \in X : \bar{S}_x \cap A \neq \emptyset\} = \bigcup_{s \in S} A_s = \bigcup_{a \in A} S_a. \quad (2.17)$$

Observamos que as equações (2.16) e (2.17) correspondem, respectivamente, a subtração e a adição de Minkowski [31, 44]. Uma erosão binária, dada pela equação (2.16), calcula em quais pontos  $x$  do espaço  $X$  um elemento estruturante  $S$  está *incluso* em uma imagem  $A$ , enquanto que uma dilatação binária, dada pela equação (2.17), mede em quais pontos o elemento estruturante refletido  $\bar{S}$  se *intercepta* com a imagem  $A$ . A Figura 2.1 mostra um exemplo de erosão e dilatação de uma imagem binária onde o elemento estruturante é o disco de raio 11 pixels.

As definições de erosão e dilatação binária dadas pelas equações (2.16) e (2.17) satisfazem as definições de erosão e dilatação algébrica, dadas pelas equações (2.10) e (2.9), respectivamente, para um elemento estruturante  $S$  fixo. De fato, os operadores  $\cap$  e  $\cup$  representam as operações de ínfimo e supremo no reticulado completo  $\mathcal{P}(X)$  (conjuntos de todos os subconjuntos de  $X$ ). Desta forma, as operações de erosão e dilatação binária também representam uma erosão e uma dilatação no sentido algébrico.

Posteriormente diversas abordagens foram propostas para estender a MM binária para imagens em tons de cinza e imagens multivalor [4, 22, 44].

**Figura 2.1** –(a) Imagem original binária (256 X 256 pixels), (b) Elemento estruturante: disco de raio 11 pixels, (c) Imagem original erodida pelo elemento estruturante, (d) Imagem original dilatada pelo elemento estruturante.



### 2.3 DILATAÇÃO E EROSIÃO PARA IMAGENS MULTIVALOR

Em termos gerais, uma imagem  $x$  é uma função  $x : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{V}$  onde  $\mathbb{V}$  é um conjunto de valores e  $\mathcal{D}$  um conjunto de pontos. Embora cada valor  $x(d)$  de uma imagem  $x$  seja um elemento de  $\mathbb{V}$ ,  $x(d)$  pode ser composto de vários valores, como por exemplo, se  $\mathbb{V} = \mathbb{R}^\nu$ , então  $x(d) = (x_1(d), \dots, x_\nu(d))$ , para cada  $i = 1, \dots, \nu$ , onde  $x_i(d) \in \mathbb{R}$ . Formalmente, se o conjunto  $\mathbb{V}$  pode ser escrito como o produto cartesiano  $\mathbb{V} = \prod_{i=1}^\nu \mathbb{V}_i$ , com  $\nu > 1$ , então  $\mathbb{V}$  é chamado *conjunto multivalor*. Logo, uma *imagem multivalor* é uma função  $x : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{V}$ , onde  $\mathbb{V}$  é um conjunto com múltiplos valores [41].

No contexto de reticulados completos, uma imagem  $x$  é uma função de um domínio espacial  $\mathcal{D}$  em um reticulado completo  $\mathbb{V}$ . Por exemplo, tem-se uma imagem em tons de cinza se  $\mathbb{V}$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}_{\pm\infty}$  ou  $\mathbb{Z}_{\pm\infty}$ . No caso onde  $\mathbb{V}$  são subconjuntos de  $\mathbb{R}_{\pm\infty}^\nu$  ou  $\mathbb{Z}_{\pm\infty}^\nu$ , para  $\nu > 1$ , tem-se uma imagem multivalor. Lembrando que uma imagem multivalor é um caso particular de imagem colorida.

Consideramos, neste trabalho, somente domínios espaciais finitos, assim  $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ . Neste caso, uma imagem  $\mathbf{x}$  corresponde a um vetor  $[x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{V}^n$ , onde  $x_j = \mathbf{x}(d_j)$  para todo  $j = 1, \dots, n$ .

Assumimos que  $\mathbb{V}^n$ , o conjunto onde pertencem as memórias fundamentais, é dado pelo produto cartesiano de um reticulado completo  $\mathbb{V}$ , ou seja,  $\mathbb{V}^n = \mathbb{V} \times \dots \times \mathbb{V}$ . Lembrando que  $\mathbb{V}$  é um reticulado completo munido de uma ordem parcial  $\leq$  tal que todo subconjunto não vazio  $X \subseteq \mathbb{V}$  tem um supremo e um ínfimo em  $\mathbb{V}$ . Como veremos no capítulo 4, o conjunto dos valores dos pixels das imagens coloridas pode ser dotado de uma ordem que fornece uma estrutura de reticulado completo.

Desta forma, podemos definir operadores  $\delta$  e  $\varepsilon$  de  $\mathbb{V}^n$  em  $\mathbb{V}$  como segue, para todo conjunto de índices  $\mathcal{J}, \mathcal{K} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ :

$$\delta(\mathbf{x}) = \bigvee_{j \in \mathcal{J}} x_j \quad \text{e} \quad \varepsilon(\mathbf{x}) = \bigwedge_{k \in \mathcal{K}} x_k . \quad (2.18)$$

Os operadores  $\delta$  e  $\varepsilon$  definidos acima, comutam com a operação de supremo e ínfimo, respectivamente. Portanto, tem-se a seguinte proposição [58]:

**Proposição 2.4.** *Os operadores  $\delta, \varepsilon : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{V}$  dados por (2.18) são, respectivamente, uma dilatação e uma erosão para todo conjunto de índices  $\mathcal{J}, \mathcal{K} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ .*

*Demonstração.* A demonstração segue do fato que as operações de supremo e ínfimo serem associativas e idempotentes.

Note que os operadores de dilatação e erosão definidos em (2.18) dependem somente de um reticulado completo, ou seja, um esquema ordenado para os elementos de  $\mathbb{V}$ . Se os elementos de  $\mathbb{V}$  tem  $\nu > 1$  valores, como no caso de imagens coloridas, se torna necessário definir uma ordem para estes dados com multivalores. No capítulo 4 veremos alguns esquemas ordenados, que fornecem uma estrutura de reticulado completo para o conjunto das cores.

## CAPÍTULO 3

### TEORIA GERAL DAS MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS MORFOLÓGICAS

Este capítulo contém uma breve revisão sobre as memórias associativas morfológicas em tons de cinza, introduzidas por Ritter e Sussner [36, 37, 38, 51], voltando a atenção para o caso autoassociativo. Depois, uma discussão detalhada das memórias autoassociativas esparsas em reticulados introduzidas por Valle [58] é apresentada, incluindo a demonstração de teoremas sobre a capacidade de armazenamento e tolerância a ruído. O capítulo termina estabelecendo uma relação entre as MAMs em tons de cinza e as memórias autoassociativas esparsas em reticulados.

#### 3.1 MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS NEURAIS

Memórias associativas (AMs) são modelos inspirados na forma com que as informações são armazenadas e recordadas pelo cérebro. Por exemplo, ao vermos algumas cenas de um filme que já assistimos, nos recordamos da história do filme, ou parte dele. Investigações de como o cérebro é capaz de fazer tais associações tem levado a vários modelos de redes neurais que atuam como memórias associativas [38].

Uma memória associativa é um modelo que armazena pares de associações  $(x, y)$ , onde  $x \in \mathcal{X}$  e  $y \in \mathcal{Y}$ . O conjunto finito de  $p$  pares de associações  $\{(x^\xi, y^\xi) : \xi = 1, \dots, p\}$  é chamado conjunto das memórias fundamentais. A entrada do sistema (*vetor*  $x$ ) é conhecido como *padrão de entrada* e a saída (*vetor*  $y$ ) é chamado *padrão recordado*.

Um modelo de memória associativa pode ser descrito, matematicamente, como: dado um conjunto finito de memórias fundamentais  $\{(x^\xi, y^\xi) : \xi = 1, \dots, p\}$  a ser armazenado, o objetivo é determinar uma aplicação  $G$  tal que  $G(x^\xi) = y^\xi$  para todo  $\xi = 1, \dots, p$ . Além disso, a aplicação  $G$  deve ser capaz de recordar um padrão memorizado, mesmo que seja apresentado um padrão ruidoso ou incompleto. Assim, se  $\tilde{x}^\xi$  é uma versão ruidosa ou incompleta de  $x^\xi$ , deseja-se que  $\tilde{x}^\xi$  e  $x^\xi$  produzam a mesma saída, ou seja,  $G(\tilde{x}^\xi) = y^\xi$ . Desta forma, diz-se que a função  $G$  possui uma certa tolerância com relação a ruído.

O processo de determinar ou sintetizar uma memória associativa é chamado *fase de armazenamento*. A qualidade dos resultados fornecidos pela aplicação associativa está relacionado com o algoritmo que especifica como a aplicação  $G$  deve ser sintetizada. Um dos problemas que surgem relacionado a memórias associativas é a criação de associações que não fazem parte do conjunto de memórias fundamentais. Estas associações, armazenadas indevidamente, são chamadas *memórias espúrias*. Diz-se que uma memória associativa armazena corretamente o conjunto de memórias fundamentais se  $G(x^\xi) = y^\xi$  para todo  $\xi = 1, \dots, p$ .

Terminada a fase de armazenamento, inicia-se a *fase de recordação*. Nesta fase podemos verificar se as memórias fundamentais foram corretamente armazenadas e testar a eficiência da memória associativa na correção de erros, apresentando as entradas fundamentais corrompidas com vários tipos de ruído e observando a saída resultante [20]. O conjunto dos pontos  $x \in \mathcal{X}$  tais que  $G(x) = y$  é chamado *região de recordação* do padrão  $y$  [57].

As memórias associativas são classificadas como *memórias heteroassociativas* ou *memórias autoassociativas*. Uma memória é dita autoassociativa quando o conjunto de memórias fundamentais é da forma  $\{(x^\xi, x^\xi) : \xi = 1, \dots, p\}$ . Caso contrário é dito heteroassociativa.

### 3.2 MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS MORFOLÓGICAS EM TONS DE CINZA

As Memórias Associativas Morfológicas (MAMs), introduzidas por Ritter e Sussner [36, 38], são redes neurais artificiais descritas por um modelo neural morfológico, onde cada neurônio executa uma operação elementar da morfologia matemática. Estas MAMs são definidas em termos de operações da álgebra de reticulados, onde o produto usual entre duas matrizes é substituído pelas operações produto-máximo e produto-mínimo, introduzidas na seção 2.1.1.

A principal diferença entre os modelos clássicos de memórias associativas e os modelos morfológicos está nas operações produto-máximo e produto-mínimo. O modelo mais simples de memória associativa morfológica ocorre quando temos uma rede de camada única. Neste caso, esta memória pode ser descrita por uma aplicação  $\mathcal{W}_{XY} : \mathbb{R}_{\pm\infty}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\pm\infty}^m$  em termos de uma matriz  $W_{XY} \in \mathbb{R}_{\pm\infty}^{m \times n}$  e o produto máximo, ou uma aplicação  $\mathcal{M}_{XY} : \mathbb{R}_{\pm\infty}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\pm\infty}^m$  em termos de uma matriz  $M_{XY} \in \mathbb{R}_{\pm\infty}^{m \times n}$  e o produto mínimo, como segue para todo padrão de entrada  $x \in \mathbb{R}_{\pm\infty}^n$ :

$$\mathcal{W}_{XY}(x) = W_{XY} \boxtimes x \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_{XY}(x) = M_{XY} \boxtimes x. \quad (3.1)$$

Consideramos as memórias fundamentais  $(x^\xi, y^\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  ao invés de  $(x^\xi, y^\xi)$  pertencentes a  $\mathbb{R}_{\pm\infty}^n \times \mathbb{R}_{\pm\infty}^m$ , uma vez que para efeitos práticos esta restrição é suficiente. Suponha que deseja-se armazenar o conjunto de memórias fundamentais  $\{(x^\xi, y^\xi) : \xi = 1, \dots, p\}$  usando uma memória associativa morfológica. Seja  $X$  de dimensão  $n \times p$  a matriz cujas colunas são formadas pelos vetores  $x^\xi \in \mathbb{R}^n$  e  $Y$ , de dimensão  $m \times p$ , a matriz cujas colunas são formadas pelos vetores  $y^\xi \in \mathbb{R}^m$  para  $\xi = 1, \dots, p$ . A fase de armazenamento das MAMs consiste de definir as matrizes  $W_{XY}$  ou  $M_{XY}$  de dimensão  $m \times n$  como segue:

$$W_{XY} = Y \boxtimes X^* = \bigwedge_{\xi=1}^p y^\xi \boxtimes (x^\xi)^*, \quad (3.2)$$

$$M_{XY} = Y \boxtimes X^* = \bigvee_{\xi=1}^p y^\xi \boxtimes (x^\xi)^*, \quad (3.3)$$

Note que podemos obter a seguinte igualdade  $W_{XY} = (M_{YX})^*$  a partir da equação (2.7).

Dado um padrão de entrada  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , a fase de recordação de um padrão  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  no modelo  $W_{XY}$  é dado pela equação  $\mathbf{y} = W_{XY}(\mathbf{x})$ . Dualmente, a fase de recordação de um padrão  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  no modelo  $M_{XY}$  é dado pela equação  $\mathbf{y} = M_{XY}(\mathbf{x})$ .

As matrizes  $W_{XY}$  e  $M_{XY}$  são chamadas de matrizes de pesos sinápticos. Fazendo uma interpretação da equação (3.1), podemos verificar que os operadores  $W_{XY}(\mathbf{x}) = W_{XY} \boxtimes \mathbf{x}$  e  $M_{XY}(\mathbf{x}) = M_{XY} \boxtimes \mathbf{x}$  são operações de dilatação e erosão da morfologia matemática. Desta forma, o processo de sintetização destas memórias consiste em determinar uma dilatação  $W_{XY}$  tal que  $W_{XY}(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{y}^\xi$  e uma erosão  $M_{XY}$  tal que  $M_{XY}(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{y}^\xi$  para todo  $\xi = 1, \dots, p$ .

Observamos que, uma dilatação é usada para remover ruído erosivo de uma imagem, e uma erosão é usada para remover ruído dilatativo. Diz-se que uma imagem  $\tilde{\mathbf{x}}$  é uma versão corrompida com ruído erosivo, também chamado ruído negativo, de uma imagem  $\mathbf{x}$ , se  $\tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x}$ . De forma semelhante, diz-se que uma imagem  $\tilde{\mathbf{x}}$  é uma versão corrompida com ruído dilatativo, também chamado ruído positivo, se  $\tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{x}$  [47].

Na próxima seção trataremos do caso autoassociativo onde as MAMs possuem características notáveis como ótima capacidade absoluta de armazenamento e convergência em uma única iteração.

### 3.3 MEMÓRIAS AUTOASSOCIATIVAS MORFOLÓGICAS EM TONS DE CINZA

Para o caso onde o conjunto de memórias fundamentais com  $p$  padrões é dado por  $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{x}^\xi) : \xi = 1, \dots, p\}$ , obtemos as memórias autoassociativas morfológicas  $W_{XX}$  e  $M_{XX}$  definidas como segue

$$W_{XX}(\mathbf{x}) = W_{XX} \boxtimes \mathbf{x} \quad \text{e} \quad M_{XX}(\mathbf{x}) = M_{XX} \boxtimes \mathbf{x}, \quad (3.4)$$

onde,

$$W_{XX} = \bigwedge_{\xi=1}^p \mathbf{x}^\xi \boxtimes (\mathbf{x}^\xi)^* \quad \text{e} \quad M_{XX} = \bigvee_{\xi=1}^p \mathbf{x}^\xi \boxtimes (\mathbf{x}^\xi)^*. \quad (3.5)$$

Lembremos da seguinte proposição a respeito das matrizes  $M_{XX}$  e  $W_{XX}$  [38].

**Proposição 3.1.** *Para qualquer conjunto de memórias fundamentais  $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\} \subseteq \mathbb{R}_{\pm\infty}^n$ , as matrizes  $M_{XX} \in \mathbb{R}_{\pm\infty}^{n \times n}$  e  $W_{XX} \in \mathbb{R}_{\pm\infty}^{n \times n}$  dadas por (3.5) satisfazem as equações:*

$$M_{XX} = \bigwedge \{A \in \mathbb{R}_{\pm\infty}^{n \times n} : A \boxtimes \mathbf{x}^\xi \geq \mathbf{x}^\xi, \forall \xi = 1, \dots, p\}, \quad (3.6)$$

e

$$W_{XX} = \bigvee \{B \in \mathbb{R}_{\pm\infty}^{n \times n} : B \boxtimes \mathbf{x}^\xi \leq \mathbf{x}^\xi, \forall \xi = 1, \dots, p\}. \quad (3.7)$$

A Proposição 3.1 afirma que as MAMs definidas em (3.1) são ótimas no seguinte sentido: se existe uma matriz  $A$  tal que  $A \boxtimes x^\xi = x^\xi$  para todo  $\xi = 1, \dots, p$ , então a matriz de pesos sinápticos  $M_{XX}$  também satisfaz  $M_{XX} \boxtimes x^\xi = x^\xi$  para todo  $\xi = 1, \dots, p$ . Adicionalmente, a desigualdade  $M_{XX} \leq A$  permanece verdadeira. Em outras palavras, se existe uma memória  $\mathcal{A}$ , dada por  $\mathcal{A}(x) = A \boxtimes x$ , tal que  $\mathcal{A}(x^\xi) = x^\xi$  para todo  $\xi$ , então a MAM em tons de cinza  $\mathcal{M}_{XX}$  também satisfaz  $\mathcal{M}_{XX}(x^\xi) = x^\xi$  e  $\mathcal{M}_{XX}(x) \leq \mathcal{A}(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}_{\pm\infty}^n$ . Semelhantemente, se existe uma memória  $\mathcal{B}$  tal que  $\mathcal{B}(x) = B \boxtimes x^\xi = x^\xi$ , então  $\mathcal{W}_{XX}(x^\xi) = W_{XX} \boxtimes x^\xi = x^\xi$  e  $\mathcal{B}(x) \leq \mathcal{W}_{XX}(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}_{\pm\infty}^n$ .

A fase de recordação das memórias autoassociativas morfológicas podem ser descritas exatamente em termos de seus pontos fixos [47, 51]. Lembrando que um vetor  $x \in \mathbb{R}_{\pm\infty}^n$  é um ponto fixo de  $\mathcal{W}_{XX}$  se  $W_{XX} \boxtimes x = x$ . Semelhantemente,  $x$  é um ponto fixo de  $\mathcal{M}_{XX}$  se  $M_{XX} \boxtimes x = x$ . Dizemos que um ponto fixo  $x$  é finito se  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Nesta seção faremos uma revisão das memórias autoassociativas morfológicas em tons de cinza. Nosso objetivo é apresentar alguns resultados que caracterizam os pontos fixos desta classe de memórias. A proposição abaixo mostra que as memórias  $\mathcal{W}_{XX}$  e  $\mathcal{M}_{XX}$  exibem ótima capacidade absoluta de armazenamento, em outras palavras, pode-se armazenar tantos padrões quanto desejados nestas memórias [51].

**Proposição 3.2.** *Para todo  $X = [x^1, \dots, x^p] \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , o conjunto dos pontos fixos de ambas  $\mathcal{W}_{XX}$  e  $\mathcal{M}_{XX}$  incluem o conjunto de memórias fundamentais  $x^1, \dots, x^p$ . Além disso, para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , tem-se  $W_{XX} \boxtimes x = \hat{x}$  e  $M_{XX} \boxtimes x = \check{x}$ , onde  $\hat{x}$  denota o supremo de  $x$  no conjunto dos pontos fixos de  $\mathcal{W}_{XX}$  e  $\check{x}$  denota o ínfimo de  $x$  no conjunto dos pontos fixos de  $\mathcal{M}_{XX}$ .*

O corolário abaixo afirma que a fase de recordação das memórias autoassociativas morfológicas é efetuada em um único passo [51].

**Corolário 3.3.** *Seja  $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ . O conjunto dos pontos fixos de  $\mathcal{W}_{XX}$  consiste de todos  $W_{XX} \boxtimes x$  tais que  $x \in \mathbb{R}^n$ . Semelhantemente, o conjunto dos pontos fixos de  $\mathcal{M}_{XX}$  consiste de todos  $M_{XX} \boxtimes x$  tais que  $x \in \mathbb{R}^n$ . Além disso, se  $x^\xi$  é o padrão recordado pela  $\mathcal{W}_{XX}$  após apresentarmos o padrão de entrada  $x$ , para  $\xi = 1, \dots, p$ , então  $x \leq x^\xi$ . Da mesma forma,  $M_{XX} \boxtimes x = x^\xi$  implica  $x \geq x^\xi$ .*

Os resultados seguintes envolvem expressões que combinam as memórias fundamentais  $x^\xi$  com operações  $\vee$  e  $\wedge$ . Expressões deste tipo são chamados *polinômios reticulados* em  $x^\xi$  [7]. Mais precisamente, usaremos a seguinte definição recursiva: *Todo  $x^\xi$ , onde  $\xi = 1, \dots, p$ , é um polinômio reticulado em  $x^1, \dots, x^p$ . Se  $p$  e  $q$  são polinômios reticulados em  $x^1, \dots, x^p$  então  $p \vee q$  e  $p \wedge q$  são também polinômios reticulados em  $x^1, \dots, x^p$ .*

A proposição seguinte estabelece condições suficientes para os pontos fixos de  $\mathcal{W}_{XX}$ . Os pontos fixos de  $\mathcal{M}_{XX}$  podem ser dados de maneira semelhante [51].

**Proposição 3.4.** *Seja  $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$  um conjunto de memórias fundamentais. O conjunto dos pontos fixos de  $\mathcal{W}_{XX}$  incluem todas as expressões correspondentes a polinômios reticulados*

em  $x^{(\xi, a)}$ , onde cada  $x^{(\xi, a)}$  é um múltiplo  $a_i^\xi + x^\xi$  de algum  $x^\xi$ . Especificamente, o conjunto dos pontos fixos de  $\mathcal{W}_{XX}$  inclui a seguinte expressão:

$$\bigvee_{i=1}^m \bigwedge_{\xi=1}^p (a_i^\xi + x^\xi), \quad \text{onde } a_i^\xi \in \mathbb{R}_{\pm\infty}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3.8)$$

Especificamente, se  $x \in \mathbb{R}^n$  pode ser escrito como dado em (3.8), então  $x$  é um ponto fixo de  $\mathcal{W}_{XX}$ . A proposição seguinte estabelece que os pontos fixos finitos de  $\mathcal{W}_{XX}$  são necessariamente desta forma [51].

**Proposição 3.5.** *Dado um conjunto de memórias fundamentais  $X = \{x^1, \dots, x^p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ , o conjunto dos pontos fixos finitos de  $\mathcal{W}_{XX}$  consiste exatamente das combinações lineares das colunas de  $W_{XX}$ . Alternativamente, o conjunto dos pontos fixos de  $\mathcal{W}_{XX}$  são dados exatamente por expressões da forma:*

$$\bigvee_{i=1}^n \bigwedge_{\xi=1}^p (a_i^\xi + x^\xi), \quad \text{onde } a_i^\xi \in \mathbb{R} \quad (3.9)$$

O corolário seguinte, combina os resultados anteriores para mostrar que o conjunto dos pontos fixos de  $\mathcal{W}_{XX}$  e  $\mathcal{M}_{XX}$  são iguais [51].

**Corolário 3.6.** *Dado um conjunto de memórias fundamentais  $X = \{x^1, \dots, x^p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ , o conjunto dos pontos fixos finitos de  $\mathcal{W}_{XX}$  e  $\mathcal{M}_{XX}$  coincidem. Se  $\mathcal{F}$  denota este conjunto então  $\mathcal{F}$  consiste exatamente dos polinômios reticulados em múltiplos de  $x^\xi$ , onde  $\xi = 1, \dots, p$ , da forma dada por (3.9). Alternativamente, o conjunto  $\mathcal{F}$  pode ser caracterizado como o conjunto de todos os polinômios reticulados da seguinte forma:*

$$\bigwedge_{j=1}^n \bigvee_{\xi=1}^p (c_j^\xi + x^\xi), \quad \text{onde } c_j^\xi \in \mathbb{R}. \quad (3.10)$$

Além disso, dado um padrão arbitrário  $x \in \mathbb{R}^n$ , tem-se

$$W_{XX} \boxtimes x = \hat{x} \quad e \quad M_{XX} \boxtimes x = \check{x} \quad (3.11)$$

onde  $\hat{x}$  denota o supremo de  $x$  em  $\mathcal{F}$  e  $\check{x}$  denota o ínfimo de  $x$  em  $\mathcal{F}$ .

O corolário 3.6 fornece condições necessárias e suficientes para a perfeita recordação de um padrão original  $x^\xi$ . Estas condições estão formuladas na proposição 3.7.

**Proposição 3.7.** *Dados um conjunto de memórias fundamentais  $X = \{x^1, \dots, x^p\} \subseteq \mathbb{R}^n$  e um padrão de entrada  $x \in \mathbb{R}^n$ . A igualdade  $W_{XX} \boxtimes x = x^\gamma$  permanece verdadeira se e somente se  $x \leq x^\gamma$  e não existe uma combinação linear  $l = \bigvee_{\xi=1}^p (c^\xi + x^\xi) \neq x^\gamma$  tal que  $x \leq l \leq x^\gamma$ .*

Os resultados anteriores mostraram uma caracterização dos pontos fixos e regiões de recordação das MAMs em tons de cinza. Em vista disto, a fase de recordação, em particular, a tolerância a ruído das MAMs podem ser qualificadas, ou seja, as MAMs são adequadas para lidar com certos tipos de ruído, tal como padrões com ruído erosivo usando o modelo  $\mathcal{W}_{XX}$ . Na próxima seção estudamos uma classe de memórias que armazenam e recordam imagens coloridas, como caso particular.

### 3.4 A CLASSE DAS MEMÓRIAS AUTOASSOCIATIVAS ESPARSAS EM RETICULADOS COMPLETOS

As memórias autoassociativas esparsas em reticulados completos (MAERCs) introduzidas em [58], são constituídas por uma simples camada de  $n$  neurônios onde cada neurônio executa uma operação de dilatação ou erosão definida em (2.18). As operações de supremo e ínfimo são utilizadas para definir dois modelos de memória que são definidas como segue: sejam  $\mathbb{V}$  um reticulado completo e  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{V}^n$  um padrão de entrada multivalor. O padrão de saída  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n] \in \mathbb{V}^n$  é calculado como:

$$y_i = \bigvee_{j \in \mathcal{J}_i} x_j \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n, \quad (3.12)$$

onde  $\mathcal{J}_i \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ , denota um conjunto de índices, que pode ser interpretado como o conjunto das junções sinápticas do  $i$ -ésimo neurônio morfológico. Assim a saída  $y_i$  é simplesmente o maior valor de entrada do neurônio via junções sinápticas. Conforme [58], o modelo baseado nas operações de supremo  $\mathcal{W} : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{V}^n$ , é uma dilatação, definida por  $\mathbf{y} = \mathcal{W}(\mathbf{x})$  com  $\mathbf{y}$  dado em (3.12), que pode ser aplicada para a reconstrução de imagens multivalor.

De forma semelhante são definidas as memórias baseadas nas operações de ínfimo. Seja  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{V}^n$  o padrão de entrada multivalor,  $\mathcal{K}_i \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  representa o conjunto de junções sinápticas do  $i$ -ésimo neurônio, assim o padrão de saída  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n] \in \mathbb{V}^n$  é calculado como:

$$y_i = \bigwedge_{k \in \mathcal{K}_i} x_k \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n. \quad (3.13)$$

Salientamos que o modelo dado em (3.13) é uma erosão  $\mathcal{M} : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{V}^n$ , definida por  $\mathbf{y} = \mathcal{M}(\mathbf{x})$ .

#### 3.4.1 Armazenamento de Padrões

Na fase de armazenamento das memórias autoassociativas esparsas em reticulados, tem-se o objetivo de determinar o conjunto de junções sinápticas dos neurônios morfológicos.

Em outras palavras, suponha que deseja-se armazenar o conjunto de memórias fundamentais  $\{x^1, x^2, \dots, x^p\} \subseteq \mathbb{V}^n$  em uma memória  $\mathcal{W}$  baseada nas operações de supremo, definida em (3.12), então devemos determinar o conjunto de índices  $\mathcal{J}_i \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  de forma que a equação abaixo seja verdadeira para todo  $\xi = 1, \dots, p$  e  $i = 1, \dots, n$ :

$$x_i^\xi = \bigvee_{j \in \mathcal{J}_i} x_j^\xi. \quad (3.14)$$

Observamos que o conjunto  $\overline{\mathcal{J}}_i = \{i\}$  satisfaz (3.14) para todo  $\xi \in \{1, \dots, p\}$  e  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Portanto o problema de encontrar um conjunto apropriado de junções sinápticas, tem pelo menos uma solução. Porém os conjuntos  $\overline{\mathcal{J}}_i$ 's fornecem uma memória  $\mathcal{W}$  que não exhibe tolerância com relação a ruído, pois tem-se:

$$\bigvee_{j \in \overline{\mathcal{J}}_i} x_j = x_i \quad \forall x \in \mathbb{V}^n.$$

Para obter uma memória  $\mathcal{W}$  com uma certa tolerância com relação a ruído, os conjuntos de índices  $\mathcal{J}_i$ 's devem incluir os conjuntos  $\overline{\mathcal{J}}_i$ 's, ou seja, procuramos o maior conjunto de índices  $\mathcal{J}_i$ 's que satisfaça (3.14), para todo  $\xi = 1, \dots, p$  e  $i = 1, \dots, n$ . Em outras palavras, o conjunto  $\mathcal{J}_i \in \{1, 2, \dots, n\}$  é definido como o maior conjunto tal que  $x_j^\xi \leq x_i^\xi$ . Matematicamente, tem-se para todo  $i = 1, \dots, n$ :

$$\mathcal{J}_i = \bigvee \{ \mathcal{J} \subseteq \{1, \dots, n\} : j \in \mathcal{J} \Leftrightarrow x_j^\xi \leq x_i^\xi, \forall \xi = 1, \dots, p \}. \quad (3.15)$$

ou, alternativamente

$$\mathcal{J}_i = \{ j : x_j^\xi \leq x_i^\xi, \forall \xi = 1, \dots, p \}. \quad (3.16)$$

Note que o conjunto  $\mathcal{J}_i$  corresponde a seguinte intersecção:

$$\mathcal{J}_i = \bigcap_{\xi=1}^p \mathcal{J}_i^\xi, \text{ onde } \mathcal{J}_i^\xi = \{ j : x_j^\xi \leq x_i^\xi \}, \forall \xi = 1, \dots, p. \quad (3.17)$$

Analogamente define-se o conjunto de junções sinápticas do  $i$ -ésimo neurônio de uma memória  $\mathcal{M}$ , baseada nas operações de ínfimo, como:

$$\mathcal{K}_i = \bigwedge \{ \mathcal{K} \subseteq \{1, \dots, n\} : k \in \mathcal{K} \Leftrightarrow x_i^\xi \leq x_k^\xi, \forall \xi = 1, \dots, p \}. \quad (3.18)$$

ou, alternativamente

$$\mathcal{K}_i = \{ k : x_i^\xi \leq x_k^\xi, \forall \xi = 1, \dots, p \}. \quad (3.19)$$

Os conjuntos de junções sinápticas das memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  dados por (3.15) e (3.18) podem ser representados pelo conjunto  $\mathcal{S}$  dos pares ordenados  $(i, j)$  dado por:

$$\mathcal{S} = \{(i, j) : x_i^\xi \leq x_j^\xi, \forall \xi = 1, \dots, p\} \quad (3.20)$$

com  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ , onde  $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$  é o conjunto dos inteiros positivos menores ou iguais a  $n$ , e cada par ordenado  $(i, j) \in \mathcal{S}$  representa uma conexão da  $j$ -ésima entrada do  $i$ -ésimo neurônio nos modelos  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$ . Note que  $(i, j) \in \mathcal{S}$  se  $x_i^\xi \leq x_j^\xi, \forall \xi = 1, \dots, p$ , logo o índice  $j$  pertence ao conjunto  $\mathcal{K}_i$ . Da mesma forma, se  $(j, i) \in \mathcal{S}$  então  $x_j^\xi \leq x_i^\xi$ , para todo  $\xi = 1, \dots, p$ , então o índice  $j$  pertence ao conjunto  $\mathcal{J}_i$ .

As memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  dadas em (3.12) e (3.13) podem ser expressas em termos do conjunto de junções sinápticas  $\mathcal{S}$  como segue: suponha que seja dado um conjunto de memórias fundamentais  $\{x^1, x^2, \dots, x^p\} \subseteq \mathbb{V}^n$ , onde cada  $x^\xi = [x_1^\xi, \dots, x_n^\xi] \in \mathbb{V}^n$  representa uma imagem multivalor. Seja  $\mathcal{W} : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{V}^n$  dada por:

$$[\mathcal{W}(x)]_i = \bigvee \{x_j : (j, i) \in \mathcal{S}\} \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (3.21)$$

Por dualidade, seja a aplicação  $\mathcal{M} : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{V}^n$ :

$$[\mathcal{M}(x)]_i = \bigwedge \{x_j : (i, j) \in \mathcal{S}\} \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (3.22)$$

As expressões dadas em (3.21) e (3.22) em termos do conjunto  $\mathcal{S}$ , são uma forma alternativa de representar as memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$ , respectivamente. Na próxima seção faremos uso destas expressões para mostrar as propriedades desta classe de memórias.

Observamos que existem outros modelos de Memórias esparsas como em [59]. As memórias autoassociativas nebulosas implicativas esparsas (SCAFIMs, *sparsely connected autoassociative fuzzy implicative memories*), exibem ótima capacidade absoluta de armazenamento e tolerância com respeito a padrões incompletos e erodidos. Especificamente, uma SCAFIM corresponde a uma rede neural morfológica de camada única cujos neurônios computam o máximo de uma  $t$ -norma contínua. Estas memórias podem ser usadas para reconstrução de grandes imagens em tons de cinza.

A classe das Memórias Associativas Morfológicas Nebulosas (FMAMs, *Fuzzy Morphological Associative Memories*), introduzido por Valle e Sussner [56, 60, 61, 62], generalizam as MAMs em tons de cinza considerando um reticulado completo dotado de duas operações binárias que não necessariamente fornecem uma estrutura de grupo. Especificamente, uma FMAM corresponde a uma rede neural morfológica de camada única cujos neurônios computam o máximo de uma conjunção nebulosa ou o mínimo de uma disjunção nebulosa. Como consequência, uma FMAM pode não exibir algumas características desejadas. Por exemplo, Valle e Sussner mostraram que uma FMAM autoassociativa exibe ótima capacidade absoluta de armazenamento se, e somente se, as subjacentes operações binárias nebulosas possuírem uma identidade a esquerda [62]. Contudo, FMAMs também são definidas em um reticulado

completo dotadas com uma certa operação binária. A classe mais geral das memórias morfológicas é obtida deixando de fora tais operações, como é o caso das memórias associativas esparsas em reticulados completos.

Salientamos que, ao contrário da rede de Hamming [19], das memórias associativas com capacidade exponencial (ECAM) [57] e da rede neural morfológica KS-FAM (*Kosko subsethood fuzzy associative memory*) [9, 10, 49], as memórias autoassociativas esparsas em reticulados e as MAMs originais de Ritter e Sussner são modelos distribuídos, no sentido que a informação armazenada é distribuída em todos os neurônios da rede.

Vale notar também que as operações em uma KS-FAM e outros modelos como as redes desenvolvidas por Kaburlasos et al. [24, 25, 26, 33] e Gader et al. [11], não executam operações morfológicas no sentido algébrico, mas estas operações podem ser vistas como uma erosão ou uma dilatação por um elemento estruturante no amplo sentido da morfologia matemática [46, 55].

### 3.5 PROPRIEDADES DAS MEMÓRIAS AUTOASSOCIATIVAS ESPARSAS EM RETICULADOS COMPLETOS

As MAERCs  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  introduzidas em [58] exibem características relevantes no estudo das memórias autoassociativas, os resultados seguintes dizem respeito a capacidade de armazenamento e tolerância a ruído destes modelos. Podemos listar as seguintes propriedades das MAERCs definidas em (3.21) e (3.22), com o conjunto de junções sinápticas  $\mathcal{S}$ :

1. Ambas MAERCs exibem ótima capacidade absoluta de armazenamento. Deste modo, o número de padrões que podem ser armazenados nestas memórias é ilimitado.
2. Cada padrão de saída permanece estável sob repetidas aplicações das MAERCs. Em outras palavras, ambas MAERCs exibem convergência em um único passo.
3. Os padrões recordados pelo modelo de memória  $\mathcal{W}$  representam o menor ponto fixo do modelo maior ou igual ao padrão de entrada  $x$ . Assim, esta memória recorda um padrão original  $x^\xi = [x_1^\xi, \dots, x_n^\xi]$  corretamente somente se as componentes da entrada  $x = [x_1, \dots, x_n]$  satisfizerem a desigualdade  $x_i \leq x_i^\xi$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Por dualidade, os padrões recordados pelo modelo de memória  $\mathcal{M}$  representam o maior ponto fixo do modelo menor ou igual ao padrão de entrada. Desta forma, um padrão original  $x^\xi$  é recordado corretamente por uma memória  $\mathcal{M}$  somente se  $x_i^\xi \leq x_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

4. O conjunto dos pontos fixos das memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  dados por (3.21) e (3.22) incluem os padrões originais no conjunto de memórias fundamentais, bem como um grande número de padrões espúrios. Lembrando que um padrão espúrio é uma memória que foi armazenada involuntariamente no modelo.

Observamos que as propriedades listadas acima aparecem sem demonstração e para um reticulado completo particular em [58]. Nesta seção provamos e generalizamos estes resultados para um reticulado completo  $\mathbb{V}$  arbitrário. Especificamente, demonstramos estas propriedades fazendo uso dos conceitos da teoria dos reticulados e da morfologia matemática. As referências utilizadas foram Birkhoff [7] e Heijmans [22]. O primeiro teorema nos mostra que as memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  formam uma adjunção em  $\mathbb{V}^n$ .

**Teorema 3.8.** *Dado um conjunto de memórias fundamentais  $\{x^1, \dots, x^p\}$ , defina as memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  através de (3.20), (3.21), e (3.22). Neste caso, o par  $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$  é uma adjunção em  $\mathbb{V}^n$ , ou seja, a seguinte relação é verdadeira para todo  $x, y \in \mathbb{V}^n$ :*

$$\mathcal{W}(y) \leq x \quad \Leftrightarrow \quad y \leq \mathcal{M}(x). \quad (3.23)$$

*Demonstração.* Suponha que  $\mathcal{W}(y) \leq x$  para todo  $x, y \in \mathbb{V}^n$ . Segue da definição de  $\mathcal{W}$  que

$$[\mathcal{W}(y)]_i = \bigvee \{y_j : (j, i) \in \mathcal{S}\} \leq x_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Da definição de supremo segue que  $y_j \leq x_i$  para todos os índices  $i, j$  tais que  $(j, i) \in \mathcal{S}$ . Assim, para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$  tem-se

$$y_j \leq x_i \quad \text{com} \quad (j, i) \in \mathcal{S}.$$

Logo  $y_j$  é uma cota inferior do conjunto  $\{x_i : (j, i) \in \mathcal{S}\}$ , e pela definição de ínfimo de um conjunto tem-se

$$y_j \leq \bigwedge \{x_i : (j, i) \in \mathcal{S}\} = [\mathcal{M}(x)]_j \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Logo  $y \leq \mathcal{M}(x)$ . Reciprocamente, se  $y \leq \mathcal{M}(x)$  para todo  $x, y \in \mathbb{V}^n$  segue que

$$y_i \leq [\mathcal{M}(x)]_i = \bigwedge \{x_j : (i, j) \in \mathcal{S}\} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Portanto  $y_i \leq x_j$  para todos os índices  $i, j$  tais que  $(i, j) \in \mathcal{S}$ . Logo, para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$  tem-se

$$y_i \leq x_j \quad \text{tal que} \quad (i, j) \in \mathcal{S}, \quad \text{ou equivalentemente,} \quad y_j \leq x_i \quad \text{tal que} \quad (j, i) \in \mathcal{S}.$$

Segue que  $x_i$  é uma cota superior de  $\{y_j : (j, i) \in \mathcal{S}\}$ , e da definição de supremo tem-se

$$[\mathcal{W}(y)]_i = \bigvee \{y_j : (j, i) \in \mathcal{S}\} \leq x_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Logo  $\mathcal{W}(y) \leq x$ , o que finaliza a demonstração.

De acordo com a Proposição 2.1, a adjunção entre os operadores  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{W}$  pode ser usada para enunciar as seguintes propriedades a respeito destes operadores.

**Corolário 3.9.** *Para qualquer conjunto de memórias fundamentais  $\{x^1, \dots, x^p\}$ , as memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  dadas por (3.20), (3.21), e (3.22) realizam uma dilatação e uma erosão da morfologia matemática. Em outras palavras, as seguintes equações permanecem verdadeiras para todo subconjunto  $X \subseteq \mathbb{V}^n$ .*

$$\mathcal{W}\left(\bigvee X\right) = \bigvee_{x \in X} \mathcal{W}(x) \quad e \quad \mathcal{M}\left(\bigwedge X\right) = \bigwedge_{x \in X} \mathcal{M}(x).$$

Além disso, as memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  estão relacionadas como segue para todo padrão de entrada  $x \in \mathbb{V}^n$ :

$$\mathcal{W}(x) = \bigwedge \{y \in \mathbb{V}^n : x \leq \mathcal{M}(y)\} \quad e \quad \mathcal{M}(x) = \bigvee \{y \in \mathbb{V}^n : \mathcal{W}(y) \leq x\}. \quad (3.24)$$

**Demonstração.** O resultado segue do Teorema 3.8 e da Proposição 2.1.

Além do fato das memórias  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{W}$  realizarem uma erosão e uma dilatação, estes operadores também representam uma abertura e um fechamento da morfologia matemática [22, 45]. Lembrando que um operador  $\mathcal{A}$  em um reticulado completo é uma abertura se for idempotente, crescente e anti-extensivo. Dualmente,  $\mathcal{B}$  é um fechamento se for idempotente, crescente e extensivo. Aberturas e fechamentos podem ser usadas para recuperar imagens corrompidas por ruído.

**Teorema 3.10.** *Para qualquer conjunto de memórias fundamentais  $\{x^1, \dots, x^p\}$ , as memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  dadas por (3.20), (3.21), e (3.22) realizam um fechamento e uma abertura, respectivamente.*

**Demonstração.** Mostraremos que  $\mathcal{W}$  é um fechamento. A demonstração que  $\mathcal{M}$  é uma abertura segue de forma análoga.

1.  $\mathcal{W}$  é crescente.

Sejam  $\mathbf{u} = \mathcal{W}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{v} = \mathcal{W}(\mathbf{y})$ . Da definição de  $\mathcal{W}$  segue que para cada  $i = 1, \dots, n$  tem-se:

$$\mathbf{u}_i = [\mathcal{W}(\mathbf{x})]_i = \bigvee \{x_j : (j, i) \in \mathcal{S}\} = x_{j^*} \text{ onde } (j^*, i) \in \mathcal{S}.$$

Mas, se  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}^n$  são tais que  $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ , então  $x_{j^*} \leq y_{j^*}$ , logo

$$\mathbf{u}_i = x_{j^*} \leq y_{j^*} \leq \bigvee \{y_j : (j, i) \in \mathcal{S}\} = \mathbf{v}_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Logo  $\mathcal{W}(\mathbf{x}) \leq \mathcal{W}(\mathbf{y})$ , ou seja,  $\mathcal{W}$  é crescente.

2.  $\mathcal{W}$  é extensivo.

Seja  $\mathbf{x} \in \mathbb{V}^n$ , da definição de  $\mathcal{W}$  tem-se

$$[\mathcal{W}(\mathbf{x})]_i = \bigvee \{x_j : (j, i) \in \mathcal{S}\} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Mas como o par  $(i, i) \in \mathcal{S}$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , então

$$[\mathcal{W}(\mathbf{x})]_i = \bigvee \{x_j : (j, i) \in \mathcal{S}\} \geq x_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Logo  $\mathcal{W}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{x}$ .

3.  $\mathcal{W}$  é idempotente.

Sejam  $\mathbf{u} = \mathcal{W}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{v} = \mathcal{W}(\mathbf{u})$ , mostraremos que  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ . Como  $\mathcal{W}$  é extensivo segue que  $\mathbf{v} \geq \mathbf{u}$ . Por outro lado, da definição de  $\mathcal{W}$  tem-se para todo  $i = 1, \dots, n$

$$\mathbf{v}_i = [\mathcal{W}(\mathbf{u})]_i = \bigvee \{u_j : (j, i) \in \mathcal{S}\} = u_{j^*},$$

onde  $(j^*, i) \in \mathcal{S}$  e  $u_j \leq u_{j^*}$  para todo  $j$  tal que  $(j, i) \in \mathcal{S}$ . Como  $\mathbf{u} = \mathcal{W}(\mathbf{x})$ , segue que

$$u_{j^*} = [\mathcal{W}(\mathbf{x})]_{j^*} = \bigvee \{x_k : (k, j^*) \in \mathcal{S}\} = x_{k^*},$$

para algum índice  $k^*$  tal que  $(k^*, j^*) \in \mathcal{S}$ . Contudo, se  $(j^*, i) \in \mathcal{S}$  e  $(k^*, j^*) \in \mathcal{S}$  então  $x_{j^*}^\xi \leq x_i^\xi$  e  $x_{k^*}^\xi \leq x_{j^*}^\xi$ , para todo  $\xi = 1, \dots, p$ . Logo,  $x_{k^*}^\xi \leq x_{j^*}^\xi \leq x_i^\xi$ , para todo  $\xi = 1, \dots, p$ , consequentemente  $(k^*, i) \in \mathcal{S}$ . Assim,

$$\mathbf{v}_i = x_{k^*} \leq \bigvee \{x_k : (k, i) \in \mathcal{S}\} = [\mathcal{W}(\mathbf{x})]_i = \mathbf{u}_i.$$

Como  $\mathbf{v}_i \leq \mathbf{u}_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , segue que  $\mathbf{v} \leq \mathbf{u}$ . Disto e da extensividade do operador  $\mathcal{W}$  tem-se a igualdade  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ , o que mostra que  $\mathcal{W}$  é idempotente.

O próximo corolário caracteriza os padrões recordados pelas memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  em termos de seus pontos fixos. Em outras palavras, os padrões recordados pela  $\mathcal{W}$  representam o menor ponto fixo do modelo, maior ou igual ao padrão de entrada  $x$ . Por dualidade, os padrões recordados pela  $\mathcal{M}$  representam o maior ponto fixo do modelo, menor ou igual ao padrão de entrada.

Relembrando que o domínio de invariância de um operador  $\psi : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{V}^n$  é o conjunto dos pontos fixos de  $\psi$ , ou seja,  $Inv(\psi) = \{x \in \mathbb{V}^n : \psi(x) = x\}$ . Note que ambos  $Inv(\mathcal{W})$  e  $Inv(\mathcal{M})$  são subconjuntos de  $\mathbb{V}^n$ . O corolário do Teorema 3.10 afirma que todo subconjunto  $X \subseteq Inv(\mathcal{W})$  possui um ínfimo em  $Inv(\mathcal{W})$ , ou seja,  $Inv(\mathcal{W})$  é *inf-fecha*do. Por dualidade,  $Inv(\mathcal{M})$  é *sup-fecha*do, o que implica que  $\bigvee X \in Inv(\mathcal{M})$  para qualquer subconjunto  $X \subseteq Inv(\mathcal{M})$ . O Corolário 3.11 também relaciona os padrões recordados pelas memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  com seus domínios de invariância.

**Corolário 3.11.** *Dado um conjunto de memórias fundamentais  $\{x^1, \dots, x^p\}$ , defina as memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  através de (3.20), (3.21), e (3.22). Os conjuntos  $Inv(\mathcal{W})$  e  $Inv(\mathcal{M})$  são inf-fecha*dos e *sup-fecha*dos, respectivamente. Além disso, as seguintes equações são verdadeiras para qualquer padrão de entrada  $x \in \mathbb{V}^n$

$$\mathcal{W}(x) = \bigwedge \{y \in Inv(\mathcal{W}) : x \leq y\} \quad e \quad \mathcal{M}(x) = \bigvee \{y \in Inv(\mathcal{M}) : y \leq x\}. \quad (3.25)$$

*Demonstração.* Segue do Teorema 3.10 que  $\mathcal{W}$  é um fechamento e  $\mathcal{M}$  uma abertura. Portanto da Proposição 2.2 tem-se que  $\mathcal{W}$  é inf-fechado e  $\mathcal{M}$  é sup-fechado. Também segue da Proposição 2.2 as equações dadas em (3.25).

O Corolário 3.11 fornece informações sobre a tolerância a ruído das memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$ . Uma vez que a memória  $\mathcal{W}$  (respectivamente,  $\mathcal{M}$ ) recorda um padrão original  $x^\xi$  exatamente somente se  $x \leq x^\xi$  ( $x \geq x^\xi$ ), em outras palavras, a memória  $\mathcal{W}$  ( $\mathcal{M}$ ) é adequada para reconstrução de padrões corrompidos com ruído erosivo (dilativo), mas é incapaz de corrigir erros em padrões corrompidos com ruído dilativo (erosivo).

O teorema seguinte revela que as memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  são invariantes sob certos tipos de transformações. Por exemplo, veremos na seção 5.2 que as memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  são invariantes sob transformações de luminosidade quando aplicadas para o armazenamento e recordação de imagens coloridas no sistema RGB com as ordens lexicográfica e marginal. Antes de enunciar o Teorema 3.12 recordemos que um operador  $\phi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  é um endomorfismo (Definição 2.5) em um reticulado completo se preserva a estrutura de  $\mathbb{V}$  [7].

**Teorema 3.12.** *Considere um endomorfismo  $\phi$  em um reticulado completo  $\mathbb{V}$  e seja  $\Phi : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{V}^n$  uma aplicação definida como  $\Phi(x) = [\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)]$  para todo  $x \in \mathbb{V}^n$ . Para qualquer conjunto de memórias fundamentais  $\{x^1, \dots, x^p\}$  as memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  dadas por (3.20), (3.21), e (3.22) são invariantes sob  $\Phi$ , ou seja,  $\mathcal{W}(\Phi(x)) = \Phi(\mathcal{W}(x))$  e  $\mathcal{M}(\Phi(x)) = \Phi(\mathcal{M}(x))$  para todo  $x \in \mathbb{V}^n$ .*

*Demonstração.* Segue da definição de  $\Phi$  e  $\mathcal{W}$  que, para todo  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} [\mathcal{W}(\Phi(\mathbf{x}))]_i &= [\mathcal{W}([\phi(\mathbf{x}_1), \phi(\mathbf{x}_2), \dots, \phi(\mathbf{x}_n)])]_i \\ &= \bigvee \{\phi(\mathbf{x}_j) : (j, i) \in \mathcal{S}\}. \end{aligned}$$

Como por hipótese  $\phi$  é um endomorfismo em  $\mathbb{V}$ , ou seja,  $\phi(\bigvee X) = \bigvee \phi(X)$  para todo subconjunto  $X \subseteq \mathbb{V}$ , em particular para  $X = \{\mathbf{x}_j : (j, i) \in \mathcal{S}\}$ , então

$$\begin{aligned} [\mathcal{W}([\phi(\mathbf{x}_1), \phi(\mathbf{x}_2), \dots, \phi(\mathbf{x}_n)])]_i &= \phi\left(\bigvee \{\mathbf{x}_j : (j, i) \in \mathcal{S}\}\right) \\ &= \phi([\mathcal{W}(\mathbf{x})]_i) \\ &= [\Phi(\mathcal{W}(\mathbf{x}))]_i. \end{aligned}$$

Como  $[\mathcal{W}(\Phi(\mathbf{x}))]_i = [\Phi(\mathcal{W}(\mathbf{x}))]_i$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ , logo  $\mathcal{W}(\Phi(\mathbf{x})) = \Phi(\mathcal{W}(\mathbf{x}))$ .

A prova que a memória  $\mathcal{M}$  é invariante sob  $\Phi$  segue de forma análoga.

Uma consequência imediata do Teorema 3.12 é que os conjuntos  $Inv(\mathcal{W})$  e  $Inv(\mathcal{M})$  são invariantes sob endomorfismos. Em outras palavras, se  $\mathbf{x} \in Inv(\mathcal{W})$ , então  $\Phi(\mathbf{x}) \in Inv(\mathcal{W})$ . Semelhantemente, se  $\mathbf{x} \in Inv(\mathcal{M})$ , então  $\Phi(\mathbf{x})$  pertence a  $Inv(\mathcal{M})$ . O teorema seguinte revela algumas características do domínio de invariância das memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$ .

**Teorema 3.13.** *Para qualquer conjunto de memórias fundamentais  $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\}$ , o domínio de invariância das memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  dadas por (3.20), (3.21), e (3.22) coincidem e incluem todas as memórias fundamentais. Além disso, o conjunto  $\mathcal{I} = Inv(\mathcal{W}) = Inv(\mathcal{M})$  é um subreticulado completo em  $\mathbb{V}^n$ . Em outras palavras,  $\bigvee X \in \mathcal{I}$  e  $\bigwedge X \in \mathcal{I}$  para todo  $X \subseteq \mathcal{I}$ .*

*Demonstração.* Mostraremos que  $\mathcal{W}(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{x}^\xi$ , ou seja,  $\mathbf{x}^\xi \in Inv(\mathcal{W})$ , para todo  $\xi = 1, \dots, p$ . Seja  $\mathbf{x}^\eta \in \{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^p\}$ . Tem-se da definição de  $\mathcal{W}$  que para todo  $i = 1, \dots, n$

$$[\mathcal{W}(\mathbf{x}^\eta)]_i = \bigvee \{\mathbf{x}_j^\eta : (j, i) \in \mathcal{S}\}.$$

Como  $(j, i) \in \mathcal{S}$  se  $\mathbf{x}_j^\xi \leq \mathbf{x}_i^\xi$  para todo  $\xi = 1, \dots, p$ , tem-se que  $\mathbf{x}_j^\eta \leq \mathbf{x}_i^\eta$  para  $(j, i) \in \mathcal{S}$ . Da definição de supremo segue que, para todo  $i = 1, \dots, n$

$$[\mathcal{W}(\mathbf{x}^\eta)]_i = \bigvee \{\mathbf{x}_j^\eta : (j, i) \in \mathcal{S}\} \leq \mathbf{x}_i^\eta$$

Logo  $\mathcal{W}(\mathbf{x}^\eta) \leq \mathbf{x}^\eta$  e como  $\mathcal{W}$  é extensivo  $\mathcal{W}(\mathbf{x}^\eta) \geq \mathbf{x}^\eta$ , o que implica que  $\mathcal{W}(\mathbf{x}^\eta) = \mathbf{x}^\eta$ . Como  $\mathbf{x}^\eta$  é uma memória fundamental arbitrária, então  $\mathcal{W}(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{x}^\xi$ , para todo  $\xi = 1, \dots, p$ .

Mostraremos agora que  $Inv(\mathcal{W})$  e  $Inv(\mathcal{M})$  são iguais, ou seja,  $\mathbf{x} \in Inv(\mathcal{W})$  implica que  $\mathbf{x} \in Inv(\mathcal{M})$  uma vez que a recíproca é análoga. Suponha que  $\mathbf{x} = \mathcal{W}(\mathbf{x})$  e seja  $\mathbf{z} = \mathcal{M}(\mathbf{x})$ . Verifiquemos que ambas desigualdades  $\mathbf{x} \leq \mathbf{z}$  e  $\mathbf{z} \leq \mathbf{x}$  ocorrem. A primeira desigualdade segue de (3.24). Especificamente, tem-se que  $\mathbf{x} \in \{\mathbf{y} \in \mathbb{V}^n : \mathcal{W}(\mathbf{y}) \leq \mathbf{x}\}$ , pois  $\mathbf{x} = \mathcal{W}(\mathbf{x})$  por

hipótese. Além disso, como o supremo de um conjunto é maior ou igual que qualquer elemento do conjunto, concluímos que

$$z = \mathcal{M}(x) = \bigvee \{y \in \mathbb{V}^n : x \geq \mathcal{W}(y)\} \geq x.$$

A desigualdade  $z \leq x$  segue do fato que  $\mathcal{M}$  é uma abertura, ou seja,  $\mathcal{M}$  é anti-extensivo, logo  $z = \mathcal{M}(x) \leq x$ .

Finalmente, do Corolário 3.11 segue que os conjuntos  $Inv(\mathcal{W})$  e  $Inv(\mathcal{M})$  são inf-fechados e sup-fechados, respectivamente, o que implica que  $\bigwedge X \in Inv(\mathcal{W})$  e  $\bigvee X \in Inv(\mathcal{M})$ . Como  $\mathcal{I} = Inv(\mathcal{W}) = Inv(\mathcal{M})$  tem-se que  $\mathcal{I}$  é um subreticulado completo, ou seja,  $\bigvee X \in \mathcal{I}$  e  $\bigwedge X \in \mathcal{I}$  para todo  $X \subseteq \mathcal{I}$ .

**Observação.** Note que a prova do Teorema 3.13 baseia-se somente na adjunção entre as memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  e no fato que  $\mathcal{W}$  é um fechamento e  $\mathcal{M}$  uma abertura. Na verdade, uma versão particular deste teorema foi demonstrado por Sussner e Valle para as MAMs em tons de cinza [51], seção 3.3. Também ressaltamos que o conjunto dos pontos fixos das memórias associativas implicativas nebulosas (IFAM, implicative fuzzy associative memories) podem diferir da sua versão dual porque estes dois modelos podem não ser relacionados por meio de uma adjunção, mas por meio de uma negação nebulosa [52, 60].

O Teorema 3.13 afirma que as memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  exibem ótima capacidade absoluta de armazenamento. Mas também revela que as memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  possuem uma grande quantidade de memórias espúrias. De fato, qualquer elemento no conjunto  $\mathcal{I} \setminus \{x^1, \dots, x^p\}$  é uma memória espúria de ambas  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$ . A seguinte definição recursiva, que generaliza a noção de polinômio reticulado [7], caracteriza uma grande família de elementos de  $\mathcal{I}$ .

**Definição 3.1.** (Polinômio Reticulado Endomórfico) Toda memória fundamental  $x^\xi$  é um polinômio reticulado endomórfico em  $\{x^1, \dots, x^p\} \subseteq \mathbb{V}^n$ . Dados dois polinômios reticulados endomórficos  $y$  e  $z$  e dois endomorfismos componente a componente  $\Phi(y)$  e  $\Psi(z)$  em  $\mathbb{V}^n$ , o máximo  $\Phi(y) \vee \Psi(z)$  e o mínimo  $\Phi(y) \wedge \Psi(z)$  são também polinômios reticulados endomórficos em  $\{x^1, \dots, x^p\}$ .

O Teorema 3.13 e a noção de polinômio reticulado endomórfico podem ser combinados no seguinte corolário relativo aos pontos fixos das memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$ .

**Corolário 3.14.** Dado um conjunto de memórias fundamentais  $\{x^1, \dots, x^p\} \subseteq \mathbb{V}^n$ , defina as memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  dadas por (3.20), (3.21), e (3.22). Então, qualquer polinômio reticulado endomórfico no conjunto de memórias fundamentais é um ponto fixo de  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$ .

*Demonstração.* A demonstração deste corolário segue dos Teoremas 3.12 e 3.13. Segue do Teorema 3.13, que os polinômios reticulados endomórficos  $x^1, \dots, x^p$  são todos pontos fixos de ambas  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$ , ou seja,  $x^\xi \in \mathcal{I}$  para todo  $\xi = 1, \dots, p$ . Agora, assumamos que  $y \in \mathcal{I}$  e  $z \in \mathcal{I}$

sejam dois polinômios reticulados endomórficos em  $\{x^1, \dots, x^p\}$ . Dados dois endomorfismos componente a componente  $\Phi$  e  $\Psi$  em  $\mathbb{V}^n$ , pelo Teorema 3.12, os padrões  $\Phi(y)$  e  $\Psi(z)$  também pertencem a  $\mathcal{I}$ . Como  $\mathcal{I}$  é um subreticulado completo em  $\mathbb{V}^n$ , os polinômios reticulados endomórficos  $\Phi(y) \vee \Psi(z)$  e  $\Phi(y) \wedge \Psi(z)$  são também pontos fixos de  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$ .

### 3.6 RELAÇÃO ENTRE AS MAERCs E AS MEMÓRIAS AUTOASSOCIATIVAS MORFOLÓGICAS EM TONS DE CINZA

Nesta seção, faremos uma breve discussão sobre a relação entre as *memórias autoassociativas esparsas em reticulados* e as *memórias autoassociativas morfológicas em tons de cinza (gray-scale AMMs)* de Sussner and Ritter [36, 37, 38, 51]. Com este propósito, supomos que as memórias autoassociativas esparsas em reticulados sejam definidas no conjunto dos números reais estendidos  $\mathbb{R}_{\pm\infty}$ , ou seja,  $\mathbb{V} = \mathbb{R}_{\pm\infty}$  constitui uma extensão de l-grupo completo e os padrões em tons de cinza pertencem a  $\mathbb{V}^n$ . Ressaltamos, contudo, que  $\mathbb{V}$  pode ser qualquer extensão de l-grupo completo.

O Teorema 3.15 formaliza a relação entre as memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  e as MAMs em tons de cinza  $\mathcal{W}_{XX}$  e  $\mathcal{M}_{XX}$ .

**Teorema 3.15.** *Dado um conjunto de memórias fundamentais  $\{x^1, \dots, x^p\} \subseteq \mathbb{V}^n$ , defina as memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  através de (3.20), (3.21), e (3.22). Neste caso, existe uma única matriz de pesos sinápticos  $W \in \mathbb{V}^{n \times n}$  e uma matriz  $M \in \mathbb{V}^{n \times n}$  tais que as seguintes equações são verdadeiras para todo  $x \in \mathbb{V}^n$ :*

$$\mathcal{W}(x) = W \boxtimes x \quad e \quad \mathcal{M}(x) = M \boxtimes x. \quad (3.26)$$

Além disso, estas duas matrizes podem ser obtidas a partir das matrizes de pesos sinápticos  $W_{XX}$  e  $M_{XX}$  definidas em (3.5) como segue para todo  $i, j = 1, \dots, n$ .

$$w_{ij} = \mathcal{T}_-\left([W_{XX}]_{ij}\right) \quad e \quad m_{ij} = \mathcal{T}_+\left([M_{XX}]_{ij}\right), \quad (3.27)$$

onde  $\mathcal{T}_- : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  e  $\mathcal{T}_+ : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  são os operadores dados por:

$$\mathcal{T}_-(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \geq 0, \\ -\infty, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad e \quad \mathcal{T}_+(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0, \\ +\infty, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.28)$$

*Demonstração.* Faremos a prova somente para a memória  $\mathcal{M}$ , uma vez que a prova para a memória  $\mathcal{W}$  segue de forma análoga. Seja  $\mathcal{S}$  o conjunto das junções sinápticas da memória  $\mathcal{M}$  e defina a matriz  $M \in \mathbb{V}^{n \times n}$  da seguinte forma:

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } (i, j) \in \mathcal{S} \\ +\infty & \text{se } (i, j) \notin \mathcal{S} \end{cases}$$

Considerando a operação  $+$  definida em (2.3), e o fato que  $0$  é a identidade em  $+$ , e que  $+\infty$  é o maior elemento de  $\mathbb{V}$ , as seguintes igualdades são verdadeiras para qualquer  $x \in \mathbb{V}^n$  e para todo  $i = 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} [M \boxtimes x]_i &= \bigwedge_{j=1}^n (m_{ij} + x_j) \\ &= \left[ \bigwedge \{(0 + x_j) : (i, j) \in \mathcal{S}\} \right] \wedge \left[ \bigwedge \{(+\infty + x_j) : (i, j) \notin \mathcal{S}\} \right] \\ &= \left[ \bigwedge \{x_j : (i, j) \in \mathcal{S}\} \right] \wedge [+ \infty] \\ &= \bigwedge \{x_j : (i, j) \in \mathcal{S}\} = [\mathcal{M}(x)]_i. \end{aligned}$$

Como  $[M \boxtimes x]_i = [\mathcal{M}(x)]_i$ , para todo  $i = 1, \dots, n$  então  $\mathcal{M}(x) = M \boxtimes x$ .

Agora, suponha que exista uma outra matriz  $A \in \mathbb{V}^{n \times n}$  tal que  $\mathcal{M}(x) = A \boxtimes x$  para qualquer  $x \in \mathbb{V}^n$  e seja  $e_k = [e_{k1}, \dots, e_{kn}]^T \in \mathbb{V}^n$  vetores definidos como segue para todo  $j = 1, \dots, n$ :

$$e_{kj} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } k \neq j, \\ 0, & \text{se } k = j. \end{cases}$$

Mostraremos agora que  $a_{ik} = m_{ik}$  para todo  $i, k = 1, \dots, n$ :

$$a_{ik} = \bigwedge_{j=1}^n (a_{ij} + e_{kj}) = [A \boxtimes e_k]_i = [\mathcal{M}(e_k)]_i = [M \boxtimes e_k]_i = \bigwedge_{j=1}^n (m_{ij} + e_{kj}) = m_{ik}.$$

Concluindo, note que ambas  $m_{ij}$  e  $\mathcal{T}_+([M_{XX}]_{ij})$  possuem somente os valores  $0$  e  $+\infty$ . Adicionalmente, tem-se

$$\begin{aligned} m_{ij} = 0 &\Leftrightarrow (i, j) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow x_i^\xi \leq x_j^\xi, \forall \xi = 1, \dots, p \Leftrightarrow x_i^\xi + (x_j^\xi)^* \leq 0, \\ \forall \xi = 1, \dots, p &\Leftrightarrow \bigvee_{\xi=1}^p x_i^\xi + (x_j^\xi)^* \leq 0 \Leftrightarrow [M_{XX}]_{ij} \leq 0 \Leftrightarrow \mathcal{T}_+([M_{XX}]_{ij}) = 0. \end{aligned}$$

Logo,  $m_{ij} = \mathcal{T}_+([M_{XX}]_{ij})$  para todo  $i, j = 1, \dots, n$ .

Na dedução acima foram usadas as seguintes relações:

$$x \leq y \Leftrightarrow x + y^* \leq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{V}.$$

A desigualdade acima é trivial se  $y \in \mathbb{R}$ , pois  $y^* = -y$ . Agora se  $y = -\infty$ , então

$$x \leq y \Leftrightarrow x = -\infty \Leftrightarrow x + (+\infty) \leq 0 \Leftrightarrow x + y^* \leq 0.$$

Finalmente, se  $y = +\infty$ , então ambos  $x \leq y$  e  $x + y^* = x + (-\infty) \leq 0$  ocorrem para todo  $x \in \mathbb{V}$ .

O Teorema 3.15 mostra que as memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  podem ser obtidas a partir das MAMs  $\mathcal{W}_{XX}$  e  $\mathcal{M}_{XX}$  simplificando a matriz de pesos sinápticos. Então, em vista da Proposição 3.1, podemos esperar que as MAMs em tons de cinza superem as MAERCs na reconstrução de padrões corrompidos com ruído positivo ou negativo, também chamados ruído dilatativo e erosivo, respectivamente. Esta observação foi confirmada computacionalmente em [58] e pode ser formalizada em termos do seguinte corolário:

**Corolário 3.16.** *Para qualquer conjunto de memórias fundamentais  $\{x^1, \dots, x^p\} \subseteq \mathbb{V}^n$ , o domínio de invariância  $\mathcal{I}$  das memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  definidas por (3.20), (3.21), e (3.22) incluem todos os pontos fixos das MAMs em tons de cinza  $\mathcal{W}_{XX}$  e  $\mathcal{M}_{XX}$  definidas por (3.1), ou seja,  $Inv(\mathcal{W}_{XX}) \subseteq \mathcal{I}$  e  $Inv(\mathcal{M}_{XX}) \subseteq \mathcal{I}$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, recordemos que as MAMs em tons de cinza  $\mathcal{M}_{XX}$  e  $\mathcal{W}_{XX}$  constituem, respectivamente, uma abertura e um fechamento da morfologia matemática [38, 58]. Do Teorema 3.15 segue que as desigualdades  $\mathcal{M}_{XX}(x) \leq \mathcal{M}(x)$  e  $\mathcal{W}(x) \leq \mathcal{W}_{XX}(x)$  ocorrem para todo  $x \in \mathbb{V}^n$ . Portanto, da Proposição 2.3 concluímos que  $Inv(\mathcal{M}_{XX}) \subseteq \mathcal{I}$  e  $Inv(\mathcal{W}_{XX}) \subseteq \mathcal{I}$ .

Concluímos esta seção salientando que as MAERCs podem ser obtidas das MAMs em tons de cinza excluindo algumas ligações sinápticas. Conseqüentemente, as MAERCs exibem tolerância a ruído inferior com relação a padrões corrompidos com ruído positivo ou negativo. A principal vantagem das MAERCs sobre as MAMs em tons de cinza se refere a aspectos computacionais e teóricos. De fato, os modelos esparsos usualmente requerem muito menos esforço computacional que os modelos de MAMs em tons de cinza. Do ponto de vista teórico, as MAERCs são definidas em um reticulado completo enquanto que as MAMs em tons de cinza são definidas em uma extensão de l-grupo que, além da estrutura de reticulado, requer duas operações binárias adicionais.

## CAPÍTULO 4

### REPRESENTAÇÃO DE IMAGENS COLORIDAS E EM TONS DE CINZA

Existem várias representações de sistemas de cores para imagens coloridas, como RGB, HSV, HSL, e CIELab [1, 2, 13, 17]. Vandenbroucke [63] propõe uma classificação para os espaços de cores, em quatro famílias principais: Os espaços de cores primárias baseado na teoria tricromática, assumindo que é possível obter qualquer cor adicionando quantidades apropriadas de cores primárias, como o sistema RGB. Os espaços que buscam qualificar a percepção de cores pelo sistema de visão humano em termos da luminosidade, *hue* e saturação, como as representações HSV e HSL. Os modelos luminosidade-cromaticidade onde uma componente representa a luminosidade e as duas outras componentes representam a cromaticidade, como o CIELab, que quantifica a diferença das cores percebidas pelo olho humano. Finalmente, os espaços de eixos independentes que resultam de métodos estatísticos que descorrelacionam as componentes, como a transformação de Karhunen-Loève. Neste capítulo apresentamos uma breve discussão dos espaços de cores mencionados acima, bem como alguns esquemas ordenados que fornecem uma estrutura de reticulado completo para o conjunto das cores.

#### 4.1 IMAGENS

Com o intuito de definir uma imagem de maneira mais abrangente, consideremos  $\mathbb{V}$  um conjunto de valores e  $\mathcal{D}$  um conjunto de pontos. Desta forma, uma imagem em  $\mathcal{D}$  é definida como uma função  $x : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{V}$ . Dado uma imagem  $x$ , o conjunto  $\mathbb{V}$  é chamado *conjuntos dos possíveis valores da imagem* de  $x$  e  $\mathcal{D}$  de *domínio espacial* de  $x$ .

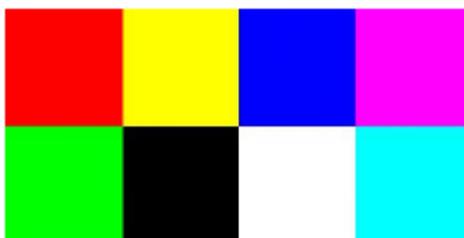
O gráfico de uma imagem  $x$  é representado por  $G(x) = \{(d, x(d)) : d \in \mathcal{D}\}$ , onde o elemento  $(d, x(d))$  é chamado *“picture element”* ou *pixel*, a primeira coordenada  $d$  é a localização do pixel e a segunda coordenada  $x(d)$  é o valor do pixel de  $x$  no ponto  $d$  [41].

Embora cada valor  $x(d)$  de uma imagem  $x$  seja um elemento de  $\mathbb{V}$ ,  $x(d)$  pode ser composto de vários valores, como por exemplo, se  $\mathbb{V} = \mathbb{R}^\nu$ , então  $x(d) = (x_1(d), \dots, x_\nu(d))$ , para cada  $i = 1, \dots, \nu$ , onde  $x_i(d) \in \mathbb{R}$ . Formalmente, se o conjunto  $\mathbb{V}$  pode ser escrito como o produto cartesiano  $\mathbb{V} = \prod_{i=1}^{\nu} \mathbb{V}_i$ , com  $\nu > 1$ , então  $\mathbb{V}$  é chamado *conjunto multivalor*. Logo, uma *imagem multivalor* é uma função  $x : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{V}$ , onde  $\mathbb{V}$  é um conjunto com múltiplos valores. Uma imagem colorida é um exemplo particular de imagem multivalor onde  $\mathbb{V}$  é geralmente um subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ .

Uma imagem digital é uma imagem onde os conjuntos  $\mathcal{D}$  e  $\mathbb{V}$  são discretos e finitos. Em geral, uma imagem digital é definida em um subconjunto retangular finito de  $\mathbb{R}^2$ , e a imagem da função um subconjunto finito de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^\nu$ . Nesta dissertação, usamos na prática imagens digitais, embora a teoria é desenvolvida para um conjunto de valores contínuo. Um exemplo de

imagem digital colorida  $x : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{V}$ , onde  $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \dots, d_8\}$  e  $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{R}^3$ , é dado pela figura 4.1.

**Figura 4.1** – Exemplo de imagem digital colorida



## 4.2 REPRESENTAÇÃO RGB

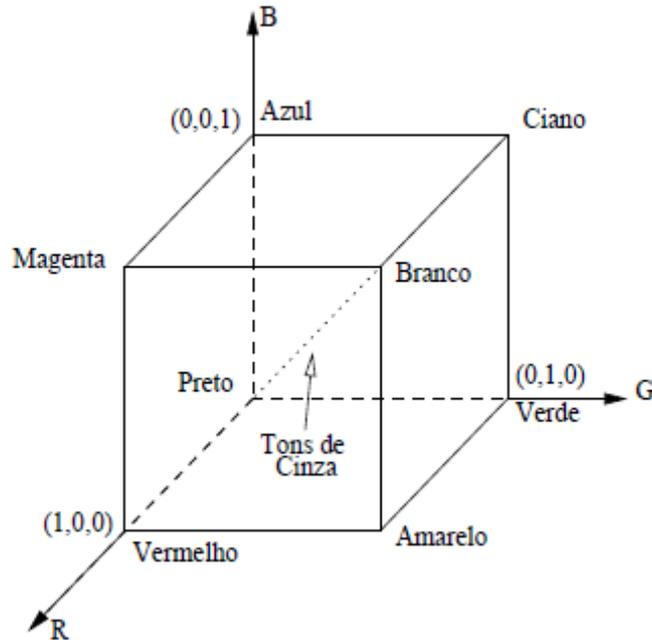
Imagens coloridas, particularmente as geradas por um sistema de imagem digital, são representadas como vermelho, verde e azul e são chamadas imagens RGB. Um modelo RGB é um tipo de espaço de cores ou modelo de cores usado, por exemplo, nos monitores coloridos e algumas câmeras de vídeo [13].

Uma imagem no modelo RGB consiste de três planos independentes de cores, uma para cada cor primária, correspondendo ao vermelho, verde e azul. O modelo de cores RGB é baseado no sistema de coordenadas cartesianas e o subespaço de cores de interesse é o cubo  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ , ilustrado na figura 4.2.

Formalmente, uma cor  $u$  no modelo RGB corresponde a um ponto  $(u_r, u_g, u_b)$  no cubo  $\mathbb{V}_{RGB} = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ . A origem representa o preto e o vértice  $(1, 1, 1)$  representa o branco. Os vértices do cubo nos eixos representam as cores primárias, e os vértices restantes representam as cores complementares de cada cor primária. Os tons de cinza são os pontos ao longo da diagonal partindo da origem ao vértice  $(1, 1, 1)$ . Cada tom ao longo dessa diagonal é formado por contribuições iguais de cada cor primária, assim um tom de cinza médio é representado por  $(0, 5; 0, 5; 0, 5)$ .

O sistema de cores RGB é um modelo aditivo, ou seja, intensidades de cores primárias são adicionadas para produzir outras cores. Por exemplo, o vértice  $(1, 0, 1)$  que representa a cor magenta é obtido pela adição de vermelho e azul, e o vértice  $(1, 1, 1)$  que representa o branco, é a soma de vermelho, verde e azul [21].

**Figura 4.2** – Interpretação geométrica do modelo de cores RGB



**Exemplo 1.** A representação no sistema RGB da imagem  $x = [x_1, x_2, \dots, x_8]$  ilustrada na figura 4.1 é dado por

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
 x_5 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Uma das limitações do espaço de cores RGB é a não uniformidade do espaço. Um espaço de cores uniforme é um espaço onde a distância Euclidiana entre dois pontos quaisquer do espaço corresponde a diferença entre duas cores percebida pelo sistema de visão humano. Mais detalhes de como o olho humano percebe as cores podem ser encontrados em [2, 29].

#### 4.2.1 Ordem das Cores no Sistema RGB

Para ordenar os elementos de  $\mathbb{V}$  no espaço de cores RGB usamos as ordens marginal, lexicográfica e  $\alpha$ -módulo.

### Ordem Marginal RGB

A ordem *marginal* também chamada ordem de *pareto*, denotada pelo símbolo  $\leq_{RGB}^M$ , é definida como: dados  $\mathbf{u} = (u_r, u_g, u_b) \in \mathbb{V}_{RGB}$  e  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_r, \mu_g, \mu_b) \in \mathbb{V}_{RGB}$ ,

$$\mathbf{u} \leq_{RGB}^M \boldsymbol{\mu} \quad \text{se} \quad u_r \leq \mu_r \quad \text{e} \quad u_g \leq \mu_g \quad \text{e} \quad u_b \leq \mu_b, \quad (4.1)$$

onde  $\leq$  denota a ordem usual no intervalo  $[0, 1]$ . Nesta ordem, os vetores são ordenados em cada canal ou banda independentemente [4]. Na ordem marginal o supremo e o ínfimo de um conjunto  $X$  em um reticulado completo  $(\mathbb{V}_{RGB}, \leq_{RGB}^M)$  correspondem ao menor e maior elemento componente a componente do vetor, respectivamente. Observamos que o  $\bigwedge X$  e o  $\bigvee X$  não necessariamente pertencem a  $X$ , pois a ordem marginal é parcial e, no caso de imagens coloridas, pode levar ao aparecimento de falsas cores em uma imagem recordada pelos modelos de memória  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$ . Lembrando que uma cor falsa é um elemento que não faz parte do conjunto de vetores considerado.

### Ordem Lexicográfica RGB

A ordem *lexicográfica RGB* corresponde a uma ordem condicional, onde os vetores são ordenados por meio de suas componentes marginais, selecionados sequencialmente de acordo com diferentes condições. Esta ordem priorisa a primeira componente do vetor e é definida como: dados  $\mathbf{u} = (u_r, u_g, u_b) \in \mathbb{V}_{RGB}$  e  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_r, \mu_g, \mu_b) \in \mathbb{V}_{RGB}$ ,

$$\mathbf{u} \leq_{RGB}^L \boldsymbol{\mu} \quad \text{se} \quad \begin{cases} u_r < \mu_r & \text{ou} \\ u_r = \mu_r & \text{e} \quad u_g < \mu_g & \text{ou} \\ u_r = \mu_r & \text{e} \quad u_g = \mu_g & \text{e} \quad u_b \leq \mu_b. \end{cases} \quad (4.2)$$

A definição (4.2) priorisa a cor vermelha, em seguida a cor verde, e por fim a cor azul. Mas, podemos estabelecer diferentes prioridades para os canais de cor, por exemplo, a ordem lexicográfica GRB onde a cor priorizada é o verde, em seguida e vermelho e por fim o azul.

A ordem lexicográfica tem sido amplamente usada no contexto da morfologia matemática para dados com multivalores, pois possui a propriedade de ser uma ordem total. Em outras palavras, um esquema totalmente ordenado evita ambiguidades durante a ordenação dos vetores. Uma ordem total também possui a vantagem, do ponto de vista teórico, de preservar os vetores. Como consequência, o supremo e o ínfimo de um conjunto finito de vetores pertencem ao conjunto. No caso de imagens coloridas, uma relação de ordem total, previne o aparecimento de falsas cores. A ordem lexicográfica é particularmente adequada para imagens onde existe uma prioridade entre os diferentes canais ou bandas da imagem [5].

### Ordem Lexicográfica $\alpha$ -módulo RGB

A ordem *lexicográfica  $\alpha$ -módulo*, introduzida por Angulo e Serra [3], reduz o grau de influência da primeira componente através da criação de grupos equivalentes dentro da primeira dimensão [5]. Os grupos são obtidos aplicando a divisão por uma constante  $\alpha$  seguido por um arredondamento. Consideramos neste trabalho a seguinte adaptação da ordem lexicográfica  $\alpha$ -módulo: dados  $\alpha \in (0, 1]$  e dois pontos  $\mathbf{u} = (u_r, u_g, u_b) \in \mathbb{V}_{RGB}$  e  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_r, \mu_g, \mu_b) \in \mathbb{V}_{RGB}$ , definimos

$$\mathbf{u} \leq_{RGB}^{\alpha} \boldsymbol{\mu} \text{ se } \begin{cases} \lfloor u_r/\alpha \rfloor < \lfloor \mu_r/\alpha \rfloor & \text{ou} \\ \lfloor u_r/\alpha \rfloor = \lfloor \mu_r/\alpha \rfloor & \text{e } u_g < \mu_b & \text{ou} \\ \lfloor u_r/\alpha \rfloor = \lfloor \mu_r/\alpha \rfloor & \text{e } u_g = \mu_g & \text{e } u_b < \mu_b & \text{ou} \\ \lfloor u_r/\alpha \rfloor = \lfloor \mu_r/\alpha \rfloor & \text{e } u_g = \mu_g & \text{e } u_b = \mu_b & \text{e } u_r \leq \mu_r. \end{cases} \quad (4.3)$$

Observamos que a ordem dada em (4.3) difere da ordem proposta por Angulo e Serra com segue: primeiro, o conjunto finito  $\{0, 1, \dots, 255\}^3$  foi substituído pelo cubo unitário  $\mathbb{V}_{RGB} = [0, 1]^3$ . Segundo, adicionamos a última condição em que a primeira componente é reconsiderada na sequência da cascata na ordem lexicográfica para evitar indistinguibilidade dentro dos grupos equivalentes. Conseqüentemente, a ordem lexicográfica  $\alpha$ -módulo dada por (4.3) é uma ordem total em  $\mathbb{V}_{RGB}$ . Assim, o supremo e o ínfimo de um subconjunto de  $\mathbb{V}_{RGB}$  podem ser facilmente determinados.

### 4.3 REPRESENTAÇÃO HSL

Ao invés de um conjunto de cores primárias, o modelo HSL usa descrições de cores que tem um apelo intuitivo, aproximando-se muito da forma com que um artista de artes visuais mistura as cores. Os parâmetros de cor neste modelo são *hue* (H), *saturação* (S) e *brilho*(L) [21].

Hue, assim como a cor, é uma propriedade da luz, e pode ser entendido como uma propriedade da superfície refletora ou transmissora de luz. Por exemplo, um carro azul, reflete *hue* azul. Desta forma, *hue* é um atributo da percepção humana e também pode ser descrito como vermelho, verde, azul, como *hues* primários ou qualquer combinação intermediária de *hues* primários. As cores preto, branco e cinza não são *hues*, são cores ditas acromáticas [1].

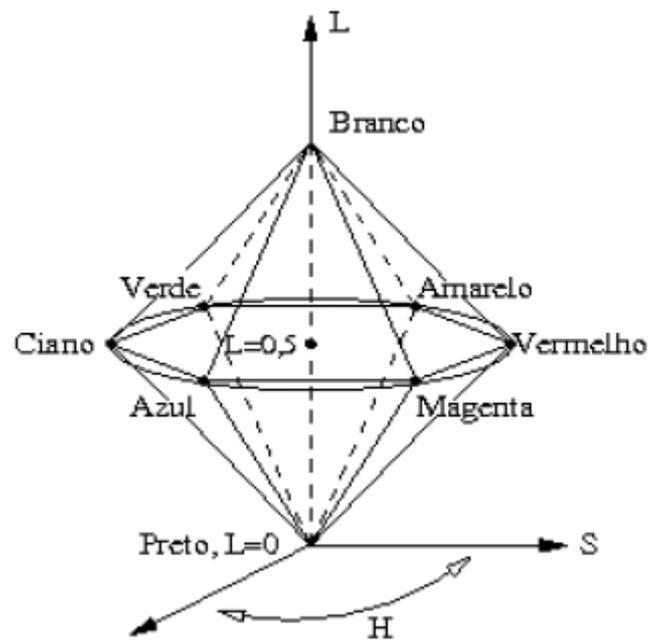
O parâmetro (L) mede a quantidade de brilho das cores, ou seja, mede a quantidade de luz emitida, ou refletida por um objeto, e toma valores ao longo do eixo vertical no intervalo  $[0, 1]$ . Os tons de cinza encontram-se sobre o eixo L, onde a cor branca é obtida quando  $L = 1$ , a cor preta quando  $L = 0$  e os chamados “*hues* puros” quando  $L = 0,5$ .

A saturação refere-se a quantidade de cor branca ou a “pureza” de uma determinada cor. A saturação com valor igual a um significa que a cor é pura, enquanto que uma saturação com valor zero significa que a cor é acromática e, neste caso, o valor do parâmetro *hue* é irrelevante.

Devido a forma do modelo de cores HSL, a saturação atinge seu valor máximo quando  $L = 0,5$ .

A representação do espaço de cores HSL é baseado no sistema de coordenadas cilíndricas e tem a forma de um “cone duplo” como mostrado na figura 4.3. Uma cor  $(u_h, u_s, u_l) \in \mathbb{V}_{HSL}$  no modelo HSL pode ser determinada a partir da respectiva representação no sistema RGB  $(u_r, u_g, u_b) \in \mathbb{V}_{RGB}$  como segue onde  $M = (u_r \vee u_g \vee u_b)$  e  $m = (u_r \wedge u_g \wedge u_b)$  denotam o máximo e o mínimo dos componentes RGB:

**Figura 4.3** – Interpretação geométrica do modelo de cores HSL



$$u_l = \frac{M + m}{2}; \quad (4.4)$$

$$u_s = \begin{cases} 0 & \text{se } M = m \\ \frac{M - m}{M + m} & \text{se } M \neq m \text{ e } u_l \leq 0,5 \\ \frac{M - m}{2 - M - m} & \text{se } M \neq m \text{ e } u_l > 0,5 \end{cases} \quad (4.5)$$

$$u_h = \begin{cases} 0 & \text{se } u_s = 0 \\ 60 \left( \frac{u_g - u_b}{M - m} \right) & \text{se } u_r = M \\ 60 \left( 2 + \frac{u_b - u_r}{M - m} \right) & \text{se } u_g = M \\ 60 \left( 4 + \frac{u_r - u_g}{M - m} \right) & \text{se } u_b = M, \end{cases} \quad (4.6)$$

onde  $u_r, u_g, u_b \in [0, 1]$ . Se  $u_h < 0$  então redefinimos  $u_h$  como sendo  $u_h + 360$ , para obter valores entre 0 e 360 graus. O algoritmo da transformação acima encontra-se em [2].

**Exemplo 2.** A representação da imagem  $x$  ilustrada na figura 4.1 no sistema HSL é dado por

$$\begin{aligned} x_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 60 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 240 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} 300 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \\ x_5 &= \begin{pmatrix} 120 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}, x_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_8 = \begin{pmatrix} 180 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Na próxima subsecção apresentamos alguns esquemas ordenados no espaço HSL. Tais ordens são baseadas em variações da ordem lexicográfica, uma vez que a ordem marginal não está bem definida devido a geometria do espaço de cores HSL. Por exemplo, na ordem marginal, o máximo entre os pontos  $(0, 0, 1) \in \mathbb{V}_{HSL}$  e  $(120; 1; 0, 5) \in \mathbb{V}_{HSL}$  correspondentes as cores banca e verde, respectivamente, é o ponto  $(120, 1, 1)$  que está fora do cone duplo mostrado na figura 4.3. Por esta razão, apresentamos a seguir somente esquemas totalmente ordenados, onde o supremo e o ínfimo de qualquer subconjunto  $X \subseteq \mathbb{V}_{HSL}$  pertence a  $X$ .

### 4.3.1 Esquemas Ordenados no Espaço HSL

Para ordenar os elementos de  $\mathbb{V}$  nos espaços de cores HSL e HSV usamos a ordem lexicográfica com algumas adaptações, pois a aplicação direta da ordem lexicográfica não é possível, devido a forma destes espaços e a componente angular *hue* [16]. Para ordenar os valores do *hue* no círculo unitário utilizamos um método que requer a escolha de uma origem  $h_0$  e calcula a distância  $D_i$  definida em (4.7) como um ângulo agudo entre a origem  $h_0$  e um ponto arbitrário  $h_i$  no círculo:

$$D_i = D(h_i, h_0) = h_i \div h_0 = \begin{cases} |h_i - h_0| & \text{se } |h_i - h_0| \leq 180^\circ \\ 360^\circ - |h_i - h_0| & \text{se } |h_i - h_0| > 180^\circ. \end{cases} \quad (4.7)$$

Para ordenar os valores do *hue* em termos de (4.7) definimos que  $h_1 \div h_0 < h_2 \div h_0$ , ou seja, o ângulo agudo entre  $h_1$  e a origem  $h_0$  é menor que o ângulo agudo entre  $h_2$  e a origem  $h_0$ . Observamos que esta ordem baseada somente em termos de (4.7) é uma ordem parcial. Por exemplo, os pontos  $h_1 = 30^\circ$  e  $h_2 = 330^\circ$  tem a mesma distância a partir da origem  $h_0 = 0^\circ$ , mas não são o mesmo ponto. Podemos impor uma ordem total para os valores do *hue*, estabelecendo que quando  $D(h_1, h_0) = D(h_2, h_0)$  e  $h_1 \neq h_2$  tomamos  $h_1 < h_2$ .

#### Ordem Lexicográfica LSH

A ordem Lexicográfica LSH é obtida aplicando-se sequencialmente a luminosidade, a saturação e o valor do *hue*. Especificamente, dados dois pontos  $u = (u_h, u_s, u_l) \in \mathbb{V}_{HSL}$  e  $\mu = (\mu_h, \mu_s, \mu_l) \in \mathbb{V}_{HSL}$  e um ângulo de referência  $h_0$ , definimos  $u \leq_{LSH}^L \mu$  se e somente se

$$\begin{cases} u_l < \mu_l & \text{ou} \\ u_l = \mu_l & \text{e } u_s > \mu_s & \text{ou} \\ u_l = \mu_l & \text{e } u_s = \mu_s & \text{e } u_h \div h_0 > \mu_h \div h_0 & \text{ou} \\ u_l = \mu_l & \text{e } u_s = \mu_s & \text{e } u_h \div h_0 = \mu_h \div h_0 & \text{e } u_h \geq \mu_h. \end{cases} \quad (4.8)$$

Note que, o menor e o maior elemento de  $\mathbb{V}_{HSL}$  com o esquema ordenado definido em (4.8) correspondem as cores branca e preta, respectivamente. Além disso, os modelos de memória  $\mathcal{W}$ , baseados nas operações de supremo, resaltarão as cores com maior valor de luminosidade enquanto que os modelos baseados nas operações de ínfimo,  $\mathcal{M}$ , resaltarão as cores mais escuras, ou seja, com valor de luminosidade menor.

Observamos também, que o esquema ordenado dado por (4.8) é uma adaptação da ordem proposta por Hanbury e Serra [16]. Precisamente, adicionamos à última condição a escolha da cor com o menor *hue* se ambos  $u$  e  $\mu$  formarem o mesmo ângulo com a origem  $h_0$ . Na prática esta modificação não tem um efeito significativo pois a sequência da ordem lexicográfica dificilmente atingirá a última posição.

### Ordem Lexicográfica SLH

A ordem Lexicográfica SLH que priorisa a saturação seguido da luminosidade e por fim o valor do *hue* é definida como: dados  $\mathbf{u} = (u_h, u_s, u_l) \in \mathbb{V}_{HSL}$  e  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_h, \mu_s, \mu_l) \in \mathbb{V}_{HSL}$  e um ângulo de referência  $h_0$ , tem-se  $\mathbf{u} \leq_{SLH}^L \boldsymbol{\mu}$  se e somente se

$$\left\{ \begin{array}{l} u_s < \mu_s \text{ ou} \\ u_s = \mu_s \text{ e } |u_l - 0,5| > |\mu_l - 0,5| \text{ ou} \\ u_s = \mu_s \text{ e } |u_l - 0,5| = |\mu_l - 0,5| \text{ e } u_h \div h_0 > \mu_h \div h_0 \text{ ou} \\ u_s = \mu_s \text{ e } |u_l - 0,5| = |\mu_l - 0,5| \text{ e } u_h \div h_0 = \mu_h \div h_0 \text{ e } u_l < \mu_l \text{ ou} \\ u_s = \mu_s \text{ e } |u_l - 0,5| = |\mu_l - 0,5| \text{ e } u_h \div h_0 = \mu_h \div h_0 \text{ e } u_l = \mu_l \text{ e } u_h \geq \mu_h. \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Note que, o maior e menor elemento de  $\mathbb{V}_{HSL}$  com a ordem dada por (4.9) corresponde as cores puras com a referência  $h_0$  para o *hue* e o preto, respectivamente. Além disso, os modelos  $\mathcal{W}$ , que são baseados na operação de supremo, priorizarão os elementos mais saturados de uma imagem, e se dois pixels possuírem o mesmo valor de saturação, então o elemento escolhido será aquele com luminosidade para próximo de 0,5. Lembrando que a saturação atinge o valor máximo quando o valor da luminosidade for 0,5. Enquanto que os modelos  $\mathcal{M}$  darão preferência às cores acromáticas, ou seja, resaltarão os tons de cinza.

Finalmente, salientamos que a ordem dada por (4.9) é uma adaptação da ordem proposta por Hanbury e Serra [16]. Especificamente, as mudanças foram realizadas nas duas últimas condições com a finalidade de torná-la uma ordem total.

### Ordem Lexicográfica Hue Ponderado Pela Saturação

Em contraste com as ordens anteriores, no sistema HSL uma ordem total com a componente angular *hue* na primeira posição da cascata na ordem lexicográfica não pode ser diretamente aplicada, pois o *hue* não está bem definido para as cores acromáticas, embora atribuamos  $u_h = 0$  na equação (4.6) se  $u_s = 0$ . Como o valor do *hue* está intimamente relacionado com a saturação, Hanbury e Serra proporam um pré-processamento no qual o valor do *hue* é ponderado pelo valor da saturação [16]. Formalmente, dado um elemento  $\mathbf{u} = (u_h, u_s, u_l) \in \mathbb{V}_{HSL}$  e um ângulo de referência  $h_0$ , defina um ângulo  $\theta \in [0, 360]$  como segue:

$$\theta = \begin{cases} u_h - h_0 & \text{if } u_h - h_0 \geq 0, \\ 360 + (u_h - h_0) & \text{if } u_h - h_0 < 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Então, o valor do *hue* ponderado pela saturação  $u_w \in [0, 360]$  é determinado por meio das equações

$$u_w = \begin{cases} [90(1 - u_s)] \vee \theta & \text{if } 0 \leq \theta < 90, \\ [90(1 + u_s)] \wedge \theta & \text{if } 90 \leq \theta < 180, \\ [90(3 - u_s)] \vee \theta & \text{if } 180 \leq \theta < 270, \\ [90(3 + u_s)] \wedge \theta & \text{if } 270 \leq \theta < 360. \end{cases} \quad (4.11)$$

Note que, se a saturação é alta, então o valor do *hue* ponderado pela saturação  $u_w$  fica próximo de  $\theta$ , o qual está relacionado com a diferença entre  $u_h$  e o valor de referência  $h_0$ . Em contrapartida, se a saturação é baixa  $u_w$  fica próximo de  $h_0 + 90$  ou  $h_0 - 90$ . Consequentemente, estes elementos serão dificilmente escolhidos como o supremo ou o ínfimo do conjunto de elementos.

As principais características da ordem baseada no valor do *hue* ponderado pela saturação são: os elementos com altos valores de saturação mantém seu valor inicial. Enquanto que, elementos com baixos valores de saturação são movidos para  $h_0 + 90$  ou  $h_0 - 90$  para reduzir a probabilidade de serem escolhidos como o supremo ou o ínfimo do conjunto de elementos.

A ordem lexicográfica priorizando o valor do *hue* ponderado pela saturação é definida como: dados dois pontos  $\mathbf{u} = (u_h, u_s, u_l) \in \mathbb{V}_{HSL}$  e  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_h, \mu_s, \mu_l) \in \mathbb{V}_{HSL}$ , define-se  $\mathbf{u} \leq_{HLS}^L \boldsymbol{\mu}$  se e somente se

$$\begin{cases} u_w \div h_0 > \mu_w \div h_0 \text{ ou} \\ u_w \div h_0 = \mu_w \div h_0 \text{ e } |u_l - 0,5| > |\mu_l - 0,5| \text{ ou} \\ u_w \div h_0 = \mu_w \div h_0 \text{ e } |u_l - 0,5| = |\mu_l - 0,5| \text{ e } u_s < \mu_s \text{ ou} \\ u_w \div h_0 = \mu_w \div h_0 \text{ e } |u_l - 0,5| = |\mu_l - 0,5| \text{ e } u_s = \mu_s \text{ e } u_l < \mu_l \text{ ou} \\ u_w \div h_0 = \mu_w \div h_0 \text{ e } |u_l - 0,5| = |\mu_l - 0,5| \text{ e } u_s = \mu_s \text{ e } u_l = \mu_l \text{ e } u_h \geq \mu_h. \end{cases} \quad (4.12)$$

A ordem definida em (4.12) foi ligeiramente modificada da ordem proposta por Hanbury e Serra, adicionando duas condições, que fornecem um esquema totalmente ordenado. Observe que, o maior e o menor elemento de  $\mathbb{V}_{HSL}$  com a referida ordem são os pontos  $(h_0; 1; 0,5)$  e  $(h_0 \pm 180; 1; 0,5)$ , que correspondem às cores puras com os ângulos do *hue*  $h_0$ ,  $h_0 + 180$  e  $h_0 - 180$ .

#### 4.4 REPRESENTAÇÃO HSV

Outro modelo que usa descrições de cores que tem um apelo intuitivo é a representação HSV. Os parâmetros de cor neste modelo são *hue*(H), *saturação*(S) e *valor* (V) [21].

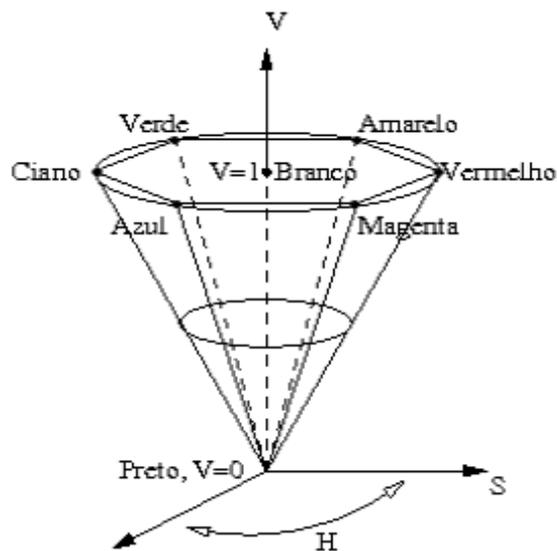
O *hue* tem o mesmo significado que no modelo HSL, e é representado por um ângulo sobre

o eixo horizontal, variando de 0 a 360 graus. Neste modelo, assim como no anterior, a cor vermelha corresponde a 0 graus, o verde 120 graus e o azul 240 graus. A saturação, que refere-se a quantidade de cor branca ou a “pureza” da cor, varia ao longo da distância radial tomando valores no intervalo  $[0, 1]$ . As cores com máximo brilho e saturação,  $V = 1$  e  $S = 1$ , representam os *hues* “puros” de qualquer cor.

O valor ( $V$ ) refere-se a intensidade de brilho de uma determinada cor, ou seja, mede a quantidade de luz que é refletida de um objeto. O parâmetro  $V$  varia de zero, cor negra, onde os valores de  $H$  e  $S$  são irrelevantes, a um, onde a intensidade é máxima. Os tons de cinza encontram-se sobre o eixo  $V$ , e a representação neste sistema de coordenadas para a cor branca é  $V = 1$  e a cor preta quando  $V = 0$ .

A representação do espaço de cores HSV é baseado no sistema de coordenadas cilíndricas e tem a forma cônica como mostrado na figura 4.4. Uma cor  $(u_h, u_s, u_v) \in \mathbb{V}_{HSV}$  no modelo HSV pode ser determinada a partir da respectiva representação no sistema RGB  $(u_r, u_g, u_b) \in \mathbb{V}_{RGB}$  como segue onde  $M = (u_r \vee u_g \vee u_b)$  e  $m = (u_r \wedge u_g \wedge u_b)$  denotam o máximo e o mínimo dos componentes RGB:

**Figura 4.4** – Interpretação geométrica do modelo de cores HSV



$$u_v = M, \quad (4.13)$$

$$u_s = \begin{cases} 0 & \text{se } u_v = 0 \\ \frac{M - m}{M} & \text{se } u_v > 0, \end{cases} \quad (4.14)$$

$$u_h = \begin{cases} 0 & \text{se } u_s = 0 \\ 60 \left( \frac{u_g - u_b}{M - m} \right) & \text{se } u_r = M, \\ 60 \left( 2 + \frac{u_b - u_r}{M - m} \right) & \text{se } u_g = M, \\ 60 \left( 4 + \frac{u_r - u_g}{M - m} \right) & \text{se } u_b = M, \end{cases} \quad (4.15)$$

onde  $u_r, u_g, u_b \in [0, 1]$ . Se  $u_h < 0$  então redefinimos  $u_h$  como sendo  $u_h + 360$ , para obter valores entre 0 e 360 graus. O algoritmo da transformação acima encontra-se em [2].

Na subseção seguinte apresentamos um esquema ordenado para o espaço HSV priorizando o valor. Tendo em vista a semelhança dos espaços HSV e HSL usamos somente esta ordem para os elementos de  $\mathbb{V}_{HSV}$ .

**Exemplo 3.** A representação da imagem  $x$  ilustrada na figura 4.1 no sistema HSV é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 60 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 240 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 300 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}_5 &= \begin{pmatrix} 120 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_8 = \begin{pmatrix} 180 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

#### 4.4.1 Ordem Lexicográfica VSH

Aplicando a ordem lexicográfica sequencialmente ao valor, saturação e a componente angular *hue*, obtemos um esquema ordenado. Especificamente, dados dois elementos  $\mathbf{u} = (u_h, u_s, u_v) \in \mathbb{V}_{HSV}$  e  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_h, \mu_s, \mu_v) \in \mathbb{V}_{HSV}$  e um ângulo de referência  $h_0$ , definimos  $\mathbf{u} \leq_{VSH}^L \boldsymbol{\mu}$  se e somente se

$$\left\{ \begin{array}{l} u_v < \mu_v \quad \text{ou} \\ u_v = \mu_v \quad \text{e} \quad u_s > \mu_s \quad \text{ou} \\ u_v = \mu_v \quad \text{e} \quad u_s = \mu_s \quad \text{e} \quad u_h \div h_0 > \mu_h \div h_0 \quad \text{ou} \\ u_v = \mu_v \quad \text{e} \quad u_s = \mu_s \quad \text{e} \quad u_h \div h_0 = \mu_h \div h_0 \quad \text{e} \quad u_h \geq \mu_h. \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Note que o maior e o menor elemento de  $\mathbb{V}_{HSV}$  com o esquema ordenado dado por (4.16) correspondem as cores branco e preto, respectivamente. Além disso, o modelo  $\mathcal{W}$  enfatizará as cores mais claras, enquanto que o modelo  $\mathcal{M}$  as cores mais escuras.

O esquema ordenado dado por (4.16) corresponde a uma adaptação da ordem proposta por Hanbury e Serra [16], uma vez que a forma do espaço HSV é diferente do HSL. Também, adicionamos a última condição para obter uma ordem total.

#### 4.5 REPRESENTAÇÃO CIELAB

O espaço de cores CIELab, foi adotado pela CIE (Commission Internationale de l'Eclairage), como um padrão internacional em 1970. Este espaço tem a propriedade de ser perceptualmente uniforme, ou seja, a distância Euclidiana entre dois pontos no espaço de cores CIELab corresponde a diferença entre duas cores percebida pelo sistema de visão humano [1, 17].

Nesta dissertação, o espaço de cores CIELab será representado pelo reticulado completo  $\mathbb{V}_{L^*a^*b^*} = [0, 100] \times \mathbb{R}_{\pm\infty} \times \mathbb{R}_{\pm\infty}$ . Na prática, entretanto, somente um subconjunto finito de  $\mathbb{V}_{L^*a^*b^*}$  será usado devido a representação finita das imagens digitais coloridas.

As coordenadas  $u_{L^*}$ ,  $u_{a^*}$ , e  $u_{b^*}$  de um ponto  $\mathbf{u} \in \mathbb{V}_{L^*a^*b^*}$  no espaço de cores CIELab são interpretadas como:  $u_{L^*}$  representa a luminosidade ou brilho, variando de preto a branco. A coordenada  $u_{a^*}$  representa as cores de vermelho a verde, onde os valores positivos representam a cor vermelha e os valores negativos a cor verde. A coordenada  $u_{b^*}$  representa as cores de amarelo a azul, onde os valores positivos indicam amarelo e os valores negativos indicam azul. Os tons de cinza são os valores de  $u_{L^*}$  onde  $u_{a^*} = 0$  e  $u_{b^*} = 0$ , com  $u_{L^*} = 0$  representando o preto e  $u_{L^*} = 100$  o branco. Adicionalmente, o valor  $\sqrt{u_{a^*}^2 + u_{b^*}^2}$  representa o croma, que mede a quantidade de cor de um ponto  $\mathbf{u} \in \mathbb{V}_{L^*a^*b^*}$  comparado com o branco [29].

O CIELab é frequentemente usado em imagens científicas e colorimetria como, por exemplo, para calibrações corretas de instrumentos permitindo a troca de informações de cores medidas objetivamente entre diferentes observadores [17]. Este sistema também fornece uma medida entre cores consistente com a percepção de cores do sistema de visão humano.

A transformação do modelo RGB para o CIELab resulta em uma forma irregular para a gama de cores. Esta transformação passa primeiro pelo sistema XYZ, o qual considera as características dos dispositivos de visualização e as condições de luminosidade. Para fazer a

conversão do sistema RGB para XYZ, é necessário especificar as coordenadas das três cores primárias do dispositivo de imagem e a referência de branco. As referências de branco são os padrões de luminosidade desenvolvidos pela CIE *Standard Illuminants*, tais como  $D_{65}$  (day-light), que representa a luz do dia com temperatura de cor de  $6.504^\circ\text{K}$  ou  $A$  que representa uma lâmpada de filamento de tungstênio, com a temperatura de cor de  $2.854^\circ\text{K}$ .

Usando as referências para as cores primárias do acordo internacional Rec. 709 para televisores de alta definição (HDTV), que corresponde as cores primárias usadas em monitores de computador, e a referência de branco  $D_{65}$ , a conversão de RGB para XYZ pode ser determinada como: dado  $\mathbf{u} = (u_r, u_g, u_b) \in \mathbb{V}_{RGB}$  a respectiva representação  $\mathbf{v} = (v_X, v_Y, v_Z)$  no espaço de cores CIE XYZ pode ser calculada como [1]:

$$\begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,412453 & 0,357580 & 0,180423 \\ 0,212671 & 0,715160 & 0,072169 \\ 0,019334 & 0,119193 & 0,950227 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_r \\ u_g \\ u_b \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Agora, transformando do espaço CIE XYZ para o espaço CIELab, a respectiva representação  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_{L^*}, \mu_{a^*}, \mu_{b^*}) \in \mathbb{V}_{L^*a^*b^*}$  é dado por:

$$\mu_{L^*} = 116f\left(\frac{v_Y}{Y_0}\right) - 16, \quad (4.18)$$

$$\mu_{a^*} = 500 \left[ f\left(\frac{v_X}{X_0}\right) - f\left(\frac{v_Y}{Y_0}\right) \right], \quad (4.19)$$

$$\mu_{b^*} = 200 \left[ f\left(\frac{v_Y}{Y_0}\right) - f\left(\frac{v_Z}{Z_0}\right) \right], \quad (4.20)$$

onde

$$f(q) = \begin{cases} \sqrt[3]{q} & \text{se } q > 0,008856, \\ 7,787q + \frac{16}{116} & \text{se } q \leq 0,008856. \end{cases} \quad (4.21)$$

As coordenadas  $X_0$ ,  $Y_0$  e  $Z_0$  são as referências de branco,  $D_{65}$ , obtidas substituindo-se  $(u_r, u_g, u_b) = (1, 1, 1)$  em (4.17), e os valores obtidos são  $X_0 = 0,950456$ ,  $Y_0 = 1$  e  $Z_0 = 1,088754$ .

A distância entre duas cores  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_{L^*}, \mu_{a^*}, \mu_{b^*})$  e  $\boldsymbol{\nu} = (\nu_{L^*}, \nu_{a^*}, \nu_{b^*})$  no espaço CIELab é denotado por  $\Delta E_{ab}^*$  (Delta E-ab) e é dado por:

$$\Delta E_{ab}^* = \left[ (\mu_{L^*} - \nu_{L^*})^2 + (\mu_{a^*} - \nu_{a^*})^2 + (\mu_{b^*} - \nu_{b^*})^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

Devido a característica de uniformidade do referido espaço, se para duas cores o  $\Delta E_{ab}^*$  for pequeno, então estas cores são visualmente semelhantes.

**Exemplo 4.** A representação da imagem  $x$  ilustrada na figura 4.1 no sistema CIELab é dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \begin{pmatrix} 53,241 \\ 80,094 \\ 67,202 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 97,140 \\ -21,552 \\ 94,476 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 32,296 \\ 79,187 \\ -107,86 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 60,324 \\ 98,235 \\ -60,825 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}_5 &= \begin{pmatrix} 87,735 \\ -86,181 \\ 83,177 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_7 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_8 = \begin{pmatrix} 91,113 \\ -48,089 \\ -14,131 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Note que o  $\Delta E_{ab}^*(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 114,03$  enquanto que  $\Delta E_{ab}^*(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = 235,14$ . Lembrando que  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  e  $\mathbf{x}_3$  representam as cores vermelho, amarelo e azul, respectivamente.

#### 4.5.1 Ordem das Cores no Espaço CIELab

Para ordenar os elementos de  $\mathbb{V}$  no espaço de cores CIELab usamos a ordem lexicográfica com algumas variações.

##### Ordem Lexicográfica $L^*a^*b^*$

A ordem lexicográfica  $L^*a^*b^*$  é uma ordem total que prioriza a luminosidade, seguido dos valores nos eixos vermelho-verde e amarelo-azul, e pode ser definida como: dados  $\mu = (\mu_{L^*}, \mu_{a^*}, \mu_{b^*})$  e  $\nu = (\nu_{L^*}, \nu_{a^*}, \nu_{b^*})$  do espaço de cores CIELab tem-se

$$\mu \leq_{L^*a^*b^*} \nu \text{ se } \begin{cases} \mu_{L^*} < \nu_{L^*} & \text{ou} \\ \mu_{L^*} = \nu_{L^*} & \text{e } \mu_{a^*} < \nu_{a^*} & \text{ou} \\ \mu_{L^*} = \nu_{L^*} & \text{e } \mu_{a^*} = \nu_{a^*} & \text{e } \mu_{b^*} \leq \nu_{b^*} \end{cases} \quad (4.22)$$

Note que, o supremo e o ínfimo de  $\mathbb{V}_{L^*a^*b^*}$  com a ordem dada por (4.22) corresponde aos elementos  $(100, +\infty, +\infty)$  e  $(0, -\infty, -\infty)$ , respectivamente. Na prática, no entanto, o supremo é  $(100, 0, 0)$  e o ínfimo é  $(0, 0, 0)$  pois consideramos somente um subconjunto finito de elementos de  $\mathbb{V}_{L^*a^*b^*}$ . Além disso, os modelos de memória  $\mathcal{W}$  ressaltarão as cores com maior valor de luminosidade, enquanto que os modelos  $\mathcal{M}$  as cores mais escuras.

##### Ordem Lexicográfica $L^*a^*b^*$ Baseado num Referencial

A Ordem Lexicográfica  $L^*a^*b^*$  definida em (4.22) não leva em consideração o fato do espaço de cores CIELab ser perceptualmente uniforme. Em contraste, o seguinte esquema ordena os elementos de acordo com a diferença perceptual com uma certa cor referência. Precisamente, seja  $\mathbf{r} = (r_{L^*}, r_{a^*}, r_{b^*}) \in \mathbb{V}_{L^*a^*b^*}$  um ponto de referência fixo. Dados dois elementos  $\mu = (\mu_{L^*}, \mu_{a^*}, \mu_{b^*}) \in \mathbb{V}_{L^*a^*b^*}$  e  $\nu = (\nu_{L^*}, \nu_{a^*}, \nu_{b^*}) \in \mathbb{V}_{L^*a^*b^*}$ , definimos  $\mu \leq_{L^*a^*b^*}^r \nu$  se e

somente se

$$\left\{ \begin{array}{l} d_E(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{r}) > d_E(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{r}) \text{ ou} \\ d_E(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{r}) = d_E(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{r}) \text{ e } |\mu_{L^*} - r_{L^*}| < |\nu_{L^*} - r_{L^*}| \text{ ou} \\ d_E(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{r}) = d_E(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{r}) \text{ e } |\mu_{L^*} - r_{L^*}| = |\nu_{L^*} - r_{L^*}| \text{ e } \mu_{a^*} < \nu_{a^*} \text{ ou} \\ d_E(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{r}) = d_E(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{r}) \text{ e } |\mu_{L^*} - r_{L^*}| = |\nu_{L^*} - r_{L^*}| \text{ e } \mu_{a^*} = \nu_{a^*} \text{ e } \mu_{b^*} < \nu_{b^*} \text{ ou} \\ d_E(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{r}) = d_E(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{r}) \text{ e } |\mu_{L^*} - r_{L^*}| = |\nu_{L^*} - r_{L^*}| \text{ e } \mu_{a^*} = \nu_{a^*} \text{ e } \mu_{b^*} = \nu_{b^*} \text{ e } \mu_{L^*} \leq \nu_{L^*}. \end{array} \right. \quad (4.23)$$

onde  $d_E(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{r})$  denota a distância Euclidiana entre  $\boldsymbol{\mu}$  e  $\mathbf{r}$ .

Note que, se a segunda condição em (4.23) for satisfeita, ou seja,  $d_E(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{r}) = d_E(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{r})$  e  $|\mu_{L^*} - r_{L^*}| < |\nu_{L^*} - r_{L^*}|$ , então a desigualdade

$$(\mu_{a^*} - r_{a^*})^2 + (\mu_{b^*} - r_{b^*})^2 > (\nu_{a^*} - r_{a^*})^2 + (\nu_{b^*} - r_{b^*})^2 \quad (4.24)$$

é verdadeira. Em outras palavras, o cromatismo de  $\boldsymbol{\nu}$  está mais próximo do cromatismo do ponto de referência  $\mathbf{r}$  que o cromatismo de  $\boldsymbol{\mu}$ . Também, observe que as três últimas condições em (4.23), que corresponde a ordem lexicográfica aplicada sequencialmente ao vermelho-verde, amarelo-azul, e os valores da luminosidade, tornam  $\leq_{L^*a^*b^*}^r$  um esquema totalmente ordenado. O maior e o menor elemento de  $\mathbb{V}_{L^*a^*b^*}$  com a ordem dada por (4.23) é o ponto referência  $\mathbf{r}$  e  $(r_{L^*}, -\infty, -\infty)$ , respectivamente.

#### 4.6 TRANSFORMAÇÃO DE KARHUNEN – LOÈVE

A transformação de Karhunen-Loève (TKL) é baseada em propriedades estatísticas de representação de vetores, o que a torna uma ferramenta importante para o processamento de imagens e sinais [13]. Esta transformação constitui um método para descorrelacionar os dados que apresentam uma certa dependência. Por exemplo, as coordenadas do sistema de cor RGB são altamente correlacionadas [35]. O objetivo da transformação de Karhunen-Loève é fazer uma mudança de base para um novo sistema de coordenadas onde os dados estejam descorrelacionados.

Para obter a transformação de Karhunen-Loève, o primeiro passo é definir a matriz de covariância e o vetor de médias de um conjunto de dados. Formalmente, sejam  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$  os valores dos pixels de uma ou mais imagens coloridas no sistema RGB. Definimos o vetor das médias  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3$  e a matriz covariante  $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  dos valores dos pixels como segue:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{u}_i \quad \text{e} \quad C = \frac{1}{m} \left( \sum_{i=1}^m \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \right) - \mathbf{m} \mathbf{m}^T. \quad (4.25)$$

Os elementos  $c_{ii}$  de  $C$  representam a variância dos  $u_i$ , e os elementos  $c_{ij}$  de  $C$  a covariância entre os elementos  $u_i$  e  $u_j$ . Se os elementos  $u_i$  e  $u_j$  não estão correlacionados sua covariância é

zero e  $c_{ij} = c_{ji} = 0$ .

Note que a matriz  $C$  é simétrica e semidefinida positiva, logo é possível encontrar uma base ortonormal de autovetores [12]. Sejam  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$  e  $\mathbf{q}_3$  e  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  os autovetores e os autovalores correspondentes de  $C$ , respectivamente, arranjados na ordem decrescente  $\lambda_j \geq \lambda_{j+1}$  para  $j = 1, 2$ . Defina a matriz  $Q$  com as linhas formadas pelos autovetores de  $C$ , ordenadas de forma que a primeira linha de  $Q$  corresponde ao maior autovetor e a última linha corresponde ao menor autovetor.

A matriz  $Q$  é a transformação de Karhunen-Loève. Desta forma, dado um elemento  $\mathbf{u} = (u_r, u_g, u_b) \in \mathbb{V}_{RGB}$  no sistema de cores RGB, o correspondente elemento  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  no sistema de cores ortogonal Karhunen-Loève  $\mathbb{V}_{TKL}$  é dado por:

$$\mathbf{v} = Q(\mathbf{u} - \mathbf{m}). \quad (4.26)$$

O objetivo da transformação é estabelecer um novo sistema de coordenadas cujos eixos estão na direção dos autovetores de  $C$ . Precisamente, a transformação de Karhunen-Loève é uma rotação que alinha os dados com os autovetores e este alinhamento é o mecanismo que descorrelaciona os dados.

Uma propriedade importante desta transformação é o fato que  $Q$  é ortogonal, ou seja,  $Q^{-1} = Q^T$ , logo o processo reverso de recuperar um vetor  $\mathbf{u}$  a partir de um vetor  $\mathbf{v}$  é dado por:

$$\mathbf{u} = Q^T \mathbf{v} + \mathbf{m}. \quad (4.27)$$

onde  $Q^T = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  é a matriz ortonormal formada pelos autovetores de  $C$ .

**Exemplo 5.** A representação da imagem  $x$  ilustrada na figura 4.1 no sistema de coordenadas Karhunen-Loève é dado por:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_5 = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_6 = \begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_7 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_8 = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

#### 4.6.1 Ordem das Coresno Espaço TKL

Para ordenar os elementos de  $\mathbb{V}$  no sistema ortogonal de cores Karhunen-Loève  $\mathbb{V}_{TKL}$  usamos a ordem lexicográfica. Matematicamente, dados dois pontos  $\mathbf{u} \in \mathbb{V}_{RGB}$  e  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{V}_{RGB}$  e sejam  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  e  $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  os vetores correspondentes no sistema de cores Karhunen-Loève. Definimos  $\mathbf{u} \leq_{TKL}^L \boldsymbol{\mu}$  se e somente se  $\mathbf{v}$  é menor ou igual que  $\boldsymbol{\nu}$  na ordem lexicográfica, ou seja,

$$\mathbf{u} \leq_{TKL}^L \boldsymbol{\mu} \text{ se } \begin{cases} v_1 < \nu_1 & \text{ou} \\ v_1 = \nu_1 & \text{e } v_2 < \nu_2 & \text{ou} \\ v_1 = \nu_1 & \text{e } v_2 = \nu_2 & \text{e } v_3 \leq \nu_3. \end{cases} \quad (4.28)$$

Note que a ordem dada por (4.28) é uma ordem total, em que o supremo e o ínfimo de qualquer subconjunto de  $\mathbb{V}_{TKL}$  são obtidos de acordo com a posição dos valores dos pixels no espaço TKL. Também observamos que a ordem marginal não pode ser aplicada sem adaptações neste espaço, pois o inverso do supremo de um subconjunto  $X \subseteq \mathbb{V}_{TKL}$ , bem como o inverso do ínfimo de  $X$ , podem não pertencer ao cubo  $\mathbb{V}_{RGB} = [0, 1]^3$ . Em vista disto, aplicamos o sistema de cores Karhunen-Loève somente com a ordem lexicográfica.

## CAPÍTULO 5

### RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Neste capítulo realizamos diversos experimentos computacionais utilizando as memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  para a reconstrução de imagens coloridas corrompidas com diferentes tipos de ruído. Para isto consideramos doze imagens coloridas no sistema RGB de tamanho  $512 \times 512$  pixels como mostrado na figura 5.1. Para cada uma destas imagens, geramos um padrão  $\mathbf{x}^\xi$  de tamanho  $n$ , com  $n = 262144$ . Também dividimos todas as entradas de  $\mathbf{x}^\xi$  por 255 para obter valores no intervalo  $[0, 1]$ , assim  $\mathbf{x}^\xi = [x_1^\xi, \dots, x_n^\xi]$  onde cada  $x_i^\xi = [x_r^\xi, x_g^\xi, x_b^\xi] \in [0, 1]^3$ . Então, armazenamos as doze imagens originais nas memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$ , aplicando as MAERCs em diferentes representações de espaços de cores como RGB, HSV, HSL e CIELab com diferentes esquemas ordenados. Nosso objetivo é avaliar o desempenho destas memórias na reconstrução de imagens coloridas corrompidas com ruído *pepper*, gaussiano e impulsivo.

#### 5.1 MEDIDAS DE DISTRORÇÃO

Para avaliar a qualidade das imagens recordadas por um modelo de memória associativa usamos duas medidas, a razão pico sinal-ruído<sup>1</sup> (PSNR) e o  $\Delta E_{ab}^*$ . O PSNR é uma medida bastante usada para avaliar a qualidade de imagens processadas por um sistema de imagem digital e utiliza o erro quadrático médio (MSE) em sua fórmula. Assim dadas duas imagens  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}^n$ , define-se o erro quadrático médio como:

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|\mathbf{x}_j - \mathbf{y}_j\|^2,$$

onde  $\mathbf{x}_j$  e  $\mathbf{y}_j$  representam os valores dos pixels na  $j$ -ésima posição e  $\|\cdot\|$  denota a norma Euclidiana. Para imagens definidas no domínio  $[0, 1]$  a razão pico sinal-ruído em *decibéis (dB)* é dado por:

$$\text{PSNR} = 10 \log_{10} \left[ \frac{1}{\text{MSE}} \right]. \quad (5.1)$$

---

<sup>1</sup>Tradução de peak signal-to-noise ratio

**Figura 5.1** – Imagem originais de tamanho (512 X 512) pixels no espaço RGB



Valores maiores do PSNR representam uma melhor correção com relação a ruído.

No contexto de imagens coloridas, a métrica no espaço CIELab denotado por  $\Delta E_{ab}^*$  é uma medida apropriada para avaliar a qualidade das imagens, pois o espaço CIELab fornece a medida da distância entre duas imagens de acordo com as cores percebidas pelo olho humano. A expressão para o cálculo do  $\Delta E_{ab}^*$  para duas imagens  $x, y \in \mathbb{V}^n$  é dado por:

$$\Delta E_{ab}^*(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|x_j - y_j\|, \quad (5.2)$$

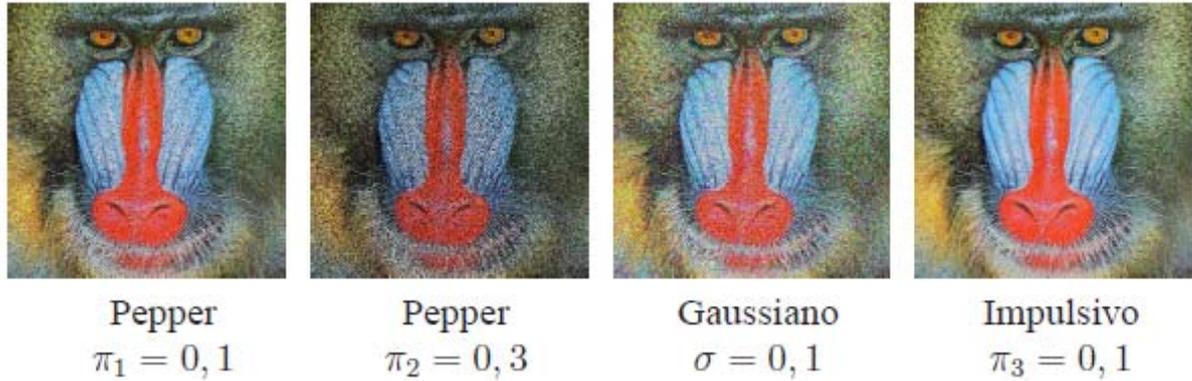
onde  $x_j$  e  $y_j$  representam os valores dos pixels no espaço CIELab na  $j$ -ésima posição e  $\|\cdot\|$  denota a norma Euclidiana. A medida  $\Delta E_{ab}^*$  também será referida neste trabalho por Delta.

## 5.2 EXPERIMENTOS UTILIZANDO DIFERENTES ESQUEMAS ORDENADOS NO SISTEMA RGB

Nesta seção realizamos experimentos no espaço RGB utilizando as ordens lexicográfica, marginal e  $\alpha$ -módulo. Armazenamos as doze imagens originais coloridas no sistema RGB, mostradas na Figura 5.1, nas memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$ , com ordem lexicográfica RGB, com a ordem

marginal RGB e com a ordem  $\alpha$ -módulo RGB, com  $\alpha = 20$ . Também sintetizamos os modelos  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$ , utilizando a transformação de Karhunen-Loève para decorrelacionar os dados das imagens no sistema RGB, passando para o sistema de coordenadas TKL e usamos a ordem

**Figura 5.2** – Imagem ruidosas  $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3$  e  $\tilde{x}^4$ .



lexicográfica, totalizando oito memórias.

A matriz da transformação de Karhunen-Loève  $Q$  gerada a partir das 12 imagens originais ilustradas na Figura 5.1 é:

$$Q = \begin{bmatrix} 0,60697 & 0,57211 & 0,55161 \\ 0,60700 & 0,11429 & -0,78644 \\ 0,51298 & -0,81217 & 0,27790 \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

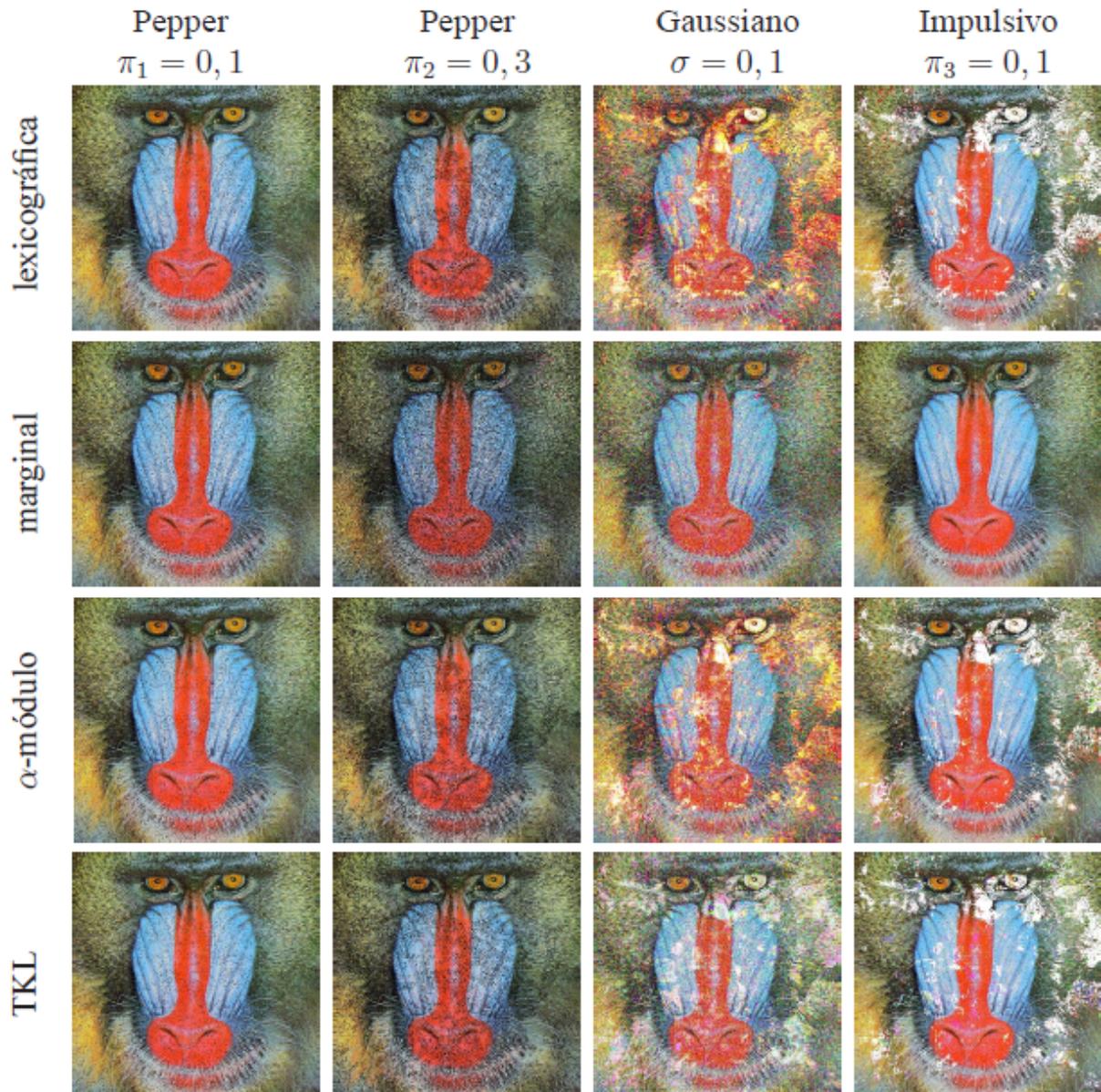
Como observado no capítulo anterior, a técnica utilizada para o armazenamento dos padrões fornece uma rede com conexões esparsas. Em termos computacionais, o conjunto de junções sinápticas das memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  com ordem lexicográfica RGB alocou aproximadamente 162 MB de espaço de memória. Os modelos com ordem marginal RGB e  $\alpha$ -módulo RGB alocaram aproximadamente 2 MB e 151 MB, respectivamente. O modelo com ordem lexicográfica no sistema de coordenadas TKL alocou aproximadamente 140 MB de espaço de memória. Nestes experimentos utilizamos inteiros longos sem sinal, com um processador de 64 bits, para representar os índices dos conjuntos de junções sinápticas.

Completada a fase de armazenamento, verificamos que cada um dos modelos de memórias recorda perfeitamente as 12 imagens originais, ou seja, o conjunto de memórias fundamentais  $x^1, \dots, x^{12}$  mostradas na Figura 5.1 são pontos fixos dos modelos  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$ , conforme afirma o Teorema 3.13. Também aplicamos estas memórias em padrões corrompidos com ruído tipo

*pepper*, gaussiano e impulsivo. As Figuras 5.3 e 5.4 apresentam os padrões recordados pelas memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$ , respectivamente, quando apresentados os padrões de entrada  $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3$  e  $\tilde{x}^4$  ilustrados na Figura 5.2.

Observamos que, na Figura 5.2, as primeiras imagens  $\tilde{x}^1$  e  $\tilde{x}^2$  foram geradas introduzindo ruído *pepper* com probabilidades  $\pi_1 = 0,1$  e  $\pi_2 = 0,3$ , respectivamente. Lembrando que esse tipo de ruído origina-se, por exemplo, por erros em sensores e falhas na comunicação entre canais [34]. O ruído *pepper* é obtido atribuindo-se zero em cada canal de cor, com uma determinada probabilidade, nos valores dos pixels de uma imagem no sistema RGB. A imagem  $\tilde{x}^3$  foi gerada adicionando ruído gaussiano com média 0 e variância  $\sigma = 0,1$ . Uma imagem corrompida com ruído gaussiano é obtida adicionando-se um termo com média zero e distribuição

**Figura 5.3** – Imagem recordadas pelos modelos W com ordem lexicográfica (primeira linha), com ordem marginal (segunda linha), com ordem  $\alpha$ -módulo (terceira linha) e (quarta linha) com os dados decorrelacionados utilizando a ordem lexicográfica, quando os padrões corrompidos  $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3$  e  $\tilde{x}^4$  mostrados na figura 5.2 são introduzidos como entrada.

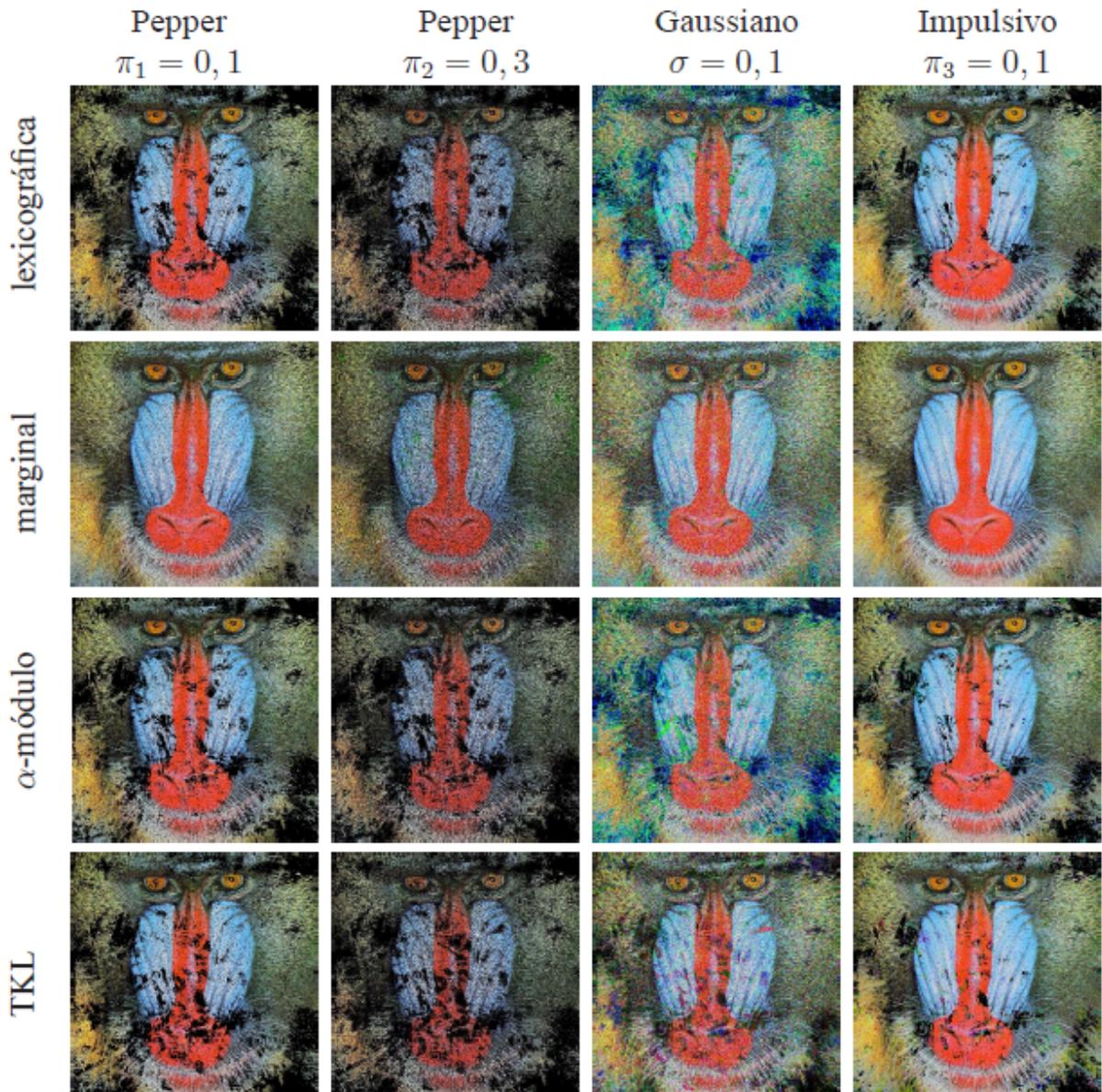


normal com variância  $\sigma^2$  em todos os valores dos pixels da imagem no sistema RGB. A última imagem,  $\tilde{x}^4$ , foi gerada adicionando ruído impulsivo com probabilidade  $\pi_3 = 0, 1$  de ocorrer o ruído nos valores dos pixels, e com probabilidade 0, 25 de ocorrer o ruído em cada canal de cor. O modelo de ruído impulsivo considerado nesta dissertação é o seguinte:

$$\tilde{\mathbf{x}}_I = \begin{cases} \mathbf{u}, & \text{com probabilidade } (1 - \pi) \\ (d, u_g, u_b)^T, & \text{com probabilidade } p_r\pi \\ (u_r, d, u_b)^T, & \text{com probabilidade } p_g\pi \\ (u_r, u_g, d)^T, & \text{com probabilidade } p_b\pi \\ (d, d, d)^T, & \text{com probabilidade } p_s\pi, \end{cases} \quad (5.4)$$

onde  $\pi$  denota a probabilidade dos valores dos pixels serem corrompidos,  $\mathbf{u} = (u_r, u_g, u_b)^T$  é um vetor no espaço RGB, livre de ruído. Os termos  $p_r, p_g$  e  $p_b$ , satisfazendo  $p_r + p_g + p_b \leq 1$ ,

**Figura 5.4** – Imagem recordadas pelos modelos  $M$  com lexicográfica (primeira linha), com ordem marginal (segunda linha), com ordem  $\alpha$ -módulo (terceira linha) e (quarta linha) com os dados descorrelacionadas utilizando a ordem lexicográfica, quanto os padrões corrompidos  $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3$  e  $\tilde{x}^4$  mostrando na figura 5.2, são introduzidos como entrada.



representam a probabilidade de introduzir ruído nos canais vermelho, verde e azul, respectivamente, e  $p_s = 1 - p_r - p_g - p_b$  corresponde a probabilidade de corromper simultaneamente todos os canais. Finalmente  $d \in \{0, 1\}$  é o valor do impulso obtido da distribuição de Bernoulli com iguais probabilidades de sucesso ou falha. O ruído impulsivo ocorre geralmente por falhas na comunicação ou interferências ambientais [34].

Observamos que as imagens recordadas com os modelos  $\mathcal{W}$  com ordem lexicográfica RGB e com a ordem lexicográfica  $\alpha$ -módulo, quando a imagem  $\tilde{x}^3$  corrompida com ruído gaussiano é introduzida como entrada, priorizaram a cor vermelha devido a sequência da cascata na ordem lexicográfica. Por dualidade, os modelos  $\mathcal{M}$ , baseados nas operações de mínimo, priorizaram o azul e o verde. Observamos também, que a ordem lexicográfica  $\alpha$ -módulo possui características muito semelhantes da ordem lexicográfica RGB.

As imagens recordadas com os modelos  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  com ordem lexicográfica RGB, com a ordem lexicográfica  $\alpha$ -módulo e com a ordem marginal, quando apresentado a imagem  $\tilde{x}^4$  corrompida com ruído impulsivo como dado de entrada, priorizaram as cores branca e preta, respectivamente. Isto segue do fato que as cores introduzidas com o ruído impulsivo representam o maior e o menor elemento de  $\mathbb{V}_{RGB}$  com estes esquemas ordenados. Acreditamos que os modelos com a ordem marginal introduzem menos elementos branco e preto, respectivamente, porque o seu conjunto de junções sinápticas é muito menor se comparado com os outros modelos. Por exemplo, o modelo com a ordem marginal tem aproximadamente 1,2% do número de junções sinápticas do modelo com ordem lexicográfica RGB.

As imagens recordadas com os modelos  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$ , com os dados descorrelacionados utilizando a ordem lexicográfica, priorizaram as cores correspondentes a sua posição com respeito a dispersão dos pixels no espaço TKL.

Observamos que os padrões  $\tilde{x}^1$  e  $\tilde{x}^2$  representam versões erodidas da imagem original, consequentemente, os modelos de memória  $\mathcal{W}$ , com as ordens aqui consideradas, apresentaram boa tolerância. Em contrapartida, os modelos  $\mathcal{M}$  apresentaram piora em relação aos padrões erodidos, confirmando os resultados obtidos na seção 3.5.

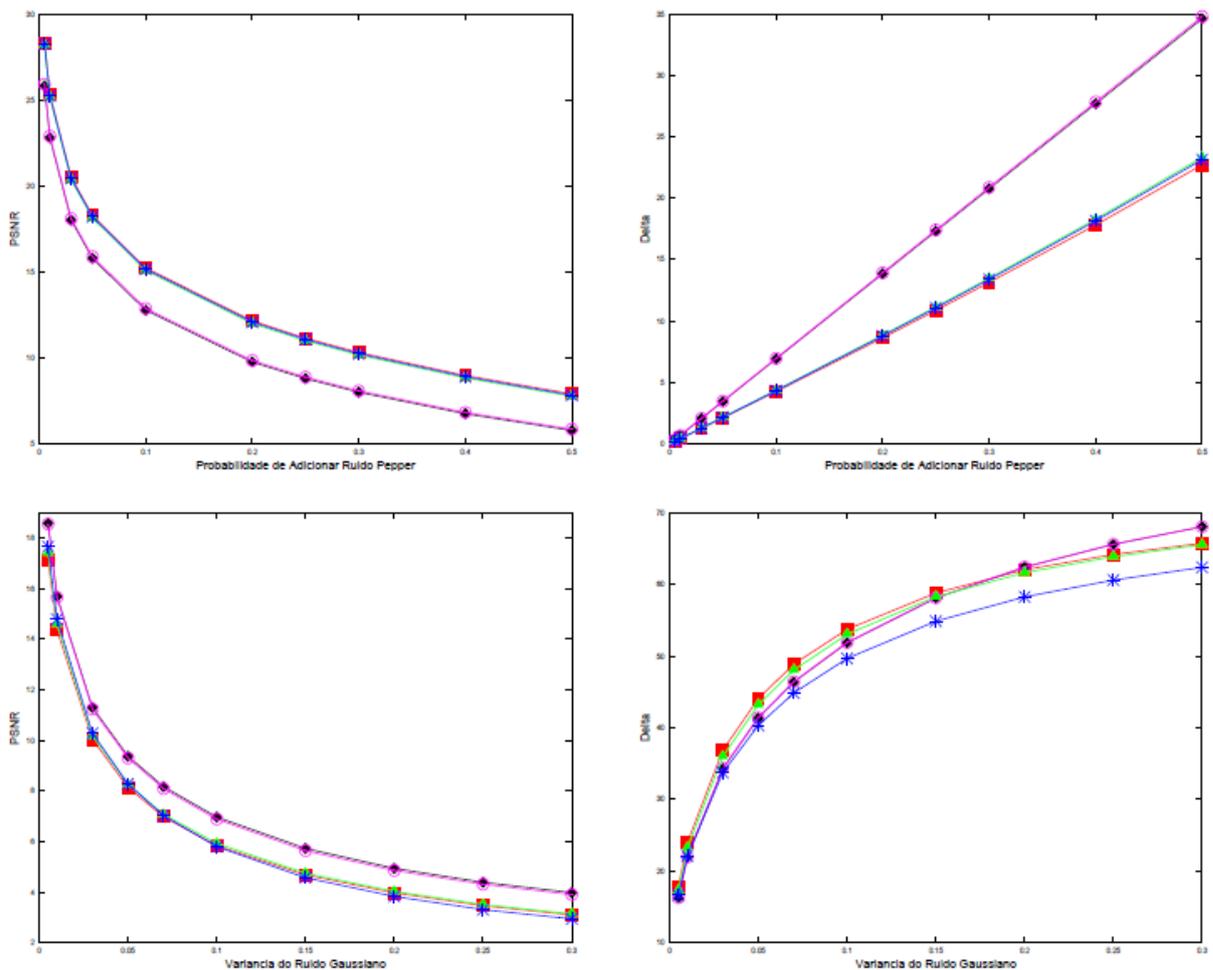
Para uma melhor comparação entre os modelos de memórias  $\mathcal{W}$ , com as ordens lexicográfica RGB, marginal RGB,  $\alpha$ -módulo RGB e ordem lexicográfica com os dados descorrelacionados, a Figura 5.5, apresenta os gráficos com a média do PSNR e do Delta, em 120 simulações, 10 para cada uma das 12 imagens originais, versus a probabilidade de ocorrer ruído *pepper* e a variância do ruído gaussiano, respectivamente.

Observamos que, em todos os gráficos usamos os seguintes valores para a probabilidade de ocorrer os ruídos *pepper* e impulsivo: 0,005; 0,01; 0,03; 0,05; 0,1; 0,2; 0,25; 0,3; 0,4 e 0,5. Para a variância do ruído gaussiano, com média 0, usamos os valores: 0,005; 0,01; 0,03; 0,05; 0,07; 0,1; 0,15; 0,2; 0,25 e 0,3.

O modelo  $\mathcal{W}$  no espaço TKL com ordem lexicográfica se mostrou eficiente com relação a padrões corrompidos com ruído gaussiano, conforme mostra o gráfico na segunda linha à direita ilustrado na Figura 5.5. Entretanto, o gráfico à esquerda com a medida PSNR não acusou melhora. De fato, a medida Delta é calculada no espaço CIELab, que é perceptualmente uniforme. Em outras palavras, no espaço CIELab a distância entre duas cores é mensurada de acordo com a diferença entre as cores percebidas pelo olho humano. Portanto, acreditamos que a medida Delta seja mais apropriada que o PSNR, com relação a imagens coloridas, uma vez que o PSNR é calculado no espaço RGB que não possui a propriedade de ser uniforme.

Observamos que os padrões recordados com os modelos  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  com a ordem marginal RGB, quando apresentado como entrada uma imagem corrompida com os ruídos gaussiano ou impulsivo, são visualmente melhores que os outros modelos. Porém, os gráficos ilustrados na Figura 5.5 mostram que os modelos com ordem marginal RGB não recuperam imagens corrompidas com os ruídos aqui considerados. De fato, as medidas PSNR e Delta calculados entre os padrões originais e corrompidos são bem próximas das medidas PSNR e Delta entre os padrões originais e os padrões recordados pelos modelos  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  com a ordem marginal RGB.

**Figura 5.5** – Media do PSNR e Delta versus a probabilidade de adicionar ruídos pepper (primeira linha) e a variância de adicionar ruído gaussiano (segunda linha). As linhas marcadas com “■” (vermelho), “▲” (verde), “○” (magenta), “\*” (azul), representa as memórias  $w$  com as ordens **lexicográfica**,  **$\alpha$ -módulo**, **marginal** e ordem **lexicográfica com os dados descorrelacionados**, respectivamente. Por fim, as marcadas com “◆” (preto) representa as medidas PSNR e Delta, respectivamente, entre os padrões originais e os padrões corrompidos.

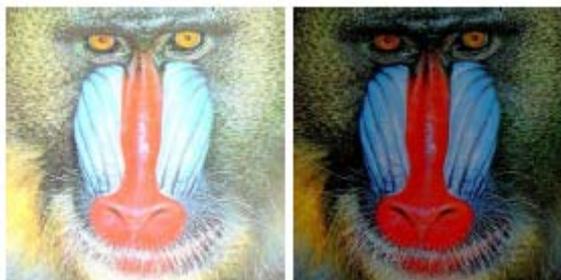


Acreditamos que este fato se deve ao baixo número de junções sinápticas destes modelos.

Observamos também que a tolerância a ruído dos oito modelos de memórias no espaço RGB e TKL com relação a padrões corrompidos com ruído impulsivo é baixa, ou seja, estas memórias não foram capazes de corrigir erros na presença de ruído impulsivo.

Finalmente verificamos que as memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  são invariantes sob transformações de luminosidade. Conforme o Teorema 3.12, que afirma que estas memórias são invariantes sob alguns tipos de transformações. De fato, ao apresentarmos como entrada as imagens ilustradas na Figura 5.6, obtidas somando e subtraindo uma constante, os modelos  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  com ordem marginal e lexicográfica recordaram as mesmas imagens.

**Figura 5.6** – Imagens obtidas somando e subtraindo uma constante, respectivamente.



### 5.3 EXPERIMENTOS UTILIZANDO VARIAÇÕES DA ORDEM LEXICOGRÁFICA NOS SISTEMAS HSL E HSV

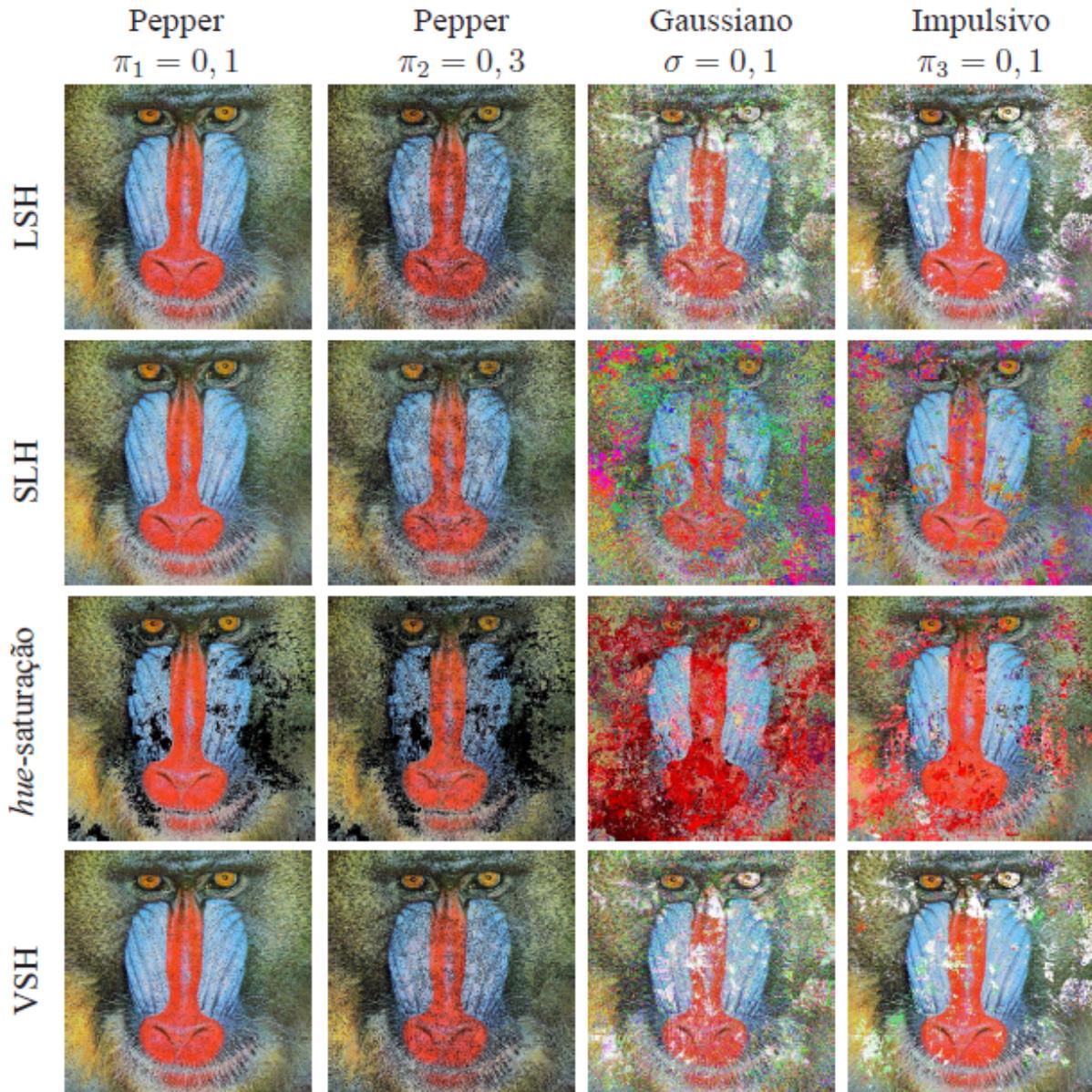
Nesta seção realizamos experimentos com os modelos  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  no sistema de cores HSL com as ordens lexicográfica LSH, priorizando a luminosidade, a ordem SLH priorizando a saturação e com a ordem lexicográfica *hue* ponderado pela saturação, totalizando seis modelos. Tendo em vista a semelhança dos espaços HSL e HSV, para o sistema de cores HSV, sintetizamos os modelos  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  somente com a ordem lexicográfica VSH priorizando o valor.

Precisamente, consideramos as 12 imagens originais de tamanho  $512 \times 512$  pixels, ilustradas na Figura 5.1, tal como na seção anterior. Então, sintetizamos as memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  usando (3.21) e (3.22), respectivamente. Em termos computacionais, o conjunto dos índices de junções sinápticas dos modelos de memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  com a ordem lexicográfica LSH alocou aproximadamente 120 MB de espaço de memória. Os modelos com as ordens SLH e *hue* ponderado pela saturação alocaram aproximadamente 168 MB e 373 MB, respectivamente. Os modelos no espaço HSV alocaram aproximadamente 110 MB. Lembramos que utilizamos nestes experimentos inteiros longos sem sinal, com um processador de 64 bits, para representar os índices dos conjuntos de junções sinápticas.

Completada a fase de armazenamento, verificamos que cada um dos modelos de memórias recorda perfeitamente as 12 imagens originais, em outras palavras, o conjunto de memórias fundamentais  $x^1, \dots, x^{12}$  mostradas na Figura 5.1 representam pontos fixos dos modelos  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$ , conforme afirma o Teorema 3.13. Também aplicamos estas memórias em padrões corrompidos com ruído tipo *pepper*, gaussiano e impulsivo. As Figuras 5.7 e 5.8 apresentam os padrões recordados pelas memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$ , respectivamente, quando apresentados os padrões de entrada  $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3$  e  $\tilde{x}^4$  ilustrados na Figura 5.2.

Observamos que, as imagens recordadas com os modelos  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$ , mostradas nas Figuras 5.7 e 5.8, com a ordem lexicográfica LSH (primeira linha) priorizaram as cores branca e preta, respectivamente, pois estes modelos são baseados nas operações de supremo e ínfimo onde o maior e o menor elemento de  $\mathbb{V}_{HSL}$  com a ordem LSH correspondem as cores branca e preta, respectivamente. Observamos também que todos os modelos no espaço HSL e HSV foram sintetizados usando o ângulo de referência  $h_0 = 0$ . Lembrando que, o valor do *hue* igual a zero corresponde a cor vermelha.

**Figura 5.7** – Imagens recordadas pelos modelos  $W$  com ordem lexicográfica LSH (primeira linha), com ordem lexicográfica SLH (segunda linha), com ordem lexicográfica *hue* ponderando pela saturação (terceira linha) e com ordem lexicográfica VSH (quarta linha), quando os padrões corrompidos  $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3$  e  $\tilde{x}^4$  mostrados na figura 5.2 são introduzidos como entrada.

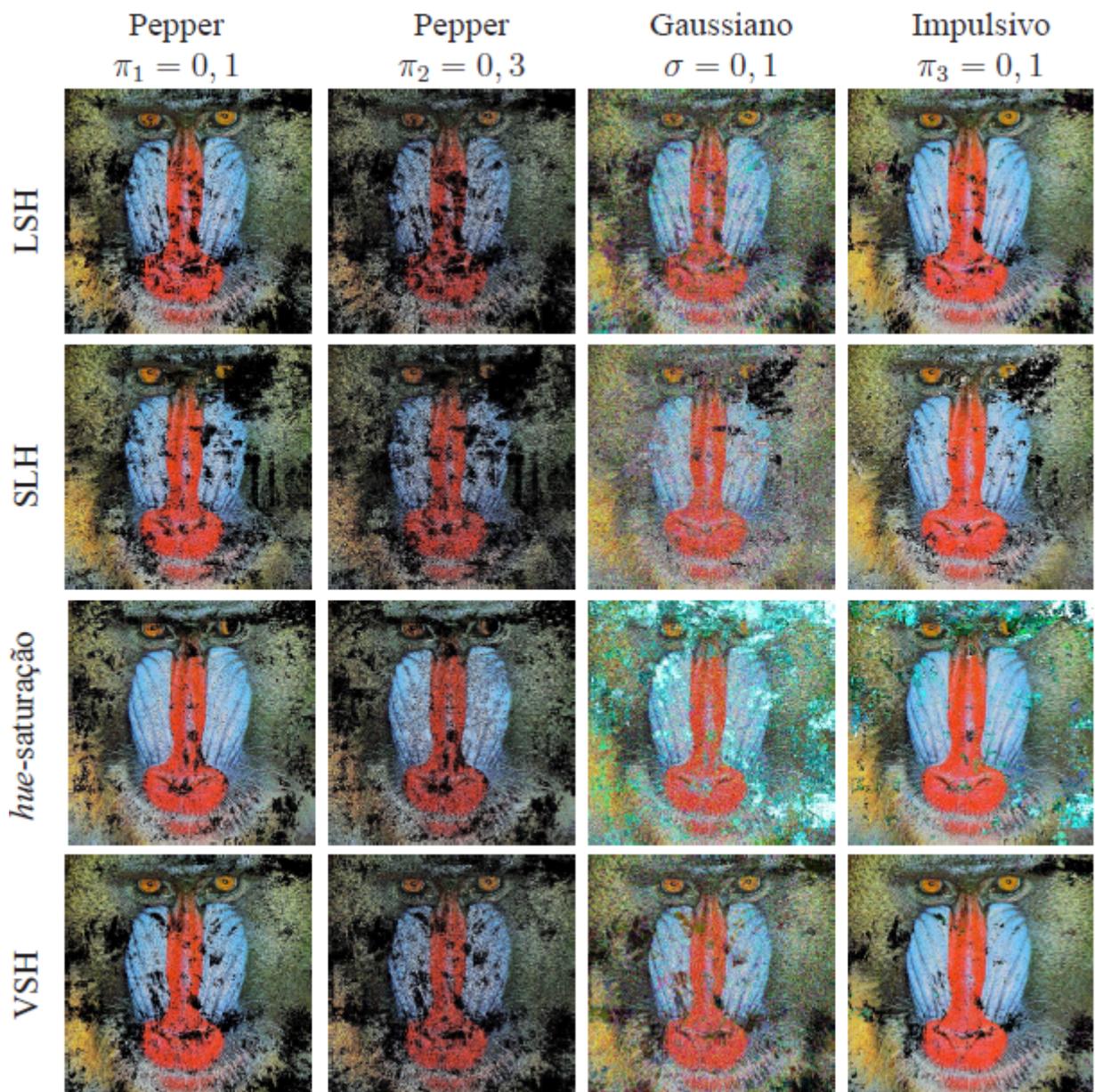


As imagens, na segunda linha da Figura 5.7, recordadas pelo modelo  $W$  com a ordem lexicográfica SLH priorizaram as cores puras com o ângulo de referência  $h_0 = 0$  para o *hue*, em outras palavras, este modelo ressaltou os elementos mais saturados da imagem. Por dualidade, as imagens, na segunda linha da Figura 5.8, recordadas com o modelo  $M$  com a ordem SLH priorizaram os tons de cinza.

As imagens recordadas com os modelos  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  com a ordem lexicográfica *hue* ponderado pela saturação, mostradas na terceira linha das Figuras 5.7 e 5.8, ressaltaram as cores puras com os valores do *hue* correspondente as cores vermelha e ciano, respectivamente. Lembrando que, o maior e o menor elemento de  $\mathbb{V}_{HSL}$  com a referida ordem são os pontos  $(0; 1; 0,5)$  e  $(0 \pm 180; 1; 0,5)$ , que correspondem as cores vermelha e ciano, respectivamente.

As imagens, mostradas na quarta linha das Figuras 5.7 e 5.8, recordadas pelos modelos  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  com ordem lexicográfica VSH, priorizaram as cores branca e preta, respectivamente.

**Figura 5.8** – Imagens recordadas pelos modelos  $\mathcal{M}$  com ordem lexicográfica LSH (primeira linha), com ordem lexicográfica SLH (segunda linha), quando os padrões corrompidos  $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3$  e  $\bar{x}^4$ , mostrados na figura 5.2 são introduzidos como entrada.

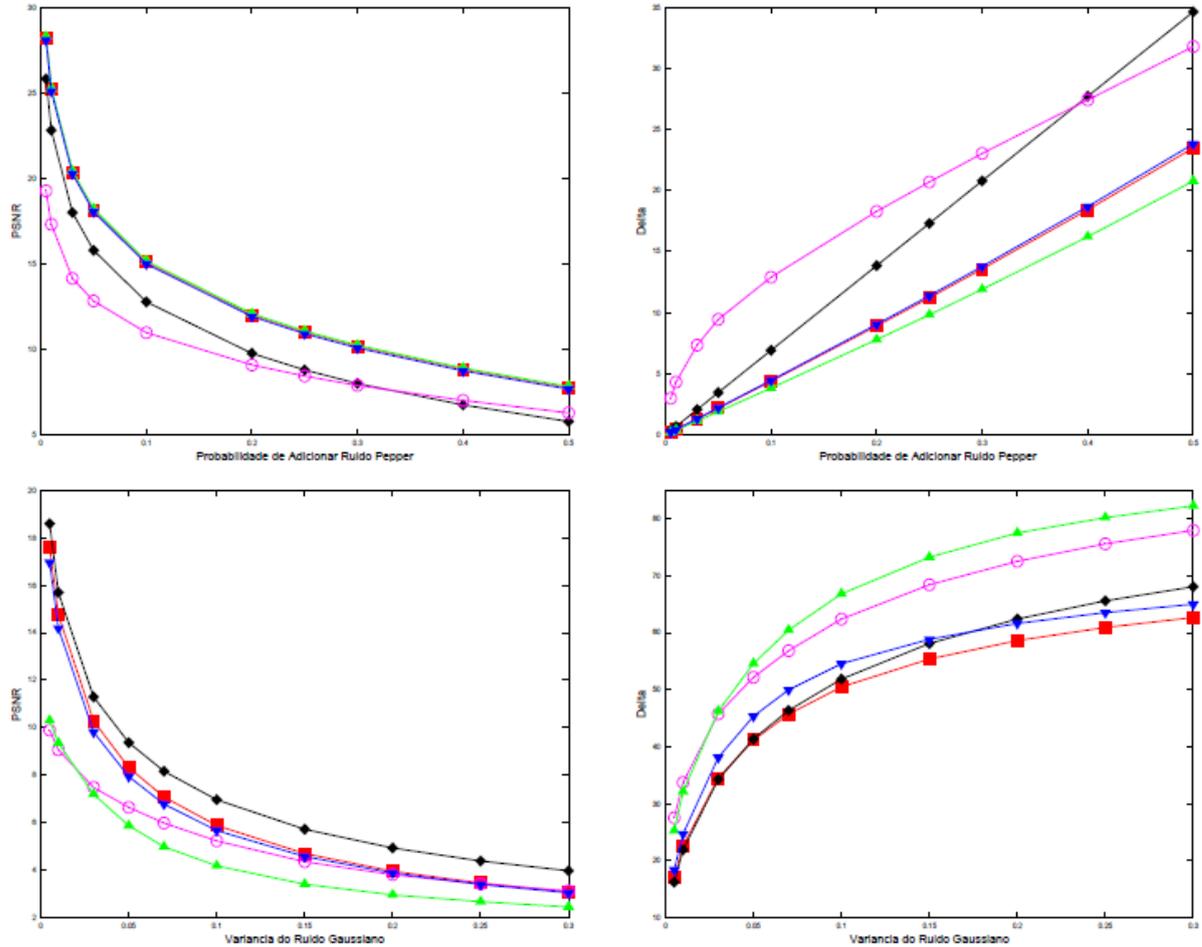


Podemos observar que as imagens recordadas com os modelos  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$ , sintetizados com a ordem lexicográfica LSH, são semelhantes aos respectivos modelos  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$ , sintetizados com a ordem lexicográfica VSH.

Para uma melhor comparação entre os modelos de memórias  $\mathcal{W}$ , com as ordens lexicográfica LSH e SLH, ordem lexicográfica *hue* ponderado pela saturação e a ordem lexicográfica VSH, a Figura 5.9 apresenta os gráficos com a média do PSNR e do Delta, em 120 simulações, 10 para cada uma das 12 imagens originais, versus a probabilidade de ocorrer o ruído *pepper* (primeira linha) e ruído gaussiano (segunda linha).

Observamos que, os modelos  $\mathcal{W}$  com ordem lexicográfica LSH, SLH e VSH foram eficientes com relação a padrões corrompidos com ruído tipo *pepper*, conforme mostram os gráficos ilustrados na primeira linha da Figura 5.9. Em contrapartida, o modelo  $\mathcal{W}$  com ordem lexicográfica *hue* ponderado pela saturação apresentou melhora somente para uma probabili-

**Figura 5.9** – Média do PSNR e Delta versus a probabilidade de adicionar ruídos *pepper* (primeira linha) e a variância do ruído gaussiano (segunda linha). As linhas marcadas com  $\blacksquare$  (vermelho),  $\blacktriangle$  (verde),  $\circ$  (magenta) e  $\blacktriangledown$  (azul), representam as memórias  $\mathcal{W}$  com as ordens lexicográfica **LSH**, lexicográfica **SLH**, lexicográfica **hue ponderado pela saturação** e ordem lexicográficas **VSH** respectivamente. Por fim, as linhas marcadas com  $\blacklozenge$  (preto) representam as medidas PSNR e Delta, respectivamente, entre os padrões corrompidos.



dade de ocorrer ruído em torno de 0,4. Em outras palavras, este modelo somente apresenta melhora se a imagem apresentada como entrada for bem ruidosa.

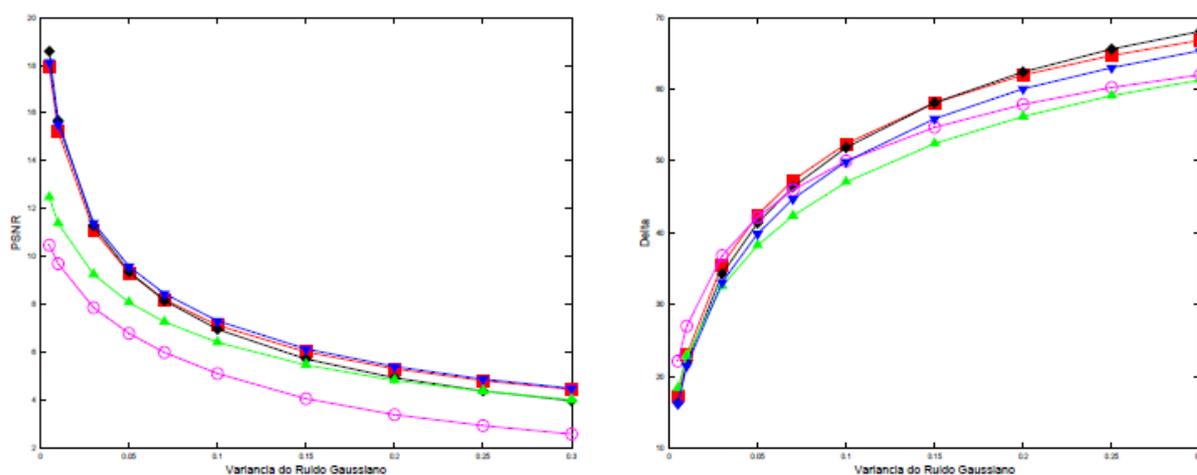
O modelo  $\mathcal{W}$  com ordem lexicográfica LSH apresentou uma pequena tolerância com relação a padrões corrompidos com ruído gaussiano, conforme mostra o gráfico na segunda linha à direita, ilustrado na Figura 5.9. Também aplicamos os modelos de memória  $\mathcal{W}$  em padrões corrompidos com ruído impulsivo e verificamos que estas memórias não foram eficientes.

Observamos ainda, que a memória  $\mathcal{W}$  com ordem lexicográfica VSH, com relação a padrões corrompidos com ruído gaussiano, somente apresentou pequena melhora para uma variância em torno de 0,2, que para o ruído gaussiano corresponde a uma imagem bem ruidosa. Os modelos

$\mathcal{W}$  com as ordens lexicográfica *hue* ponderado pela saturação e com a ordem lexicográfica SLH não se mostraram adequadas para recuperar imagens corrompidas com ruído gaussiano.

Para comparar os modelos de memória  $\mathcal{M}$ , com as ordens lexicográfica LSH, lexicográfica

**Figura 5.10** – Média do PSNR e Delta versus a variância de adicionar ruído gaussiano. As linhas marcadas com “■” (vermelho), “▲” (verde), “○” (magenta) e “▼” (azul), representam as memórias  $\mathcal{M}$  com as ordens lexicográfica LSH, lexicográfica SLH, lexicográfica *hue* ponderado pela saturação e lexicográfica VSH, respectivamente. Por fim, as linhas marcadas com “◆” (preto) representam as medidas PSNR e Delta, respectivamente, entre os padrões originais e os padrões corrompidos.



SLH, lexicográfica *hue* ponderado pela saturação e ordem lexicográfica VSH, a Figura 5.10 apresenta os gráficos com a média do PSNR e do Delta, em 120 simulações, 10 para cada uma das 12 imagens originais, versus a probabilidade de ocorrer o ruído gaussiano. Como os modelos de memórias  $\mathcal{M}$  não apresentam tolerância a padrões corrompidos com ruídos negativos, como é o caso do ruído *pepper*, não geramos os gráficos.

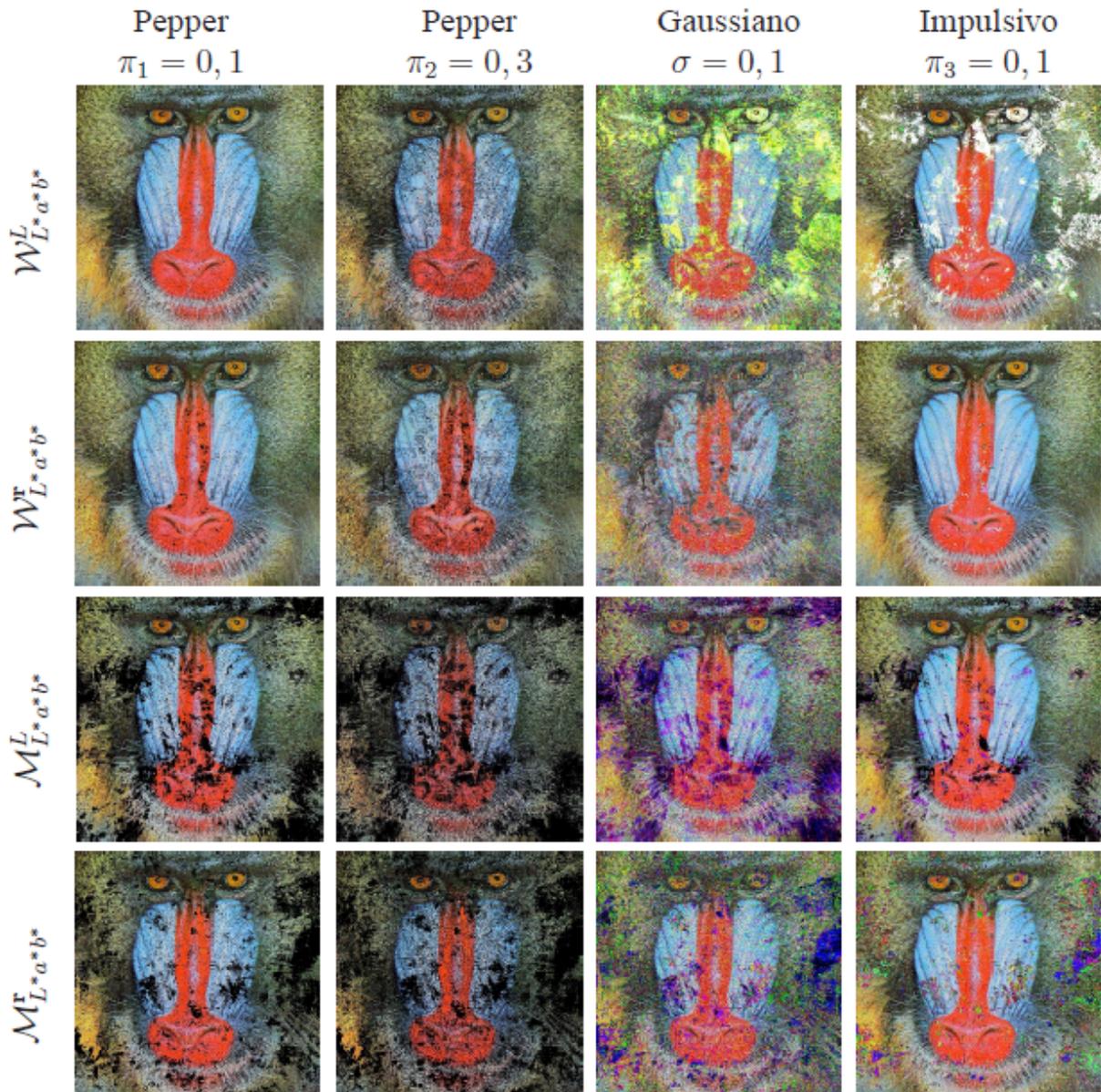
Observamos que os modelos  $\mathcal{M}$  com as ordens lexicográfica SLH, VSH e *hue* ponderado pela saturação mostraram-se eficientes para padrões corrompidos com ruído gaussiano, sendo o modelo sintetizado com a ordem lexicográfica SLH, priorizando a saturação, o melhor modelo, conforme mostra o gráfico à direita ilustrado na Figura 5.10. No entanto, o modelo  $\mathcal{M}$  com a ordem lexicográfica LSH somente apresenta uma pequena tolerância quando a variância do ruído gaussiano está em torno de 0,2. Também aplicamos estes modelos para padrões corrompidos com ruído impulsivo e verificamos que não foram eficientes.

#### 5.4 EXPERIMENTOS UTILIZANDO VARIAÇÕES DA ORDEM LEXICOGRÁFICA NO SISTEMA CIELAB

Nesta seção realizamos experimentos com as memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  no espaço CIELab. Precisamente, consideramos as doze imagens originais no espaço RGB e transformamos cada ponto do espaço RGB em um ponto no espaço de cores CIELab, passando pelo espaço CIE XYZ, usando as respectivas equações (4.17), (4.18), (4.19) e (4.20).

Usando (3.21) e (3.22), armazenamos os doze padrões multivalores, ilustrados na Figura 5.1 nas memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  com as ordens lexicográfica  $L^*a^*b^*$  e a ordem lexicográfica  $L^*a^*b^*$

**Figura 5.11** – Imagens recordadas pelos modelos  $W$  com ordem lexicográfica  $L^*a^*b^*$  (primeira linha) e com ordem lexicográfica  $L^*a^*b^*$  baseada na cor referência cinza (segunda linha). Na terceira e quarta linha, imagens recordadas pelos modelos  $M$  com ordem lexicográfica  $L^*a^*b^*$  e com ordem lexicográfica  $L^*a^*b^*$  baseada na cor referência cinza, respectivamente, quando os padrões corrompidos  $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3$  e  $\bar{x}^4$ , mostrados na figura 5.2 são introduzidos como entrada.



baseada num referencial. Observamos que esta última foi gerada usando a referência  $r = (50, 0, 0)$ , que corresponde a cor cinza médio no espaço CIELab. Em termos computacionais, os conjuntos de junções sinápticas dos modelos  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  com a ordem lexicográfica  $L^*a^*b^*$

armazenaram aproximadamente 130 MB de espaço de memória, enquanto que o modelo com ordem lexicográfica  $L^*a^*b^*$  baseada na cor cinza armazenou aproximadamente 127 MB.

Completada a fase de armazenamento, confirmamos que os doze padrões originais representam pontos fixos dos quatro modelos, conforme afirma o Teorema 3.13. Depois, aplicamos estas memórias em padrões corrompidos com ruído *pepper*, gaussiano e impulsivo. A Figura 5.11 apresenta os padrões recordados pelas memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$ , respectivamente, quando apresentados os padrões de entrada  $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3$  e  $\tilde{x}^4$  ilustrados na Figura 5.2.

Observamos que as imagens, ilustradas na Figura 5.11, recordadas com o modelo  $\mathcal{W}$  com a ordem lexicográfica  $L^*a^*b^*$  priorizaram as cores mais claras, ou seja, com maior valor de luminosidade. Enquanto que as imagens recordadas pelo modelo  $\mathcal{M}$  ressaltaram as cores mais escuras. Salientamos que para padrões corrompidos com ruído impulsivo, os modelos  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  com a ordem lexicográfica  $L^*a^*b^*$  priorizaram as cores branca e preta, respectivamente. Isto segue do fato que as cores introduzidas com o ruído impulsivo representam o maior e o menor elemento de  $\mathbb{V}_{L^*a^*b^*}$  com estes esquemas ordenados.

As imagens recordadas com o modelo  $\mathcal{W}$  com ordem lexicográfica  $L^*a^*b^*$  baseado na referência  $r = (50, 0, 0)$ , priorizaram os tons de cinza, ou seja, as cores mais próximas, na distância Euclidiana, do ponto de referência  $r$ . Por dualidade, as imagens recordadas com o modelo  $\mathcal{M}$  com ordem lexicográfica  $L^*a^*b^*$  baseado na referência  $r = (50, 0, 0)$ , priorizaram as cores com valor de luminosidade igual a 50, que corresponde ao valor da luminosidade do ponto de referência  $r$  com as cores verde e azul.

Os gráficos ilustrados na Figura 5.12 foram gerados em 120 simulações, 10 para cada uma das doze imagens. Precisamente, cada padrão original, ilustrado na Figura 5.1, foi corrompido 10 vezes de maneira semelhante com o respectivo ruído e depois calculado a média das medidas PSNR e Delta entre os padrões original e recuperado ou corrompido.

Observamos que o modelo  $\mathcal{W}$  com a ordem lexicográfica  $L^*a^*b^*$  se mostrou eficiente para padrões corrompidos com ruído *pepper*, conforme mostram os gráficos, ilustrados na Figura 5.12 (primeira linha). Também apresentou pequena tolerância para padrões corrompidos com ruído gaussiano com variância a partir de 0,1, conforme mostra o gráfico na segunda linha à direita na Figura 5.12. Entretanto, não foi eficaz para padrões corrompidos com ruído impulsivo.

O modelo  $\mathcal{W}$  com a ordem lexicográfica  $L^*a^*b^*$  baseado na referência  $r = (50, 0, 0)$  se mostrou eficiente para padrões corrompidos com os ruídos *pepper*, gaussiano e impulsivo. Note que, este foi o único modelo que recupera padrões corrompidos com ruído impulsivo, conforme mostram os gráficos, na terceira linha, ilustrados na Figura 5.12.

Finalmente, os modelos  $\mathcal{M}$  com as ordens lexicográfica  $L^*a^*b^*$  e a ordem lexicográfica baseado na referência  $r = (50, 0, 0)$  não se mostraram eficientes para padrões corrompidos com os ruídos aqui considerados.

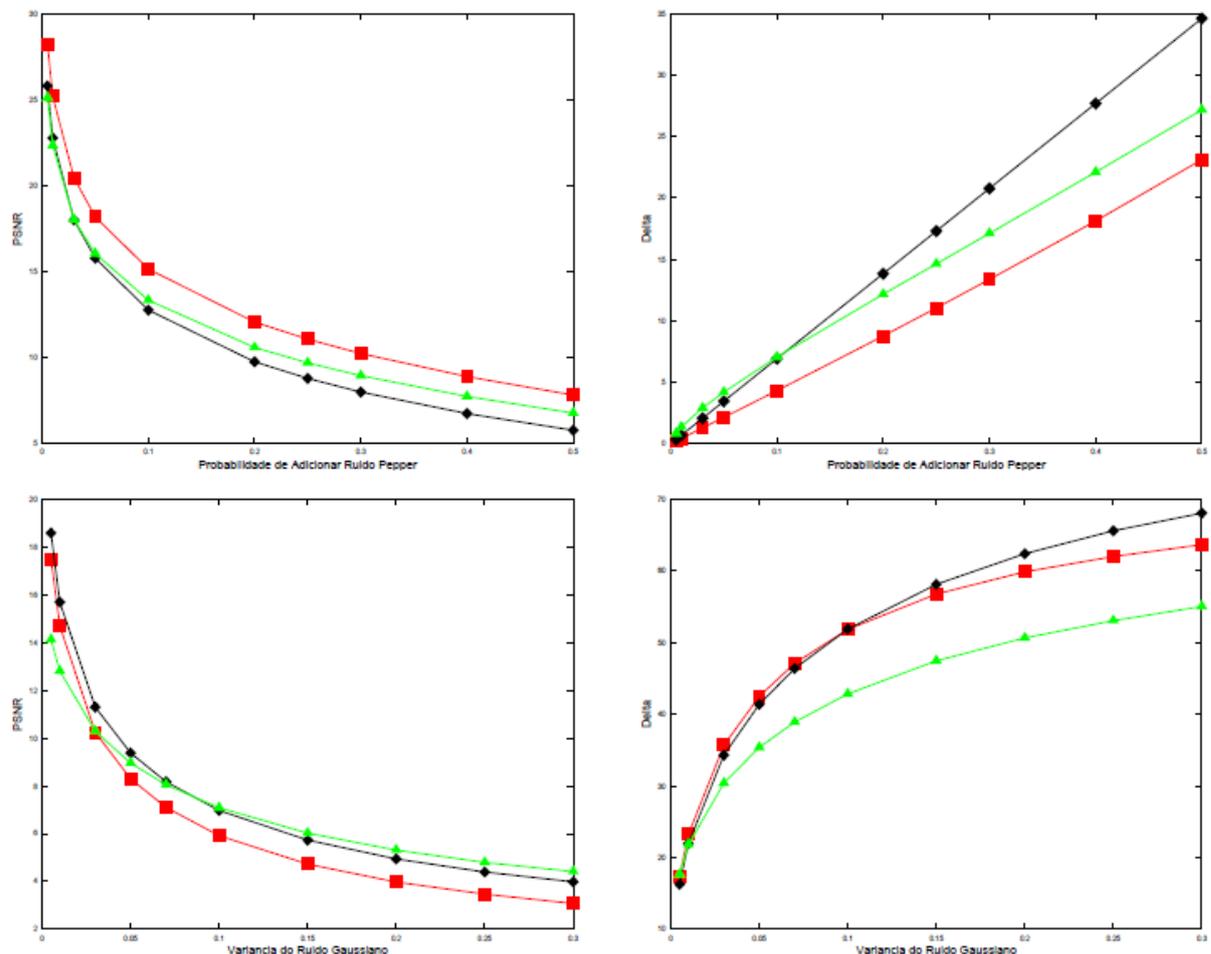
## 5.5 COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS DE MEMÓRIAS $\mathcal{W}$ E $\mathcal{M}$

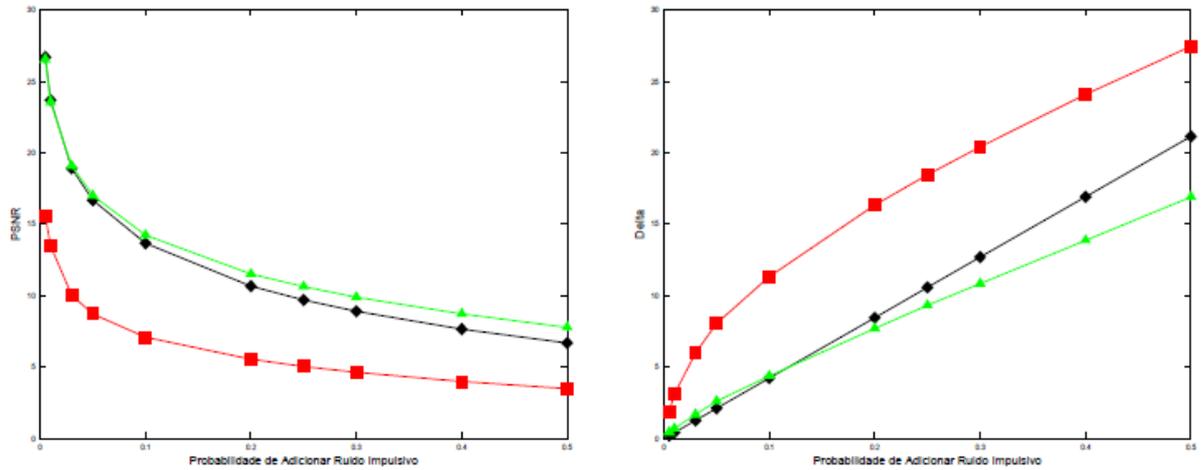
Nesta seção comparamos os modelos de memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  nos diferentes espaços de cores. Tendo em vista os experimentos realizados até o momento, selecionamos os modelos que apresentam uma melhor tolerância a ruído em cada espaço de cor. Então, geramos os gráficos que representam a média da medida Delta em 10 experimentos para cada uma das doze imagens originais aqui consideradas versus a probabilidade de adicionar o ruído.

Os modelos mais eficazes com relação a padrões corrompidos com ruído *pepper* estão ilustrados no gráfico da Figura 5.13. Observamos que o modelo que melhor recupera este tipo de ruído é o modelo  $\mathcal{W}$  com ordem lexicográfica SLH no espaço HSL. Lembrando que esta ordem prioriza a saturação seguido da luminosidade e a componente *hue*. Além disso, o modelo

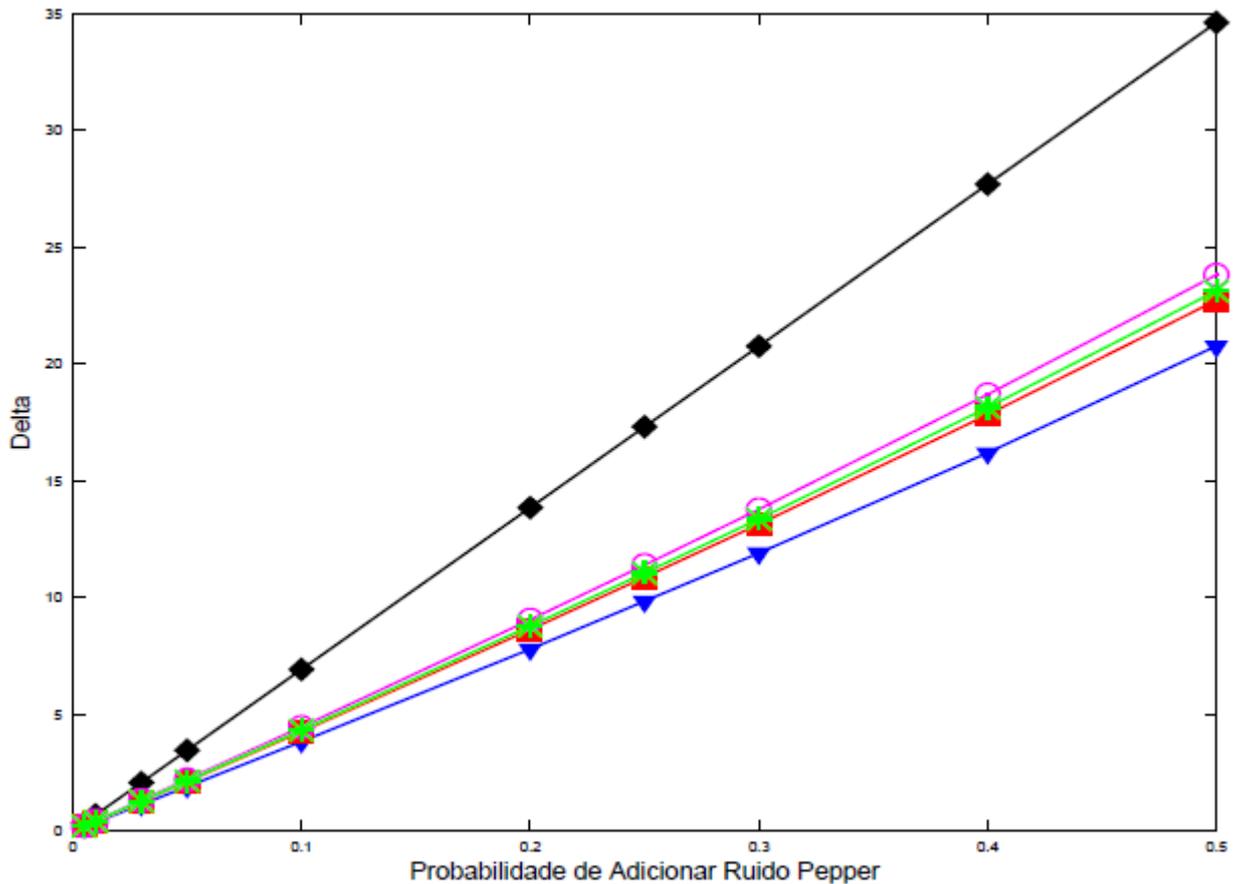
**Figura 5.12** – Média do PSNR e Delta versus a probabilidade de adicionar ruído *pepper* (primeira linha), ruído gaussiano (segunda linha) e ruído Impulsivo (terceira linha). As linhas marcadas com  $\blacksquare$  (vermelho) e  $\blacktriangle$  (verde) representam as memórias  $\mathcal{W}$  com a ordem **lexicográfica  $L^*a^*b^*$**  e com a ordem **referência  $r = (50, 0, 0)$  Lexicográfica  $L^*a^*b^*$  baseado na**, respectivamente.

As linhas marcadas com  $\blacklozenge$  (preto) representam as medidas PSNR e Delta entre os padrões originais e os padrões corrompidos.





**Figura 5.13** – Média do Delta versus a probabilidade de adicionar ruído *pepper*. As linhas marcadas com  $\blacksquare$  (vermelho),  $\blacktriangledown$  (azul),  $\circ$  (magenta) e  $*$  (verde), representam as memórias W com as ordens **lexicográfica RGB**, **lexicográfica SLH**, **lexicográfica VSH** e ordem **lexicográfica  $L^*a^*b^*$** , respectivamente. Por fim, a linha marcada com  $\blacklozenge$  (preto) representa a medida Delta entre o padrão original e o padrão corrompido.



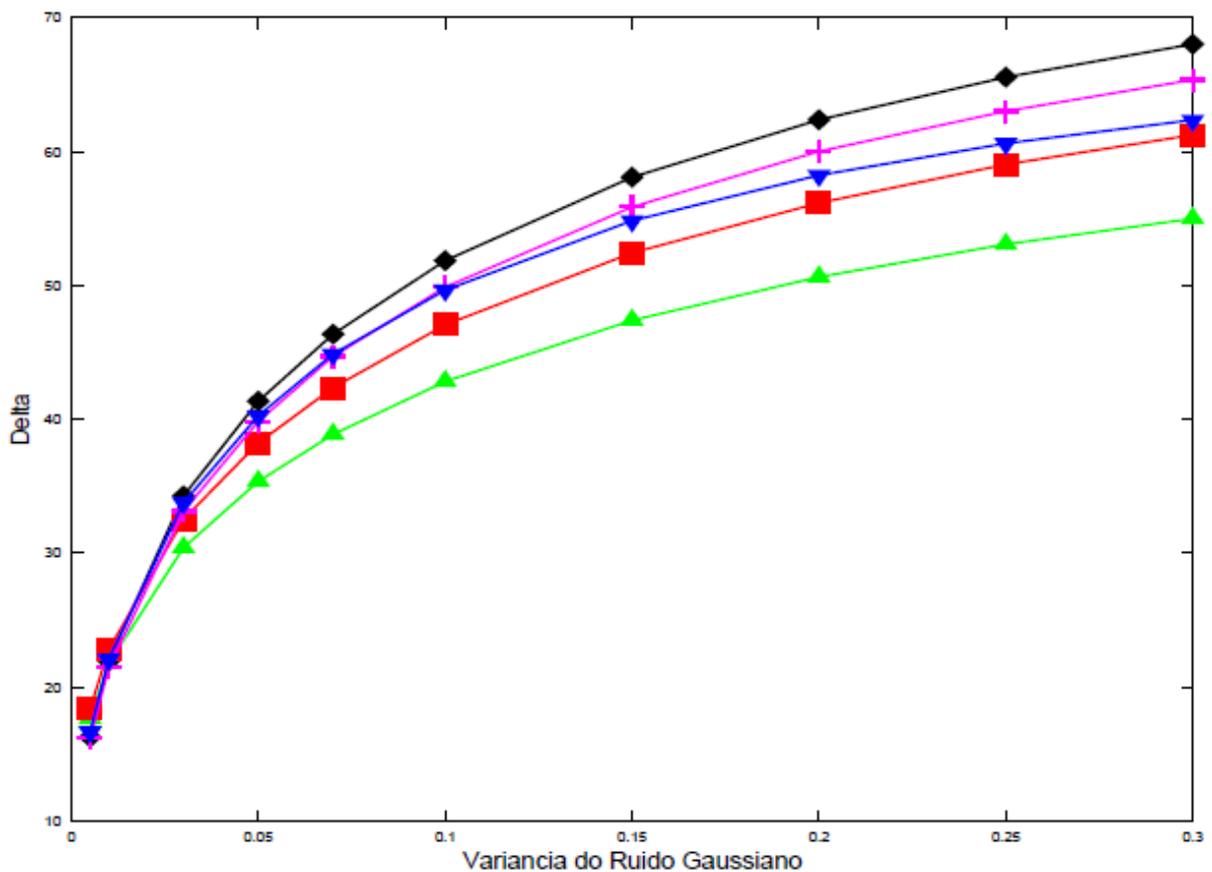
$\mathcal{W}$  com ordem lexicográfica SLH, baseado nas operações de supremo, prioriza os elementos mais saturados da imagem, ou seja, as cores puras com relação ao valor de referência  $h_0$  da componente *hue*.

Para padrões corrompidos com ruído gaussiano, o modelo que possui maior tolerância é o modelo  $\mathcal{W}$  com ordem lexicográfica  $L^*a^*b^*$  baseado na referência  $r = (50, 0, 0)$  no espaço CIELab, conforme ilustra o gráfico da Figura 5.14. Salientamos que este modelo prioriza as cores mais próximas do ponto de referência  $r$ , que neste caso, é um tom de cinza médio.

Finalmente, observamos que para padrões corrompidos com ruído impulsivo somente o modelo  $\mathcal{W}$  com ordem lexicográfica  $L^*a^*b^*$  baseado na referência  $r = (50, 0, 0)$  no espaço CIELab é capaz de recuperar as imagens. Como não há outros modelos capazes de recuperar imagens com ruído impulsivo não apresentamos aqui os gráficos.

A Tabela 5.1 apresenta o número de junções sinápticas dos modelos  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  sintetizados com os diferentes esquemas ordenados. Na terceira coluna é apresentado a porcentagem do número de junções sinápticas das memórias autoassociativas esparsas em reticulados em relação a modelos totalmente conectados. Lembrando que para armazenar as 12 imagens coloridas em um modelo totalmente conectado seriam gerados aproximadamente  $6,9 \times 10^{10}$  número de junções sinápticas.

**Figura 5.14** – Média do Delta versus a variância de adicionar ruído gaussiano. As linhas marcadas com “▲” (verde) e “▼” (azul), representam as memórias  $W$  com as ordens **lexicográfica  $L^*a^*b^*$  baseado na referência** e **lexicográfica com os dados descorrelacionados no espaço TKL**, respectivamente. As linhas com “■” (vermelho) e “+” (magenta) representam as memórias  $M$  com as ordens **lexicográfica SLH** e **lexicográfica VSH**, respectivamente. Por fim, a linha marcada com “◆” (preto) representa a medida Delta entre o padrão original e o padrão corrompido.



**Tabela 5.1** – Tabela com o número de junções sinápticas dos modelos *WeM*

<b>Esquema Ordenado</b>	<b>Junções Sinápticas</b>	<b>Porcentagem</b>
Lexicográfica RGB	$1,1 \times 10^7$	0,016
Marginal RGB	$1,3 \times 10^5$	0,0002
$\alpha$ -Módulo	$9,9 \times 10^6$	0,014
Lexicográfica TKL	$9,2 \times 10^6$	0,013
Lexicográfica LSH	$7,9 \times 10^6$	0,011
Lexicográfica SLH	$1,1 \times 10^7$	0,016
Hue Ponderado Pela Saturação	$2,5 \times 10^7$	0,036
Lexicográfica $L^*a^*b^*$	$8,5 \times 10^6$	0,012
Lexicográfica $L^*a^*b^*$ com $r = (50, 0, 0)$	$8,3 \times 10^6$	0,012

## 6 CONCLUSÃO

Nesta dissertação apresentamos um estudo detalhado das memórias autoassociativas esparsas em reticulados completos. Estas memórias são equipadas com neurônios que realizam operações de dilatação e erosão da morfologia matemática multivalor e podem ser efetivamente usadas para o armazenamento e recordação de grandes imagens coloridas.

No capítulo 2 apresentamos os principais conceitos da teoria dos reticulados completos, que formam a base para os operadores de dilatação e erosão da morfologia matemática. Precisamente, apresentamos as definições dos operadores dilatação e erosão, os operadores de abertura e fechamento bem como o conceito de adjunção. Também foram apresentados os operadores de dilatação e erosão para imagens multivalor, que dependem somente de uma estrutura de reticulado completo.

No capítulo 3 demonstramos teoremas referentes a fase de armazenamento e recordação das memórias autoassociativas esparsas em reticulados completos  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$ . Em particular, demonstramos que estas memórias apresentam convergência em uma única iteração e que podemos armazenar quantos padrões forem desejados nestes modelos. O conjunto dos pontos fixos, e portanto, a fase de recordação desta classe de memórias foram caracterizados. Precisamente, os padrões recordados pelos modelos de memória  $\mathcal{W}$  baseadas nas operações de supremo são capazes de recordar um padrão original somente se o padrão de entrada for menor ou igual ao padrão de saída desejado. Dualmente, o modelo  $\mathcal{M}$  baseado nas operações de ínfimo recorda um padrão original somente se o padrão de entrada for maior ou igual ao padrão original. Além disso, o conjunto dos pontos fixos das memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  possuem uma grande quantidade de memórias espúrias.

Ainda no capítulo 3 demonstramos o teorema 3.12 que afirma que as memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  são invariantes sob certos tipos de transformação. Por exemplo, estas memórias são invariantes sob transformações de luminosidade quando aplicadas para o armazenamento e recordação de imagens coloridas no sistema RGB com as ordens lexicográfica e marginal. Também, neste capítulo, estabelecemos uma relação entre as memórias autoassociativas morfológicas em tons de cinza de Ritter e Sussner [36, 37, 38, 51], com as MAERCs. O Teorema 3.15 mostra que as MAERCs podem ser obtidas das MAMs em tons de cinza excluindo-se algumas ligações sinápticas. Em consequência disto, as MAERCs exibem tolerância a ruído inferior com relação a padrões corrompidos com ruído positivo ou negativo. A principal vantagem das MAERCs sobre as MAMs em tons de cinza se refere a aspectos computacionais e teóricos, uma vez que as MAERCs requerem muito menos esforço computacional que os modelos de MAMs em tons de cinza. Do ponto de vista teórico, as MAERCs são definidas somente em uma estrutura de reticulado completo, enquanto que as MAMs em tons de cinza são definidas num l-grupo estendido que, além da estrutura de reticulado, requer duas operações binárias adicionais.

No capítulo 4 discutimos as representações para imagens coloridas RGB, HSV, HSL, CIE-Lab e a transformação de Karhunen-Loève. Cada modelo possui uma representação específica e cada ponto no espaço de cores representa uma única cor. Apresentamos neste capítulo as características de cada espaço de cor, bem como sua respectiva representação no sistema RGB. Em cada modelo de cor definimos alguns esquemas ordenados que fornecem uma estrutura de reticulado completo para o conjunto da cores.

No capítulo 5 realizamos diversos experimentos computacionais com as memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  baseadas em diferentes combinações de espaços de cores e esquemas ordenados. O objetivo destes experimentos é avaliar o desempenho destas memórias na reconstrução de imagens coloridas corrompidas por ruído *pepper*, gaussiano e impulsivo. Precisamente, investigamos o desempenho das memórias  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{M}$  nos seguintes modelos de cores e sistemas ordenados: no sistema RGB com as ordens lexicográfica, marginal e  $\alpha$ -módulo; o modelo com ordem lexicográfica no sistema de coordenadas TKL; no espaço HSL com as ordens lexicográfica LSH, lexicográfica SLH e lexicográfica *hue* ponderado pela saturação; no sistema HSV com a ordem lexicográfica VSH; e finalmente, no espaço CIELab com as ordens lexicográfica  $L^*a^*b^*$  e lexicográfica  $L^*a^*b^*$  baseado na referência  $r = (50, 0, 0)$ .

Observamos que os modelos de memória  $\mathcal{W}$  são eficientes para a reconstrução de imagens coloridas corrompidas com ruído negativo, como o ruído *pepper*, com exceção dos modelos com a ordem marginal RGB e com a ordem lexicográfica *hue* ponderado pela saturação. Os melhores modelos que recuperam padrões corrompidos com ruído *pepper* são as memórias  $\mathcal{W}$  com as ordens lexicográfica RGB, lexicográfica SLH, lexicográfica VSH e lexicográfica  $L^*a^*b^*$ . Observamos ainda, que os modelos com a ordem marginal RGB não são adequados para a reconstrução de imagens coloridas corrompidas com os ruídos *pepper*, gaussiano e impulsivo. Acreditamos que este fato se deve ao baixo número de junções sinápticas deste modelo.

Os modelos que melhor recuperam imagens coloridas corrompidas com ruído gaussiano são as memórias  $\mathcal{W}$  com ordem lexicográfica  $L^*a^*b^*$  baseado na referência  $r = (50, 0, 0)$  e o modelo  $\mathcal{M}$  com ordem lexicográfica SLH. Salientamos que o primeiro modelo também é eficiente para padrões corrompidos com ruído impulsivo, sendo o único dentre os modelos apresentados.

## REFERÊNCIA

- [1] ACHARYA, T., AND RAY, A. *Image Processing: Principles and Applications*. John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey, 2005.
- [2] AGOSTON, M. K. *Computer Graphics and Geometric Modelling: Implementation & Algorithms*, vol. 1. Springer, U.S.A., 2005.
- [3] ANGULO, J., AND SERRA, J. Morphological coding of color images by vector connected filters. In *Proceedings of the Seventh International Symposium on Signal Proceedings and Its Applications* (July 2003), vol. 1, pp. 69–72.
- [4] APTOULA, E., AND LEFÈVRE, S. A comparative study on multivariate mathematical morphology. *Pattern Recognition* 40, 11 (November 2007), 2914–2929.
- [5] APTOULA, E., AND LEFÈVRE, S. On lexicographical ordering in multivariate mathematical morphology. *Pattern Recognition Letters* 29, 2 (January 2008), 109–118.
- [6] AUSTIN, J. Associative memory. *Handbook of Neural Computation* (1997), F1.4:1–F1.4:7.
- [7] BIRKHOFF, G. *Lattice Theory*, 3 ed. American Mathematical Society, Providence, 1993.
- [8] CUNINGHAME-GREEN, R. *Minimax Algebra: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 166*. Springer-Verlag, New York, 1979.
- [9] ESMI, E. L. Modelos modificados de redes neurais morfológicas. Master’s thesis, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Departamento de Matemática Aplicada - IMECC, 2010.
- [10] ESMI, E. L., AND SUSSNER, P. A fuzzy associative memory based on Kosko’s subsethood measure. In *in Proceedings of the 2010 IEEE World Congress on Computational Inteligence (IJCNN), Barcelona, Spain* (july 2010), pp. 144–151.
- [11] GADER, P. D., KHABOU, M., AND KOLDOBSKY, A. Morphological regularization neural networks. *Pattern Recognition, Special Issue on Mathematical Morphology and Its Applications* 33, 6 (2000), 935–945.
- [12] GOLUB, G., AND VAN LOAN, C. *Matrix Computations*, 3th ed. John Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1996.
- [13] GONZALEZ, R., AND WOODS, R. *Digital Image Processing*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1992.

- [14] GRAÑA, M., VILLAVERDE, I., MALDONADO, J., AND HERNANDEZ, C. Two lattice computing approaches for the unsupervised segmentation of hyperspectral images. *Neurocomputing* 72, 10-12 (June 2009), 2111–2120.
- [15] HADWIGER, H. *Vorlesungen Über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Springer-Verlag, Berlin, 1957.
- [16] HANBURY, A., AND SERRA, J. Mathematical morphology in the HLS colour space. In *Proceedings of the 12th British Machine Vision Conference* (2001), pp. 451–460.
- [17] HANBURY, A., AND SERRA, J. Mathematical morphology in the L\*a\*b\* colour space. Tech. rep., Centre de Morphologie Mathématique, École des Mines de Paris, August 2001.
- [18] HASSOUN, M. H., Ed. *Associative Neural Memories: Theory and Implementation*. Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.
- [19] HASSOUN, M. H., AND WATTA, P. B. The Hamming associative memory and its relation to the exponential capacity DAM. In *IEEE International Conference on Neural Networks* (1996), vol. 1, pp. 583–587.
- [20] HASSOUN, M. H., AND WATTA, P. B. Associative memory networks. *Handbook of Neural Computation* (1997), C1.3:1–C1.3:14.
- [21] HEARN, D., AND BAKER, M. P. *Computer Graphics C version*, 2nd ed. Prentice Hall, 1997.
- [22] HEIJMANS, H. *Morphological Image Operators*. Academic Press, New York, NY, 1994.
- [23] HEIJMANS, H. J. A. M., AND RONSE, C. The algebraic basis of mathematical morphology I. dilations and erosions. *Computer Vision, Graphics and Image Processing* 50 (1990), 245–295.
- [24] KABURLASOS, V. G., ATHANASIADIS, I. N., AND MITKAS, A. Fuzzy lattice reasoning (FLR) classifier and its application for ambient ozone estimation. *International Journal of Approximate Reasoning* 45, 1 (2007), 152–188.
- [25] KABURLASOS, V. G., AND PAPADAKIS, S. E. A granular extension of the fuzzy - ARTMAP (FAM) neural classifier based on fuzzy lattice reasoning (FLR). *Neurocomputing* 72, 10-12 (2009), 2067–2078.

- [26] KABURLASOS, V. G., AND PETRIDIS, V. Fuzzy lattice neurocomputing (FLN) models. *Neural Networks* 13, 10 (2000), 1145–1170.
- [27] KONG, S.-G., AND KOSKO, B. Adaptive fuzzy systems for backing up a truck-and-trailer. *IEEE Transactions on Neural Networks* 3, 2 (1992), 211–223.
- [28] KOSKO, B. *Neural Networks and Fuzzy Systems: A Dynamical Systems Approach to Machine Intelligence*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992.
- [29] LEVKOWITZ, H. *Color Theory and Modeling for Computer Graphics, visualization, and Multimedia Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [30] MATHERON, G. *Random Sets and Integral Geometry*. John Wiley & Sons, New York, NY, 1975.
- [31] MINKOWSKI, H. *Gesammelte Abhandlungen*. Teubner Verlag, Leipzig-Berlin, 1911.
- [32] MONTEROS, R. A. V. E. D. L., AND AZUELA, J. H. S. A bidirectional hetero-associative memory for true-color patterns. *Neural Processing Letters* 28, 3 (2008), 131–153.
- [33] PETRIDIS, V., AND KABURLASOS, V. Fuzzy lattice neural network (FLNN): a hybrid model for learning. *IEEE Transactions on Neural Networks* 9, 5 (Sept. 1998), 877–890.
- [34] PLATANIOTIS, K. N., ANDROUTSOS, D., AND VENETSANOPOULOS, A. N. Adaptive fuzzy systems for multichannel signal processing. *Proceedings of the IEEE* 87, 09 (September 1999), 1601–1622.
- [35] PRATT, W. *Digital Image Processing*. John Wiley, New York, 1978.
- [36] RITTER, G. X., AND SUSSNER, P. An introduction to morphological neural networks. In *Proceedings of the 13th International Conference on Pattern Recognition* (Vienna, Austria, 1996), pp. 709–717.
- [37] RITTER, G. X., AND SUSSNER, P. Morphological neural networks. In *Intelligent Systems: A Semiotic Perspective; Proceedings of the 1996 International Multidisciplinary Conference* (Gaithersburg, Maryland, 1996), pp. 221–226.
- [38] RITTER, G. X., SUSSNER, P., AND DE LEON, J. L. D. Morphological associative memories. *IEEE Transactions on Neural Networks* 9, 2 (1998), 281–293.
- [39] RITTER, G. X., AND URCID, G. A lattice matrix method for hyperspectral image unmixing. *Information Sciences* 181 (may 2011), 1787–1803.

- [40] RITTER, G. X., URCID, G., AND SCHMALZ, M. S. Autonomous single-pass endmember approximation using lattice auto-associative memories. *Neurocomputing* 72, 10-12 (2009), 2101–2110.
- [41] RITTER, G. X., AND WILSON, J. N. *Handbook of Computer Vision Algorithms in Image Algebra*, 2 ed. CRC Press, Boca Raton, 2001.
- [42] RONSE, C. Why mathematical morphology needs complete lattices. *Signal Processing* 21, 2 (1990), 129–154.
- [43] RONSE, C., AND HEIJMANS, H. J. A. M. The algebraic basis of mathematical morphology II. openings and closings. *CVGIP: Image Understanding* 54 (July 1991), 74–97.
- [44] SERRA, J. *Image Analysis and Mathematical Morphology*, vol. 1. Academic Press, London, 1982.
- [45] SERRA, J. *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2: Theoretical Advances*. Academic Press, New York, 1988.
- [46] SOILLE, P. *Morphological Image Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1999.
- [47] SUSSNER, P. Fixed points of autoassociative morphological memories. In *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks* (Como, Italy, July 2000), pp. 611–616.
- [48] SUSSNER, P., AND ESMI, E. L. Morphological perceptrons with competitive learning: Lattice-theoretical framework and constructive learning algorithm. *Information Sciences* 181 (May 2011), 1929–1950.
- [49] SUSSNER, P., ESMI, E. L., VILLAVERDE, I., AND GRAÑA, M. The Kosko subsethood fuzzy associative memory (KS-FAM): Mathematical background and applications in computer vision. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, accepted for publication (2011).
- [50] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. A brief account of the relations between gray-scale mathematical morphologies. In *Proceedings of SIBGRAPI 2005* (Natal, RN, Brazil, 2005), pp. 79–86.
- [51] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Grayscale morphological associative memories. *IEEE Transactions on Neural Networks* 17, 3 (May 2006), 559–570.
- [52] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Implicative fuzzy associative memories. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 14, 6 (2006), 793–807.

- [53] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Recall of patterns using morphological and certain fuzzy morphological associative memories. In *Proceedings of the IEEE World Conference on Computational Intelligence 2006* (Vancouver, Canada, 2006), pp. 209–216.
- [54] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Morphological and certain fuzzy morphological associative memories for classification and prediction. In *Computational Intelligence Based on Lattice Theory*, V. Kambhampati and G. Ritter, Eds. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 2007, ch. 8, pp. 149–172.
- [55] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Classification of fuzzy mathematical morphologies based on concepts of inclusion measure and duality. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 32, 2 (Oct. 2008), 139–159.
- [56] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Fuzzy associative memories and their relationship to mathematical morphology. In *Handbook of Granular Computing*, W. Pedrycz, A. Skowron, and V. Kreinovich, Eds. John Wiley and Sons, Inc., New York, 2008, ch. 33, pp. 733–754.
- [57] VALLE, M. E. Estudo comparativo em memórias associativas com ênfase em memórias associativas morfológicas. Master’s thesis, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, Brasil, Agosto 2005.
- [58] VALLE, M. E. A class of sparsely connected autoassociative morphological memories for large color images. *IEEE Transactions on Neural Networks* 20, 6 (June 2009), 1045–1050.
- [59] VALLE, M. E. Sparsely connected autoassociative fuzzy implicative memories and their application for the reconstruction of large gray-scale images. *Neurocomputing, in Press* 74, 1-3 (December 2010), 343–353.
- [60] VALLE, M. E., AND SUSSNER, P. Storage and recall capabilities of fuzzy morphological associative memories with adjunction-based learning. *Neural Networks* 24 (January 2001), 75–90.
- [61] VALLE, M. E., AND SUSSNER, P. Fuzzy morphological associative memories based on uninorms. In *Proceedings of the IEEE World Conference on Computational Intelligence 2008 (WCCI 2008)* (Hong Kong, China, June 2008), pp. 1582–1589.
- [62] VALLE, M. E., AND SUSSNER, P. A general framework for fuzzy morphological associative memories. *Fuzzy Sets and Systems* 159, 7 (2008), 747–768.
- [63] VANDENBROUCKE, N., MACAIRE, L., AND POSTAIRE, J. G. Color image segmentation by pixel classification in an adapted hybrid color space. Application to soccer image analysis. *Computer Vision and Image Understanding* 90 (May 2003), 190–216.

- [64] ZHANG, B.-L., ZHANG, H., AND GE, S. S. Face recognition by applying wavelet sub-band representation and kernel associative memory. *IEEE Transactions on Neural Networks* 15, 1 (Jan. 2004), 166–177.
- [65] ZHANG, D., AND ZUO, W. Computational intelligence-based biometric technologies. *IEEE Computational Intelligence Magazine* 2, 2 (May 2007), 26–36.
- [66] ZHANG, H., HUANG, W., HUANG, Z., AND ZHANG, B. A kernel autoassociator approach to pattern classification. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B* 35, 3 (June 2005), 593–606.
- [67] ZHENG, P., ZHANG, J., AND TANG, W. Color image associative memory on a class of Cohen–Grossberg networks. *Pattern Recognition* 43, 10 (Oct. 2010), 3255–3260.