Universidade
Estadual de Londrina

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Controlabilidade Exata na Fronteira e Fórmula de Reconstrução para Equação Viscoelástica

Vinicius Araujo Peralta

LONDRINA - PR

2010

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Controlabilidade Exata na Fronteira e Fórmula de Reconstrução para Equação Viscoelástica

Vinicius Araujo Peralta

Dissertação de mestrado orientada pela Professora Doutora Luci Harue Fatori e apresentada à Universidade Estadual de Londrina, como parte dos requisitos necessários para a conclusão do curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional - PGMAC.

Londrina - PR
Maio - 2010

Controlabilidade Exata na Fronteira e Fórmula de Reconstrução para Equação Viscoelástica

Vinicius Araujo Peralta

Centro de Ciências Exatas

Universidade Estadual de Londrina

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

(Mestrado)

Orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Luci Harue Fatori

Londrina - PR

2010

Controlabilidade Exata na Fronteira e Fórmula de Reconstrução para Equação Viscoelástica

Vinicius Araujo Peralta

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Universidade Estadual de Londrina - UEL-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

Aprovada em 28 de maio de 2010 por:

Profª Drª Luci Harue Fatori - UEL ....

(Orientadora)

Prof. Dr. Albo Carlos Cavalheiro - UEL ....

Prof. Dr. Doherty Andrade - UEM ....

Londrina - PR

2010

À minha família

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo amor incondicional que tem por mim e pela força que me deu para chegar até aqui.

Agradeço imensamente Profª. Drª. Luci Harue Fatori por ter me orientar neste trabalho, e pelo tempo de convívio durante a graduação, onde com ela tive a oportunidade de aprender Cálculo, Análise, Variáveis Complexas, etc, e também a ser um estudante melhor e mais empenhado. Agradeço ao Prof. Dr. Robinson Hoto, pelos desafios que corajosamente ele enfrentou para, juntamente com todos outros professores, iniciar este curso de Pós-Graduação.

Agradeço a minha família pelo incentivo e apoio em todos os aspectos, pilar forte que não pode ser removido.

Agradeço a minha futura esposa Edilaine, por seu sorriso, sua espontaneidade e compreensão, por ser a pessoa maravilhosa que é, e por estar sempre ao meu lado, ainda que as vezes eu estivesse distante envolvido com este trabalho.

Agradeço de modo especial a Renata Maciel que ressignificou em mim a palavra amizade e que tem o dom de ver estradas onde eu vejo o fim. Agradeço ao Mauricio, pelas palavras de encorajamento, e que mesmo de muito longe nunca se esqueceu de ligar para saber como iam as coisas por aqui, sempre presente de alguma forma. Agradeço a todos GOU - Grupo de Oração Universitário - por me ensinar que a fé e a razão são como duas asas que nos elevam; obrigado Amanda, Sandra, Ruth, Rafael, Flávio...

Agradeço a todos os amigos que tive e sempre terei a partir deste mestrado, João Roberto, pelas partidas de xadrez, Suellen R. Pardo e Stela A. Leite, pelos momentos de descontração que nunca esquecerei, Rafael M. de Oliveira, Michelle K., Thiago P., Everton P. da Cruz, e os companheiros de orientação Carolina L. Antonio e Rodrigo N. Monteiro, que sempre estavam por perto dispostos a ajudar resolver e discutir as dúvidas que me ocorriam. Também agradeço a Renata Mascari por simplesmente ser quem é, Geovani, Poliane e Daniela, Cibele e Camila, pessoas incrivelmente especias que, cada um a seu modo, fizeram com que a rotina de estudos fosse bem mais leve.

Agradeço aos professores que fizeram parte da banca examinadora, pelo tempo dedicado lendo este trabalho, e pelas importantes observações que deixaram este trabalho mais claro.

Agradeço também a todos os professores e funcionários que colaboraram com minha formação pessoal e profissional, em especial ao Prof. Dr. Jaime E. M. Rivera.

Por fim, agradeço a Fundação Araucária pelo apoio financeiro.

Muito débil é a razão se não chega a compreender
que há muitas coisas que a ultrapassam.

Blaise Pascal

Resumo

Neste trabalho obtivemos a controlabilidade exata na fronteira para equação viscoelástica por meio do Método da Unicidade de Hilbert. Para isto estudamos a existência, unicidade e regularidade de soluções forte, fraca e ultra fraca. A partir dos resultados de controlabilidade foi estabelecida a fórmula de reconstrução para a força externa do tipo $\lambda(t)f(x)$ onde $f \in L^2(0, L)$ é desconhecida.

Abstract

In this work we obtained the exact boundary controllability for viscoelastic equation through the Hilbert Uniqueness' Method. In order this, we studied the existence, uniqueness and regularity of strong, weak and ultra weak solutions. From the results of controllability it was established a reconstruction's formula for the external force of kind $\lambda(t)f(x)$ where $f \in L^2(0,L)$ is unknown.

Lista de Notações

Ω	Subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$
$\operatorname{supp}(u)$	Suporte da função u
$C^0(\Omega)$	Espaço das funções contínuas sobre Ω
$C^m(\Omega)$	Espaço das funções diferenciáveis em Ω até a ordem m
$C_0^\infty(\Omega)$	Espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω
D^α	Operador derivada de ordem α, α um multi-índice
$\mathcal{D}(\Omega)$	Conjunto de funções testes sobre Ω
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Conjunto das distribuições sobre Ω
$\lvert \cdot \rvert$	Valor absoluto
$L^p(\Omega)$	Espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ com $\lvert u\rvert^p$ integrável à Lebesgue
$L^\infty(\Omega)$	Espaço das funções essencialmente limitadas em Ω
$\lVert \cdot \rVert_V$	Norma no espaço V
$(\cdot, \cdot)_V$	Produto interno no espaço $V \times V$
$(\cdot, \cdot)$	Produto interno em $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$
$L^1_{loc}(\Omega)$	Espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ com $u \in L^1(K)$, $\forall K \subset \Omega$, K compacto
$\hookrightarrow$	Imersão contínua
$W^{m,p}(\Omega)$	Espaço das funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ para todo $\lvert\alpha\rvert \leqslant m$
$H^m(\Omega)$	Espaço das funções $u \in L^2(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ para todo $\lvert\alpha\rvert \leqslant m$
$W_0^{m,p}(\Omega)$	Fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$
$W_0^{-m,p}(\Omega)$	Espaço dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$
$H^{-m}(\Omega)$	Espaço dual topológico de $H_0^m(\Omega)$
$((\cdot, \cdot))$	Produto interno em H_0^1
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto interno de dualidade

$\rightharpoonup$	Convergência fraca
$\overset{*}{\rightharpoonup}$	Convergência fraca estrela
$\rightarrow$	Convergência forte
$\overset{c}{\hookrightarrow}$	Imersão compacta
$\mathrm{med}(\Omega)$	Medida de Lebesgue do conjunto Ω
$u * v$	Produto de convolução

Conteúdo

Introdução

Um material é dito elástico se ao sofrer uma tensão, ele retoma sua forma e volume originais quando a tensão é cessada. Um material é dito viscoso, quando as deformações sofridas por ele, por meio de uma tensão de cisalhamento, são irreversíveis. Assim as Equações Viscoelásticas descrevem a propagação de ondas em materiais que apresentam tanto um comportamento elástico quanto viscoso, ou seja, a tensão em qualquer instante, depende da deformação sofrida pelo material nos instantes passados. No caso unidimensional, se considerarmos uma barra de comprimento L em repouso no plano-ux, cujas extremidades estão fixas, constituída por um material viscoelástico, a equação que descreve a posição $u = u(x,t)$ de um ponto x da barra, no instante t após uma tensão lhe ser aplicada, é dado por

$$\left| \begin{array}{lll} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + g * u_{xx}(x,t) = F(x,t) & \text{em} &]0,L[\times]0,T[\\ \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{em} &]0,T[\\ \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{em} &]0,L[\end{array} \right. \tag{0.1}$$

onde $g * u_{xx}(x,t) = \displaystyle\int_0^t g(t-s)u_{xx}(x,s)\,ds$ é chamado *termo de memória* e F é a força externa.

O trabalho pioneiro em viscoelasticidade linear foi dado por Dafermos [1]. Inúmeros trabalhos se seguiram nos quais foram consideradas não linearidades locais e não locais. Dentre eles citamos [2], [3] e [4]. No contexto de problemas de transmissão em um material formado por duas componentes, sendo uma elástica e outra viscoelástica temos os trabalho de J. E. M. Rivera e H. P. Oquendo em [5].

O objetivo deste trabalho é estudar a controlabilidade exata na fronteira para o problema (0.1) com dados iniciais $u_0(x) = u_1(x) = 0$ e força externa $F(x,t) = \lambda(t)f(x)$, onde $\lambda \in C^1[0,T]$ com $\lambda(0) \neq 0$ e $f \in L^2(0,L)$ é uma função desconhecida para a qual deseja-se obter seus coeficientes de Fourier a partir da solução $u = u(x,t)$ de (0.1). Nisto consiste obter a Fórmula de reconstrução para f.

Diversos autores estudaram problemas de controlabilidade exata na fronteira para equação de ondas, dentre eles destacamos Jacques Louis Lions em [6] e Vilmos Komornik em [7]. Em [8], M. M. Cavalcanti, V. N. D. Cavalcanti, A. Rocha e J. A. Soriano estabeleceram a controlabilidade exata na fronteira para uma equação viscoelástica com termo de pressão.

Com referência a Fórmula de Reconstrução citamos os trabalhos de G. Bruckner e M. Yamamoto em [9] e M. Yamamoto em [10], onde empregaram resultados de controlabilidade para obter a fórmula de reconstrução para força externa de problemas hiperbólicos. Destacamos também o trabalho de J. E. M. Rivera e H. F. Sare, [11], no qual foi estabelecida a Fórmula de Reconstrução para a força externa de um sistema Timoshenko.

O trabalho foi organizado em três capítulos. Apresentamos no primeiro capítulo as definições e resultados padrões necessários para o desenvolvimento do trabalho. No segundo capítulo garantimos a existência, unicidade e regularidade de soluções fortes, fracas e ultra fracas para equações viscoelásticas, que são essenciais para se estabelecer os resultados de controlabilidade. Por fim, no terceiro capítulo empregamos o Método da Unicidade de Hilbert para estabelecermos a controlabilidade exata na fronteira para a equação viscoelástica, e assim obtermos a fórmula de reconstrução para a força externa.

Capítulo 1

Preliminares

Introduzimos neste capítulo as definições, notações e resultados que serão utilizados ao longo de todo o texto.

1.1 Espaços Funcionais

Nesta seção apresentaremos os espaços funcionais e a noção de derivada no sentido das distribuições. Para isso, considere Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$.

1.1.1 Espaço das funções testes

Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma aplicação. Denomina-se *suporte de u em Ω* o fecho do conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$ e representa-se por $\operatorname{supp}(u)$, ou seja,

$$\operatorname{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}.$$

Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções numéricas em Ω que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que possuem suporte compacto. Dizemos que uma sequência de funções $\{\phi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ é convergente para a função $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ se as seguintes condições são satisfeitas:

i) existe $K \subset \Omega$ compacto, tal que $\text{supp}\,(\phi_\nu - \phi) \subset K$, para todo ν;

ii) para cada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, a sequência $\{D^\alpha \phi_n\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para $D^\alpha \phi$ uniformemente em K, onde D^α representa o operador derivação de ordem α definido por

$$D^\alpha = \frac{D^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}, \quad \text{com} \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ com esta noção de convergência é denominado espaço das funções testes e será representado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

1.1.2 Distribuições

Define-se distribuição sobre Ω a toda forma linear T sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínua no sentido da convergência definida sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial, o qual representa-se $\mathcal{D}'(\Omega)$. Neste espaço vetorial diz-se que uma sucessão $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, quando a sequência numérica $(\langle T_\nu, \phi \rangle)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \phi \rangle$ em $\mathbb{R}$, para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Considere uma distribuição T sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T, é a forma linear $D^\alpha T$ definida por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Quando $\alpha \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, denotaremos $D^\alpha T$ como $\dfrac{d^\alpha T}{dx^\alpha}$. Verifica-se que $D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω, e que a aplicação

$$\begin{aligned} D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) &\rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ T &\mapsto D^\alpha T \end{aligned}$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que se

$$\lim_{\nu \to \infty} T_\nu = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \quad \text{então} \quad \lim_{\nu \to \infty} D^\alpha T_\nu = D^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

1.1.3 Os espaços $L^p(\Omega)$

Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$, tais que $|u|^p$ é integrável a Lebesgue sobre Ω, e por $L^\infty(\Omega)$ o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que existe uma constante $c > 0$ com $|u(x)| \leq c$ quase sempre em Ω. Os espaços $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c \, ; |u(x)| \leq c \text{ quase sempre em } \Omega\},$$

são espaços de Banach. Em particular, o espaço $L^2(\Omega)$, cuja norma provém do produto interno

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x) \, dx$$

é um espaço de Hilbert.

Denotaremos por $L^1_{loc}(\Omega)$ o espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $u \in L^1(K)$ para todo compacto K de Ω.

Seja E um espaço vetorial e considere E' e E'' o espaço dual e bidual de E respectivamente. Defina para cada $v \in E$ a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_v : E' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \varphi_v(f) = f(v). \end{aligned}$$

A aplicação φ_v é um elemento de E''.

Chamamos de *imersão canônica* aplicação $J : E \to E''$ definida por

$$\begin{aligned} J : E &\longrightarrow E'' \\ v &\longmapsto \varphi_v. \end{aligned}$$

Para maiores detalhes veja a seção III.4 em [14].

Definição 1.1.1. *Seja X um espaço de Banach X e J a imersão canônica de X em X''. Dizemos que X é reflexivo quando $J(X) = X''$.*

Definição 1.1.2. *Um espaço normado X é dito separável se ele contém um subconjunto enumerável e denso.*

Em [12], Teorema 2.21 Corolário 2.40 respectivamente, é provado que

i) $L^p(\Omega)$ é separável para todo $1 \leq p < +\infty$;

ii) $L^p(\Omega)$ é reflexivo para todo $1 < p < +\infty$.

Definição 1.1.3 (Imersão contínua)**.** *Sejam X e Y espaços de Hilbert, com X subespaço de Y. Dizemos que X está continuamente imerso em Y, e denotaremos por $X \hookrightarrow Y$, se existe uma constante positiva C tal que*

$$\|u\|_Y \leqslant C\,\|u\|_X$$

para todo $u \in X$.

Além dos resultados acima, temos que

i) $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ e $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, para todo $1 \leq p < +\infty$;

ii) Se Ω é limitado e $1 \leq p < q \leq +\infty$, então $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$.

Veja a prova em [12] p. 28 e p. 31 respectivamente.

1.1.4 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ e m um inteiro não negativo. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$.

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ defini-se a norma de u por

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess} |D^\alpha u(x)|.$$

Os espaços normados $W^{m,p}(\Omega)$ são espaços de Banach, e são denominados espaços de Sobolev. Para o caso particular $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, representado por $H^m(\Omega)$, com o produto interno dado por

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u,\, v, \in H^m(\Omega),$$

e é denominado espaço de Sobolev de ordem m. Quando $m = 0$, $H^0(\Omega)$ identifica-se com $L^2(\Omega)$.

Define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Quando Ω é limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$, então a norma em $W_0^{m,p}(\Omega)$ dada por

$$\|u\|_{W_0^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

é equivalente à norma induzida por $W^{m,p}(\Omega)$, veja Corolário 3 em [25] . Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$, onde $1 \leq p < \infty$ e q é o conjugado de p, isto é, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Por $H^{-m}(\Omega)$ denota-se o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$.

1.1.5 Espaços Funcionais à Valores Vetoriais

Considere X um espaço de Banach e T um número real positivo. Denotaremos por $\mathcal{D}(0,T;X)$ o espaço das funções vetoriais $\varphi : (0,T) \to X$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em $(0,T)$. Dizemos que $\varphi_\nu \to \varphi$ em $\mathcal{D}(0,T;X)$ se

i) existe $K \subset (0,T)$ compacto, tal que $\operatorname{supp}(\phi_\nu - \phi) \subset K$, para todo ν;

ii) para cada $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{d^k}{dt^k}\varphi_\nu(t) \to \dfrac{d^k}{dt^k}\varphi(t)$ em X uniformemente em $t \in (0,T)$.

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X será denotado por $\mathcal{D}'(0,T;X)$. Neste espaço dizemos que uma sucessão $(S_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ converge para $S \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ quando $\langle S_\nu, \varphi \rangle \to \langle S, \varphi \rangle$ em X, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T)$.

Denotaremos por $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$ o espaço de Banach das funções $u : (0,T) \to X$, tais que u é mensurável e $||u(t)||_X$ pertença a $L^p(0,T)$. Em $L^p(0,T;X)$ defini-se a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \inf\{c\,;\|u(t)\|_X \leq c \text{ quase sempre em } (0,T)\}.$$

Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, então $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert munido com o produto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X\,dt.$$

O dual topológico de $L^p(0,T;X)$ é o espaço $L^q(0,T;X')$, sendo X' o dual topológico de X e q o conjugado de p.

Seja m um inteiro não negativo. Representaremos por $W^{m,p}(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$ o espaço de Banach

$$W^{m,p}(0,T;X) = \{u \in L^p(0,T;X)\,; u^{(j)} \in L^p(0,T;X),\ 0 \leq j \leq m\},$$

onde $u^{(j)}$ representa a j-ésima derivada no sentido das distribuições vetoriais, com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \left(\sum_{j=0}^m \|u^{(j)}\|^p_{L^p(0,T;X)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $W^{m,2}(0,T;X)$ é denotado por $H^m(0,T;X)$, que é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u,v)_{H^m(0,T;X)} = \sum_{j=0}^m (u^{(j)},v^{(j)})_{L^2(0,T;X)}.$$

Defini-se $H_0^m(0,T;X)$ como o completamento de $\mathcal{D}(0,T;X)$ com respeito a norma $H^m(0,T;X)$. O dual topológico de $H_0^m(0,T;X)$ será representado por $H^{-m}(0,T;X')$.

Representaremos por $C^0([0,T];X)$ o espaço das funções contínuas $u : [0,T] \to X$, tais que $\|u(t)\|_X$ pertença a $C^0([0,T])$, que juntamente com a norma

$$\|u\|_{C^0([0,T];X)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X,$$

é um espaço de Banach. Denotaremos por $C^m([0,T];X)$ o espaço de Banach das funções $u : [0,T] \to X$, tais que $\left|\left|\frac{d^k u}{dt^k}(t)\right|\right|_X$ pertença a $C^0([0,T])$ para todo k, $0 \leq k \leq m$. Em $C^m([0,T];X)$ defini-se a norma

$$\|u\|_{C^m([0,T];X)} = \|u\|_{C^0([0,T];X)} + \left|\left|\frac{du}{dt}\right|\right|_{C^0([0,T];X)} + \ldots + \left|\left|\frac{d^m u}{dt^m}\right|\right|_{C^0([0,T];X)}.$$

1.2 Resultados Auxiliares

Nesta seção enunciaremos os resultados necessários ao nosso trabalho, cujas demonstrações podem ser encontradas nas referências citadas.

Proposição 1.2.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Seja H um espaço vetorial munido do produto interno $(\cdot,\cdot)$. Então, dados u, $v \in H$, temos que*

$$|(u,v)| \leqslant \|u\|\,\|v\|,$$

onde $\|\cdot\|^2 = (\cdot,\cdot)$.

Prova: Ver Lema 3.2-1 em [13].

Proposição 1.2.2 (Desigualdade de Young). *Sejam $1 < p, q < \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e $a, b > 0$. Então*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Prova: Ver Teorema IV.6 em [14].

Proposição 1.2.3 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$, e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então $uv \in L^1(\Omega)$, e temos a desigualdade*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\,dx \leqslant \|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Prova: Ver Teorema IV.6 em [14].

Proposição 1.2.4 (Desigualdade de Poincaré). *Suponhamos que Ω seja um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Então para todo $1 \leq p < \infty$, existe uma constante c_p, tal que*

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq c_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Prova: Ver Teorema 5.6.1 em [15].

Observação 1.2.5. *A desigualdade de Poincaré também é válida para funções que se anulam em apenas uma parte da fronteira $\partial\Omega$ e também para as funções que tem média nula, isto é, $\dfrac{1}{med(\Omega)} \displaystyle\int_\Omega u\,dx = 0$.*

Lema 1.2.6 (Gronwall)**.** *Sejam* $\phi \in L^\infty(0,T)$ *e* $\beta \in L^1(0,T)$ *tais que* $\beta > 0$, $\phi \geqslant 0$ *e* $K \geqslant 0$ *uma constante. Se*

$$\phi(t) \leqslant K + \int_0^t \beta(s)\phi(s)\,ds$$

então tem-se

$$\phi(t) \leqslant K e^{\int_0^t \beta(s)\,ds}$$

para todo $t \in [0,T]$.

Prova: Ver Apêndice B em [16].

Lema 1.2.7. *Seja* $m \in L^1(0,T;\mathbb{R})$ *tal que* $m \geqslant 0$ *para todo* $t \in]0,T[$ *e seja* $a \geqslant 0$ *uma constante real. Suponha que* $g \in L^\infty(0,T)$, $g \geqslant 0$ *em* $]0,T[$ *verificando*

$$g^2(t) \leqslant a^2 + 2\int_0^t m(s)g(s)\,ds$$

para todo $t \in]0,T[$. *Então:*

$$g(t) \leqslant a + \int_0^t m(s)\,ds.$$

Prova: Ver Lema 1 em [17].

Lema 1.2.8 (Du Bois Raymond)**.** *Seja* Ω *um subconjunto aberto do* $\mathbb{R}^n$ *e seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

então $u = 0$ *quase sempre em* Ω.

Prova: Ver Proposição 1.3.1 em [25].

Proposição 1.2.9. *Sejam* Ω *um aberto limitado de* $\mathbb{R}^n$ *e* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *com* $p > n$. *Então existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

isto é, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Prova: Ver [15].

Proposição 1.2.10 (Imersão de Sobolev)**.** *Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Então*

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\bar{\Omega}), \ se\, m > \frac{n}{2} + k.$$

Prova: Ver [19].

Proposição 1.2.11. *Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leqslant p < +\infty$, tal que $u_n \to u$ em $L^p_{loc}(\Omega)$, então $u_n \to u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Prova: Ver Exemplo 3 pág. 13 em [25].

Definição 1.2.12. *Seja E um espaço de Banach e considere $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão sobre E. Dizemos que x_n converge fraco para x, e denotamos $x_n \rightharpoonup x$ em E, quando $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, para todo $f \in E'$, onde $\langle f, x\rangle = f(x)$ é o valor do funcional f no ponto x.*

Proposição 1.2.13. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência num espaço de Banach reflexivo E. Então se verifica:*

i) $x_n \rightharpoonup x$ *em E, se, e somente se,* $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall f \in E'$.

ii) *Se* $x_n \to x$ *em E, então* $x_n \rightharpoonup x$ *em E.*

iii) *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *em E, então* $||x_n||_E$ *é limitada e* $||x||_E \leqslant \liminf ||x_n||_E$.

iv) *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *em E e* $f_n \to f$ *em E', então* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Prova: Ver Proposição III.5 em [14].

Definição 1.2.14. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência sobre E'. Dizemos que f_n converge fraco estrela para f e denotamos $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E', quando $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, para todo $x \in E$.*

Proposição 1.2.15. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E'. Então se verifica:*

i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em E, se, e somente se,* $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall x \in E$.

ii) *Se* $f_n \to f$ *em E', então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em E'.*

iii) *Se* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em E', então* $||f_n||_{E'}$ *é limitada e* $||f||_{E'} \leqslant \liminf ||f_n||_{E'}$.

iv) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E' e $x_n \to x$ em E, então $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Prova: Ver Proposição III.12 em [14].

Teorema 1.2.16. *Seja E um espaço de Banach reflexivo e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E. Então, existem uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $x \in E$ tais que $x_{n_k} \rightharpoonup x$.*

Prova: Ver Corolário III.27 em [14].

Teorema 1.2.17. *Seja E um espaço de Banach separável e seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E'. Então existem uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $f \in E'$ tais que $f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f$.*

Prova: Ver Corolário III.26 em [14].

Lema 1.2.18 (Lema de Kim)**.** *Denotemos por (w^k) uma sequência de funções satisfazendo*

$$\begin{aligned} w^k &\overset{*}{\rightharpoonup} w \quad em \quad L^\infty(0,T;H^\beta(\Omega)), \\ w^k_t &\rightharpoonup w_t \quad em \quad L^2(0,T;H^\theta(\Omega)), \end{aligned}$$

quando $k \to \infty$, para $\theta < \beta$. Então, temos que

$$w^k \to w \ em \ C([0,T];H^r(\Omega)),$$

para todo $r < \beta$.

Prova: Ver [20].

A seguir apresentaremos as definições, resultados e notações necessárias para o desenvolvimento dos capítulos seguintes.

Definição 1.2.19 (Convolução)**.** *Sejam u e v funções a valores reais definidas no $\mathbb{R}^n$. Defini-se a **convolução** de u e v, que denotada por $u * v$, como sendo*

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-s)v(s)\,ds.$$

Lema 1.2.20. *Para quaisquer $g, h \in C^1(\mathbb{R})$ é verdadeira a seguinte identidade*

$$2\,(g*h)\,h' = g'\Box h - g(t)|h|^2 - \frac{d}{dt}\left[g\Box h - \left(\int_0^t g\,ds\right)|h|^2\right]$$

onde

$$(g\Box h)(t) = \int_0^t g(t-s)\,|h(t)-h(s)|^2\,ds.$$

Prova: Basta diferenciar a expressão $g\Box h - \left(\int_0^t g\,ds\right)|h|^2$.

Definição 1.2.21 (Ponto de Lebesgue). *Seja $v \in L^1(0,T)$. Dizemos que $s \in]0,T[$ é um ponto de Lebesgue de v, se para $h > 0$ tal que $]s-h, s+h[\subset]0,T[$, implica*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h}\int_{s-h}^{s+h} v(\varepsilon)\,d\varepsilon = v(s).$$

Observação 1.2.22. *Se $v \in L^1(0,T)$, então quase todo ponto $s \in]0,T[$ são pontos de Lebesgue. Veja Teorema 6 do Apêndice E em [16].*

Definição 1.2.23 (Semicontinuidade). *Diz-se que um funcional $J : H \to \mathbb{R}$ definido sobre um espaço normado H, é semicontínuo inferiormente com relação a convergência fraca se $x_n \rightharpoonup x$ implica*

$$\liminf_{n\to\infty} J(x_n) \geqslant J(x).$$

Definição 1.2.24 (Imersão compacta). *Sejam X e Y espaços de Hilbert onde X é subespaço de Y. Se para toda sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada em X, podemos extrair uma subsequência de $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge forte em Y, dizemos que a imersão de X em Y é compacta e denotamos por $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$.*

Teorema 1.2.25 (Aubin-Lions). *Sejam B_0, B, B_1 espaços de Banach, sendo B_0 e B_1 reflexivos e tais que*

$$B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1.$$

Definindo

$$\mathcal{W} = \{v \in L^{p_0}(0,T;B_0) \ : \ v' \in L^{p_1}(0,T;B_1)\}$$

onde $1 < p_0$, $p_1 < +\infty$ e $0 < T < +\infty$. Então, $\mathcal{W}$ munido da norma

$$\|v\|_{\mathcal{W}} = \|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)},$$

é um espaço de Banach e a imersão de $\mathcal{W}$ em $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.

Prova: Ver Teorema 5.11.2 em [15].

Lema 1.2.26 (Lions). *Seja $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções pertencentes a $L^p(\Omega\times]0,T[)$ com $1 < p < \infty$. Se* *(i)* $v_n \to v$ *quase sempre em* $\Omega\times]0,T[$;

(ii) $\|v_n\|_{L^p(Q)} \leqslant c$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$;

então (v_n) *converge fraco em* $L^p(Q)$.

Prova: Ver Teorema 3.9.2 em [15].

Lema 1.2.27 (Temam)**.** *Seja* X *um espaço de Banach com dual* X', u *e* g *duas funções de* $L^1(a,b,X)$. *Então são equivalentes as afirmações:*

(i) u *é primitiva de* g

$$u(t) = \xi + \int_0^t g(s)\,ds, \quad \forall t \in [a,b], \quad \xi \in X.$$

(ii) Para cada $\phi \in \mathcal{D}(a,b)$ *tem-se*

$$\int_a^b u(t)\phi'(t)\,dt = -\int_a^b g(t)\phi(t)\,dt.$$

(iii) Para cada $\eta \in X'$,

$$\frac{d}{dt}\langle u, \eta\rangle = \langle g, \eta\rangle \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(a,b).$$

Se u *satisfaz* $(i)-(iii)$, *em particular,* u *é igual quase sempre a uma função contínua de* $[a,b]$ *em* X.

Prova: Ver Lema 1.1 pág. 250 em [21].

Proposição 1.2.28 (Bochner)**.** *Se* X *e* Y *são espaços de Banach, tal que* $T : X \to Y$ *é um operador linear limitado e* $u : \Omega \to X$ *é uma função* μ*-integrável, então* $Tu : \Omega \to X$ *é* μ*-integrável e*

$$T\int_\Omega u\,d\mu = \int_\Omega Tu\,d\mu.$$

Em particular

$$\left\langle x, \int_\Omega u\,d\mu \right\rangle = \int_\Omega \langle x, u\rangle\,d\mu \qquad \forall x \in X'.$$

Prova: Ver Teorema 8 no Apêndice E em [16].

Teorema 1.2.29 (Representação de Riesz). *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e seja T um operador linear limitado definido sobre $L^p(\Omega)$. Então existe uma função u em $L^q(\Omega)$, $1/p+1/q=1$, tal que*

$$T(v) = \langle u, v\rangle \qquad \forall v \in L^p(\Omega).$$

Prova: Ver Teorema 3.6.1 em [15].

Teorema 1.2.30 (Lax-Milgram). *Seja $b : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então para cada $\phi \in H'$, existe um único $u \in H$ tal que*

$$b(u, v) = \langle \phi, v\rangle \qquad \forall v \in H.$$

Além disto, se b é simétrica, então u é caracterizado pela propriedade

$$u \in H \quad e \quad \frac{1}{2}b(u,u) - \langle \phi, u\rangle = \min_{v\in H}\left\{\frac{1}{2}b(v,v) - \langle \phi, v\rangle\right\}.$$

Prova: Ver Corolário V.8 em [14].

Teorema 1.2.31 (Fubini). *Suponha $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.*

Então para quase todo $x \in \Omega_1$,

$$F(x,\cdot) \in L^1(\Omega_2) \qquad e \qquad \int_{\Omega_2} F(x,y)\,dy \in L^1(\Omega_1).$$

Do mesmo modo, para quase todo $y \in \Omega_2$,

$$F(\cdot,y) \in L^1(\Omega_1) \qquad e \qquad \int_{\Omega_1} F(x,y)\,dx \in L^1(\Omega_2).$$

Prova: Ver Teorema IV.4 em [14].

Definição 1.2.32 (Equação de Volterra). *Dadas as funções $f(x)$ e $G(x,t)$, chama-se equação de Volterra de segundo tipo, uma equação da forma*

$$\varphi(t) = f(t) - \lambda \int_0^t G(t,s)\varphi(s)\,ds \tag{1.1}$$

em que φ é uma função incógnita e λ é um parâmetro real.

Teorema 1.2.33. *A equação integral de Volterra (1.1), onde o núcleo G e a função f pertencem a $L^2(0,T)$, possui uma única solução $\varphi \in L^2(0,T)$. E esta solução é dada pela fórmula*

$$\varphi(t) = f(t) - \lambda \int_0^t R(t,s;\lambda) f(s)\, ds$$

onde o núcleo resolvente $R(t,s;\lambda)$ é dado pela série de núcleos iterados

$$R(t,s;\lambda) = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu G_{\nu+1}(t,s).$$

que converge quase sempre, onde

$$G_1(t,s) = G(t,s), \quad G_{\nu+1} = \int_s^t G(t,\sigma) G_\nu(\sigma,s)\, d\sigma \quad \textit{para } \nu = 1,2,\ldots$$

Além disto, o núcleo resolvente satisfaz a equação integral

$$G(t,s) = -R(t,s;\lambda) + \lambda \int_s^t R(t,\sigma;\lambda) G(\sigma,s)\, ds.$$

Prova: Ver Seção 1.5 em [23].

Observação 1.2.34. *Para toda $\theta \in L^2(0,T)$, existe uma única solução φ para a equação*

$$\varphi(t) - \int_0^t g(t-s)\varphi(s)\, ds = \theta(t)$$

de modo que

$$\varphi(t) = \theta(t) - \int_0^t h(t-\sigma)\theta(\sigma)\, d\sigma$$

onde

$$h(t-\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n g_n(t-\sigma)$$

com

$$g_1(t) = g(t), \qquad g_{n+1}(t-\tau) = \int_\tau^t g_n(\sigma-\tau)\, d\sigma \quad \textit{para} \quad n \geqslant 1.$$

Além disso, g e h estão relacionadas da seguinte forma

$$g(t) = -h(t) + \int_0^t g(t-\sigma)h(\sigma)\, d\sigma. \tag{1.2}$$

Basta tomar $G(t,s) = g(t-s)$ no Teorema 1.2.33.

Capítulo 2

Solução Forte, Fraca e Ultra Fraca

Neste capítulo garantiremos a existência, unicidade e regularidade de soluções para o seguinte problema

$$\left|\begin{array}{lll} y_{tt}(x,t) - y_{xx}(x,t) + \displaystyle\int_0^t g(t-s) y_{xx}(x,s)\, ds = f(x,t) & \text{em} &]0,L[\times]0,T[\\ \qquad y(0,t)=0, \quad y(L,t)=0 & \text{em} &]0,T[\\ \qquad y(x,0)=y_0(x), \quad y_t(x,0)=y_1(x) & \text{em} &]0,L[. \end{array}\right. \tag{2.1}$$

onde $g \in C^2[0,+\infty[$ é tal que $g : [0,+\infty[\to]0,+\infty[$ e verifica as seguintes condições

$$-C_1 g \leqslant g' \leqslant -C_2 g \tag{2.2}$$

$$\beta_0 := 1 - \int_0^\infty g(s)\, ds > 0 \tag{2.3}$$

$$0 \leqslant g'' \leqslant C_3 g \tag{2.4}$$

onde C_1, C_2 e C_3 são constantes positivas.

Dependendo da regularidade dos dados y_0, y_1 e f obteremos a solução forte, fraca ou ultra fraca para o problema (2.1), que serão definidas nas próximas seções.

Os resultados deste capítulo serão essenciais para o desenvolvimento do próximo capítulo onde será aplicado o Método da Unicidade de Hilbert para estabelecer a controlabilidade exata de fronteira.

2.1 Solução Forte para Equação Viscoelástica

Nesta seção mostraremos a existência, unicidade e regularidade de solução forte do problema (2.1) que é obtida quando $y_0 \in H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$, $y_1 \in H_0^1(0,L)$ e $f \in L^1(0,L;H_0^1(0,L))$. Iniciamos esta seção com a seguinte definição.

Definição 2.1.1 (Solução Forte). *Uma função $y\colon]0,L[\times]0,T[\to \mathbb{R}$ é dita **solução forte** para o problema (2.1) se*

$$y \in L^\infty(0,T;H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)) \tag{2.5}$$

$$y_t \in L^\infty(0,T;H_0^1(0,L)) \tag{2.6}$$

$$y_{tt} \in L^1(0,T;L^2(0,L)) \tag{2.7}$$

$$y_{tt} - y_{xx} + g * y_{xx} = f \quad q.s \quad em \ ]0,L[\times]0,T[\tag{2.8}$$

$$y(x,0) = y_0(x) \quad e \quad y_t(x,0) = y_1(x). \tag{2.9}$$

Teorema 2.1.2. *Se $y_0 \in H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$, $y_1 \in H_0^1(0,L)$ e $f \in L^1(0,T;H_0^1(0,L))$, então existe uma única solução forte para o problema (2.1).*

Prova: Para mostrar a existência utilizaremos o Método de Galerkin. Para isto tomemos $(w_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ e $(\lambda_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, os respectivos autovetores e autovalores do problema espectral

$$((w_j,v)) = \lambda_j(w_j,v) \qquad \text{para todo} \ \ v \in H_0^1(0,L) \tag{2.10}$$

onde $((\cdot,\cdot))$ e $(\cdot,\cdot)$ denotam os produtos internos em $H_0^1(0,L)$ e em $L^2(0,L)$ respectivamente, e seja $V_m = [w_1,w_2,\ldots,w_m]$ o subespaço de $H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$ gerado pelos m-primeiros autovetores w_ν, $\nu = 1,2,\ldots,m$.

O *problema aproximado* consiste em determinar a existência de uma solução $y^m \in V_m$ de modo que para todo $j = 1,\ldots,m$

$$\int_0^L y_{tt}^m w_j\,dx + \int_0^L y_x^m w_{j,x}\,dx - \int_0^L\int_0^t g(t-s)y_x^m(x,s)w_{j,x}\,dsdx = \int_0^L f w_j\,dx \tag{2.11}$$

com dados iniciais

$$y^m(x,0) = y_0^m(x) \qquad \text{e} \qquad y_t^m(x,0) = y_1^m(x)$$

onde

$$y_0^m \to y_0 \quad \text{em} \quad H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L),$$

$$y_1^m \to y_1 \quad \text{em} \quad H_0^1(0,L),$$

e

$$y^m(0,t) = 0 = y^m(L,t) \quad \text{em} \quad]0,T[.$$

Como $y^m \in V_m$, observamos que

$$y^m = \sum_{i=1}^{m} h_i w_i \tag{2.12}$$

onde $h_i = h_i(t)$. Substituindo (2.12) em (2.11) temos

$$\int_0^L \sum_{i=1}^{m} h_i'' w_i w_j \, dx + \int_0^L \sum_{i=1}^{m} h_i w_{i,x} w_{j,x} \, dx$$

$$- \int_0^L \int_0^t g(t-s) \sum_{i=1}^{m} h_i(s) w_{i,x}(x) w_{j,x}(x) \, ds dx = \int_0^L f w_j \, dx$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^{m} h_i'' \left(w_i, w_j\right) + \sum_{i=1}^{m} h_i \left(\left(w_i, w_j\right)\right) - \sum_{i=1}^{m} \left(\left(w_i, w_j\right)\right) \int_0^t g(t-s) h_i(s) \, ds = (f, w_j)$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{m} h_i'' \left(w_i, w_j\right) + \sum_{i=1}^{m} h_i \left(\left(w_i, w_j\right)\right) - \sum_{i=1}^{m} \left(\left(w_i, w_j\right)\right) g * h_i = (f, w_j) \tag{2.13}$$

para $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Tomando as matrizes

$$\mathbf{a} = (a_{ij})_{m \times m}, \quad \text{com} \quad a_{ij} = (w_i, w_j)$$

$$\mathbf{b} = (b_{ij})_{m \times m}, \quad \text{com} \quad b_{ij} = ((w_i, w_j))$$

$$\mathbf{c} = (c_{ij})_{m \times 1}, \quad \text{com} \quad c_j = (f, w_j)$$

$$H(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ \vdots \\ h_m(t) \end{pmatrix}, \quad G(t) = \begin{pmatrix} (g * h_1)(t) \\ \vdots \\ (g * h_m)(t) \end{pmatrix}$$

podemos reescrever (2.13) em termos matriciais da seguinte forma

$$\mathbf{a}H''(t) + \mathbf{b}H(t) - \mathbf{b}\left(g * H\right)(t) = \mathbf{c}(t) \tag{2.14}$$

com condições iniciais

$$H_0 = H(0) = \begin{pmatrix} h_1(0) \\ \vdots \\ h_m(0) \end{pmatrix}, \qquad H_1 = H'(0) = \begin{pmatrix} h_1'(0) \\ \vdots \\ h_m'(0) \end{pmatrix}.$$

Pelo Método do Resolvente de Volterra, veja [24], obtemos a existência de solução local em t para a equação (2.14), e consequentemente temos a existência de solução para o problema aproximado (2.11).

Etapa 1: Primeira Estimativa à Priori

Para estender esta solução para todo $[0, +\infty)$ é suficiente mostrar que a solução aproximada permanece limitada para qualquer $m \in \mathbb{N}$ e qualquer $t \in]0, T[$. Para isto multipliquemos (2.11) por $h_i'(t)$ e somando de $i = 1$ a m temos:

$$\int_0^L y_{tt}^m y_t^m \, dx + \int_0^L y_x^m y_{tx}^m \, dx - \int_0^L \left(g * y_x^m\right) y_{tx}^m \, dx = \int_0^L f y_t^m \, dx. \tag{2.15}$$

Pelo Lema 1.2.20 temos que

$$\left(g * y_x^m\right) y_{tx}^m = \frac{1}{2} g' \Box y_x^m - \frac{1}{2} g(t) |y_x^m|^2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[g \Box y_x^m - \left(\int_0^t g \, ds \right) |y_x^m|^2 \right] \tag{2.16}$$

substituindo (2.16) em (2.15) segue que

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_0^L |y_t^m|^2 + \beta(t) |y_x^m|^2 + g \Box y_x^m \, dx \right] - \frac{1}{2} \int_0^L g' \Box y_x^m \, dx \\ + \frac{1}{2} \int_0^L g(t) |y_x^m|^2 \, dx = \int_0^L f y_t^m \, dx, \end{gathered} \tag{2.17}$$

onde $\beta(t) = 1 - \displaystyle\int_0^t g(s) \, ds$.

Considere o funcional energia

$$E(t, y^m) = \int_0^L |y_t^m|^2 + \beta(t) |y_x^m|^2 + g \Box y_x^m \, dx.$$

Então de (2.17) temos

$$\frac{d}{dt}E(t,y^m) - \int_0^L g'\Box y_x^m\,dx + \int_0^L g(t)|y_x^m|^2\,dx = 2\int_0^L f y_t^m\,dx.$$

Integrando de 0 a t segue que

$$E(t,y^m) - \int_0^t\int_0^L g'\Box y_x^m\,dxds + \int_0^t\int_0^L g(t)|y_x^m|^2\,dxds = E(0,y^m) + 2\int_0^t\int_0^L f y_t^m\,dxds.$$

Observando que

$$\begin{aligned}
2\left(f(s), y_t(s)\right) &\leqslant 2\left\|f(\cdot,s)\right\|_{L^2(0,L)}\left\|y_t(\cdot,s)\right\|_{L^2(0,L)}\\
&= 2\sqrt{\left\|f(\cdot,s)\right\|_{L^2(0,L)}}\sqrt{\left\|f(\cdot,s)\right\|_{L^2(0,L)}}\left\|y_t(\cdot,s)\right\|_{L^2(0,L)}\\
&\leqslant \left\|f(\cdot,s)\right\|_{L^2(0,L)} + \left\|f(\cdot,s)\right\|_{L^2(0,L)}\left\|y_t(\cdot,s)\right\|_{L^2(0,L)}^2
\end{aligned}$$

e $g'(t) < 0$ então

$$\begin{aligned}
E(t,y^m) &\leqslant E(0,y^m) + \int_0^T \left\|f(\cdot,s)\right\|_{L^2(0,L)}\,ds + \int_0^t \left\|f(\cdot,s)\right\|_{L^2(0,L)}\left\|y_t^m(\cdot,s\right\|^2\,dxds\\
&\leqslant E(0,y^m) + \int_0^T \left\|f(\cdot,s)\right\|_{L^2(0,L)}\,ds + \int_0^t \left\|f(\cdot,s)\right\|_{L^2(0,L)} E(s,y^m)ds.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall temos

$$E(t,y^m) \leqslant \left(E(0,y^m) + \int_0^T \left\|f(\cdot,s)\right\|_{L^2(0,L)}\,ds\right) e^{\int_0^T \left\|f(\cdot,s)\right\|_{L^2(0,L)}\,ds}.$$

ou seja,

$$\|y_t^m(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}^2 + \|y_x^m(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}^2 \leqslant C\left(\|y_1^m\|_{L^2(0,L)}^2 + \left\|y_{0,x}^m\right\|_{L^2(0,L)}^2 + \int_0^T \left\|f(\cdot,s)\right\|_{L^2(0,L)}\,ds\right).$$

Como $y_0^m \to y_0$ em $H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)$, $y_1^m \to y_1$ em $H_0^1(0,L)$ e $f \in L^1(0,T;H_0^1(0,L))$ temos que

$$\left(y_t^m\right)_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty\left(0,T;L^2(0,L)\right) \tag{2.18}$$

$$\left(y_x^m\right)_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T,L^2(0,L)). \tag{2.19}$$

Etapa 2: Segunda Estimativa à Priori

Com a primeira estimativa, obtivemos limitação para as sequências $(y_t^m)_{m\in\mathbb{N}}$ e $(y_x^m)_{m\in\mathbb{N}}$. Nosso objetivo agora é obter limitação para $(y_{tx}^m)_{m\in\mathbb{N}}$ e $(y_{xx}^m)_{m\in\mathbb{N}}$.

Multiplicando (2.11) por λ_j e usando 2.10 temos

$$((y_{tt}^m, w_j)) + ((y_x^m, w_{j,x})) - ((g * y_x^m, w_{j,x})) = ((f, w_j)). \tag{2.20}$$

Multiplicando (2.20) por $h_j'(t)$ e somando de $j = 1$ a m temos

$$((y_{tt}^m, y_t^m)) + ((y_x^m, y_{tx}^m)) - ((g * y_x^m, y_{tx}^m)) = ((f, y_t^m))$$

ou seja

$$\int_0^L y_{ttx}^m y_{tx}^m \, dx + \int_0^L y_{xx}^m y_{txx}^m \, dx - \int_0^L (g * y_{xx}^m) y_{txx}^m \, dx = \int_0^L f_x y_{tx}^m \, dx. \tag{2.21}$$

Do Lema 1.2.20 temos que

$$(g * y_{xx}^m) y_{txx}^m = \frac{1}{2} g' \Box y_{xx}^m - \frac{1}{2} g(t) |y_{xx}^m|^2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[g \Box y_{xx}^m - \left(\int_0^t g \, ds \right) |y_{xx}^m|^2 \right]. \tag{2.22}$$

Substituindo (2.22) em (2.21) obtemos

$$\begin{gathered} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_0^L |y_{tx}^m|^2 + \beta(t) |y_{xx}^m|^2 + g \Box y_{xx}^m \, dx \right] - \frac{1}{2} \int_0^L g' \Box y_{xx}^m \, dx \\ + \frac{1}{2} \int_0^L g(t) |y_{xx}^m|^2 \, dx = \int_0^L f_x y_{tx}^m \, dx. \end{gathered}$$

Denotando por

$$E(t, y_x^m) = \int_0^L |y_{tx}^m|^2 + \beta(t) |y_{xx}^m|^2 + g \Box y_{xx}^m \, dx$$

temos

$$\frac{d}{dt} E(t, y_x^m) - \int_0^L g' \Box y_{xx}^m \, dx + \int_0^L g(s) |y_{xx}^m|^2 \, dx = 2 \int_0^L f_x y_{tx}^m \, dx.$$

Integrando de 0 a t temos

$$E(t, y_x^m) - E(0, y_x^m) - \int_0^t \int_0^L g' \Box y_{xx}^m \, dx ds + \int_0^t \int_0^L g(s) |y_{xx}^m|^2 \, dx ds = 2 \int_0^t \int_0^L f_x y_{tx}^m \, dx ds \tag{2.23}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
E(t,y_x^m) &\leqslant E(0,y_x^m)+2\int_0^t\int_0^L f_x y_{tx}^m\,dxds\\
&\leqslant E(0,y_x^m)+\int_0^T\|f_x(\cdot,s)\|_{L^2(0,L)}\,ds+\int_0^t\|f_x(\cdot,s)\|_{L^2(0,L)}\,\|y_{tx}^m(\cdot,s)\|_{L^2(0,L)}^2\,dxds\\
&\leqslant E(0,y_x^m)+\int_0^T\|f_x(\cdot,s)\|_{L^2(0,L)}\,ds+\int_0^t\|f_x(\cdot,s)\|_{L^2(0,L)}\,E(s,y_x^m)ds.
\end{aligned}$$

Da desigualdade de Gronwall segue que

$$E(t,y_x^m)\leqslant e^{\int_0^T\|f_x(\cdot,s)\|_{L^2(0,L)}\,ds}\left(E(0,y_x^m)+\int_0^T\|f_x(\cdot,s)\|_{L^2(0,L)}\,ds\right).$$

Como $f\in L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)$ segue em particular que existe $C>0$ tal que

$$\begin{gathered}
\|y_{tx}^m(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}^2+\|y_{xx}^m(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}^2\leqslant\\
C\left(\left\|y_{1,x}^m\right\|_{L^2(0,L)}^2+\left\|y_{0,xx}^m\right\|_{L^2(0,L)}^2+\int_0^T\|f_x(\cdot,s)\|_{L^2(0,L)}\,ds\right)
\end{gathered}\tag{2.24}$$

e de $y_0^m\to y_0$ em $H^2(0,L)\cap H_0^1(0,L)$ e $y_1^m\to y_1$ em $H_0^1(0,L)$ temos que

$$(y_{tx}^m)_{m\in\mathbb{N}}\quad \text{é limitada em}\quad L^\infty\left(0,T;L^2(0,L)\right),\tag{2.25}$$

$$(y_{xx}^m)_{m\in\mathbb{N}}\quad \text{é limitada em}\quad L^\infty\left(0,T;L^2(0,L)\right).\tag{2.26}$$

Como $L^\infty\left(0,T;L^2(0,L)\right)=\left(L^1\left(0,T;L^2(0,L)\right)\right)'$ e $L^1\left(0,T;L^2(0,L)\right)$ é separável, existe uma subsequência $(y^\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ de $(y^m)_{m\in\mathbb{N}}$, e $\hat{y}$, $\overline{y}$, $\overline{\overline{y}}$ em $L^\infty\left(0,T;L^2(0,L)\right)$ tal que

$$\begin{aligned}
y^\mu &\overset{*}{\rightharpoonup} y \quad \text{em}\quad L^\infty\left(0,T;L^2(0,L)\right),\\
y_t^\mu &\overset{*}{\rightharpoonup} \hat{y} \quad \text{em}\quad L^\infty\left(0,T;L^2(0,L)\right),\\
y_x^\mu &\overset{*}{\rightharpoonup} \overline{y} \quad \text{em}\quad L^\infty\left(0,T;L^2(0,L)\right),\\
y_{xx}^\mu &\overset{*}{\rightharpoonup} \overline{\overline{y}} \quad \text{em}\quad L^\infty\left(0,T;L^2(0,L)\right).
\end{aligned}$$

Observando que $L^\infty\left(0,T;L^2(0,L)\right)\hookrightarrow L^2\left(0,T;L^2(0,L)\right)=L^2\left(Q\right)\hookrightarrow\mathcal{D}'(Q)$, das convergências acimas segue que

$$y^\mu\rightharpoonup y\quad \text{em}\quad \mathcal{D}'(Q),$$

$$y_t^\mu\rightharpoonup \hat{y}\quad \text{em}\quad \mathcal{D}'(Q),$$

$$y_x^\mu \rightharpoonup \overline{y} \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(Q),$$

$$y_{xx}^\mu \rightharpoonup \overline{\overline{y}} \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(Q).$$

Usando o fato que o operador derivação $\dfrac{d}{dt}$ é contínuo em $\mathcal{D}'(Q)$ então

$$\frac{d}{dt}y^\mu \to \frac{d}{dt}y \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(Q)$$

e pela unicidade do limite temos que $\hat{y} = y_t$. De modo análogo concluímos que

$$y^\mu \overset{*}{\rightharpoonup} y \quad \text{em} \quad L^\infty\left(0,T;L^2(0,L)\right), \tag{2.27}$$

$$y_t^\mu \overset{*}{\rightharpoonup} y_t \quad \text{em} \quad L^\infty\left(0,T;L^2(0,L)\right), \tag{2.28}$$

$$y_x^\mu \overset{*}{\rightharpoonup} y_x \quad \text{em} \quad L^\infty\left(0,T;L^2(0,L)\right), \tag{2.29}$$

$$y_{xx}^\mu \overset{*}{\rightharpoonup} y_{xx} \quad \text{em} \quad L^\infty\left(0,T;L^2(0,L)\right). \tag{2.30}$$

Etapa 3: Passagem ao limite

De (2.28) segue que

$$\int_0^T (y_t^\mu(t),\omega(t))\,dt \to \int_0^T (y_t(t),\omega(t))\,dt, \qquad \forall\omega \in L^1\left(0,T;L^2(0,L)\right).$$

Tomando $\omega = v\theta$ onde $v \in H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T) \hookrightarrow L^1(0,T)$, então

$$\int_0^T (y_t^\mu(t),v)\,\theta(t)\,dt \to \int_0^T (y_t(t),v)\,\theta(t)\,dt.$$

Portanto $(y_t^\mu(t),v) \rightharpoonup (y_t(t),v)$ em $\mathcal{D}'(0,T)$, para todo $v \in H_0^1(0,L)$. Consequentemente

$$\frac{d}{dt}\left(y_t^\mu(t),v\right) \rightharpoonup \frac{d}{dt}\left(y_t(t),v\right) \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,T),\ \forall v \in H_0^1(0,L)$$

ou seja,

$$(y_{tt}^\mu(t),v) \rightharpoonup (y_{tt}(t),v) \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,T),\ \forall v \in H_0^1(0,L). \tag{2.31}$$

De modo análogo, de (2.30) temos que $y_{xx}^\mu \overset{*}{\rightharpoonup} y_{xx}$ em $L^\infty\left(0,T;L^2(0,L)\right)$.

Assim para $\omega = v\theta$ com $v \in H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T) \hookrightarrow L^1(0,T)$, temos que

$$\int_0^T (y_{xx}^\mu(t),v)\,\theta(t)\,dt \to \int_0^T (y_{xx}(t),v)\,\theta(t)\,dt.$$

Logo $(y^{\mu}_{xx}(t),v) \rightharpoonup (y^{\mu}_{xx}(t),v)$ em $\mathcal{D}'(0,T)$, para todo $v \in H^1_0(0,L)$.

Observe que, por meio da integração por partes tem-se que

$$(y^{\mu}_{xx}(t),v) = -\left((y^{\mu}(t),v)\right).$$

Assim obtemos

$$((y^{\mu}(t),v)) \rightharpoonup ((y(t),v)) \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,T),\, \forall v \in H^1_0(0,L). \tag{2.32}$$

Verifiquemos agora a convergência do termo da convolução em (2.20). De (2.25) e (2.26) temos, respectivamente, que

$$y_{xx} \in L^{\infty}\left(0,T;L^2(0,L)\right) \hookrightarrow L^2\left(0,T;L^2(0,L)\right)$$

$$y_{tx} \in L^{\infty}\left(0,T;L^2(0,L)\right) \hookrightarrow L^2\left(0,T;L^2(0,L)\right).$$

Como $H^1_0(0,L) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L)$, segue do Teorema de Aubin-Lions que existe uma subsequência $(y^{\mu}_x)_{\mu\in\mathbb{N}}$ de $(y^m_x)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$y^{\mu}_x \to y_x \text{ em } L^2\left(0,T;L^2(0,L)\right) = L^2(Q),$$

isto é, $y^{\mu}_x \to y_x$ quase sempre em Q.

Sendo assim temos que $g * y^{\mu}_x \to g * y_x$ quase sempre pois

$$g * y^{\mu}_x(x,t) - g * y_x(x,t) = \int_0^t g(t-s)\left(y^{\mu}_x(x,s) - y_x(x,s)\right) ds \overset{\mu\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad q.s.$$

Note que $(g * y^{\mu}_x)_{\mu\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(Q)$, pois

$$\begin{aligned} |(g * y^{\mu}_x)(x,t)|^2 &= \left|\int_0^t g(t-s) y^{\mu}_x(x,s)\, ds\right|^2 \\ &\leqslant \int_0^t |g(t-s)|^2\, ds \int_0^t \left|y^{\mu}_x(x,s)\right|^2\, ds \\ &\leqslant \int_0^T |g(t-s)|^2\, ds \int_0^T \left|y^{\mu}_x(x,s)\right|^2\, ds \\ &\leqslant c_T \int_0^T \left|y^{\mu}_x(x,s)\right|^2\, ds. \end{aligned}$$

Logo

$$\int_0^L |(g * y^{\mu}_x)(x,t)|^2\, dx \leqslant c_T \int_0^L \int_0^T \left|y^{\mu}_x(x,s)\right|^2\, ds = c_T \int_0^T \int_0^L \left|y^{\mu}_x(x,s)\right|^2\, ds$$

e então

$$\|(g * y_x^\mu)(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}^2 \leqslant c_T \int_0^T \|y_x^\mu(\cdot,s)\|_{L^2(0,L)}^2 \, ds = c_T \, \|y_x^\mu\|_{L^2(Q)}^2 = c_T K < \infty.$$

Com isto temos

$$\int_0^T \|(g * y_x^\mu)(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}^2 \, dt \leqslant c_T K T.$$

Portanto $\|g * y_x^\mu\|_{L^2(Q)} \leqslant C$, $C = C(T)$, ou seja $(g * y^\mu)$ é limitada em $L^2(Q)$.

Assim pelo Lema de Lions tem-se que $g * y_x^\mu \rightharpoonup g * y_x$ em $L^2(Q)$, ou seja,

$$(g * y_x^\mu, \omega) \to (g * y_x, \omega), \qquad \forall \omega \in L^2(Q).$$

Em particular para $\omega = v_x \theta$, onde $v \in H_0^1(0,L)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, temos

$$\int_0^T (g * y_x^\mu(t), v_x)\, \theta(t)\, dt \to \int_0^T (g * y_x(t), v_x)\, \theta(t)\, dt.$$

Portanto obtemos

$$((g * y^\mu(t), v)) \rightharpoonup ((g * y(t), v)) \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,T),\ \forall\, v \in H_0^1(0,L). \tag{2.33}$$

Multiplicando (2.11) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, tomando $m = \mu$ e integrando de 0 a T temos

$$\begin{aligned} \int_0^T (y_{tt}^\mu(t), w_j)\, \theta(t)\, dt - \int_0^T ((y^\mu(t), w_j))\, \theta(t)\, dt + \int_0^T ((g * y^\mu(t), w_j))\, \theta(t)\, dt \\ = \int_0^T (f(t), w_j)\, \theta(t)\, dt \end{aligned} \tag{2.34}$$

fazendo $\mu \to \infty$ obtemos de (2.31), (2.32) e (2.33) a seguinte identidade

$$\begin{aligned} \int_0^T (y_{tt}(t), w_j)\, \theta(t)\, dt - \int_0^T ((y(t), w_j))\, \theta(t)\, dt + \int_0^T ((g * y(t), w_j))\, \theta\, dt \\ = \int_0^T (f(t), w_j)\, \theta(t)\, dt \end{aligned} \tag{2.35}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Por ser $(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma base $H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$, temos que (2.35) é válido para qualquer $w \in H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{d}{dt} (y_t(t), w)\, \theta(t)\, dt + \int_0^T ((y(t), w))\, \theta(t)\, dt - \int_0^T ((g * y(t), w))\, \theta(t)\, dt \\ = \int_0^T (f(t), w)\, \theta(t)\, dt \end{aligned}$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$.

Integrando por partes temos

$$-\int_0^T (y_t(t),w)\,\theta_t(t)\,dt - \int_0^T (y_{xx}(t),w)\,\theta(t)\,dt + \int_0^T (g * y_{xx}(t),w)\,\theta(t)\,dt = \int_0^T (f(t),w)\,\theta(t)\,dt.$$

Em particular, para $w \in \mathcal{D}(0,L)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ segue que

$$-\int_0^T\int_0^L y_t w\theta_t\,dxdt - \int_0^T\int_0^L y_{xx}w\theta\,dxdt + \int_0^T\int_0^L g * y_{xx}w\theta\,dxdt = \int_0^T\int_0^L fw\theta\,dxdt,$$

tomando $\psi = w\theta$ podemos reescrever a equação anterior como

$$-\langle y_t,\psi_t\rangle = -\int_Q y_t\psi_t\,dxdt = \int_Q y_{xx}\psi\,dxdt - \int_Q g * y_{xx}\psi\,dxdt + \int_Q f\psi\,dxdt \quad \forall\psi \in \mathcal{D}(Q)$$

ou seja,

$$\langle y_{tt},\psi\rangle = \int_Q (y_{xx} - g * y_{xx} + f)\,\psi\,dxdt, \qquad \forall\psi \in \mathcal{D}(Q).$$

Como

$$y_{xx} \in L^\infty\left(0,T;L^2(0,L)\right) \hookrightarrow L^1\left(0,T;L^2(0,L)\right),$$

$$g * y_{xx} \in L^\infty\left(0,T;L^2(0,L)\right) \hookrightarrow L^1\left(0,T;L^2(0,L)\right),$$

$$f \in L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right) \hookrightarrow L^1\left(0,T;L^2(0,L)\right),$$

então $y_{xx} - g*y_{xx} + f \in L^1\left(0,T;L^2(0,L)\right)$. Logo $y_{tt} \simeq y_{xx} - g*y_{xx} + f \in L^1\left(0,T;L^2(0,L)\right.$, ou seja, y_{tt} identifica-se como uma função de $L^1(0,T;L^2(0,L))$ que ainda representaremos por y_{tt}. Logo

$$\int_Q (y_{tt} - y_{xx} + g * y_{xx} - f)\,\psi\,dxdt = 0, \qquad \forall\psi \in \mathcal{D}(Q).$$

Assim, pelo Lema de Du Bois Raymond $y_{tt} - y_{xx} + g * y_{xx} - f = 0$ q.s em Q.

Etapa 4: Unicidade

Para provar a unicidade, suponhamos que y e $\tilde{y}$ sejam duas soluções do problema (2.1). Assim, $Y = y - \tilde{y}$ é solução de

$$\left| \begin{array}{lcl} Y_{tt} - Y_{xx} + g * Y_{xx} = 0 & \text{q.s em} &]0, L[\times]0, T[, \\ Y(0,t) = Y(L,t) = 0 & \text{em} &]0, T[, \\ Y(x,0) = Y_t(x,0) = 0 & \text{em} &]0, L[. \end{array} \right. \tag{2.36}$$

Multiplicando $(2.36)_1$ por $Y_t \in L^\infty(0,T; H_0^1(0,L))$ e integrando, obtemos

$$\int_0^L Y_{tt} Y_t \, dx - \int_0^L Y_{xx} Y_t + \int_0^L (g * Y_{xx}) \, Y_t \, dx = 0.$$

Consequentemente

$$\frac{d}{dt} E(t, Y) \leqslant 0.$$

Integrando de 0 a $t \leqslant T$, obtemos

$$E(t, Y) \leqslant E(0, Y) = 0$$

ou seja, $Y_t = 0$ e $Y_x = 0$ quase sempre em $]0, L[\times]0, T[$, o que implica $Y =$ cte quase sempre em $]0, L[\times]0, T[$. Usando que $Y(0,t) = Y(L,t) = 0$ segue que $Y(x,t) = 0$ quase sempre em $]0, L[\times]0, T[$. Portanto $y = \tilde{y}$ quase sempre em $]0, L[\times]0, T[$, o que concluí a demonstração. ■

O próximo resultado está relacionado com a solução forte do problema (2.1).

Teorema 2.1.3 (Inequação de Energia). *Se $y = y(x,t)$ é uma solução forte do problema (2.1), então vale a seguinte inequação de energia*

$$\begin{aligned} &\|y_{xt}(\cdot, t)\|_{L^2(0,L)}^2 + \beta_0 \|y_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(0,L)}^2 \\ &\leqslant \|y_{1,x}\|_{L^2(0,L)}^2 + \|y_{0,xx}\|_{L^2(0,L)}^2 + 2 \int_0^t (f_x(s), y_{xt}(s)) \, ds. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Prova: Procedendo de modo análogo a segunda estimativa a priori, e usando (2.10) temos

$$\begin{aligned} &\|y_{xt}^m(\cdot, t)\|_{L^2(0,L)}^2 + \beta(t) \|y_{xx}^m(\cdot, t)\|_{L^2(0,L)}^2 + g \square y_{xx}^m \\ &\leqslant \left\|y_{1,x}^m\right\|_{L^2(0,L)}^2 + \left\|y_{0,xx}^m\right\|_{L^2(0,L)}^2 + 2 \int_0^t (f_x(s), y_{xt}^m(s)) \, ds. \end{aligned}$$

Observando que $\beta_0 \leqslant \beta(t) \leqslant 1$ temos

$$\begin{aligned} &\|y_{xt}^m(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}^2 + \beta_0 \|y_{xx}^m(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}^2 \\ &\leqslant \left\|y_{1,x}^m\right\|_{L^2(0,L)}^2 + \left\|y_{0,xx}^m\right\|_{L^2(0,L)}^2 + 2\int_0^t (f_x(s), y_{xt}^m(s))\, ds, \end{aligned} \tag{2.38}$$

tomando $m = \mu$ e multiplicando (2.38) por uma função degrau $\zeta > 0$ em $]0,T[$ e integrando de 0 a T temos

$$\begin{aligned} &\int_0^T \|y_{xt}^\mu(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}^2 \zeta(t)\, dt + \beta_0 \int_0^T \|y_{xx}^\mu(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}^2 \zeta(t)\, dt \\ \leqslant &\int_0^T \left\|y_{1,x}^\mu\right\|_{L^2(0,L)}^2 \zeta(t)\, dt + \int_0^T \left\|y_{0,xx}^\mu\right\|_{L^2(0,L)}^2 \zeta(t)\, dt + 2\int_0^T \zeta(t) \int_0^t (f_x(s), y_{xt}^\mu(s))\, dsdt \end{aligned} \tag{2.39}$$

Usando a semicontinuidade inferior da norma com respeito a convergência fraca, obtemos

$$\int_0^T \|y_{xt}(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}^2 \zeta(t)\, dt \leqslant \liminf_{\mu\to\infty} \int_0^T \|y_{xt}^\mu(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}^2 \zeta(t)\, dt \tag{2.40}$$

$$\int_0^T \|y_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}^2 \zeta(t)\, dt \leqslant \liminf_{\mu\to\infty} \int_0^T \|y_{xx}^\mu(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}^2 \zeta(t)\, dt. \tag{2.41}$$

Tomando o limite inferior em ambos os lados de (2.39), considerando (2.40) e (2.41) e observando que

$$\liminf u + \liminf v \leqslant \liminf (u+v)$$

segue que

$$\begin{aligned} &\int_0^T \|y_{xt}(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}^2 \zeta(t)\, dt + \beta_0 \int_0^T \|y_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}^2 \zeta(t)\, dt \leqslant \\ \leqslant &\int_0^T \|y_{1,x}\|_{L^2(0,L)}^2 \zeta(t)\, dt + \int_0^T \|y_{0,xx}\|_{L^2(0,L)}^2 \zeta(t)\, dt + 2\int_0^T \int_0^t (f_x(s), y_{xt}(s))\, \zeta(t)\, dsdt. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Observe que os integrandos são $L^1(0,T)$. Se $s \in]0,T[$, considere a função degrau $\zeta_h(t) = \zeta(t)$ sobre $]s-h, s+h[\subset]0,T[$ e zero no complementar. Substituindo $\zeta(t)$ por $\zeta_h(t)$ em (2.42), dividindo ambos os lados por $\frac{1}{2h}$ e tomando o limite quando $h \to 0$ obtemos da Observação 1.2.22

$$\|y_{xt}(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}^2 + \beta_0 \|y_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}^2 \leqslant \|y_{1,x}\|_{L^2(0,L)}^2 + \|y_{0,xx}\|_{L^2(0,L)}^2 + 2\int_0^t (f_x(s), y_{xt}(s))\, ds.$$

pois $\zeta(t) > 0$. ■

Como consequência temos o seguinte corolário.

Corolário 2.1.4. *Se $y = y(x,t)$ é uma solução forte de (2.1) então*

$$\|y_{xt}(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)} + \|y_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)} \leqslant C\left(\|y_{1,x}\|_{L^2(0,L)} + \|y_{0,xx}\|_{L^2(0,L)} + \|f\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}\right)$$

para todo $t \in [0,T]$.

Prova: Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade do Teorema 2.1.3 observando que $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2) \leqslant 2(a+b)^2$, para $a, b \geqslant 0$, temos

$$\left(\|y_{xt}(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)} + \sqrt{\beta_0}\,\|y_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\right)^2 \leqslant a^2 + 2\int_0^t 2\,\|f_x(\cdot,s)\|_{L^2(0,L)}\,\|y_{xt}(\cdot,s)\|_{L^2(0,L)}\,ds$$

onde $a = \sqrt{2}\left(\|y_{1,x}\|_{L^2(0,L)} + \|y_{0,xx}\|_{L^2(0,L)}\right)$.

Usando o Lema 1.2.7 segue que

$$\begin{aligned}\|y_{xt}(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)} + \sqrt{\beta_0}\,\|y_{xx}(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)} \;&\leqslant\; \sqrt{2}\left(\|y_{1,x}\|_{L^2(0,L)} + \|y_{0,xx}\|_{L^2(0,L)}\right)\\ &\quad +2\int_0^t \|f_x(\cdot,s)\|_{L^2(0,L)}\,ds.\end{aligned}$$

Tomando $c = \min\{1, \sqrt{\beta_0}\}$ e $C = 2/c$ segue a tese. ■

Corolário 2.1.5. *Se $y = y(x,t)$ é uma solução forte de (2.1) então*

$$\|y_{xt}(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)} + \|y_{xx}(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)} \leqslant C\left(\|y_{1,x}\|^2_{L^2(0,L)} + \|y_{0,xx}\|^2_{L^2(0,L)} + \|f\|^2_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}\right).$$

Prova: Elevando ao quadrado ambos membros da desigualdade do Corolário 2.1.4 e usando a desigualdade $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2) \leqslant 2(a+b)^2$ concluí-se a demonstração. ■

Corolário 2.1.6. *Se $y = y(x,t)$ é solução forte de* (2.1) *então*

$$\|(y_{xx} - g * y_{xx})(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)} \leqslant C\left(\|y_{1,x}\|^2_{L^2(0,L)} + \|y_{0,xx}\|^2_{L^2(0,L)} + \|f\|^2_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}\right).$$

Prova: Observe que

$$\begin{aligned}|(y_{xx} - g * y_{xx})(x,t)|^2 \;&\leqslant\; 2\,|y_{xx}(x,t)|^2 + 2\,|g * y_{xx}(x,t)|^2\\ &\leqslant\; 2\,|y_{xx}(x,t)|^2 + 2\left|\int_0^t g(t-s)y_{xx}(x,s)\,ds\right|^2\\ &\leqslant\; 2\,|y_{xx}(x,t)|^2 + 2\int_0^t g|(t-s)|^2\,ds\int_0^t |y_{xx}(\cdot,s)|^2\,ds\\ &\leqslant\; 2\,|y_{xx}(x,t)|^2 + 2K\int_0^T |y_{xx}(\cdot,s)|^2\,ds\end{aligned}$$

onde $K = \int_0^T |g(t-s)|^2\, ds$. Integrando em $[0, L]$ e usando o Teorema de Fubini obtemos

$$\|(y_{xx} - g * y_{xx})(\cdot, t)\|_{L^2(0,L)}^2\, dx \leqslant 2\, \|y_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(0,L)}^2 + 2 \int_0^T \|y_{xx}(\cdot, s)\|_{L^2(0,L)}^2\, ds.$$

Usando o Corolário 2.1.5 concluí-se a demostração. ■

2.1.1 Regularidade da solução forte

Agora, demonstraremos que a solução forte dada pelo Teorema 2.1.2 é contínua e diferenciável com respeito a variável temporal conforme o próximo Teorema.

Teorema 2.1.7. *Se $y = y(x,t)$ é uma solução forte para (2.1), então*

$$y \in C^0\left([0,T]; H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)\right) \cap C^1\left([0,T]; H_0^1(0,L)\right).$$

Prova: Mostraremos que sequência $(y^\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ determinada por (2.11) é uma sequência de Cauchy em

$$C^0\left([0,T]\,; H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)\right) \cap C^1\left([0,T]; H_0^1(0,L)\right).$$

Temos que (2.11) é válido para $m = \mu$ e para $\nu > \mu$ onde $\mu, \nu \in \mathbb{N}$, isto é

$$(y_{tt}^\mu, w_j) + (y_x^\mu, w_{j,x}) - (g * y_x^\mu, w_{j,x}) = (f, w_j) \tag{2.43}$$

$$(y_{tt}^\nu, w_j) + (y_x^\nu, w_{j,x}) - (g * y_x^\nu, w_{j,x}) = (f, w_j)\,. \tag{2.44}$$

Subtraindo (2.44) de (2.43) obtemos

$$(y_{tt}^\mu - y_{tt}^\nu, w_j) + (y_x^\mu - y_x^\nu, w_{j,x}) - (g * (y_x^\mu - y_x^\nu), w_{j,x}) = 0. \tag{2.45}$$

Multiplicando (2.45) por λ_j e usando a propriedade do problema espectral, de modo análogo à segunda estimativa à priori, segue de (2.24)

$$\|y_t^\mu - y_t^\nu\|_{H_0^1(0,L)}^2 + \|y^\mu - y^\nu\|_{H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)}^2 \leqslant C_1\left(\|y_1^\mu - y_1^\nu\|_{H_0^1(0,L)}^2 + \|y_0^\mu - y_0^\nu\|_{H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)}^2\right).$$

Como $(y_0^\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ e $(y_1^\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ são convergentes para $y_0 \in H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)$ e $y_1 \in H_0^1(0,L)$ respectivamente então, $(y^\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^0\left([0,T]; H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)\right)$

e $(y_t^\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^0\left([0,T];H_0^1(0,L)\right)$, o que implica existem φ e ψ tais que

$$y^\mu \to \varphi \quad \text{em} \quad C^0\left([0,T];H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)\right) \subset L^\infty\left(0,T;H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)\right)$$

$$y_t^\mu \to \psi \quad \text{em} \quad C^0\left([0,T];H_0^1(0,L)\right) \subset L^\infty\left(0,T;H_0^1(0,L)\right).$$

Da unicidade dos limites segue que $\varphi = y$ e $\psi = y_t$.

Portanto $y \in C^0\left([0,T];H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)\right) \cap C^1\left([0,T];H_0^1(0,L)\right)$. ■

2.2 Solução Fraca para Equação Viscoelástica

Na seção anterior obtivemos a existência de solução forte para o problema (2.1). Nesta seção garantiremos a existência de solução para o mesmo problema, porém com dados iniciais menos regulares. Iniciaremos com a definição de solução fraca, e em seguida demonstraremos a existência desta solução usando argumentos de densidade, bem como sua regularidade e unicidade.

Definição 2.2.1 (Solução Fraca). *Uma função $y :]0,T[\times]0,L[\to\mathbb{R}$ é dita **solução fraca** para o problema (2.1) se*

$$y \in L^\infty\left(0,T;H_0^1(0,L)\right) \tag{2.46}$$

$$y_t \in L^\infty\left(0,T;L^2(0,L)\right) \tag{2.47}$$

$$y_{tt} \in L^1\left(0,T;H^{-1}(0,L)\right) \tag{2.48}$$

$$\frac{d}{dt}(y_t,v) + ((y,v)) + ((g*y,v)) = (f,v) \tag{2.49}$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$, para toda $v \in H_0^1(0,L)$,

$$y_{tt} - y_{xx} + g*y_{xx} = f \in L^1\left(0,T;H^{-1}(0,L)\right) \tag{2.50}$$

$$y(x,0) = y_0(x) \quad e \quad y_t(x,0) = y_1(x). \tag{2.51}$$

Teorema 2.2.2. *Se $y_0 \in H_0^1(0,L)$, $y_1 \in L^2(0,L)$ e $f \in L^1\left(0,T;L^2(0,L)\right)$, então (2.1) admite uma solução fraca.*

Prova: A existência de solução fraca do problema (2.1) será obtida a partir de aproximações por soluções fortes, para isto considere para y_0, y_1 e f as seguintes aproximações

$$y_0^m \in H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L) \quad \text{tal que} \quad y_0^m \to y_0 \text{ em } H_0^1(0,L), \tag{2.52}$$

$$y_1^m \in H_0^1(0,L) \quad \text{tal que} \quad y_1^m \to y_1 \text{ em } L^2(0,L), \tag{2.53}$$

$$f^m \in C^0\left([0,T]; C_0^2[0,L]\right) \quad \text{tal que} \quad f^m \to f \text{ em } L^1\left(0,T; L^2(0,L)\right). \tag{2.54}$$

Para os dados y_0^m, y_1^m e f^m, temos que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe solução forte $y^m :]0,L[\times]0,T[\to \mathbb{R}$ para (2.1), conforme a Definição 2.1.1, satisfazendo (2.5) - (2.9), isto é, existe y^m tal que

$$y^m \in L^\infty\left(0,T; H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)\right), \tag{2.55}$$

$$y_t^m \in L^\infty\left(0,T, H_0^1(0,L)\right), \tag{2.56}$$

$$y_{tt}^m \in L^1\left(0,T, L^2(0,L)\right), \tag{2.57}$$

$$y_{tt}^m - y_{xx}^m + g * y_{xx}^m = f^m \quad \text{q.s em} \quad Q, \tag{2.58}$$

$$y^m(x,0) = y_0^m(x) \qquad \text{e} \qquad y_t^m(x,0) = y_1^m(x). \tag{2.59}$$

Agora determinaremos estimativas para $(y^m)_{m\in\mathbb{N}}$, de modo que o limite seja a solução fraca de (2.1). Multiplicando (2.58) por $v \in L^2\left(0,T; H_0^1(0,L)\right)$ e integrando por partes em $]0,L[$, temos para cada $t \in]0,T[$ a seguinte identidade

$$\int_0^L y_{tt}^m(t) v\, dx + \int_0^L y_x^m(t) v_x\, dx - \int_0^L g * y_x^m(t) v_x\, dx = \int_0^L f^m(t) v\, dx \tag{2.60}$$

tomando $v = y_t^m(t)$ em (2.60) temos

$$\int_0^L y_{tt}^m(t) y_t^m(t)\, dx + \int_0^L y_x^m(t) y_{tx}^m(t)\, dx - \int_0^L g * y_x^m(t) y_{tx}^m(t)\, dx = \int_0^L f^m(t) y_t^m(t)\, dx$$

ou seja

$$\frac{d}{dt}E(t,y^m) - \int_0^L g' \Box y_x^m(t)\, dx + \int_0^L g(t)|y_x^m(t)|^2\, dx = 2\int_0^L f^m(t) y_t^m(t)\, dx.$$

Integrando de 0 a t temos

$$E(t,y^m) \leqslant E(0,y^m) + 2\int_0^t \int_0^L f^m(s) y_t^m(s)\, dx ds \tag{2.61}$$

ou seja,

$$E(t,y^m) \leqslant E(0,y^m) + \int_0^T \|f^m(s)\|_{L^2(0,L)}\, ds + \int_0^t \|f^m(s)\|_{L^2(0,L)} E(s,y^m) ds.$$

Da desigualdade Gronwall temos

$$\|y_t^m(t)\|^2_{L^2(0,L)} + \beta_0 \|y_x^m(t)\|^2_{L^2(0,L)} \leqslant C\left(\|y_1^m\|^2_{L^2(0,L)} + \left\|y_{0,x}^m\right\|^2_{L^2(0,L)} + \int_0^T \|f^m(s)\|_{L^2(0,L)}\, ds\right) \tag{2.62}$$

para todo $t \in]0,T[$.

Tendo em vista que $y_0^m \to y_0$ em $H_0^1(0,L)$, $y_1^m \to y_1$ em $L^2(0,L)$ e $f^m \to f$ em $L^1\left(0,T;L^2[0,L]\right)$, conclui-se de (2.62) que

$$y^m \in L^\infty\left(0,T;H_0^1(0,L)\right),$$

$$y_t^m \in L^\infty\left(0,T;L^2(0,L)\right).$$

Logo existem subsequências $(y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(y^m)_{m\in\mathbb{N}}$ tais que

$$y^n \overset{*}{\rightharpoonup} y \quad \text{em} \quad L^\infty\left(0,T;H_0^1(0,L)\right), \tag{2.63}$$

$$y_t^n \overset{*}{\rightharpoonup} y_t \quad \text{em} \quad L^\infty\left(0,T;L^2(0,L)\right). \tag{2.64}$$

De (2.64) temos que

$$(y_t^n,\omega) \to (y_t,\omega), \qquad \forall \omega \in L^1\left(0,T;L^2(0,L)\right).$$

O que implica

$$\int_0^T (y_t^n,\omega)\, dt \to \int_0^T (y_t,\omega)\, dt, \qquad \forall \omega \in L^1\left(0,T;L^2(0,L)\right).$$

Como $H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L)$, $\mathcal{D}(0,T) \hookrightarrow L^1(0,T)$, tomando $\omega = v\theta$, onde $v \in H_0^1(0,L)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ então

$$\int_0^T (y_t^n(t),v)\,\theta(t)\, dt \to \int_0^T (y_t(t),v)\,\theta(t)\, dt, \qquad \forall v \in L^2(0,L), \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T),$$

ou seja, $(y_t^n(t),v) \rightharpoonup (y_t(t),v)$ em $\mathcal{D}'(0,T)$, para toda $v \in H_0^1(0,L)$.

Portanto,

$$\frac{d}{dt}(y_t^n(t),v) \rightharpoonup \frac{d}{dt}(y_t(t),v) \quad \text{em } \mathcal{D}'(0,T), \forall v \in H_0^1(0,L). \tag{2.65}$$

De (2.63) temos que $y^n \overset{*}{\rightharpoonup} y$ em $L^\infty(0,T;H_0^1(0,L)) \simeq [L^1(0,T;H^{-1}(0,L))]'$, o que implica que

$$\langle y^n, \omega\rangle \to \langle y, \omega\rangle, \qquad \forall \omega \in L^1\left(0,T;H^{-1}(0,L)\right).$$

Usando os fatos de que $H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L) \hookrightarrow H^{-1}(0,L)$ e $\mathcal{D}(0,T) \hookrightarrow L^1(0,T)$, e tomando em particular $\omega = v\theta$ com $v \in H_0^1(0,L)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ temos

$$\int_0^T \langle y^n(t), v\rangle\, \theta(t)\, dt \to \int_0^T \langle y(t), v\rangle\, \theta(t)\, dt$$

e integrando por partes segue que

$$\int_0^T ((y^n(t), v))\, \theta(t)\, dt \to \int_0^T ((y(t), v))\, \theta(t)\, dt.$$

Portanto,

$$((y^n(t), v)) \rightharpoonup ((y(t), v)) \quad \text{em } \mathcal{D}'(0,T),\ \forall v \in H_0^1(0,L). \tag{2.66}$$

De (2.54) temos que $f^n \to f$ em $L^1(0,T;L^2(0,L))$. Para todo $v \in H_0^1(0,L)$, e para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^T (f^n(t), v)\, \theta(t)\, dt - \int_0^T (f(t), v)\, \theta(t)\, dt\right| &\leqslant \int_0^T |(f^n - f, v)\, \theta(t)|\, dt \\
&= \int_0^T |(f^n - f, v)|\, |\theta(t)|\, dt \\
&\leqslant c\int_0^T \|f^n - f\|_{L^2} |v|\, dt \\
&= c|v|\, \|f^n - f\|_{L^1(0,T,L^2(0,L))} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_0^T (f^n(t), v)\, \theta(t)\, dt \to \int_0^T (f(t), v)\, \theta(t)\, dt. \tag{2.67}$$

Portanto,

$$(f^n(t), v) \rightharpoonup (f(t), v) \quad \text{em } \mathcal{D}'(0,T),\ \forall v \in H_0^1(0,L). \tag{2.68}$$

Multiplicando (2.60) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando de 0 a T, e tomando $m = n$ temos

$$\begin{gathered}
\int_0^T \frac{d}{dt}(y_t^n(t), v)\, \theta(t)\, dt + \int_0^T ((y^n(t), v))\, \theta(t)\, dt - \int_0^T ((g * y^n(t), v))\, \theta(t)\, dt \\
= \int_0^T (f^n(t), v)\, \theta(t)\, dt
\end{gathered} \tag{2.69}$$

fazendo $n \to \infty$ em (2.69), e observando as convergências (2.65), (2.66) e (2.68), obtemos

$$\frac{d}{dt}(y_t(t), v) + ((y(t), v)) - ((g * y(t), v)) = (f(t), v) \tag{2.70}$$

em $\mathcal{D}'(0,T)$ para todo $v \in H_0^1(0,L)$.

Para mostrar que $y_{tt} \in L^1(0,T;H^{-1}(0,L))$, tomemos $n \to +\infty$ em (2.69) e integrando por partes com respeito a variável espacial temos

$$\begin{aligned} -\int_0^T (y_t(t), v)\,\theta_t(t)\,dt - \int_0^T \langle y_{xx}(t), v\rangle_{H^{-1}\times H_0^1}\,\theta\,dt \\ + \int_0^T \langle g * y_{xx}(t), v\rangle_{H^{-1}\times H_0^1}\,\theta\,dt = \int_0^T (f(t), v)\,\theta(t)\,dt, \end{aligned} \tag{2.71}$$

pois $f \in L^1(0,T;L^2(0,L)) \hookrightarrow L^1(0,T;H^{-1}(0,L))$.

Considere agora

$$G(t) = y_{xx}(t) + g * y_{xx}(t) + f(t) \ \in \ H^{-1}(0,L).$$

Usando (2.71) segue que

$$-\int_0^T \langle y_t, v\rangle\,\theta_t\,dt = \int_0^T \langle G, v\rangle\,\theta\,dt \quad \forall v \in H_0^1(0,L), \ \text{ e } \ \theta \in \mathcal{D}(0,T). \tag{2.72}$$

Da Proposição 1.2.28, obtemos

$$\left\langle -\int_0^T y_t\theta_t\,dt, v\right\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} = \left\langle \int_0^T G\theta\,dt, v\right\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} \qquad \forall v \in H_0^1(0,L) \tag{2.73}$$

ou seja,

$$-\int_0^T y_t\theta_t\,dt = \int_0^T G\theta\,dt. \tag{2.74}$$

Assim temos que y_t G pertencem a $L^1(0,T;H^{-1}(0,L))$ e satisfazem (2.74). Segue do Lema de Temam que

$$y_t(t) = \xi + \int_0^t G(s)\,ds, \qquad \xi \in H^{-1}(0,L)$$

e $y_t \in C^0([0,T];H^{-1}(0,L))$, e além disto tem-se

$$\frac{d}{dt}\langle y_t, \eta\rangle = \langle G, \eta\rangle \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,T),\ \forall \eta \in H_0^1(0,L).$$

De (2.74) segue que

$$\langle y_{tt}, \theta \rangle = \langle G, \theta \rangle$$

o que implica que $y_{tt} \in L^1\left(0,T; H^{-1}(0,L)\right)$ e $y_{tt} = G$ em $L^1\left(0,T; H^{-1}(0,L)\right)$, ou seja

$$y_{tt} - y_{xx} + g * y_{xx} = f \quad \text{em} \quad L^1\left(0,T; H^{-1}(0,L)\right) \tag{2.75}$$

Mostraremos que $y(x,0) = y_0(x)$ e $y_t(x,0) = y_1(x)$.

De (2.63) e (2.64) segue que

$$\int_0^T (y^n(t), v)\, \theta'(t)\, dt \to \int_0^T (y(t), v)\, \theta'(t)\, dt \qquad \forall \theta' \in L^2(0,T),\ v \in L^2(0,L), \tag{2.76}$$

$$\int_0^T (y_t^n(t), v)\, \theta(t)\, dt \to \int_0^T (y_t(t), v)\, \theta(t)\, dt \qquad \forall \theta \in L^2(0,T),\ v \in L^2(0,L). \tag{2.77}$$

Tomando em particular, para $\theta \in C^1\left([0,T]\right)$ tal que $\theta(T) = 0$ e $\theta(0) = 1$ em (2.76) e (2.77) temos

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\left[(y^n(t), v)\, \theta(t)\right]\, dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}\left[(y(t), v)\, \theta(t)\right]\, dt, \qquad \forall v \in L^2(0,L)$$

isto é,

$$(y^n(T), v)\, \theta(T) - (y^n(0), v)\, \theta(0) \quad \to \quad (y(T), v)\, \theta(T) - (y(0), v)\, \theta(0) \quad \forall v \in L^2(0,L).$$

Da escolha de θ segue que

$$(y^n(0), v) \to (y(0), v) \tag{2.78}$$

para todo $v \in L^2(0,L)$, (em particular para $v \in H_0^1(0,L)$).

Por outro lado, de (2.52) temos, $y^n(x,0) = y^n(0) \to y_0(x)$ em $L^2(0,L)$, o que implica $y^n(x,0) \rightharpoonup y_0(x)$ em $L^2(0,L)$. Disto e de (2.78), segue da unicidade do limite que $y(x,0) = y_0(x)$.

Mostraremos que $y_t(x,0) = y_1(x)$. De fato, por (2.64) sabemos que $y_t \in L^\infty\left(0,T; L^2(0,L)\right) \hookrightarrow L^1\left(0,T; L^2(0,L)\right)$, e por (2.75) temos que $y_{tt} \in L^1\left(0,T; H^{-1}(0,L)\right)$. Assim, pelo Lema de Kim temos que $y_t \in C^0\left([0,T]; H^{-1}(0,L)\right)$.

Seja $\delta > 0$ e considere

$$\theta_\delta(t) = \begin{cases} -\frac{t}{\delta} + 1 & \text{se} \quad 0 \leqslant t \leqslant \delta \\ 0 & \text{se} \quad \delta < t \leqslant T. \end{cases}$$

Note que $\theta_\delta \in H^1(0,T)$ pois

$$\int_0^T |\theta_\delta(t)|^2 \, dt \leqslant \int_0^\delta 1^2 \, dt = \delta < \infty$$

e

$$\int_0^T |\theta_\delta'(t)|^2 \, dt = \int_0^\delta |\theta_\delta'(t)|^2 \, dt = \int_0^\delta \frac{1}{\delta^2} \, dt = \frac{1}{\delta} < \infty.$$

uma vez que

$$\theta_\delta'(t) = \begin{cases} -\frac{1}{\delta} & \text{se} \quad 0 \leqslant t \leqslant \delta \\ 0 & \text{se} \quad \delta < t \leqslant T. \end{cases}$$

Multiplicando a equação (2.60) por θ_δ e integrando em t de 0 a T obtemos

$$\int_0^T (y_{tt}^m(t), v)\, \theta_\delta(t) \, dt + \int_0^T (y_x^m(t), v_x)\, \theta_\delta(t) \, dt - \int_0^T ((g * y^m(t), v))\, \theta_\delta(t) \, dt =$$

$$= \int_0^T (f^m(t), v)\, \theta_\delta(t) \, dt$$

para todo $v \in H_0^1(0,L)$.

Integrando por partes temos

$$(y_t^m(t), v)\, \theta_\delta(t)\big|_0^T - \int_0^T (y_t^m(t), v)\, \theta_\delta'(t) \, dt + \int_0^T (y_x^m(t), v_x)\, \theta_\delta(t) \, dt -$$

$$- \int_0^T ((g * y^m(t), v))\, \theta_\delta(t) \, dt = \int_0^T (f^m(t), v)\, \theta_\delta(t) \, dt$$

ou seja,

$$\begin{aligned} &-(y_t^m(0), v) + \frac{1}{\delta} \int_0^\delta (y_t^m(t), v) \; dt + \int_0^\delta (y_x^m(t), v_x)\, \theta_\delta(t) \, dt - \\ &- \int_0^\delta ((g * y^m(t), v))\, \theta_\delta(t) \, dt = \int_0^\delta (f^m(t), v)\, \theta_\delta(t) \, dt. \end{aligned} \tag{2.79}$$

para todo $v \in H_0^1(0,L)$.

Tomando $m = n$ e de (2.53) temos $y_1^n \rightharpoonup y_1$ em $L^2(0,L)$, ou seja

$$(y_1^n, v) \to (y_1, v) \qquad \forall v \in L^2(0,L).$$

Como $y_1^n = y_t^n(0) \in H_0^1(0,L) \subset L^2(0,L)$ temos em particular que

$$(y_t^n(0), v) \to (y_1, v) \qquad \forall v \in H_0^1(0,L).$$

Sendo assim, em (2.79) temos para todo $v \in H_0^1(0,L)$

$$-(y_1,v) + \frac{1}{\delta}\int_0^\delta (y_t,v)\,dt + \int_0^\delta (y_x(t),v_x)\,\theta_\delta(t)\,dt - \int_0^\delta ((g*y(t),v))\,\theta_\delta(t)\,dt$$

$$= \int_0^\delta (f(t),v)\,\theta_\delta(t)\,dt$$

e tomando $\delta \to 0$ concluímos que para toda $v \in H_0^1(0,L)$ tem-se $(y_1,v) = (y_t(0),v)$. Portanto $y_1 = y_t(0)$.

O próximo resultado é acerca da regularidade da solução fraca.

Teorema 2.2.3 (Regularidade da Solução Fraca)**.** *Se $y = y(x,t)$ é solução fraca de (2.1) então*

$$y \in C^0\left([0,T]; H_0^1(0,L)\right) \cap C^1\left([0,T]; L^2(0,L)\right). \tag{2.80}$$

Prova: Seja $(y^m)_{m\in\mathbb{N}}$ a sequência de aproximações por soluções fortes, então de (2.55) e de (2.56) temos pelo Lema de Kim que

$$y^m \in C\left([0,T]; H_0^1(0,L)\right). \tag{2.81}$$

Por outro lado de (2.56) e de (2.57) temos pelo Lema de Kim que $y_t^m \in C\left([0,T]; L^2(0,L)\right)$, isto é,

$$y^m \in C^0\left([0,T]; L^2(0,L)\right). \tag{2.82}$$

Tomando as sequências de solução fortes (aproximadas), para $m > n$, temos

$$y_{tt}^m - y_{xx}^m + g * y_{xx}^m = f^m \tag{2.83}$$

$$y_{tt}^n - y_{xx}^n + g * y_{xx}^n = f^n \tag{2.84}$$

subtraindo (2.84) de (2.83) temos

$$(y^m - y^n)_{tt} - (y^m - y^n)_{xx} + g * (y^m - y^n)_{xx} = f^m - f^n. \tag{2.85}$$

Multiplicando (2.85) por $v \in L^2(0,T;H_0^1(0,L))$ e integrando em $]0,L[$ segue que

$$(y_{tt}^m - y_{tt}^n, v) + ((y^m - y^n, v)) + ((g * (y^m - y^n), v)) = (f^m - f^n, v)\,.$$

Tomando em particular $v = y_t^m - y_t^n \in L^\infty(0,T;H_0^1(0,L)) \subset L^2(0,L;H_0^1(0,L))$ obtemos

$$\|(y_t^m - y_t^n)(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}^2 + \beta_0 \|(y_x^m - y_x^n)(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}^2 \leqslant$$
$$\leqslant C\left(\|y_1^m - y_1^n\|_{L^2(0,L)}^2 + \left\|y_{0,x}^m - y_{0,x}^n\right\|_{L^2(0,L)}^2 + \int_0^T \|(f^m - f^n)(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\, dt\right).$$

Seja $\tilde{\beta}_0 = \min\{1,\beta_0\}$, então

$$\|y_t^m - y_t^n\|_{L^2(0,L)}^2 + \|y_x^m - y_x^n\|_{L^2(0,L)}^2 \leqslant$$
$$\leqslant C_1\left(\|y_1^m - y_1^n\|_{L^2(0,L)}^2 + \left\|y_{0,x}^m - y_{0,x}^n\right\|_{L^2(0,L)}^2 + \int_0^T \|(f^m - f^n)(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\, dt\right)$$

onde $C_1 = C/\tilde{\beta}_0$.

Usando as convergências (2.52)-(2.54) concluímos que

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|(y_t^m - y_t^n)(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}^2 \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$
$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|(y_x^m - y_x^n)(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}^2 \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ou seja, $(y^m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^0([0,T];H_0^1(0,L))$ e $(y_t^m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^0([0,T];L^2(0,L))$, o que implica

$$y^m \to \varphi \quad \text{em} \quad C^0\big([0,T];H_0^1(0,L)\big) \subset L^\infty\big(0,T;H_0^1(0,L)\big)$$

e

$$y_t^m \to \psi \quad \text{em} \quad C^0\big([0,T];L^2(0,L)\big) \subset L^\infty\big(0,T;L^2(0,L)\big)\,.$$

Da unicidade dos limites segue que $\varphi = y$ e $\psi = y_t$.

Portanto $y \in C^0([0,T];H_0^1(0,L)) \cap C^1([0,T];L^2(0,L))$. ■

Agora vamos estabelecer a inequação de energia associada à solução fraca.

Teorema 2.2.4. *Se $y = y(x,t)$ é uma solução fraca de (2.1) então temos a seguinte inequação de energia*

$$\|y_t(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}^2 + \beta_0 \|y(\cdot,t)\|_{H_0^1(0,L)}^2 \leqslant \|y_1\|_{L^2(0,L)}^2 + \|y_0\|_{H_0^1(0,L)}^2 + 2\int_0^t (f(s), y_t(s))\, ds$$

para todo $t \in]0,T[$.

Prova: Seja $(y^m)_{m\in\mathbb{N}}$ a sequência de soluções fortes como no Teorema 2.2.2. Então de (2.61) tomando $m=\mu$ temos:

$$\begin{aligned}&\|y_t^\mu(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)}+\beta(t)\,\|y_x^\mu(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)}\\ \leqslant&\int_0^L |y_1^\mu|^2+|y_{0,x}^\mu|^2\,dx+2\int_0^t (f^\mu(s),y_t^\mu(s))\,ds.\end{aligned} \tag{2.86}$$

Multiplicando (2.86) por uma função degrau $\zeta>0$ em $]0,T[$ e integrando de 0 a T temos

$$\begin{aligned}&\int_0^T \|y_t^\mu(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)}\,\zeta(t)\,dt+\beta_0\int_0^T \|y_x^\mu(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)}\,\zeta(t)\,dt\leqslant\\ &\int_0^T \|y_1^\mu\|^2_{L^2(0,L)}\,\zeta(t)\,dt+\int_0^T \left\|y_{0,x}^\mu\right\|^2_{L^2(0,L)}\zeta(t)\,dt+2\int_0^T\zeta(t)\int_0^t (f^\mu(s),y_t^\mu(s))\,dsdt\end{aligned} \tag{2.87}$$

Usando a semicontinuidade inferior da norma com respeito a convergência fraca, obtemos

$$\int_0^T \|y_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)}\,\zeta(t)\,dt\leqslant\liminf_{\mu\to\infty}\int_0^T \|y_t^\mu(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)}\,\zeta(t)\,dt \tag{2.88}$$

$$\int_0^T \|y_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)}\,\zeta(t)\,dt\leqslant\liminf_{\mu\to\infty}\int_0^T \|y_x^\mu(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)}\,\zeta(t)\,dt. \tag{2.89}$$

Tomando o limite inferior em ambos os lados de (2.87), e observando que

$$\liminf u+\liminf v\leqslant\liminf(u+v)$$

segue de (2.88), (2.87) e (2.68)

$$\begin{aligned}&\int_0^T \|y_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)}\,\zeta(t)\,dt+\beta_0\int_0^T \|y_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)}\,\zeta(t)\,dt\leqslant\\ \leqslant&\int_0^T \|y_1\|^2_{L^2(0,L)}\,\zeta(t)\,dt+\int_0^T \|y_{0,x}\|^2_{L^2(0,L)}\,\zeta(t)\,dt+2\int_0^T\int_0^t (f,y_t)\,\zeta(t)\,dsdt.\end{aligned} \tag{2.90}$$

Observe que os integrandos em (2.90) são $L^1(0,T)$. Se $s\in]0,T[$, considere a função degrau $\zeta_h(t)=\zeta(t)$ sobre $]s-h,s+h[\subset]0,T[$ e zero no complementar. Substituindo $\zeta(t)$ por $\zeta_h(t)$ em (2.90), dividindo ambos os lados por $\frac{1}{2h}$ e tomando o limite quando $h\to 0$ obtemos, para $t\in]0,T[$, em virtude de $\zeta(t)>0$

$$\|y_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)}+\beta_0\,\|y_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)}\leqslant\|y_1\|^2_{L^2(0,L)}+\|y_{0,x}\|^2_{L^2(0,L)}+2\int_0^t (f(s),y_t(s))\,ds. \qquad\blacksquare$$

Temos os seguinte corolários

Corolário 2.2.5. *Se $y = y(x,t)$ é uma solução fraca de (2.1), então temos a seguinte inequação*

$$\|y_t(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)} + \|y(\cdot,t)\|_{H_0^1(0,L)} \leqslant C\left(\|y_1\|_{L^2(0,L)} + \|y_0\|_{H_0^1(0,L)} + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))}\right)$$

em $[0,T]$.

Prova: Tomando a desigualdade do Teorema 2.2.4 e observando que $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2) \leqslant 2(a+b)^2$, para $a,b \geqslant 0$, temos

$$\begin{aligned}
&\left(\|y_t(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)} + \|y_x(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\right)^2 \\
&\leqslant 2\left(\|y_1\|_{L^2(0,L)} + \|y_{0,x}\|_{L^2(0,L)}\right)^2 + 2\int_0^t 2\,\|f(\cdot,s)\|_{L^2(0,L)}\,\|y_t(\cdot,s)\|_{L^2(0,L)}\,ds.
\end{aligned}$$

Usando o Lema 1.2.7 segue que

$$\begin{aligned}
\|y_t(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)} + \|y_x(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)} &\leqslant \sqrt{2}\left(\|y_1\|_{L^2(0,L)} + \|y_{0,x}\|_{L^2(0,L)}\right) + 2\int_0^t \|f(\cdot,s)\|_{L^2(0,L)}\,ds \\
&\leqslant C\left(\|y_1\|_{L^2(0,L)} + \|y_{0,x}\|_{L^2(0,L)} + \int_0^T \|f(s)\|_{L^2(0,L)}\,ds\right). \blacksquare
\end{aligned}$$

Corolário 2.2.6. *Se $y = y(x,t)$ é uma solução fraca de (2.1) então*

$$\|y_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)} + \|y(\cdot,t)\|^2_{H_0^1(0,L)} \leqslant C\left(\|y_1\|^2_{L^2(0,L)} + \|y_0\|^2_{H_0^1(0,L)} + \|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(0,L))}\right).$$

Prova: Elevando ao quadrado ambos membros da desigualdade do Corolário 2.2.5 obtemos

$$\left(\|y_t(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)} + \|y(\cdot,t)\|_{H_0^1(0,L)}\right)^2 \leqslant C^2\left(\|y_1\|_{L^2(0,L)} + \|y_0\|_{H_0^1(0,L)} + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))}\right)^2.$$

Usando a desigualdade $a^2+b^2 \leqslant (a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$ temos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|y_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)} + \|y(\cdot,t)\|^2_{H_0^1(0,L)} \leqslant C\left(\|y_1\|^2_{L^2(0,L)} + \|y_0\|^2_{H_0^1(0,L)} + \|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(0,L))}\right). \blacksquare$$

Corolário 2.2.7. *Se $y_0 \in H_0^1(0,L)$, $y_1 \in L^2(0,L)$ e $f \in L^1\left(0,T;L^2(0,L)\right)$, então (2.1) possui uma única solução fraca.*

Prova: A existência de solução fraca foi estabelecida no Teorema 2.2.2. Considere y e $\tilde{y}$ duas soluções fracas para o problema (2.1). Sendo assim $Y = y - \tilde{y}$ é solução fraca para o seguinte problema

$$\left| \begin{array}{ccc} Y_{tt} - Y_{xx} + g * Y_{xx} = 0 & \text{em} &]0,L[\times]0,T[\\ Y(0,t) = Y(L,t) = 0 & \text{em} &]0,T[\\ Y(x,0) = Y_t(x,0) = 0 & \text{em} &]0,L[\end{array} \right.$$

Assim do Teorema 2.2.4 temos

$$\|Y_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)} + \|Y(\cdot,t)\|^2_{H^1_0(0,L)} \leqslant 0.$$

Portanto $Y = 0$ quase sempre em $]0,L[\times]0,T[$, ou seja, $y = \tilde{y}$ quase sempre em $]0,L[\times]0,T[$. ■

2.2.1 Regularidade Escondida

Nesta seção estabeleceremos o comportamento da solução fraca na fronteira do domínio, mais precisamente, iremos estabelecer a regularidade escondida que será dada na Proposição 2.2.10.

Lema 2.2.8. *Se $y = y(x,t)$ é uma solução forte de (2.1) então a seguinte identidade é verdadeira*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^T |(y_x - g * y_x)(0,t)|^2\,dt &= \int_0^L q\,(y_t y_x)|_0^T\,dx + \frac{1}{2L}\int_0^T\int_0^L |y_t|^2 + |y_x|^2\,dxdt - \\ &- \frac{1}{L}\int_0^T\int_0^L g * y_x y_x\,dxdt - \int_0^L q\,(y_t g * y_x)|_0^T\,dx + \\ &+ \int_0^T\int_0^L q y_t g' * y_x\,dxdt + g(0)\int_0^T\int_0^L q y_x y_t\,dxdt + \\ &+ \frac{1}{2L}\int_0^T\int_0^L |g * y_x|^2\,dxdt - \int_0^T\int_0^L f q(y_x - g * y_x)\,dxdt \end{aligned}$$

onde $q : [0,L] \to \mathbb{R}$, $q(x) = \frac{x-L}{L}$.

Prova: Multiplicando (2.1) por $q(y_x - g * y_x)$ e integrando em $]0,L[\times]0,T[$ temos

$$\underbrace{\int_0^T\int_0^L y_{tt}q(y_x - g*y_x)\,dxdt}_{I_1} - \underbrace{\int_0^T\int_0^L (y_{xx} - g*y_{xx})q(y_x - g*y_x)\,dxdt}_{I_2} = \\ = \int_0^T\int_0^L fq(y_x - g*y_x)\,dxdt. \tag{2.91}$$

Note que

$$I_1 = \int_0^L\int_0^T y_{tt}qy_x\,dtdx - \int_0^L\int_0^T y_{tt}qg*y_x\,dtdx. \tag{2.92}$$

Aplicando integração por partes na variável t no primeiro termo do lado direito de I_1 temos

$$\begin{aligned}\int_0^L\int_0^T y_{tt}qy_x\,dxdt &= \int_0^L\left[(y_tqy_x)|_0^T - \int_0^T y_tqy_{xt}\,dt\right]dx\\ &= \int_0^L (y_tqy_x)|_0^T\,dx - \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^T\left(\frac{d}{dx}|y_t|^2\right)q\,dxdt\\ &= \int_0^L (y_tqy_x)|_0^T\,dx - \frac{1}{2}\int_0^T\left[\left(|y_t|^2q\right)|_0^L - \int_0^L |y_t|^2q_x\,dx\right]dt\\ &= \int_0^L (y_tqy_x)|_0^T\,dx - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^T\left(|y_t|^2q\right)|_0^L\,dt}_{=0} + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L |y_t|^2\,q_x\,dxdt\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^T\int_0^L y_{tt}qy_x\,dxdt = \int_0^L (y_tqy_x)|_0^T\,dx + \frac{1}{2L}\int_0^T\int_0^L |y_t|^2\,dxdt. \tag{2.93}$$

De modo análogo temos

$$\begin{aligned}\int_0^L\int_0^T y_{tt}qg*y_x\,dtdx &= \int_0^L\left[(y_tqg*y_x)|_0^T - \int_0^T y_tq(g*y_x)_t\,dt\right]dx\\ &= \int_0^L q\,(y_tg*y_x)|_0^T\,dx - \int_0^L\int_0^T y_tq(g*y_x)_t\,dtdx\\ &= \int_0^L q\,(y_tg*y_x)|_0^T\,dx - \int_0^L\int_0^T y_tq(g'*y_x + g(0)y_x)\,dtdx\\ &= \int_0^L q\,(y_tg*y_x)|_0^T\,dx - \int_0^L\int_0^T y_tqg'*y_x\,dtdx\\ &\quad +g(0)\int_0^L\int_0^T qy_ty_x\,dtdx\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\int_0^L\int_0^T y_{tt}qg*y_x\,dtdx &= \int_0^L q\,(y_tg*y_x)|_0^T\,dx - \int_0^L\int_0^T y_tqg'*y_x\,dtdx\\ &\quad +g(0)\int_0^L\int_0^T qy_ty_x\,dtdx.\end{aligned} \tag{2.94}$$

Substituindo (2.93) e (2.94) em (2.92) obtemos

$$I_1 = \int_0^L \left.(y_t q y_x)\right|_0^T dx + \frac{1}{2L}\int_0^T\int_0^L |y_t|^2\, dxdt - \int_0^L q\left.(y_t g * y_x)\right|_0^T dx +$$

$$+\int_0^L\int_0^T y_t q g' * y_x\, dtdx - g(0)\int_0^L\int_0^T q y_t y_x\, dtdx.$$

Por outro lado

$$I_2 = \int_0^T\int_0^L (y_{xx} - g * y_{xx}) q (y_x - g * y_x)\, dxdt = \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L q\frac{d}{dx}|y_x - g * y_x|^2\, dxdt$$

e aplicando integração por partes na variável x obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L q\frac{d}{dx}|y_x - g * y_x|^2\, dxdt &= \frac{1}{2}\int_0^T\left[q\left.(y_x - g * y_x)^2\right|_0^L - \int_0^L q_x|y_x - g * y_x|^2\, dx\right] dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T (y_x(0,t) - g * y_x(0,t))^2\, dt \\
&\quad -\frac{1}{2L}\int_0^T\int_0^L |y_x - g * y_x|^2\, dxdt.
\end{aligned}$$

Logo

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^T |(y_x - g * y_x)(0,t)|^2\, dt - \frac{1}{2L}\int_0^T\int_0^L |y_x - g * y_x|^2\, dxdt. \tag{2.95}$$

Assim, substituindo I_1 e I_2 em (2.91) e isolando o termo $\frac{1}{2}\int_0^T |(y_x - g * y_x)(0,t)|^2\, dx$, temos a identidade desejada. ■

Defina o funcional

$$\mathcal{E}(t,y) = \|y_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)} + \|y(\cdot,t)\|^2_{H_0^1(0,L)}.$$

Lema 2.2.9. *Se $y = y(x,t)$ é solução fraca (ou forte) de (2.1) então existe uma constante $C > 0$ que depende de T tal que as seguintes desigualdades*

$$\|g * y_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)} \leqslant C \max_{0\leqslant t\leqslant T}\mathcal{E}(t,y) \tag{2.96}$$

e

$$\|(y_x - g * y_x)(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)} \leqslant C \max_{0\leqslant t\leqslant T}\mathcal{E}(t,y). \tag{2.97}$$

são verdadeiras para todo $t \in [0,T]$.

Prova: Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\begin{aligned} |g * y_x(x,t)|^2 &= \left| \int_0^t g(t-\tau) y_x(x,\tau)\, d\tau \right|^2 \leqslant \int_0^t |g(t-\tau)|^2 \, d\tau \int_0^t |y_x(x,\tau)|^2 \, d\tau \\ &\leqslant K \int_0^T |y_x(x,\tau)|^2 \, d\tau. \end{aligned}$$

Integrando sobre $[0, L]$ segue que

$$\int_0^L |g * y_x(x,t)|^2 \, dx \leqslant K \int_0^L \int_0^T |y_x(x,\tau)|^2 \, d\tau dx = K \int_0^T \int_0^L |y_x(x,\tau)|^2 \, dx d\tau.$$

Logo

$$\|g * y_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)} \leqslant K \int_0^T \|y_x(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(0,L)} \, d\tau \leqslant C \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \mathcal{E}(t,y) \tag{2.98}$$

onde $C = KT$ e $K = \int_0^T |g(t-\tau)|^2 \, d\tau$. Portanto segue (2.96).

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} |(y_x - g * y_x)(x,t)|^2 &\leqslant |y_x(x,t)|^2 + 2\,|y_x(x,t)|\,|g * y_x(x,t)| + |g * w_x(x,t)|^2 \\ &\leqslant 2\,|y_x(x,t)|^2 + 2\,|g * y_x(x,t)|^2 \\ &\leqslant 2\,|y_x(x,t)|^2 + 2 \int_0^t |g(t-s)|^2 \, ds \int_0^t |y_x(\cdot,s)|^2 \, ds \\ &\leqslant 2\,|y_x(x,t)|^2 + 2K \int_0^T |y_x(\cdot,s)|^2 \, ds. \end{aligned}$$

Integrando em $[0, L]$ temos

$$\|(y_x - g * y_x)(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)} \, dx \leqslant 2\,\|y_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)} + 2K \int_0^T \|y_x(\cdot,s)\|^2_{L^2(0,L)} \, ds$$

isto é

$$\|(y_x - g * y_x)(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)} \leqslant C \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \mathcal{E}(t,y)$$

onde a constante C é escolhida de tal forma que

$$C > 2(1 + KT) \quad \text{e} \quad C \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \mathcal{E}(t,y) > 1, \tag{2.99}$$

e assim segue (2.97). ■

Proposição 2.2.10. *Se $y = y(x,t)$ é solução forte de (2.1) então existe uma constante $C > 0$ que depende de T tal que*

$$\|y_x(0,\cdot) - g * y_x(0,\cdot)\|^2_{L^2(0,T)} \leqslant C \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \mathcal{E}(t,y).$$

Prova: Estimaremos cada termo da identidade do Lema 2.2.8.

Note que $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant L}|q(x)|\leqslant 1$ e usando o Corolário 2.2.6 obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^L (y_t q y_x)|_0^T\,dx &= \int_0^L q\,(y_t y_x)|_0^T\,dx \leqslant (y_t,y_x)|_0^T \leqslant 2\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|(y_t,y_x)|\\ &\leqslant 2\|y_t(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\|y_x(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\\ &\leqslant \|y_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)}+\|y_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)} \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant T}\mathcal{E}(t,y),\end{aligned} \tag{2.100}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2L}\int_0^T\int_0^L |y_t|^2+|y_x|^2\,dxdt &\leqslant \frac{1}{2L}\int_0^T \|y_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)}+\|y_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)}\,dt\\ &\leqslant \frac{T}{2L}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\mathcal{E}(t,y)\end{aligned} \tag{2.101}$$

e

$$\begin{aligned}g(0)\int_0^T\int_0^L y_t q y_x\,dx &\leqslant g(0)\int_0^T |(qy_t,y_x)|\,dt\\ &\leqslant g(0)\int_0^T \|y_t(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\|y_x(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\,dt\\ &\leqslant \frac{g(0)}{2}\int_0^T \|y_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)}+\|y_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)}\,dt\\ &\leqslant \frac{g(0)}{2}T\max_{0\leqslant t\leqslant T}\mathcal{E}(t,y).\end{aligned} \tag{2.102}$$

Usando a desigualdade (2.96) do Lema 2.2.9 juntamente com o Corolário 2.2.6 segue

$$\begin{aligned}-\int_0^T\int_0^L g*y_x y_x\,dxdt &\leqslant \int_0^T |(g*y_x,y_x)|\,dt\\ &\leqslant \textstyle\int_0^T \|g*y_x(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\|y_x(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\,dt\\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_0^T \|g*y_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)}+\|y_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)}\,dt\\ &\leqslant \frac{1}{2}C\max_{0\leqslant t\leqslant T}\mathcal{E}(t,y),\end{aligned} \tag{2.103}$$

$$\begin{aligned}\int_0^L q\,(y_t g*y_x)|_0^T\,dx &\leqslant (y_t,g*y_x)|_0^T \leqslant 2\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|(y_t,g*y_x)|\\ &\leqslant 2\|y_t(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\|g*y_x(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\\ &\leqslant \|y_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)}+\|g*y_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)}\\ &\leqslant C\max_{0\leqslant t\leqslant T}\mathcal{E}(t,y),\end{aligned} \tag{2.104}$$

e usando a hipótese (2.2) segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_0^L qy_t g' * y_x\,dxdt &\leqslant \int_0^T |(qy_t, g' * y_x)|\;dt \\
&\leqslant \textstyle\int_0^T \|y_t(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\,\|g' * y_x(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\;dt \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_0^T \|y_t(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)} + \|g' * y_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)}\;dt \\
&\leqslant C\max_{0\leqslant t\leqslant T}\mathcal{E}(t,y).
\end{aligned} \tag{2.105}$$

De (2.97) temos

$$\begin{aligned}
-\int_0^T\int_0^L fq(y_x - g * y_x)dxdt &\leqslant \left|\int_0^T\int_0^L f(y_x - g * y_x)dxdt\right| \\
&\leqslant \int_0^T |(f,(y_x - g * y_x))|\,dt \\
&\leqslant \int_0^T \|f(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\,\|(y_x - g * y_x)(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\;dt \\
&\leqslant \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))}\sqrt{C\max_{0\leqslant t\leqslant T}\mathcal{E}(t,y)}.
\end{aligned}$$

Da escolha de C em (2.99) concluí-se que

$$-\int_0^T\int_0^L fq(y_x - g * y_x)dxdt \leqslant C\max_{0\leqslant t\leqslant T}\mathcal{E}(t,y). \tag{2.106}$$

Portanto de (2.100) - (2.106) temos que é válida a desigualdade (2.2.10). ■

Teorema 2.2.11 (Regularidade Escondida)**.** *Se $y = y(x,t)$ é uma solução fraca (2.1) então*

$$(y_x - g * y_x)(0,\cdot) \quad \in \quad L^2(0,T) \tag{2.107}$$

e

$$\int_0^T \left|y_x(0,t) - \int_0^t g(t-s)y_x(0,s)\,ds\right|^2 dt \leqslant C\left(\mathcal{E}(0,y) + \|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(0,L))}\right). \tag{2.108}$$

Prova: Seja S o conjunto das soluções fortes de (2.1) e seja W o conjunto das soluções fracas de (2.1) munido com a norma $|||\cdot|||$ dada por

$$|||y|||^2 = \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathcal{E}(t,y)$$

Temos que $\mathsf{S} \subset \mathsf{W}$ e S é denso em W. De fato, dados $y_0 \in H_0^1(0,L)$, $y_1 \in L^2(0,L)$ e $f \in L^1(0,T;L^2(0,L))$, seja $y_0^n \in H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)$, $y_1^n \in H_0^1(0,L)$ e $f^n \in L^1(0,T;H_0^1(0,L))$ de modo que

$$y_0^n \to y_0, \qquad y_1^n \to y_1 \quad \text{e} \quad f^n \to f. \tag{2.109}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $y^n = y^n(x,t)$ a solução do problema (2.1) correspondente aos dados iniciais y_0^n, y_1^n e f^n, e seja $y = y(x,t)$ a solução do sistema (2.1) correspondente aos dados iniciais y_0, y_1 e f, ou seja temos que $y^n \in \mathsf{S}$ e $y \in \mathsf{W}$.

Deste modo $y^n - y$ é uma solução fraca do problema

$$\left| \begin{array}{lll} (y^n-y)_{tt} - (y^n-y)_{xx} + g*(y^n-y)_{xx} = f^n - f & \text{em} &]0,L[\times]0,T[\\ (y^n-y)(0,t) = 0 = (y^n-y)(L,t) & \text{em} &]0,T[\\ (y^n-y)(x,0) = y_0^n(x) - y_0(x) & \text{em} &]0,L[\\ (y^n-y)_t(x,0) = y_1^n(x) - y_1(x) & \text{em} &]0,L[\end{array} \right.$$

Aplicando o Corolário 2.2.6 segue que

$$\begin{aligned} &\|(y_t^n - y_t)(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}^2 + \|(y^n-y)(\cdot,t)\|_{H_0^1(0,L)}^2 \\ &\leqslant C\left(\|y_1^n - y_1\|_{L^2(0,L)}^2 + \|y_0^n - y_0\|_{H_0^1(0,L)}^2 + \|f^n - f\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))}^2\right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$|||y^n - y|||^2 \leqslant C\left(\|y_1^n - y_1\|_{L^2(0,L)}^2 + \|y_0^n - y_0\|_{H_0^1(0,L)}^2 + \|f^n - f\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))}^2\right)$$

e tomando $n \to \infty$ segue que $|||y^n - y||| \to 0$.

Defina

$$\begin{array}{rcl} \gamma : \mathsf{S} & \longrightarrow & L^2(0,T) \\ y & \longmapsto & \gamma y = (y_x - g*y_x)(0,\cdot) \end{array}$$

e observe que γ é contínua com respeito a norma $|||\cdot|||$ pois, da Proposição 2.2.10 temos

$$\|\gamma y\|_{L^2(0,T)}^2 \leqslant C \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \mathcal{E}(t,y) = C\,|||y|||^2.$$

Como γ é linear e contínua, pelo Teorema de Hahn-Banach, γ admite uma extensão contínua, $\hat{\gamma} : \mathsf{W} \to L^2(0,T)$, assim para todo $y \in \mathsf{W}$, existe $(y^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathsf{S}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} y^n =$

y, logo

$$\begin{aligned}
\|\hat{\gamma} y\|^2_{L^2(0,T)} &= \left\|\hat{\gamma} \lim_{n\to\infty} y^n\right\|^2_{L^2(0,T)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \|\gamma y^n\|^2_{L^2(0,T)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \|y^n_x(0,\cdot) - g * y^n_x(0,\cdot)\|^2_{L^2(0,T)}\,.
\end{aligned}$$

Usando a Proposição 2.2.10 e o Corolário 2.2.6 temos que

$$\|y^n(0,\cdot) - g * y^n_x(0,\cdot)\|^2_{L^2(0,T)} \leqslant C \max_{0\leqslant t\leqslant T} \mathcal{E}(t,y^n) \leqslant C\left[\mathcal{E}(0,y^n) + \|f^n\|^2_{L^1(0,T;L^2(0,L))}\right]$$

assim de 2.109 temos

$$\begin{aligned}
\|\hat{\gamma} y\|^2_{L^2(0,T)} &\leqslant C \lim_{n\to\infty}\left(\mathcal{E}(0,y^n) + \|f^n\|^2_{L^1(0,T;L^2(0,L))}\right) \\
&\leqslant C\left(\mathcal{E}(0,y) + \|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(0,L))}\right)
\end{aligned}$$

o que completa a demonstração do teorema. ■

2.3 Solução Ultra Fraca para Equação Viscoelástica

Considere o seguinte problema de valor inicial e de contorno não-homogêneo

$$\left|\begin{array}{lll}
z_{tt} - z_{xx} + g * z_{xx} = 0 & \text{em} &]0,L[\times]0,T[\\
z(0,t) = v(t),\;\; z(L,t) = 0 & \text{em} &]0,T[\\
z(x,0) = z_0(x),\;\; z_t(x,0) = z_1(x) & \text{em} &]0,L[.
\end{array}\right. \tag{2.110}$$

Nesta seção estamos interessados em obter solução de (2.110). Iniciaremos com a definição do que se entende por solução de (2.110) e estabeleceremos a existência e unicidade bem como sua regularidade.

Multiplicando $(2.110)_1$ por $\theta = \theta(x,t)$, e integrando por partes formalmente sobre $]0,L[\times]0,T[$ temos

$$\int_0^L z_t(x,T)\theta(x,T) - z_1(x)\theta(x,0) - z(x,T)\theta_t(x,T) + z_0(x)\theta_t(x,0) + \int_0^T z(x,t)\theta_{tt}(x,t)\,dt\,dx$$

$$-\int_0^T z_x(L,t)\theta(L,t) - z_x(0,t)\theta(0,t) - z(L,t)\theta_x(L,t) + z(0,t)\theta_x(0,t) + \int_0^L z(x,t)\theta_{xx}(x,t)\,dxdt$$

$$+\int_0^T\int_0^t g(t-s)\left[z_x(L,s)\theta(L,t)-z_x(0,s)\theta(0,t)-z(L,t)\theta_x(L,t)\right]dsdt$$

$$+\int_0^T\int_0^t g(t-s)\left[z(0,t)\theta_x(0,t)+\int_0^L z(x,s)\theta_{xx}(x,t)\,dx\right]dsdt=0$$

ou seja,

$$\int_0^L\int_0^T z\left[\theta_{tt}-\theta_{xx}\right]dtdx+\int_0^L\int_0^T\int_0^t g(t-s)z(x,s)\theta_{xx}(x,t)\,dsdtdx=$$

$$-\int_0^L z_t(x,T)\theta(x,T)\,dx+\int_0^L z_1(x)\theta(x,0)\,dx+\int_0^L z(x,T)\theta_t(x,T)\,dx-\int_0^L z_0(x)\theta_t(x,0)\,dx+$$

$$+\int_0^T z_x(L,t)\theta(L,t)\,dt-\int_0^T z_x(0,t)\theta(0,t)\,dt-\int_0^T z(L,t)\theta_x(L,t)\,dt+\int_0^T z(0,t)\theta_x(0,t)\,dt-$$

$$-\int_0^T\int_0^t g(t-s)z_x(L,s)\theta(L,t)\,dsdt+\int_0^T\int_0^t g(t-s)z_x(0,s)\theta(0,t)\,dsdt+$$

$$+\int_0^T\int_0^t g(t-s)z(L,s)\theta_x(L,t)\,dsdt-\int_0^T\int_0^t g(t-s)z(0,s)\theta_x(0,t)\,dsdt.$$

Como não temos informações sobre $z(x,T)$, $z_t(x,T)$ e $z_x(x,t)$, escolhamos $\theta(x,T)=0$, $\theta_t(x,T)=0$ e $\theta(0,t)=\theta(L,t)=0$ para $t\in]0,T[$, e usando as condições iniciais e de contorno sobre z, e da inversão da ordem de integração, $\int_0^T\int_0^t\,dsdt=\int_0^T\int_s^T\,dtds$, temos

$$\int_0^L\int_0^T z\left[\theta_{tt}-\theta_{xx}\right]dtdx+\int_0^L\int_0^T\int_s^T g(t-s)z(x,s)\theta_{xx}(x,t)\,dtdsdx=$$

$$+\int_0^L z_1(x)\theta(x,0)\,dx-\int_0^L z_0(x)\theta_t(x,0)\,dx$$

$$+\int_0^T v(t)\theta_x(0,t)\,dt-\int_0^T\int_s^T g(t-s)v(s)\theta_x(0,t)\,dtds.$$

Renomeando as variáveis, t por s e vice versa (na convolução) obtemos

$$\int_0^L\int_0^T z(x,t)\left[\theta_{tt}(x,t)-\theta_{xx}(x,t)+\int_t^T g(s-t)\theta_{xx}(x,s)\,ds\right]dtdx=$$

$$+\int_0^L z_1(x)\theta(x,0)\,dx-\int_0^L z_0(x)\theta_t(x,0)\,dx+\int_0^T v(t)\left(\theta_x(0,t)-\int_t^T g(s-t)\theta_x(0,s)\,ds\right)dt$$

sendo assim podemos colocar a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}&\left\langle z(x,t),\theta_{tt}(x,t)-\theta_{xx}(x,t)+\int_t^T g(s-t)\theta_{xx}(x,s)\,ds\right\rangle=\\&=\langle z_1(x),\theta(x,0)\rangle-\langle z_0(x),\theta t(x,0)\rangle+\left\langle v(t),\theta_x(0,t)-\int_t^T g(s-t)\theta_x(0,s)\,ds\right\rangle\end{aligned}\tag{2.111}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota diferentes pares de dualidade.

Considere

$$\theta_{tt}(x,t) - \theta_{xx}(x,t) + \int_t^T g(s-t)\theta_{xx}(x,s)\,ds := \hat{f}(x,t)$$

juntamente com as condições iniciais e de contorno sobre θ

$$\theta(0,t) = \theta(L,t) = 0$$

$$\theta(x,T) = \theta_t(x,T) = 0.$$

Do Teorema 2.2.2 e do Corolário 2.2.7, segue que se $\hat{f} \in L^1(0,T;L^2(0,L))$ o seguinte problema admite uma única solução fraca

$$\left|\begin{array}{lll} \theta_{tt}(x,t) - \theta_{xx}(x,t) + \displaystyle\int_t^T g(s-t)\theta_{xx}(x,s)\,ds = \hat{f}(x,t) & \text{em} &]0,L[\times]0,T[\\ \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0 & \text{em} &]0,T[\\ \theta(x,T) = 0, \quad \theta_t(x,T) = 0 & \text{em} &]0,L[. \end{array}\right. \tag{2.112}$$

De fato, se $\hat{f} \in L^1(0,T,L^2(0,L))$, considerando a mudança de variáveis $T-t$ no lugar de t, obteremos

$$\theta_{tt}(x,T-t) - \theta_{xx}(x,T-t) + \int_{T-t}^T g(s-T+t)\theta_{xx}(x,T-T+s)\,ds = \hat{f}(x,T-t).$$

Fazendo $\sigma = T-s$ então $ds = -d\sigma$, e para $s = T-t$ temos $\sigma = T-T+t = t$, para $s = T$ temos $\sigma = 0$, e além disto $s - T = -\sigma$, no termo integral temos

$$\theta_{tt}(x,T-t) - \theta_{xx}(x,T-t) - \int_t^0 g(t-\sigma)\theta_{xx}(x,T-\sigma)\,du = \hat{f}(x,T-t).$$

Tomando $\eta(x,t) = \theta(x,T-t)$ segue que:

$$\eta_t(x,t) = -\theta_t(x,T-t),$$

$$\eta_{tt}(x,t) = \theta_{tt}(x,T-t),$$

$$\eta_{xx}(x,t) = \theta_{xx}(x,T-t),$$

$$f(x,t) = \hat{f}(x,T-t),$$

e assim obteremos o seguinte problema equivalente

$$\left|\begin{array}{lll} \eta_{tt}(x,t)-\eta_{xx}(x,t)+\displaystyle\int_0^t g(t-s)\eta_{xx}(x,s)\,ds=f(x,t) & \text{em} &]0,L[\times]0,T[\\ \eta(x,0)=\theta(x,T)=0 & \text{em} &]0,L[\\ \eta_t(x,0)=-\theta_t(x,T)=0 & \text{em} &]0,L[\\ \eta(0,t)=\eta(L,t)=0 & \text{em} &]0,T[\end{array}\right. \tag{2.113}$$

uma vez que $\theta(0,T-t)=\theta(L,T-t)=0$.

O problema (2.113) admite uma única solução fraca, logo o mesmo ocorre para o problema (2.112). Defina o produto $g \circledast h(t)=\int_t^T g(s-t)h(s)\,ds$, onde $h\in L^1(0,T)$.

Do Teorema 2.2.3, Corolário 2.2.5 e Teorema 2.2.11 segue que a solução θ do problema (2.112) satisfaz

$$\theta\in C^0\left([0,T],H_0^1(0,L)\right)\cap C^1\left([0,T],L^2(0,L)\right), \tag{2.114}$$

$$(\theta_x-g\circledast\theta_x)(0,\cdot)\quad\in L^2(0,T), \tag{2.115}$$

$$\|\theta_t\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}+\|\theta\|_{L^\infty\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}\leqslant C\,\|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))}, \tag{2.116}$$

$$\|\theta_x(0,\cdot)-g\circledast\theta_x(0,\cdot)\|_{L^2(0,T)}\leqslant C\,\|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))}. \tag{2.117}$$

Como consequência de (2.114) temos que $\theta_1\in L^2(0,L)$ e $\theta_0\in H_0^1(0,L)$. Disto e de (2.115) devemos tomar

$$z_0\in L^2(0,L),\qquad z_1\in H^{-1}(0,L)\qquad \text{e}\qquad v\in L^2(0,T) \tag{2.118}$$

para que faça sentido o lado esquerdo da equação (2.111).

Motivado pela expressão (2.111) e por (2.118), concluímos que para cada conjunto $\{z_0,z_1,v\}\in L^2(0,L)\times H^{-1}(0,L)\times L^2(0,T)$, está bem definido o funcional S sobre $L^1\left(0,T,L^2(0,L)\right)$ dado por:

$$\langle S,f\rangle=-\left(z_0,\theta_t(0)\right)+\langle z_1,\theta(0)\rangle+\langle v(t),\theta_x(0,t)-g\circledast\theta_x(0,t)\rangle \tag{2.119}$$

para toda solução θ de (2.112), onde denotamos por $\theta(0)$ e $\theta_t(0)$ as funções $\theta(\cdot,0)$ e $\theta_t(\cdot,0$ respectivamente.

Das estimativas (2.114)- (2.117), obtemos de (2.119)

$$|\langle S,f\rangle|=\|z_0\|_{L^2(0,L)}\|\theta_t(0)\|_{L^2(0,L)}+\|z_1\|_{H^{-1}(0,L)}\|\theta(0)\|_{H_0^1(0,L)}+$$

$$+\|v\|_{L^2(0,T)}\|\theta_x(0,t)-g\circledast\theta_x(0,\cdot)\|_{L^2(0,T)}$$
$$\leqslant C\left(\|z_0\|_{L^2(0,L)}+\|z_1\|_{H^{-1}(0,L)}+\|v\|_{L^2(0,T)}\right)\|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))}.$$

Portanto, o funcional linear $S : L^1(0,T;L^2(0,L)) \to \mathbb{R}$, definido por (2.119) é contínuo, ou seja, S pertence a $L^\infty(0,T;L^2(0,L))$, que é o dual topológico de $L^1(0,T;L^2(0,L))$. Além disto,

$$\|S\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}\leqslant C\left(\|z_0\|_{L^2(0,L)}+\|z_1\|_{H^{-1}(0,L)}+\|v\|_{L^2(0,T)}\right). \tag{2.120}$$

Definição 2.3.1 (Solução ultra fraca). *Dado $\{z_0,z_1,v\}\in L^2(0,L)\times H^{-1}(0,L)\times L^2(0,T)$, definimos solução ultra fraca do problema (2.110), uma função $z\in L^\infty(0,T,L^2(0,L))$ que satisfaz a condição*

$$\int_0^T\int_0^L zf\,dxdt=-\left(z_0,\theta_t(0)\right)+\langle z_1,\theta(0)\rangle+\int_0^T v(t)\left(\theta_x(0,t)-g\circledast\theta_x(0,\cdot)\right)dt$$

para toda $f\in L^1(0,T;L^2(0,L))$, onde θ é a solução do problema adjunto (2.112).

Teorema 2.3.2 (Existência e Unicidade). *Existe uma única solução ultra fraca $z=z(x,t)$ para o problema não homogêneo (2.110). E além disto, z satisfaz*

$$\|z\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}\leqslant C\left(\|z_0\|_{L^2(0,L)}+\|z_1\|_{H^{-1}(0,L)}+\|v\|_{L^2(0,T)}\right),$$

onde C é uma constante que depende somente de $T>0$.

Prova: De (2.119) e (2.120) segue pelo Teorema Representação de Riesz que existe $z\in L^\infty(0,T;L^2(0,L))$ tal que

$$\langle z,f\rangle=\langle S,f\rangle=-\left(z_0,\theta_t(0)\right)+\langle z_1,\theta(0)\rangle+\int_0^T v(t)\left(\theta_x(0,t)-g\circledast\theta_x(0,\cdot)\right)dt.$$

Agora se z e $\tilde{z}$ são soluções ultra fraca de (2.110) então

$$\int_0^T\int_0^L (z-\tilde{z})\,f\,dxdt=0$$

para todo $f\in L^1(0,T;L^2(0,L))$.

Portanto, do Lema de Du Bois Raymond segue que $z=\tilde{z}$ q.s em $[0,L]\times[0,T]$. ■

Agora estabeleceremos a regularidade da solução ultra fraca, para isto provaremos inicialmente o seguinte lema.

Lema 2.3.3. *Existe uma única solução fraca $z = z(x,t)$ do problema (2.110) com $z_0 \in H_0^1(0,L)$, $z_1 \in L^2(0,L)$ e $v \in H_0^2(0,T)$. E além disso*

$$z \in C^0\left([0,T];H_0^1(0,L)\right) \cap C^1\left([0,T];L^2(0,L)\right)$$

e z também é solução ultra fraca.

Prova: Seja $\hat{v} \in H_0^2\left(0,T;H^2(0,L)\right)$ tal que $\hat{v}(0,t) = v(t)$ e $\hat{v}(L,t) = 0$. Da regularidade de $\hat{v}$ temos que $\hat{v}_{tt}$ e $\hat{v}_{xx}$ pertencem a $L^2\left(0,T;L^2(0,L)\right)$ e ainda $g * \hat{v}_{xx} \in L^2\left(0,T;L^2(0,L)\right)$ pois

$$\left|\int_0^t g(t-s)\hat{v}_{xx}(x,s)\,ds\right|^2 \leqslant \left(\int_0^t |g(t-s)|^2\,ds\right)\left(\int_0^t |\hat{v}_{xx}(x,s)|^2\,ds\right) \leqslant k\int_0^T |\hat{v}_{xx}(x,s)|^2\,ds$$

onde $k = \int_0^T |g(t-s)|^2\,ds$. Integrando sobre $[0,L]\times[0,T]$ temos

$$\int_0^T \|g * \hat{v}_{xx}(t)\|_{L^2(0,L)}^2\,dt \leqslant k\int_0^T\int_0^T \|\hat{v}_{xx}(t)\|_{L^2(0,L)}^2\,dtdt \leqslant Tk\,\|\hat{v}_{xx}\|_{L^2(Q)}^2 < \infty.$$

Considere o seguinte problema

$$\left|\begin{array}{lll} u_{tt} - u_{xx} + g * u_{xx} = -\hat{v}_{tt} + \hat{v}_{xx} - g * \hat{v}_{xx} & \text{em} &]0,L[\times]0,T[\\ u(0,t) = 0 = u(L,t) & \text{em} &]0,T[\\ u(x,0) = z_0(x), \quad u_t(x,0) = z_1(x) & \text{em} &]0,L[. \end{array}\right. \tag{2.121}$$

Decorre dos Teoremas 2.2.2 e 2.2.3 e do Corolário 2.2.7, que o problema (2.121) admite uma única solução fraca u tal que

$$u \in C^0\left([0,T];H_0^1(0,L)\right) \cap C^1\left([0,T];L^2(0,L)\right)$$

e satisfaz

$$\frac{d}{dt}(u_t,\psi) + ((u,\psi)) - ((g * u,\psi)) = (-\hat{v}_{tt} + \hat{v}_{xx} - g * \hat{v}_{xx},\psi) \qquad \forall \psi \in H_0^1(0,L)$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$, ou seja

$$\frac{d}{dt}(u_t + \hat{v}_t,\psi) + ((u + \hat{v},\psi)) - ((g * (u + \hat{v}),\psi)) = 0 \qquad \forall \psi \in H_0^1(0,L)$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$.

Observe que

$$(u+\hat{v})(0,t) = u(0,t) + \hat{v}(0,t) = 0 + \hat{v}(0,t) = v(t),$$

$$(u+\hat{v})(L,t) = u(L,t) + \hat{v}(L,t) = 0 + \hat{v}(L,t) = 0,$$

$$(u+\hat{v})(x,0) = u(x,0) + \hat{v}(x,0) = z_0(x) + 0 = z_0(x),$$

$$(u+\hat{v})_t(x,0) = u_t(x,0) + \hat{v}_t(x,0) = z_1(x) + 0 = z_1(x).$$

Portanto $z = u + \hat{v}$ é solução fraca do problema (2.110) e consequentemente

$$z \in C^0\left([0,T]; H_0^1(0,L)\right) \cap C^1\left([0,T]; L^2(0,L)\right).$$

Mostraremos que $z = u + \hat{v}$ também é uma solução ultra fraca para (2.110).

Considere $f \in L^1(0,T; L^2(0,L))$ e seja $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $f^n \in L^1(0,T; H_0^1(0,L))$ tal que

$$f^n \to f \quad \text{em} \quad L^1\left(0,T; L^2(0,L)\right).$$

Considere os problemas

$$\left|\begin{array}{lll} \theta^n_{tt} - \theta^n_{xx} + g * \theta^n_{xx} = f^n & \text{em} &]0,L[\times]0,T[\\ \theta^n(0,t) = \theta^n(L,t) = 0 & \text{em} &]0,T[\\ \theta^n(x,T) = 0, \quad \theta^n_t(x,T) = 0 & \text{em} &]0,L[\end{array}\right. \tag{2.122}$$

e

$$\left|\begin{array}{lll} \theta_{tt} - \theta_{xx} + g * \theta_{xx} = f & \text{em} &]0,L[\times]0,T[\\ \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0 & \text{em} &]0,T[\\ \theta(x,T) = 0, \quad \theta_t(x,T) = 0 & \text{em} &]0,L[. \end{array}\right. \tag{2.123}$$

Como $f^n \in L^1(0,T; H_0^1(0,L))$ segue que (2.122) admite, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma única solução forte θ^n tal que

$$\theta^n \in C^0\left([0,T]; H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)\right) \cap C^1\left([0,T]; H_0^1(0,L)\right).$$

Como $f \in L^1(0,T; L^2(0,L))$ segue que (2.123) admite uma única solução fraca θ.

Note que a diferença $\theta^n - \theta$ é solução fraca de

$$\left|\begin{array}{l} (\theta^n - \theta)_{tt} - (\theta^n - \theta)_{xx} + g * (\theta^n - \theta) = f^n - f \\ (\theta^n - \theta)(0,t) = 0 = (\theta^n - \theta)(L,t) \\ (\theta^n - \theta)(x,T) = 0 = (\theta^n - \theta)_t(x,T) \end{array}\right. \tag{2.124}$$

Tomando $T - t$ em lugar de t, usando o Corolário 2.2.6 com $y = \theta^n - \theta$ temos

$$\begin{aligned} &\|\theta^n_t(\cdot, T-t) - \theta_t(\cdot, T-t)\|^2_{L^2(0,L)} + \|\theta^n(\cdot, T-t) - \theta(\cdot, T-t)\|^2_{H^1_0(0,L)} \\ &\qquad \leqslant C \, \|f^n(\cdot, T-t) - f(\cdot, T-t)\|^2_{L^2(0,L)} \, . \end{aligned} \tag{2.125}$$

Do Teorema 2.2.11 segue que

$$\|(\theta^n_x(0,\cdot) - \theta_x(0,\cdot)) - g \circledast (\theta^n_x - \theta_x)(0,\cdot)\|^2_{L^2(0,T)} \leqslant C \, \|f^n(\cdot,t), -f(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)} \tag{2.126}$$

para todo $t \in [0,T]$. Tomando $t = T$ em (2.125) e somando com (2.126)

$$\begin{aligned} &\|(\theta^n_t - \theta_t)(\cdot, 0)\|^2_{L^2(0,L)} + \|(\theta^n - \theta)(\cdot, 0)|^2_{H^1_0(0,L)} + \\ &+ \|(\theta^n_x - \theta_x)(0,\cdot) - g \circledast (\theta^n_x - \theta_x)(0,\cdot)\|^2_{L^2(0,T)} \\ &\leqslant C \int_0^T \|f^n(\cdot,t) - f(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)} \, dt. \end{aligned}$$

De $f^n \to f$ em $L^1(0,T; L^2(0,L))$ obtemos

$$\theta^n(\cdot, 0) \to \theta(\cdot, 0) \quad \text{em} \quad H^1_0(0,L), \tag{2.127}$$

$$\theta^n_t(\cdot, 0) \to \theta_t(\cdot, 0) \quad \text{em} \quad L^2(0,L), \tag{2.128}$$

$$(\theta^n_x - g \circledast \theta^n_x)(0,\cdot) \to (\theta_x - g \circledast \theta_x)(0,\cdot) \quad \text{em} \quad L^2(0,T). \tag{2.129}$$

Note que z é solução fraca de (2.110) com dados iniciais $z_0 \in H^1_0(0,L)$, $z_1 \in L^2(0,L)$ e $v \in H^2_0(0,T)$, então z possui regularidade da solução fraca, isto é,

$$z \in C^0\left([0,T]; H^1_0(0,L)\right) \cap C^1\left([0,T]; L^2(0,L)\right).$$

Logo $z_{xx} \in C^0([0,T]; H^{-1}(0,L))$ e portanto $z_{tt} - z_{xx} + g * z_{xx} \in C^0([0,T]; H^{-1}(0,L))$ e assim faz sentido a composição $\langle z_{tt} - z_{xx} + g * z_{xx}, \theta^n \rangle$. Fazendo a integração por partes e utilizando o mesmo argumento para obter a solução ultra fraca, temos

$$\int_0^T \int_0^L z f^n \, dxdt = -\left(z_0, \theta^n_t(\cdot, 0)\right) + \langle z_1, \theta^n(\cdot, 0)\rangle - \int_0^T v(t) \left(\theta^n - g \circledast \theta^n\right)(0,t) \, dt$$

tomando $n \to \infty$ e observando as convergência obtidas em (2.127) - (2.129), concluímos que z é solução ultra fraca para (2.110). ■

Proposição 2.3.4. *Se $z = z(x,t)$ é solução ultra fraca de (2.110) com dados iniciais $z_0 \in L^2(0,L)$, $z_1 \in H^{-1}(0,L)$ e $v \in L^2(0,T)$ então $z \in C^0\left([0,T]; L^2(0,L)\right)$.*

Prova: Dados $z_0 \in L^2(0,L)$, $z_1 \in H^{-1}(0,L)$ e $v \in L^2(0,T)$, existem sequências $(z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $H_0^1(0,L)$, $(z_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $L^2(0,L)$ e $(v^n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $H_0^2(0,T)$ tais que

$$\begin{array}{rcl} z_0^n \to z_0 & \text{em} & L^2(0,L), \\ z_1^n \to z_1 & \text{em} & H^{-1}(0,L), \\ v^n \to v & \text{em} & L^2(0,T). \end{array}$$

Considere o problema

$$\left| \begin{array}{lcc} z_{tt}^n - z_{xx}^n + g * z_{xx}^n = 0 & \text{em} &]0,L[\times]0,T[\\ z^n(0,t) = v^n(t), \quad z^n(L,t) = 0 & \text{em} &]0,T[\\ z^n(x,0) = z_0^n(x), \quad z_t^n(x,0) = z_1^n(x) & \text{em} &]0,L[. \end{array} \right. \tag{2.130}$$

Pelo Lema 2.3.3 temos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe z^n solução ultra fraca de (2.130). Portanto $z^n - z$ também é solução ultra fraca de (2.110) com dados iniciais $z_0^n - z_0 \in L^2(0,L)$, $z_1^n - z_1 \in H^{-1}(0,L)$ e $v^n - v \in L^2(0,T)$. Do Teorema 2.3.2 temos

$$\|z^n - z\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} \leqslant C\Big(\|z_0^n - z_0\|_{L^2(0,L)} + \|z_1^n - z_1\|_{H^{-1}(0,L)} + \|v^n - v\|_{L^2(0,T)}\Big)$$

e tomando $n \to \infty$ concluímos que

$$z^n \to z \quad \text{em} \quad L^\infty\big(0,T;L^2(0,L)\big).$$

Além disto, como $z^n \in C^0\left([0,T]; L^2(0,L)\right)$ que é um espaço de Banach, temos que

$$z \in C^0\big([0,T]; L^2(0,L)\big).$$

■

O próximo passo é mostrar que $z_t \in C^0\left([0,T]; H^{-1}(0,L)\right)$. Para tanto consideremos o espaço

$$W_0^{1,1}\big(0,T;L^2(0,L)\big) = \big\{v\ ;\ v, v_t \in L^1\big(0,T;L^2(0,L)\big) \text{ e } v(0) = v(T) = 0\big\},$$

que é um espaço de Banach com respeito a norma

$$\|v\|_{W_0^{1,1}(0,T;L^2(0,L))} = \|v_t\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))}.$$

O espaço dual de $W_0^{1,1}(0,T;L^2(0,L))$ será denotado por $W^{-1,\infty}(0,T;L^2(0,L))$.

Lema 2.3.5. *Se z é uma solução ultra fraca de (2.110) com dados iniciais $z_0 \in L^2(0,L)$, $z_1 \in H^{-1}$ e $v \in L^2(0,T)$ então $z_t \in W^{-1,\infty}(0,T;L^2(0,L))$.*

Prova: Se z é uma solução ultra fraca, então $z \in L^\infty(0,T;L^2(0,L))$, em particular $z \in L^2(Q)$, o que implica que $z_t \in H^{-1}(0,T;L^2(0,L))$.

Seja $f \in W_0^{1,1}(0,T;L^2(0,L))$ e considere a sequência de funções $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $H_0^1(0,T;L^2(0,L))$ tal que

$$f^n \to f \quad \text{em} \quad W_0^{1,1}\left(0,T;L^2(0,L)\right).$$

Fazendo a composição de z_t com f^n temos

$$\begin{aligned}
\langle z_t, f^n\rangle &= -\int_0^T (z(t), f_t^n(t))\, dt \\
|\langle z_t, f^n\rangle| &\leqslant \|z\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} \|f_t^n\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} \\
&= \|z\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} \|f^n\|_{W_0^{1,1}(0,T;L^2(0,L))}.
\end{aligned}$$

Tomando $n \to \infty$ temos

$$|\langle z_t, f\rangle| \leqslant \|z\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} \|f\|_{W_0^{1,1}(0,T;L^2(0,L))},$$

ou seja,

$$\|z_t\|_{W^{-1,\infty}(0,T;L^2(0,L))} \leqslant \|z\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}.$$

e assim $z_t \in W^{-1,\infty}(0,T;L^2(0,L))$. ■

Observação 2.3.6. *Seja $f \in W_0^{1,1}(0,T;L^2(0,L))$. Do Lema 2.3.5 e da definição de solução ultra fraca temos*

$$\begin{aligned}
\langle z_t, f\rangle = -\int_0^T \int_0^L z f_t \, dxdt &= (z_0, \theta_t(0)) - \langle z_1, \theta(0)\rangle \\
&\quad + \int_0^T v\left(\theta_x - g * \theta_x\right)(0,t)\, dt
\end{aligned} \tag{2.131}$$

onde θ é solução do problema adjunto

$$\left|\begin{array}{lll} \theta_{tt}(x,t)-\theta_{xx}(x,t)+\displaystyle\int_t^T g(s-t)\theta_{xx}(x,s)\,ds=f_t(x,t) & em &]0,L[\times]0,T[\\ \theta(0,t)=\theta(L,t)=0 & em &]0,T[\\ \theta(x,T)=\theta_t(x,T)=0 & em &]0,L[. \end{array}\right. \tag{2.132}$$

A seguir, mostraremos que a solução do problema adjunto (2.132) satisfaz os dois próximos lemas:

Lema 2.3.7. *A solução $\theta=\theta(x,t)$ de (2.132) satisfaz a inequação*

$$\|\theta_t(\cdot,0)\|_{L^2(0,L)}+\|\theta(\cdot,0)\|_{H_0^1(0,L)}\leqslant C\,\|f\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}$$

para toda $f\in W_0^{1,1}\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)$.

Prova: Tomando $T-t$ no lugar de t em (2.132), e considerando $\eta(x,t)=\theta(x,T-t)$ e $\hat{f}(x,t)=f(x,T-t)$ teremos que problema (2.132) é equivalente ao problema

$$\left|\begin{array}{lll} \eta_{tt}-\eta_{xx}+\displaystyle\int_0^t g(t-s)\eta_{xx}(x,s)\,ds=\hat{f}_t(x,t) & \text{em} &]0,L[\times]0,T[\\ \eta(0,t)=\eta(L,t)=0 & \text{em} &]0,T[\\ \eta(x,0)=\eta_t(x,0)=0 & \text{em} &]0,L[. \end{array}\right. \tag{2.133}$$

Como $f\in W_0^{1,1}\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)$ então $f_t\in L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)$ e o problema (2.133) admite uma única solução forte $\eta=\eta(x,t)$, que também é uma solução fraca.

Assim do Corolário 2.2.5 temos que para todo $t\in[0,T]$ e o fato de $L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)\hookrightarrow L^1\left(0,T;L^2(0,L)\right)$ temos

$$\|\eta_t(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}+\|\eta(\cdot,t)\|_{H_0^1(0,L)}\leqslant C\|\hat{f}\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}. \tag{2.134}$$

e

$$\|\hat{f}\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}=\|f\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}. \tag{2.135}$$

Note que

$$\|\eta_t(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}+\|\eta(\cdot,t)\|_{H_0^1(0,L)}\leqslant C\|f\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}. \tag{2.136}$$

Tomando em particular $t=T$ em (2.136) temos

$$\|\eta_t(\cdot,T)\|_{L^2(0,L)}+\|\eta(\cdot,T)\|_{H_0^1(0,L)}\leqslant C\|f\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}. \tag{2.137}$$

Portanto, de $\eta(x,t)=\theta(x,T-t)$ concluímos

$$\|\theta_t(\cdot,0)\|_{L^2(0,L)}+\|\theta(\cdot,0)\|_{H_0^1(0,L)}\leqslant C\,\|f\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}.$$

■

Lema 2.3.8. *A solução $\theta=\theta(x,t)$ de (2.132) satisfaz a inequação*

$$\|\theta_x(0,\cdot)-g\circledast\theta_x(0,\cdot)\|_{L^2(0,T)}\leqslant C\,\|f\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}$$

para toda $f\in W_0^{1,1}\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)$.

Prova: Aplicando o Lema 2.2.8 para a solução forte $\eta=\eta(x,t)$ de (2.133) temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^T|\eta_x(0,t)-g*\eta_x(0,t)|^2\,dt \;=\;& \int_0^L q\,\left(\eta_t\eta_x\right)\big|_0^T\,dx+\frac{1}{2L}\int_0^T\int_0^L|\eta_t|^2+|\eta_x|^2\,dxdt-\\
&-\;\frac{1}{L}\int_0^T\int_0^L g*\eta_x\eta_x\,dxdt-\int_0^L q\,\left(\eta_t g*\eta_x\right)\big|_0^T\,dx+\\
&+\;\int_0^T\int_0^L q\eta_t g'*\eta_x\,dxdt+g(0)\int_0^T\int_0^L q\eta_x\eta_t\,dxdt+\\
&+\;\frac{1}{2L}\int_0^T\int_0^L|g*\eta_x|^2\,dxdt-\int_0^T\int_0^L\hat{f}_t q\eta_x\,dxdt+\\
&+\;\int_0^T\int_0^L\hat{f}_t q g*\eta_x\,dxdt,
\end{aligned} \tag{2.138}$$

onde $q(x)=\dfrac{x-L}{L}$. Vamos estimar cada um dos termos da identidade anterior.

Em vista de $(2.133)_3$ temos que

$$\int_0^L q\,\left(\eta_t\eta_x\right)\big|_0^T\,dx=\int_0^L q\eta_t(x,T)\eta_x(x,T)\,dx=\left(\eta_t(\cdot,T),q\eta_x(\cdot,T)\right).$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz e de (2.137) temos

$$\begin{aligned}
\int_0^L q\,\left(\eta_t\eta_x\right)\big|_0^T\,dx \;&\leqslant\; |(\eta_t(\cdot,T),q\eta_x(\cdot,T))|\\
&\leqslant\; C\,\|\eta_t(\cdot,T)\|_{L^2(0,L)}\,\|\eta_x(\cdot,T)\|_{L^2(0,L)}\\
&\leqslant\; C\|f\|^2_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}.
\end{aligned} \tag{2.139}$$

Como η é também uma solução fraca de (2.133) segue de (2.136)

$$\frac{1}{2L}\int_0^T\int_0^L |\eta_t|^2+|\eta_x|^2\, dxdt \leqslant C\|f\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)} \tag{2.140}$$

Usando (2.136) temos

$$\begin{aligned}
\|g*\eta_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,L)} &= \int_0^L\left|\int_0^t g(t-s)\eta_x(x,s)\,ds\right|^2 dt\\
&\leqslant \int_0^L\left(\int_0^t g(t-s)^2\,ds\right)\left(\int_0^t |\eta_x(\cdot,s)|^2\,ds\right) dt\\
&\leqslant C\int_0^L\int_0^t |\eta_x(\cdot,s)|^2\,ds\,dt\\
&\leqslant C\int_0^T \|\eta_x(\cdot,s)\|^2_{L^2(0,L)}\,dt\\
&= C\|f\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}.
\end{aligned} \tag{2.141}$$

De (2.136) e (2.141) temos

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{L}\int_0^T (g*\eta_x,\eta_x)\;dt &\leqslant \frac{1}{L}\int_0^T \|g*\eta_x(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\,\|\eta_x(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\;dt\\
&\leqslant \frac{1}{L}CT\,\|f\|^2_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}.
\end{aligned} \tag{2.142}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz juntamente com o Lema 2.3.7 e (2.141) temos

$$\begin{aligned}
|(\eta_t(\cdot,T),qg*\eta_x(\cdot,T))| &\leqslant \|\eta_t(\cdot,T)\|_{L^2(0,L)}\,\|qg*\eta_x(\cdot,T)\|_{L^2(0,L)}\\
&\leqslant c\,\|\eta_t(\cdot,T)\|_{L^2(0,L)}\,\|g*\eta_x(\cdot,T)\|_{L^2(0,L)}\\
&\leqslant c\,\|\theta_t(\cdot,0)\|_{L^2(0,L)}\,\|f\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}\\
&\leqslant C\,\|f\|^2_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}.
\end{aligned} \tag{2.143}$$

Por outro lado, de (2.141) com g' no lugar de g e (2.141) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T (\eta_t,qg'*\eta_x)\;dt &\leqslant c\int_0^T \|\eta_t(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\,\|g'*\eta_x(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\\
&\leqslant C\,\|f\|^2_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)},
\end{aligned} \tag{2.144}$$

e

$$\begin{aligned}
g(0)\int_0^T (\eta_t,q\eta_x)\;dt &\leqslant cg(0)\int_0^T \|\eta_t(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\,\|\eta_x(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\;dt\\
&\leqslant C\,\|f\|^2_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}.
\end{aligned}$$

Aplicando a integração por partes na variável t e observando que $\hat{f} \in W_0^{1,1}\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)$ temos

$$-\int_0^T\int_0^L \hat{f}_t q\eta_x\,dxdt = \int_0^T\int_0^L \hat{f}q\eta_{xt}\,dxdt \leqslant C\int_0^T \|\hat{f}(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\|\eta_{xt}(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\,dt.$$

Do Corolário 2.1.4 e de (2.135) segue que

$$\begin{aligned} -\int_0^T\int_0^L \hat{f}_t q\eta_x\,dxdt &\leqslant C\int_0^T \|\hat{f}(\cdot,t)\|_{H_0^1(0,L)}\|\hat{f}\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}\,dt \\ &\leqslant C\|f\|^2_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}. \end{aligned} \tag{2.145}$$

Finalmente vamos estimar o último termo de (2.138). Para isto, integrando por partes em $[0,T]$ temos

$$\begin{aligned} \int_0^T\int_0^L \hat{f}_t qg*\eta_x\,dxdt &= -\int_0^L\int_0^T \hat{f}q(g*\eta_x)_t\,dtdx \\ &= -\int_0^L\int_0^T \hat{f}q(g'*\eta_x+g(0)\eta_x)\,dtdx \\ &= -\int_0^L\int_0^T \hat{f}qg'*\eta_x\,dxdt - g(0)\int_0^L\int_0^T \hat{f}q\eta_x\,dtdx. \end{aligned} \tag{2.146}$$

De (2.141), com g' no lugar de g, obtemos

$$\begin{aligned} -\int_0^T \left(\hat{f}, qg'*\eta_x\right)\,dt &\leqslant \int_0^T \|\hat{f}(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\|qg'*\eta_x(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\,dt \\ &\leqslant \int_0^T \|\hat{f}(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\|f\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}\,dt \\ &\leqslant C\|f\|^2_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)} \end{aligned} \tag{2.147}$$

e de (2.145)

$$\begin{aligned} -g(0)\int_0^T \left(\hat{f}, q\eta_x\right)\,dt &\leqslant g(0)\int_0^T \|\hat{f}(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\,\|\eta_x(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\,dt \\ &\leqslant C\,\|f\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}\int_0^T \|f(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\,dt \\ &\leqslant C\,\|f\|^2_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}. \end{aligned} \tag{2.148}$$

Substituindo (2.147) e (2.148) em (2.146) segue que

$$\int_0^T\int_0^L \hat{f}_t qg*\eta_x\,dxdt \leqslant C\,\|f\|^2_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}. \tag{2.149}$$

Substituindo (2.139) - (2.149) em (2.138) segue que

$$\int_0^T |\eta_x(0,t)-g*\eta_x(0,t)|^2\,dt \leqslant C\,\|f\|^2_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}.$$

Agora tomando $T-t$ em lugar de t na desigualdade anterior temos

$$\frac{1}{2}\int_0^T \left|\eta_x(0,T-t)-\int_0^{T-t} g(T-t-s)\eta_x(0,s)\,ds\right|^2 dt \leqslant c\,\|f\|^2_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}.$$

Efetuando a mudança de variáveis $\tau = T-s$ no termo convolução segue que

$$\frac{1}{2}\int_0^T \left|\eta_x(0,T-t)-\int_t^{T} g(\tau-t)\eta_x(0,T-\tau)\,d\tau\right|^2 dt \leqslant c\,\|f\|^2_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}$$

e como $\eta(x,t)=\theta(x,T-t)$ então

$$\int_0^T \left|\theta_x(0,t)-\int_t^{T} g(\tau-t)\theta_x(0,t)\,d\tau\right|^2 dt \leqslant \|f\|^2_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}.$$

O que conclui a prova do lema. ■

Proposição 2.3.9. *Se $z=z(x,t)$ é solução ultra fraca de (2.110) com dados iniciais $z_0\in L^2(0,L)$, $z_1\in H^{-1}(0,L)$ e $v\in L^2(0,T)$ então*

$$z_t \in C^0\left(0,T;H^{-1}(0,L)\right).$$

Prova: Seja $f\in W_0^{1,1}\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)$. De (2.131) e dos Lemas 2.3.7 e 2.3.8 obtemos

$$|\langle z_t,f\rangle| \leqslant C\left(\|z_0\|_{L^2(0,L)}+\|z_1\|_{H^{-1}(0,L)}+\|v\|_{L^2(0,T)}\right)\|f\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)}. \tag{2.150}$$

Note que $W_0^{1,1}\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)$ é denso em $L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)$ (veja [12]), sendo assim a desigualdade (2.150) é válida para $f\in L^1\left(0,T;H_0^1(0,L)\right)$. Portanto

$$z_t\in L^\infty\left(0,T;H^{-1}(0,L)\right)$$

e além disso

$$\|z_t\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(0,L))} \leqslant C\left(\|z_0\|_{L^2(0,L)}+\|z_1\|_{H^{-1}(0,L)}+\|v\|_{L^2(0,T)}\right). \tag{2.151}$$

Agora consideremos uma sequência $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de soluções fracas para o problema

$$\left|\begin{array}{c} z^n_{tt}-z^n_{xx}+g*z^n_{xx}=0\\ z^n(0,t)=v^n(t),\quad z^n(L,t)=0\\ z^n(x,0)=z^n_0(x),\quad z^n_t(x,0)=z^n_1(x)\end{array}\right. \tag{2.152}$$

que aproxima z, isto é, $(z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $H_0^1(0,L)$, $(z_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $L^2(0,L)$ e $(v^n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $H_0^2(0,T)$ de modo que

$$\begin{aligned} z_0^n \to z_0 &\quad \text{em} \quad L^2(0,L), \\ z_1^n \to z_1 &\quad \text{em} \quad H^{-1}(0,L), \\ v^n \to v &\quad \text{em} \quad L^2(0,T). \end{aligned}$$

Do Lema 2.3.3 temos que $z^n - z$ também é uma solução ultra fraca para (2.152), e por (2.151) obtemos

$$\|z_t^n - z_t\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(0,L))} \leqslant C\left(\|z_0^n - z_0\|_{L^2(0,L)} + \|z_1^n - z_1\|_{H^{-1}(0,L)} + \|v^n - v\|_{L^2(0,T)}\right).$$

Assim tomando $n \to \infty$ segue que

$$z_t^n \to z_t \quad \text{em} \quad L^\infty\left(0,T;H^{-1}(0,L)\right).$$

Como z^n é solução fraca, do Lema 2.3.3 temos

$$z_t^n \in C^0\left([0,T];L^2(0,L)\right) \hookrightarrow C^0\left([0,T];H^{-1}(0,L)\right)$$

o que implica $z_t \in C^0\left([0,T];H^{-1}(0,L)\right)$. ■

Das Proposições 2.3.4 e 2.3.9 temos o seguinte resultado

Teorema 2.3.10 (Regularidade da Solução Ultra Fraca)**.** *A solução ultra fraca z de (2.110) tem regularidade*

$$z \in C^0\left([0,T];L^2(0,L)\right) \cap C^1\left([0,T];H^{-1}(0,L)\right)$$

e satisfaz a estimativa

$$\|z\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} + \|z_t\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(0,L))} \leqslant C\left(\|z_0\|_{L^2(0,L)} + \|z_1\|_{H^{-1}(0,L)} + \|v\|_{L^2(0,T)}\right).$$

Capítulo 3

Controle e Fórmula de Reconstrução

Neste capítulo obteremos a controlabilidade exata de fronteira para o problema (2.1), e a partir dos resultados de controlabilidade obteremos a fórmula de reconstrução da força externa.

Um sistema é dito exatamente controlável na fronteira quando para um dado $T > 0$, existe um função α, chamada controle, de modo que atuando na fronteira do sistema, faz com que a solução $u = u(x,t)$ satisfaça a condição de $u(x,T) = u_t(x,T) = 0$, o que é equivalente dizer que o sistema fica em repouso no instante final T.

Iniciaremos este capítulo demonstrando um resultado que será usado para estabelecer a controlabilidade exata de fronteira da equação viscoelástica, e depois utilizando o Método da Unicidade de Hilbert (HUM) para obter a controlabilidade.

3.1 Desigualdade Inversa

O Teorema 2.2.11 da Seção 2.2 afirma que se $y = y(x,t)$ é uma solução fraca de (2.1) então é verdadeira a seguinte desigualdade

$$\int_0^T \left| y_x(0,t) - \int_0^t g(t-s) y_x(0,s)\, ds \right|^2 dt \leqslant C \left(\|y_1\|^2_{L^2(0,L)} + \|y_0\|^2_{H_0^1(0,L)} + \|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(0,L))} \right).$$

que é chamada de *Desigualdade Direta*.

O que faremos nesta seção é mostrar a validade da *Desigualdade Inversa* para um caso particular conforme é enunciado no próximo teorema.

Teorema 3.1.1. *Para todo $T > 2L$ e para toda solução fraca $y = y(x,t)$ de (2.1) com f identicamente nula, e se g satisfaz as hipóteses (2.2) - (2.4) com $g(0) < \varepsilon$, onde ε é suficientemente pequeno, então temos a seguinte desigualdade*

$$\|y_1\|^2_{L^2(0,L)} + \|y_0\|^2_{H^1_0(0,L)} \leqslant C \int_0^T \left| y_x(0,t) - \int_0^t g(t-s) y_x(0,s)\, ds \right|^2 dt.$$

Prova: Do Teorema 2.2.3 temos que o problema (2.1) admite uma única solução fraca $y = y(x,t)$, tal que

$$y \in C\left(0,T; H^1_0(0,L)\right) \cap C^1\left(0,T; L^2(0,L)\right)$$

para $\{y_0, y_1\} \in H^1_0(0,L) \times L^2(0,L)$. Logo, da Observação 1.2.34, existe uma única solução φ da equação de Volterra

$$\varphi(x,t) = y(x,t) - \int_0^t g(t-s) y(x,s)\, ds \tag{3.1}$$

onde φ é dada por

$$y(x,t) = \varphi(x,t) - \int_0^t h(t-s) \varphi(x,s)\, ds, \tag{3.2}$$

e g, h estão relacionadas conforme (1.2).

De (3.2) temos

$$y_t(x,t) = \varphi_t(x,t) - \int_0^t h'(t-s)\varphi(x,s)\, ds + h(0)\varphi(x,t)$$

e

$$y_{tt}(x,t) = \varphi_{tt}(x,t) - \int_0^t h''(t-s)\varphi(x,s)\, ds + h'(0)\varphi(x,t) + h(0)\varphi_t(x,t).$$

De (3.1) temos

$$\begin{aligned} \varphi_{xx}(x,t) &= y_{xx}(x,t) - \int_0^t g(t-s) y_{xx}(x,s)\, ds \\ \varphi(x,0) &= y(x,0) = y_0(x) \end{aligned}$$

e de (1.2) segue que

$$\varphi_t(x,0) = y_1(x) + g(0) y_0(x).$$

Tomemos então o seguinte problema

$$\left|\begin{array}{lll} \varphi_{tt}(x,t)-\varphi_{xx}(x,t)=f(x,t) & \text{em} &]0,L[\times]0,T[\\ \varphi(0,t)=y(0,t)=0, \quad \varphi(L,t)=y(L,t)=0 & \text{em} &]0,T[\\ \varphi(x,0)=\varphi_0(x), \quad \varphi_t(x,0)=\varphi_1(x) & \text{em} &]0,L[. \end{array}\right. \tag{3.3}$$

onde $\varphi_0(x)=y_0(x)$, $\varphi_1(x)=y_1(x)+g'(0)y_0(x)$ e

$$f(x,t)=\int_0^t h''(t-s)\varphi(x,s)\,ds-h'(0)\varphi(x,t)-h(0)\varphi_t(x,t). \tag{3.4}$$

A solução φ do problema (3.3) pode ser reescrita como $\varphi=\tilde{\varphi}+\zeta$, onde $\tilde{\varphi}$ e ζ são soluções únicas dos problemas

$$\left|\begin{array}{lll} \tilde{\varphi}_{tt}(x,t)-\tilde{\varphi}_{xx}(x,t)=0 & \text{em} &]0,L[\times]0,T[\\ \tilde{\varphi}(0,t)=\tilde{\varphi}(L,t)=0 & \text{em} &]0,T[\\ \tilde{\varphi}(x,0)=y_0(x), \quad \tilde{\varphi}_t(x,0)=y_1(x)+g(0)y_0(x) & \text{em} &]0,L[\end{array}\right. \tag{3.5}$$

e

$$\left|\begin{array}{lll} \zeta_{tt}(x,t)-\zeta_{xx}(x,t)=f(x,t) & \text{em} &]0,L[\times]0,T[\\ \zeta(0,t)=\zeta(L,t)=0 & \text{em} &]0,T[\\ \zeta(x,0)=\zeta_t(x,0)=0 & \text{em} &]0,L[. \end{array}\right. \tag{3.6}$$

e $\varphi=\tilde{\varphi}+\zeta$. Conforme as Desigualdades Direta e Inversa para equação de ondas, provadas na pág. 128 em [17], para $T>2L$ existem constante positivas $\tilde{C}_0$, $\tilde{C}_1$ e $\tilde{C}_2$ tais que

$$\begin{aligned} \tilde{C}_0\left(\|\tilde{\varphi}(\cdot,0)\|_{H_0^1(0,L)}+\|\tilde{\varphi}_t(\cdot,0)\|_{L^2(0,L)}\right) &\leqslant \|\tilde{\varphi}_x(0,\cdot)\|_{L^2(0,T)} \\ &\leqslant \tilde{C}_1\left(\|\tilde{\varphi}(\cdot,0)\|_{H_0^1(0,L)}+\|\tilde{\varphi}_t(\cdot,0)\|_{L^2(0,L)}\right) \end{aligned} \tag{3.7}$$

e

$$\|\zeta_x(0,\cdot)\|_{L^2(0,T)}\leqslant \tilde{C}_2\,\|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))}\,. \tag{3.8}$$

Por outro lado, de (3.4) temos

$$\begin{aligned} \|f(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)} \leqslant{}& |h(0)|\,\|\varphi_t(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}+|h'(0)|\,\|\varphi(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)} \\ &+\int_0^t |h''(t-s)|\,\|\varphi(\cdot,s)\|_{L^2(0,L)}\,ds. \end{aligned} \tag{3.9}$$

De (1.2) temos

$$h(0)=-g(0) \tag{3.10}$$

e

$$h'(0) = g(0)^2 - g'(0) < \varepsilon^2 + C_1\varepsilon. \tag{3.11}$$

pois da hipótese sobre g, temos que $g(0) < \varepsilon$.

Mudando a ordem da convolução e derivando (1.2) duas vezes temos

$$h''(t) = -g''(t) - \int_0^t g(\sigma)h''(t-\sigma)\,d\sigma + h'(0)g(t) + h(0)g'(t).$$

De (3.10), (3.11) e da hipótese (2.4) de que $g'' \leqslant C_3 g$ temos

$$\begin{aligned} |h''(t)| &\leqslant \left| -g''(t) - g(t)\left(g(0)^2 - g(0)\right) - g'(t)g(0) - \int_0^t g(\sigma)h''(t-\sigma)\,d\sigma \right| \\ &\leqslant g(t)\underbrace{\left(C_3 + C_1\varepsilon + \varepsilon^2 + C_1\varepsilon\right)}_{C(\varepsilon)} + \int_0^t g(\sigma)\left|h''(t-\sigma)\right|\,d\sigma. \end{aligned}$$

Integrando em $[0,T]$ temos

$$\begin{aligned} \int_0^T |h''(t)|\;dt &\leqslant C(\varepsilon)\int_0^T g(t)\,dt + \int_0^T\int_0^t g(\sigma)\left|h''(t-\sigma)\right|\,d\sigma\,dt \\ &\leqslant C(\varepsilon)\int_0^\infty g(t)\,dt + \int_0^T\int_0^T g(\sigma)\left|h''(t)\right|\,d\sigma\,dt \\ &\leqslant C(\varepsilon)\int_0^\infty g(t)\,dt + \int_0^\infty g(\sigma)\,d\sigma\int_0^T |h''(t)|\;dt, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\underbrace{\left(1 - \int_0^\infty g(\sigma)\,d\sigma\right)}_{\beta_0}\int_0^T |h''(t)|\,dt \leqslant C(\varepsilon)\int_0^\infty g(t)\,dt.$$

Logo da hipótese (2.2) e do fato de $g(0) < \varepsilon$ temos

$$\int_0^T |h''(t)|\,dt \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{\beta_0}\int_0^\infty g(t)\,dt \leqslant \varepsilon C(\varepsilon). \tag{3.12}$$

De (3.9) - (3.12) concluímos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \|f(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\;dt &\leqslant |h(0)|\int_0^T \|\varphi_t(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\;dt + |h'(0)|\int_0^T \|\varphi(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\;dt \\ &\quad + \int_0^T\int_0^t |h''(t-s)|\,\|\varphi(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\;dsdt \\ &\leqslant \varepsilon\int_0^T \|\varphi_t(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\;dt + \varepsilon(C_1+\varepsilon)\int_0^T \|\varphi(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\;dt \\ &\quad + \varepsilon C(\varepsilon)\int_0^T \|\varphi(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\;dt \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^T \|f(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\, dt \leqslant \varepsilon C(\varepsilon) \int_0^T \left(\|\varphi_t(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)} + \|\varphi(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)} \right) dt.$$

Usando a inequação de energia do Corolário 2.2.5 temos

$$\int_0^T \|f(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\, dt \leqslant \varepsilon C(\varepsilon) T \left(\|\varphi_1\|_{L^2(0,L)} + \|\varphi_0\|_{H_0^1(0,L)} \right)$$

ou equivalentemente

$$\int_0^T \|f(\cdot,t)\|_{L^2(0,L)}\, dt \leqslant \varepsilon C(\varepsilon) T \left(\|y_1 + g(0) y_0\|_{L^2(0,L)} + \|y_0\|_{H_0^1(0,L)} \right). \tag{3.13}$$

Assim de (3.8) e (3.13) segue que

$$\|\zeta_x(0,\cdot)\|_{L^2(0,T)} \leqslant \varepsilon C \left(\|y_1 + g(0) y_0\|_{L^2(0,L)} + \|y_0\|_{H_0^1(0,L)} \right). \tag{3.14}$$

Temos que $\varphi(x,t) = \tilde{\varphi}(x,t) + \zeta(x,t)$, assim

$$\|\varphi_x(0,\cdot)\|_{L^2(0,T)} \geqslant \|\tilde{\varphi}_x(0,\cdot)\|_{L^2(0,T)} - \|\zeta_x(0,\cdot)\|_{L^2(0,T)}.$$

Usando (3.7) e (3.14) na última desigualdade temos

$$\begin{aligned} \|\varphi_x(0,\cdot)\|_{L^2(0,T)} \;\geqslant\; & \tilde{C}_0 \left(\|y_0\|_{H_0^1(0,L)} + \|y_1 + g(0) y_0\|_{L^2(0,L)} \right) \\ & -\varepsilon C \left(\|y_1 + g(0) y_0\|_{L^2(0,L)} + \|y_0\|_{H_0^1(0,L)} \right) \end{aligned}$$

isto é

$$\|\varphi_x(0,\cdot)\|_{L^2(0,T)} \geqslant (\tilde{C}_0 - \varepsilon C) \left((1 - c_p \varepsilon) \|y_0\|_{H_0^1(0,L)} + \|y_1\|_{L^2(0,L)} \right).$$

Tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que $1 - c_p\varepsilon > 0$ e $\tilde{C}_0 - \varepsilon C > 0$ temos

$$\|\varphi_x(0,\cdot)\|_{L^2(0,T)} \geqslant C \left(\|y_0\|_{H_0^1(0,L)} + \|y_1\|_{L^2(0,L)} \right).$$

Portanto de (3.1) segue que

$$\|y_x(0,\cdot) - g * y_x(0,\cdot)\|_{L^2(0,T)} \geqslant C \left(\|y_0\|_{H_0^1(0,L)} + \|y_1\|_{L^2(0,L)} \right),$$

e elevando ao quadrado em ambos o lados e usando o fato de que $(a+b)^2 \geqslant a^2 + b^2$ para $a, b \geqslant 0$ concluímos a demonstração do teorema. ■

3.2 Controlabilidade Exata de Fronteira

O problema de controlabilidade exata na fronteira consiste em dado $T > 0$ determinar um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, de modo que para todo par de condições iniciais $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{H}$, existe um controle α pertencente a um espaço dito *espaço de controle*, tal que a condição de equilíbrio, $u(x,T) = u_t(x,T) = 0$ em $]0, L[$, seja satisfeita para $u = u(x,t)$ solução do problema.

Nesta seção estabeleceremos a controlabilidade exata de fronteira para o seguinte problema homogêneo:

$$\left| \begin{array}{lll} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + \displaystyle\int_0^t g(t-s) u_{xx}(x,s)\, ds = 0 & \text{em} &]0,L[\times]0,T[\\ \qquad u(0,t) = \alpha(t), \qquad u(L,t) = 0 & \text{em} &]0,T[\\ \qquad u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{em} &]0,L[. \end{array} \right. \tag{3.15}$$

o qual é resumido pelo teorema a seguir.

Teorema 3.2.1. *Dado um par de condições iniciais $\{u_0, u_1\} \in L^2(0,L) \times H^{-1}(0,L)$, existe $\alpha \in L^2(0,T)$ tal que a solução $u = u(x,t)$ de (3.15) satisfaz*

$$u(x,T) = u_t(x,T) = 0 \qquad \text{em} \qquad]0,L[$$

para $T > 2L$.

Prova: Utilizamos o Método da Unicidade de Hilbert para estabelecer o resultado. Considere o seguinte problema, que é também chamado *problema regular*

$$\left| \begin{array}{lll} \phi_{tt}(x,t) - \phi_{xx}(x,t) + \displaystyle\int_0^t g(t-s) \phi_{xx}(x,s)\, ds = 0 & \text{em} &]0,L[\times]0,T[\\ \qquad \phi(0,t) = 0, \qquad \phi(L,t) = 0 & \text{em} &]0,T[\\ \qquad \phi(x,0) = \phi_0(x), \qquad \phi_t(x,0) = \phi_1(x) & \text{em} &]0,L[\end{array} \right. \tag{3.16}$$

onde $\{\phi_0, \phi_1\} \in \mathcal{D}(0,L) \times \mathcal{D}(0,L)$.

Do Teorema 2.1.2 temos que o problema (3.16) admite uma única solução forte $\phi = \phi(x,t)$, e do Teorema 2.1.7 segue que

$$\phi \in C^0\left([0,T]; H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)\right) \cap C^1\left([0,T]; H_0^1(0,L)\right).$$

Além disso, pelo Teorema 2.2.11 temos que

$$(\phi_x - g * \phi_x)(0,\cdot) \ \in \ L^2(0,T).$$

Com base na solução $\phi = \phi(x,t)$ do problema regular (3.16), formularemos o seguinte *problema adjunto*

$$\left|\begin{array}{lll} \psi_{tt}(x,t) - \psi_{xx}(x,t) + g \circledast \psi_{xx}(x,t) = 0 & \text{em} &]0,L[\times]0,T[\\ \psi(0,t) = (\phi_x - g * \phi_x)(0,t), \quad \psi(L,t) = 0 & \text{em} &]0,T[\\ \psi(x,T) = \psi_t(x,T) = 0 & \text{em} &]0,L[. \end{array}\right. \tag{3.17}$$

Tomando $T-t$ em lugar de t no problema (3.17) e fazendo $\omega(x,t) = \psi(x,T-t)$ obtemos o seguinte problema equivalente a (3.17)

$$\left|\begin{array}{lll} \omega_{tt}(x,t) - \omega_{xx}(x,t) + \displaystyle\int_0^t g(t-\sigma)\omega_{xx}(x,\sigma)\, d\sigma = 0 & \text{em} &]0,L[\times]0,T[\\ \omega(0,t) = \tilde{\phi}_x(0,t) - \displaystyle\int_t^T g(\sigma - t)\tilde{\phi}_x(0,\sigma)\, d\sigma, \quad \omega(L,t) = 0 & \text{em} &]0,T[\\ \omega(x,0) = 0 = \omega_t(x,0) & \text{em} &]0,L[\end{array}\right. \tag{3.18}$$

onde $\tilde{\phi}_x(0,t) = \phi_x(0,T-t)$. Do Teorema 2.3.2, temos que o problema (3.18) admite uma única solução ultra fraca, e do Teorema 2.3.10 que

$$\psi \in C^0\left([0,T]; L^2(0,L)\right) \cap C^1\left([0,T]; H^{-1}(0,L)\right).$$

A partir da solução $\psi = \psi(x,t)$ de (3.17), definimos a aplicação

$$\begin{array}{rlcl} \Lambda : & \mathcal{D}(0,L) \times \mathcal{D}(0,L) & \to & H^{-1}(0,L) \times L^2(0,L) \\ & \{\phi_0, \phi_1\} & \mapsto & \Lambda\{\phi_0,\phi_1\} = \{-\psi_t(0), \psi(0)\} \end{array} \tag{3.19}$$

onde $\psi_t(s) = \psi_t(\cdot, s)$ e $\psi(s) = \psi(\cdot, s)$ com $s \in [0,T]$.

Multiplicando ambos os lados da equação $(3.17)_1$ por $\phi = \phi(x,t)$ solução de (3.16) e integrando em $]0,L[\times]0,T[$, obtemos

$$\int_0^T\int_0^L \psi_{tt}\phi\, dxdt - \int_0^T\int_0^L \psi_{xx}\phi\, dxdt + \int_0^T\int_0^L g \circledast \psi_{xx}(x,t)\phi(x,t)\, dxdt = 0. \tag{3.20}$$

Temos que

$$\frac{d}{dt}(\psi_t, \phi) = (\psi_{tt}, \phi) + (\psi_t, \phi_t).$$

Integrando sobre $]0,T[$ temos

$$\langle \psi_t(T), \phi(T)\rangle - \langle \psi_t(0), \phi(0)\rangle = \int_0^T \int_0^L \psi_{tt}\phi \, dxdt + \int_0^T (\psi_t, \phi_t) dt,$$

e pela condição $(3.17)_3$ temos

$$\int_0^T \int_0^L \psi_{tt}\phi \, dx \, dt = - \langle \psi_t(0), \phi_0\rangle - \int_0^T (\psi_t, \phi_t) \, dt. \tag{3.21}$$

Integrando por partes a integral do lado direito de (3.21) segue que

$$\int_0^T (\psi_t, \phi_t) \, dt = -(\psi(0), \phi_1) - \int_0^T \int_0^L \psi \phi_{tt} dx \, dt. \tag{3.22}$$

Substituindo (3.22) em (3.21) obtemos

$$\int_0^T \int_0^L \psi_{tt}\phi \, dxdt = - \langle \psi_t(0), \phi_0\rangle + (\psi(0), \phi_1) + \int_0^T \int_0^L \psi \phi_{tt} \, dxdt. \tag{3.23}$$

Agora integrando por partes e usando $(3.16)_2$ temos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L \psi_{xx}\phi \, dxdt &= - \int_0^T \int_0^L \psi_x \phi_x \, dx \, dt \\ &= - \int_0^T \left[\psi \phi_x |_0^L - \int_0^L \psi \phi_{xx} \, dx \right] dt. \end{aligned}$$

De $\psi(L,t) = 0$ segue que

$$\int_0^T \int_0^L \psi_{xx}\phi \, dxdt = \int_0^T \psi(0,t)\phi_x(0,t) \, dt + \int_0^T \int_0^L \psi \phi_{xx} \, dxdt. \tag{3.24}$$

Integrando por partes duas vezes na variável x, tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L \int_t^T g(s-t)\psi_{xx}(x,s)\phi(x,t) \, dsdxdt &= \int_0^T \int_t^T g(s-t)\psi(0,s)\phi_x(0,t) \, dsdt \\ &+ \int_0^T \int_0^L \int_t^T g(s-t)\psi(x,s)\phi_{xx}(x,t) \, dsdxdt. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Mudando a ordem de integração na variável temporal em (3.25) e substituindo (3.23), (3.24) e (3.25) em (3.20) segue que

$$\begin{aligned} - \langle \psi_t(0), \phi_0\rangle + (\psi(0), \phi_1) + \int_0^T \int_0^L \left(\phi_{tt} - \phi_{xx} + \int_0^t g(t-s)\phi_{xx}(x,s) \, ds \right) \psi \, dxdt = \\ \int_0^T \left(\phi_x(0,t) - \int_0^t g(t-s)\phi_x(0,s) \, ds \right) \psi(0,t) \, dt \end{aligned}$$

e usando $(3.16)_1$ e $(3.17)_2$ temos

$$-\langle \psi_t(0), \phi_0 \rangle + (\psi(0), \phi_1) = \int_0^T \left| \phi_x(0,t) - \int_0^t g(t-s)\phi_x(0,s)\, ds \right|^2 dt. \tag{3.26}$$

Considerando o lado esquerdo da igualdade (3.26) como o produto interno entre $\{-\psi_t(0), \psi(0)\}$ e $\{\phi_0, \phi_1\}$ segue que

$$\begin{aligned} \langle \Lambda\{\phi_0, \phi_1\}, \{\phi_0, \phi_1\} \rangle &= -\langle \psi_t(0), \phi_0 \rangle + (\psi(0), \phi_1) \\ &= \int_0^T \left| \phi_x(0,t) - \int_0^t g(t-s)\phi_x(0,t) \right|^2 dt. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Definamos em $\mathcal{D}(0,L) \times \mathcal{D}(0,L)$ a seguinte forma quadrática

$$\|\{\phi_0, \phi_1\}\|_F = \left(\int_0^T \left| \phi_x(0,t) - \int_0^t g(t-s)\phi_x(0,s)\, ds \right|^2 dt \right)^{1/2} \tag{3.28}$$

que é uma semi-norma em $\mathcal{D}(0,L) \times \mathcal{D}(0,L)$.

Em virtude do Teorema 3.1.1, temos que se $\|\{\phi_0, \phi_1\}\|_F = 0$ então $\phi_0 = \phi_1 = 0$, portanto $\|\cdot\|_F$ é uma norma em $\mathcal{D}(0,L) \times \mathcal{D}(0,L)$.

Motivado pela norma $\|\cdot\|_F$ definimos em $\mathcal{D}(0,L) \times \mathcal{D}(0,L)$ o seguinte produto interno

$$\begin{gathered} \langle \{\phi_0, \phi_1\}, \{\zeta_0, \zeta_1\} \rangle_F = \\ \int_0^T \left(\phi_x(0,t) - \int_0^t g(t-s)\phi_x(0,s)\, ds \right) \left(\zeta_x(0,t) - \int_0^t g(t-s)\zeta_x(0,s)\, ds \right) dt \end{gathered} \tag{3.29}$$

onde $\zeta = \zeta(x,t)$ é solução do problema (3.16) com dados iniciais $\{\zeta_0, \zeta_1\}$ pertencentes a $\mathcal{D}(0,L) \times \mathcal{D}(0,L)$.

Comparando (3.27) e (3.29) temos

$$\langle \Lambda\{\phi_0, \phi_1\}, \{\zeta_0, \zeta_1\} \rangle = \langle \{\phi_0, \phi_1\}, \{\zeta_0, \zeta_1\} \rangle_F\,,$$

e usando a desigualdade Cauchy-Schwarz segue que

$$|\langle \Lambda\{\phi_0, \phi_1\}, \{\zeta_0, \zeta_1\} \rangle| \leqslant \|\{\phi_0, \phi_1\}\|_F \, \|\{\zeta_0, \zeta_1\}\|_F\,.$$

Donde concluímos que a forma bilinear, b, definida a partir Λ

$$\Big\{ \{\phi_0, \phi_1\}, \{\zeta_0, \zeta_1\} \Big\} \xrightarrow{b} \langle \Lambda\{\phi_0, \phi_1\}, \{\zeta_0, \zeta_1\} \rangle \tag{3.30}$$

é contínua em $\mathcal{D}(0,L) \times \mathcal{D}(0,L)$.

Seja F o completamento de $\mathcal{D}(0,L) \times \mathcal{D}(0,L)$ com respeito a norma $\|\cdot\|_F$ dada em (3.28). Assim do Teorema 2.2.11 temos que $H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \hookrightarrow F$, e do Teorema 3.1.1 segue que $F \hookrightarrow H_0^1(0,L) \times L^2(0,L)$. Portanto

$$F = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L).$$

A forma bilinear b possui uma extensão por continuidade ao fecho F, que continuaremos denotando com a mesma letra.

Note que b é uma forma bilinear contínua em F, e além disto b também é coerciva. De fato

$$b\left(\{\phi_0,\phi_1\},\{\phi_0,\phi_1\}\right) = \langle \Lambda\{\phi_0,\phi_1\},\{\phi_0,\phi_1\}\rangle = \int_0^T \left|(\phi_x - g*\phi_x)(0,t)\right|^2 dt,$$

pelo Teorema 3.1.1 temos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$b\left(\{\phi_0,\phi_1\},\{\phi_0,\phi_1\}\right) \geqslant C\|\{\phi_0,\phi_1\}\|_{H_0^1(0,L)\times L^2(0,L)}.$$

Logo, pelo Lema de Lax-Milgram, para cada $\{\eta_0,\eta_1\} \in F'$, existe uma única $\{\phi_0,\phi_1\} \in F$ tal que

$$\langle \Lambda\{\phi_0,\phi_1\},\{\zeta_0,\zeta_1\}\rangle = \langle\{\eta_0,\eta_1\},\{\zeta_0,\zeta_1\}\rangle_{F'\times F}$$

para toda $\{\zeta_0,\zeta_1\} \in F$, ou equivalentemente, para todo $\{\eta_0,\eta_1\}$ em F' existe um único par $\{\phi_0,\phi_1\} \in F$, tal que

$$\Lambda\{\phi_0,\phi_1\} = \{\eta_0,\eta_1\}.$$

Portanto $\Lambda : F \to F'$ é um isomorfismo.

Tomando $\mathcal{H} = L^2(0,L) \times H^{-1}(0,L)$ e $\{u_0,u_1\} \in \mathcal{H}$, existe um único par $\{\phi_0,\phi_1\} \in F$ tal que

$$\Lambda\{\phi_0,\phi_1\} = \{-u_1,u_0\}$$

e decorre de (3.19) que

$$\psi(0) = u_0 \quad \text{e} \quad \psi_t(0) = u_1.$$

Substituindo em (3.18) as condições iniciais pelas condições finais, $\omega(x,T) = u_0(x)$ e $\omega_t(x,T) = u_1(x)$, temos o seguinte problema

$$\left|\begin{array}{lll} \omega_{tt}(x,t) - \omega_{xx}(x,t) + \displaystyle\int_0^t g(t-\sigma)\omega_{xx}(x,\sigma)\,d\sigma = 0 & \text{em} &]0,L[\times]0,T[\\ \omega(0,t) = \tilde{\phi}_x(0,t) - \displaystyle\int_t^T g(\sigma-t)\tilde{\phi}_x(x,\sigma)\,d\sigma, \quad \omega(L,t) = 0 & \text{em} &]0,T[\\ \omega(x,T) = u_0(x), \quad \omega_t(x,T) = u_1(x) & \text{em} &]0,L[. \end{array}\right. \tag{3.31}$$

Assim tomando o controle $\alpha(t) = \tilde{\phi}_x(0,t) - \displaystyle\int_t^T g(\sigma-t)\tilde{\phi}_x(0,\sigma)\,d\sigma$ para (3.15), com dados iniciais $\{u_0, u_1\} \in \mathcal{H}$, temos que $\omega = \omega(x,t)$ e $u = u(x,t)$ são soluções ultra fracas do mesmo problema. Além disto, temos que $u(x,t) = \omega(x, T-t) = \psi(x,t)$ para todo $(x,t) \in [0,L] \times [0,T]$, logo por $(3.17)_3$ temos

$$u(x,T) = \omega(x,0) = \psi(x,T) = 0$$

e

$$u_t(x,T) = -\omega_t(x,0) = \psi_t(x,T) = 0.$$

O que mostra a controlabilidade exata na fronteira de (3.15). ■

Corolário 3.2.2. *Se $w_0 \in L^2(0,L)$, existe $\tilde{\alpha} \in L^2(0,T)$ tal que $w = w(x,t)$ é a única solução do problema de controle*

$$\left|\begin{array}{lll} w_{tt} - w_{xx} + g \circledast w_{xx} = 0 & em &]0,L[\times]0,T[\\ w(0,t) = \tilde{\alpha}(t), \quad w(L,t) = 0 & em &]0,T[\\ w(x,T) = w_t(x,T) = 0 & em &]0,L[\\ w(x,0) = w_0(x), \quad e \;\; w_t(x,0) = 0 & em &]0,L[. \end{array}\right. \tag{3.32}$$

Prova: Considere o isomorfismo $\Lambda : F \to F'$ obtido no Teorema 3.2.1. Assim, dado $\{w_0, 0\} \in \mathcal{H}$, existe um único $\{\phi_0, \phi_1\} \in F$ tal que

$$\Lambda\{\phi_0, \phi_1\} = \{0, w_0\} = \{-\psi_t(0), \psi(0)\} \tag{3.33}$$

onde $\psi = \psi(x,t)$ é a única solução ultra fraca do problema (3.17).

Portanto para $\tilde{\alpha}(t) = (\phi_x - g * \phi_x)(0,t)$ temos que $w = \psi$ e de (3.33) segue $(3.32)_4$.

3.3 Fórmula de Reconstrução

Nesta seção obteremos a fórmula de reconstrução da força externa associada ao problema (2.1). Inicialmente, observamos que para um par de condições iniciais $\{u_0, 0\} \in L^2(0,L) \times H^{-1}(0,L)$ existe um único controle $\alpha \in L^2(0,T)$ tal que a solução $u = u(x,t)$ de (3.15) satisfaz o Teorema 3.2.1. Sendo assim temos a seguinte definição.

Definição 3.3.1. *Seja* Π *o operador linear dado por*

$$\begin{array}{rccc} \Pi: & L^2(0,L) & \longrightarrow & L^2(0,T) \\ & u_0 & \longmapsto & \alpha \end{array}$$

onde $u_0 = u_0(x)$ *e* $\alpha = \alpha(t)$ *são dados pelo Teorema 3.2.1.*

O operador Π é limitado em virtude da desiguladade (2.108) do Teorema 2.2.11.

Por outro lado consideremos a equação de Volterra de segundo tipo

$$\left|\begin{array}{rcl} \lambda(0)\theta'(t) + \displaystyle\int_t^T (\lambda'(s-t)\theta'(s) + \lambda(s-t)\theta(s))\, ds & = & \eta(t) \\ \theta(0) & = & 0. \end{array}\right. \tag{3.34}$$

Para cada $\eta \in L^2(0,T)$ o problema (3.34) admite uma única solução $\theta \in H^1(0,T)$ de modo que

$$\|\theta\|_{H^1(0,T)} \leqslant C \|\eta\|_{L^2(0,T)}$$

conforme [10]. Com isto temos a seguinte definição.

Definição 3.3.2. *Seja* Φ *o operador limitado dado por*

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & L^2(0,T) & \longrightarrow & H^1(0,T) \\ & \eta & \longmapsto & \theta \end{array}$$

onde θ *é solução de (3.34).*

Definiremos também o operador $\mathcal{K} : L^2(0,T) \to H^1(0,T)$ dado por

$$\mathcal{K}w(t) = \int_0^t \lambda(t-s)w(s)\, ds. \tag{3.35}$$

e assim temos o seguinte lema.

Lema 3.3.3. *Existem uma constante $C > 0$ tal que*

$$C^{-1} \|\mathcal{K}w\|_{H^1(0,T)} \leqslant \|w\|_{L^2(0,T)} \leqslant C \|\mathcal{K}w\|_{H^1(0,T)} .$$

para toda $w \in L^2(0,T)$.

Prova: Veja Teorema 1 em [10].

Observe que se $\mathcal{K}^* : Img(\mathcal{K}) \subset H^1(0,T) \to L^2(0,T)$ é o operador adjunto de $\mathcal{K}$, então

$$(\mathcal{K}^*\theta)(t) = \lambda(0)\theta'(t) + \int_t^T (\lambda'(\xi - t)\theta'(\xi) + \lambda(\xi - t)\theta(\xi))\, d\xi$$

Portanto pela Definição 3.3.2, temos verdadeira a seguinte igualdade

$$(K^*\Phi)\,\eta = \eta \qquad \text{onde} \qquad \eta \in L^2(0,T). \tag{3.36}$$

Considere o problema

$$\left| \begin{array}{lcl} \tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} + g * \tilde{u}_{xx} = 0 & \text{em} &]0,L[\times]0,T[\\ \tilde{u}(0,t) = 0, \quad \tilde{u}(L,t) = 0 & \text{em} &]0,T[\\ \tilde{u}(x,0) = 0, \quad \tilde{u}_t(x,0) = f(x) & \text{em} &]0,L[\end{array} \right. \tag{3.37}$$

onde $f \in L^2(0,L)$. Do Teorema 2.1.2 temos a existência e unicidade da solução forte $\tilde{u} = \tilde{u}(x,t)$ de (3.37). Assim, temos o seguinte resultado.

Lema 3.3.4. *Se $f \in L^2(0,L)$ e $\lambda \in C^1[0,T]$ de modo que $\lambda(0) \neq 0$ então a função $u(x,t) = \mathcal{K}\tilde{u}(x,t)$ é solução fraca do problema*

$$\left| \begin{array}{lcl} u_{tt} - u_{xx} + g * u_{xx} = \lambda(t)f(x) & em &]0,L[\times]0,T[\\ u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0 & em &]0,T[\\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 & em &]0,L[. \end{array} \right. \tag{3.38}$$

Prova: Temos que $u(x,t) = \mathcal{K}\tilde{u}(x,t)$, deste modo

$$u_t(x,t) = \mathcal{K}\tilde{u}_t(x,t) \tag{3.39}$$

$$u_{tt}(x,t) = \mathcal{K}\tilde{u}_{xx}(x,t) + \lambda(t)f(x) \tag{3.40}$$

$$u_{xx}(x,t) = \mathcal{K}\tilde{u}_{xx}(x,t) \tag{3.41}$$

$$g * u_{xx}(x,t) = \mathcal{K}(g * \tilde{u}_{xx})(x,t). \tag{3.42}$$

De (3.39)-(3.42) e de $(3.37)_1$ temos que $(3.38)_1$ é satisfeita pois

$$u_{tt} - u_{xx} + g * u_{xx} = \mathcal{K}\underbrace{(\tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} + g * \tilde{u}_{xx})}_{=0} + \lambda(t)f(x) = \lambda(t)f(x).$$

Além disto temos

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \mathcal{K}\tilde{u}(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) &= \mathcal{K}\tilde{u}_t(x,0) = 0, \end{aligned}$$

e de $(3.37)_2$ obtemos

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \mathcal{K}\tilde{u}(0,t) = 0, \\ u(L,t) &= \mathcal{K}\tilde{u}(L,t) = 0. \end{aligned}$$

Portanto o lema está demonstrado. ■

No próximo resultado demonstraremos que a força externa f é limitada por uma norma conveniente de $u_x(0,t) - \int_0^t g(t-s)u_x(0,s)\,ds$ e vice-versa.

Teorema 3.3.5. *Se $\lambda \in C^1[0,T]$ é tal que $\lambda(0) \neq 0$, e $f \in L^2(0,L)$, então existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que*

$$C_1 \left\| u_x(0,t) - \int_0^t g(t-s)u_x(0,s)\,ds \right\|^2_{H^1(0,T)} \leqslant$$
$$\|f\|^2_{L^2(0,L)} \leqslant C_2 \left\| u_x(0,t) - \int_0^t g(t-s)u_x(0,s)\,ds \right\|^2_{H^1(0,T)}.$$

Prova: Do Teorema 2.2.11 e do Teorema 3.1.1 temos que existem constantes $\tilde{C}_1 > 0$ e $\tilde{C}_2 > 0$ tal que para a solução $\tilde{u} = \tilde{u}(x,t)$ de (3.37) vale as seguintes desigualdades

$$\begin{gathered} \tilde{C}_1 \int_0^T \left| \tilde{u}_x(0,t) - \int_0^t g(t-s)\tilde{u}_x(0,s)\,ds \right|^2 dt \leqslant \\ \int_0^L |f(x)|^2\,dx \leqslant \tilde{C}_2 \int_0^T \left| \tilde{u}_x(0,t) - \int_0^t g(t-s)\tilde{u}_x(0,s)\,ds \right|^2 dt. \end{gathered} \tag{3.43}$$

Além disso

$$u_x(x,t) = \frac{d}{dx}\int_0^t \lambda(s)\tilde{u}(x,t-s)\,ds = \int_0^t \lambda(s)\tilde{u}_x(x,t-s)\,ds = \mathcal{K}(\tilde{u}_x)(x,t)$$

e

$$(g * u_x)(x,t) = (g * (\mathcal{K}\tilde{u}_x))(x,t) = (g * (\lambda * \tilde{u}_x))(x,t) = \mathcal{K}(g * \tilde{u}_x)(x,t),$$

isto é,

$$\mathcal{K}(\tilde{u}_x - g * \tilde{u}_x)(x,t) = (u_x - g * u_x)(x,t). \tag{3.44}$$

Do Lema 3.3.3, temos que existe constantes positivas $\tilde{C}_3$ e $\tilde{C}_4$ tais que

$$\tilde{C}_3 \left\| (u_x - g * u_x)(0,\cdot) \right\|_{H^1(0,T)} \leqslant \left\| (\tilde{u}_x - g * \tilde{u}_x)(0,\cdot) \right\|_{L^2(0,T)} \leqslant \tilde{C}_4 \left\| (u_x - g * u_x)(0,\cdot) \right\|_{H^1(0,T)}. \tag{3.45}$$

Combinando (3.45) e (3.43), concluímos a demonstração do teorema. ■

Estabeleceremos agora a fórmula de reconstrução para os coeficientes de Fourier de f a partir de $u_x(0,t) - \displaystyle\int_0^t g(t-s)u_x(0,s)\,ds$.

Lema 3.3.6. *Seja $\tilde{u} = \tilde{u}(x,t)$ solução de (3.37) e $w = w(x,t)$ solução de (3.32), então*

$$\int_0^T \alpha(t)(\tilde{u}_x - g * \tilde{u}_x)(0,t)\,dt = \int_0^L w_0(x)f(x)\,dx.$$

Prova: Multiplicando (3.32) por $\tilde{u}$ e integrando por partes em $]0,L[\times]0,T[$ temos

$$\underbrace{\int_0^T \int_0^L w_{tt}\tilde{u}\,dxdt}_{I_1} - \underbrace{\int_0^T \int_0^L w_{xx}\tilde{u}\,dxdt}_{I_2} + \underbrace{\int_0^T \int_0^L g \circledast w_{xx}\tilde{u}\,dxdt}_{I_3} = 0. \tag{3.46}$$

Integrando por partes I_1 temos

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^L \int_0^T w_{tt}\tilde{u}\,dtdx = \int_0^L \left[(w_t\tilde{u})\big|_0^T - \int_0^T w_t\tilde{u}_t\,dt \right] dx \\ &= -\int_0^L \left[(w\tilde{u}_t)\big|_0^T - \int_0^T w\tilde{u}_{tt}\,dt \right] dx \\ &= \int_0^L w_0(x)f(x)\,dx + \int_0^L \int_0^T w\tilde{u}_{tt}\,dtdx, \end{aligned}$$

isto é,

$$I_1 = \int_0^L w_0(x)f(x)\,dx + \int_0^L \int_0^T w\tilde{u}_{tt}\,dtdx. \tag{3.47}$$

Em I_2 temos

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^T \left[(w_x\tilde{u})|_0^L - \int_0^L w_x\tilde{u}_x\,dx \right] dt \\
&= -\int_0^T (w\tilde{u}_x)|_0^L - \int_0^L w\tilde{u}_{xx}\,dxdt \\
&= \int_0^T \alpha(t)\tilde{u}_x(0,t)\,dt + \int_0^T\int_0^L w\tilde{u}_{xx}\,dxdt. \qquad (3.48)
\end{aligned}
$$

Em I_3 temos

$$
\begin{aligned}
I_3 = -\int_0^T\int_0^L g\circledast w_x\tilde{u}_x\,dxdt &= -\int_0^T (\tilde{u}_x g\circledast w)|_0^L - \int_0^L \tilde{u}_{xx} g\circledast w\,dxdt \\
&= \int_0^T \tilde{u}_x(0,t)g\circledast\alpha(t)\,dt + \int_0^T\int_0^L g\circledast w\tilde{u}_{xx}\,dxdt.
\end{aligned}
$$

Agora mudando a ordem de integração temos

$$
I_3 = \int_0^T \alpha(t)\int_0^t g(t-s)\tilde{u}_x(0,s)\,dsdt + \int_0^T\int_0^L w(x,t)\int_0^t g(t-s)\tilde{u}_{xx}(x,s)\,dsdxdt. \qquad (3.49)
$$

Substituindo (3.47) - (3.49) em (3.46) temos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L w_0(x)f(x)\,dx + \int_0^T\int_0^L w\tilde{u}_{tt}\,dxdt - \int_0^T \alpha(t)\tilde{u}_x(0,t)\,dt - \int_0^T\int_0^L w\tilde{u}_{xx}\,dxdt + \\
&+\int_0^T \alpha(t)\int_0^t g(t-s)\tilde{u}_x(0,s)\,dsdt + \int_0^T\int_0^L w(x,t)\int_0^t g(t-s)\tilde{u}_{xx}(x,s)\,dsdxdt = 0,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\int_0^L w\left(\tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} + \int_0^t g(t-s)\tilde{u}_{xx}(x,s)\,ds\right) dxdt + \\
\int_0^L w_0(x)f(x)\,dx - \int_0^T \alpha(t)\left(\tilde{u}_x(0,t) - \int_0^t g(t-s)\tilde{u}_x(0,s)\,ds\right) dt = 0
\end{aligned}
$$

e usando $(3.37)_1$ na equação anterior concluímos a demonstração do lema. ■

Agora defina, para todo $x \in (0,L)$, a sequência

$$
\xi_n(x) := \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \qquad (3.50)
$$

Usando a Definição 3.3.1, tome α_n da forma

$$
\alpha_n := \Pi(\xi_n) \ \in \ L^2(0,T). \qquad (3.51)
$$

Teorema 3.3.7. *Seja* $\Theta_n = (\Phi(\Pi(\xi_n)))$. *Então*

$$f_n = ((u_x - g * u_x)(0,t), \Theta_n)_{[H^1(0,T)]^2}$$

é o n-ésimo coeficiente de Fourier de f*, onde* u *é solução de (2.1).*

Prova: Como $u = \mathcal{K}\tilde{u}$ onde $\tilde{u}$ é solução de (3.37), então de (3.44) e (3.36) temos

$$\begin{aligned} ((u_x - g * u_x)(0,\cdot), \Theta_n)_{[H^1(0,T)]^2} &= (\mathcal{K}(\tilde{u}_x - g * \tilde{u}_x)(0,\cdot), \Phi(\Pi(\xi_n)))_{[H^1(0,T)]^2} \\ &= ((\tilde{u}_x - g * \tilde{u}_x)(0,\cdot), \mathcal{K}^*\Phi(\Pi(\xi_n)))_{[L^2(0,T)]^2} \\ &= ((\tilde{u}_x - g * \tilde{u}_x)(0,\cdot), \Pi(\xi_n))_{L^2(0,T)^2} \\ &= ((\tilde{u}_x - g * \tilde{u}_x)(0,\cdot), \alpha_n(\cdot)))_{[L^2(0,T)]^2}, \end{aligned}$$

isto é,

$$((u_x - g * u_x)(0,\cdot), \Theta_n)_{[H^1(0,T)]^2} = \int_0^T (\tilde{u}_x - g * \tilde{u}_x)(0,t)\alpha_n(t)\,dt. \tag{3.52}$$

Tomando $w_n = w_n(x,t)$ soluções do problema de controle (3.32) com dado inicial ξ_n no lugar de w_0, e aplicando o Lema 3.3.6 em (3.52) temos

$$((u_x - g * u_x)(0,\cdot), \Theta_n)_{H^1(0,T)^2} = \int_0^L \xi_n(x) f(x)\,dx.$$

O que conclui a demonstração. ■

Considerações Finais

Neste trabalho estudamos a existência, unicidade e regularidade de soluções fortes, fracas e ultra fracas para uma equação viscoelástica.

Para garantir a existência de solução forte e fraca, consideramos o problema não homogêneo com condições de Dirichlet e aplicamos o Método de Galerkin. A solução fraca, foi obtida por meio de aproximações de soluções fortes. No estudo de solução ultra fraca, utilizamos o método de transposição para um problema homogêneo com condição de contorno não homogênea, e dados iniciais menos regulares que nos dois casos precedentes.

Empregando o Método da Unicidade de Hilbert, demonstramos a controlabilidade exata na fronteira para equação viscoelástica. Este resultados de controlabilidade, em conjunto com resultados de M. Yamamoto [10], permitiram obter os coeficientes de Fourier da força externa que era o principal objetivo deste trabalho.

Bibliografia

[1] DAFERMOS, C. M. *Assymptotic Stability in Viscoelasticity.* Arch. Rat. Mech. Anal., vol 37, pp 297-308, 1970.

[2] DAFERMOS, C. M., NOHEL, J. A., *A Nonlinear Hyperbolic Volterra Equation in Viscoelasticity*, Amer. J. Math Supplement, pp 87-116, 1981.

[3] RIVERA, J. E. M., *Global Solution On A Quasilinear Wave Equation With Memory.*, Bollettino Unione Matemática Italiana, Italia, v. 7, n. 8-B, pp. 289-303, 1994.

[4] RIVERA, J. E. M., FATORI, L. H., *Smoothing Effect And Propagation Of Singularities For Systems Arising In Viscoelasticity.*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, USA, v. 206, n. 1, pp. 397-427, 1997.

[5] RIVERA, J. E. M., OQUENDO, H. P.; The Transmition Problem of Viscoelastic. *Acta Applicandae Mathematicae 62*, pp 1-21 (2000).

[6] LIONS, J. L. *Controlabilité Exacte Pertubations et Stabilization de Systèmes Distribués.*, Tomo 1, Masson, RMA 8, 1988.

[7] KOMORNIK, V. *Exact Controllability and Stabilization: the Multiplier Method*, John Wiley & Sons, Chichester, 1994.

[8] CAVALCANTI, M. M., CAVALCANTI, V. N. D., ROCHA, A., SORIANO, J. A., *Exact Controllability of a Second-Order Integro-Differential Equation witha Pressure Term*, Electronic Journal on the Qualitative Theory of Differential Equations, v. 9, p. 1-18, 1998.

[9] BRUCKNER, G., YAMAMOTO, M., *On The Determination of point sources by Boundary observation: uniqueness, stability and reconstruction*, Inverse Problems 16, pp. 723, 2000.

[10] YAMAMOTO, M., *Stability, reconstruction formula e regularization for a inverse source hyperbolic problem by a control method*, Inverse Problems, 11, pp. 481-496, 1995.

[11] RIVERA, J. E. M., SARE, H. D. F. *Control and reconstruction formula for a Timoshenko system*, Pré-print, 2006.

[12] ADAMS, R.A. *Sobolev Spaces.* New York, Academic Press, 1975.

[13] KREYSZIG, E., *Introductory Functional Analysis with Applications.* New York, John Wiley, 1989.

[14] BRÉZIS, H. *Análisis funcional, Teoría y Aplicaciones.* París: Masson Editeur, 1983.

[15] RIVERA, J.E.M. *Introdução às Distribuições e Equações Diferenciais Parciais.* Rio de Janeiro, LNCC, 2004.

[16] EVANS, L.C. *Partial Differential Equations.* University of California, Berkeley, 1998.

[17] MEDEIROS, L. A.; Exact controllability for wave equations - HUM., UFRJ ,Rio de Janeiro - RJ, 1993.

[18] MEDEIROS, L.A., RIVERA, P.H. *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais.* Textos de Métodos Matemáticos 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1975.

[19] MEDEIROS, L.A., MIRANDA, M.M. *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais.* Textos de Métodos Matemáticos 25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.

[20] KIM, J.U., *A boundary thin obstacle problem for a wave equation.* Comm. Partial Differential Equations, v.14, p.1011-1026, 1989.

[21] TEMAM, R., *NAVIER-STOKES EQUATIONS THEORY AND NUMERICAL ANALYSIS.* Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1977.

Comm. Partial Differential Equations, v.14, p.1011-1026, 1989.

[22] MEDEIROS, L.A., ANDRADE, N.G. *Iniciação às Equações Diferenciais Parciais.* Rio de Janeiro, LTC, 1978.

[23] TRICOMI, F. G. *Integral Equations.* Interscience Publisher, New York, 1957.

[24] KRASNOV, M., KISELIOV, A., MAKARENKO. G.,*Ecuaciones Integrales*, Mir Editora, Moscou, 1970.

[25] MILLA MIRANDA, M.A.; MEDEIROS, L.A. *Espaços de Sobolev.* Rio de Janeiro: Textos de Métodos Matemáticos 25, IM-UFRJ, 2000.

[26] YAMAMOTO, M., *Reconstruction of sources terms in evolution equations by exact controlability*, Proceedings of the IFIP WG7.2 International Conference on Control of Distributed Parameter and Stochastic Systems, pp. 143-152, 1999.

Índice