



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

RAFAEL MASSAMBONE DE OLIVEIRA

**CARACTERIZAÇÃO E CONTINUIDADE DAS
MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS MORFOLÓGICAS FUZZY
BASEADAS EM UNINORMAS**

Londrina
2010

RAFAEL MASSAMBONE DE OLIVEIRA

**CARACTERIZAÇÃO E CONTINUIDADE DAS MEMÓRIAS
ASSOCIATIVAS MORFOLÓGICAS FUZZY BASEADAS EM
UNINORMAS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de mestre.

Orientador: Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita.

Londrina
2010

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da
Universidade Estadual de Londrina.**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

O48c Oliveira, Rafael Massambone de.

Caracterização e continuidade das memórias associativas morfológicas fuzzy baseadas em uninormas / Rafael Massambone de Oliveira. – Londrina, 2010. xiii, 90 f. : il.

Orientador: Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita.

Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2010.

Inclui bibliografia.

1. Memória associativa – Teses. 2. Morfologia matemática – Teses. 3. Sistemas de memória de computadores – Teses. 4. Redes neurais (Computação) – Teses. 5. Conjuntos difusos – Teses. I. Mesquita, Marcos Eduardo do Valle. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

CDU 519.683

RAFAEL MASSAMBONE DE OLIVEIRA

**CARACTERIZAÇÃO E CONTINUIDADE DAS MEMÓRIAS
ASSOCIATIVAS MORFOLÓGICAS FUZZY BASEADAS EM
UNINORMAS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de mestre.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Peter Sussner
IMECC – UNICAMP – SP

Prof. Dr. Naresh Kumar Sharma
UEL – Londrina – PR

Prof. Dr. Ernesto Fernando Ferreyra Ramírez
UEL – Londrina – PR

Prof. Dr. Marcos Eduardo Ribeiro do Valle
Mesquita
UEL – Londrina – PR

Londrina, 07 de maio de 2010.

*Dedico este trabalho aos meus pais
Reinaldo de Oliveira e Fátima Maria Massambone de Oliveira.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer ao meu orientador Marcos Eduardo Valle, pela paciência e pelo conhecimento transmitido com profundo respeito.

Agradeço também a todos os meus amigos e professores do PGMAC.

Agradeço a Fundação Educacional do Município de Assis - FEMA, que foi onde dei início a essa trajetória. Em particular, agradeço ao Professor Laudo Claumir Santos, que foi um verdadeiro mestre durante a minha graduação.

Agradeço a todos os meus companheiros de república, Leandro, Danilo, Diego, Ioda, Gilson, Anderson e Eduardo pelos bons momentos.

Fico feliz em poder agradecer aos meus amigos de Assis/SP Guilherme, Lais, Pedro, João Augusto, Theo, Alexandre, Glauco, Thiago e Aline sem vocês grande parte da minha vida teria sido bem diferente, para não dizer sem graça.

Agradeço ao meu irmão Rodolfo Massambone de Oliveira pelo companheirismo e apoio digno de um grande irmão.

Agradeço a todos os amigos da Fundação Pró-Vida e ao Dr. Celso Charuri.

Agradeço de coração por ter conhecido Manoel Eduardo de Oliveira, Yolita Machado Lopes de Oliveira e Chiara de Oliveira, vocês são verdadeiros amigos!

Especialmente e com muito amor, gostaria de agradecer a Amanda de Oliveira, minha amiga, minha companheira, minha namorada,..., a mulher da minha vida. TE AMO PARA TODO O SEMPRE!

A todos vocês, muito obrigado!

OLIVEIRA, Rafael Massambone de. **Caracterização e continuidade das memórias associativas morfológicas fuzzy baseadas em uninormas**. 2010. 90 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

RESUMO

Um modelo de *memória associativa* (AM, Associative Memory), dado por uma rede neural fuzzy em que os neurônios efetuam operações elementares da morfologia matemática (MM) e que é usado para o armazenamento e recordação de padrões fuzzy, é chamado *memória associativa morfológica fuzzy* (FMAM, Fuzzy Morphological Associative Memory). Esta dissertação de mestrado se concentra na classe de memórias associativas morfológicas fuzzy baseadas em uninormas, que generaliza vários modelos de *memórias associativas fuzzy* (FAMs, Fuzzy Associative Memories), incluindo a classe das *memórias associativas fuzzy implicativas* (IFAMs, Implicative Fuzzy Associative Memories), substituindo a norma triangular e co-norma triangular por um operador uninorma. A dissertação está dividida em três partes. A primeira parte revela que a estrutura matemática chamada CLODUM (Complete Lattice Ordered Double Monoid), representa uma estrutura apropriada para a classe das FMAMs baseadas em uninormas. Precisamente, mostramos que certos modelos de FAM realizam um mapeamento associativo que efetua uma dilatação ou uma erosão que é invariante sob regradações dos padrões fuzzy se, e somente se, forem uma FMAM baseada em uninorma. Além disso, em um CLODUM, temos que o problema de encontrar uma FMAM baseada em uninorma apropriada para um determinado problema de associação corresponde ao problema mais simples de determinar uma adequada matriz de pesos sinápticos. Em vista desse fato, a segunda parte da dissertação se concentra no *aprendizado implicativo fuzzy* (IFL, Implicative Fuzzy Learning), também chamado de aprendizado fuzzy por adjunção, que pode ser efetivamente aplicado para o armazenamento de um conjunto de memórias fundamentais em FMAMs baseadas em uni-normas. Além disso, ressaltamos que este esquema de armazenamento fornece, em um certo sentido, uma matriz de pesos sinápticos ótima e, conseqüentemente, a melhor FMAM num dado clodum. Em particular, mostramos que as FMAMs baseadas em uninormas apresentam ótima capacidade absoluta de armazenamento no caso auto-associativo. Finalmente, a terceira parte da dissertação estende a noção de continuidade introduzida por Perfilieva e Lehmke para a classe de FMAMs baseadas em uninormas. Como consequência, temos que uma FMAM baseada em uninorma é contínua se e somente se é capaz de armazenar cada associação no conjunto de memórias fundamentais. No caso auto-associativo, qualquer FMAM baseada em uninorma treinada com o IFL é contínua.

Palavras-chave: Memória Associativa. Morfologia Matemática. Conjuntos Fuzzy. Redes Neurais Artificiais.

OLIVEIRA, Rafael Massambone de. **Caracterização e continuidade das memórias associativas morfológicas fuzzy baseadas em uninormas**. 2010. 90 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

ABSTRACT

An *associative memory* (AM) model, given by a fuzzy neural network in which the neurons perform elementary operations of mathematical morphology (MM) and that is used for the storage and recall of fuzzy patterns, is called a *fuzzy morphological associative memory* (FMAM). This master dissertation focuses on the class of fuzzy morphological associative memories based uninorms, which generalizes several *fuzzy associative memories* (FAMs) models, including the class of *implicative fuzzy associative memories* (IFAMs), by replacing the underlying triangular norm and co-norm by an uninorm operator. The dissertation is divided in three parts. The first part reveals that the mathematical structure, called *complete lattice ordered double monoid* (CLODUM), yields an appropriate framework for the class of FMAMs based on uninorms. Precisely, we show that a certain FAM model has an associative mapping that perform either a dilation or an erosion that is invariant under regradients of the fuzzy patterns if and only if it is an FMAM based on uninorm. Moreover, in a clodum, we have that the problem of finding an appropriate FMAM based in uninorms for a given association task corresponds to the easier problem of determining an appropriate synaptic weight matrix. In view of this fact, the second part of the dissertation is concerned with the *implicative fuzzy learning* (IFL), also called fuzzy learning by adjunction, which can be effectively applied for storage of a fundamental memory set in FMAMs based in uninorms. Furthermore, we point out that this recording recipe yields, in some sense, an optimal synaptic weight matrix and, consequently, the best FMAM in a given clodum. In particular, we show that an FMAM based in uninorms model exhibit optimal absolute storage capacity in the auto-associative case. Finally, the third part of the dissertation extends the notions of continuity introduced by Perfilieva and Lehmke to the class of FMAMs based on uninorms. As a consequence, we have that an FMAM based on uninorm is continuous if and only if it is able to store every association in the fundamental memory set. In the auto-associative case, any FMAM based on uninorm trained by IFL is continuous.

Keywords: Associative Memory. Mathematical Morphology. Fuzzy Sets. Artificial Neural Networks.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Bijeção entre as dilatações e as funções estruturantes	24
Figura 2.2 – Bijeção entre as dilatações invariantes por translações e seus elementos estruturantes	26
Figura 3.1 – Modelo geral de um neurônio	42
Figura 3.2 – Rede progressiva de camada única	43
Figura 3.3 – Rede progressiva com múltiplas camadas	44

LISTA DE NOTAÇÕES

\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
$\overline{\mathbb{R}}$	Conjunto dos números reais estendidos
$\mathcal{P}(E)$	Conjunto das partes de um conjunto E
$\mathcal{P}^{\mathcal{P}}$	Conjunto das funções sobre $\mathcal{P}(E)$
\mathcal{P}^E	Conjunto das funções de E em $\mathcal{P}(E)$
Δ	Conjunto das dilatações sobre $\mathcal{P}(E)$
Δ'	Conjunto das dilatações invariantes por translações sobre $\mathcal{P}(E)$
\mathcal{E}	Conjunto das erosões sobre $\mathcal{P}(E)$
\mathcal{E}'	Conjunto das erosões invariantes por translações sobre $\mathcal{P}(E)$
$Fun(A, B)$	Conjunto das funções de A em B
a_δ	Função estruturante da dilatação δ
$\delta_a(X)$	Dilatação de X pela função estruturante a
$\mathcal{E}_a(X)$	Erosão de X pela função estruturante a
B_δ (B_ε)	Elemento estruturante da dilatação δ (erosão ε)
$X \oplus B$	Soma de Minkowski entre os conjuntos X e B
$X \ominus B$	Subtração de Minkowski entre os conjuntos X e B
$\mathcal{F}(\mathbf{X})$	Família dos conjuntos fuzzy $A : \mathbf{X} \rightarrow [0, 1]$
\mathfrak{t}	Norma triangular (\mathfrak{t} – norma)
\mathfrak{s}	Co-norma triangular (\mathfrak{s} – norma)
\mathfrak{u}	Uninorma
\Rightarrow	Implicação fuzzy
\Rightarrow_R	R-implicação associada a uma uninorma dilatativa \mathfrak{u}
\Rightarrow_R	R-coimplicação associada a uma uninorma erosiva \mathfrak{u}'
$\Leftrightarrow_{\mathfrak{u}}$	Bi-implicação fuzzy associada a uninorma \mathfrak{u}

$CLODUM$	Complete lattice-ordered double monoid
λ_v	Regradação ($\lambda_v(x) = v * x$)
$\mathcal{D}_{ir}(A, B)$	Conjunto das dilatações invariantes a regradações do CLODUM A ao CLODUM B
$\mathcal{E}_{ir}(A, B)$	Conjunto das erosões invariantes a regradações duais do CLODUM A ao CLODUM B
$H_x (H'_x)$	Núcleo (núcleo dual) de uma dilatação (erosão)
G	Memória associativa
\mathbf{x}_k	Padrão de entrada k
\mathbf{y}_k	Padrão de saída k
Γ	Conjunto de memórias fundamentais
$(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$	k – ésima memória fundamental
FAM	Memória Associativa Fuzzy (Fuzzy Associative Memory)
MAM	Memória Associativa Morfológica (Morphological Associative Memory)
FMAM	Memória Associativa Morfológica Fuzzy (Fuzzy Morphological Associative Memory)
FNN	Rede Neural Fuzzy (Fuzzy Neural Network)
MNN	Redes Neurais Morfológicas (Morphological Neural Network)
FMNN	Redes Neurais Morfológicas Fuzzy (Fuzzy Morphological Neural Network)
\circ_u	Produto Max- u
\bullet_u	Produto Min- u
\triangleleft_R	Produto Min \Rightarrow_R
\triangleleft_R	Produto Max \Rightarrow_R
$\delta_{W,k,i}$	Desvio entre a saída armazenada y_{ki} e a saída recordada $(W \circ_u \mathbf{x})_i$

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	12
1.1 RESULTADOS RELEVANTES DA DISSERTAÇÃO	14
1.2 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	15
CAPÍTULO 2 – CONCEITOS MATEMÁTICOS RELEVANTES	17
2.1 MORFOLOGIA MATEMÁTICA E RETICULADO COMPLETO	17
2.2 OPERADORES ENTRE RETICULADOS COMPLETOS	19
2.2.1 Operadores Elementares da Morfologia Matemática	21
2.2.2 Morfologia Matemática Binária	22
2.2.3 Morfologia Matemática em Tons de Cinza (Abordagem da Umbra)	26
2.3 TEORIA DOS CONJUNTOS FUZZY	28
2.4 A ESTRUTURA CLODUM	35
CAPÍTULO 3 – MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS FUZZY E O SEU TEOREMA DA REPRESENTAÇÃO EM CLODUMS	40
3.1 MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS	40
3.2 REDES NEURAIS ARTIFICIAIS	41
3.2.1 Redes Neurais Fuzzy	44
3.2.2 Redes Neurais Morfológicas	45
3.2.3 Redes Neurais Morfológicas Fuzzy	47
3.3 MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS NEURAIS	48
3.4 TEOREMA DA REPRESENTAÇÃO DAS FAMs EM CLODUMS	51
CAPÍTULO 4 – APRENDIZADO IMPLICATIVO FUZZY OU APRENDIZADO BASEADO EM ADJUNÇÃO	52
4.1 APRENDIZADO	52
4.2 APRENDIZADO IMPLICATIVO FUZZY PARA AS MAX-U FMAMS	53
4.3 APRENDIZADO IMPLICATIVO FUZZY DUAL PARA AS MIN-U´ FMAMS	57
4.4 MEMÓRIAS AUTOASSOCIATIVAS MORFOLÓGICAS FUZZY MAX-U	60
4.5 MEMÓRIAS AUTOASSOCIATIVAS MORFOLÓGICAS FUZZY MIN-U´	65

CAPÍTULO 5 – CONTINUIDADE DAS MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS FUZZY BASEADAS EM UNINORMAS	68
5.1 CONTINUIDADE E EXATIDÃO DAS MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS FUZZY	68
5.2 EQUIVALÊNCIA ENTRE MODELOS EXATOS E MODELOS CONTÍNUOS DE FAMs	72
CAPÍTULO 6 – CONCLUSÃO	77
REFERÊNCIAS	80
APÊNDICES	86
APÊNDICE A – Continuidade e Modelos Exatos de Regras Fuzzy SE-ENTÃO	87

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Memórias Associativas (AM, Associative Memories) são modelos criados para armazenar pares de entrada e saída. Além disso, uma AM deve ser capaz de recordar uma saída desejada mesmo após a apresentação de um padrão de entrada ruidoso ou incompleto. *Redes Neurais Artificiais* (ANNs, Artificial Neural Networks) são modelos matemáticos inspirados no cérebro humano [56]. Esses modelos são constituídos de unidades de processamento simples, chamados *neurônios*, que têm a tendência natural de armazenar conhecimento experimental e torná-lo disponível para uso [17]. As *Memórias Associativas Neurais* (MANs, Neural Associative Memories) são modelos de memórias associativas representadas por redes neurais artificiais.

As memórias associativas têm sido objeto de pesquisas desde o início dos anos 1970 e receberam mais atenção após os trabalhos de Hopfield [17, 16, 20] no início dos anos 1980. Hopfield mostrou como um sistema dinâmico não-linear discreto pode exibir recordação associativa de padrões binários armazenados. Nos anos seguintes, foram apresentados vários modelos que estendem o modelo de Hopfield, por exemplo, a Memória Associativa de Capacidade Exponencial (ECAM, Exponential Correlation Associative Memory) [5] e a Memória Associativa Bidirecional (BAM, Bidirectional Associative Memory) [28, 29]. Porém, todos esses modelos foram projetados para armazenar padrões binários.

A teoria dos conjuntos fuzzy estende a teoria clássica dos conjuntos. Em outras palavras, a teoria dos conjuntos fuzzy contorna a dicotomia existente na lógica dos conjuntos clássicos. Essa teoria matemática foi introduzida por Lotfi Zadeh a fim de modelar a imprecisão e a ambiguidade que surge em sistemas complexos [61]. As *Memórias Associativas Fuzzy* (FAM, Fuzzy Associative Memories) são modelos de memórias associativas que armazenam padrões fuzzy, i.e., padrões que representam conjuntos fuzzy. Os modelos de Kosko, chamados FAM Max-min e FAM Max-prod, representam os modelos mais conhecidos de memória associativa fuzzy [30]. Na maioria dos modelos de FAMs, utilizam-se operadores binários da lógica fuzzy denominados τ -normas e \mathfrak{s} -normas. As *uninormas*, introduzidas por Yager e Rybalov em [59], são operadores da lógica fuzzy que generalizam os conceitos de τ -normas e \mathfrak{s} -normas.

A Morfologia Matemática (MM) é uma teoria desenvolvida por Matheron e Serra no início dos anos 1960 [34, 48, 49]. A MM foi criada devido a necessidade de resolver problemas

com uma característica em comum: *extração de informações a partir de imagens*. Diversas pesquisas foram realizadas abrangendo esse assunto, por exemplo, nas áreas de Neurologia, Robótica, Engenharia de Produção e Geologia. Podemos falar ainda de aplicações em controle de tráfego urbano, da previsão de tempo, da análise de campos de temperatura, da classificação de cromossomos ou de galáxias, da análise do adensamento de células com aberrações genéticas, etc [2].

J. D. Davidson mostrou que a teoria da MM clássica se adapta a álgebra minimax através de um isomorfismo entre produtos matriciais e operadores elementares da morfologia matemática [10]. Tais estudos levaram vários pesquisadores a aderirem os produtos matriciais advindos da álgebra minimax, para efetuar a computação que ocorre nas camadas das redes neurais. As primeiras pesquisas envolvendo *Redes Neurais Morfológicas* (MNNs, Morphological Neural Networks) foram realizadas a partir da teoria da álgebra minimax, que corresponde a uma álgebra de reticulado. Ritter e Sussner introduziram as redes neurais morfológicas como sendo modelos baseados na MM [42]. Ritter e Sussner introduziram também as *Memórias Associativas Morfológicas* (MAM, Morphological Associative Memories), que são modelos de MANs cujos neurônios efetuam operações elementares da MM tais como *dilatações* e *erosões* [44]. Tais modelos apresentam características interessantes, por exemplo, pode-se armazenar quantos padrões desejarmos no caso autoassociativo [51, 53]. Em particular, uma *Memória Associativa Morfológica Fuzzy* (FMAM, Fuzzy Morphological Associative Memories) é uma MNN que armazena padrões fuzzy [58]. Maragos explorou alguns aspectos algébricos da MM do ponto de vista de sistemas invariantes a translações, lógica fuzzy e álgebra minimax [9, 8, 32]. Além disso, Maragos introduziu uma estrutura matemática que permite a representação das dilatações e erosões invariantes a translações. Essa estrutura matemática é chamada *CLODUM* (Complete Lattice-Ordered Double Monoid) e será utilizada nesta dissertação a fim de estruturar alguns modelos de memórias associativas.

Valle e Sussner introduziram as *Memórias Associativas Fuzzy Implicativas* (IFAM, Implicative Fuzzy Associative Memories) [52] e suas versões duais e adjuntas [58]. As IFAMs são um caso particular das FMAMs e estendem vários modelos de FAMs [57]. Elas estão baseadas em um processo de aprendizagem denominado *aprendizado R-implicativo fuzzy*.

As memórias associativas foram aplicadas, por exemplo, em problemas de previsão, reconhecimento e classificação de padrões, etc [63, 64, 33, 60]. A FAM de Kosko foi aplicada em problemas de controle [30].

1.1 RESULTADOS RELEVANTES DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação mostra que podemos empregar operadores da lógica fuzzy como as uninormas, juntamente com os operadores de supremo e ínfimo, e formar a base de uma estrutura CLODUM para as FAMs baseadas em uninormas, tais que estas, efetuem dilatações ou erosões invariantes a *regradações*¹, ou seja, é feita uma generalização dos modelos de FAMs onde utilizamos uninormas ao invés de t -normas e s normas. Em outras palavras, mostramos que a maioria das FAMs presentes na literatura efetuam dilatações e erosões invariantes a *regradações*. Além disso, mostramos que o problema de determinar uma FAM baseada em uninorma, que efetue uma operação elementar da MM invariante a *regradações*, é o mesmo que determinar uma matriz de pesos sinápticos. Em outras palavras, mostramos que para obter uma FAM baseada em uninorma que efetue uma operação elementar da MM invariante a *regradações* é necessário e suficiente que se obtenha uma Max- u ou Min- u' FMAM.

Em seguida, estudamos as técnicas de aprendizagem de redes neurais a fim de encontrar a melhor matriz de pesos sinápticos para as Max- u e Min- u' FMAMs. Assim, estudamos o aprendizado implicativo fuzzy e definimos as Max- u e Min- u' treinadas desta forma. Logo após, são apresentados resultados interessantes relacionados a *otimalidade* e a *fase de recordação* das FMAMs baseadas em uninormas treinadas com o aprendizado R-implicativo fuzzy. Também investigamos as propriedades adquiridas pelas Max- u e Min- u' FMAMs treinadas com o aprendizado implicativo fuzzy no caso autoassociativo. Verificamos que estes modelos apresentam armazenamento absoluto, tolerância a padrões erodidos para as Max- u FMAMs e tolerância a padrões dilatados no caso das Min- u' FMAMs.

Perfilieva et. al, [39] introduziram a noção de *modelos exatos para sistemas de regras fuzzy SE-ENTÃO* e provaram que a *exatidão* desses modelos está conectada ao problema de solubilidade do respectivo sistema de equações fuzzy relacionais. Além disso, mostraram que um sistema de regras fuzzy SE-ENTÃO é um modelo exato se, e somente se esse modelo é *contínuo*. Nesta dissertação, estendemos a noção de *continuidade e exatidão* dos *sistemas de regras fuzzy SE-ENTÃO* para as FAMs baseadas em uninormas. Veremos que tal noção está diretamente relacionada com o conceito de *modelo exato*. Vimos que tais noções são importantes pois, um

¹A definição de *regradação* se assemelha a definição de v -translação definida por Maragos em [32].

problema de memória associativa só terá sentido quando a memória associativa for contínua. Por outro lado, poderemos dizer, de certo modo, que as noções de continuidade e exatidão dos sistemas de regras fuzzy SE-ENTÃO são semelhantes aos conceitos de continuidade e exatidão das FAMs baseadas em uninormas.

1.2 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação está organizada em 6 capítulos.

O capítulo 2 tratará dos conceitos matemáticos básicos para o entendimento do texto. Aqui, revisaremos alguns conceitos da MM, tais como reticulados completos e operadores de dilatação e erosão. Logo após, serão apresentados conceitos básicos sobre a teoria dos conjuntos fuzzy, juntamente com a definição das uninormas. Por último, será apresentada a estrutura CLODUM onde enunciaremos uma proposição, devido a Maragos, que relaciona operadores elementares da MM invariantes a regradações, com os seus *núcleos*.

O capítulo 3 apresentará as memórias associativas fuzzy. Em particular, estaremos interessados em modelos de memórias associativas descritas por redes neurais artificiais. Portanto, será feita uma breve revisão dos principais modelos de redes neurais. Por último, enunciaremos e demonstraremos o Teorema da Representação das FAMs em CLODUMs. Esse teorema revelará que a maioria das FAMs presentes na literatura efetuam dilatações ou erosões invariantes a regradações. Esse teorema também revelará que podemos resolver um problema de memória associativa, através da obtenção de uma matriz de pesos sinápticos.

No capítulo 4, estudaremos as técnicas de aprendizagem para obtenção de uma matriz de pesos sinápticos de uma FAM. Em particular, estudaremos a aprendizagem implicativo fuzzy. Apresentaremos alguns resultados que caracterizam os aspectos de otimalidade das FAMs. Alguns resultados referentes ao caso auto-associativo também serão apresentados. Por fim, mostraremos as versões duais desses modelos.

No capítulo 5 estenderemos as noções de modelo exato e continuidade dos sistemas de regras fuzzy SE-ENTÃO para as FAMs baseadas em uninormas. Primeiramente, apresentaremos as definições de modelos exatos e a definição de continuidade para as FAMs baseadas em uninormas. Em seguida, enunciaremos um teorema que revela que tais conceitos são semelhantes.

Logo após, investigaremos a continuidade nos modelos treinados através do aprendizado R-implicativo fuzzy. Por último, veremos que esses modelos, no caso autoassociativo, são sempre contínuos.

A dissertação termina com conclusão no capítulo 6 e um apêndice sobre Continuidade e Exatidão dos sistemas de regras fuzzy SE-ENTÃO.

CAPÍTULO 2

CONCEITOS MATEMÁTICOS RELEVANTES

2.1 MORFOLOGIA MATEMÁTICA E RETICULADO COMPLETO

A Morfologia Matemática (MM) é uma teoria empregada no processamento e análise de objetos (ou imagens), que utiliza operadores e funções baseadas em conceitos topológicos e geométricos [19]. Essa teoria foi desenvolvida por Matheron e Serra, no início dos anos 1960 [34, 48, 49]. Veremos a seguir um resumo sobre a teoria da MM em reticulados completos gerais. Em seguida, revisaremos os principais conceitos da *MM binária*, desenvolvida inicialmente por Matheron e Serra para análise de imagens binárias. Finalmente, veremos a abordagem da *umbra* que foi desenvolvida por Serra e Sternberg para estender a MM binária para o caso em tons de cinza [48, 50]. Para tanto, recordaremos alguns conceitos [19, 3].

Definição 2.1. *Dado um conjunto não vazio A , uma relação binária \leq em A é denominada uma ordem parcial se as seguintes propriedades forem válidas para todo $x, y, z \in A$:*

1. $x \leq x$; (reflexividade)
2. $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$; (anti-simetria)
3. $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$; (transitividade)

Um conjunto A com uma ordem parcial é chamado conjunto parcialmente ordenado, e denotado por (A, \leq) . Dizemos ainda que (A, \leq) é totalmente ordenado se $x \leq y$ ou $y \leq x$, para todo $x, y \in A$.

Exemplo 2.2. (a) O conjunto \mathbb{R} dos números reais com a relação \leq usual é um conjunto totalmente ordenado.

(b) Seja G um grupo. O conjunto de todos os subgrupos de G ordenados por “ $H \leq K$ se H é subgrupo de K ” é um conjunto parcialmente ordenado [19].

(c) Dado um conjunto E , o conjunto das partes $\mathcal{P}(E)$ ordenado por “ $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ ”, é um conjunto parcialmente ordenado.

Se \leq representa uma ordem parcial em um conjunto A , então podemos definir \leq' através da relação “ $x \leq' y \Leftrightarrow x \geq y$ ”. Observe que \leq' também define uma ordem parcial em A , denominada *ordem parcial dual* e (A, \leq') é o *conjunto parcialmente ordenado dual* a (A, \leq) .

Definição 2.3. Dado um conjunto parcialmente ordenado (A, \leq) e B um subconjunto de A , dizemos que $a \in A$ é uma cota inferior de B se $a \leq x, \forall x \in B$. Analogamente, dizemos que a é uma cota superior de B se $x \leq a, \forall x \in B$. O maior elemento do conjunto das cotas inferiores de B é denominado *ínfimo* de B (notação $\bigwedge B$) e o menor elemento do conjunto das cotas superiores de B é denominado *supremo* de B (notação $\bigvee B$).

Ao longo do texto, adotaremos as seguintes notações: Se $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ for um conjunto finito, então denotaremos o ínfimo de B por $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$ ou $\bigwedge_{i=1}^n x_i$, de acordo com a situação. Analogamente, as definições acima podem ser atribuídas ao supremo de um conjunto finito.

Definição 2.4. Um conjunto parcialmente ordenado (L, \leq) é um reticulado se todo subconjunto finito de L tem ínfimo e supremo. Um reticulado \mathbb{L} é denominado *completo* se todo subconjunto de \mathbb{L} (finito ou infinito) tem supremo e ínfimo.

Em reticulados completos, também podemos definir uma relação de dualidade. Admitindo a ordem parcial dual \leq' temos as operações $\bigvee' = \bigwedge$ e $\bigwedge' = \bigvee$. O reticulado completo \mathbb{L} com a ordem parcial \leq' e as operações \bigvee' e \bigwedge' recebe o nome de *reticulado completo dual* e o denotamos por \mathbb{L}' .

Exemplo 2.5. O intervalo $[0, 1]$ e os reais estendidos $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ são exemplos de reticulados completos.

As operações \bigvee e \bigwedge em um reticulado completo, satisfazem as propriedades de idempotência, comutatividade, associatividade, absorção e consistência [19, 3]. Um reticulado completo \mathbb{L} é *infinitamente distributivo* se

$$a \wedge \left(\bigvee_{i \in J} x_i \right) = \bigvee_{i \in J} (a \wedge x_i)$$

e

$$a \vee \left(\bigwedge_{i \in J} x_i \right) = \bigwedge_{i \in J} (a \vee x_i)$$

para $a, x_i \in \mathbb{L}$, onde J é um conjunto de índices. Novamente, o intervalo $[0, 1]$ e \mathbb{R} são exemplos de reticulados completos infinitamente distributivos.

2.2 OPERADORES ENTRE RETICULADOS COMPLETOS

Nesta seção, trataremos de operadores entre reticulados completos. Dados dois reticulados completos \mathbb{L} e \mathbb{M} , denotaremos por $\mathcal{S} = Fun(\mathbb{L}, \mathbb{M})$ o conjunto de todos os operadores de \mathbb{L} em \mathbb{M} . Observe que \mathcal{S} torna-se um reticulado completo se definirmos a ordem parcial \leq e as operações de \bigwedge e \bigvee em \mathcal{S} como segue:

$$\theta \leq \varphi \Leftrightarrow \theta(x) \leq \varphi(x), \quad \forall x \in \mathbb{L}, \quad (2.1)$$

$$\left(\bigvee_{i \in J} \theta_i \right) (x) := \bigvee_{i \in J} \theta_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{L}, \quad (2.2)$$

$$\left(\bigwedge_{i \in J} \theta_i \right) (x) := \bigwedge_{i \in J} \theta_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{L}, \quad (2.3)$$

onde $\theta, \varphi, \theta_i \in \mathcal{S}$ e J é um conjunto arbitrário de índices.

Observação 2.6. *O conjunto $Fun(E, \mathbb{L})$, onde E é um conjunto arbitrário, também é um reticulado completo se definirmos em $Fun(E, \mathbb{L})$ a ordem parcial \leq e as operações \bigwedge e \bigvee como em (2.1), (2.2) e (2.3), respectivamente.*

Definição 2.7. [19] *Dizemos que um operador $\theta : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ é um isomorfismo entre reticulados se θ é uma bijeção tal que θ e sua inversa θ^{-1} preservam a ordem parcial, i.e., $x \leq y \Leftrightarrow \theta(x) \leq \theta(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{L}$.*

Isomorfismos entre reticulados são usados, por exemplo, para estabelecer uma relação entre Memórias Associativas Morfológicas (MAMs - Morphological Associative Memories) em tons de cinza e uma subclasse das Memórias Associativas Morfológicas Fuzzy (FMAMs - Fuzzy Morphological Associative Memories) baseadas em uninormas [57].

Definição 2.8. *Considere um reticulado completo \mathbb{L} . Um subconjunto $A \subset \mathbb{L}$ é chamado sup-
fechado de \mathbb{L} se $\bigvee_{\theta \in A} \theta \in A$. Analogamente, dizemos que A é um subconjunto inf-
fechado de \mathbb{L} se $\bigwedge_{\theta \in A} \theta \in A$.*

Exemplo 2.9. O operador $\theta : [0, 1] \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ definido por

$$\theta(x) = \log \left(\frac{x}{1-x} \right) \quad (2.4)$$

representa um isomorfismo reticulado.

Definição 2.10. [19] Um operador $\varphi : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ é chamado

(a) crescente se $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{L}$.

(b) decrescente se $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{L}$.

Observe que o operador do exemplo 2.9 é crescente. Seja $\mathcal{S} = Fun(\mathbb{L}, \mathbb{M})$, denotaremos por \mathcal{S}_+ e \mathcal{S}_- o conjunto dos operadores crescentes e decrescentes de \mathbb{L} em \mathbb{M} , respectivamente.

Revisaremos, a seguir, o conceito de adjunção. Esse conceito é fundamental pois está intimamente relacionado com dois dos operadores mais importantes da MM.

Definição 2.11. [19] Sejam \mathbb{L} e \mathbb{M} reticulados completos. Considere os operadores $\varepsilon : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ e $\delta : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{L}$. O par (ε, δ) é denominado uma adjunção entre \mathbb{L} e \mathbb{M} se

$$\delta(y) \leq x \Leftrightarrow y \leq \varepsilon(x), \quad (2.5)$$

para todo $x \in \mathbb{L}$, $y \in \mathbb{M}$.

Podemos observar facilmente que $\delta(\bigwedge \mathbb{M}) = \bigwedge \mathbb{L}$ e $\varepsilon(\bigvee \mathbb{L}) = \bigvee \mathbb{M}$.

Exemplo 2.12. Se θ é um isomorfismo reticulado de \mathbb{L} em \mathbb{M} então o par (θ, θ^{-1}) é uma adjunção entre \mathbb{L} e \mathbb{M} e (θ^{-1}, θ) é uma adjunção entre \mathbb{M} e \mathbb{L} .

Um outro conceito de dualidade está relacionado com as *negações*.

Definição 2.13 (Negações). [19] Sejam \mathbb{L} e \mathbb{M} reticulados completos. Um operador ν é uma negação em \mathbb{L} se é uma bijeção involutiva que reverte a ordem parcial em \mathbb{L} . Além disso, se ϕ é um operador de \mathbb{L} em \mathbb{M} e $\nu_{\mathbb{L}}$ e $\nu_{\mathbb{M}}$ são negações em \mathbb{L} e \mathbb{M} , respectivamente, então o operador $\phi^\nu : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ definido por

$$\phi^\nu = \nu_{\mathbb{M}} \circ \phi \circ \nu_{\mathbb{L}},$$

é a negação de ϕ com relação a $\nu_{\mathbb{L}}$ e $\nu_{\mathbb{M}}$.

Observe que se ν é uma negação em \mathbb{L} e $\phi : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$, então $(\phi^\nu)^\nu = \phi$.

2.2.1 Operadores Elementares da Morfologia Matemática

Em seguida, definiremos quatro classes fundamentais de operadores. Os operadores destas classes serão chamados de operadores elementares da Morfologia Matemática. Usamos esta terminologia porque a decomposição de qualquer operador entre reticulados completos pode ser feita em termos destes operadores [1].

Definição 2.14 (Dilatações e erosões). [19] *Se \mathbb{L} e \mathbb{M} são reticulados completos, então uma dilatação $\delta : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ é um operador que comuta com o supremo. Dualmente, uma erosão $\varepsilon : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ é um operador que comuta com o ínfimo. Matematicamente, δ e ε é uma dilatação e uma erosão, respectivamente, se as seguintes equações forem válidas para todo $X \subseteq \mathbb{L}$:*

$$\delta \left(\bigvee X \right) = \bigvee_{x \in X} \delta(x) \quad e \quad \varepsilon \left(\bigwedge X \right) = \bigwedge_{x \in X} \varepsilon(x). \quad (2.6)$$

Definição 2.15 (Anti-dilatações e anti-erosões). [19] *Sejam \mathbb{L} e \mathbb{M} reticulados completos. Um operador $\bar{\delta} : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ é uma anti-dilatação se*

$$\bar{\delta} \left(\bigvee X \right) = \bigwedge_{x \in X} \bar{\delta}(x). \quad (2.7)$$

Analogamente, um operador $\bar{\varepsilon} : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ é uma anti-erosão se

$$\bar{\varepsilon} \left(\bigwedge X \right) = \bigvee_{x \in X} \bar{\varepsilon}(x). \quad (2.8)$$

Note que dilatações e erosões são operadores crescentes e anti-dilatações e anti-erosões são operadores decrescentes [2].

Nesta dissertação, nos focaremos nas dilatações e erosões, pois as anti-dilatações e anti-erosões podem ser obtidas através de combinações entre dilatações, erosões e negações [58].

A proposição a seguir relaciona adjunções com os operadores de dilatação e erosão.

Proposição 2.16. [19] *Sejam \mathbb{L} e \mathbb{M} reticulados completos. Considere funções $\delta : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ e $\varepsilon : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{L}$. Então:*

- (a) *Se (ε, δ) é uma adjunção, então δ é uma dilatação e ε é uma erosão.*
- (b) *Dada uma dilatação δ , existe uma única erosão ε tal que o par (ε, δ) é uma adjunção. Além disso, ε é dada por*

$$\varepsilon(y) = \bigvee \{x \in \mathbb{L} : \delta(x) \leq y\}, \quad (2.9)$$

para todo $y \in \mathbb{M}$.

(c) Dada uma erosão ε , existe uma única dilatação δ tal que (ε, δ) é uma adjunção. Além disso, δ é dada por

$$\delta(x) = \bigwedge \{y \in \mathbb{M} : \varepsilon(y) \geq x\}, \quad (2.10)$$

para todo $x \in \mathbb{L}$.

A próxima proposição trata das negações de dilatações e erosões.

Proposição 2.17 (Negações, dilatações e erosões). [19] *Sejam \mathbb{L} e \mathbb{M} reticulados completos com negações $\nu_{\mathbb{L}}$ e $\nu_{\mathbb{M}}$, respectivamente. Um operador $\delta : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ é uma dilatação se e somente se, o operador $\varepsilon = \delta^{\nu} : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ é uma erosão.*

Podemos observar ainda que, uma negação ν em \mathbb{L} representa simultaneamente os operadores de anti-dilatação e anti-erosão [19]. A próxima proposição relaciona os conceitos de negação e adjunção.

Proposição 2.18 (Negações e Adjunções). [19] *Sejam \mathbb{L} e \mathbb{M} reticulados completos com negações. Dados os operadores $\delta : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ e $\varepsilon : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{L}$, o par (ε, δ) forma uma adjunção entre \mathbb{L} e \mathbb{M} se e somente se, o par $(\delta^{\nu}, \varepsilon^{\nu})$ forma uma adjunção entre \mathbb{L} e \mathbb{M} .*

Portanto, dada uma dilatação, podemos obter uma erosão através dos conceito de adjunção ou negação e vice-versa. Esse fato será utilizado, pois ao demonstrar um fato relacionado a uma dilatação, podemos utilizar os conceitos de adjunção e negação para demonstrar, de maneira análoga, tal fato relacionado a uma erosão e vice-versa.

2.2.2 Morfologia Matemática Binária

A MM foi inicialmente desenvolvida para análise de imagens binárias. Denotaremos uma imagem binária E como um subconjunto do espaço Euclidiano \mathbb{R}^d ou o espaço digital \mathbb{Z}^d e \mathcal{P}^E será chamado conjunto das funções de E em $\mathcal{P}(E)$, i.e., $\mathcal{P}^E = Fun(E, \mathcal{P}(E))$. Pelo exemplo 2.2, sabemos que o conjunto $\mathcal{P}(E)$ (conjunto das partes de E) com ordem parcial “ \subseteq ” forma um reticulado completo. Logo, pela Observação 2.6, \mathcal{P}^E torna-se um reticulado completo. Portanto, podemos aplicar as definições da seção anterior para imagens binárias. Denotaremos

ainda por $\mathcal{P}^{\mathcal{P}}$ o conjunto das funções sobre $\mathcal{P}(E)$, ou seja, $\mathcal{P}^{\mathcal{P}} = \text{Fun}(\mathcal{P}(E), \mathcal{P}(E))$. Este conjunto é um reticulado completo com ordem parcial \leq e as operações \bigvee e \bigwedge definidas da seguinte forma para $\varphi, \varphi' \in \mathcal{P}^{\mathcal{P}}$ e para todo $X \in \mathcal{P}(E)$:

$$\varphi \leq \varphi' \Leftrightarrow \varphi(X) \subseteq \varphi'(X), \quad (2.11)$$

$$\left(\bigvee_{\varphi \in \mathcal{P}^{\mathcal{P}}} \varphi \right) (X) := \bigvee_{X \in \mathcal{P}(E)} \varphi(X), \quad (2.12)$$

$$\left(\bigwedge_{\varphi \in \mathcal{P}^{\mathcal{P}}} \varphi \right) (X) := \bigwedge_{X \in \mathcal{P}(E)} \varphi(X). \quad (2.13)$$

As operações elementares da MM binária são: dilatação, erosão, anti-dilatação e anti-erosão. Denotaremos por Δ o conjunto das dilatações sobre $\mathcal{P}(E)$ e denotaremos por \mathcal{E} o conjunto das erosões sobre $\mathcal{P}(E)$. Observe que $\Delta, \mathcal{E} \subset \mathcal{P}^{\mathcal{P}}$ e portanto, podemos definir a ordem parcial \leq e as operações \bigvee e \bigwedge nestes conjuntos de acordo com as equações (2.11), (2.12) e (2.13) de modo que estes tornem-se reticulados completos.

Observe que neste caso, pelas propriedades das operações de união e interseção estendidas às famílias de subconjuntos de $\mathcal{P}(E)$, podemos definir de uma maneira equivalente as dilatações e erosões. Um operador sobre $\mathcal{P}(E)$ é uma dilatação se e somente se ele comuta com a união, e uma erosão se e somente se ele comuta com a interseção, isto é, $\delta \in \Delta$ e $\varepsilon \in \mathcal{E}$ se, e somente se, para toda família $(X_i)_{i \in I}$ em $\mathcal{P}(E)$, tem-se

$$\bigcup_{i \in I} \delta(X_i) = \delta \left(\bigcup_{i \in I} X_i \right) \quad \text{e} \quad \bigcap_{i \in I} \varepsilon(X_i) = \varepsilon \left(\bigcap_{i \in I} X_i \right). \quad (2.14)$$

Estes operadores estão diretamente relacionados com uma *função estruturante*, que pode ser vista como uma maneira de definir uma noção de vizinhança para os pontos do conjunto E .

Proposição 2.19 (Caracterização das dilatações). [2] *A função $\mathcal{F} : \Delta \rightarrow \mathcal{P}^E$, que associa cada dilatação δ a uma função a_δ , definida para todo $x \in E$ por*

$$a_\delta(x) = \delta(\{x\}), \quad (2.15)$$

é uma bijeção. Sua inversa \mathcal{F}^{-1} associa cada função a a uma dilatação δ_a definida para todo $X \in \mathcal{P}(E)$ por

$$\delta_a(X) = \bigcup_{x \in X} a(x). \quad (2.16)$$

A Proposição 2.19 mostra que existe uma correspondência biunívoca entre Δ e $\mathcal{P}(E)$. As funções a com valores nas partes de E caracterizam as dilatações, como mostra a Figura 2.1.

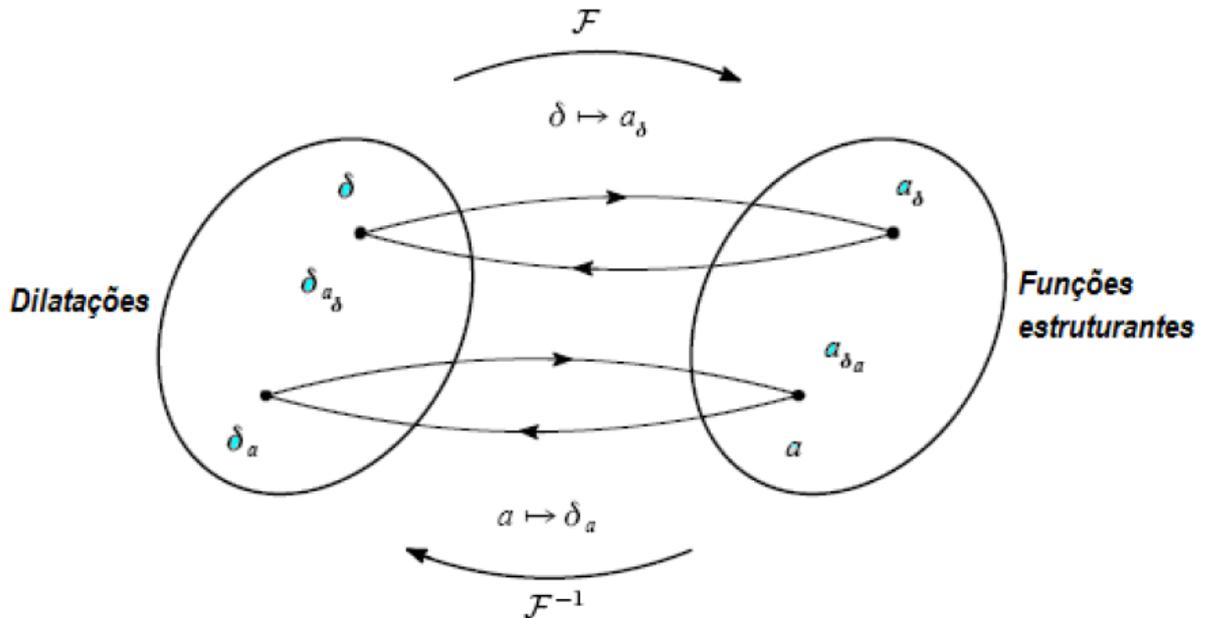


Figura 2.1 – Bijeção entre as dilatações e as funções estruturantes.

A função a_δ é chamada de *função estruturante* da dilatação δ . Portanto, dado um subconjunto X de $\mathcal{P}(E)$, o subconjunto $\delta_a(X)$ chama-se *dilatação de X pela função estruturante a* . Podemos caracterizar de uma maneira análoga as erosões, anti-dilatações e anti-erosões por funções estruturantes. Podemos citar algumas propriedades importantes relacionando o conjunto das dilatações Δ ou \mathcal{E} e o conjunto $\mathcal{P}(E)$.

Proposição 2.20 (Isomorfismo de reticulados). [2] *O reticulado Δ das dilatações e o reticulado de funções \mathcal{P}^E , são isomorfos. Em outros termos, a função \mathcal{F} definida na Proposição 2.19 é um isomorfismo entre reticulados.*

Proposição 2.21. *O subconjunto δ das dilatações é um subconjunto sup-fechado de \mathcal{P}^P e o subconjunto \mathcal{E} das erosões é um subconjunto inf-fechado de \mathcal{P}^P .*

No caso em que os operadores elementares sejam *invariantes por translações* as dilatações e erosões podem ser expressas em termos da *Adição e Subtração de Minkowski*, respectivamente [2].

Proposição 2.22. [2] *Seja δ uma dilatação sobre $\mathcal{P}(E)$ e seja a sua função estruturante, então as três propriedades abaixo são equivalentes.*

(a) *a é invariante por translação.*

(b) $\delta(X) = X \oplus B = \{z \in E : \exists x \in X, \exists b \in B, z = x + b\}$ para todo $X \in \mathcal{P}(E)$ onde $B = \delta(o)$.

(c) δ é invariante por translação.

Além disso, se Δ' é o conjunto das dilatações invariantes por translação, a função $\overline{\mathcal{F}} : \Delta' \rightarrow \mathcal{P}(E)$ definida por

$$\overline{\mathcal{F}}(\delta) = B_\delta \text{ com } B_\delta = \delta(o),$$

é uma bijeção. Sua inversa é a função $\overline{\mathcal{F}}^{-1}$ que associa cada subconjunto X com uma dilatação $\delta_B(X) = X \oplus B$.

A proposição acima nos diz que os subconjuntos de E podem caracterizar as dilatações invariantes por translações. O subconjunto B_δ é chamado *elemento estruturante da dilatação δ* (Figura 2.2).

Podemos caracterizar de maneira análoga as erosões por elementos estruturantes. Neste caso, dado um subconjunto $X \subseteq E$, o subconjunto $\varepsilon_B(X)$ é chamado *erosão de X pelo elemento estruturante B* , onde

$$\varepsilon_B(X) = X \ominus B = \{z \in E : \forall b \in B, \exists x \in X, z = x - b\}.$$

É importante observar que as operações $X \oplus B$ e $X \ominus B$ apresentadas acima constituem as primeiras formulações das operações de dilatação e erosão apresentadas por Matheron e Serra [48, 49, 34].

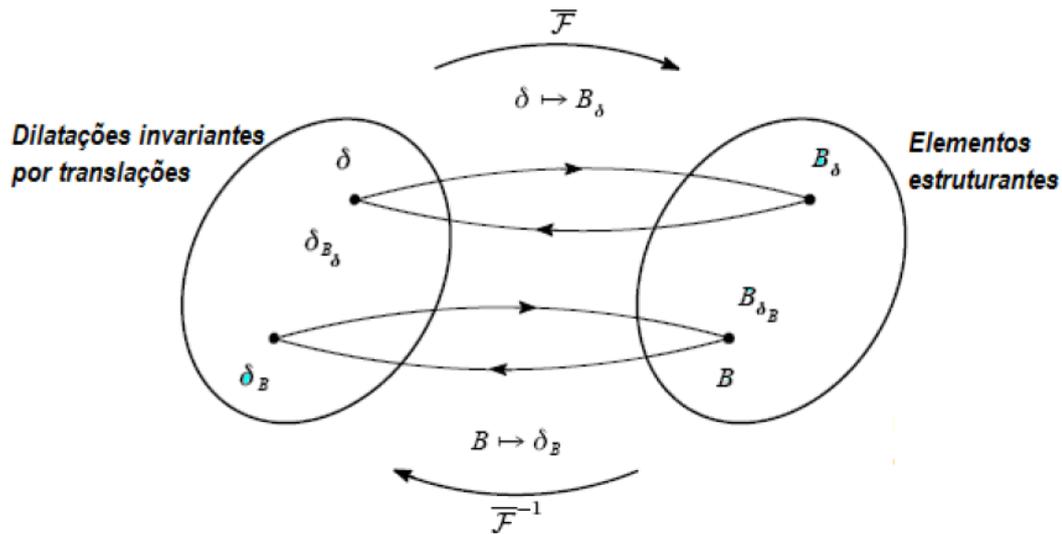


Figura 2.2 – Bijeção entre as dilatações invariantes por translações e seus elementos estruturantes.

Definição 2.23. [48] *Seja $X \subseteq E$ uma imagem binária e B um elemento estruturante. A dilatação $D(X, B)$ e a erosão $E(X, B)$ são dadas por:*

$$D(X, B) = \{z \in E : T_z(B) \cap X \neq \emptyset\} \text{ e } E(X, B) = \{z \in E : T_z(B) \subseteq X\}, \quad (2.17)$$

onde $T_z(B) = \{z' \in E : z - z' \in B\}$ é a translação de B por z .

As dilatações e erosões têm propriedades geométricas interessantes. Por exemplo, a dilatação $D(A, B)$ geralmente estende os contornos e preenche lacunas na imagem. Interpretações semelhantes podem ser feitas para as erosões [35].

2.2.3 Morfologia Matemática em Tons de Cinza (Abordagem da Umbra)

Uma das abordagens mais conhecidas para tratar imagens em tons de cinza é a abordagem da Umbra, desenvolvida por Sternberg [50]. Na MM em tons de cinza, aplica-se os conceitos da teoria dos reticulados para imagens, ou seja, funções de \mathbf{X} em \mathbb{V} , onde $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^d$ ou $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{Z}^d$ e \mathbb{V} é o conjunto dos valores da imagem. Nesta subseção, \mathbb{V} denota o reticulado completo dos reais estendidos ou inteiros estendidos com negação $\nu(x) = -x \forall x \in \mathbb{V}$.

Duas operações importantes entre imagens $a : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{V}$ são as *reflexões* e *translações*.

Definição 2.24 (Reflexões e Translações). [19] *Dada uma imagem $a : X \rightarrow \mathbb{V}$, definimos uma reflexão \bar{a} de a com respeito à origem e a translação a_y de a por y por*

$$\bullet \bar{a} = a(-x), \quad (\text{Reflexão com respeito à origem})$$

$$\bullet a_y(x) = a(x - y), \quad (\text{Translação de } a \text{ por } y)$$

para todo $x \in X$.

O conjunto das imagens $a : X \rightarrow \mathbb{V}$ é denotado por \mathbb{V}^X , i.e., $\mathbb{V}^X = \text{Fun}(X, \mathbb{V})$. Tal conjunto torna-se um reticulado completo se definirmos a ordem parcial \leq e a negação ν como segue para todo $a, b \in \mathbb{V}^X$.

$$a \leq b \Leftrightarrow a(x) \leq b(x) \text{ e } \nu(a)(x) := -a(x), \quad (2.18)$$

para todo $x \in X$.

A abordagem da umbra para a MM em tons de cinza está baseada na observação de que para toda imagem $a : X \rightarrow \mathbb{V}$, os pontos do gráfico e os pontos abaixo dele é um subconjunto de $X \times \mathbb{V}$.

As operações básicas da MM em tons de cinza são a erosão e a dilatação no reticulado completo \mathbb{V}^X . Uma das suas formulações pode ser definida como segue.

Definição 2.25 (Erosão e dilatação da umbra). [19] *Sejam $a, s \in \mathbb{V}^X$. A erosão da umbra $\mathcal{E}_U(a, s)$ e a dilatação da umbra $\mathcal{D}_U(a, s)$ da imagem a pelo elemento estruturante s são descritas pelas seguintes equações, respectivamente:*

$$\mathcal{E}_U(a, s)(x) = \bigwedge_{y \in X} (a(y) +' (-s_x(y))) \text{ e } \mathcal{D}_U(a, s)(x) = \bigvee_{y \in X} (a(y) + \bar{s}_x(y)), \quad (2.19)$$

onde as operações $+$ e $+'$ coincidem com a soma usual em \mathbb{R} e

$$\infty + (-\infty) = (-\infty) + \infty = -\infty \text{ e } \infty +' (-\infty) = (-\infty) +' \infty = \infty. \quad (2.20)$$

Para finalizar esta subsecção, o próxima proposição relaciona os operadores de dilatação e erosão da umbra com adjunção e negação.

Proposição 2.26. [19] *A erosão \mathcal{E}_U e a dilatação \mathcal{D}_U são operadores duais com respeito à adjunção e com respeito à negação ν .*

2.3 TEORIA DOS CONJUNTOS FUZZY

Os conjuntos fuzzy representam uma importante ferramenta na descrição de informações imprecisas existentes no mundo real. Esta teoria foi introduzida por Lotfi Zadeh em 1965 [61]. Mais precisamente, um conjunto fuzzy é caracterizado por uma função A que associa elementos de um conjunto arbitrário \mathbf{X} com alguns variados graus de pertinência. Em outras palavras, A especifica qual o grau de pertinência de um elemento $x \in \mathbf{X}$ no conjunto fuzzy A . Matematicamente, um conjunto fuzzy A é descrito pela função de pertinência [61, 38]:

$$A : \mathbf{X} \rightarrow [0, 1] \quad (2.21)$$

Denotaremos por $\mathcal{F}(\mathbf{X})$ a família de todos os conjuntos fuzzy sobre \mathbf{X} . Observe que, se \mathbf{X} é um conjunto finito com n elementos, então um conjunto fuzzy A corresponde à um ponto no hipercubo $[0, 1]^n$ [30, 38]. A teoria dos conjuntos fuzzy pode ser aplicada, por exemplo, ao desenvolvimento de operadores de imagens, pois uma imagem em tons de cinza pode ser interpretada como um conjunto fuzzy em $\mathcal{F}(\mathbf{X})$ [38].

Observação 2.27. *O conjunto $\mathcal{F}(\mathbf{X})$ é um reticulado completo, pois $\mathcal{F}(\mathbf{X}) = \text{Fun}(\mathbf{X}, [0, 1])$ e $[0, 1]$ é um reticulado completo.*

Assim como na teoria clássica dos conjuntos, podemos efetuar operações entre conjuntos fuzzy usando operações lógicas. Em particular, operadores definidos sobre o produto $[0, 1] \times [0, 1]$ em $[0, 1]$, satisfazendo as propriedades de comutatividade, associatividade, monotonicidade e existência do elemento identidade, são usados para modelar operações entre conjuntos fuzzy. As definições de tais operadores podem ser encontradas em [38, 31].

Definição 2.28. *Uma norma triangular (τ -norma), é um operador binário $\tau : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz as seguintes propriedades para todo $a, b, c \in [0, 1]$:*

- (a) $a \tau b = b \tau a;$ (Comutatividade)
- (b) $a \tau (b \tau c) = (a \tau b) \tau c;$ (Associatividade)
- (c) *Se $b \leq c$, então $a \tau b \leq a \tau c$;* (Monotonicidade)
- (d) $a \tau 1 = a$ (Identidade)

Exemplo 2.29. Sejam $a, b \in [0, 1]$, os operadores:

$$(a) \quad a \tau_m b = \bigwedge \{a, b\} = a \wedge b \quad (\text{Mínimo})$$

$$(b) \quad a \tau_p b = ab \quad (\text{Produto})$$

$$(c) \quad a \tau_l b = \vee(a + b - 1, 0) \quad (\text{Lukasiewicz})$$

$$(d) \quad a \tau_d b = \begin{cases} a & \text{se } b = 1 \\ b & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{Produto Drástico})$$

são exemplos de τ -normas.

No exemplo anterior, observe que apenas τ_m , τ_p e τ_l são operadores contínuos.

Mais geralmente, uma τ -norma é um caso particular de uma *conjunção fuzzy*, que é um operador crescente $C : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, satisfazendo $C(0, 0) = C(0, 1) = C(1, 0) = 0$ e $C(1, 1) = 1$, i.e., C estende a conjunção clássica [26, 37]. Uma τ -norma modela a operação de interseção entre conjuntos fuzzy. Portanto, se A e B representam conjuntos fuzzy sobre \mathbf{X} , definimos $(A \cap B)(x) = A(x) \tau B(x)$, para alguma τ -norma. Todas as propriedades básicas da interseção entre conjuntos clássicos são preservadas para os conjuntos fuzzy. Porém, para conjuntos fuzzy, podemos ter

$$A \cap \bar{A} \neq \emptyset$$

onde $\bar{A}(x) = 1 - A(x)$, para todo $x \in \mathbf{X}$. Observe que existem diversas maneiras de realizar a interseção $A \cap B$ na teoria dos conjuntos fuzzy.

Definição 2.30. Uma co-norma triangular (*s-norma*), é um operador binário $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz as seguintes propriedades para todo $a, b, c \in [0, 1]$:

$$(a) \quad a s b = b s a; \quad (\text{Comutatividade})$$

$$(b) \quad a s (b s c) = (a s b) s c; \quad (\text{Associatividade})$$

$$(c) \quad \text{Se } b \leq c, \text{ então } a s b \leq a s c; \quad (\text{Monotonicidade})$$

$$(d) \quad a s 0 = a \quad (\text{Identidade})$$

Uma s -norma é um caso particular de uma *disjunção fuzzy*, que é um operador crescente $D : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, satisfazendo $D(1, 1) = D(0, 1) = D(1, 0) = 1$ e $D(0, 0) = 0$ [37]. Além disso, uma s -norma modela a operação de união entre conjuntos fuzzy. Portanto, se A e B representam conjuntos fuzzy sobre \mathbf{X} , definimos $(A \cup B)(x) = A(x) s B(x)$, para alguma s -norma. Todas as propriedades básicas da união entre conjuntos clássicos são preservadas para os conjuntos fuzzy. Porém, para conjuntos fuzzy, podemos ter

$$A \cup \bar{A} \neq \mathbf{X}.$$

Exemplo 2.31. Sejam $a, b \in [0, 1]$, os operadores:

$$(a) \quad a s_m b = \bigvee \{a, b\} = a \vee b \quad (\text{Máximo})$$

$$(b) \quad a s_p b = a + b - ab \quad (\text{Soma Probabilística})$$

$$(c) \quad a s_l b = \wedge(a + b, 1) \quad (\text{Lukasiewicz})$$

$$(d) \quad a s_d b = \begin{cases} a & \text{se } b = 0 \\ b & \text{se } a = 0 \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{Soma Drástica})$$

são exemplos de s -normas.

No exemplo anterior, note que apenas s_m , s_p e s_l são operadores contínuos. As t -normas e s -normas contínuas efetuam dilatações e erosões em $[0, 1] \times [0, 1]$, respectivamente. De fato, considere subconjuntos $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \subset [0, 1]$ e tome uma sequência $\{x_n\}$ não-decrescente de elementos de \mathbf{X} , que converge para $\bigvee \mathbf{X}$. Assim, fixado $y \in \mathbf{Y}$ teremos

$$\left(\bigvee \mathbf{X}\right) t y = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) t y = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n t y) = \bigvee_{x \in \mathbf{X}} (x t y)$$

Analogamente, fixado $x \in \mathbf{X}$, teremos $x t \left(\bigvee \mathbf{Y}\right) = \bigvee_{y \in \mathbf{Y}} (x t y)$. O mesmo raciocínio pode ser aplicado para mostrar que uma s -norma contínua efetua uma erosão.

Existe uma relação de dualidade entre t -normas e s -normas. Observe que, se $a, b \in [0, 1]$ e s é uma s -norma, então $a t b = 1 - (1 - a) s (1 - b)$ é uma t -norma. Por outro lado

$$(1 - a) t (1 - b) = 1 - [1 - (1 - a)] s [1 - (1 - b)] = 1 - a s b \Rightarrow a s b = 1 - (1 - a) t (1 - b)$$

ou seja, dado uma t -norma podemos obter uma s -norma dual correspondente. Consequentemente, a lei de De Morgan é válida para conjuntos fuzzy.

As *uninormas*, introduzidas por Yager e Rybalov em [59], generalizam os conceitos de \mathbf{t} -normas e \mathbf{s} -normas assumindo que o elemento identidade e seja algum número no intervalo unitário, ou seja, $e \in [0, 1]$. Precisamente:

Definição 2.32. *Uma uninorma é um operador binário $u : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo as seguintes propriedades para todo $a, b, c \in [0, 1]$:*

- (a) $a u b = b u a;$ (Comutatividade)
- (b) $a u (b u c) = (a u b) u c;$ (Associatividade)
- (c) *Se $b \leq c$, então $a u b \leq a u c$;* (Monotonicidade)
- (d) $a u e = a$ (Identidade)

Uma uninorma torna-se uma \mathbf{t} -norma se $e = 1$ e uma \mathbf{s} -norma se $e = 0$.

Exemplo 2.33. [38] Para qualquer uninorma u com $e \in (0, 1)$, temos a relação

$$a u_w b \leq a u b \leq a u_s b \quad (2.22)$$

onde u_w e u_s são as uninormas *mais fraca* e *mais forte*, respectivamente, dadas por:

$$a u_w b = \begin{cases} 0, & \text{se } a, b \in [0, e) \\ a \vee b, & \text{se } a, b \in [e, 1] \\ a \wedge b, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.23)$$

$$a u_s b = \begin{cases} a \wedge b, & \text{se } a, b \in [0, e] \\ 1, & \text{se } a, b \in (e, 1] \\ a \vee b, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.24)$$

Se u é uma uninorma que efetua uma dilatação no segundo argumento, dizemos que u é uma *uninorma dilatativa*. Analogamente, se u efetua uma erosão no segundo argumento, dizemos que u é uma *uninorma erosiva*.

Lembramos que existem uninormas que não realizam dilatações nem erosões.

Exemplo 2.34 (Classe de Uninormas \mathcal{U}_{min} e \mathcal{U}_{max}). [57] A classe \mathcal{U}_{min} de uninormas é definida como segue onde \mathbf{t} e \mathbf{s} denotam uma \mathbf{t} -norma e uma \mathbf{s} -norma, respectivamente:

$$a u b = \begin{cases} e \left(\frac{a}{e} \mathbf{t} \frac{b}{e} \right) & \text{se } 0 \leq a, b \leq e, \\ e + (1 - e) \left(\frac{a-e}{1-e} \mathbf{s} \frac{b-e}{1-e} \right) & \text{se } e \leq a, b \leq 1, \\ a \wedge b & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.25)$$

Uma uninorma $u \in \mathcal{U}_{min}$ não representa uma dilatação. De fato, se $e < a \leq 1$ e $B = [0, e)$ então $a u (\bigvee B) = a$ mas $\bigvee_{b \in B} (a u b) = e$. Também, $u \in \mathcal{U}_{min}$ não efetua uma erosão, pois $1 u a = 1 \wedge a = a$ para todo $a \in [0, e)$.

Uma classe dual de uninormas, denotadas por \mathcal{U}_{max} , pode ser obtida substituindo a operação de mínimo por uma operação de máximo na Equação (2.25). As uninormas da classe \mathcal{U}_{max} não efetuam uma erosão.

Fodor et al. [13] investigaram a existência de uninormas com representação em termos de uma função.

Proposição 2.35 (Uninormas Representáveis). [11, 13] *Considere $e \in (0, 1)$ e uma função contínua estritamente crescente $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ com $\phi(0) = -\infty$, $\phi(e) = 0$ e $\phi(1) = +\infty$. O operador binário definido por*

$$a u_{\phi} b = \phi^{-1}(\phi(a) + \phi(b)), \forall (a, b) \in [0, 1]^2 - \{(0, 1), (1, 0)\}, \quad (2.26)$$

com

$$(0 u_{\phi} 1) = (1 u_{\phi} 0) = 0 \text{ ou } (0 u_{\phi} 1) = (1 u_{\phi} 0) = 1,$$

é uma uninorma com elemento neutro e . Observe que a uninorma u_{ϕ} efetua uma dilatação quando $0 u_{\phi} 1 = 1 u_{\phi} 0 = 0$ e uma erosão quando $0 u_{\phi} 1 = 1 u_{\phi} 0 = 1$.

Alternativamente, se $\psi(x) = \exp \phi(x) : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty]$ onde $\psi(0) = 0$ e $\psi(1) = +\infty$, então definimos u_{ψ} através da seguinte equação

$$a u_{\psi} b = \psi^{-1}(\psi(a)\psi(b)), \forall (a, b) \in [0, 1]^2 - \{(0, 1), (1, 0)\}, \quad (2.27)$$

com

$$(0 u_{\psi} 1) = (1 u_{\psi} 0) = 0 \text{ ou } (0 u_{\psi} 1) = (1 u_{\psi} 0) = 1.$$

Note que a uninorma u_{ψ} efetua uma dilatação quando $(0 u_{\psi} 1) = (1 u_{\psi} 0) = 0$ e uma erosão quando $(0 u_{\psi} 1) = (1 u_{\psi} 0) = 1$.

As funções ϕ e ψ são chamadas *geradores aditivos e multiplicativos* de u_{ϕ} e u_{ψ} , respectivamente e as uninormas descritas pelas equações (2.26) e (2.27) são chamadas *uninormas representáveis*. Note que as uninormas representáveis são dilatativas ou erosivas com elemento identidade dado por $e = \phi^{-1}(0) = \psi^{-1}(1)$.

Exemplo 2.36 (Uninorma 3Π Parametrizada). [47] A classe das *uninormas parametrizadas* 3Π é obtida considerando o gerador multiplicativo $\psi(x) = \frac{x^p}{1-x^p}$ onde $p \in \mathbb{R}_+$. Neste caso, $\exp \phi(x) = \frac{x^p}{1-x^p}$ e a função $\phi : [0, 1] \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é dada por $\phi(x) = \ln \frac{x^p}{1-x^p}$, onde $\phi(0) = -\infty$ e $\phi(1) = +\infty$. Além disso, $\psi^{-1}(x) = \frac{x^p}{1+x^p}$. Portanto, de acordo com as equações (2.27) e (2.26) podemos definir

$$\begin{aligned} a \mathbf{u}_{3\Pi} b &= \phi^{-1}(\phi(a) + \phi(b)), \forall (a, b) \in [0, 1]^2 - \{(0, 1), (1, 0)\} \\ &= \psi^{-1}(\psi(a)\psi(b)), \forall (a, b) \in [0, 1]^2 - \{(0, 1), (1, 0)\} \\ &= \frac{a^p b^p}{a^p b^p + (1-a^p)(1-b^p)}, \forall (a, b) \in [0, 1]^2 - \{(0, 1), (1, 0)\}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

com

$$(0 \mathbf{u}_{3\Pi} 1) = (1 \mathbf{u}_{3\Pi} 0) = 0 \quad \text{ou} \quad (0 \mathbf{u}_{3\Pi} 1) = (1 \mathbf{u}_{3\Pi} 0) = 1.$$

Note que a uninorma $\mathbf{u}_{3\Pi}$ efetua uma dilatação quando $(0 \mathbf{u}_{3\Pi} 1) = (1 \mathbf{u}_{3\Pi} 0) = 0$ e uma erosão quando $(0 \mathbf{u}_{3\Pi} 1) = (1 \mathbf{u}_{3\Pi} 0) = 1$. Além disso, a uninorma $\mathbf{u}_{3\Pi}$ tem elemento neutro $e = \sqrt[p]{\frac{1}{2}}$.

Definiremos agora as implicações fuzzy e, a seguir, veremos a sua relação com as dilatações e erosões.

Definição 2.37. [38, 12] Uma implicação fuzzy é uma função $\Rightarrow: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ decrescente no primeiro argumento, crescente no segundo argumento e estende a implicação clássica em $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$, ou seja

1. $(0 \Rightarrow 0) = (0 \Rightarrow 1) = (1 \Rightarrow 1) = 1$
2. $(1 \Rightarrow 0) = 0$

Agora, se u representa uma uninorma dilatativa, então, pela Proposição 2.16, existe uma única erosão \Rightarrow_R , denominada *R-implicação associada a uninorma u* [52], tal que (\Rightarrow_R, u) é uma adjunção. Além disso, fixado $a \in [0, 1]$

$$(a \Rightarrow_R b) = \bigvee \{c \in [0, 1] : a u c \leq b\}. \quad (2.29)$$

Exemplo 2.38. [38] As equações a seguir representam R-implicações associadas as t -normas do mínimo, produto e Lukasiewicz, respectivamente.

$$(a) \quad a \Rightarrow_R b = \begin{cases} 1, & \text{se } a \leq b \\ b, & \text{se } a > b \end{cases} \quad (\text{Godel})$$

$$(b) \ a \Rightarrow_R b = 1 \wedge \left(\frac{b}{a}\right). \quad (\text{Goguen})$$

$$(c) \ a \Rightarrow_R b = 1 \wedge (1 - a + b). \quad (\text{Lukasiewicz})$$

Dualmente, se u' representa uma uninorma erosiva, então, pela Proposição 2.16, existe uma única dilatação \Rightarrow_R , denominada *R-coimplicação associada a uninorma u'* [57], tal que (\Rightarrow_R, u') é uma adjunção. Além disso, para todo $a, b \in [0, 1]$

$$a \Rightarrow_R b = \bigwedge \{c \in [0, 1] : a u' c \geq b\}. \quad (2.30)$$

Exemplo 2.39. [38] Os seguintes operadores representam as coimplicações de Godel, Goguen e Lukasiewicz, respectivamente.

$$(a) \ a \Rightarrow_R b = \begin{cases} 0, & \text{se } a \geq b \\ b, & \text{se } a < b \end{cases} \quad (\text{Godel})$$

$$(b) \ a \Rightarrow_R b = \begin{cases} 0, & \text{se } a \geq b \\ \frac{b-a}{1-a}, & \text{se } a < b \end{cases} \quad (\text{Goguen})$$

$$(c) \ a \Rightarrow_R b = 0 \vee (b - a). \quad (\text{Lukasiewicz})$$

A seguinte proposição mostra que as implicações associadas as uninormas representáveis com geradores aditivos, podem, também, ser escritas em termos de seus geradores aditivos.

Proposição 2.40. [11] *Considere uma uninorma representável u_ϕ com gerador aditivo ϕ , onde $(0 u_\phi 1) = (1 u_\phi 0) = 0$. Então, a implicação $\Rightarrow_{u_\phi} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ é dada por*

$$a \Rightarrow_{u_\phi} b = \begin{cases} \phi^{-1}(\phi(b) - \phi(a)), & \text{se } (a, b) \in [0, 1]^2 - \{(0, 0), (1, 1)\} \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.31)$$

Analogamente, podemos escrever essas implicações em termos dos geradores multiplicativos.

Proposição 2.41. *Considere uma uninorma representável u_ψ com gerador multiplicativo ψ , onde $(0 u_\psi 1) = (1 u_\psi 0) = 0$. Então, a implicação $\Rightarrow_{u_\psi} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ é dada por*

$$a \Rightarrow_{u_\psi} b = \begin{cases} \psi^{-1}\left(\frac{\psi(b)}{\psi(a)}\right), & \text{se } (a, b) \in [0, 1]^2 - \{(0, 0), (1, 1)\} \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.32)$$

Exemplo 2.42. Considere a uninorma $u_{3\Pi}$ como no Exemplo 2.36 com $p = 1$. De acordo com a Proposição 2.40, a implicação associada a esta uninorma é dada pela equação

$$a \Rightarrow_{u_{3\Pi}} b = \begin{cases} \frac{(1-a)b}{a(1-b)-(1-a)b}, & \text{se } (a, b) \in [0, 1]^2 - \{(0, 0), (1, 1)\} \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.33)$$

As uninormas e as implicações fuzzy podem ser combinadas com os operadores \bigvee e \bigwedge para definir os seguintes produtos matriciais.

Definição 2.43. Dado $A \in [0, 1]^{m \times r}$ e $B \in [0, 1]^{r \times n}$, definimos o produto max- u e o produto min- u denotados respectivamente por $C = A \circ_u B$ e $D = A \bullet_u B$, como segue:

$$c_{ij} = \bigvee_{k=1}^q (a_{ik} \ u \ b_{kj}) \quad e \quad d_{ij} = \bigwedge_{k=1}^q (a_{ik} \ u \ b_{kj}) \quad (2.34)$$

Definição 2.44. Se $A \in [0, 1]^{m \times q}$ e $B \in [0, 1]^{q \times n}$, então definimos o produto Min \Rightarrow_R denotado por $C = A \triangleleft_R B$, da seguinte forma:

$$c_{ij} = \bigwedge_{k=1}^q (b_{kj} \Rightarrow_R a_{ik}) \quad (2.35)$$

Definição 2.45. Se $A \in [0, 1]^{m \times q}$ e $B \in [0, 1]^{q \times n}$, então o produto Max \Rightarrow_R denotado por $C = A \triangleright_R B$ é calculado pela seguinte equação:

$$c_{ij} = \bigvee_{k=1}^q (b_{kj} \Rightarrow_R a_{ik}) \quad (2.36)$$

Tais produtos serão úteis no próximo capítulo, quando trataremos das memórias associativas morfológicas fuzzy.

2.4 A ESTRUTURA CLODUM

Aspectos da teoria algébrica da morfologia matemática, tanto do ponto de vista da álgebra min-max como de sistemas invariantes à translações foram investigados por Maragos [32]. Nesse trabalho, Maragos introduz uma estrutura matemática mínima para a representação algébrica de operadores de dilatação e erosão invariantes à translações. Essa estrutura matemática é chamada *CLODUM*. Vejamos a definição de um CLODUM, mas antes, recordemos alguns fatos.

Definição 2.46. [3] *Seja \mathbb{L} um reticulado completo infinitamente distributivo. Podemos definir em \mathbb{L} uma operação adicional $*$, denominada multiplicação. Com relação a $*$, dizemos que \mathbb{L} é um monóide se $*$ é associativa e possui elemento identidade. Se $*$ for comutativa, obtemos um monóide comutativo. Analogamente, podemos definir em \mathbb{L} uma outra operação $*'$ chamada multiplicação dual.*

Com essas informações, podemos então definir um CLODUM.

Definição 2.47. [32] *Se \mathbb{L} é um reticulado completo onde:*

- (a) \mathbb{L} é infinitamente distributivo;
- (b) \mathbb{L} , com relação a operação $*$ é um monóide comutativo, onde $*$ é uma dilatação;
- (c) \mathbb{L} , com relação a operação $*'$ é um monóide comutativo, onde $*'$ é uma erosão;

então dizemos que \mathbb{L} é um CLODUM (complete lattice-ordered double monoid).

Observação 2.48. *Denotaremos um CLODUM \mathbb{L} por $(\mathbb{L}, \vee, \wedge, *, *')$, quando houver a necessidade de explicitar as operações.*

Exemplo 2.49. Lembre-se que $[0, 1]$ é um reticulado completo infinitamente distributivo. Se considerarmos a operação $*$ como sendo uma uninorma dilatativa u e a operação $*'$ como sendo uma uninorma erosiva u' , então $[0, 1]$ torna-se um CLODUM.

Exemplo 2.50. [32] *Seja $(\mathbb{L}, \leq, \vee, \wedge, *, *')$ um CLODUM e E um conjunto arbitrário. Podemos definir em $\mathcal{S} = Fun(E, \mathbb{L})$ as operações $*$ e $*'$ por*

$$(F * G)(x) := F(x) * G(x), \quad (2.37)$$

$$(F *' G)(x) := F(x) *' G(x), \quad (2.38)$$

para todo $x \in E$. Assim, \mathcal{S} com ordem parcial \leq , munido das operações $\vee, \wedge, *$ e $*'$ torna-se um CLODUM.

Exemplo 2.51. Considere o conjunto $\mathcal{F}(\mathbf{X})$ (cf. observação 2.27) e o CLODUM $([0, 1], \leq, \vee, \wedge, u, u')$ (cf. exemplo 2.49). Decorre do exemplo 2.50 que $(\mathcal{F}(\mathbf{X}), \vee, \wedge, u, u')$ é também um CLODUM.

Definição 2.52. Seja \mathbb{M} um monóide. Fixado $v \in \mathbb{M}$, definimos uma regradação $\lambda_v : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ por $\lambda_v(x) = v * x$, onde $*$ é a multiplicação em \mathbb{M} . Dizemos ainda que um operador $\varphi : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ é invariante a regradações¹ se $\varphi \lambda_v = \lambda_v \varphi$ para todo $v \in \mathbb{M}$.

Exemplo 2.53. Seja $(\mathcal{S}, \vee, \wedge, *, *')$ um CLODUM (cf. exemplo 2.50). Um operador $\delta : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ é uma dilatação invariante a regradações se, e somente se,

$$\delta \left[\bigvee_{i \in J} (c_i * F_i(x)) \right] = \bigvee_{i \in J} (c_i * [\delta(F_i)](x)), \quad \forall x \in E \quad (2.39)$$

onde $c_i \in \mathbb{L}$, $F_i \in \mathcal{S}$ e J é um conjunto de índices. Dualmente, $\varepsilon : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ é uma erosão invariante a regradações duais se, e somente se,

$$\varepsilon \left[\bigwedge_{i \in J} (c_i *' F_i(x)) \right] = \bigwedge_{i \in J} (c_i *' [\varepsilon(F_i)](x)), \quad \forall x \in E \quad (2.40)$$

onde $c_i \in \mathbb{L}$, $F_i \in \mathcal{S}$ e J é um conjunto de índices.

De fato, se δ é uma dilatação invariante a regradações, então

$$\delta \left(\bigvee_{i \in J} c_i * F_i(x) \right) = \bigvee_{i \in J} \delta(c_i * F_i(x)) = \bigvee_{i \in J} c_i * [\delta(F_i)](x), \quad \forall x \in E.$$

Reciprocamente, tome c_i como sendo o elemento identidade de \mathbb{L} e o resultado está provado.

Observação 2.54. Denotaremos por $\mathcal{D}_{ir}(X, Y)$ o conjunto de todas as aplicações de X em Y que efetuem dilatações invariantes a regradações. Dualmente, denotaremos por $\mathcal{E}_{ir}(X, Y)$ o conjunto de todas as aplicações de X em Y que efetuem erosões invariantes a regradações duais.

Exemplo 2.55. Considere em $\mathcal{F}(X)$ a multiplicação $*$ como sendo uma uninorma u . Podemos definir uma regradação $\lambda_v : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ da seguinte forma fixando $v \in [0, 1]$:

$$[\lambda_v(A)](x) := v u A(x), \quad \forall x \in X \quad (2.41)$$

onde $A \in \mathcal{F}(X)$.

De um modo geral, dado $v \in [0, 1]$ e $A \in \mathcal{F}(X)$, dizemos simplesmente que $v u A$ é uma regradação de A , i.e., $v u A = \lambda_v(A)$. Note que uma regradação em $\mathcal{F}(X)$ redefine o grau de pertinência de um conjunto fuzzy.

¹Esta definição é referida como invariante a v -translações por Maragos em [32].

Exibiremos agora dois conjuntos fuzzy fundamentais para a caracterização de todos os conjuntos fuzzy. Precisamente, os seguintes conjuntos comportam-se como uma “base” para $\mathcal{F}(\mathbf{X})$:

$$q_x(z) := \begin{cases} e, & x = z \\ 0, & x \neq z \end{cases} \quad (2.42)$$

e

$$q'_x(z) := \begin{cases} e', & x = z \\ 1, & x \neq z \end{cases} \quad (2.43)$$

onde $x, z \in \mathbf{X}$, e é o elemento identidade de \mathbf{u} e e' é o elemento identidade de \mathbf{u}' . Podemos dizer que, para todo $z \in \mathbf{X}$, tem se

$$A(z) = \bigvee_{x \in \mathbf{X}} [A(x) \mathbf{u} q_x(z)] = \bigwedge_{x \in \mathbf{X}} [A(x) \mathbf{u}' q'_x(z)] \quad (2.44)$$

Definição 2.56. Dada uma dilatação $\delta : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{Y})$, definimos o núcleo de δ por $H_x : \mathbf{Y} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{Y})$, definida para cada $y \in \mathbf{Y}$ como a imagem de δ pelo conjunto fuzzy q_x . Dualmente, para uma erosão ε , definimos o seu núcleo dual por H'_x . Matematicamente, temos

$$[H_x](y) := [\delta(q_x)](y) \text{ e } [H'_x](y) := [\varepsilon(q'_x)](y), \quad (2.45)$$

para todo $x \in \mathbf{X}$, $y \in \mathbf{Y}$.

A próxima proposição, devido a Maragos [32], relaciona as dilatações (erosões) invariantes a regradações em $\mathcal{F}(\mathbf{X})$, com os seus núcleos (núcleos duais).

Proposição 2.57. Seja $([0, 1], \bigvee, \bigwedge, \mathbf{u}, \mathbf{u}')$ um CLODUM. Então:

(a) Um operador $\delta \in \mathcal{D}_{ir}(\mathcal{F}(\mathbf{X}), \mathcal{F}(\mathbf{Y}))$, ou seja, obedece (2.39), se, e somente se, pode ser expresso como

$$\delta(A)(y) = \bigvee_{x \in \mathbf{X}} [A(x) \mathbf{u} H_x(y)] \quad (2.46)$$

onde H_x é o seu núcleo como em (2.45) e A é um conjunto fuzzy em \mathbf{X} .

(b) Um operador $\varepsilon \in \mathcal{E}_{ir}(\mathcal{F}(\mathbf{X}), \mathcal{F}(\mathbf{Y}))$, ou seja, obedece (2.40), se, e somente se, pode ser expresso como

$$\varepsilon(A)(y) = \bigwedge_{x \in \mathbf{X}} [A(x) \mathbf{u}' H'_x(y)] \quad (2.47)$$

onde H'_x é o seu núcleo dual como em (2.45) e $A \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$.

A proposição 2.57 será usada no próximo capítulo para relacionar as FAMs que efetuam dilatações (erosões) invariantes a regraduações (regraduações duais) com as FMAMs baseadas em uninormas dilatativas (erosivas).

CAPÍTULO 3

MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS FUZZY E O SEU TEOREMA DA REPRESENTAÇÃO EM CLODUMs

3.1 MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS

Em um contexto neurobiológico, *memória* se refere às alterações neurais relativamente duradouras induzidas pela interação de um organismo com o seu ambiente. Além disso, para que a memória seja útil, ela deve ser acessível ao sistema nervoso para poder influenciar o comportamento futuro. Entretanto, um padrão de atividade deve ser inicialmente armazenado na memória através de um *processo de armazenamento* [17, 55].

Nessa dissertação, estaremos interessados em estudar as memórias associativas. Em termos gerais *Memórias Associativas* (AM, Associative Memories) são modelos inspirados no cérebro humano e projetados para armazenar pares de entrada (estímulo) e saída (resposta). Representaremos os padrões de entrada e saída por vetores coluna \mathbf{x} e \mathbf{y} , respectivamente, onde

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

e

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$$

Dado um conjunto finito $\Gamma = \{(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) : k = 1, \dots, q\}$, onde $\mathbf{x}_k = [x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}]^T$ e $\mathbf{y}_k = [y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{mk}]^T$ são padrões de entrada e saída de uma AM, respectivamente, chamamos cada par $(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$ de *memória fundamental*.

Acima de tudo, o problema principal a ser resolvido neste trabalho é denominado *problema de memória associativa*. Podemos atribuir a seguinte formulação a um problema de memória associativa:

Problema de memória associativa 3.1. *Dado um conjunto finito $\Gamma = \{(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) : k = 1, \dots, q\}$ de memórias fundamentais, estamos interessados em determinar uma função G tal que $G(\mathbf{x}_k) = \mathbf{y}_k$, para todo $k = 1, \dots, q$. Além disso, G deve ser capaz de recordar os padrões memorizados \mathbf{y}_k , mesmo após a apresentação de padrões ruidosos ou incompletos, i.e., $G(\tilde{\mathbf{x}}_k) = \mathbf{y}_k$ para todo $k = 1, \dots, q$ [16].*

Tem-se uma *memória autoassociativa* quando o conjunto das memórias fundamentais é da forma $\{(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k) : k = 1, \dots, q\}$. Caso contrário, temos uma *memória heteroassociativa*.

Um problema muito comum na construção de uma memória associativa é a criação de memórias falsas ou espúrias. Uma *memória espúria* é um par de entrada e saída que foi armazenado na memória, mas não pertence ao conjunto das memórias fundamentais, i.e., o par foi armazenado involuntariamente na memória associativa [56].

O processo usado para determinar G é chamado *fase de armazenamento* e a aplicação G é referida como *aplicação associativa*.

Da motivação biológica, utilizaremos modelos de AM descritos por Redes Neurais Artificiais (RNAs). Para tanto, recordaremos alguns conceitos de RNAs na próxima seção.

3.2 REDES NEURAIAS ARTIFICIAIS

Uma *rede neural artificial*, ou simplesmente *rede neural*, é um modelo matemático inspirado no cérebro humano. Esse modelo é constituído de unidades de processamento simples, chamados *neurônios*, que têm a tendência natural de armazenar conhecimento experimental e torná-lo disponível para uso. Ela se assemelha ao cérebro humano em dois aspectos [17]:

1. O conhecimento é adquirido pela rede a partir de seu ambiente através de um *processo de aprendizagem*.
2. Forças de conexão entre neurônios, conhecidos como *pesos sinápticos*, são utilizados para armazenar o conhecimento adquirido.

Podemos identificar o modelo de um neurônio através de três elementos básicos [56]. Tal modelo está ilustrado na figura 3.1.

1. Um *conjunto de pesos sinápticos* e uma *operação binária* que combina a entrada com o respectivo peso sináptico.
2. Uma *regra de agregação* que combina as entradas dos neurônios ponderados com os respectivos pesos sinápticos.

3. Uma *função de ativação* com objetivo de introduzir não-linearidade no modelo ou confinar a saída do neurônio num dado intervalo.

O modelo neural pode incluir um *bias* aplicado externamente. O bias tem o efeito de aumentar ou diminuir a entrada líquida da função de ativação. Entretanto, o bias pode ser interpretado como um peso sináptico conectado a uma entrada constante [56, 17].

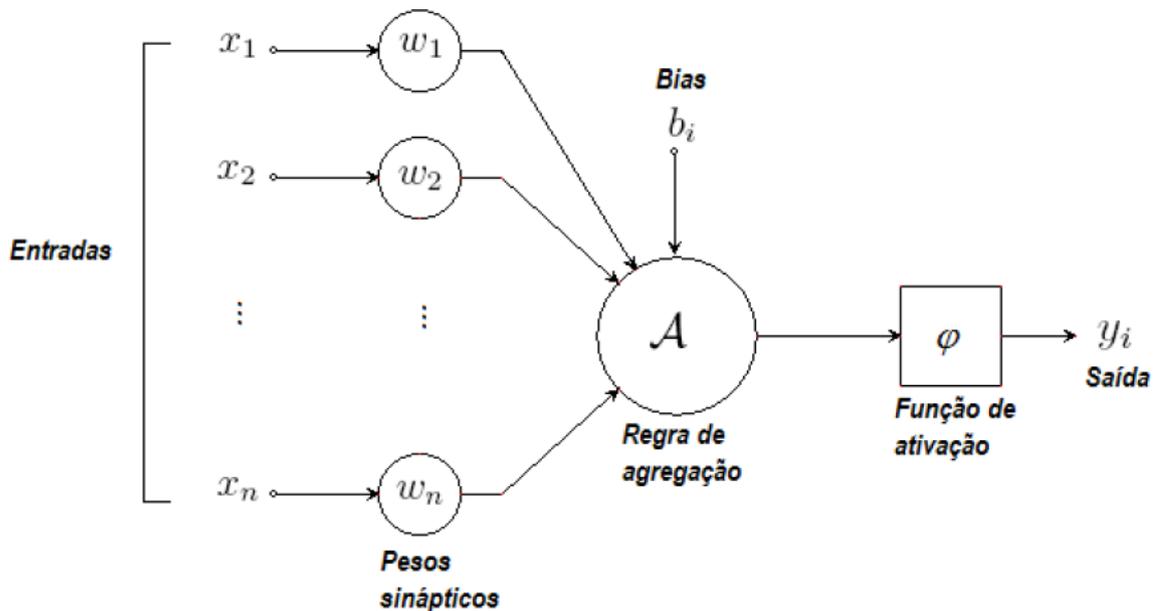


Figura 3.1 – Modelo geral de um neurônio.

A *topologia* ou *arquitetura* de uma rede neural consiste na maneira pela qual os neurônios estão dispostos na rede. Podemos identificar três classes de arquiteturas de redes neurais [17] embora, essas não sejam as únicas arquiteturas disponíveis na literatura.

1. Redes Progressivas com Camada Única

Uma *rede de camada única* é uma rede neural com apenas uma camada de neurônios com pesos ajustáveis. Na figura 3.2, podemos visualizar um exemplo de rede neural de camada única.

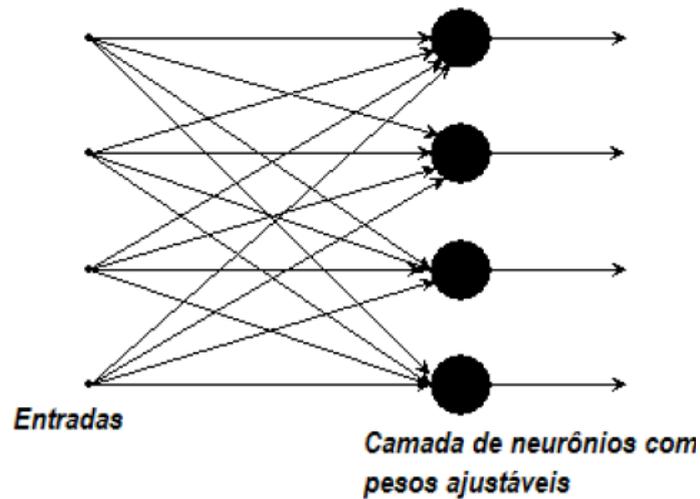


Figura 3.2 – Rede progressiva de camada única.

2. Redes Progressivas com Múltiplas Camadas

Esta classe de redes neurais é caracterizada pela presença de uma ou mais *camadas ocultas ou intermediárias*. O objetivo destas camadas intermediárias é intervir entre as entradas e saídas da rede, i.e., os sinais de entrada são aplicados aos neurônios da primeira camada intermediária, em seguida, os sinais de saída da primeira camada intermediária são utilizados como sinais de entrada para a segunda camada intermediária, e assim por diante para o resto da rede. Após este processo, a camada de saída calcula a resposta final da rede, como mostra a Figura 3.3. O *Perceptron de Múltiplas Camadas* [17] é um exemplo de rede neural progressiva com múltiplas camadas.

3. Redes Recorrentes

Uma rede neural recorrente possui conexões entre neurônios da mesma camada e/ou conexões apontando na direção da entrada. Uma rede recorrente pode consistir, por exemplo, de uma única camada de neurônios onde cada neurônio é alimentado pela saída de todos os outros neurônios [17]. A *rede de Hopfield* é um exemplo de uma rede neural recorrente.

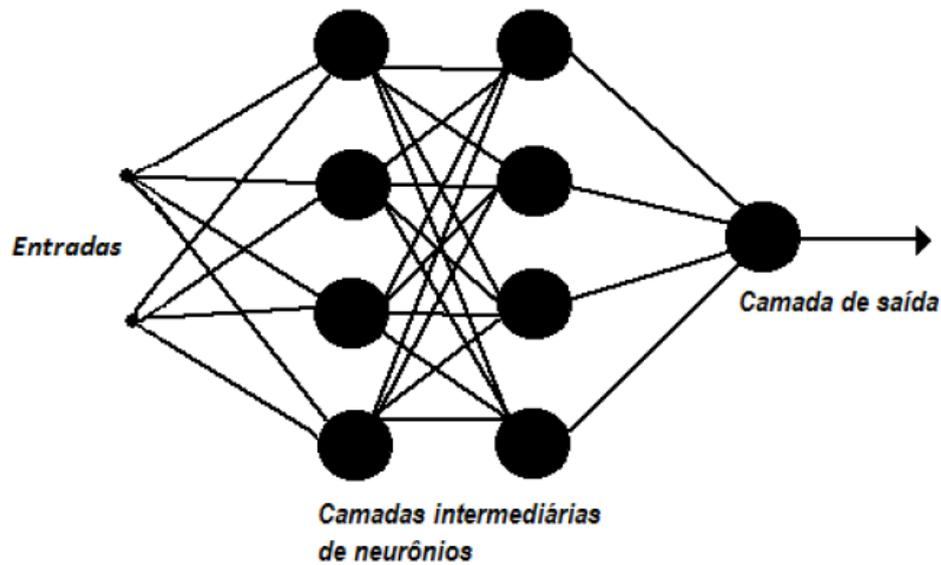


Figura 3.3 – Rede progressiva com múltiplas camadas.

Os conceitos acima podem ser descritos através de uma equação básica, ou seja, as redes neurais tradicionais podem ser expressas através do seguinte modelo:

$$y_i = \varphi \left(\mathcal{A}_{j=1}^n (w_{ij} \odot x_j) \right) \quad (3.1)$$

onde x_j denota o valor do j -ésima entrada, n representa o número de neurônios da rede, w_{ij} o valor do peso sináptico entre o i -ésimo e j -ésimo neurônio, \odot uma operação binária que combina as entradas com os respectivos pesos sinápticos, y_i é o efeito total das entradas sobre o i -ésimo neurônio, b_i um bias, \mathcal{A} denota uma regra de agregação e φ uma função de ativação. Embora nem todas as redes neurais possam ser exatamente descritas por essas duas equações, pode-se dizer que são variações dessa equação.

Descreveremos a seguir, as redes neurais fuzzy, redes neurais morfológicas e as redes neurais morfológicas fuzzy.

3.2.1 Redes Neurais Fuzzy

As *Redes Neurais Fuzzy* (FNNs, Fuzzy Neural Networks or Neurofuzzy Networks) são modelos de redes neurais artificiais cujo os padrões de entrada e saída e/ou os pesos sinápticos

representam conjuntos fuzzy definidos em universos de discurso finito [23]. Podemos classificar esses modelos como *redes neurais fuzzy regulares* e *redes neurais fuzzy híbridas*. As redes neurais fuzzy regulares utilizam padrões de entrada e/ou pesos sinápticos sendo conjuntos fuzzy com função de ativação, operação binária e regra de agregação definidos em termos do princípio de extensão de Zadeh [38], enquanto as redes neurais fuzzy híbridas utilizam operadores e regra de agregação da lógica fuzzy, por exemplo, τ -normas, \mathfrak{s} -normas, uninormas, etc. Apesar de não apresentarem muitas propriedades atraentes, tal como a habilidade de aproximar funções contínuas, as redes regulares fuzzy foram aplicadas em problemas de classificação e controle [21]. Por outro lado, as redes neurais fuzzy híbridas funcionam como aproximadores universais, i.e., algumas delas são capazes de aproximar qualquer função contínua num domínio compacto [4]. Além disso, elas podem ser usadas para implementar sistemas de regras fuzzy da forma SE-ENTÃO [14, 56].

Exemplos de FNNs híbridas com uma única camada e um único neurônio são os *unineurônios*:

Exemplo 3.2. [38] Dado um vetor de entrada fuzzy $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, um vetor de pesos sinápticos $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$ e uma uninorma u , define-se um E -unineurônio, E_u , através da equação:

$$y = E_u(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \overset{n}{\underset{j=1}{\mathbf{T}}}(w_j u x_j) \quad (3.2)$$

onde y é a saída fuzzy e \mathbf{T} é uma τ -norma. Analogamente, defini-se um OU -unineurônio, OU_u por:

$$y = OU_u(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \overset{n}{\underset{j=1}{\mathbf{S}}}(w_j u x_j) \quad (3.3)$$

onde y é a saída fuzzy e \mathbf{S} é uma \mathfrak{s} -norma.

3.2.2 Redes Neurais Morfológicas

As *Redes Neurais Morfológicas* (MNNs, Morphological Neural Networks) foram criadas a partir da álgebra de imagens [45, 40, 46, 41]. Davidson mostrou que a teoria da morfologia matemática clássica se adapta a álgebra minimax através de um isomorfismo entre produtos matriciais e operadores elementares da morfologia matemática [10]. Tais estudos levaram vários pesquisadores a aderirem os produtos matriciais advindos da álgebra minimax, para efetuar a

computação que ocorre nas camadas das redes neurais. O *perceptron morfológico* desenvolvido por Ritter e Sussner, está entre os primeiros modelos de redes neurais morfológicas [43]. As redes neurais morfológicas foram aplicadas, por exemplo, em problemas de reconhecimento automático de alvos, detecção de minas terrestres, reconhecimento de caracteres escritos a mão e previsão de séries temporais financeiras [25, 15, 24]. Vejamos em seguida, como podemos expressar matematicamente os conceitos básicos sobre redes neurais morfológicas.

Os conceitos teóricos das redes neurais morfológicas estão baseados sobre as estruturas dos *semi-anéis* $(\mathbb{R}_{-\infty}, \vee, +)$ e $(\mathbb{R}_{+\infty}, \wedge, +')$, onde $\mathbb{R}_{-\infty} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $\mathbb{R}_{+\infty} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. O símbolo $+$ denota a adição usual em \mathbb{R} com as seguintes especificações:

$$a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}_{-\infty}. \quad (3.4)$$

O símbolo $+'$ denota a *adição auto-dual*, pois coincide com a adição clássica em \mathbb{R} . Além disso,

$$a +' (+\infty) = (+\infty) +' a = +\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}_{+\infty}. \quad (3.5)$$

Com relação as operações \vee e \wedge , estipulamos que vale

$$a \vee (-\infty) = (-\infty) \vee a = a \quad \text{e} \quad a \wedge (+\infty) = (+\infty) \wedge a = a, \quad (3.6)$$

para todo $a \in \mathbb{R}_{-\infty}$ e $a \in \mathbb{R}_{+\infty}$, respectivamente.

Observe que $-\infty$ representa o elemento nulo de $(\mathbb{R}_{-\infty}, \vee, +)$ se considerarmos \vee como adição e $+$ como multiplicação. Analogamente, podemos realizar tais especificações na estrutura $(\mathbb{R}_{+\infty}, \wedge, +')$. Note também que o número 0 torna-se o elemento identidade em $(\mathbb{R}_{-\infty}, \vee, +)$ e $(\mathbb{R}_{+\infty}, \wedge, +')$.

Com estas informações, podemos utilizar a estrutura $(\mathbb{R}_{-\infty}, \vee, +)$, na equação (3.1), a fim de descrever um modelo para as redes neurais morfológicas através da seguinte equação [42]:

$$y_i = \varphi \left(\bigvee_{j=1}^n (x_j + w_{ij}) \right). \quad (3.7)$$

Para $(\mathbb{R}_{+\infty}, \wedge, +')$, obtemos

$$y_i = \varphi \left(\bigwedge_{j=1}^n (x_j +' w_{ij}) \right). \quad (3.8)$$

Observe que as equações (3.7) e (3.8) representam as operações elementares da MM de dilatação e erosão, respectivamente. Isto justifica o nome redes neurais morfológicas.

Podemos ainda expressar os termos $\bigvee_{j=1}^n (x_j + w_{ij})$ e $\bigwedge_{j=1}^n (x_j +' w_{ij})$ presentes no lado direito das equações (3.7) e (3.8), respectivamente, em termos de produtos matriciais da seguinte forma:

$$\mathbf{T} = W \boxtimes \mathbf{x} \text{ e } \mathbf{T} = W \boxtimes \mathbf{x}, \quad (3.9)$$

onde

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n],$$

representa o vetor das entradas,

$$\mathbf{T} = \left[\bigvee_{j=1}^n (x_j + w_{1j}), \bigvee_{j=1}^n (x_j + w_{2j}), \dots, \bigvee_{j=1}^n (x_j + w_{nj}) \right]$$

ou

$$\mathbf{T} = \left[\bigwedge_{j=1}^n (x_j +' w_{1j}), \bigwedge_{j=1}^n (x_j +' w_{2j}), \dots, \bigwedge_{j=1}^n (x_j +' w_{nj}) \right],$$

denota o vetor das saídas e W é a matriz dos pesos sinápticos da rede. O símbolo \boxtimes efetua o produto entre as entradas e pesos sinápticos, onde a regra de agregação é representada pela operação de supremo e a operação binária é representada pela operação $+$. Analogamente, o símbolo \boxtimes efetua o produto entre as entradas e pesos sinápticos, onde a regra de agregação é representada pela operação de ínfimo e a operação binária é representada pela operação $+'$. Se denotarmos por τ_i as componentes do vetor \mathbf{T} , podemos reescrever as equações (3.7) e (3.8) como

$$\mathbf{y} = [\varphi(\tau_1), \varphi(\tau_2), \dots, \varphi(\tau_n)], \quad (3.10)$$

ou seja, $y_i = \varphi(\tau_i)$ e \mathbf{y} representa o vetor das saídas.

3.2.3 Redes Neurais Morfológicas Fuzzy

Finalmente, podemos unir as formulações discutidas acima a fim de definir as *Redes Neurais Morfológicas Fuzzy* (FMNNs, Fuzzy Morphological Neural Networks), que são modelos de redes neurais artificiais, cuja entrada e saída representam conjuntos fuzzy definidos em universos de discurso finito e, além disso, seus neurônios efetuam operações elementares da MM. Por exemplo, definimos a classe de *neurônios* Max-u e Min-u', utilizando o produto max-u e o produto min-u' definidos em (2.34), i.e., se $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ representa a entrada fuzzy definida sobre um universo de discurso finito, então, a saída fuzzy y é calculada como segue:

$$y = \bigvee_{j=1}^n (w_j \mathbf{u} x_j) = \mathbf{w}^T \circ_{\mathbf{u}} \mathbf{x}, \quad (3.11)$$

ou

$$y = \bigwedge_{j=1}^n (w_j \mathbf{u}' x_j) = \mathbf{w}^T \bullet_{\mathbf{u}'} \mathbf{x}, \quad (3.12)$$

onde $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$ denota o vetor de pesos sinápticos, \mathbf{u} é um uninorma dilatativa e \mathbf{u}' é uma uninorma erosiva. Observe que no modelo indicado pela equação (3.11), a regra de agregação é descrita por uma operação de supremo (neste caso, o supremo coincide com o máximo) e no modelo (3.12) por uma operação de ínfimo (ou mínimo). A operação binária é dada por uma uninorma em (3.11) ou pela uninorma dual em (3.12). Como \mathbf{u} geralmente é uma função não-linear, não há necessidade de inserirmos uma função de ativação neste modelo.

As memórias associativas de Kosko [30], bem como algumas de suas generalizações [7], são exemplos de FNNs ou FMNNs.

Outros modelos de neurônios das FMNNs podem ser encontrados em [56].

3.3 MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS NEURAIS

Uma *memória associativa neural* (MAN, Neural Associative Memory) é um modelo de memória associativa descrita por uma *rede neural artificial* [16].

Algumas características desejáveis de uma MAN são [16]:

- (a) Tolerância a ruídos. Isto implica que as memórias fundamentais armazenadas possam ser recordadas com alta probabilidade.
- (b) Capacidade de armazenamento de um número elevado de padrões. É importante esclarecer que os termos *armazenamento* e *aprendizagem* em uma MAN têm o mesmo significado.
- (c) Um número relativamente baixo de memórias espúrias.
- (d) Convergência em poucas iterações no caso autoassociativo recorrente.

Uma MAN pode ser classificada, em particular, como:

- (a) *Memória Associativa (Neural) Morfológica (MAM, Morphological Associative Memory)* se for descrita por uma rede neural morfológica, ou seja, seus neurônios efetuam operações elementares da MM.
- (b) *Memória Associativa (Neural) Fuzzy (FAM, Fuzzy Associative Memory)* se for descrita por uma FNN híbrida, onde os padrões de entrada e saída são conjuntos fuzzy definidos em universos de discurso finito, i.e., $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$ e $\mathbf{y} \in [0, 1]^m$ [30].
- (c) *Memória Associativa (Neural) Morfológica Fuzzy (FMAM, Fuzzy Morphological Associative Memory)* se for descrita por uma FMNN híbrida, que armazena e recorda padrões fuzzy definidos em universos de discurso finitos.

Matematicamente, uma FMAM $G : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^m$ é geralmente descrita pela equação

$$\mathbf{y} = G(\mathbf{x}) = W \circ \mathbf{x}, \quad (3.13)$$

onde $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$ e $\mathbf{y} \in [0, 1]^m$ representam os padrões de entrada e saída, $W \in [0, 1]^{m \times n}$ é a matriz dos pesos sinápticos e o símbolo “ \circ ” denota um produto matriz-vetor da teoria dos conjuntos fuzzy [58]. É importante observar que, neste caso, o produto matriz-vetor é tal que os neurônios da FMAM efetuam uma operação elementar da MM.

Em particular, podemos utilizar a classe de neurônios Max- u e Min- u (cf. eqs (3.11) e (3.12)), ou seja, se u é uma uninorma dilatativa, u' é uma uninorma erosiva e $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ é um padrão de entrada da FMAM, então, a saída $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$ é calculada através da seguinte equação:

$$y_i = \bigvee_{j=1}^n (w_{ij} u x_j), \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (3.14)$$

ou

$$y_i = \bigwedge_{j=1}^n (w_{ij} u' x_j), \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (3.15)$$

onde $W = (w_{ij})$ é a matriz de pesos sinápticos.

Definição 3.3. *Uma FMAM baseada em uninorma dilatativa $G : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^m$ é uma rede neural morfológica fuzzy híbrida, de camada única, dada por*

$$\mathbf{y} = G(\mathbf{x}) = W \circ_u \mathbf{x}, \quad (3.16)$$

onde $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$ e $\mathbf{y} \in [0, 1]^m$ são os padrões de entrada e saída, \mathfrak{u} é uma uninorma dilatativa e “ $\circ_{\mathfrak{u}}$ ” representa o produto max- \mathfrak{u} definido em (2.34). A classe das FMAMs baseadas em uninormas dilatativas será chamada Max- \mathfrak{u} FMAMs.

Analogamente, podemos definir uma FMAM baseada em uninorma erosiva através do produto min- \mathfrak{u}' . A classe das FMAMs baseadas em uninormas erosivas é chamada Min- \mathfrak{u}' FMAMs.

Exemplo 3.4. [30] As FAMs *max-min* e *max-prod* de Kosko são exemplos de Max- \mathfrak{u} FMAMs, onde as saídas $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$ são calculadas através dos produtos

$$y_i = \bigvee_{j=1}^n (w_{ij} \wedge x_j)$$

e

$$y_i = \bigvee_{j=1}^n (w_{ij} \cdot x_j),$$

respectivamente, onde $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ representa o padrão de entrada da FAM.

Considere um conjunto de memórias fundamentais $\Gamma = \{(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) : k = 1, \dots, q\}$. A estratégia de armazenamento empregada numa FAM max-min é referida como estratégia de codificação correlação-mínimo (correlation-minimum encoding scheme). Essa estratégia determina a matriz dos pesos sinápticos $W = (w_{ij})$ através da seguinte equação:

$$w_{ij} = \bigvee_{k=1}^q (y_{ik} \wedge x_{jk}) \quad (3.17)$$

onde $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Por outro lado, uma FAM max-prod emprega a estratégia de codificação correlação-produto (correlation-product encoding scheme) para a obtenção da matriz de pesos sinápticos, i.e., $W = (w_{ij})$ é calculada como segue:

$$w_{ij} = \bigvee_{k=1}^q (y_{ik} \cdot x_{jk}) \quad (3.18)$$

onde $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

A FAM generalizada de Lukasewicz, introduzida por Chung e Lee, também é um exemplo Max- \mathfrak{u} FMAM [7]. Outros exemplos de Max- \mathfrak{u} FMAMs podem ser encontrados em [54, 57].

3.4 TEOREMA DA REPRESENTAÇÃO DAS FAMs EM CLODUMS

O próximo teorema relaciona as FAMs que efetuam dilatações (erosões) invariantes a regradações (regradações duais) com as FMAMs baseadas em uninormas dilativas (erosivas). A estrutura algébrica CLODUM, juntamente com a Proposição 2.57, fornecem a base para a demonstração do teorema acima, justificando assim o seu nome.

Teorema 3.5 (Teorema da Representação das FAMs em CLODUMs). *Uma FAM $G : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^m$ efetua uma dilatação invariante a regradações se, e somente se, é uma Max- \cup FMAM. Dualmente, uma FAM G' efetua uma erosão invariante a regradações duais se e somente se é uma Min- \cup' FMAM.*

Demonstração. A demonstração desse teorema segue das seguintes observações. Primeiramente, lembre-se que $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e $\mathbf{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ são conjuntos finitos. Agora, se a FAM $G \in \mathcal{D}_{ir}$, pela Proposição 2.57, tem-se $G(\mathbf{x})(y_j) = \bigvee_{i=1}^n [x_i \cup H_{x_i}(y_j)]$, onde $H_{x_i}(y_j) = [G(q_{x_i})](y_j)$ para todo i e j . Assim, basta escolher a matriz de pesos sinápticos W como sendo o núcleo de G . Reciprocamente, se G é uma FMAM baseada em uninorma dilativa, então, pelas equações (3.16), (2.34) e (2.46), $G \in \mathcal{D}_{ir}$. A segunda parte do teorema segue de modo análogo. \square

Por um lado, o Teorema 3.5 revela que muitas FAMs encontradas na literatura efetuam dilatações (ou erosões) invariantes a regradações. Por outro lado, o mesmo teorema mostra que o problema de determinar uma FAM $G : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^m$ que efetua uma dilatação invariante a regradações corresponde ao problema (muito mais simples) de determinar uma certa matriz de pesos sinápticos $W \in [0, 1]^{m \times n}$.

Em seguida, estudaremos as técnicas de *aprendizagem* para obtenção de tal matriz. Além disso, pretendemos estabelecer critérios de otimalidade para W de tal forma que a FAM G também receba tais propriedades.

CAPÍTULO 4

APRENDIZ IMPLICATIVO FUZZY OU APRENDIZADO BASEADO EM ADJUNÇÃO

Neste capítulo, estamos interessados em determinar uma FAM $G : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^m$ que efetue uma dilatação invariante a regradações, isto é, dado um conjunto de memórias fundamentais $\Gamma = \{(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) : k = 1, \dots, q\}$ com $\mathbf{x}_k = [x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}]^T \in [0, 1]^n$ e $\mathbf{y}_k = [y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{mk}]^T \in [0, 1]^m$, queremos determinar uma aplicação $G \in \mathcal{D}_{ir}$ tal que $G(\mathbf{x}_k) = \mathbf{y}_k$ para todo $k = 1, \dots, q$, e ainda, exiba tolerância a padrões ruidosos ou incompletos. Em outras palavras, desejamos determinar uma FAM que efetue uma dilatação invariante a regradações e resolva o problema 3.1.

Dualmente, estamos interessados em determinar uma FAM $G' : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^m$ que efetue uma erosão invariante a regradações duais e resolva o problema 3.1.

De acordo com o Teorema 3.5, isto corresponde ao problema de determinar uma matriz de pesos sinápticos $W \in [0, 1]^{m \times n}$. Para resolver este problema, utilizaremos o aprendizado implicativo fuzzy ou aprendizado fuzzy por adjunção. Antes disso, faremos uma breve revisão sobre o aprendizado de redes neurais artificiais.

4.1 APRENDIZADO

O *aprendizado* é uma das características fundamentais de uma rede neural. Ele representa a habilidade de *aprender* a partir de um determinado ambiente e de *melhorar* o desempenho da rede neural.

Aprendizagem é um processo pelo qual os parâmetros livres de uma rede neural são adaptados através de um processo de estimulação pelo ambiente no qual a rede está inserida. O tipo de aprendizagem é determinado pela maneira pela qual a modificação dos parâmetros ocorre [22, 17].

Assim, quando pretendemos solucionar um certo problema, estabelecemos métodos, baseados nos dados do problema, a fim de que a rede neural aprenda e assim, possa solucionar o prob-

lema. Neste caso, dizemos que estabelecemos um *algoritmo de aprendizagem*. Logicamente, existem diversos algoritmos de aprendizagem. Basicamente, os algoritmos de aprendizagem diferem entre si pela forma como é formulado o ajuste de um peso sináptico de um neurônio [17].

Uma proposta de algoritmo de aprendizagem pode ser formulado através do *postulado de aprendizagem de Hebb* [18]:

“Quando um axônio da célula A está perto o suficiente para excitar uma célula B e participa do seu disparo repetida ou persistentemente, então algum processo de crescimento ou modificação metabólica acontece em uma das células ou em ambas, de tal forma que a eficiência de A como uma das células que dispara B é aumentada”.

Este postulado foi utilizado e expandido para um contexto neurobiológico a fim de ser formulada a *aprendizagem hebbiana*. Matematicamente, se $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ e $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$ denotam um par de vetores de entrada e saída da rede, o valor do peso sináptico w_{ij} , excitado pela entrada x_j e saída y_i , é dado pela seguinte equação, após o processo de armazenamento [17]:

$$w_{ij} = F(x_j, y_i) \quad (4.1)$$

onde F é uma função de dois argumentos.

Na próxima seção, veremos o aprendizado implicativo fuzzy e determinaremos, neste caso, a aplicação F da equação (4.1).

4.2 APRENDIZADO IMPLICATIVO FUZZY PARA AS MAX-U FMAMS

Considere $\Gamma = \{(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) : k = 1, \dots, q\}$ um conjunto de memórias fundamentais. Por simplicidade, denotaremos por $X \in [0, 1]^{n \times q}$ e $Y = [0, 1]^{m \times q}$ as matrizes cujas colunas são os vetores \mathbf{x}_k e \mathbf{y}_k , respectivamente. Seja G uma Max-u FMAM. Se existir uma matriz de pesos sinápticos W tal que

$$\mathbf{y}_k = G(\mathbf{x}_k) = W \circ_{\mathbf{u}} \mathbf{x}_k, \quad \forall k = 1, \dots, q, \quad (4.2)$$

então, dizemos que a Max- u FMAM *recorda perfeitamente* as associações $(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$, para cada $k = 1, \dots, q$. No capítulo 5, denominaremos os modelos de memórias associativas com esta propriedade por *modelos exatos*.

Infelizmente, dependendo do conjunto das memórias fundamentais, pode ocorrer de não existir uma matriz W que satisfaça a equação (4.2).

Exemplo 4.1. Suponha que desejamos armazenar o conjunto com uma única memória fundamental $\{(0, y)\}$ com $y \in (0, 1]$, i.e., $\mathbf{x}_1 = 0$ e $\mathbf{y}_1 = y$, em uma Max- u FMAM. Neste caso, nosso problema consiste em determinar uma matriz $W = [w] \in [0, 1]$, tal que

$$y = w \mathbf{u} 0. \quad (4.3)$$

Como u é uma uninorma dilatativa, $w \mathbf{u} 0 = 0$ para todo $w \in [0, 1]$. Logo, não existe uma matriz W que satisfaça (4.3).

Por outro lado, o problema de determinar uma matriz W tal que

$$G(\mathbf{x}_k) = W \circ_{\mathbf{u}} \mathbf{x}_k \leq \mathbf{y}_k, \quad \forall k = 1, \dots, q, \quad (4.4)$$

sempre tem solução. De fato, podemos tomar a matriz W como sendo a matriz de zeros.

Em vista dessas observações, definimos a matriz dos pesos sinápticos de uma Max- u FMAM como

$$W = \bigvee \{V \in [0, 1]^{m \times n} : V \circ_{\mathbf{u}} X \leq Y\} \quad (4.5)$$

onde $X = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_q] \in [0, 1]^{n \times q}$ e $Y = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_q] \in [0, 1]^{m \times q}$ são as matrizes com as colunas sendo os padrões de entrada e saída de Γ .

A equação (4.5) oferece uma maneira de se determinar a matriz de pesos sinápticos W de uma Max- u FMAM. Dizemos, neste caso, que W foi obtida através do *aprendizado implicativo fuzzy* ou *aprendizado fuzzy por adjunção* [58].

Teorema 4.2. *Se existe uma matriz $V \in [0, 1]^{m \times n}$ tal que $V \circ_{\mathbf{u}} X = Y$, então $V \leq W$ e $W \circ_{\mathbf{u}} X = Y$.*

Demonstração. Observe que $V \leq W$ devido a definição da matriz W na equação (4.5). Além disso

$$V \leq W \Rightarrow Y = V \circ_{\mathbf{u}} X \leq W \circ_{\mathbf{u}} X \leq Y \Rightarrow W \circ_{\mathbf{u}} X = Y,$$

devido a monotonicidade da uninorma u . □

O Teorema 4.2 mostra que W é ótima no sentido de que, se existe uma Max- \mathfrak{u} FMAM que recorda perfeitamente as associações $(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$, $k = 1, \dots, q$, então uma Max- \mathfrak{u} FMAM treinada com o aprendizado implicativo fuzzy também as recordará.

O próximo teorema mostra que a matriz W de uma Max- \mathfrak{u} FMAM pode ser facilmente calculada, utilizando-se as R-implicações fuzzy $\Rightarrow_R: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ (justificando assim, o nome aprendizado implicativo fuzzy), i.e., podemos calcular W através do produto $\text{Min} \Rightarrow_R$, definido pela equação (2.35).

Teorema 4.3. *Seja $X = [x_1, x_2, \dots, x_q] \in [0, 1]^{n \times q}$ e $Y = [y_1, y_2, \dots, y_q] \in [0, 1]^{m \times q}$. A matriz de pesos sinápticos W de uma Max- \mathfrak{u} FMAM é dada pela equação*

$$W = Y \triangleleft_R X^T \quad (4.6)$$

Demonstração. Seja $\mathcal{I} = \{1, \dots, m\}$, $\mathcal{J} = \{1, \dots, n\}$ e $\mathcal{K} = \{1, \dots, q\}$. Pelo Teorema 4.2 e pela equação 2.5, podemos concluir que as seguintes equações são válidas:

$$\begin{aligned} W &= \bigvee \{V \in [0, 1]^{m \times n} : V \circ_{\mathfrak{u}} X \leq Y\} \\ &= \bigvee \left\{ V \in [0, 1]^{m \times n} : \bigvee_{j=1}^n (v_{ij} \mathfrak{u} x_{jk}) \leq y_{ik}, \forall i \in \mathcal{I}, \forall k \in \mathcal{K} \right\} \\ &= \bigvee \{V \in [0, 1]^{m \times n} : (v_{ij} \mathfrak{u} x_{jk}) \leq y_{ik}, \forall i \in \mathcal{I}, \forall j \in \mathcal{J}, \forall k \in \mathcal{K}\} \\ &= \bigvee \{V \in [0, 1]^{m \times n} : v_{ij} \leq (x_{jk} \Rightarrow_R y_{ik}), \forall i \in \mathcal{I}, \forall j \in \mathcal{J}, \forall k \in \mathcal{K}\} \quad (4.7) \\ &= \bigvee \{V \in [0, 1]^{m \times n} : v_{ij} \leq \bigwedge_{k=1}^q (x_{jk} \Rightarrow_R y_{ik}), \forall i \in \mathcal{I}, \forall j \in \mathcal{J}\} \\ &= \bigvee \{V \in [0, 1]^{m \times n} : V \leq Y \triangleleft_R X^T\} \\ &= Y \triangleleft_R X^T. \end{aligned}$$

□

Em particular, Valle e Sussner introduziram as *Memórias Associativas Fuzzy Implicativas*, (IFAMs, Implicative Fuzzy Associative Memories) [52], que são modelos de memórias associativas descritas por redes neurais fuzzy híbridas de camada única, equipada de neurônios Max- \mathfrak{t} , onde \mathfrak{t} é uma \mathfrak{t} -norma contínua. Como uma \mathfrak{t} -norma contínua efetua uma dilatação, podemos dizer que as IFAMs representam um caso particular das FMAMs. Portanto, podemos dizer que, neste trabalho, generalizamos as IFAMs, tomando-se uninormas no lugar das \mathfrak{t} -normas.

Exemplo 4.4. Considere as matrizes $X \in [0, 1]^{2 \times 2}$ e $V \in [0, 1]^{3 \times 2}$, dispostas na equação (4.8). A fim de verificarmos a validade dos Teoremas 4.2 e 4.3, definimos $Y = V \circ_{\mathfrak{u}_{\text{III}}} X$ e calculamos $W = Y \triangleleft_R X^T$, como mostra a equação (4.9). Observe que $V \leq W$ e que a Max- $\mathfrak{u}_{\text{III}}$ FMAM

$G : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^3$ recorda perfeitamente as associações $\{(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)\}$, i.e., $G(\mathbf{x}_k) = \mathbf{y}_k$ para $k = 1, 2$, onde $X = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ e $Y = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$.

$$X = \begin{bmatrix} 0.3 & 1 \\ 0.5 & 0.1 \end{bmatrix} \text{ e } V = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 \\ 1 & 0.1 \\ 0.9 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.069 \\ 1 & 1 \\ 0.7941 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } W = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 \\ 1 & 1 \\ 0.9 & 0.7941 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Exemplo 4.5. Considere as matrizes $X \in [0, 1]^{2 \times 3}$, $Y = [0, 1]^{3 \times 3}$, dispostas na equação (4.11). Calculamos a matriz $W = Y \triangleleft_R X^T$ com a uninorma $u_{3\Pi}$, como mostra também a equação (4.11). Observe que a Max- $u_{3\Pi}$ FMAM $G : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^3$ com o aprendizado implicativo fuzzy não recorda perfeitamente a associação $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$. De fato, note que $\mathbf{y}_1 = [0.2, 0, 0.2]$, mas

$$G(\mathbf{x}_1) = W \circ_{u_{3\Pi}} \mathbf{x}_1 = [0.2, 0, 0.1] \neq \mathbf{y}_1. \quad (4.10)$$

Neste caso, o Teorema 4.2 nos mostra que não existe uma matriz $V \in [0, 1]^{3 \times 3}$ tal que $Y = V \circ_{u_{3\Pi}} X$.

$$X = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.9 \\ 0.2 & 1 & 0.6 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \text{ e } W = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Agora, podemos voltar ao problema 3.1 e resolvê-lo. Primeiramente, observe que o Teorema 3.5 revela que, para se obter uma FAM $\in \mathcal{D}_{ir}$ definida num CLODUM $\mathcal{S} = ([0, 1], \vee, \wedge, u, u')$ é suficiente obtermos uma FMAM baseada em uninorma dilativa.

Primeiramente, vamos calcular a matriz de pesos sinápticos W através do aprendizado implicativo fuzzy, e então, a aplicação $G : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^m$, definida por

$$G(\mathbf{x}) = W \circ_u \mathbf{x}, \quad (4.12)$$

onde u é uninorma dilativa, será uma FAM $\in \mathcal{D}_{ir}$.

Além disso, de acordo com as características de uma Max- u FMAM treinada com o aprendizado implicativo fuzzy, podemos enunciar um importante resultado.

Teorema 4.6. *Considere o conjunto de memórias fundamentais $\Gamma = \{(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) : k = 1, \dots, q\}$ e as matrizes $X \in [0, 1]^{n \times q}$ e $Y \in [0, 1]^{m \times q}$ com as colunas sendo os padrões de entrada e saída, respectivamente. Dada uma uninorma dilatativa \mathbf{u} , a aplicação $G : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^m$ definida por*

$$G(\mathbf{x}) = W \circ_{\mathbf{u}} \mathbf{x} \text{ com } W = Y \triangleleft_R X^T, \quad (4.13)$$

é a FAM $\in \mathcal{D}_{ir}$ ótima no CLODUM $\mathcal{S} = ([0, 1], \vee, \wedge, \mathbf{u}, \mathbf{u}')$, no sentido de ser o supremo do conjunto

$$\{F \in \mathcal{D}_{ir}([0, 1]^n, [0, 1]^m) : F(\mathbf{x}_k) \leq \mathbf{y}_k, \forall k = 1, \dots, q\}. \quad (4.14)$$

Além disso, se existir uma Max- \mathbf{u} FMAM que recorda perfeitamente as associações $(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$, $\forall k = 1, \dots, q$, então

$$G(\mathbf{x}_k) = W \circ_{\mathbf{u}} \mathbf{x}_k = \mathbf{y}_k, \forall k = 1, \dots, q, \quad (4.15)$$

ou seja, G também recorda perfeitamente as associações $(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$ para todo $k = 1, \dots, q$.

Demonstração. Seja $F \in \mathcal{D}_{ir}$. Pelo Teorema 3.5, existe uma matriz $V \in [0, 1]^{m \times n}$ tal que

$$F(\mathbf{x}) = V \circ_{\mathbf{u}} \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in [0, 1]^n. \quad (4.16)$$

Mas, pelo Teorema 4.2, a aplicação G definida pela equação (4.13) satisfaz

$$G(\mathbf{x}) \geq F(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in [0, 1]^n. \quad (4.17)$$

Logo, G é o supremo do conjunto

$$\{F \in \mathcal{D}_{ir}([0, 1]^n, [0, 1]^m) : F(\mathbf{x}_k) \leq \mathbf{y}_k, \forall k = 1, \dots, q\}, \quad (4.18)$$

A segunda parte do Teorema é uma consequência do Teorema 4.2. \square

4.3 APRENDIZADO IMPLICATIVO FUZZY DUAL PARA AS MIN- \mathbf{U} 'FMAMS

Podemos considerar o caso dual, onde $\mathbf{u}' : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ representa uma uninorma erosiva, i.e., trataremos da classe das FMAMs baseadas em uninormas erosivas Min- \mathbf{u}' FMAMs.

Considere as matrizes $X = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_q]$ e $Y = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_q]$ com as colunas sendo os padrões de entrada e saída que serão armazenadas numa Min- \mathbf{u}' FMAM $G' : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^m$.

Neste caso, o problema de determinar uma matriz de pesos sinápticos M , tal que

$$G'(\mathbf{x}_k) = M \bullet_{u'} \mathbf{x}_k \geq \mathbf{y}_k, \quad \forall k = 1, \dots, q, \quad (4.19)$$

sempre tem solução.

De acordo com essa observação, definimos a matriz de pesos sinápticos de uma Min- u' FMAM como

$$M = \bigwedge \{V \in [0, 1]^{m \times n} : V \bullet_{u'} X \geq Y\}. \quad (4.20)$$

A regra acima é chamada *aprendizado implicativo fuzzy dual* ou *aprendizado fuzzy dual por adjunção*.

Teorema 4.7. *Se existe uma matriz $V \in [0, 1]^{m \times n}$ tal que $V \bullet_{u'} X = Y$, então $V \geq M$ e $M \bullet_{u'} X = Y$.*

Demonstração. Note que $V \geq M$ devido a definição da matriz M na equação (4.20). Além disso

$$M \leq V \Rightarrow Y \leq M \bullet_{u'} X \leq V \bullet_{u'} X = Y \Rightarrow M \bullet_{u'} X = Y,$$

devido a monotonicidade da uninorma u' . □

O Teorema 4.7 mostra que M é ótima no sentido de que, se existe uma Min- u' FMAM que recorda perfeitamente as associações $(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$, $k = 1, \dots, q$, então uma Min- u' FMAM treinada com o aprendizado implicativo fuzzy dual também as recordará.

O próximo teorema mostra que a matriz M de uma Min- u' FMAM pode ser facilmente calculada, utilizando-se as R-coimplicações fuzzy $\Rightarrow_R : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, i.e., podemos calcular M através do produto Max \Rightarrow_R definido pela equação (2.36).

Teorema 4.8. *Seja $X = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_q] \in [0, 1]^{n \times q}$ e $Y = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_q] \in [0, 1]^{m \times q}$. A matriz de pesos sinápticos M de uma Min- u' FMAM é dada pela equação*

$$W = Y \overleftarrow{R} X^T \quad (4.21)$$

Demonstração. Seja $\mathcal{I} = \{1, \dots, m\}$, $\mathcal{J} = \{1, \dots, n\}$ e $\mathcal{K} = \{1, \dots, q\}$. Pelo Teorema 4.7 e pela equação 2.5, podemos concluir que as seguintes equações são válidas:

$$\begin{aligned}
M &= \bigwedge \{V \in [0, 1]^{m \times n} : V \bullet_{\mathbf{u}'} X \geq Y\} \\
&= \bigwedge \left\{ V \in [0, 1]^{m \times n} : \bigwedge_{j=1}^n (v_{ij} \mathbf{u}' x_{jk}) \geq y_{ik}, \forall i \in \mathcal{I}, \forall k \in \mathcal{K} \right\} \\
&= \bigwedge \{V \in [0, 1]^{m \times n} : (v_{ij} \mathbf{u}' x_{jk}) \geq y_{ik}, \forall i \in \mathcal{I}, \forall j \in \mathcal{J}, \forall k \in \mathcal{K}\} \\
&= \bigwedge \{V \in [0, 1]^{m \times n} : v_{ij} \geq (x_{jk} \Rightarrow_R y_{ik}), \forall i \in \mathcal{I}, \forall j \in \mathcal{J}, \forall k \in \mathcal{K}\} \quad (4.22) \\
&= \bigwedge \{V \in [0, 1]^{m \times n} : v_{ij} \geq \bigvee_{k=1}^q (x_{jk} \Rightarrow_R y_{ik}), \forall i \in \mathcal{I}, \forall j \in \mathcal{J}\} \\
&= \bigwedge \{V \in [0, 1]^{m \times n} : V \geq Y \bar{\Delta}_R X^T\} \\
&= Y \bar{\Delta}_R X^T.
\end{aligned}$$

□

Com estas informações, podemos resolver o nosso problema dual 3.1, i.e., podemos calcular a matriz de pesos sinápticos M através do aprendizado implicativo fuzzy dual, e então, a aplicação $G' : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^m$, definida por

$$G'(\mathbf{x}) = M \bullet_{\mathbf{u}'} \mathbf{x}, \quad (4.23)$$

onde \mathbf{u}' é uninorma erosiva, será uma FAM $\in \mathcal{E}_{ir}$.

Podemos apresentar o seguinte resultado, devido as características de Min- \mathbf{u}' FMAM treinada com o aprendizado implicativo fuzzy dual.

Teorema 4.9. *Considere o conjunto de memórias fundamentais $\Gamma = \{(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) : k = 1, \dots, q\}$ e as matrizes $X \in [0, 1]^{n \times q}$ e $Y \in [0, 1]^{m \times q}$ com as colunas sendo os padrões de entrada e saída, respectivamente. Dada uma uninorma erosiva \mathbf{u}' , a aplicação $G' : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^m$ definida por*

$$G'(\mathbf{x}) = M \bullet_{\mathbf{u}'} \mathbf{x} \text{ com } M = Y \bar{\Delta}_R X^T, \quad (4.24)$$

é a FAM $\in \mathcal{E}_{ir}$ ótima no CLODUM $\mathcal{S} = ([0, 1], \bigvee, \bigwedge, \mathbf{u}, \mathbf{u}')$, no sentido de ser o ínfimo do conjunto

$$\{F \in \mathcal{E}_{ir}([0, 1]^n, [0, 1]^m) : F(\mathbf{x}_k) \geq \mathbf{y}_k, \forall k = 1, \dots, q\}. \quad (4.25)$$

Além disso, se existir uma Min- \mathbf{u}' FMAM que recorda perfeitamente as associações $(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$, $\forall k = 1, \dots, q$, então

$$G'(\mathbf{x}_k) = M \bullet_{\mathbf{u}'} \mathbf{x}_k = \mathbf{y}_k, \forall k = 1, \dots, q, \quad (4.26)$$

ou seja, G' também recorda perfeitamente as associações $(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$ para todo $k = 1, \dots, q$.

Demonstração. Seja $F \in \mathcal{E}_{ir}$. Pelo Teorema 3.5, existe uma matriz $V \in [0, 1]^{m \times n}$ tal que

$$F(\mathbf{x}) = V \bullet_{\mathbf{u}'} \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in [0, 1]^n. \quad (4.27)$$

Mas pelo Teorema 4.7, a aplicação G' , definida pela equação (4.26), satisfaz

$$G'(\mathbf{x}) \leq F(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in [0, 1]^n. \quad (4.28)$$

Logo, G' é o ínfimo do conjunto

$$\{F \in \mathcal{E}_{ir}([0, 1]^n, [0, 1]^m) : F(\mathbf{x}_k) \geq \mathbf{y}_k, \quad \forall k = 1, \dots, q\}, \quad (4.29)$$

A segunda parte do Teorema é uma consequência do Teorema 4.7. \square

Mostraremos na próxima seção que as Max-u e MIN-u' FMAMs treinadas com o aprendizado implicativo fuzzy (aprendizado implicativo fuzzy dual), apresentam características interessantes no caso autoassociativo.

4.4 MEMÓRIAS AUTOASSOCIATIVAS MORFOLÓGICAS FUZZY MAX-U

Uma *memória autoassociativa morfológica nebulosa Max-u* é uma Max-u FMAM no caso autoassociativo, ou seja, o conjunto das memórias fundamentais são do tipo $\{(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k) : k = 1, \dots, q\}$ com $\mathbf{x}_k \in [0, 1]^n$ para todo $k = 1, \dots, q$.

Seja $X = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_q] \in [0, 1]^{n \times q}$ a matriz com as memórias fundamentais como coluna. A matriz de pesos sinápticos W da Max-u FMAM autoassociativa é calculada de acordo com a equação

$$W = X \triangleleft_R X^T \quad (4.30)$$

A seguir, apresentaremos um teorema que revela que a matriz W possui a propriedade de ser Reflexiva e Max-u idempotente. Para tanto, precisamos de alguns resultados preliminares.

Lema 4.10. *Se $a_k, b_k \in [0, 1]$ para todo $k = 1, \dots, q$ então a seguinte desigualdade vale para qualquer uninorma u :*

$$\bigwedge_{k=1}^q (a_k u b_k) \geq \left(\bigwedge_{k=1}^q a_k \right) u \left(\bigwedge_{k=1}^q b_k \right) \quad (4.31)$$

Demonstração. Considere $a, b, c \in [0, 1]$ arbitrários. Pela monotonicidade de u temos

$$(a \wedge b) u c \leq (a u c) \wedge (b u c)$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
(a \wedge b) \mathbf{u} (c \wedge d) &\leq (a \mathbf{u} (c \wedge d)) \wedge (b \mathbf{u} (c \wedge d)) \leq (a \mathbf{u} c) \wedge (a \mathbf{u} d) \wedge (b \mathbf{u} c) \wedge (b \mathbf{u} d) \\
&\leq (a \mathbf{u} c) \wedge (b \mathbf{u} d),
\end{aligned} \tag{4.32}$$

para todo $a, b, c, d \in [0, 1]$. A prova do lema segue por indução. Evidentemente (4.31) vale para $q = 1$. Suponha que (4.31) valha para $q - 1 \geq 1$. Assim, pela hipótese de indução e (4.32) temos

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{k=1}^q (a_k \mathbf{u} b_k) &= [\bigwedge_{k=1}^{q-1} (a_k \mathbf{u} b_k)] \wedge (a_q \mathbf{u} b_q) \geq [(\bigwedge_{k=1}^{q-1} a_k) \mathbf{u} (\bigwedge_{k=1}^{q-1} b_k)] \wedge (a_q \mathbf{u} b_q) \\
&\geq (\bigwedge_{k=1}^q a_k) \mathbf{u} (\bigwedge_{k=1}^q b_k).
\end{aligned} \tag{4.33}$$

□

Lema 4.11. *Seja $\mathbf{u} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ uma uninorma dilatativa e $\Rightarrow_R : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ a R-implicação adjunta de \mathbf{u} . Para todo $a, b, c \in [0, 1]$, tem-se*

$$[(a \Rightarrow_R b) \mathbf{u} (b \Rightarrow_R c)] \leq (a \Rightarrow_R c). \tag{4.34}$$

Demonstração. Sejam $x' = (a \Rightarrow_R b)$, $y' = (b \Rightarrow_R c)$ e $z' = (a \Rightarrow_R c)$. Considere $z = x' \mathbf{u} y'$. Basta mostrarmos que $z \leq z'$. Como $(x \Rightarrow_R y) = \bigvee \{z \in [0, 1] : x \mathbf{u} z \leq y\}$ então $x \mathbf{u} (x \Rightarrow_R y) \leq y$, para todo $x, y \in [0, 1]$. Assim, pela associatividade e monotonicidade de \mathbf{u} , tem-se

$$a \mathbf{u} z = a \mathbf{u} (x' \mathbf{u} y') = (a \mathbf{u} x') \mathbf{u} y' \leq b \mathbf{u} y' \leq c. \tag{4.35}$$

Logo, vale a desigualdade $a \mathbf{u} z \leq c$. Como $z' = (a \Rightarrow_R c) = \bigvee \{z \in [0, 1] : a \mathbf{u} z \leq c\}$, conclui-se que $z \leq z'$ para todo z tal que $a \mathbf{u} z \leq c$. Logo, $z \leq z'$. □

Lema 4.12. *Seja $X \in [0, 1]^{n \times q}$. A matriz $W = X \triangleleft_R X^T$ é \mathbf{u} -transitiva, i.e., $W \circ_{\mathbf{u}} W \leq W$, onde $\circ_{\mathbf{u}}$ é o produto max \mathbf{u} , e \mathbf{u} é a uninorma dilatativa, adjunta da R-implicação fuzzy \Rightarrow_R empregada no aprendizado implicativo fuzzy.*

Demonstração. Observe primeiramente que, aplicando-se o lema (4.11) nas componentes de X , tem-se:

$$(x_{jk} \Rightarrow_R x_{lk}) \mathbf{u} (x_{lk} \Rightarrow_R x_{ik}) \leq (x_{jk} \Rightarrow_R x_{ik}), \tag{4.36}$$

para todo $k = 1, \dots, q$ e para todo $i, j, l = 1, \dots, n$. Agora, aplicando o princípio do fechamento da álgebra minimax [8] em (4.36) temos

$$\bigwedge_{k=1}^q [(x_{jk} \Rightarrow_R x_{lk}) \mathbf{u} (x_{lk} \Rightarrow_R x_{ik})] \leq \bigwedge_{k=1}^q (x_{jk} \Rightarrow_R x_{ik}), \tag{4.37}$$

para todo $k = 1, \dots, q$ e para todo $i, j, l = 1, \dots, n$ e utilizando as últimas desigualdades do Lema 4.10 concluímos que:

$$\begin{aligned} w_{ij} &= \bigwedge_{k=1}^q (x_{jk} \Rightarrow_R x_{ik}) \geq \bigwedge_{k=1}^q [(x_{jk} \Rightarrow_R x_{lk}) \mathbf{u} (x_{lk} \Rightarrow_R x_{ik})] \\ &\geq \left[\bigwedge_{k=1}^q (x_{jk} \Rightarrow_R x_{lk}) \right] \mathbf{u} \left[\bigwedge_{k=1}^q (x_{lk} \Rightarrow_R x_{ik}) \right] = w_{lj} \mathbf{u} w_{il}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

para todo $i, j, l = 1, \dots, n$. Pela comutatividade de \mathbf{u} e lembrando que (4.38) vale para todo $i, j, l = 1, \dots, n$, $\bigvee_{l=1}^n (w_{il} \mathbf{u} w_{lj}) \leq w_{ij}$ para todo $i, j = 1, \dots, n$, ou seja, W é \mathbf{u} -transitiva. \square

O próximo lema será utilizado no capítulo 5, quando trataremos da continuidade das memórias associativas fuzzy.

Lema 4.13. *Considere uma uninorma dilatativa \mathbf{u} . Então, as seguintes relações são válidas para todo $a, b, c \in [0, 1]$.*

$$[(a \mathbf{u} b) \Rightarrow_R c] = [a \Rightarrow_R (b \Rightarrow_R c)] = [b \Rightarrow_R (a \Rightarrow_R c)], \quad (4.39)$$

$$[b \Rightarrow_R (a \mathbf{u} b)] \geq a. \quad (4.40)$$

Demonstração. Primeiramente demonstraremos (4.39). Devido a associatividade da uninorma \mathbf{u} e a relação de adjunção entre os operadores \mathbf{u} e \Rightarrow_R segue que

$$\begin{aligned} [(a \mathbf{u} b) \Rightarrow_R c] &= \bigvee \{z \in [0, 1] : [(a \mathbf{u} b) \mathbf{u} z] \leq c\} \\ &= \bigvee \{z \in [0, 1] : [a \mathbf{u} (b \mathbf{u} z)] \leq c\} \\ &= \bigvee \{z \in [0, 1] : (b \mathbf{u} z) \leq (a \Rightarrow_R c)\} \\ &= \bigvee \{z \in [0, 1] : z \leq [b \Rightarrow_R (a \Rightarrow_R c)]\} \\ &= [b \Rightarrow_R (a \Rightarrow_R c)]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Pela comutatividade da uninorma \mathbf{u} , temos que

$$[b \Rightarrow_R (a \Rightarrow_R c)] = [(a \mathbf{u} b) \Rightarrow_R c] = [(b \mathbf{u} a) \Rightarrow_R c] = [a \Rightarrow_R (b \Rightarrow_R c)].$$

A desigualdade (4.40) segue do seguinte fato: Observe que $a \in \{z \in [0, 1] : b \mathbf{u} z \leq a \mathbf{u} b\}$ e portanto, $\bigvee \{z \in [0, 1] : b \mathbf{u} z \leq a \mathbf{u} b\} = [b \Rightarrow_R (a \mathbf{u} b)] \geq a$. \square

Teorema 4.14 (Reflexividade e Idempotência da matriz W). *A matriz $W = X \triangleleft_R X^T$ é reflexiva e Max- \mathbf{u} idempotente, isto é, $I \leq W$, onde*

$$I = \begin{bmatrix} e & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

e $W \circ_u W = W$.

Demonstração. Primeiramente, note que $(a \Rightarrow_R a) = \bigvee \{c \in [0, 1] : a \mathbf{u} c \leq a\} = e$ para todo $a \in [0, 1]$, pois caso contrário, se $e < c$ então $a = a \mathbf{u} e < a \mathbf{u} c$. Agora, para mostrar que a matriz W é reflexiva, note que

$$w_{ii} = \bigwedge_{k=1}^q (x_{ik} \Rightarrow_R x_{ik}) = \bigwedge_{k=1}^q e = e. \quad (4.43)$$

pois, $(x_{ik} \Rightarrow_R x_{ik}) = e$ para todo k . Assuma agora que W é reflexiva e \mathbf{u} -transitiva e provaremos que W é Max- \mathbf{u} idempotente. De fato, sabemos que

$$w_{ij} \geq (W \circ_u W)_{ij} = \bigvee_{l=1}^n (w_{il} \mathbf{u} w_{lj}), \quad (4.44)$$

para todo $i, j = 1, \dots, n$. Aplicando o princípio de abertura [8], temos

$$\bigvee_{l=1}^n (w_{il} \mathbf{u} w_{lj}) \geq w_{il} \mathbf{u} w_{lj}, \quad (4.45)$$

para todo $l = 1, \dots, n$. Em particular, para $l = i$

$$\bigvee_{l=1}^n (w_{il} \mathbf{u} w_{lj}) \geq w_{ii} \mathbf{u} w_{ij} = e \mathbf{u} w_{ij} = w_{ij}, \quad (4.46)$$

e portanto

$$w_{ij} \geq (W \circ_u W)_{ij} \geq w_{ij}, \quad (4.47)$$

de onde, concluímos que W é Max- \mathbf{u} idempotente. \square

Criaremos agora, um processo iterativo utilizando uma Max- \mathbf{u} FMAM, ou seja, dado um padrão de entrada $\mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{x}}$, podemos construir uma sequência $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \dots$, dada pela seguinte equação

$$\mathbf{x}(t+1) = (W \circ_u \mathbf{x}(t)) \text{ para todo } t = 0, 1, \dots \quad (4.48)$$

O próximo teorema revela que o processo iterativo descrito acima converge com uma única iteração.

Teorema 4.15. *Seja $X = [x_1, x_2, \dots, x_q]$ a matriz com os padrões de entrada de uma Max- u FMAM autoassociativa. Neste caso, o processo iterativo descrito na equação (4.48) converge com uma única iteração.*

Demonstração. Para todo $t \geq 1$ temos:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t+1) &= W \circ_u \mathbf{x}(t) \\
 &= W \circ_u (W \circ_u \mathbf{x}(t-1)) \\
 &= (W \circ_u W) \circ_u \mathbf{x}(t-1) \\
 &= W \circ_u \mathbf{x}(t-1) = \mathbf{x}(t)
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Aqui, usamos o fato da matriz W ser Max- u idempotente e a composição Max- u ser associativa. A associatividade da composição Max- u decorre diretamente da associatividade da uninorma u . \square

O próximo teorema nos mostra que podemos armazenar quantos padrões desejarmos em uma Max- u FMAM autoassociativa.

Teorema 4.16. *Seja $X \in [0, 1]^{n \times q}$. Se $W = X \triangleleft_R X^T$, então $W \circ_u X = X$.*

Demonstração. De acordo com o Teorema 4.2, temos que $W \circ_u X \leq X$. Portanto, basta mostrarmos que $W \circ_u X \geq X$. De fato,

$$X = I \circ_u X \leq W \circ_u X,$$

devido a reflexibilidade de W e a monotonicidade da composição Max- u . \square

Desejamos que um modelo de memória associativa possua uma certa propriedade de capacidade de correção de erros. Veremos no próximo teorema, que uma Max- u FMAM autoassociativa exibe tolerância com respeito a *padrões erodidos*.

Definição 4.17. *Um padrão $\tilde{\mathbf{x}}$ é chamado de versão erodida do padrão \mathbf{x} se e somente se $\tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x}$. Analogamente, um padrão $\tilde{\mathbf{x}}$ é chamado de versão dilatada do padrão \mathbf{x} se e somente se $\tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{x}$.*

Teorema 4.18. *Considere um padrão de entrada $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$ e W calculada pelo aprendizado implicativo fuzzy. Então $W \circ_u \mathbf{x}$ é o menor ponto fixo \mathbf{y} de W tal que $\mathbf{y} \geq \mathbf{x}$. Matematicamente:*

$$W \circ_u \mathbf{x} = \bigwedge \{ \mathbf{y} : W \circ_u \mathbf{y} = \mathbf{y} \text{ e } \mathbf{y} \geq \mathbf{x} \}. \tag{4.50}$$

Demonstração. Seja $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$. Por um lado, o padrão $W \circ_u \mathbf{x}$ representa uma cota superior de \mathbf{x} pois

$$W \circ_u \mathbf{x} \geq I \circ_u \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

pelo Teorema 4.14 e pela monotonicidade da composição Max- u . Por outro lado, o ponto fixo \mathbf{x} é a menor cota superior no conjunto dos ponto fixos de W , pois, todo ponto fixo $\mathbf{y} \geq \mathbf{x}$ satisfaz

$$\mathbf{y} = W \circ_u \mathbf{y} \geq W \circ_u \mathbf{x}. \quad (4.51)$$

□

Veremos agora, as principais características de uma Min- u' FMAM treinada com o aprendizado implicativo fuzzy dual.

4.5 MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS MORFOLÓGICAS FUZZY MIN- U'

Uma *memória autoassociativa morfológica nebulosa Min- u'* é uma Min- u' FMAM no caso autoassociativo.

Seja $X = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_q] \in [0, 1]^{n \times q}$ a matriz com as memórias fundamentais como coluna. Lembremos que a matriz de pesos sinápticos M de uma Min- u' FMAM autoassociativa é calculada de acordo com a equação

$$M = X \overleftarrow{R} X^T. \quad (4.52)$$

A seguir, apresentaremos um teorema que revela que a matriz M possui a propriedade de ser Reflexiva e Min- u' idempotente.

Teorema 4.19 (Reflexividade e Idempotência da matriz M). *Seja $u' : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, uma uninorma erosiva. A matriz $M = X \overleftarrow{R} X^T$ é reflexiva e Min- u' idempotente, isto é, $M \leq I$, onde*

$$I = \begin{bmatrix} e' & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e' & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & e' \end{bmatrix}, \quad (4.53)$$

e' é o elemento identidade da uninorma u' e $M \bullet_{u'} M = M$.

Demonstração. A matriz M é reflexiva pois

$$m_{ii} = \bigvee_{k=1}^q (x_{ik} \rightrightarrows_R x_{ik}) = \bigvee_{k=1}^q e = e. \quad (4.54)$$

pois, $(x_{ik} \rightrightarrows_R x_{ik}) = e$ para todo k . Provaremos agora, que M é Min- u' idempotente. De fato, sabemos que

$$m_{ij} \leq (M \bullet_{u'} M)_{ij} = \bigwedge_{l=1}^n (m_{il} u' m_{lj}), \quad (4.55)$$

para todo $i, j = 1, \dots, n$. Aplicando o princípio de fechamento [8], temos

$$\bigwedge_{l=1}^n (m_{il} u' m_{lj}) \leq m_{il} u' m_{lj}, \quad (4.56)$$

para todo $l = 1, \dots, n$. Em particular, para $l = i$

$$\bigwedge_{l=1}^n (m_{il} u' m_{lj}) \leq m_{ii} u' m_{ij} = e u' m_{ij} = m_{ij}, \quad (4.57)$$

e portanto

$$m_{ij} \leq (M \bullet_{u'} M)_{ij} \leq m_{ij}, \quad (4.58)$$

de onde, concluímos que M é Min- u' idempotente. \square

Observe que, para provar que M é Min- u' idempotente, foram utilizadas a reflexibilidade de M e o fato de M cumprir a desigualdade $M \leq M \bullet_{u'} M$.

Note agora que, dado um padrão de entrada $\mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{x}}$, podemos construir uma sequência $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \dots$, dada pela seguinte equação

$$\mathbf{x}(t+1) = (M \bullet_{u'} \mathbf{x}(t)) \text{ para todo } t = 0, 1, \dots \quad (4.59)$$

O próximo teorema revela que o processo iterativo descrito acima converge com uma única iteração.

Teorema 4.20. *Seja $X = [x_1, x_2, \dots, x_q]$ a matriz com os padrões de entrada de uma Min- u' FMAM autoassociativa. Neste caso, o processo iterativo descrito pela equação (4.59) converge com uma única iteração.*

Demonstração. Para todo $t \geq 1$ temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= M \bullet_{u'} \mathbf{x}(t) \\ &= M \bullet_{u'} (M \bullet_{u'} \mathbf{x}(t-1)) \\ &= (M \bullet_{u'} W) \bullet_{u'} \mathbf{x}(t-1) \\ &= M \bullet_{u'} \mathbf{x}(t-1) = \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (4.60)$$

Aqui, usamos o fato da matriz M ser Min- u' idempotente e a composição Min- u' ser associativa. A associatividade da composição Min- u' decorre diretamente da associatividade da uninorma u' . \square

O próximo teorema nos mostra que podemos armazenar quantos padrões desejarmos em uma Min- u' FMAM autoassociativa.

Teorema 4.21. *Seja $X \in [0, 1]^{n \times q}$. Se $M = X \varpi_R X^T$, então $M \bullet_{u'} X = X$*

Demonstração. De acordo com o Teorema 4.7, temos que $M \bullet_{u'} X \geq X$. Portanto, basta mostrarmos que $M \bullet_{u'} X \leq X$. De fato,

$$X = I \bullet_{u'} X \geq M \bullet_{u'} X,$$

devido a reflexibilidade de M e a monotonicidade da composição Min- u' . \square

Veremos no próximo teorema, que uma Min- u' FMAM autoassociativa exibe tolerância com respeito a padrões dilatados.

Teorema 4.22. *Considere um padrão de entrada $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$ e M calculada pelo aprendizado implicativo fuzzy dual. Então $M \bullet_{u'} \mathbf{x}$ é o menor ponto fixo \mathbf{y} de M tal que $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$. Matematicamente:*

$$M \bullet_{u'} \mathbf{x} = \bigwedge \{ \mathbf{y} : M \bullet_{u'} \mathbf{y} = \mathbf{y} \text{ e } \mathbf{y} \leq \mathbf{x} \}. \quad (4.61)$$

Demonstração. Seja $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$. Por um lado, o padrão $M \bullet_{u'} \mathbf{x}$ representa uma cota inferior de \mathbf{x} pois

$$M \bullet_{u'} \mathbf{x} \leq I \bullet_{u'} \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

devido a reflexibilidade de M e pela monotonicidade da composição Min- u' . Por outro lado, o ponto fixo \mathbf{x} é a maior cota inferior no conjunto dos ponto fixos de M , pois, todo ponto fixo $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$ satisfaz

$$\mathbf{y} = M \bullet_{u'} \mathbf{y} \leq M \bullet_{u'} \mathbf{x}. \quad (4.62)$$

\square

CAPÍTULO 5

CONTINUIDADE DAS MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS FUZZY BASEADAS EM UNIFORMAS

Neste capítulo, estenderemos as noções de continuidade e exatidão dos sistemas de regras fuzzy SE-ENTÃO para as FAMs baseadas em uninormas. Tais noções foram introduzidas por Perfilieva et. al, [39] no contexto dos sistemas de regras fuzzy SE-ENTÃO. Devido a conexão dessas teorias, apresentaremos uma breve exposição desse estudo no apêndice A.

As memórias associativas fuzzy são comumente usadas em aplicações da teoria dos conjuntos fuzzy, por exemplo, a FAM de Kosko foi aplicada com sucesso em problemas de controle [27, 30], rastreamento de alvos [36] e previsão de séries temporais [6]. O interesse no assunto deste capítulo surge da razão de que, em muitos casos, desejamos obter uma memória associativa que resolva problemas de natureza contínua. Por exemplo, quando desejamos recordar algum padrão armazenado em uma memória associativa, mediante a apresentação de algum padrão ruidoso ou incompleto, desejamos obter um padrão, no mínimo, “próximo” ao padrão original armazenado. Logo, em muitos problemas, é esperado que os modelos exibam um comportamento contínuo. Na verdade, veremos que um problema de memória associativa só pode ser resolvido quando esta for um modelo contínuo.

5.1 CONTINUIDADE E EXATIDÃO DAS MEMÓRIAS ASSOCIATIVAS FUZZY

Nesta seção, investigaremos a relação entre a propriedade de continuidade de uma FAM e a propriedade dessa ser um modelo exato. Provaremos que a continuidade da FAM, está diretamente relacionada com a sua fase de recordação. Resumidamente, dizemos que uma FAM baseada em uninorma é um modelo exato se recorda perfeitamente todas as associações armazenadas e contínua se, para cada entrada fuzzy x “próxima” de algum padrão x_k memorizado da FAM, a saída fuzzy correspondente y está “próxima” a uma saída desejada y_k .

Definição 5.1. Considere o conjunto de memórias fundamentais $\Gamma = \{(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) : k = 1, \dots, q\}$, onde $\mathbf{x}_k = [x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}]^T \in [0, 1]^n$ e $\mathbf{y}_k = [y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{mk}]^T \in [0, 1]^m$ e $\mathbf{u} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ uma uninorma. Dizemos que uma FAM baseada em uninorma $G : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^m$ é um modelo exato se

$$G(\mathbf{x}_k) = W \circ_{\mathbf{u}} \mathbf{x}_k = \mathbf{y}_k, \quad \forall k = 1, \dots, q. \quad (5.1)$$

Em outras palavras, dizemos que G *interpola* as associações $(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$, ou *armazena corretamente as memórias fundamentais*.

É importante observar que a exatidão de um modelo significa que ele é “exato com respeito as associações $(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$ ”.

Se um modelo não é exato, diremos simplesmente que o modelo é inexacto.

Obviamente, é possível que, para um dado conjunto de memórias fundamentais Γ , não exista um modelo exato (cf. exemplo 4.1).

Exemplo 5.2. Considere as matrizes X , Y e W do exemplo 4.4. A Max- $\mathbf{u}_{3\Pi}$ FMAM $G : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^3$, definida por $G(\mathbf{x}) = W \circ_{\mathbf{u}_{3\Pi}} \mathbf{x}$, é um modelo exato de FMAM baseada em uninorma dilatativa.

Antes de fornecermos a definição de continuidade das FAMs baseadas em uninormas, definiremos uma operação binária: Seja \mathbf{u} uma uninorma dilatativa. Se $a, b \in [0, 1]$, então definimos uma *bi-implicação fuzzy* $\Leftrightarrow_{\mathbf{u}} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, por

$$(a \Leftrightarrow_{\mathbf{u}} b) = (a \Rightarrow_{\mathbf{R}} b) \wedge (b \Rightarrow_{\mathbf{R}} a), \quad (5.2)$$

onde $\Rightarrow_{\mathbf{R}} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ é a R-implicação fuzzy adjunta a \mathbf{u} .

O valor $(a \Leftrightarrow_{\mathbf{u}} b)$ pode ser interpretado como um “desvio” ou grau de proximidade, por equivalência, entre os números a e b .

Lema 5.3. A operação $\Leftrightarrow_{\mathbf{u}} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ é reflexiva, simétrica e transitiva com respeito a uninorma \mathbf{u} . Matematicamente, para todo $a, b, c \in [0, 1]$ tem-se:

$$(a) \quad (a \Leftrightarrow_{\mathbf{u}} a) = e, \quad (\text{Reflexividade})$$

$$(b) \quad (a \Leftrightarrow_{\mathbf{u}} b) = (b \Leftrightarrow_{\mathbf{u}} a), \quad (\text{Simetria})$$

$$(c) \quad [(a \Leftrightarrow_{\mathbf{u}} b) \mathbf{u} (b \Leftrightarrow_{\mathbf{u}} c)] \leq (a \Leftrightarrow_{\mathbf{u}} c). \quad (\text{Transitividade})$$

Demonstração. (a) Basta observarmos que

$$(a \Leftrightarrow_u a) = [(a \Rightarrow_R a) \wedge (a \Rightarrow_R a)] = (e \wedge e) = e.$$

(b) Segue diretamente da comutatividade da operação de mínimo.

(c) Primeiramente, note que

$$(a \Leftrightarrow_u b) \leq (a \Rightarrow_R b),$$

$$(a \Leftrightarrow_u b) \leq (b \Rightarrow_R a),$$

$$(b \Leftrightarrow_u c) \leq (b \Rightarrow_R c) \quad \text{e}$$

$$(b \Leftrightarrow_u c) \leq (c \Rightarrow_R b).$$

De acordo com o Lema 4.11 e as propriedades de monotonicidade e comutatividade da uninorma u , as seguintes desigualdades são válidas:

$$[(a \Leftrightarrow_u b) \mathbf{u} (b \Leftrightarrow_u c)] \leq [(a \Rightarrow_R b) \mathbf{u} (b \Rightarrow_R c)] \leq (a \Rightarrow_R c), \quad (5.3)$$

$$[(b \Leftrightarrow_u c) \mathbf{u} (a \Leftrightarrow_u b)] \leq [(c \Rightarrow_R b) \mathbf{u} (b \Rightarrow_R a)] \leq (c \Rightarrow_R a). \quad (5.4)$$

Aplicando a operação de mínimo em ambas desigualdades obtemos

$$[(a \Leftrightarrow_u b) \mathbf{u} (b \Leftrightarrow_u c)] \wedge [(b \Leftrightarrow_u c) \mathbf{u} (a \Leftrightarrow_u b)] \leq (a \Rightarrow_R c) \wedge (c \Rightarrow_R a). \quad (5.5)$$

Novamente, pela comutatividade de u , chegamos ao resultado desejado

$$[(a \Leftrightarrow_u b) \mathbf{u} (b \Leftrightarrow_u c)] \leq (a \Leftrightarrow_u c). \quad (5.6)$$

□

Lema 5.4. *Seja $u : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ uma uninorma dilatativa com elemento identidade e e $e \Leftrightarrow_u : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ a bi-implicação fuzzy associada a u . Então*

$$[(a \Leftrightarrow_u b) \geq e] \text{ se, e somente se, } a = b. \quad (5.7)$$

Demonstração. De fato, se $a = b$ tem-se que $(a \Leftrightarrow_u b) = e$. Reciprocamente, podemos afirmar que

$[(a \Leftrightarrow_u b) \geq e]$ se, e somente se, $[(a \Rightarrow_u b) \geq e]$ e $[(b \Rightarrow_u a) \geq e]$, ou seja, $a \leq b$ e $b \leq a$ de onde concluímos que $a = b$, pois $[(a \Rightarrow_u b) \geq e] \Rightarrow a \leq b$. □

Lema 5.5. *Seja $u : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ uma uninorma dilatativa e $\Leftrightarrow_u : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ a bi-implicação fuzzy associada a u . Então, as seguintes desigualdades são válidas:*

$$\bigwedge_{i \in J} (a_i \Leftrightarrow_u b_i) \leq \left[\left(\bigvee_{i \in J} a_i \right) \Leftrightarrow_u \left(\bigvee_{i \in J} b_i \right) \right], \quad (5.8)$$

onde $a_j, b_j \in [0, 1]$ e $j \in J$ onde J é um conjunto finito de índices.

$$(a \mathbf{u} b) \Leftrightarrow_u (b \mathbf{u} c) \geq (a \Leftrightarrow_u c), \quad (5.9)$$

para todo $a, b, c \in [0, 1]$.

Demonstração. A desigualdade (5.8) segue das seguintes observações válidas para todo conjunto de índices J :

$$\begin{aligned} \bigwedge_{j \in J} (a_j \Leftrightarrow_u b_j) &= \bigwedge_{j \in J} [(a_j \Rightarrow_u b_j) \wedge (b_j \Rightarrow_u a_j)] \\ &= \left[\bigwedge_{j \in J} (a_j \Rightarrow_u b_j) \right] \wedge \left[\bigwedge_{j \in J} (b_j \Rightarrow_u a_j) \right] \\ &\leq \left[\bigwedge_{j \in J} \left(a_j \Rightarrow_u \left(\bigvee_{j \in J} b_j \right) \right) \right] \wedge \left[\bigwedge_{j \in J} \left(b_j \Rightarrow_u \left(\bigvee_{j \in J} a_j \right) \right) \right] \\ &= \left[\left(\left(\bigvee_{j \in J} a_j \right) \Rightarrow_u \left(\bigvee_{j \in J} b_j \right) \right) \right] \wedge \left[\left(\left(\bigvee_{j \in J} b_j \right) \Rightarrow_u \left(\bigvee_{j \in J} a_j \right) \right) \right] \\ &= \left[\left(\bigvee_{j \in J} a_j \right) \Leftrightarrow_u \left(\bigvee_{j \in J} b_j \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Nesta demonstração, usamos os seguintes fatos: A segunda igualdade segue pela distributividade de \bigwedge com relação ao mínimo. Em seguida, a desigualdade é consequência de \Rightarrow_R ser crescente no segundo argumento. A penúltima igualdade segue do fato que a implicação fuzzy \Rightarrow_R é decrescente no primeiro argumento.

Finalmente, pela equação (4.39) (cf. Lema 4.13) e pela comutatividade da uninorma u tem-se

$$\begin{aligned} [(a \mathbf{u} b) \Leftrightarrow_u (b \mathbf{u} c)] &= [(a \mathbf{u} b) \Rightarrow_R (b \mathbf{u} c)] \wedge [(b \mathbf{u} c) \Rightarrow_R (a \mathbf{u} b)] \\ &= [a \Rightarrow_R (b \Rightarrow_R (b \mathbf{u} c))] \wedge [b \Rightarrow_R (c \Rightarrow_R (a \mathbf{u} b))] \\ &= [a \Rightarrow_R (b \Rightarrow_R (c \mathbf{u} b))] \wedge [c \Rightarrow_R (b \Rightarrow_R (a \mathbf{u} b))]. \end{aligned}$$

Observe agora que, pela equação (4.40) temos

$$[b \Rightarrow_R (c \mathbf{u} b)] \geq c \quad \text{e} \quad [b \Rightarrow_R (a \mathbf{u} b)] \geq a.$$

Como a implicação fuzzy \Rightarrow_R é crescente no segundo argumento, segue que

$$\begin{aligned} [(a \text{ u } b) \Leftrightarrow_{\text{u}} (b \text{ u } c)] &= [a \Rightarrow_R (b \Rightarrow_R (c \text{ u } b))] \wedge [c \Rightarrow_R (b \Rightarrow_R (a \text{ u } b))] \\ &\geq [(a \Rightarrow_R c) \wedge (c \Rightarrow_R a)] \\ &= (a \Leftrightarrow_{\text{u}} c), \end{aligned}$$

concluindo assim a demonstração da equação (5.9). \square

Definição 5.6. Considere um CLODUM $\mathcal{S} = ([0, 1], \vee, \wedge, \text{u}, \text{u}'$). Dado um conjunto de memórias fundamentais Γ , dizemos que uma FAM baseada em uninorma $G : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^m$ é contínua na k -ésima associação se, para cada $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in [0, 1]^n$ a seguinte desigualdade é válida:

$$\bigwedge_{i=1}^m (y_{ki} \Leftrightarrow_{\text{u}} y_i) \geq \bigwedge_{j=1}^n (x_{kj} \Leftrightarrow_{\text{u}} x_j), \quad (5.11)$$

onde $G(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$. Se a desigualdade acima for válida para todo $k = 1, \dots, q$, dizemos simplesmente que a FAM G é contínua em Γ .

A exatidão entre os conjuntos fuzzy em (5.11) é medida com o auxílio da operação $\Leftrightarrow_{\text{u}}$. A explicação do uso de (5.11) para a especificação da continuidade das FAMs pode ser feita observando o fato de que o operador $\Leftrightarrow_{\text{u}}$ expressa o grau do desvio entre dois números no intervalo $[0, 1]$, i.e., podemos dizer que este operador mede a similaridade entre dois elementos de $[0, 1]$. A equação (5.11) nos mostra que a FAM G é contínua se o seu valor em cada entrada fuzzy \mathbf{x} “próxima” de um padrão de entrada \mathbf{x}_k for “próxima” ao padrão de saída correspondente \mathbf{y}_k , onde $k = 1, \dots, q$.

É importante observar que, para haver sentido a análise da continuidade de uma FAM, temos sempre que citar a operação \circ da teoria dos conjuntos fuzzy e o CLODUM em questão.

5.2 EQUIVALÊNCIA ENTRE MODELOS EXATOS E MODELOS CONTÍNUOS DE FAMs

Veremos que, no contexto de memórias associativas fuzzy, a propriedade de ser um modelo exato e continuidade são equivalentes.

Lema 5.7. Considere o conjunto de memórias fundamentais $\Gamma = \{(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) : k = 1, \dots, q\}$ e uma memória associativa fuzzy $G : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^m$ baseada em uninorma. Então, para algum padrão de entrada $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$, para todo $k = 1, \dots, q$ e $i = 1, \dots, m$, a seguinte desigualdade é válida

$$(y_{ki} \Leftrightarrow_{\mathbf{u}} y_i) \geq \left[\delta_{W,k,i} \mathbf{u} \bigwedge_{j=1}^n (x_{kj} \Leftrightarrow_{\mathbf{u}} x_j) \right], \quad (5.12)$$

onde

$$\delta_{W,k,i} = [y_{ki} \Leftrightarrow_{\mathbf{u}} (W \circ_{\mathbf{u}} \mathbf{x}_k)_i].$$

Demonstração. Primeiramente, denotaremos

$$\mathbf{y} = W \circ_{\mathbf{u}} \mathbf{x} = G(x). \quad (5.13)$$

Observe que $\mathbf{y} \in [0, 1]^m$. Pela transitividade da operação $\Leftrightarrow_{\mathbf{u}}$ com respeito a uninorma \mathbf{u} , obtemos

$$[(y_i \Leftrightarrow_{\mathbf{u}} y_{ki})] \geq [(y_i \Leftrightarrow_{\mathbf{u}} y_i)] \mathbf{u} [y_i \Leftrightarrow_{\mathbf{u}} (W \circ_{\mathbf{u}} \mathbf{x}_k)_i] \mathbf{u} [(W \circ_{\mathbf{u}} \mathbf{x}_k)_i \Leftrightarrow_{\mathbf{u}} y_{ki}], \quad (5.14)$$

onde $k = 1, \dots, q$. Faremos estimativas com os três fatores presentes ao lado direito da desigualdade (5.13). Pela desigualdade anterior, temos que

$$(y_i \Leftrightarrow_{\mathbf{u}} y_i) = e, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

O segundo fator pode ser estimado para algum $i = 1, \dots, m$ como segue:

$$\begin{aligned} [y_i \Leftrightarrow_{\mathbf{u}} (W \circ_{\mathbf{u}} \mathbf{x}_k)_i] &= \left[\bigvee_{j=1}^n (w_{ij} \mathbf{u} x_j) \right] \Leftrightarrow_{\mathbf{u}} \left[\bigvee_{j=1}^n (w_{ij} \mathbf{u} x_{jk}) \right] \geq \\ \left[\bigwedge_{j=1}^n (w_{ij} \mathbf{u} x_j) \Leftrightarrow_{\mathbf{u}} (w_{ij} \mathbf{u} x_{jk}) \right] &\geq \bigwedge_{j=1}^n (x_j \Leftrightarrow_{\mathbf{u}} x_{jk}), \end{aligned} \quad (5.15)$$

devido ao Lema 5.5. O terceiro fator $(W \circ_{\mathbf{u}} \mathbf{x}_k)_i \Leftrightarrow_{\mathbf{u}} y_{ki}$ é igual a $\delta_{W,k,i}$. Estas três estimativas provam o Lema. \square

O Lema 5.7 estima um desvio de uma saída $W \circ_{\mathbf{u}} \mathbf{x}$ a partir do respectivo padrão de saída \mathbf{y}_k das associações em Γ . Tal estimativa, utiliza o desvio entre a entrada \mathbf{x} e o padrão \mathbf{x}_k e o desvio $\delta_{W,k,i}$. Assim, observe que, se G recorda a k -ésima associação de Γ , então, para todo $i = 1, \dots, m$, $\delta_{W,k,i} = e$ e por (5.12), a memória associativa fuzzy G é contínua com respeito a k -ésima associação. Caso contrário, G não será contínua (não será contínua na k -ésima associação).

Finalizando, podemos agora relacionar a continuidade de uma FAM com a sua exatidão.

Teorema 5.8. *Considere um CLODUM $\mathcal{S} = ([0, 1], \bigvee, \bigwedge, \mathbf{u}, \mathbf{u}')$ e um conjunto de memórias fundamentais $\Gamma = \{(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) : k = 1, \dots, q\}$. Dado um padrão de entrada $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in [0, 1]^n$, uma FAM baseada em uninorma $G : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^m$ definida pela equação*

$$G(\mathbf{x}) = W \circ_{\mathbf{u}} \mathbf{x} = \mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T \in [0, 1]^m,$$

é contínua em Γ se, e somente se, é um modelo exato em Γ .

Demonstração. Suponha primeiramente que G seja contínua em Γ . Então, para todo $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$, a desigualdade (5.11) é válida para cada $k = 1, \dots, q$. Escolhendo uma associação arbitrária $k \in \{1, \dots, q\}$ e aplicando a desigualdade (5.11) para $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k$, obtemos

$$\bigwedge_{i=1}^n [y_{ki} \Leftrightarrow_{\mathbf{u}} (W \circ_{\mathbf{u}} \mathbf{x}_k)_i] \geq \bigwedge_{j=1}^n (x_{kj} \Leftrightarrow_{\mathbf{u}} x_{kj}) = e, \quad (5.16)$$

o que implica

$$[y_{ki} \Leftrightarrow_{\mathbf{u}} (W \circ_{\mathbf{u}} \mathbf{x}_k)_i] \geq e, \quad (5.17)$$

para cada $i = 1, \dots, m$. Pelo Lema 5.4, segue que

$$y_{ki} = (W \circ_{\mathbf{u}} \mathbf{x}_k)_i,$$

para cada $i = 1, \dots, m$, ou seja,

$$\mathbf{y}_k = W \circ_{\mathbf{u}} \mathbf{x}_k = G(\mathbf{x}_k)$$

para todo $k = 1, \dots, q$ e assim, G é um modelo exato em Γ . Reciprocamente, se G é um modelo exato em Γ , então $G(\mathbf{x}_k) = W \circ_{\mathbf{u}} \mathbf{x}_k = \mathbf{y}_k$ para todo $k = 1, \dots, q$. Logo, $\delta_{W,k,i} = e$ para todo $k = 1, \dots, q$ e $i = 1, \dots, m$. Pelo Lema 5.7, G é contínua em Γ . \square

Podemos notar a importância desse teorema, uma vez que, ao buscarmos a solução de um problema de memória associativa, sempre buscamos modelos exatos. Portanto, de certo modo, podemos dizer que a continuidade é uma característica requerida quando tratamos de memórias associativas fuzzy.

Observação 5.9. *Observe que o Teorema 5.8 foi formulado utilizando uma uninorma dilatativa. Podemos enunciar, de maneira análoga, outro teorema baseando-se em uma uninorma erosiva. No entanto, é importante verificar que o conceito de continuidade é diferente em cada caso. Isso pode ser visualizado notando-se que, a definição de continuidade de uma FAM baseada em uma uninorma erosiva \mathbf{u}' é feita através do operador co-implicação $\Rightarrow_R : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$. Mais precisamente, a continuidade de uma FAM baseada em uma uninorma erosiva \mathbf{u}' seria definida em função de um operador bi-coimplicação $\Leftrightarrow_{\mathbf{u}'} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$.*

Também podemos utilizar o Teorema 5.8, a fim de encontrar um critério de solubilidade para a obtenção da matriz dos pesos sinápticos de uma FAM baseada em uninorma, de modo que esta seja um modelo exato.

Corolário 5.10. *Considere um CLODUM $\mathcal{S} = ([0, 1], \vee, \wedge, u, u')$ e um conjunto de memórias fundamentais $\Gamma = \{(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) : k = 1, \dots, q\}$. Uma FAM baseada em uninorma $G : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^m$ definida pela equação*

$$G(\mathbf{x}) = W \circ_u \mathbf{x},$$

é um modelo exato em Γ se, e somente se, satisfaz (5.11) para todo $k = 1, \dots, q$ e para todo $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$.

Demonstração. A Demonstração deste corolário segue diretamente do Teorema 5.8. □

Exemplo 5.11. A Max- u_{3II} FMAM $G : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^3$ do Exemplo 5.2 é contínua em todas as suas associações, pois é um modelo exato.

Analisaremos agora, o comportamento das FMAMs baseadas em uninormas treinadas com o aprendizado implicativo fuzzy.

Teorema 5.12. *Seja $u : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ uma uninorma dilatativa. Considere ainda, um conjunto de memórias fundamentais $\Gamma = \{(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) : k = 1, \dots, q\}$ e as matrizes $X \in [0, 1]^{n \times q}$ e $Y \in [0, 1]^{m \times q}$ com as colunas sendo as memórias fundamentais. Se existir uma Max- u FMAM que recorda perfeitamente as associações $(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$, $\forall k = 1, \dots, q$, então a aplicação $G : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^m$ definida por*

$$G(\mathbf{x}) = W \circ_u \mathbf{x}$$

com

$$W = Y \triangleleft_R X^T,$$

é contínua em Γ .

Demonstração. Se existir uma Max- u FMAM que recorda perfeitamente as associações $(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$ para todo $k = 1, \dots, q$ então, pelo Teorema 4.6, a FAM G é um modelo exato. Portanto, pelo Teorema 5.8 G é contínua em Γ . □

De acordo com a Observação 5.9, podemos enunciar de maneira análoga, um resultado para as FMAMs baseadas em uninormas erosivas treinadas com o aprendizado implicativo fuzzy dual.

Teorema 5.13. *Seja $u : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ uma uninorma erosiva. Considere ainda, um conjunto de memórias fundamentais $\Gamma = \{(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) : k = 1, \dots, q\}$ e as matrizes $X \in [0, 1]^{n \times q}$ e $Y \in [0, 1]^{m \times q}$ com as colunas sendo as memórias fundamentais. Se existir uma Min- u' FMAM que recorda perfeitamente as associações $(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$, $\forall k = 1, \dots, q$, então a aplicação $G' : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^m$ definida por*

$$G'(\mathbf{x}) = M \bullet_{u'} \mathbf{x}$$

com

$$M = Y \bar{\triangleleft}_R X^T,$$

é contínua em Γ .

O próximo teorema nos diz que as Max- u FMAMs autoassociativas são contínuas.

Teorema 5.14. *Considere uma uninorma dilatativa $u : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ e um conjunto de memórias fundamentais $\Gamma = \{(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k) : k = 1, \dots, q\}$. A Max- u FMAM autoassociativa $G : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n$ definida por*

$$G(\mathbf{x}) = W \circ_u \mathbf{x}$$

com

$$W = X \triangleleft_R X^T,$$

é contínua em Γ .

Demonstração. De acordo com o Teorema 4.16 as Max- u FMAMs autoassociativas são modelos exatos e portanto, contínuas em Γ . \square

Do mesmo modo, de acordo com a Observação 5.9, verifica-se que as Min- u' FMAMs autoassociativas são contínuas.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÃO

Em termos gerais, esta dissertação de mestrado mostrou uma representação das FAMs baseadas em uninormas sobre CLODUMs. Sobretudo, podemos visualizar que a maioria das FAMs baseadas em uninormas existentes na literatura efetuam dilatações (erosões) invariantes a regradações (regradações duais). Além disso, vimos que o problema de determinar uma FAM baseada em uninorma, que efetue uma operação elementar da MM invariante a regradações é equivalente ao problema de determinar uma matriz de pesos sinápticos. Observamos através dos Teoremas 4.6 e 4.9, que as FAMs baseadas em uninormas treinadas com o aprendizado implicativo fuzzy ou aprendizado implicativo fuzzy dual, apresentaram algumas características interessantes com relação a otimalidade e a fase de recordação. Também foram discutidas as principais propriedades que uma FAM baseada em uninorma adquire no caso autoassociativo. Em particular, foi demonstrado que podemos armazenar quantos padrões desejarmos nesses modelos e mais, esses modelos apresentam convergência com uma única iteração. Além disso, esses modelos exibem tolerância a padrões dilatados e no caso dual, tais modelos exibem tolerância a padrões erodidos. Foram estendidas as noções de continuidade e exatidão dos sistemas de regras fuzzy SE-ENTÃO para as FAMs baseadas em uninormas e vimos que tais conceitos são equivalentes.

O capítulo 2 apresentou, precisamente, os conceitos básicos dessa dissertação. Foram apresentadas as definições de reticulados completos, os principais operadores da *morfologia matemática* e os conceitos fundamentais da *teoria dos conjuntos fuzzy*. Logo após, foi apresentada a estrutura CLODUM, juntamente com os conceitos de operadores invariantes a regradações e núcleo. A Proposição 2.57, devido a Maragos, nos mostrou que os operadores que efetuam dilatações (erosões) invariantes a regradações (regradações duais), podem ser expressos em função de seus núcleos (núcleos duais). Esta proposição foi utilizada no capítulo 3, especificamente, no Teorema da Representação das FAMs em CLODUMs.

O capítulo 3 discutiu as *memórias associativas*. Focamos nosso estudo nas *memórias associativas neurais* e apresentamos o Teorema da Representação das FAMs em CLODUMs, o qual revela que, muitas FAMs encontradas na literatura efetuam dilatações ou erosões invariantes a regradações. Sobretudo, este mesmo teorema nos mostrou que o problema de determinar uma

FAM que efetua uma dilatação ou erosão, invariante a regradações, corresponde ao problema mais simples de determinar uma certa matriz de pesos sinápticos.

No capítulo 4 discutimos as noções de *aprendizado* a fim de buscar a melhor matriz de pesos sinápticos de modo que a FAM baseada em uninorma que efetue uma dilatação ou erosão invariante a regradação. Portanto, estudamos o *aprendizado implicativo fuzzy* e o *aprendizado implicativo fuzzy dual*, através dos quais, obtemos resultados interessantes com respeito a otimalidade e fase de recordação das FMAMs baseadas em uninormas. Precisamente, se Γ é um conjunto de memórias fundamentais, uma Max- u FMAM treinada com o aprendizado implicativo fuzzy é o supremo no conjunto $\{F \in \mathcal{D}_{ir}([0, 1]^n, [0, 1]^m) : F(\mathbf{x}_k) \leq \mathbf{y}_k\}$ e analogamente, uma Min- u' FMAM treinada com o aprendizado implicativo fuzzy dual é o ínfimo no conjunto $\{F \in \mathcal{E}_{ir}([0, 1]^n, [0, 1]^m) : F(\mathbf{x}_k) \geq \mathbf{y}_k\}$. Entretanto, vimos que nem sempre esses modelos recordam perfeitamente as associações armazenadas, isto é, as Max- u FMAMs (Min- u' FMAMs) treinadas com o aprendizado implicativo fuzzy (aprendizado implicativo fuzzy dual) recordam perfeitamente as associações de um conjunto de memórias fundamentais, desde que exista uma Max- u FMAM (Min- u' FMAM) que recorde perfeitamente todas as associações. Portanto, em pesquisas futuras, podemos investigar critérios para a existência desses modelos, dados diferentes conjuntos de memórias fundamentais. Outras técnicas de aprendizagem também podem ser empregadas em trabalhos futuros. Também foi feito um estudo com as FMAMs autoassociativas baseadas em uninormas. Precisamente, foram discutidas as principais propriedades que a FMAM adquire neste caso, tais como armazenamento absoluto, convergência numa única iteração e tolerância a padrões dilatados ou erodidos.

No capítulo 5 estendemos os conceitos de continuidade e exatidão para as FAMs baseadas em uninormas. Na verdade, vimos que tais conceitos são equivalentes. Em outras palavras, vimos que a continuidade de uma memória associativa é sempre uma característica requerida. Em seguida, relacionamos esses conceitos com as FMAMs, baseadas em uninormas, treinadas com o aprendizado implicativo fuzzy e aprendizado implicativo fuzzy dual. Finalmente, observamos que a classe das FMAMs autoassociativas, baseadas em uninormas e treinadas com o aprendizado implicativo fuzzy são contínuas. O nosso estudo sobre a continuidade e exatidão de uma FAM baseada em uninorma foi focado nas uninormas dilatativas. Lembre-se que toda afirmação sobre uma FAM baseada em uninorma, tem sua afirmação dual. Portanto, resultados sobre as FAMs baseadas em uninormas duais, podem ser obtidos substituindo uma uninorma dilatativa por uma uninorma erosiva e a R-implicação pela R-coimplicação.

A teoria sobre continuidade e exatidão das FAMs baseadas em uninormas se assemelha, do ponto de vista lógico, a teoria sobre continuidade e exatidão dos modelos de regras fuzzy SE-ENTÃO. Tal teoria serviu como motivação para o desenvolvimento do capítulo 5 desta dissertação de mestrado. Devido a isso, exporemos a seguir um resumo da teoria que revela que as noções de continuidade e exatidão dos modelos de regras fuzzy SE-ENTÃO são equivalentes.

REFERÊNCIAS

- [1] BANON, G., AND BARRERA, J. Decomposition of mappings between complete lattices by mathematical morphology, part 1. general lattices. *Signal Processing* 30, 3 (1993), 299–327.
- [2] BANON, G. J. F., AND BARRERA, J. *Bases da Morfologia Matemática para análise de imagens binárias*. INPE, São José dos Campos, 1998.
- [3] BIRKHOFF, G. *Lattice Theory*, 3 ed. American Mathematical Society, Providence, 1993.
- [4] BUCKLEY, J. J., AND HAYASHI, Y. Can fuzzy neural nets approximate continuous fuzzy functions? *Fuzzy Sets and Systems* 61, 1 (1994), 43–51.
- [5] CHIUEH, T., AND GOODMAN, R. Recurrent correlation associative memories. *IEEE Trans. on Neural Networks* 2, 2 (Mar. 1991), 275–284.
- [6] CHOUDHURY, J., SARKAR, B., AND MUKHERJEE, S. Forecasting of engineering manpower through fuzzy associative memory neural network with arima: a comparative study. *Neurocomputing* 47 (2002), 241–257.
- [7] CHUNG, F., AND LEE, T. On fuzzy associative memory with multiple-rule storage capacity. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 4, 3 (1996), 375–384.
- [8] CUNINGHAME-GREEN, R. *Minimax Algebra: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* 166. Springer-Verlag, New York, 1979.
- [9] CUNINGHAME-GREEN, R. Minimax algebra and applications. In *Advances in Imaging and Electron Physics*, P. Hawkes, Ed., vol. 90. Academic Press, New York, NY, 1995, pp. 1–121.
- [10] DAVIDSON, J. Foundation and applications of lattice transforms in image processing. In *Advances in Electronics and Electron Physics*, P. Hawkes, Ed., vol. 84. Academic Press, New York, NY, 1992, pp. 61–130.
- [11] DE BAETS, B., AND FODOR, J. C. Residual operators of uninorms. *Soft Computing* 3, 2 (1999).

- [12] DUBOIS, D., AND PRADE, H. *Fuzzy sets and systems: theory and applications*. Academic Press, New York, 1980.
- [13] FODOR, J. C., YAGER, R. R., AND RYBALOV, A. Structure of uninorms. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 5, 4 (1997), 411–427.
- [14] FULLER, R. *Introduction to Neuro-Fuzzy Systems*. Springer-Verlag New York, Mar. 2000.
- [15] GADER, P. D., KHABOU, M., AND KOLDOBSKY, A. Morphological regularization neural networks. *Pattern Recognition, Special Issue on Mathematical Morphology and Its Applications* 33, 6 (2000), 935–945.
- [16] HASSOUN, M. H., Ed. *Associative Neural Memories: Theory and Implementation*. Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.
- [17] HAYKIN, S. *Redes Neurais: Princípios e Prática*. Bookman, Porto Alegre, 2001.
- [18] HEBB, D. *The Organization of Behavior*. John Wiley & Sons, New York, 1949.
- [19] HEIJMANS, H. *Morphological Image Operators*. Academic Press, New York, NY, 1994.
- [20] HOPFIELD, J. J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 79 (Apr. 1982), 2554–2558.
- [21] ISHIBUCHI, H., FUJIOKA, R., AND TANAKA, H. Neural networks that learn from fuzzy if-then rules. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 1 (May 1993), 85–97.
- [22] J. M. MENDEL AND K. S. FU. *Adaptive Learning, and Pattern Recognition Systems: Theory and Applications*. Academic Press, New York, NY, 1970.
- [23] KASABOV, N. K. *Foundations of Neural Networks, Fuzzy Systems, and Knowledge Engineering*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1996.
- [24] KHABOU, M., GADER, P., AND KELLER, J. Ladar target detection using morphological shared-weight neural networks. *Machine Vision and Applications* 11, 6 (2000), 300–305.
- [25] KHABOU, M., GADER, P. D., AND KELLER, J. M. LADAR target detection using morphological shared-weight neural networks. *Machine Vision and Applications* 11, 6 (May 2000), 300–305.

- [26] KLIR, G. J., AND YUAN, B. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NY, 1995.
- [27] KONG, S.-G., AND KOSKO, B. Adaptive fuzzy systems for backing up a truck-and-trailer. *IEEE Transactions on Neural Networks* 3, 2 (1992), 211–223.
- [28] KOSKO, B. Adaptive bidirectional associative memories. In *IEEE 16th Workshop on Applied Images and Pattern Recognition* (Washington, D.C., Oct. 1987), pp. 1–49.
- [29] KOSKO, B. Bidirectional associative memories. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 18 (1988), 49–60.
- [30] KOSKO, B. *Neural Networks and Fuzzy Systems: A Dynamical Systems Approach to Machine Intelligence*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992.
- [31] LEE, K. H. *First Course on Fuzzy Theory and Applications*, vol. 27 of *Advances in Soft Computing*. Springer, Berlin, Germany, 2005.
- [32] MARAGOS, P. Lattice image processing: A unification of morphological and fuzzy algebraic systems. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 22, 2-3 (2005), 333–353.
- [33] MARCANTONIO, A., DARKEN, C., KUHN, G. M., SANTOSO, I., HANSON, S. J., AND PETSCHKE, T. A neural network autoassociator for induction motor failure prediction. In *Adv. Neural Inf. Process. Syst.* (1996), vol. 8, pp. 924–930.
- [34] MATHERON, G. *Random Sets and Integral Geometry*. John Wiley & Sons, New York, NY, 1975.
- [35] NACHTEGAEL, M., SUSSNER, P., MÉLANGE, T., AND KERRE, E. E. On the role of complete lattices in mathematical morphology: From tool to uncertainty model. *Information Sciences* (2010).
- [36] NDOUSSE, T. D. Fuzzy neural control of voice cells in ATM networks. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications SAC-12*, 9 (1994), 1488–1494.
- [37] PEDRYCZ, W., AND GOMIDE, F. *An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1998.

- [38] PEDRYCZ, W., AND GOMIDE, F. *Fuzzy Systems Engineering: Toward Human-Centric Computing*. Wiley-IEEE Press, New York, 2007.
- [39] PERFILIEVA, I., AND LEHMKE, S. Correct models of fuzzy if-then rules are continuous. *Fuzzy Sets and Systems* 157, 24 (2006 2006), 3188–3197.
- [40] RITTER, G. X. Recent developments in image algebra. In *Advances in Electronics and Electron Physics*, P. Hawkes, Ed., vol. 80. Academic Press, New York, NY, 1991, pp. 243–308.
- [41] RITTER, G. X., LI, D., AND WILSON, J. N. Image algebra and its relationship to neural networks. In *Technical Symposium Southeast on Optics, Electro-Optics, and Sensors* (Orlando, FL, Mar. 1989), Proceedings of SPIE.
- [42] RITTER, G. X., AND SUSSNER, P. An introduction to morphological neural networks. In *Proceedings of the 13th International Conference on Pattern Recognition* (Vienna, Austria, 1996), pp. 709–717.
- [43] RITTER, G. X., AND SUSSNER, P. Morphological perceptrons. In *ISAS'97, Intelligent Systems and Semiotics* (Gaithersburg, Maryland, 1997).
- [44] RITTER, G. X., SUSSNER, P., AND DE LEON, J. L. D. Morphological associative memories. *IEEE Transactions on Neural Networks* 9, 2 (1998), 281–293.
- [45] RITTER, G. X., AND WILSON, J. N. *Handbook of Computer Vision Algorithms in Image Algebra*, 2 ed. CRC Press, Boca Raton, 2001.
- [46] RITTER, G. X., WILSON, J. N., AND DAVIDSON, J. L. Image algebra: An overview. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 49, 3 (Mar. 1990), 297–331.
- [47] SAASTAMOINEN, K. On new general class of 3π - uninorms. *Proceedings of the IEEE International Conference on Computational Cybernetics* (2006).
- [48] SERRA, J. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London, 1982.
- [49] SERRA, J. *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2: Theoretical Advances*. Academic Press, New York, 1988.

- [50] STERNBERG, S. Grayscale morphology. *Computer Vision, Graphics and Image Processing* 35 (1986), 333–355.
- [51] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Grayscale morphological associative memories. *IEEE Transactions on Neural Networks* 17, 3 (May 2006), 559–570.
- [52] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Implicative fuzzy associative memories. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 14, 6 (2006), 793–807.
- [53] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Recall of patterns using morphological and certain fuzzy morphological associative memories. In *Proceedings of the IEEE World Conference on Computational Intelligence 2006* (Vancouver, Canada, 2006), pp. 209–216.
- [54] SUSSNER, P., AND VALLE, M. E. Fuzzy associative memories and their relationship to mathematical morphology. In *Handbook of Granular Computing*, W. Pedrycz, A. Skowron, and V. Kreinovich, Eds. John Wiley and Sons, Inc., New York, 2008, ch. 33, pp. 733–754.
- [55] T. J. TEYLER. *Memory: Electrophysiological analogs*. Academic Press, New York, NY, 1986.
- [56] VALLE, M. E. *Fundamentos e Aplicações de Memórias Associativas Morfológicas Nebulosas*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, Brasil, Fevereiro 2007.
- [57] VALLE, M. E., AND SUSSNER, P. Fuzzy morphological associative memories based on uninorms. In *Proceedings of the IEEE World Conference on Computational Intelligence 2008 (WCCI 2008)* (Hong Kong, China, June 2008), pp. 1582–1589.
- [58] VALLE, M. E., AND SUSSNER, P. A general framework for fuzzy morphological associative memories. *Fuzzy Sets and Systems* 159, 7 (2008), 747–768.
- [59] YAGER, R. R., AND RYBALOV, A. Uninorm aggregation operators. *Fuzzy Sets and Systems* 80, 1 (1996), 111–120.
- [60] YEUNG, D., AND CHOW, C. Parzen window network intrusion detectors. In *Int. Conf. Pattern Recognit.* (2002), pp. 385–388.
- [61] ZADEH, L. A. Fuzzy sets. *Information and Control* 8, 3 (1965), 338–353.

- [62] ZADEH, L. A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics SMC-3*, 1 (January 1973), 28–44.
- [63] ZHANG, B.-L., ZHANG, H., AND GE, S. S. Face recognition by applying wavelet sub-band representation and kernel associative memory. *IEEE Transactions on Neural Networks* 15, 1 (Jan. 2004), 166–177.
- [64] ZHANG, H., HUANG, W., HUANG, Z., AND ZHANG, B. A kernel autoassociator approach to pattern classification. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B* 35, 3 (June 2005), 593– 606.

APÊNDICE

As variáveis linguísticas são modeladas por conjuntos fuzzy sobre $\mathcal{F}(\mathbf{U})$ e $\mathcal{F}(\mathbf{V})$, respectivamente, e o sistema de regras fuzzy SE-ENTÃO é modelado na classe das relações fuzzy sobre $\mathcal{F}(\mathbf{U} \times \mathbf{V})$. Dizemos que uma relação fuzzy $R \in \mathcal{F}(\mathbf{U} \times \mathbf{V})$ é um modelo de (A.2) se ela determina uma função $f_R : \mathcal{F}(\mathbf{U}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{V})$ tal que

$$f_R(\mathbf{x})(v) = \bigvee_{u \in \mathbf{U}} [\mathbf{x}(u) \tau R(u, v)] = \mathbf{x} \circ R, \quad (\text{A.3})$$

onde τ representa uma t-norma. A expressão ao lado direito da equação (A.3) é conhecida como *regra composicional de inferência* [62].

Definição A.1. [39] Dizemos que uma relação fuzzy $R \in \mathcal{F}(\mathbf{U} \times \mathbf{V})$ é um modelo exato de (A.2) se

$$f_R(\mathbf{x}_k) = \mathbf{y}_k \quad \forall k = 1, \dots, q. \quad (\text{A.4})$$

Em outras palavras, R é um modelo exato de (A.2) se f_R *interpola* os dados $(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$.

Tal definição pode ser escrita através do seguinte sistema de equações relacionais fuzzy

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 \circ R &= \mathbf{y}_1 \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{x}_q \circ R &= \mathbf{y}_q, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

e portanto, R é um modelo exato do sistema de regras fuzzy SE-ENTÃO (A.2) se, e somente se, é solução do sistema (A.5).

É importante observar que a exatidão de um modelo significa que ele é “exato com respeito aos pares $(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$ ”. Se um modelo não é exato, diremos simplesmente que o modelo é inexacto.

A.2 CONTINUIDADE E MODELOS EXATOS DE REGRAS FUZZY SE-ENTÃO

Antes de fornecermos a definição de continuidade dos modelos de regras fuzzy SE-ENTÃO, definiremos a seguinte operação binária: Seja τ uma t-norma dilatativa. Se $a, b \in [0, 1]$, então definimos

$$(a \Leftrightarrow b) = [(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)], \quad (\text{A.6})$$

onde $\Rightarrow: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ é a implicação fuzzy adjunta a τ , também chamada *R-implicação associada à τ* .

Observe que $\Leftrightarrow: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ é reflexiva, simétrica e transitiva com respeito a t-norma τ .

Definição A.2. [39] *Considere um CLODUM $\mathcal{S} = ([0, 1], \vee, \wedge, \tau, \mathfrak{s})$. Dizemos que uma relação fuzzy $R \in \mathcal{F}(\mathbf{U} \times \mathbf{V})$ é um modelo contínuo de regras fuzzy SE-ENTÃO (com respeito aos dados fornecidos) na k -ésima regra fuzzy se, para cada conjunto fuzzy $\mathbf{x} \in \mathcal{F}(\mathbf{U})$, a seguinte desigualdade for válida:*

$$\bigwedge_{v \in \mathbf{V}} [\mathbf{y}_k(v) \Leftrightarrow (\mathbf{x} \circ R)(v)] = \bigwedge_{v \in \mathbf{V}} [\mathbf{y}_k(v) \Leftrightarrow f_R(\mathbf{x})(v)] \geq \bigwedge_{u \in \mathbf{U}} (\mathbf{x}_k(u) \Leftrightarrow \mathbf{x}(u)). \quad (\text{A.7})$$

Se a desigualdade (A.7) for válida para todo $k = 1, \dots, q$, dizemos simplesmente que a relação fuzzy R é um modelo contínuo de regras fuzzy SE-ENTÃO.

A propriedade de um modelo de regras fuzzy SE-ENTÃO ser exato e portanto, cumprir a equação (A.4), e ser contínuo são equivalentes. Antes de enunciarmos o teorema que corresponde a este fato, vejamos o seguinte Lema.

Lema A.3. [39] *Seja $R \in \mathcal{F}(\mathbf{U} \times \mathbf{V})$ uma relação fuzzy. Então, para algum $\mathbf{x} \in \mathcal{F}(\mathbf{U})$, para todo $k = 1, \dots, q$ e $v \in \mathbf{V}$, a seguinte desigualdade é válida*

$$(\mathbf{y}_k(v) \Leftrightarrow (\mathbf{x} \circ R)(v)) \geq \delta_{R,k}(v) \tau \bigwedge_{u \in \mathbf{U}} (\mathbf{x}_k(u) \Leftrightarrow \mathbf{x}(u)), \quad (\text{A.8})$$

onde

$$\delta_{R,k}(v) = [\mathbf{y}_k(v) \Leftrightarrow (\mathbf{x}_k \circ R)(v)].$$

O Lema A.3 estima um desvio (por equivalência) de um valor $\mathbf{x} \circ R$ a partir do respectivo conjunto fuzzy \mathbf{y}_k , presente ao lado direito das regras em (A.2). Tal estimativa, utiliza o desvio entre os conjuntos fuzzy \mathbf{x} e \mathbf{x}_k (novamente expressa através de equivalência) e o desvio $\delta_{R,k}(v)$. Assim, se R é uma solução da k -ésima equação do sistema (A.5), então, para todo $v \in \mathbf{V}$, $\delta_{R,k}(v) = 1$ e por (A.8), a relação fuzzy R é contínua com respeito a k -ésima equação relacional fuzzy. Caso contrário, R não será contínua (não será contínua na k -ésima equação).

Com essas informações, podemos enunciar o teorema principal dessa seção.

Teorema A.4. [39] *Uma relação fuzzy $R \in \mathcal{F}(\mathbf{U} \times \mathbf{V})$ é um modelo exato de regras fuzzy SE-ENTÃO se, e somente se, é um modelo contínuo dessas regras.*

O Teorema A.4 estabelece um critério de solubilidade de um sistema de equações relacionais fuzzy.

Corolário A.5. [39] *Uma relação fuzzy R fornece uma solução ao sistema de equações relacionais fuzzy (A.5) se, e somente se, satisfaz (A.7) para todo $k = 1, \dots, q$ e $\mathbf{x} \in \mathcal{F}(\mathbf{U})$.*