Universidade Estadual de Londrina

CAROLINA LUPIFIERIO ANTONIO

PROBLEMAS DE TRANSMISSÃO PARA MATERIAIS CONSTITUÍDOS POR TRÊS COMPONENTES

Londrina
2010

CAROLINA LUPIFIERIO ANTONIO

PROBLEMAS DE TRANSMISSÃO PARA MATERIAIS CONSTITUÍDOS POR TRÊS COMPONENTES

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em matemática Aplicada e computacional da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientadora: Prof. Dra. Luci Harue Fatori

Londrina
2010

Catalogação na publicação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

A635p Antonio, Carolina Lupifierio.
Problemas de transmissão para materiais constituídos por três componentes/ Carolina Lupifierio Antonio. – Londrina, 2010.
112f.

Orientador: Luci Harue Fatori.
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2010.
Inclui bibliografia.

1. Análise matemática – Teses. 2. Equações diferenciais parciais – Teses. 3. Sistemas de equações – Teses. I. Fatori, Luci Harue. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

CDU 517.95

CAROLINA LUPIFIERIO ANTONIO

PROBLEMAS DE TRANSMISSÃO PARA MATERIAIS CONSTITUÍDOS POR TRÊS COMPONENTES

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em matemática Aplicada e computacional da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dra. Luci Harue Fatori
UEL – Londrina – PR

Prof. Dr. Jaime Edilberto Muñoz Rivera
UFRJ – Petrópolis – RJ

Prof. Dr. Albo Carlos Cavalheiro
UEL – Londrina – PR

Londrina, 15 de março de 2010.

À minha família,

que sempre acreditou nos meus sonhos

e os tornaram possíveis.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha orientadora professora Luci Harue Fatori pelos seus ensinamentos, sua dedicação, e, principalmente, pelo amadurecimento profissional que conquistei trabalhando ao seu lado.

Agradeço a minha família e ao meu namorado José André, que sempre estiveram presentes, pelo amor, pelo incentivo e pelo apoio nos momentos de fraqueza.

Agradeço aos meus colegas de curso, principalmente ao Vinícius, pelas longas discussões que me ajudaram a resolver muitos problemas e sanar muitas dúvidas.

Agradeço também a todos os professores e funcionários que colaboraram com minha formação profissional, em especial, ao professor Albo Carlos Cavalheiro, um grande exemplo e que me incentivou a seguir a carreira acadêmica, e ao professor Jaime Rivera, pela base teórica e pela colaboração neste trabalho.

Por fim, agradeço a Fundação Araucária pelo apoio financeiro.

ANTONIO, Carolina Lupifierio. **Problemas de transmissão para materiais constituídos por três componentes**. 2010. 111 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

RESUMO

Neste trabalho estudamos a propagação da onda dissipativa sobre materiais mistos, mais especificamente, sobre materiais constituídos por três diferentes tipos de componentes. Inicialmente estudamos o problema de transmissão em um material formado por três componentes elásticas, sendo duas delas dissipativas com dissipação do tipo friccional. Em seguida, substituímos uma das dissipações por uma dissipação térmica. Em ambos os casos, a existência de solução é mostrada através do método de Galerkin e o decaimento exponencial da solução é obtido através de técnicas multiplicativas e multiplicadores convenientes.

Palavras-chave: Análise matemática. Equações diferenciais parciais. Sistemas de equações.

ANTONIO, Carolina Lupifierio. **Problems of transmission in a material consisting of three components**. 2010. 111 f. Dissertation (Master's Degree in Applied and Computational Mathematics) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

ABSTRACT

In this work we study the dissipative wave propagation over mixed materials, more specifically on materials consisting of three different types of components. Initially we study the problem of transmission in a material consisting of three elastic components where two of them are dissipative with dissipation of frictional type. In the following, we replace one of the dissipation for a thermal dissipation. In both cases, the existence of solution is showed using the Galerkin method, and the exponential decay of the solution is obtained by multiplicative techniques and appropriate multipliers.

Keywords: Mathematical analysis. Partial differential equations. Systems of equations.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A equação da onda modela vibrações de um corpo em um meio homogêneo, isotrópico e não-dissipativo, e é descrita matematicamente por

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, \quad \text{em} \ \ \Omega \times (0, \infty), \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e Δ é o operador laplaciano. A função $u = u(x,t)$ representa o deslocamento transversal no ponto x e no instante t. A constante c é a velocidade de propagação da onda e é dada por $c = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$, onde T é a tensão e ρ é a massa por unidade de tempo.

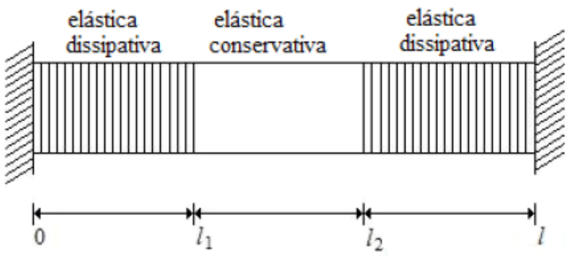
A equação (1) é um sistema conservativo, ou seja, sua energia total é constante para qualquer tempo. Fisicamente, isso significa que a equação da onda é um sistema oscilante.

Diversos autores introduziram diferentes tipos de mecanismos dissipativos na equação (1) para estabilizar as oscilações. Alguns exemplos desses mecanismos são as dissipações friccional, térmica e viscoelástica. No contexto da dissipação friccional podemos citar o trabalho de E. Zuazua [18], que obteve a taxa de decaimento da solução para uma larga classe de equação da onda com a dissipação. Em termoelasticidade, a dissipação produzida pela diferença térmica é suficientemente forte para produzir decaimento exponencial das soluções quando o tempo vai para o infinito, como podemos ver nos trabalhos de J.U. Kim [7] e J.E.M. Rivera [15]; enquanto que em termoviscoelasticidade e viscoelasticidade, a dissipação produzida pelo termo integral produz uma dissipação extra e neste caso, a taxa de decaimento das soluções depende da taxa de decaimento das funções de relaxação que caracterizam a memória do material, veja Z. Liu e S. Zheng [9].

Cabe salientar que nos trabalhos anteriores a dissipação age sobre o domínio inteiro. Assim, uma questão natural que surge é saber se o resultado permanece válido quando a dissipação é efetiva somente em uma parte do domínio. Este tipo de problema é conhecido na literatura como problema de transmissão e é caracterizado por um sistema de equações diferenciais parciais com coeficientes descontínuos. Nesta linha podemos citar o trabalho de L.H. Fatori, E. Lueders e J.E.M. Rivera [5], onde foi estudado o problema de transmissão para um sistema termoelástico fracamente hiperbólico, o trabalho de D. Andrade, L.H. Fatori e J.E.M. Rivera [2] para o problema de transmissão com dissipação na fronteira do tipo memória, e o trabalho de J.E.M. Rivera e H.P. Oquendo [17] para problemas de transmissão para cordas viscoelásticas.

Nos trabalhos citados acima, os resultados são obtidos para materiais formados por duas componentes. Trabalhos com materiais compostos por três ou mais componentes são raros na literatura. Entre eles podemos citar o trabalho de A. Marzocchi, J.E.M. Rivera e M.G. Naso [10], onde os autores mostraram resultados de estabilidade para um material formado por três componentes, duas com propriedades termoelásticas, enquanto a outra é indiferente a temperatura.

Nessa direção, o que nos propomos nesta dissertação é estudar a propagação da onda sobre um material formado por três componentes elásticas, onde inicialmente consideramos duas delas com dissipação friccional. Em seguida substituímos uma das dissipações por uma dissipação térmica. Mais especificamente, consideramos uma corda unidimensional definida no intervalo $[0,l] \subset \mathbb{R}$, com a seguinte constituição:



onde l_1, $l_2 \in (0,l)$, com $l_1 < l_2$. O sistema que modela a situação acima é dado por

$$u_{tt} - k_1 u_{xx} + a u_t = 0, \quad \text{em } (0,l_1) \times (0,\infty), \tag{2}$$

$$v_{tt} - k_2 v_{xx} = 0, \quad \text{em } (l_1,l_2) \times (0,\infty), \tag{3}$$

$$w_{tt} - k_3 w_{xx} + b w_t = 0, \quad \text{em } (l_2,l) \times (0,\infty), \tag{4}$$

onde k_1, k_2, k_3, a e b são constantes positivas. As funções $u = u(x,t)$, $v = v(x,t)$ e $w = w(x,t)$ estão sujeitas às condições de fronteira

$$u(0,t) = w(l,t) = 0, \quad t > 0, \tag{5}$$

às condições de compatibilidade

$$u(l_1,t) = v(l_1,t), \quad k_1 u_x(l_1,t) = k_2 v_x(l_1,t), \quad t>0, \tag{6}$$

$$v(l_2,t) = w(l_2,t), \quad k_2 v_x(l_2,t) = k_3 w_x(l_2,t), \quad t>0, \tag{7}$$

e às condições iniciais

$$u(x,0) = u^0(x), \quad u_t(x,0) = u^1(x), \quad x \in (0,l_1), \tag{8}$$

$$v(x,0) = v^0(x), \quad v_t(x,0) = v^1(x), \quad x \in (l_1,l_2), \tag{9}$$

$$w(x,0) = w^0(x), \quad w_t(x,0) = w^1(x), \quad x \in (l_2,l). \tag{10}$$

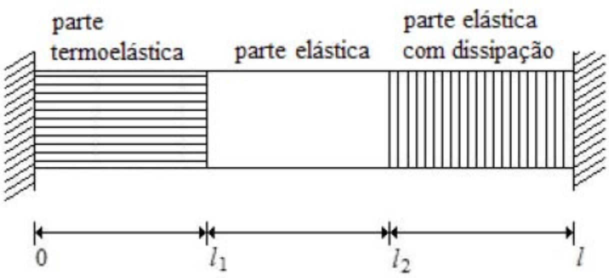
Na segunda situação, onde substituímos uma das dissipações por uma dissipação térmica, introduzimos a função real $\theta = \theta(x,t)$ na primeira componente, que representa a variação da temperatura no ponto x e no instante t. O sistema correspondente é dado por

$$u_{tt} - k_1 u_{xx} + a u_t + m\theta_x = 0, \quad \text{em } (0,l_1) \times (0,\infty), \tag{11}$$

$$\theta_t - \alpha\theta_{xx} + m u_{xt} = 0, \quad \text{em } (0,l_1) \times (0,\infty), \tag{12}$$

$$v_{tt} - k_2 v_{xx} = 0, \quad \text{em } (l_1,l_2) \times (0,\infty), \tag{13}$$

$$w_{tt} - k_3 w_{xx} + b w_t = 0, \quad \text{em } (l_2,l) \times (0,\infty), \tag{14}$$



onde k_1, k_2, k_3, m, a, b e α são constantes positivas. As funções $u = u(x,t)$, $\theta = \theta(x,t)$, $v = v(x,t)$ e $w = w(x,t)$ satisfazem as condições de fronteira

$$u(0,t) = w(l,t) = \theta(0,t) = 0, \quad t>0 \tag{15}$$

as condições de transmissão

$$u(l_1,t) = v(l_1,t), \quad k_1 u_x(l_1,t) - m\theta(l_1,t) = k_2 v_x(l_1,t), \quad t>0, \tag{16}$$

$$v(l_2,t) = w(l_2,t), \quad k_2 v_x(l_2,t) = k_3 w_x(l_2,t), \quad t>0, \tag{17}$$

$$\theta_x(l_1,t) = 0, \quad t>0, \tag{18}$$

e as condições iniciais

$$u(x,0) = u^0(x), \quad u_t(x,0) = u^1(x), \quad \theta(x,0) = \theta^0(x), \quad x \in (0, l_1), \tag{19}$$

$$v(x,0) = v^0(x), \quad v_t(x,0) = v^1(x), \quad x \in (l_1, l_2), \tag{20}$$

$$w(x,0) = w^0(x), \quad w_t(x,0) = w^1(x), \quad x \in (l_2, l). \tag{21}$$

Os modelos que estudamos podem ser aplicados em problemas na dinâmica estrutural. Muitas estruturas da engenharia civil, tais como pontes e componentes flexíveis em grandes estruturas espaciais, são modelados por equações de vigas. O problema de estabilizar tais estruturas pode ser resolvido com o uso de vigas interligadas em série com dispositivos de amortecimento, ou ainda, com a aplicação de variação de temperatura, através de mecanismos externos de resfriamento ou calefação.

Nossa contribuição é mostrar a existência e unicidade da solução bem como o decaimento exponencial da energia associada aos sistemas (2)-(10) e (11)-(21). A existência de solução será estabelecida pelo método de Galerkin, e o decaimento exponencial será obtido através de técnicas multiplicativas e multiplicadores convenientes.

Nosso estudo está organizado em três capítulos. No primeiro capítulo apresentamos as notações e alguns resultados que nos servem como base para o restante do trabalho. No segundo e no terceiro capítulo, mostramos a existência e unicidade de solução fraca e forte, e o decaimento exponencial da solução dos problemas de transmissão. Finalizamos com uma breve conclusão do nosso trabalho.

CAPÍTULO 1
PRELIMINARES

Neste capítulo serão fixadas as notações e enunciados as definições e resultados fundamentais utilizados ao longo do texto.

1.1 ESPAÇOS FUNCIONAIS

Nesta seção apresentaremos os espaços funcionais e a noção de derivada no sentido das distribuições. Para isso, considere Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$.

1.1.1 Espaço das Funções Testes

Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma aplicação. Denomina-se suporte de u em Ω o fecho do conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$ e representa-se por $supp(u)$, ou seja,

$$supp(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}.$$

Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções numéricas em Ω que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que possuem suporte compacto. Dizemos que uma sequência de funções $\{\phi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ é convergente para a função $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ se as seguintes condições são satisfeitas:

i) existe $K \subset \Omega$ compacto, tal que $supp(\phi_\nu - \phi) \subset K$, para todo ν,

ii) para cada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, a sequência $\{D^\alpha \phi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para $D^\alpha \phi$ uniformemente em K, onde D^α representa o operador derivação de ordem α definido por

$$D^\alpha = \frac{D^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}, \quad \text{com} \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ com esta noção de convergência é denominado espaço das funções testes e será representado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

1.1.2 Distribuições

Define-se distribuição sobre Ω a toda forma linear T sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínua no sentido da convergência definida sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial, o qual representa-se $\mathcal{D}'(\Omega)$. Neste espaço vetorial diz-se que uma sucessão $(T_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, quando a sequência numérica $(\langle T_\nu, \phi\rangle)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \phi\rangle$ em $\mathbb{R}$, para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Considere uma distribuição T sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T, é a forma linear $D^\alpha T$ definida por

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Quando $\alpha \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, denotaremos $D^\alpha T$ como $\dfrac{d^\alpha T}{dx^\alpha}$. Verifica-se que $D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω, e que a aplicação

$$\begin{aligned} D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) &\rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ T &\mapsto D^\alpha T \end{aligned}$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que se

$$\lim_{\nu\to\infty} T_\nu = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \text{ então } \lim_{\nu\to\infty} D^\alpha T_\nu = D^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

1.1.3 Os espaços $L^p(\Omega)$

Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $|u|^p$ é integrável a Lebesgue sobre Ω, e por $L^\infty(\Omega)$ o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que existe uma constante c com $|u(x)| \leq c$ quase sempre em Ω. Os espaços $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty,$$

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c\,;\, |u(x)| \leq c \text{ quase sempre em } \Omega\},$$

é um espaço de Banach. Em particular, o espaço $L^2(\Omega)$, cuja norma provém do produto interno

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx$$

é um espaço de Hilbert.

Denotaremos por $L^1_{loc}(\Omega)$ o espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $u \in L^1(K)$ para todo compacto K de Ω.

É possível mostrar que, ver [1],

i) $L^p(\Omega)$ é reflexivo para todo $1 < p < +\infty$;

ii) $L^p(\Omega)$ é separável para todo $1 \leq p < +\infty$.

Definição 1.1 (Imersão Contínua). *Sejam X e Y espaços de Hilbert, sendo X um subespaço de Y. Dizemos que X está continuamente imerso em Y, e denotaremos $X \hookrightarrow Y$, se existe uma constante positiva C tal que*

$$||u||_Y \leq ||u||_X, \quad \forall u \in X.$$

Além dos resultados acima, temos que

i) $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ e $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, para todo $1 \leq p < +\infty$;

ii) Se Ω é limitado e $1 \leq p < q \leq +\infty$, então $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$.

1.1.4 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$. Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ defini-se a norma de u por

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty,$$

$$||u||_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \text{ess} \, |D^\alpha u(x)|.$$

Os espaços normados $W^{m,p}(\Omega)$ são espaços de Banach, e são denominados espaços de Sobolev. Para o caso particular $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, representado por $H^m(\Omega)$, com o produto escalar dado por

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \ \forall u, \ v, \in H^m(\Omega),$$

e é denominado espaço de Sobolev de ordem m. Quando $m = 0$, $H^m(\Omega)$ identifica-se com $L^2(\Omega)$.

Define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Quando Ω é limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$, então a norma em $W_0^{m,p}(\Omega)$ dada por

$$||u||_{W_0^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| = m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

é equivalente à norma induzida por $W^{m,p}(\Omega)$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$, onde $1 \leq p < \infty$ e q é o conjugado de p, isto é, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Por $H^{-m}(\Omega)$ denota-se o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$.

1.1.5 Espaços Funcionais à valores Vetoriais

Considere X um espaço de Banach. Denotaremos por $\mathcal{D}(0, T; X)$ o espaço das funções vetoriais $\varphi : (0, T) \to X$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em $(0, T)$. Dizemos que $\varphi_\nu \to \varphi$ em $\mathcal{D}(0, T; X)$ se

i) existe $K \subset (0, T)$ compacto, tal que $supp(\phi_\nu - \phi) \subset K$, para todo ν,

ii) para cada $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{d^k}{dt^k}\varphi_\nu(t) \to \dfrac{d^k}{dt^k}\varphi(t)$ em X uniformemente em $t \in (0, T)$.

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X será denotado por $\mathcal{D}'(0,T;X)$ Neste espaço dizemos que uma sucessão $(S_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ converge para $S \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ quando $\langle S_\nu, \varphi\rangle \to \langle S, \varphi\rangle$ em X, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T)$.

Denotaremos por $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$ o espaço de Banach das funções $u : (0,T) \to X$, tais que u é mensurável e $||u(t)||_X$ pertença a $L^p(0,T)$. Em $L^p(0,T;X)$ defini-se a norma

$$||u||_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T ||u(t)||_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty,$$

$$||u||_{L^\infty(0,T;X)} = \inf\{c\,;\, ||u(t)||_X \leq c \text{ quase sempre em } \ (0,T)\}.$$

Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, então $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert munido com o produto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X \, dt.$$

O dual topológico de $L^p(0,T;X)$ é o espaço $L^q(0,T;X')$, sendo X' o dual topológico de X e q o conjugado de p.

Representaremos por $W^{m,p}(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$ o espaço de Banach

$$W^{m,p}(0,T;X) = \{u \in L^p(0,T;X)\,;\, u^{(j)} \in L^p(0,T;X),\, 0 \leq j \leq m\},$$

onde $u^{(j)}$ representa a j-ésima derivada no sentido das distribuições vetoriais, com a norma

$$||u||_{W^{m,p}(0,T;X)} = \left(\sum_{j=0}^m ||u^{(j)}||_{L^p(0,T;X)}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $W^{m,2}(0,T;X)$ é denotado por $H^m(0,T;X)$, que é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u,v)_{H^m(0,T;X)} = \sum_{j=0}^m (u^{(j)}, v^{(j)})_{L^2(0,T;X)}.$$

Por $H_0^m(0,T;X)$ representaremos $\overline{\mathcal{D}(0,T;X)}^{H^m(0,T;X)}$. O dual topológico de $H_0^m(0,T;X)$ será representado por $H^{-1}(0,T;X')$.

Representaremos por $C^0([0,T];X)$ o espaço das funções contínuas $u : [0,T] \to X$, tais que $||u(t)||_X$ pertença a $C^0([0,T])$, que munido com a norma

$$||u||_{C^0([0,T];X)} = \max_{0\leq t\leq T} ||u(t)||_X,$$

é um espaço de Banach. Denotaremos por $C^m([0,T];X)$ o espaço de Banach das funções $u : [0,T] \to X$, tais que $\left|\left|\frac{d^k u}{dt^k}(t)\right|\right|_X$ pertença a $C^0([0,T])$ para $0 \leq k \leq m$. Em $C^m([0,T];X)$ defini-se a norma

$$||u||_{C^m([0,T];X)} = ||u||_{C^0([0,T];X)} + \left|\left|\frac{du}{dt}\right|\right|_{C^0([0,T];X)} + \ldots + \left|\left|\frac{d^m u}{dt^m}\right|\right|_{C^0([0,T];X)}.$$

1.2 Resultados Auxiliares

Nesta seção enunciaremos os resultados necessários ao nosso trabalho, cujas demonstrações podem ser encontradas nas referências citadas.

Proposição 1.2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Seja H um espaço vetorial munido do produto interno $(\cdot,\cdot)$. Então, dadas u, $v \in H$, temos que*

$$|(u,v)| \leq ||u||\,||v||,$$

onde $||\cdot||^2 = (\cdot,\cdot)$.

Demonstração: Ver [8]. ∎

Proposição 1.3 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam $1 < p, q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $a, b > 0$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Ver [3]. ∎

Proposição 1.4 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$, e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $uv \in L^1(\Omega)$, e temos a desigualdade*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq ||u||_{L^p(\Omega)}||v||_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [3]. ∎

Proposição 1.5 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg). *Sejam $1 \leq q \leq p \leq \infty$ e $r > 1$. Então*

$$||u||_{L^p(a,b)} \leq ||u||_{L^q(a,b)}^{1-\alpha}||u'||_{L^r(a,b)}^{\alpha}$$

se o intervalo $b - a = \infty$. Quando $b - a$ é finito, temos

$$||u||_{L^p(a,b)} \leq ||u||_{L^q(a,b)}^{1-\alpha}||u||_{W^{1,r}(a,b)}^{\alpha},$$

onde

$$\alpha = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r}}.$$

Demonstração: Ver [16]. ■

Proposição 1.6 (Desigualdade de Poincaré). *Suponhamos que Ω seja um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Então para todo $1 \leq p < \infty$, existe uma constante c_p, tal que*

$$||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq c_p||\nabla u||_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Observação 1.7. *A desigualdade de Poincaré também é válida para funções que se anulam em apenas uma parte da fronteira $\partial\Omega$ e também para as funções que tem média nula, isto é, $\dfrac{1}{med(\Omega)}\displaystyle\int_\Omega u\,dx = 0$ (ver [16]).*

Lema 1.8 (Lema de Gronwall). *Sejam $\varphi \in L^\infty(0,T)$ e $\beta \in L^1(0,T)$ tais que $\beta > 0$, $\varphi \geq 0$ e $K \geq 0$ uma constante. Se*

$$\varphi(t) \leq K + \int_0^t \beta(s)\varphi(s)\,ds, \quad \forall t \in [0,T],$$

então temos

$$\varphi(t) \leq Ke^{\int_0^t \beta(s)\,ds}, \quad \forall t \in (0,t).$$

Demonstração: Ver [16]. ■

Lema 1.9 (Du Bois Raymond). *Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

então $u = 0$ quase sempre em Ω.

Demonstração: Ver [14]. ■

Proposição 1.10. *Sejam* Ω *um aberto limitado de* $\mathbb{R}^n$ *e* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *com* $p > n$. *Então existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} \leq C||u||_{W^{1,p}(\Omega)},$$

isto é, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Demonstração: Ver [16]. ■

Proposição 1.11 (Imersão de Sobolev). *Seja* Ω *um subconjunto aberto do* $\mathbb{R}^n$. *Então*

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\bar{\Omega}), \text{ se } m > \frac{n}{2} + k.$$

Demonstração: Ver [13]. ■

Proposição 1.12. *Seja* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, *tal que* $u_n \to u$ *em* $L^p_{loc}(\Omega)$, *então* $u_n \to u$ *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Demonstração: Ver [14]. ■

Definição 1.13. *Seja* E *um espaço de Banach e considere* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão sobre* E. *Dizemos que* x_n *converge fraco para* x *e denotamos* $x_n \rightharpoonup x$ *em* E, *quando* $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, *para todo* $f \in E'$.

Proposição 1.14. *Sejam* E *um espaço de Banach e* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* E. *Então se verifica:*

i) $x_n \rightharpoonup x$ *em* E, *se, e somente se,* $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall f \in E'$.

ii) Se $x_n \to x$ *em* E, *então* $x_n \rightharpoonup x$ *em* E.

iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ *em* E, *então* $||x_n||_E$ *é limitada e* $||x||_E \leq \liminf ||x_n||_E$.

iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ *em* E *e* $f_n \to f$ *em* E', *então* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver proposição III.5 em [3]. ■

Definição 1.15. *Sejam E um espaço de Banach e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência sobre E'. Dizemos que f_n converge fraco estrela para f e denotamos $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E', quando $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, para todo $x \in E$.*

Proposição 1.16. *Sejam E um espaço de Banach e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E'. Então se verifica:*

i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E, *se, e somente se,* $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall x \in E$.

ii) *Se* $f_n \to f$ *em* E', *então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E'.

iii) *Se* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E', *então* $||f_n||_{E'}$ *é limitada e* $||f||_{E'} \leq \liminf ||f_n||_{E'}$.

iv) *Se* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E' *e* $x_n \to x$ *em* E, *então* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver proposição III.12 em [3]. ■

Teorema 1.17. *Seja E um espaço de Banach reflexivo e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E. Então existem uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $x \in E$ tais que $x_{n_k} \rightharpoonup x$.*

Demonstração: Corolário III.27 em [3]. ■

Teorema 1.18. *Seja E um espaço de Banach separável e seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E'. Então existem uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $f \in E'$ tais que $f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f$.*

Demonstração: Corolário III.26 em [3]. ■

Lema 1.19 (Lema de Kim). *Denotemos por (w^k) uma sequência de funções satisfazendo*

$$\begin{aligned} w^k \overset{*}{\rightharpoonup} w \quad &em \quad L^\infty(0,T;H^\beta(\Omega)),\\ w_t^k \rightharpoonup w_t \quad &em \quad L^2(0,T;H^\theta(\Omega)), \end{aligned}$$

quando $k \to \infty$, para $\theta < \beta$. Então, temos que

$$w^k \to w \text{ em } C([0,T];H^r(\Omega)),$$

para todo $r < \beta$.

Demonstração: Ver [6]. ∎

A seguir enunciaremos e demonstraremos dois resultados relacionados à equação da onda que serão utilizados no capítulo a seguir.

Lema 1.20. *Sejam* $z^0 \in H^2(0,l)$, $z^1 \in H^1(0,l)$ *e* $z = z(x,t)$ *uma função definida em* $(0,l) \times (0,T)$ *solução do problema*

$$\begin{cases} z_{tt} - kz_{xx} = 0, \\ z(0,t) = z(l,t) = 0, \\ z_x(0,t) = z_x(l,t) = 0, \\ z(x,0) = z^0(x), \ z_t(x,0) = z^1(x). \end{cases} \tag{1.1}$$

Então $z = 0$ *quase sempre em* $(0,l) \times (0,T)$.

Demonstração: A existência e unicidade da solução são dadas por [11]. Agora, se $z = z(x,t)$ é solução de (1.1), então multiplicando $(1.1)_1$ por z_t e integrando de 0 a l, temos que

$$\int_0^l z_{tt}z_t - kz_{xx}z_t dx = 0,$$

e, assim, aplicando integração por partes,

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_0^l |z_t|^2 + k|z_x|^2 dx\right\} = kz_x(l,t)z_t(l,t) - kz_x(0,t)z_t(0,t) = 0.$$

Logo, definindo $E(t,z) = \frac{1}{2}\int_0^l |z_t|^2 + k|z_x|^2 dx$, obtemos

$$\frac{d}{dt}E(t,z) = 0,$$

e assim, integrando de 0 a t, temos que $E(t,z) = E(0,z)$ para cada t. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\{\int_0^l xz_tz_x dx\right\} &= \int_0^l xz_{tt}z_x dx + \int_0^l xz_tz_{xt} dx \\ &= k\int_0^l xz_{xx}z_x dx + \int_0^l xz_tz_{xt} dx \\ &= \frac{k}{2}\int_0^l x\frac{d}{dx}|z_x|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l x\frac{d}{dx}|z_t|^2 dx \\ &= \frac{k}{2}\left[x|z_x|^2\Big|_0^l - \int_0^l |z_x|^2 dx\right] + \frac{1}{2}\left[x|z_t|^2\Big|_0^l - \int_0^l |z_t|^2 dx\right] \\ &= -\frac{k}{2}\int_0^l |z_x|^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^l |z_t|^2 dx \\ &= -E(t,z). \end{aligned}$$

Logo, integrando de 0 a T, temos que

$$\begin{aligned} 0 = \int_0^T E(t,z)dt - \left[\int_0^l x z_t z_x dx\right]_0^T &\geq \int_0^T E(t,z)dt - C_0(E(T,z)+E(0,z)) \\ &= (T-2C_0)E(0,z) = (T-2C_0)E(T,z). \end{aligned}$$

Logo, para T suficientemente grande, temos que $E(t,z)=0$ e, portanto, $z_t=0$ e $z_x=0$ q.s. em $(0,l)\times(0,T)$. Logo, z é constante q.s., e como $z(0,t)=z(l,t)=0$, segue que $z=0$ quase sempre em $(0,l)\times(0,T)$. ■

Lema 1.21 (Argumento por Densidade). *Sejam $z^0 \in H_0^1(0,l)$, $z^1 \in L^2(0,l)$ e $z:(0,l)\times(0,T)\to\mathbb{R}$ a solução do problema*

$$\begin{cases} z_{tt} - k z_{xx} = 0, \\ z(0,t) = z(l,t) = 0, \\ z_x(0,t) = z_x(l,t) = 0, \\ z(x,0) = z^0,\ z_t(x,0) = z^1. \end{cases} \tag{1.2}$$

Então, $z=0$ quase sempre em $(0,l)\times(0,T)$.

Demonstração: Basta provar que a solução de (1.1) é o limite de uma sequência de soluções do problema (1.2) com dados iniciais com a regularidade do lema anterior.

De fato, sejam $z^0\in H_0^1(0,l)$ e $z^1\in L^2(0,l)$. Considere as aproximações de z^0 e z^1:

$$\left|\begin{array}{l} z_m^0 \in H_0^1(0,l)\cap H^2(0,l) \text{ tal que } z_m^0 \to z^0 \text{ em } H_0^1(0,l), \\ z_m^1 \in H_0^1(0,l) \text{ tal que } z_m^1 \to z^1 \text{ em } L^2(0,l). \end{array}\right. \tag{1.3}$$

Tomando z_m^0 e z_m^1 como dados, existe uma única função z^m satisfazendo

$$\left|\begin{array}{l} z^m \in L^\infty(0,T;H_0^1(0,l)\cap H^2(0,l)), \\ z_t^m \in L^\infty(0,T;H_0^1(0,l)), \\ z_{tt}^m \in L^\infty(0,T;L^2(0,l)), \\ \displaystyle\int_0^l z_{tt}^m \varphi\, dx + k\int_0^l z_x^m \varphi_x\, dx = 0 \text{ em } (0,T),\ \forall \varphi\in H_0^1(0,l), \\ z^m(x,0) = z_m^0(x),\ z_t^m(x,0) = z_m^1(x). \end{array}\right. \tag{1.4}$$

ver [11]. Tomando $\varphi = z_t^m$ em $(1.4)_4$, obtemos

$$\int_0^l z_{tt}^m z_t^m\, dx + k\int_0^l z_x^m z_{xt}^m\, dx = 0,$$

e, portanto,
$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_0^l |z_t^m|^2\,dx + k\int_0^l |z_x^m|^2\,dx\right\} = 0.$$
Assim, integrando de 0 a t, $t \in [0,T]$, temos
$$E^m(t) = E^m(0),$$
onde $E^m(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^l |z_t^m|^2\,dx + k\int_0^l |z_x^m|^2\,dx$. Logo, $E^m(t)$ é limitada e, portanto, existe uma subsequência de z^m tal que
$$z^m \overset{*}{\rightharpoonup} z \in L^\infty(0,T;H_0^1(0,l)) \tag{1.5}$$
$$z_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} z_t \in L^\infty(0,T;L^2(0,l)). \tag{1.6}$$

De $(1.4)_4$, obtemos
$$\int_0^T\int_0^l z_{tt}^m\varphi\theta\,dxdt + k\int_0^T\int_0^l z_x^m\varphi_x\theta\,dxdt = 0,\ \forall\theta\in\mathcal{D}(0,T).$$
Integrando por partes,
$$-\int_0^l\int_0^T z_t^m\varphi\theta'\,dtdx + k\int_0^T\int_0^l z_x^m\varphi_x\theta\,dxdt = 0.$$
De (1.5) e (1.6), segue que
$$-\int_0^T\int_0^l z_t\varphi\theta'\,dxdt + k\int_0^T\int_0^l z_x\varphi_x\theta\,dxdt = 0.$$
Logo, aplicando a definição de derivada no sentido das distribuições e o lema de Du Bois Raymond, concluímos que
$$\frac{d}{dt}\int_0^l z_t\varphi\,dx + k\int_0^l z_x\varphi_x\,dx = 0,\ \text{ em }\ \mathcal{D}'(0,T),\ \forall\varphi\in H_0^1(0,l).$$
Assim, obtemos uma função z tal que
$$\left|\begin{array}{l} z\in L^\infty(0,T;H_0^1(0,l)) \\ z_t\in L^\infty(0,T;L^2(0,l)) \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^l z_t\varphi\,dx + k\int_0^l z_x\varphi_x\,dx = 0,\ \text{ em }\ \mathcal{D}'(0,T),\ \forall\varphi\in H_0^1(0,l). \end{array}\right. \tag{1.7}$$
Provaremos agora os dados iniciais e a unicidade.

Primeiramente, provaremos que $z(0) = z^0$. De (1.5), temos que
$$\int_0^T\int_0^l z^m\varphi\theta'\,dxdt \to \int_0^T\int_0^l z\varphi\theta'\,dxdt,$$

para toda $\theta \in C^1([0,T])$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. De (1.6), temos

$$\int_0^T \int_0^l z_t^m \varphi\theta \, dxdt \to \int_0^T \int_0^l z_t \varphi\theta \, dxdt,$$

para $\theta \in C^1([0,T])$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Assim, obtemos

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \int_0^l z^m \varphi\theta \, dxdt \to \int_0^T \frac{d}{dt} \int_0^l z \varphi\theta \, dxdt,$$

o que implica

$$\int_0^l z^m(0)\varphi \, dx \to \int_0^l z(0)\varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(0,l).$$

Por hipótese,

$$\int_0^l z_m^0 \varphi \, dx \to \int_0^l z^0 \varphi \, dx.$$

Logo, pela unicidade do limite, segue que $z(0) = z^0$.

Provaremos agora que $z_t(0) = z^1$. De fato, seja $\delta > 0$ e considere a função θ_δ definida por

$$\theta_\delta(t) = \begin{cases} -\dfrac{t}{\delta} + 1, & \text{se } 0 \leq t \leq \delta, \\ 0, & \text{se } \delta < t \leq T. \end{cases} \tag{1.8}$$

que pertence a $H^1(0,T)$. Multiplicando a equação $(1.4)_4$ por $\theta_\delta(t)$ e integrando de 0 a T, obtemos

$$\int_0^T \int_0^l z_{tt}^m \varphi\theta_\delta \, dxdt + k_2 \int_0^T \int_0^l z_x^m \varphi_x \theta_\delta \, dxdt = 0.$$

Integrando por partes, resulta que

$$\int_0^l \left[z_t^m \varphi\theta_\delta \Big|_0^T - \int_0^T z_t^m \varphi\theta_\delta' \, dt \right] dx + k_2 \int_0^T \int_0^l z_x^m \varphi_x \theta_\delta \, dxdt = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$-\int_0^l z_t^m(0)\varphi \, dx + \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \int_0^l z_t^m \varphi \, dxdt + k_2 \int_0^T \int_0^l z_x^m \varphi_x \theta_\delta \, dxdt = 0.$$

Usando (1.5) e (1.6), e fazendo $m \to \infty$, temos que

$$-\int_0^l z^1 \varphi \, dx + \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \int_0^l z_t \varphi \, dxdt + k_2 \int_0^T \int_0^l z_x \varphi_x \theta_\delta \, dxdt = 0.$$

Agora fazendo $\delta \to 0$, concluímos que

$$-\int_0^l z^1 \varphi \, dx + \int_0^l z_t(0)\varphi \, dx = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(0,l),$$

e, portanto, $z^1 = z_t(0)$.

Para provarmos a unicidade, considere g e h duas funções satisfazendo (1.7). Então, $f = g - h$ é uma função satisfazendo

$$\begin{cases} f_{tt} - kf_{xx} = 0 \ \text{ em } \ L^1(0,T;H^{-1}(0,l)) \\ f(0,t) = f(l,t) = 0 \\ f(x,0) = f_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

Para $0 < s < T$, definimos

$$\psi(t) = \begin{cases} -\displaystyle\int_t^s f(\sigma)\,d\sigma, & \text{se } \ 0 < t < s, \\ 0, & \text{se } \ s \leq t < T. \end{cases}$$

A função $\psi \in L^\infty(0,T;H_0^1(0,l))$, então faz sentido

$$\int_0^t \langle f_{tt} - kf_{xx}, \psi\rangle \ dt = 0.$$

Considere

$$f^1(\xi) = \int_0^\xi f(\sigma)\,d\sigma.$$

Então,

$$\psi(t) = f^1(t) - f^1(s) \quad \text{e} \quad \psi_t(t) = f_t^1(t) = f(t).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^s \langle f_{tt}, \psi\rangle \ dt \quad &= \int_0^s \frac{d}{dt}\int_0^l f_t\psi\,dxdt - \int_0^s\int_0^l f_t\psi'\,dxdt \\ &= \int_0^l f_t(s)\psi(s)\,dx - \int_0^l f_t(0)\psi(0)\,dx - \int_0^s\int_0^l f_t\psi'\,dxdt \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}\int_0^l |f|^2\,dxdt = -\frac{1}{2}\int_0^l |f(s)|^2\,dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 \quad &= \int_0^T \langle f_{tt} - kf_{xx}, \psi\rangle \ dt = \int_0^s \langle f_{tt}, \psi\rangle \ dt + k\int_0^s\int_0^l f_x\psi_x\,dxdt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^l |f(s)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}\int_0^l |\psi_x|^2\,dxdt \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^l |f(s)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^l |\psi_x(s)|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_0^l |\psi_x(0)|^2\,dx \end{aligned}$$

Assim, como $\displaystyle\int_0^l |\psi_x(s)|^2\, dx = 0$,

$$\int_0^l |f(s)|^2\, dx + \int_0^l |\psi_x(0)|^2\, dx = 0,$$

e, portanto, temos que

$$\int_0^l |f(s)|^2\, dx = 0.$$

Então, segue que $f(x,s) = 0$ quase sempre em $(0,l)$, para todo $s \in [0,T]$, concluindo assim nossa demonstração.

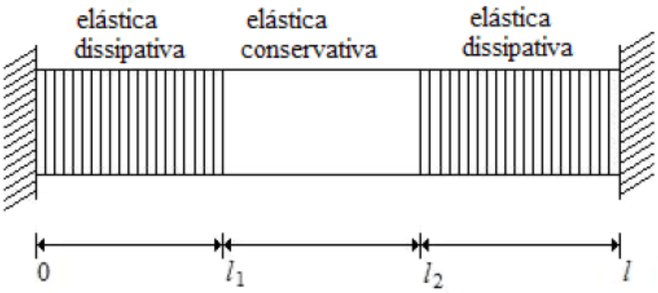
$\blacksquare$

CAPÍTULO 2

PROBLEMA DE TRANSMISSÃO PARA O SISTEMA ELÁSTICO

Neste capítulo mostraremos que a solução do problema que modela as vibrações de um material elástico formado por três componentes, duas das quais com dissipação friccional, decai exponencialmente para zero quando o tempo vai para o infinito.

Considere um material elástico unidimensional definido no intervalo $[0,l] \subset \mathbb{R}$, e sejam $l_1, l_2 \in (0,l)$ com $l_1 < l_2$. Assumimos que o material é conservativo sobre (l_1,l_2), e dissipativo sobre $(0,l_1)$ e sobre (l_2,l).



O sistema que modela a situação acima é dado por

$$u_{tt} - k_1 u_{xx} + a u_t = 0, \quad x \in (0,l_1),\ t > 0, \tag{2.1}$$

$$v_{tt} - k_2 v_{xx} = 0, \quad x \in (l_1,l_2),\ t > 0, \tag{2.2}$$

$$w_{tt} - k_3 w_{xx} + b w_t = 0, \quad x \in (l_2,l),\ t > 0, \tag{2.3}$$

onde k_1, k_2, k_3, a e b são números reais positivos. As funções $u = u(x,t)$, $v = v(x,t)$ e $w = w(x,t)$ satisfazem as condições de fronteira

$$u(0,t) = w(l,t) = 0, \quad t > 0, \tag{2.4}$$

as condições de transmissão

$$u(l_1,t) = v(l_1,t), \quad k_1 u_x(l_1,t) = k_2 v_x(l_1,t), \quad t > 0, \tag{2.5}$$

$$v(l_2,t) = w(l_2,t), \quad k_2 v_x(l_2,t) = k_3 w_x(l_2,t), \quad t > 0, \tag{2.6}$$

e as condições iniciais

$$u(x,0) = u^0(x), \quad u_t(x,0) = u^1(x), \quad x \in (0,l_1), \tag{2.7}$$

$$v(x,0) = v^0(x), \quad v_t(x,0) = v^1(x), \quad x \in (l_1,l_2), \tag{2.8}$$

$$w(x,0) = w^0(x), \quad w_t(x,0) = w^1(x), \quad x \in (l_2,l). \tag{2.9}$$

Denotaremos por Ω o conjunto $(0,l_1) \cup (l_1,l_2) \cup (l_2,l)$, e por $\mathcal{L}^2(\Omega)$, $\mathcal{H}^1(\Omega)$, $\mathcal{H}^2(\Omega)$ e $\mathcal{V}$ os espaços

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^2(\Omega) &= L^2(0,l_1) \times L^2(l_1,l_2) \times L^2(l_2,l),\\
\mathcal{H}^1(\Omega) &= H^1(0,l_1) \times H^1(l_1,l_2) \times H^1(l_2,l),\\
\mathcal{H}^2(\Omega) &= H^2(0,l_1) \times H^2(l_1,l_2) \times H^2(l_2,l),\\
\mathcal{V} &= \{(u,v,w) \in \mathcal{H}^1(\Omega) : u(0) = w(l) = 0,\ u(l_1) = v(l_1),\ v(l_2) = w(l_2)\}.
\end{aligned}$$

Note que $\mathcal{V}$ juntamente com a norma

$$||(u,v,w)||^2_{\mathcal{V}} := \int_0^{l_1} |u_x|^2\,dx + \int_{l_1}^{l_2} (|v|^2 + |v_x|^2)\,dx + \int_{l_2}^{l} |w_x|^2\,dx$$

é um espaço de Hilbert.

Por E_1, E_2 e E_3 denotaremos as energias associadas a cada equação:

$$\begin{aligned}
E_1(t;u) &= \frac{1}{2}\int_0^{l_1} |u_t|^2 + k_1|u_x|^2 dx,\\
E_2(t;v) &= \frac{1}{2}\int_{l_1}^{l_2} |v_t|^2 + k_2|v_x|^2 dx,\\
E_3(t;w) &= \frac{1}{2}\int_{l_2}^{l} |w_t|^2 + k_3|w_x|^2 dx,
\end{aligned}$$

e finalmente por

$$E(t;u,v,w) = E_1(t;u) + E_2(t;v) + E_3(t;w). \tag{2.10}$$

Observe que introduzindo a notação

$$z(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & \text{se } x \in (0,l_1)\\ v(x,t), & \text{se } x \in (l_1,l_2)\\ w(x,t), & \text{se } x \in (l_2,l) \end{cases}$$

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & \text{se } x \in (0, l_1) \\ k_2, & \text{se } x \in (l_1, l_2) \\ k_3, & \text{se } x \in (l_2, l) \end{cases}$$

$$c(x) = \begin{cases} a, & \text{se } x \in (0, l_1) \\ 0, & \text{se } x \in (l_1, l_2) \\ b, & \text{se } x \in (l_2, l) \end{cases}$$

o sistema (2.1)-(2.9) pode ser escrito como

$$z_{tt} - k(x)z_{xx} + c(x)z_t = 0 \quad \text{em } (0, l) \times (0, \infty)$$

com condição de fronteira

$$z(0, t) = z(l, t) = 0, \quad t > 0,$$

e condição inicial

$$z(x, 0) = z^0(x), \quad z_t(x, 0) = z^1(x), \quad x \in (0, l).$$

Assim, o sistema (2.1)-(2.9) se torna equivalente ao problema da equação da onda dissipativa com coeficientes descontínuos, como descrito acima.

2.1 Existência de Solução

Inicialmente definiremos o que se entende por solução fraca do problema (2.1)-(2.9). Para isso, sejam $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ e $(\phi, \psi, \varphi) \in \mathcal{V}$. Assim, multiplicando a equação (2.1) por $\phi\theta$, a equação (2.2) por $\psi\theta$ e a equação (2.3) por $\varphi\theta$, e integrando sobre $(0, l_1) \times (0, T)$, $(l_1, l_2) \times (0, T)$ e $(l_2, l) \times (0, T)$, respectivamente, obtemos

$$\int_0^T \int_0^{l_1} (u_{tt} - k_1 u_{xx} + a u_t)\phi\theta \, dxdt + \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} (v_{tt} - k_2 v_{xx})\psi\theta \, dxdt$$
$$+ \int_0^T \int_{l_2}^{l} (w_{tt} - k_3 w_{xx} + b w_t)\varphi\theta \, dxdt = 0.$$

Logo, integrando por partes, temos

$$
\begin{aligned}
-\int_0^{l_1}\int_0^T u_t\theta'\phi\,dtdx + k_1\int_0^T\int_0^{l_1} u_x\phi_x\theta\,dxdt + a\int_0^T\int_0^{l_1} u_t\phi\theta\,dxdt \\
-\int_{l_1}^{l_2}\int_0^T v_t\theta'\psi\,dtdx + k_2\int_0^T\int_{l_1}^{l_2} v_x\psi_x\theta\,dxdt \\
-\int_{l_2}^{l}\int_0^T w_t\theta'\varphi\,dtdx + k_3\int_0^T\int_{l_2}^{l} w_x\varphi_x\theta\,dxdt + b\int_0^T\int_{l_2}^{l} w_t\varphi\theta\,dxdt = 0,
\end{aligned}
$$

ou ainda,

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\left(\frac{d}{dt}\int_0^{l_1} u_t\phi\,dx + k_1\int_0^{l_1} u_x\phi_x\,dx + a\int_0^{l_1} u_t\phi\,dx\right)\theta\,dt \\
+\int_0^T\left(\frac{d}{dt}\int_{l_1}^{l_2} v_t\psi\,dx + k_2\int_{l_1}^{l_2} v_x\psi_x\,dx\right)\theta\,dt \\
+\int_0^T\left(\frac{d}{dt}\int_{l_2}^{l} w_t\varphi\,dx + k_3\int_{l_2}^{l} w_x\varphi_x\,dx + b\int_{l_2}^{l} w_t\varphi\,dx\right)\theta\,dt = 0,
\end{aligned}
$$

para toda $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Portanto, pelo lema de Du Bois Raymond, concluímos que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_0^{l_1} u_t\phi\,dx + k_1\int_0^{l_1} u_x\phi_x\,dx + a\int_0^{l_1} u_t\phi\,dx + \frac{d}{dt}\int_{l_1}^{l_2} v_t\psi\,dx \\
+k_2\int_{l_1}^{l_2} v_x\psi_x\,dx + \frac{d}{dt}\int_{l_2}^{l} w_t\varphi\,dx + k_3\int_{l_2}^{l} w_x\varphi_x\,dx + b\int_{l_2}^{l} w_t\varphi\,dx = 0,
\end{aligned}
$$

igualdade no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$, para toda $(\phi,\psi,\varphi) \in \mathcal{V}$.

A terna (u,v,w) que satisfaz a equação acima é dita solução do sistema (2.1)-(2.9).

Teorema 2.1. *Considere* $(u^0,v^0,w^0) \in \mathcal{V}$ *e* $(u^1,v^1,w^1) \in \mathcal{L}^2(\Omega)$*, satisfazendo as condições de transmissão. Então, existe uma única solução* (u,v,w) *do sistema* $(2.1)-(2.9)$ *satisfazendo*

$$
\begin{aligned}
&(u,v,w) \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}),\\
&(u_t,v_t,w_t) \in L^\infty(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega)).
\end{aligned}
$$

Além disso, se $(u^0,v^0,w^0) \in \mathcal{H}^2(\Omega)\cap\mathcal{V}$ *e* $(u^1,v^1,w^1) \in \mathcal{V}$*, então a solução satisfaz*

$$
\begin{aligned}
&(u,v,w) \in L^\infty(0,T;\mathcal{H}^2(\Omega)\cap\mathcal{V}),\\
&(u_t,v_t,w_t) \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}),\\
&(u_{tt},v_{tt},w_{tt}) \in L^\infty(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega)).
\end{aligned}
$$

Neste caso, dizemos que (u, v, w) é uma solução forte.

Demonstração: O teorema acima é provado através do método de Galerkin.

Considere $\{(\phi^i, \psi^i, \varphi^i),\ i \in \mathbb{N}\}$ uma base de $\mathcal{V}$ e denote por V_m o espaço gerado pelos m primeiros elementos da base. Mostraremos que existe uma única solução

$$(u^m(t), v^m(t), w^m(t)) = \sum_{j=1}^{m} h_{j,m}(t)(\phi^j, \psi^j, \varphi^j)$$

do problema aproximado

$$\int_0^{l_1} u_{tt}^m \phi^j \, dx + k_1 \int_0^{l_1} u_x^m \phi_x^j \, dx + a \int_0^{l_1} u_t^m \phi^j \, dx + \int_{l_1}^{l_2} v_{tt}^m \psi^j \, dx + k_2 \int_{l_1}^{l_2} v_x^m \psi_x^j \, dx$$
$$+ \int_{l_2}^{l} w_{tt}^m \varphi^j \, dx + k_3 \int_{l_2}^{l} w_x^m \varphi_x^j \, dx + b \int_{l_2}^{l} w_t^m \varphi^j \, dx = 0 \qquad (2.11)$$

$j = 1, ..., m$, com os dados iniciais

$$(u^m(0), v^m(0), w^m(0)) = (u_m^0, v_m^0, w_m^0),$$
$$(u_t^m(0), v_t^m(0), w_t^m(0)) = (u_m^1, v_m^1, w_m^1),$$

tais que

$$(u_m^0, v_m^0, w_m^0) \to (u^0, v^0, w^0) \quad em \quad \mathcal{V},$$
$$(u_m^1, v_m^1, w_m^1) \to (u^1, v^1, w^1) \quad em \quad \mathcal{L}^2(\Omega).$$

Substituindo $(u^m(t), v^m(t), w^m(t))$ na equação (2.11) obtemos

$$\sum_{i=1}^{m} h''_{i,m}(t)(\phi^i, \phi^j) + k_1 \sum_{i=1}^{m} h_{i,m}(t)(\phi_x^i, \phi_x^j) + a \sum_{i=1}^{m} h'_{i,m}(t)(\phi^i, \phi^j)$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} h''_{i,m}(t)(\psi^i, \psi^j) + k_2 \sum_{i=1}^{m} h_{i,m}(t)(\psi_x^i, \psi_x^j)$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} h''_{i,m}(t)(\varphi^i, \varphi^j) + k_3 \sum_{i=1}^{m} h_{i,m}(t)(\varphi_x^i, \varphi_x^j) + b \sum_{i=1}^{m} h'_{i,m}(t)(\varphi^i, \varphi^j) = 0,$$

onde $(\cdot, \cdot)$ denota o produto interno em L^2 onde as funções estão definidas. Colocando o sistema acima em notação matricial com

$$A = (a_{ij});\ a_{ij} = (\phi^i, \phi^j), \quad B = (b_{ij});\ b_{ij} = (\psi^i, \psi^j), \quad C = (c_{ij});\ c_{ij} = (\varphi^i, \varphi^j),$$
$$D = (d_{ij});\ d_{ij} = (\phi_x^i, \phi_x^j), \quad E = (e_{ij});\ e_{ij} = (\psi_x^i, \psi_x^j), \quad F = (f_{ij});\ f_{ij} = (\varphi_x^i, \varphi_x^j),$$

$$\mathrm{H}(t) = \begin{pmatrix} h_{1,m}(t) \\ \vdots \\ h_{m,m}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathrm{H}^0 = \begin{pmatrix} h_{1,m}(0) \\ \vdots \\ h_{m,m}(0) \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathrm{H}^1 = \begin{pmatrix} h'_{1,m}(0) \\ \vdots \\ h'_{m,m}(0) \end{pmatrix},$$

temos

$$(A+B+C)\mathrm{H}''(t) + (k_1 D + k_2 E + k_3 F)\mathrm{H}(t) + (aA + bC)\mathrm{H}'(t) = 0.$$

Assim, como A, B, e C são matrizes definida positiva, temos

$$\begin{cases} \mathrm{H}''(t) + P\mathrm{H}'(t) + Q\mathrm{H}(t) = 0, \\ \quad \mathrm{H}(0) = \mathrm{H}^0, \quad \mathrm{H}'(0) = \mathrm{H}^1, \end{cases}$$

onde $P = (A+B+C)^{-1}(aA+bC)$ e $Q = (A+B+C)^{-1}(k_1D+k_2E+k_3F)$. Considerando $y_1(t) = \mathrm{H}(t)$ e $y_2(t) = \mathrm{H}'(t)$, obtemos o seguinte sistema equivalente

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t), \\ y_2'(t) = -Py_2(t) - Qy_1(t), \\ y_1(0) = \mathrm{H}^0, \quad y_2(0) = \mathrm{H}^1, \end{cases}$$

ou seja, utilizando a notação matricial

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q & -P \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad Y^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{H}^0 \\ \mathrm{H}^1 \end{pmatrix},$$

obtemos

$$\begin{cases} Y'(t) = \mathcal{A}Y(t), \\ \quad Y(0) = Y^0. \end{cases}$$

Logo, $Y(t) = Y(0)e^{\mathcal{A}t}$, e, portanto, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe uma única solução (u^m, v^m, w^m) do problema aproximado.

Mostraremos agora que essa solução permanece limitada quando fazemos $m \to \infty$.

Estimativa a priori

Multiplicando a equação (2.11) por $h'_{j,m}(t)$ e somando em j de 1 a m, temos que

$$\int_0^{l_1} (u_{tt}^m u_t^m + k_1 u_x^m u_{xt}^m + a u_t^m u_t^m)\, dx + \int_{l_1}^{l_2} (v_{tt}^m v_t^m + k_2 v_x^m v_{xt}^m)\, dx +$$
$$\int_{l_2}^{l} (w_{tt}^m w_t^m + k_3 w_x^m w_{xt}^m + b w_t^m w_t^m)\, dx = 0.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_0^{l_1} |u_t^m|^2 + k_1|u_x^m|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_{l_1}^{l_2} |v_t^m|^2 + k_2|v_x^m|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_{l_2}^{l} |w_t^m|^2 + k_3|w_x^m|^2 dx\right\}$$
$$= -a\int_0^{l_1} |u_t^m|^2\, dx - b\int_{l_2}^{l} |w_t^m|^2\, dx.$$

Assim, definindo $E^m(t) := E(t, u^m, v^m, w^m)$, segue que

$$\frac{d}{dt}E^m(t) = -a\int_0^{l_1} |u_t^m|^2\, dx - b\int_{l_2}^{l} |w_t^m|^2\, dx.$$

Integrando a igualdade acima sobre $(0,t)$, $t \in (0,T)$, temos que

$$E^m(t) - E^m(0) = -a\int_0^t\int_0^{l_1} |u_t^m|^2\, dxdt - b\int_0^t\int_{l_2}^{l} |w_t^m|^2\, dxdt,$$

e assim,

$$E^m(t) \le E^m(0).$$

Mostrando que $E^m(t)$ é limitada para cada $m \in \mathbb{N}$ e $t \in (0,T)$, de onde segue que

$$(u^m, v^m, w^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;\mathcal{V}), \tag{2.12}$$
$$(u_t^m, v_t^m, w_t^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega)). \tag{2.13}$$

Passagem ao limite

Observe que $L^\infty(0,T;\mathcal{V}) = [L^1(0,T;\mathcal{V}')]'$ e $L^\infty(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega)) = [L^1(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega))]'$, e como os espaços $L^1(0,T;\mathcal{V}')$ e $L^1(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega))$ são separáveis, obtemos de (2.12) e (2.13) a existência de uma subsequência de (u^m, v^m, w^m), que será denotada da mesma forma, tal que

$$(u^m, v^m, w^m) \overset{*}{\rightharpoonup} (u, v, w) \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}), \tag{2.14}$$
$$(u_t^m, v_t^m, w_t^m) \overset{*}{\rightharpoonup} (\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) \in L^\infty(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega)). \tag{2.15}$$

Como $L^\infty(0,T;\mathcal{V}) \hookrightarrow L^2(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega))$ segue que, fazendo a identificação $L^2(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega)) \equiv L^2(Q)$ e usando sua reflexividade, de (2.14) obtemos a existência de uma subsequência de (u^m, v^m, w^m), a qual denotaremos da mesma forma, tal que

$$(u^m, v^m, w^m) \rightharpoonup (u, v, w) \in L^2(Q), \quad \text{onde} \quad Q = \Omega \times [0, T].$$

Assim, como a convergência fraca em $L^2(Q)$ implica na convergência no sentido das distribuições, segue que

$$(u^m, v^m, w^m) \to (u, v, w) \in \mathcal{D}'(Q).$$

Sendo a derivação uma operação contínua em $\mathcal{D}'(Q)$, temos que

$$(u_t^m, v_t^m, w_t^m) \to (u_t, v_t, w_t) \in \mathcal{D}'(Q).$$

Por outro lado, procedendo da mesma forma para (2.15), obtemos

$$(u_t^m, v_t^m, w_t^m) \to (\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) \in \mathcal{D}'(Q).$$

Logo, da unicidade do limite em $\mathcal{D}'(Q)$, resulta que

$$(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) = (u_t, v_t, w_t).$$

Portanto,

$$(u_t^m, v_t^m, w_t^m) \quad \overset{*}{\rightharpoonup} \quad (u_t, v_t, w_t) \in L^\infty(0, T; \mathcal{L}^2(\Omega)). \tag{2.16}$$

Multiplicando a equação (2.11) por $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ e integrando sobre $[0, T]$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^{l_1} u_{tt}^m \phi\theta \, dxdt + k_1 \int_0^T \int_0^{l_1} u_x^m \phi_x \theta \, dxdt + a \int_0^T \int_0^{l_1} u_t^m \phi\theta \, dxdt \\ + \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} v_{tt}^m \psi\theta \, dxdt + k_2 \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} v_x^m \psi_x \theta \, dxdt \\ + \int_0^T \int_{l_2}^{l} w_{tt}^m \varphi\theta \, dxdt + k_3 \int_0^T \int_{l_2}^{l} w_x^m \varphi_x \theta \, dxdt + b \int_0^T \int_{l_2}^{l} w_t^m \varphi\theta \, dxdt = 0, \end{aligned}$$

para toda $(\phi, \psi, \varphi) \in \mathcal{V}$, uma vez que $\{(\phi^j, \psi^j, \varphi^j)\}$ é uma base de $\mathcal{V}$. Assim, aplicando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned} -\int_0^T \int_0^{l_1} u_t^m \phi\theta' \, dxdt + k_1 \int_0^T \int_0^{l_1} u_x^m \phi_x \theta \, dxdt + a \int_0^T \int_0^{l_1} u_t^m \phi\theta \, dxdt \\ - \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} v_t^m \psi\theta' \, dxdt + k_2 \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} v_x^m \psi_x \theta \, dxdt \\ - \int_0^T \int_{l_2}^{l} w_t^m \varphi\theta' \, dxdt + k_3 \int_0^T \int_{l_2}^{l} w_x^m \varphi_x \theta \, dxdt + b \int_0^T \int_{l_2}^{l} w_t^m \varphi\theta \, dxdt = 0. \end{aligned}$$

Logo, de (2.14) e (2.16), podemos passar o limite, o que resulta

$$-\int_0^T\int_0^{l_1} u_t\phi\theta'\,dxdt + k_1\int_0^T\int_0^{l_1} u_x\phi_x\theta\,dxdt + a\int_0^T\int_0^{l_1} u_t\phi\theta\,dxdt$$
$$-\int_0^T\int_{l_1}^{l_2} v_t\psi\theta'\,dxdt + k_2\int_0^T\int_{l_1}^{l_2} v_x\psi_x\theta\,dxdt$$
$$-\int_0^T\int_{l_2}^{l} w_t\varphi\theta'\,dxdt + k_3\int_0^T\int_{l_2}^{l} w_x\varphi_x\theta\,dxdt + b\int_0^T\int_{l_2}^{l} w_t\varphi\theta\,dxdt = 0.$$

Assim, aplicando a definição de derivada fraca,

$$\int_0^T\frac{d}{dt}\int_0^{l_1} u_t\phi\theta\,dxdt + k_1\int_0^T\int_0^{l_1} u_x\phi_x\theta\,dxdt + a\int_0^T\int_0^{l_1} u_t\phi\theta\,dxdt$$
$$+\int_0^T\frac{d}{dt}\int_{l_1}^{l_2} v_t\psi\theta\,dxdt + k_2\int_0^T\int_{l_1}^{l_2} v_x\psi_x\theta\,dxdt$$
$$+\int_0^T\frac{d}{dt}\int_{l_2}^{l} w_t\varphi\theta\,dxdt + k_3\int_0^T\int_{l_2}^{l} w_x\varphi_x\theta\,dxdt + b\int_0^T\int_{l_2}^{l} w_t\varphi\theta\,dxdt = 0.$$

Portanto, pelo lema de Du Bois Raymond, concluímos que

$$\frac{d}{dt}\int_0^{l_1} u_t\phi\,dx + k_1\int_0^{l_1} u_x\phi_x\,dx + a\int_0^{l_1} u_t\phi\,dx + \frac{d}{dt}\int_{l_1}^{l_2} v_t\psi\,dx + k_2\int_{l_1}^{l_2} v_x\psi_x\,dx$$
$$+\frac{d}{dt}\int_{l_2}^{l} w_t\varphi\,dx + k_3\int_{l_2}^{l} w_x\varphi_x\,dx + b\int_{l_2}^{l} w_t\varphi\,dx = 0,$$

para toda $(\phi,\psi,\varphi)\in\mathcal{V}$.

Regularidade

Agora, diferenciando a equação (2.11) com respeito a t, multiplicando por $h''_{j,m}(t)$ e somando em j, temos que

$$\int_0^{l_1}(u^m_{ttt}u^m_{tt} + k_1u^m_{xt}u^m_{xtt} + au^m_{tt}u^m_{tt})\,dx + \int_{l_1}^{l_2}(v^m_{ttt}v^m_{tt} + k_2v^m_{xt}v^m_{xtt})\,dx +$$
$$\int_{l_2}^{l}(w^m_{ttt}w^m_{tt} + k_3w^m_{xt}w^m_{xtt} + bw^m_{tt}w^m_{tt})\,dx = 0.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_0^{l_1}|u^m_{tt}|^2 + k_1|u^m_{xt}|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{l_1}^{l_2}|v^m_{tt}|^2 + k_2|v^m_{xt}|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{l_2}^{l}|w^m_{tt}|^2 + k_3|w^m_{xt}|^2\,dx\right\}$$
$$= -a\int_0^{l_1}|u^m_{tt}|^2\,dx - b\int_{l_2}^{l}|w^m_{tt}|^2\,dx.$$

Assim, definindo $\mathcal{E}^m(t) := E(t, u^m_t, v^m_t, w^m_t)$, temos que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}^m(t) = -a\int_0^{l_1}|u^m_{tt}|^2\,dx - b\int_{l_2}^{l}|w^m_{tt}|^2\,dx.$$

Integrando a igualdade acima sobre $(0,t)$, $t\in(0,T)$, obtemos

$$\mathcal{E}^m(t)-\mathcal{E}^m(0)=-a\int_0^t\int_0^{l_1}|u_{tt}^m|^2\,dxdt-b\int_0^t\int_{l_2}^{l}|w_{tt}^m|^2\,dxdt,$$

o que implica

$$\mathcal{E}^m(t)\le\mathcal{E}^m(0). \tag{2.17}$$

Precisamos estimar $\mathcal{E}^m(0)$, e para isso, inicialmente multiplicamos a equação (2.11) por $h''_{j,m}(t)$, somamos em j de 1 a m, e fazemos $t\to 0^+$, para obter

$$\begin{aligned}\int_0^{l_1}(u_{tt}^m(0)u_{tt}^m(0)+k_1u_x^m(0)u_{xtt}^m(0)+au_t^m(0)u_{tt}^m(0))\,dx\\ +\int_{l_1}^{l_2}(v_{tt}^m(0)v_{tt}^m(0)+k_2v_x^m(0)v_{xtt}^m(0))\,dx\\ +\int_{l_2}^{l}(w_{tt}^m(0)w_{tt}^m(0)+k_3w_x^m(0)w_{xtt}^m(0)+bw_t^m(0)w_{tt}^m(0))\,dx=0.\end{aligned}$$

Assim, integrando por partes e usando as condições de transmissão, temos que

$$\begin{aligned}\int_0^{l_1}(|u_{tt}^m(0)|^2-k_1u_{xx}^m(0)u_{tt}^m(0)+au_t^m(0)u_{tt}^m(0))\,dx+\int_{l_1}^{l_2}(|v_{tt}^m(0)|^2-k_2v_{xx}^m(0)v_{tt}^m(0))\,dx\\ +\int_{l_2}^{l}(|w_{tt}^m(0)|^2-k_3w_{xx}^m(0)w_{tt}^m(0)+bw_t^m(0)w_{tt}^m(0))\,dx=0.\end{aligned}$$

Logo, usando a desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}\int_0^{l_1}|u_{tt}^m(0)|^2dx+\int_{l_1}^{l_2}|v_{tt}^m(0)|^2dx+\int_{l_2}^{l}|w_{tt}^m(0)|^2dx\le\frac{k_1\epsilon}{2}\int_0^{l_1}|u_{tt}^m(0)|^2\,dx\\ +\frac{k_1}{2\epsilon}\int_0^{l_1}|u_{xx}^m(0)|^2\,dx+\frac{k_2\epsilon}{2}\int_{l_1}^{l_2}|v_{tt}^m(0)|^2\,dx+\frac{k_2}{2\epsilon}\int_{l_1}^{l_2}|v_{xx}^m(0)|^2\,dx\\ +\frac{k_3\epsilon}{2}\int_{l_2}^{l}|w_{tt}^m(0)|^2\,dx+\frac{k_3}{2\epsilon}\int_{l_2}^{l}|w_{xx}^m(0)|^2\,dx+\frac{a\epsilon}{2}\int_0^{l_1}|u_{tt}^m(0)|^2\,dx\\ +\frac{a}{2\epsilon}\int_0^{l_1}|u_t^m(0)|^2\,dx+\frac{b\epsilon}{2}\int_{l_2}^{l}|w_{tt}^m(0)|^2\,dx+\frac{b}{2\epsilon}\int_{l_2}^{l}|w_t^m(0)|^2\,dx=0,\end{aligned}$$

onde ϵ é uma constante positiva satisfazendo

$$\epsilon<\min\left\{\frac{2}{k_1+a},\frac{2}{k_2},\frac{2}{k_3+b}\right\}.$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}C_1\int_0^{l_1}|u_{tt}^m(0)|^2\,dx+C_2\int_{l_1}^{l_2}|v_{tt}^m(0)|^2\,dx+C_3\int_{l_2}^{l}|w_{tt}^m(0)|^2\,dx\le\frac{k_1}{2\epsilon}\int_0^{l_1}|u_{xx}^m(0)|^2\,dx\\ +\frac{a}{2\epsilon}\int_0^{l_1}|u_t^m(0)|^2\,dx+\frac{k_2}{2\epsilon}\int_{l_1}^{l_2}|v_{xx}^m(0)|^2\,dx+\frac{k_3}{2\epsilon}\int_{l_2}^{l}|w_{xx}^m(0)|^2\,dx+\frac{b}{2\epsilon}\int_{l_2}^{l}|w_t^m(0)|^2\,dx,\end{aligned}$$

onde

$$C_1 = 1 - \Big(\frac{k_1 + a}{2}\Big)\epsilon, \quad C_2 = 1 - \frac{k_2}{2}\epsilon \quad \text{e} \quad C_3 = 1 - \Big(\frac{k_3 + b}{2}\Big)\epsilon$$

são constantes positivas.

Assim, concluímos que o valor inicial $(u^m_{tt}(0), v^m_{tt}(0), w^m_{tt}(0))$ é limitado em $\mathcal{L}^2(\Omega)$, e portanto, $\mathcal{E}^m(0)$ é limitada e de (2.17) segue que $\mathcal{E}^m(t)$ é limitada para cada $m \in \mathbb{N}$ e $t \in [0, T]$, donde concluímos que

$$(u^m_t, v^m_t, w^m_t) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; \mathcal{V}), \tag{2.18}$$

$$(u^m_{tt}, v^m_{tt}, w^m_{tt}) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; \mathcal{L}^2(\Omega)). \tag{2.19}$$

Observe que $L^\infty(0, T; \mathcal{V}) = [L^1(0, T; \mathcal{V}')]'$ e $L^\infty(0, T; \mathcal{L}^2(\Omega)) = [L^1(0, T; \mathcal{L}^2(\Omega))]'$, e como os espaços $L^1(0, T; \mathcal{V}')$ e $L^1(0, T; \mathcal{L}^2(\Omega))$ são separáveis, obtemos de (2.14), (2.16), (2.18) e (2.19) a existência de uma subsequência de (u^m, v^m, w^m), que será denotada da mesma forma, tal que

$$(u^m, v^m, w^m) \overset{*}{\rightharpoonup} (u, v, w) \in L^\infty(0, T; \mathcal{V}), \tag{2.20}$$

$$(u^m_t, v^m_t, w^m_t) \overset{*}{\rightharpoonup} (u_t, v_t, w_t) \in L^\infty(0, T; \mathcal{V}), \tag{2.21}$$

$$(u^m_{tt}, v^m_{tt}, w^m_{tt}) \overset{*}{\rightharpoonup} (\widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{w}) \in L^\infty(0, T; \mathcal{L}^2(\Omega)). \tag{2.22}$$

Como $L^\infty(0, T; \mathcal{L}^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; \mathcal{L}^2(\Omega))$, segue que, fazendo a identificação $L^2(0, T; \mathcal{L}^2(\Omega)) \equiv L^2(Q)$, e usando sua reflexividade, de (2.21) obtemos a existência de uma subsequência de (u^m, v^m, w^m), que denotaremos da mesma forma, tal que

$$(u^m_t, v^m_t, w^m_t) \rightharpoonup (u_t, v_t, w_t) \in L^2(Q), \quad \text{onde} \quad Q = \Omega \times [0, T].$$

Assim, como a convergência fraca em $L^2(Q)$ implica na convergência no sentido das distribuições, segue que

$$(u^m_t, v^m_t, w^m_t) \to (u_t, v_t, w_t) \in \mathcal{D}'(Q).$$

Sendo a derivação uma operação contínua em $\mathcal{D}'(Q)$, temos que

$$(u^m_{tt}, v^m_{tt}, w^m_{tt}) \to (u_{tt}, v_{tt}, w_{tt}) \in \mathcal{D}'(Q).$$

Por outro lado, procedendo da mesma forma para (2.22), obtemos

$$(u^m_{tt}, v^m_{tt}, w^m_{tt}) \to (\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) \in \mathcal{D}'(Q).$$

Logo, da unicidade do limite em $\mathcal{D}'(Q)$, resulta que

$$(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) = (u_{tt}, v_{tt}, w_{tt}).$$

Portanto,

$$(u_{tt}^m, v_{tt}^m, w_{tt}^m) \quad \overset{*}{\rightharpoonup} \quad (u_{tt}, v_{tt}, w_{tt}) \in L^\infty(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega)). \tag{2.23}$$

Multiplicando a equação (2.11) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando sobre $[0,T]$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^{l_1} u_{tt}^m \phi\theta \, dxdt + k_1 \int_0^T \int_0^{l_1} u_x^m \phi_x \theta \, dxdt + a \int_0^T \int_0^{l_1} u_t^m \phi\theta \, dxdt \\ + \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} v_{tt}^m \psi\theta \, dxdt + k_2 \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} v_x^m \psi_x \theta \, dxdt \\ + \int_0^T \int_{l_2}^{l} w_{tt}^m \varphi\theta \, dxdt + k_3 \int_0^T \int_{l_2}^{l} w_x^m \varphi_x \theta \, dxdt + b \int_0^T \int_{l_2}^{l} w_t^m \varphi\theta \, dxdt = 0, \end{aligned}$$

para toda $(\phi, \psi, \varphi) \in \mathcal{V}$, uma vez que $\{(\phi^j, \psi^j, \varphi^j)\}$ é uma base de $\mathcal{V}$. Assim, de (2.20), (2.21) e (2.23), podemos passar o limite, o que resulta

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^{l_1} u_{tt} \phi\theta \, dxdt + k_1 \int_0^T \int_0^{l_1} u_x \phi_x \theta \, dxdt + a \int_0^T \int_0^{l_1} u_t \phi\theta \, dxdt \\ + \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} v_{tt} \psi\theta \, dxdt + k_2 \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} v_x \psi_x \theta \, dxdt \\ + \int_0^T \int_{l_2}^{l} w_{tt} \varphi\theta \, dxdt + k_3 \int_0^T \int_{l_2}^{l} w_x \varphi_x \theta \, dxdt + b \int_0^T \int_{l_2}^{l} w_t \varphi\theta \, dxdt = 0. \end{aligned}$$

Em particular, a igualdade acima vale para toda $(\phi, \psi, \varphi) \in \mathcal{D}(\Omega)$ e para toda $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$.

Agora, por densidade de somas finitas dos produtos $\phi\theta$, $\psi\theta$, $\varphi\theta$, $(\phi, \psi, \varphi) \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ em $\mathcal{D}(Q)$, com $Q = \Omega \times (0,T)$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^{l_1} u_{tt} \vartheta_1 \, dxdt + k_1 \int_0^T \int_0^{l_1} u_x \vartheta_{1,x} \, dxdt + a \int_0^T \int_0^{l_1} u_t \vartheta_1 \, dxdt \\ + \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} v_{tt} \vartheta_2 \, dxdt + k_2 \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} v_x \vartheta_{2,x} \, dxdt \\ + \int_0^T \int_{l_2}^{l} w_{tt} \vartheta_3 \, dxdt + k_3 \int_0^T \int_{l_2}^{l} w_x \vartheta_{3,x} \, dxdt + b \int_0^T \int_{l_2}^{l} w_t \vartheta_3 \, dxdt = 0, \end{aligned}$$

para toda $(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) \in \mathcal{D}(Q)$. Então,

$$\begin{aligned} k_1 \langle u_{xx}, \vartheta_1 \rangle_1 + k_2 \langle v_{xx}, \vartheta_2 \rangle_2 + k_3 \langle w_{xx}, \vartheta_3 \rangle_3 = \int_0^T \int_0^{l_1} (u_{tt} + a u_t) \vartheta_1 \, dxdt \\ \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} v_{tt} \vartheta_2 \, dxdt + \int_0^T \int_{l_2}^{l} (w_{tt} + b w_t) \vartheta_3 \, dxdt, \end{aligned}$$

onde $\langle .,. \rangle_1$, $\langle .,. \rangle_2$ e $\langle .,. \rangle_3$ denotam os produtos de dualidade entre

$$\mathcal{D}'((0,l_1)\times(0,T)) \;\text{ e }\; \mathcal{D}((0,l_1)\times(0,T)),$$
$$\mathcal{D}'((l_1,l_2)\times(0,T)) \;\text{ e }\; \mathcal{D}((l_1,l_2)\times(0,T)),$$
$$\mathcal{D}'((l_2,l)\times(0,T)) \;\text{ e }\; \mathcal{D}((l_2,l)\times(0,T)),$$

respectivamente. Assim, segue que as distribuições k_1u_{xx} é definida em $(0,l_1)\times(0,T)$ por $u_{tt}+au_t \in L^\infty(0,T;L^2(0,l_1))$, k_2v_{xx} é definida em $(l_1,l_2)\times(0,T)$ por $v_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2(l_1,l_2))$, e k_3w_{xx} é definida em $(l_2,l)\times(0,T)$ por $w_{tt}+bw_t \in L^\infty(0,T;L^2(l_2,l))$. Então, identificamos k_1u_{xx} com uma função de $L^\infty(0,T;L^2(0,l_1))$, k_2v_{xx} com uma função de $L^\infty(0,T;L^2(l_1,l_2))$, k_3w_{xx} com uma função de $L^\infty(0,T;L^2(l_2,l))$, e ainda representamos essas funções da mesma forma. Portanto, concluímos que

$$(u,v,w) \in L^\infty(0,T;\mathcal{H}^2(\Omega)\cap\mathcal{V}),$$
$$(u_t,v_t,w_t) \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}),$$
$$(u_{tt},v_{tt},w_{tt}) \in L^\infty(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega)).$$

Dados Iniciais

Provaremos inicialmente que $(u(0),v(0),w(0))=(u^0,v^0,w^0)$. De fato, seja $\theta \in C^1([0,T])$, tal que $\theta(0)=1$ e $\theta(T)=0$. De (2.21) segue que

$$\int_0^T\int_0^{l_1} u_t^m\phi\theta\,dxdt \to \int_0^T\int_0^{l_1} u_t\phi\theta\,dxdt, \quad \forall\phi\in L^2(0,l_1).$$

Integrando por partes, temos que

$$-\int_0^{l_1} u^m(0)\phi\,dx - \int_0^T\int_0^{l_1} u^m\phi\theta'\,dxdt \to -\int_0^{l_1} u(0)\phi\,dx - \int_0^T\int_0^{l_1} u\phi\theta'\,dxdt.$$

Agora, de (2.20) resulta

$$\int_0^T\int_0^{l_1} u^m\phi\theta'\,dxdt \to \int_0^T\int_0^{l_1} u\phi\theta'\,dxdt.$$

O que implica

$$\int_0^{l_1} u^m(0)\phi\,dx \to \int_0^{l_1} u(0)\phi\,dx, \quad \forall\phi\in L^2(0,l_1).$$

Logo,

$$u^m(0) \rightharpoonup u(0) \quad \text{em} \quad L^2(0,l_1).$$

Por outro lado, como $u^m(0)=u_m^0 \to u^0$, segue que

$$u^m(0) \rightharpoonup u^0 \quad \text{em} \quad L^2(0,l_1).$$

Portanto, pela unicidade do limite fraco, concluímos que $u(0) = u^0$. Procedendo da mesma forma, concluímos também que $v(0) = v^0$ e $w(0) = w^0$.

Analogamente temos que $(u_t(0), v_t(0), w_t(0)) = (u^1, v^1, w^1)$. De fato, seja $\theta \in C^1([0,T])$, tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. De (2.23) segue que

$$\int_0^T \int_0^{l_1} u_{tt}^m \phi\theta \, dxdt \to \int_0^T \int_0^{l_1} u_{tt}\phi\theta \, dxdt, \quad \forall \phi \in L^2(0, l_1).$$

Integrando por partes, temos que

$$-\int_0^{l_1} u_t^m(0)\phi dx - \int_0^T \int_0^{l_1} u_t^m \phi\theta' \, dxdt \to -\int_0^{l_1} u_t(0)\phi dx - \int_0^T \int_0^{l_1} u_t \phi\theta' \, dxdt.$$

Agora, de (2.21) resulta

$$\int_0^T \int_0^{l_1} u_t^m \phi\theta' \, dxdt \to \int_0^T \int_0^{l_1} u_t \phi\theta' \, dxdt,$$

o que implica

$$\int_0^{l_1} u_t^m(0)\phi \, dx \to \int_0^{l_1} u_t(0)\phi \, dx, \quad \forall \phi \in L^2(0, l_1).$$

Logo,

$$u_t^m(0) \rightharpoonup u_t(0) \quad \text{em} \quad L^2(0, l_1).$$

Por outro lado, como $u_t^m(0) = u_m^1 \to u^1$, segue que

$$u_t^m(0) \rightharpoonup u^1 \quad \text{em} \quad L^2(0, l_1).$$

Portanto, pela unicidade do limite fraco, concluímos que $u_t(0) = u^1$, e de forma análoga, concluímos também que $v(0) = v^1$ e $w(0) = w^1$. ■

2.2 UNICIDADE

Mostraremos agora que as soluções dadas pelo Teorema 2.1 são únicas.

2.2.1 Unicidade da Solução Fraca

Sejam $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ e $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ soluções fracas do problema (2.1) − (2.9). Então $(u, v, w) = (\hat{u} - \tilde{u}, \hat{v} - \tilde{v}, \hat{w} - \tilde{w})$ é solução fraca de

$$u_{tt} - k_1 u_{xx} + a u_t = 0, \quad x \in (0, l_1), \quad t > 0, \tag{2.24}$$

$$v_{tt} - k_2 v_{xx} = 0, \quad x \in (l_1, l_2), \quad t > 0, \tag{2.25}$$

$$w_{tt} - k_3 w_{xx} + b w_t = 0, \quad x \in (l_2, l), \quad t > 0, \tag{2.26}$$

satisfazendo as condições de fronteira

$$u(0,t) = w(l,t) = 0, \quad t > 0 \tag{2.27}$$

as condições de transmissão

$$u(l_1,t) = v(l_1,t), \quad k_1 u_x(l_1,t) = k_2 v_x(l_1,t), \quad t > 0, \tag{2.28}$$

$$v(l_2,t) = w(l_2,t), \quad k_2 v_x(l_2,t) = k_3 w_x(l_2,t), \quad t > 0, \tag{2.29}$$

e as condições iniciais

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \in (0, l_1), \tag{2.30}$$

$$v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = 0, \quad x \in (l_1, l_2), \tag{2.31}$$

$$w(x,0) = 0, \quad w_t(x,0) = 0, \quad x \in (l_2, l). \tag{2.32}$$

Afim de mostrar que (u, v, w) é a solução nula, usaremos o método de Visik-Ladyzhenskaya.

Para $0 < s < T$, definimos

$$Z^1(t) = \begin{cases} -\displaystyle\int_t^s u(\sigma)\, d\sigma, & \text{se } \ 0 < t < s, \\ 0, & \text{se } \ s \leq t < T, \end{cases} \qquad Z^2(t) = \begin{cases} -\displaystyle\int_t^s v(\sigma)\, d\sigma, & \text{se } \ 0 < t < s, \\ 0, & \text{se } \ s \leq t < T, \end{cases}$$

$$Z^3(t) = \begin{cases} -\displaystyle\int_t^s w(\sigma)\, d\sigma, & \text{se } \ 0 < t < s, \\ 0, & \text{se } \ s \leq t < T, \end{cases}$$

onde (u, v, w) é solução fraca de $(2.24) - (2.32)$. A função $Z = (Z^1, Z^2, Z^3) \in L^\infty(0, T; \mathcal{V})$, então faz sentido

$$\int_0^T \left\langle u_{tt} - k_1 u_{xx} + a u_t, Z^1 \right\rangle_1 \, dt = 0, \tag{2.33}$$

$$\int_0^T \left\langle v_{tt} - k_2 v_{xx}, Z^2 \right\rangle_2 \, dt = 0, \tag{2.34}$$

$$\int_0^T \left\langle w_{tt} - k_3 w_{xx} + b w_t, Z^3 \right\rangle_3 \, dt = 0, \tag{2.35}$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_3$ representam os produtos de dualidade entre

$$L^1(0,T;H^{-1}(0,l_1)) \text{ e } L^\infty(0,T;H^1(0,l_1)),$$
$$L^1(0,T;H^{-1}(l_1,l_2)) \text{ e } L^\infty(0,T;H^1(l_1,l_2)),$$
$$L^1(0,T;H^{-1}(l_2,l)) \text{ e } L^\infty(0,T;H^1(l_2,l)),$$

respectivamente. Consideraremos

$$z^1(\xi)=\int_0^\xi u(\sigma)\,d\sigma, \quad z^2(\xi)=\int_0^\xi v(\sigma)\,d\sigma, \quad \text{e} \quad z^3(\xi)=\int_0^\xi w(\sigma)\,d\sigma.$$

Então, para $i=1,2,3$,

$$Z^i(t)=z^i(t)-z^i(s), \quad \text{para } t\in(0,s),$$

e

$$Z_t^1(t)=z_t^1(t)=u(t), \quad Z_t^2(t)=z_t^2(t)=v(t), \quad Z_t^3(t)=z_t^3(t)=w(t),$$

para $t\in(0,s)$. Assim, de (2.33) temos que

$$\int_0^s \left\langle u_{tt},Z^1\right\rangle dt=\int_0^{l_1} u_t(s)Z^1(s)\,dx-\int_0^{l_1} u_t(0)Z^1(0)\,dx-\int_0^s\int_0^{l_1} u_tZ_t^1\,dxdt.$$

Como $Z^1(s)=u_t(0)=0$, $Z_t^1(t)=u(t)$ e $u(0)=0$, resulta que

$$\begin{aligned}\int_0^s \left\langle u_{tt},Z^1\right\rangle dt &= -\int_0^s\int_0^{l_1} u_tu\,dxdt=-\int_0^s\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{l_1}|u|^2\,dxdt\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{l_1}|u(s)|^2\,dx. \end{aligned}\tag{2.36}$$

Procedendo da mesma forma, obtemos também que

$$\int_0^s \left\langle v_{tt},Z^2\right\rangle dt = -\frac{1}{2}\int_{l_1}^{l_2}|v(s)|^2\,dx, \tag{2.37}$$
$$\int_0^s \left\langle w_{tt},Z^3\right\rangle dt = -\frac{1}{2}\int_{l_2}^{l}|w(s)|^2\,dx. \tag{2.38}$$

De (2.33)-(2.38), segue que

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\int_0^{l_1}|u(s)|^2\,dx+k_1\int_0^s\int_0^{l_1}u_xZ_x^1\,dxdt+a\int_0^s\int_0^{l_1}u_tZ^1\,dxdt\\ &-\frac{1}{2}\int_{l_1}^{l_2}|v(s)|^2\,dx+k_2\int_0^s\int_{l_1}^{l_2}v_xZ_x^2\,dxdt-\frac{1}{2}\int_{l_2}^{l}|w(s)|^2\,dx\\ &+k_3\int_0^s\int_{l_2}^{l}w_xZ_x^3\,dxdt+b\int_0^s\int_{l_2}^{l}w_tZ^3\,dxdt=0.\end{aligned}$$

Logo, fazendo integração por partes,

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int_0^{l_1}|u(s)|^2\,dx+\frac{k_1}{2}\int_0^s\frac{d}{dt}\int_0^{l_1}|Z_x^1|^2\,dxdt-a\int_0^{l_1}\int_0^s uZ_t^1\,dtdx\\
&-\frac{1}{2}\int_{l_1}^{l_2}|v(s)|^2\,dx+\frac{k_2}{2}\int_0^s\frac{d}{dt}\int_{l_1}^{l_2}|Z_x^2|^2\,dxdt-\frac{1}{2}\int_{l_2}^{l}|w(s)|^2\,dx\\
&+\frac{k_3}{2}\int_0^s\frac{d}{dt}\int_{l_2}^{l}|Z_x^3|^2\,dxdt-b\int_{l_2}^{l}\int_0^s wZ_t^3\,dtdx=0.
\end{aligned}
$$

Portanto, temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^{l_1}|u(s)|^2\,dx+\frac{k_1}{2}\int_0^{l_1}|Z_x^1(0)|^2\,dx+a\int_0^s\int_0^{l_1}|u|^2\,dxdt\\
&+\frac{1}{2}\int_{l_1}^{l_2}|v(s)|^2\,dx+\frac{k_2}{2}\int_{l_1}^{l_2}|Z_x^2(0)|^2\,dx+\frac{1}{2}\int_{l_2}^{l}|w(s)|^2\,dx\\
&+\frac{k_3}{2}\int_{l_2}^{l}|Z_x^3(0)|^2\,dx+b\int_0^s\int_{l_2}^{l}|w|^2\,dxdt=0,
\end{aligned}
$$

provando que $u(x,s)=v(x,s)=w(x,s)=0$, para todo $s\in[0,T]$.

2.2.2 Unicidade da Solução Forte

A unicidade da solução forte segue do resultado de unicidade para solução fraca, uma vez que toda solução forte é uma solução fraca do problema. No entanto, para salientar que a unicidade da solução fraca é muito mais complexa, mostraremos que a unicidade da solução forte pode ser obtida através de simples técnica multiplicativa devido a sua regularidade.

Sejam $(\hat{u},\hat{v},\hat{w})$ e $(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})$ soluções fortes do problema (2.1) – (2.9). Então $(u,v,w)=(\hat{u}-\tilde{u},\hat{v}-\tilde{v},\hat{w}-\tilde{w})$ é solução forte de (2.24) – (2.32). Assim, multiplicando a equação (2.24) por u_t, a equação (2.25) por v_t, a equação (2.26) por w_t e integrando em seus respectivos intervalos, temos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^{l_1}(u_{tt}u_t-k_1u_{xx}u_t+a|u_t|^2)dx+\int_{l_1}^{l_2}(v_{tt}v_t-k_2v_{xx}v_t)dx&\\
+\int_{l_2}^{l}(w_{tt}w_t-k_3w_{xx}w_t+b|w_t|^2)dx=0&
\end{aligned}
$$

Logo, integrando por partes e usando as condições de transmissão, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_0^{l_1}|u_t|^2+k_1|u_x|^2dx+\frac{1}{2}\int_{l_1}^{l_2}|v_t|^2+k_2|v_x|^2dx+\frac{1}{2}\int_{l_2}^{l}|w_t|^2+k_3|w_x|^2dx\right\}$$
$$=-a\int_0^{l_1}|u_t|^2dx-b\int_{l_2}^{l}|w_t|^2dx.$$

Então, aplicando a desigualdade de Poincaré, temos

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_0^{l_1}|u_t|^2+c_1|u|^2dx+\int_{l_1}^{l_2}|v_t|^2+k_2|v_x|^2dx+\int_{l_2}^{l}|w_t|^2+c_3|w|^2dx\right\}\leq 0,$$

onde $c_1=k_1/c_p$ e $c_3=k_3/c_p$. Integrando de 0 a t, e usando as condições iniciais (2.30)-(2.32), temos

$$\int_0^{l_1}|u_t|^2+c_1|u|^2dx+\int_{l_1}^{l_2}|v_t|^2+k_2|v_x|^2dx+\int_{l_2}^{l}|w_t|^2+c_3|w|^2dx\leq 0.$$

O que implica que $u=0$ q.s. em $(0,l_1)$, $w=0$ q.s. em (l_2,l) e v é uma função constante. Como $v(x,0)=0$, segue que $v=0$. Logo, $(u,v,w)=0$, e, portanto, $(\hat{u},\hat{v},\hat{w})=(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})$.

2.3 Decaimento Exponencial

Nesta seção mostraremos que a solução do problema $(2.1)-(2.9)$ decai exponencialmente para zero quando o tempo vai para o infinito.

Denotemos por $U(x,t)=u(x,t)e^{\gamma t}$, $V(x,t)=v(x,t)e^{\gamma t}$ e $W(x,t)=w(x,t)e^{\gamma t}$, sendo $\gamma>0$. Então,

$$U_t=u_te^{\gamma t}+\gamma U,\quad U_{tt}=u_{tt}e^{\gamma t}+2\gamma U_t-\gamma^2U,$$
$$V_t=v_te^{\gamma t}+\gamma V,\quad V_{tt}=v_{tt}e^{\gamma t}+2\gamma V_t-\gamma^2V,$$
$$W_t=w_te^{\gamma t}+\gamma W,\quad W_{tt}=w_{tt}e^{\gamma t}+2\gamma W_t-\gamma^2W.$$

Assim, multiplicando as equações (2.1)-(2.3) por $e^{\gamma t}$ e usando as igualdades acima, temos que (U,V,W) satisfaz

$$U_{tt} - k_1 U_{xx} + aU_t = Q, \quad x \in (0, l_1),\ t > 0, \tag{2.39}$$

$$V_{tt} - k_2 V_{xx} = R, \qquad x \in (l_1, l_2),\ t > 0, \tag{2.40}$$

$$W_{tt} - k_3 W_{xx} + bW_t = S, \quad x \in (l_2, l),\ t > 0, \tag{2.41}$$

onde

$$Q := 2\gamma U_t + (a - \gamma)\gamma U, \tag{2.42}$$

$$R := 2\gamma V_t - \gamma^2 V, \tag{2.43}$$

$$S := 2\gamma W_t + (b - \gamma)\gamma W, \tag{2.44}$$

e além disso, com U, V e W satisfazendo a condição de fronteira

$$U(0,t) = W(l,t) = 0, \quad t > 0 \tag{2.45}$$

as condições de transmissão

$$U(l_1,t) = V(l_1,t), \quad k_1 U_x(l_1,t) = k_2 V_x(l_1,t), \quad t > 0, \tag{2.46}$$

$$V(l_2,t) = W(l_2,t), \quad k_2 V_x(l_2,t) = k_3 W_x(l_2,t), \quad t > 0, \tag{2.47}$$

e as condições iniciais

$$U(x,0) = u^0(x), \quad U_t(x,0) = u^1(x) + \gamma u^0(x), \quad x \in (0, l_1), \tag{2.48}$$

$$V(x,0) = v^0(x), \quad V_t(x,0) = v^1(x) + \gamma v^0(x), \quad x \in (l_1, l_2), \tag{2.49}$$

$$W(x,0) = w^0(x), \quad W_t(x,0) = w^1(x) + \gamma w^0(x), \quad x \in (l_2, l). \tag{2.50}$$

Definimos $E(t) := E(t; U, V, W)$, onde $E(t; U, V, W)$ é dado por (2.10). Então, para mostrar o decaimento exponencial de (u, v, w) basta mostrar que $E(t)$ é limitada. Para isso, provaremos uma série de resultados, onde consideraremos (u, v, w) solução forte de (2.1)-(2.9).

Lema 2.2. *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -a \int_0^{l_1} |U_t|^2 dx - b \int_{l_2}^{l} |W_t|^2 dx + C\gamma E(t).$$

Demonstração: Multiplicando a equação (2.39) por U_t e integrando de 0 a l_1, temos que

$$\int_0^{l_1} (U_{tt}U_t - k_1 U_{xx}U_t + a|U_t|^2)\, dx = \int_0^{l_1} QU_t\, dx.$$

Logo, aplicando integração por partes,

$$\int_0^{l_1} U_{tt}U_t\, dx - k_1 \left[U_x U_t \Big|_0^{l_1} - \int_0^{l_1} U_x U_{xt}\, dx \right] + a \int_0^{l_1} |U_t|^2\, dx = \int_0^{l_1} QU_t\, dx,$$

e, assim, de (2.45) segue

$$\frac{d}{dt} E_1(t;U) = \int_0^{l_1} QU_t\, dx - a \int_0^{l_1} |U_t|^2\, dx + k_1 U_x(l_1,t) U_t(l_1,t).$$

Usando (2.42), temos que

$$\int_0^{l_1} QU_t\, dx = 2\gamma \int_0^{l_1} |U_t|^2\, dx + (a-\gamma)\gamma \int_0^{l_1} UU_t\, dx.$$

Assim, pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_0^{l_1} QU_t\, dx \leq 2\gamma \int_0^{l_1} |U_t|^2\, dx + [(a-\gamma)^2\gamma^2]^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{l_1} |U|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{l_1} |U_t|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

e, aplicando a desigualdade de Young, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^{l_1} QU_t\, dx &\leq 2\gamma \int_0^{l_1} |U_t|^2\, dx + \frac{(a-\gamma)^2\gamma}{2} \int_0^{l_1} |U|^2\, dx + \frac{\gamma}{2} \int_0^{l_1} |U_t|^2\, dx \\ &= \frac{5\gamma}{2} \int_0^{l_1} |U_t|^2\, dx + \frac{(a-\gamma)^2\gamma}{2} \int_0^{l_1} |U|^2\, dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Poincaré, resulta que

$$\begin{aligned} \int_0^{l_1} QU_t\, dx &\leq \frac{5\gamma}{2} \int_0^{l_1} |U_t|^2\, dx + \frac{(a-\gamma)^2\gamma c_p}{2} \int_0^{l_1} |U_x|^2\, dx \\ &\leq C\gamma E_1(t;U), \end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva. Portanto,

$$\frac{d}{dt} E_1(t;U) \leq C\gamma E_1(t;U) - a \int_0^{l_1} |U_t|^2\, dx + k_1 U_x(l_1,t) U_t(l_1,t). \tag{2.51}$$

Multiplicando a equação (2.40) por V_t e integrando de l_1 a l_2, temos que

$$\int_{l_1}^{l_2} (V_{tt}V_t - k_2 V_{xx}V_t)\, dx = \int_{l_1}^{l_2} RV_t\, dx.$$

Logo, aplicando integração por partes,

$$\int_{l_1}^{l_2} V_{tt}V_t\,dx - k_2\left[V_xV_t\Big|_{l_1}^{l_2} - \int_{l_1}^{l_2} V_xV_{xt}\,dx\right] = \int_{l_1}^{l_2} RV_t\,dx,$$

e, assim,

$$\frac{d}{dt}E_2(t;V) = \int_{l_1}^{l_2} RV_t\,dx + k_2V_x(l_2,t)V_t(l_2,t) - k_2V_x(l_1,t)V_t(l_1,t).$$

Usando (2.43), temos que

$$\int_{l_1}^{l_2} RV_t\,dx = 2\gamma\int_{l_1}^{l_2} |V_t|^2\,dx - \gamma^2\int_{l_1}^{l_2} VV_t\,dx,$$

e, portanto, pela desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{l_1}^{l_2} RV_t\,dx &= 2\gamma\int_{l_1}^{l_2} |V_t|^2\,dx + \frac{\gamma^2}{2}\int_{l_1}^{l_2} |V|^2dx + \frac{\gamma^2}{2}\int_{l_1}^{l_2} |V_t|^2dx\\ &\leq C\gamma E(t),\end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva. Logo,

$$\frac{d}{dt}E_2(t;V) \leq C\gamma E(t) + k_2V_x(l_2,t)V_t(l_2,t) - k_2V_x(l_1,t)V_t(l_1,t). \tag{2.52}$$

Multiplicando a equação (2.41) por W_t e integrando de l_2 a l, temos que

$$\int_{l_2}^{l} (W_{tt}W_t - k_3W_{xx}W_t + b|W_t|^2)dx = \int_{l_2}^{l} SW_t\,dx.$$

Logo, aplicando integração por partes,

$$\int_{l_2}^{l} W_{tt}W_t\,dx - k_3\left[W_xW_t\Big|_{l_2}^{l} - \int_{l_2}^{l} W_xW_{xt}\,dx\right] + b\int_{l_2}^{l} |W_t|^2\,dx = \int_{l_2}^{l} SW_t\,dx,$$

e, assim, de (2.45) temos

$$\frac{d}{dt}E_3(t;W) = \int_{l_2}^{l} SW_t\,dx - b\int_{l_2}^{l} |W_t|^2\,dx - k_3W_x(l_2,t)W_t(l_2,t).$$

Usando (2.44), temos que

$$\int_{l_2}^{l} SW_t\,dx = 2\gamma\int_{l_2}^{l} |W_t|^2\,dx + (b-\gamma)\gamma\int_{l_2}^{l} WW_t\,dx.$$

Assim, pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_{l_2}^{l} SW_t\,dx \leq 2\gamma\int_{l_2}^{l} |W_t|^2\,dx + [(b-\gamma)^2\gamma^2]^{\frac{1}{2}}\left(\int_{l_2}^{l} |W|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{l_2}^{l} |U_t|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

e, aplicando a desigualdade de Young, segue que

$$\begin{aligned}\int_{l_2}^{l} SW_t\,dx &\leq 2\gamma\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx+\frac{(b-\gamma)^2\gamma}{2}\int_{l_2}^{l}|W|^2\,dx+\frac{\gamma}{2}\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx\\ &= \frac{5\gamma}{2}\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx+\frac{(b-\gamma)^2\gamma}{2}\int_{l_2}^{l}|W|^2\,dx.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Poincaré, resulta que

$$\begin{aligned}\int_{l_2}^{l} SW_t\,dx &\leq \frac{5\gamma}{2}\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx+\frac{(b-\gamma)^2\gamma c_p}{2}\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx\\ &\leq C\gamma E_3(t;W),\end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva. Portanto,

$$\frac{d}{dt}E_3(t;W)\leq C\gamma E_3(t;W)-b\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx-k_3W_x(l_2,t)W_t(l_2,t). \tag{2.53}$$

Logo, de (2.51), (2.52) e (2.53), concluímos que existe uma constante $C>0$, tal que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) &\leq C\gamma E(t)-a\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx-b\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx+k_1U_x(l_1,t)U_t(l_1,t)\\ &\quad +k_2V_x(l_2,t)V_t(l_2,t)-k_2V_x(l_1,t)V_t(l_1,t)-k_3W_x(l_2,t)W_t(l_2,t).\end{aligned}$$

Assim, usando as condições de transmissão (2.46) e (2.47), concluímos que

$$\frac{d}{dt}E(t)\leq -a\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx-b\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx+C\gamma E(t).$$

■

Lema 2.3. *Seja $F_1(t)$ o funcional definido por*

$$F_1(t)=\int_0^{l_1}UU_t\,dx.$$

Então, existe uma constante $C>0$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_1(t) &\leq C\gamma E_1(t;U)+\left(1+\frac{a}{2\epsilon_1}\right)\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx-\left(k_1-\frac{a\epsilon_1c_p}{2}\right)\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx\\ &\quad +k_1U_x(l_1,t)U(l_1,t),\end{aligned}$$

onde ϵ_1 é uma constante positiva satisfazendo $\epsilon_1<\dfrac{k_1}{2ac_p}$.

Demonstração: Note que

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_0^{l_1}UU_t\,dx\right\}=\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx+\int_0^{l_1}UU_{tt}\,dx.$$

Assim, usando a equação (2.39), temos que

$$\frac{d}{dt}F_1(t) = \int_0^{l_1} |U_t|^2\,dx + k_1\int_0^{l_1} U_{xx}U\,dx - a\int_0^{l_1} U_tU\,dx + \int_0^{l_1} QU\,dx.$$

Aplicando a desigualdade de Young e integrando por partes, segue que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_1(t) \;&\leq\; \int_0^{l_1} |U_t|^2\,dx + k_1\left[U_xU\Big|_0^{l_1} - \int_0^{l_1} |U_x|^2\,dx\right] + \frac{a}{2\epsilon_1}\int_0^{l_1} |U_t|^2\,dx\\ &\quad + \frac{a\epsilon_1}{2}\int_0^{l_1} |U|^2\,dx + \int_0^{l_1} QU\,dx,\end{aligned}$$

onde ϵ_1 é uma constante positiva que satisfaz $\epsilon_1 < \dfrac{k_1}{2ac_p}$. Agora, de (2.45) e aplicando a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_1(t) \;&\leq\; \left(1+\frac{a}{2\epsilon_1}\right)\int_0^{l_1} |U_t|^2\,dx + k_1U_x(l_1,t)U(l_1,t) - k_1\int_0^{l_1} |U_x|^2\,dx\\ &\quad + \frac{a\epsilon_1c_p}{2}\int_0^{l_1} |U_x|^2\,dx + \int_0^{l_1} QU\,dx. \qquad (2.54)\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\int_0^{l_1} QU\,dx = 2\gamma\int_0^{l_1} U_tU\,dx + (a-\gamma)\gamma\int_0^{l_1} |U|^2\,dx,$$

e assim, pela desigualdade de Young

$$\int_0^{l_1} QU\,dx \leq \frac{2\gamma}{2}\int_0^{l_1} |U_t|^2\,dx + \frac{2\gamma}{2}\int_0^{l_1} |U|^2\,dx + (a-\gamma)\gamma\int_0^{l_1} |U|^2\,dx.$$

Logo, aplicando a desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned}\int_0^{l_1} QU\,dx \;&\leq\; \gamma\int_0^{l_1} |U_t|^2\,dx + \gamma c_p\int_0^{l_1} |U_x|^2\,dx + (a-\gamma)\gamma c_p\int_0^{l_1} |U_x|^2\,dx\\ &\leq\; C\gamma E_1(t;U),\end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva. Portanto, usando a desigualdade acima em (2.54), concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_1(t) \;&\leq\; C\gamma E_1(t;U) + \left(1+\frac{a}{2\epsilon_1}\right)\int_0^{l_1} |U_t|^2\,dx - \left(k_1 - \frac{a\epsilon_1c_p}{2}\right)\int_0^{l_1} |U_x|^2\,dx\\ &\quad + k_1U_x(l_1,t)U(l_1,t).\end{aligned}$$

■

Lema 2.4. *Seja $F_3(t)$ o funcional definido por*

$$F_3(t)=\int_{l_2}^{l} WW_t\,dx.$$

Então, existe uma constante $C>0$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_3(t) \;&\leq\; C\gamma E_3(t;W)+\left(1+\frac{b}{2\epsilon_3}\right)\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx-\left(k_3-\frac{b\epsilon_3 c_p}{2}\right)\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx\\ &\quad -k_3W_x(l_2,t)W(l_2,t),\end{aligned}$$

onde ϵ_3 é uma constante positiva satisfazendo $\epsilon_3<\dfrac{k_3}{2bc_p}$.

Demonstração: Note que

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_{l_2}^{l} WW_t\,dx\right\}=\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx+\int_{l_2}^{l}WW_{tt}\,dx.$$

Assim, usando a equação (2.41), temos que

$$\frac{d}{dt}F_3(t)=\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx+k_3\int_{l_2}^{l}W_{xx}W\,dx-b\int_{l_2}^{l}W_tW\,dx+\int_{l_2}^{l}SW\,dx.$$

Aplicando a desigualdade de Young e integração por partes, segue que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_3(t) \;&\leq\; \int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx+k_3\left[W_xW\Big|_{l_2}^{l}-\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx\right]+\frac{b}{2\epsilon_3}\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx\\ &\quad+\frac{b\epsilon_3}{2}\int_{l_2}^{l}|W|^2\,dx+\int_{l_2}^{l}SW\,dx,\end{aligned}$$

onde ϵ_3 é uma constante positiva satisfazendo $\epsilon_3<\dfrac{k_3}{2bc_p}$. Agora, aplicando a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_3(t) \;&\leq\; \left(1+\frac{b}{2\epsilon_3}\right)\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx-k_3W_x(l_2,t)W(l_2,t)-k_3\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx\\ &\quad+\frac{b\epsilon_3c_p}{2}\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx+\int_{l_2}^{l}SW\,dx.\end{aligned}\tag{2.55}$$

Por outro lado, temos que

$$\int_{l_2}^{l}SW\,dx=2\gamma\int_{l_2}^{l}W_tW\,dx+(b-\gamma)\gamma\int_{l_2}^{l}|W|^2\,dx,$$

e assim, pela desigualdade de Young

$$\int_{l_2}^{l}SW\,dx\leq\frac{2\gamma}{2}\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx+\frac{2\gamma}{2}\int_{l_2}^{l}|W|^2\,dx+(b-\gamma)\gamma\int_{l_2}^{l}|W|^2\,dx.$$

Logo, aplicando a desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned} \int_{l_2}^{l} SW\,dx &\leq \gamma \int_{l_2}^{l} |W_t|^2\,dx + \gamma c_p \int_{l_2}^{l} |W_x|^2\,dx + (b-\gamma)\gamma c_p \int_{l_2}^{l} |W_x|^2\,dx \\ &\leq C\gamma E_3(t;W), \end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva. Portanto, usando a desigualdade acima em (2.55), concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F_3(t) &\leq C\gamma E_3(t;W) + \left(1+\frac{b}{2\epsilon_3}\right)\int_{l_2}^{l} |W_t|^2\,dx - \left(k_3 - \frac{b\epsilon_3 c_p}{2}\right)\int_{l_2}^{l} |W_x|^2\,dx \\ &\quad -k_3 W_x(l_2,t)W(l_2,t). \end{aligned}$$

■

Lema 2.5. *Seja $J_1(t)$ o funcional definido por*

$$J_1(t) = -\int_0^{l_1} xU_xU_t\,dx.$$

Então, existe uma constante $C>0$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J_1(t) &\leq C\gamma E_1(t;U) + \left(\frac{1}{2}+\frac{al_1}{2\eta}\right)\int_0^{l_1} |U_t|^2\,dx + \left(\frac{k_1}{2}+\frac{al_1\eta}{2}\right)\int_0^{l_1} |U_x|^2\,dx \\ &\quad -\frac{l_1}{2}|U_t(l_1,t)|^2 - \frac{k_1 l_1}{2}|U_x(l_1,t)|^2, \end{aligned}$$

onde η é uma constante positiva satisfazendo $\eta < \dfrac{k_1}{2al_1}$.

Demonstração: Multiplicando a equação (2.39) por $\sigma_1(x)U_x$, $\sigma_1 \in C^1(0,l_1)$, e integrando de 0 a l_1, temos que

$$\int_0^{l_1} (\sigma_1(x)U_xU_{tt} - k_1\sigma_1(x)U_xU_{xx} + a\sigma_1(x)U_xU_t)\,dx = \int_0^{l_1} \sigma_1(x)U_xQ\,dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\{\int_0^{l_1} \sigma_1(x)U_xU_t\,dx\right\} - \int_0^{l_1} \sigma_1(x)U_{xt}U_t\,dx - k_1\int_0^{l_1} \sigma_1(x)U_xU_{xx}\,dx \\ +a\int_0^{l_1} \sigma_1(x)U_xU_t\,dx = \int_0^{l_1} \sigma_1(x)U_xQ\,dx, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\{\int_0^{l_1} \sigma_1(x)U_xU_t\,dx\right\} = \frac{1}{2}\int_0^{l_1} \sigma_1(x)\frac{d}{dx}|U_t|^2\,dx + \frac{k_1}{2}\int_0^{l_1} \sigma_1(x)\frac{d}{dx}|U_x|^2\,dx \\ -a\int_0^{l_1} \sigma_1(x)U_xU_t\,dx + \int_0^{l_1} \sigma_1(x)U_xQ\,dx. \end{aligned}$$

Logo, integrando por partes, temos que

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_0^{l_1}\sigma_1(x)U_xU_t\,dx\right\}=\frac{1}{2}\left[\sigma_1(x)|U_t|^2\Big|_0^{l_1}-\int_0^{l_1}\sigma_1'(x)|U_t|^2\,dx\right]+\frac{k_1}{2}\sigma_1(x)|U_x|^2\Big|_0^{l_1}$$
$$-\frac{k_1}{2}\int_0^{l_1}\sigma_1'(x)|U_x|^2\,dx-a\int_0^{l_1}\sigma_1(x)U_xU_t\,dx+\int_0^{l_1}\sigma_1(x)U_xQ\,dx.$$

Considerando $\sigma_1(x)=-x$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{-\int_0^{l_1}xU_xU_t\,dx\right\} &= \frac{-l_1}{2}|U_t(l_1,t)|^2+\frac{1}{2}\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx+\frac{-k_1l_1}{2}|U_x(l_1,t)|^2\\ &\quad+\frac{k_1}{2}\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx+a\int_0^{l_1}xU_xU_t\,dx-\int_0^{l_1}xU_xQ\,dx.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young, temos

$$\frac{d}{dt}J_1(t)\le-\frac{l_1}{2}|U_t(l_1,t)|^2+\frac{1}{2}\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx-\frac{k_1l_1}{2}|U_x(l_1,t)|^2+\frac{k_1}{2}\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx$$
$$+\frac{al_1\eta}{2}\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx+\frac{al_1}{2\eta}\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx+l_1\int_0^{l_1}|U_xQ|\,dx$$

onde η é uma constante positiva satisfazendo $\eta<\dfrac{k_1}{2al_1}$. Portanto,

$$\frac{d}{dt}J_1(t)\le\left(\frac{1}{2}+\frac{al_1}{2\eta}\right)\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx+\left(\frac{k_1}{2}+\frac{al_1\eta}{2}\right)\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx-\frac{l_1}{2}|U_t(l_1,t)|^2$$
$$-\frac{k_1l_1}{2}|U_x(l_1,t)|^2+l_1\int_0^{l_1}|U_xQ|\,dx. \tag{2.56}$$

Por outro lado, de (2.42) temos que

$$\int_0^{l_1}|QU_x|\,dx\le\int_0^{l_1}2\gamma|U_tU_x|+(a-\gamma)\gamma|UU_x|\,dx,$$

e assim, pela desigualdade de Young

$$\begin{aligned}\int_0^{l_1}|QU_x|\,dx &\le \frac{2\gamma}{2}\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx+\frac{2\gamma}{2}\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx+\frac{(a-\gamma)\gamma}{2}\int_0^{l_1}|U|^2\,dx\\ &\quad+\frac{(a-\gamma)\gamma}{2}\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx.\end{aligned}$$

Logo, aplicando a desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned}\int_0^{l_1}|QU_x|\,dx &\le \gamma\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx+\gamma\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx+\frac{(a-\gamma)\gamma c_p}{2}\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx\\ &\quad+\frac{(a-\gamma)\gamma}{2}\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx\le C\gamma E_1(t;U),\end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva. Portanto, usando a desigualdade acima em (2.56), concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_1(t) \;\leq\; & C\gamma E_1(t;U) + \left(\frac{1}{2} + \frac{al_1}{2\eta}\right)\int_0^{l_1} |U_t|^2\,dx + \left(\frac{k_1}{2} + \frac{al_1\eta}{2}\right)\int_0^{l_1} |U_x|^2\,dx \\ & -\frac{l_1}{2}|U_t(l_1,t)|^2 - \frac{k_1 l_1}{2}|U_x(l_1,t)|^2.\end{aligned}$$

■

Lema 2.6. *Seja $J_2(t)$ o funcional definido por*

$$J_2(t) = \int_{l_1}^{l_2} \frac{(l_2+l_1)x - 2l_1l_2}{(l_2-l_1)} V_xV_t\,dx.$$

Então, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_2(t) \;\leq\; & -\frac{(l_2+l_1)}{l_2-l_1}E_2(t;V) + C\gamma E(t) + \frac{l_2}{2}|V_t(l_2,t)|^2 + \frac{l_1}{2}|V_t(l_1,t)|^2 \\ & +\frac{k_2l_2}{2}|V_x(l_2,t)|^2 + \frac{k_2l_1}{2}|V_x(l_1,t)|^2.\end{aligned}$$

Demonstração: Multiplicando a equação (2.40) por $\sigma_2(x)V_x$, $\sigma_2 \in C^1(l_1,l_2)$, e integrando de l_1 a l_2, temos que

$$\int_{l_1}^{l_2}(\sigma_2(x)V_xV_{tt} - k_2\sigma_2(x)V_xV_{xx})\,dx = \int_{l_1}^{l_2}\sigma_2(x)V_xR\,dx.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_{l_1}^{l_2}\sigma_2(x)V_xV_t\,dx\right\} - \int_{l_1}^{l_2}\sigma_2(x)V_{xt}V_t\,dx - k_2\int_{l_1}^{l_2}\sigma_2(x)V_xV_{xx}\,dx = \int_{l_1}^{l_2}\sigma_2(x)V_xR\,dx,$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{\int_{l_1}^{l_2}\sigma_2(x)V_xV_t\,dx\right\} \;=\; & \frac{1}{2}\int_{l_1}^{l_2}\sigma_2(x)\frac{d}{dx}|V_t|^2\,dx + \frac{k_2}{2}\int_{l_1}^{l_2}\sigma_2(x)\frac{d}{dx}|V_x|^2\,dx \\ & + \int_{l_1}^{l_2}\sigma_2(x)V_xR\,dx.\end{aligned}$$

Logo, integrando por partes, temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{\int_{l_1}^{l_2}\sigma_2(x)V_xV_t\,dx\right\} \;=\; & \frac{1}{2}\left[\sigma_2(x)|V_t|^2\Big|_{l_1}^{l_2} - \int_{l_1}^{l_2}\sigma_2'(x)|V_t|^2\,dx\right] + \frac{k_2}{2}\sigma_2(x)|V_x|^2\Big|_{l_1}^{l_2} \\ & -\frac{k_2}{2}\int_{l_1}^{l_2}\sigma_2'(x)|V_x|^2\,dx + \int_{l_1}^{l_2}\sigma_2(x)V_xR\,dx.\end{aligned}$$

Considerando $\sigma_2(x) = \dfrac{(l_2+l_1)x - 2l_1l_2}{(l_2-l_1)}$, segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J_2(t) \quad \leq \quad & \frac{1}{2}\left[l_2|V_t(l_2,t)|^2 + l_1|V_t(l_1,t)|^2 - \frac{(l_2+l_1)}{(l_2-l_1)}\int_{l_1}^{l_2}|V_t|^2\,dx \right] + \frac{k_2l_2}{2}|V_x(l_2,t)|^2 \\
& + \frac{k_2l_1}{2}|V_x(l_1,t)|^2 - \frac{k_2}{2}\frac{(l_2+l_1)}{(l_2-l_1)}\int_{l_1}^{l_2}|V_x|^2\,dx + l_2\int_{l_1}^{l_2}|V_xR|\,dx. \qquad (2.57)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos que

$$
\int_{l_1}^{l_2}|V_xR|\,dx \leq \int_{l_1}^{l_2} 2\gamma|V_tV_x| + \gamma^2|VV_x|\,dx,
$$

e assim, pela desigualdade de Young,

$$
\begin{aligned}
\int_{l_1}^{l_2}|V_xR|\,dx \quad & \leq \quad \frac{2\gamma}{2}\int_{l_1}^{l_2}|V_t|^2\,dx + \frac{2\gamma}{2}\int_{l_1}^{l_2}|V_x|^2\,dx + \frac{\gamma^2}{2}\int_{l_1}^{l_2}|V|^2\,dx + \frac{\gamma^2}{2}\int_{l_1}^{l_2}|V_x|^2\,dx \\
& \leq \quad C\gamma E(t),
\end{aligned}
$$

onde C é uma constante positiva. Portanto, usando a desigualdade acima em (2.57), concluímos que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J_2(t) \quad \leq \quad & -\frac{(l_2+l_1)}{l_2-l_1}E_2(t;V) + C\gamma E(t) + \frac{l_2}{2}|V_t(l_2,t)|^2 + \frac{l_1}{2}|V_t(l_1,t)|^2 \\
& + \frac{k_2l_2}{2}|V_x(l_2,t)|^2 + \frac{k_2l_1}{2}|V_x(l_1,t)|^2.
\end{aligned}
$$

■

Lema 2.7. *Seja $J_3(t)$ o funcional definido por*

$$
J_3(t) = \int_{l_2}^{l}\frac{l_2(l-x)}{l-l_2}W_xW_t\,dx.
$$

Então, existe uma constante $C>0$ tal que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J_3(t) \quad \leq \quad & \left(\frac{l_2}{2(l-l_2)} + \frac{bl_2}{2\eta}\right)\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx + \left(\frac{k_3l_2}{2(l-l_2)} + \frac{bl_2\eta}{2}\right)\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx \\
& -\frac{l_2}{2}|W_t(l_2,t)|^2 - \frac{k_3l_2}{2}|W_x(l_2,t)|^2 + C\gamma E_3(t;W),
\end{aligned}
$$

onde η é uma constante positiva satisfazendo $\eta < \dfrac{k_3}{2b(l-l_2)}$.

Demonstração: Multiplicando a equação (2.41) por $\sigma_3(x)W_x$, $\sigma_3 \in C^1(l_2,l)$, e integrando de l_2 a l, temos que

$$
\int_{l_2}^{l}(\sigma_3(x)W_xW_{tt} - k_3\sigma_3(x)W_xW_{xx} + b\sigma_3(x)W_xW_t)\,dx = \int_{l_2}^{l}\sigma_3(x)W_xS\,dx.
$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_{l_2}^{l}\sigma_3(x)W_xW_t\,dx\right\}-\int_{l_2}^{l}\sigma_3(x)W_{xt}W_t\,dx-k_3\int_{l_2}^{l}\sigma_3(x)W_xW_{xx}\,dx$$
$$+b\int_{l_2}^{l}\sigma_3(x)W_xW_t\,dx=\int_{l_2}^{l}\sigma_3(x)W_xS\,dx,$$

de onde segue que

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_{l_2}^{l}\sigma_3(x)W_xW_t\,dx\right\}=\frac{1}{2}\int_{l_2}^{l}\sigma_3(x)\frac{d}{dx}|W_t|^2\,dx+\frac{k_3}{2}\int_{l_2}^{l}\sigma_3(x)\frac{d}{dx}|W_x|^2\,dx$$
$$-b\int_{l_2}^{l}\sigma_3(x)W_xW_t\,dx+\int_{l_2}^{l}\sigma_3(x)W_xS\,dx.$$

Logo, integrando por partes, temos que

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_{l_2}^{l}\sigma_3(x)W_xW_t\,dx\right\}=\frac{1}{2}\left[\sigma_3(x)|W_t|^2\Big|_{l_2}^{l}-\int_{l_2}^{l}\sigma_3'(x)|W_t|^2\,dx\right]+\frac{k_3}{2}\sigma_3(x)|W_x|^2\Big|_{l_2}^{l}$$
$$-\frac{k_3}{2}\int_{l_2}^{l}\sigma_3'(x)|W_x|^2\,dx-b\int_{l_2}^{l}\sigma_3(x)W_xW_t\,dx+\int_{l_2}^{l}\sigma_3(x)W_xS\,dx.$$

Considerando $\sigma_3(x)=\dfrac{l_2(l-x)}{l-l_2}$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_3(t) &= -\frac{l_2}{2}|W_t(l_2,t)|^2+\frac{l_2}{2(l-l_2)}\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx-\frac{k_3l_2}{2}|W_x(l_2,t)|^2\\&\quad+\frac{k_3l_2}{2(l-l_2)}\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx-bl_2\int_{l_2}^{l}\frac{(l-x)}{l-l_2}\,W_xW_t\,dx\\&\quad+l_2\int_{l_2}^{l}\frac{(l-x)}{l-l_2}\,|W_xS|\,dx.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_3(t) &\leq -\frac{l_2}{2}|W_t(l_2,t)|^2+\frac{l_2}{2(l-l_2)}\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx-\frac{k_3l_2}{2}|W_x(l_2,t)|^2\\&\quad+\frac{k_3l_2}{2(l-l_2)}\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx+\frac{bl_2\eta}{2}\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx+\frac{bl_2}{2\eta}\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx\\&\quad+l_2\int_{l_2}^{l}|W_xS|\,dx,\end{aligned}$$

onde η é tomado de tal forma que $\eta<\dfrac{k_3}{2b(l-l_2)}$. Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_3(t) &\leq \left(\frac{l_2}{2(l-l_2)}+\frac{bl_2}{2\eta}\right)\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx+\left(\frac{k_3l_2}{2(l-l_2)}+\frac{bl_2\eta}{2}\right)\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx\\&\quad-\frac{l_2}{2}|W_t(l_2,t)|^2-\frac{k_3l_2}{2}|W_x(l_2,t)|^2+l_2\int_{l_2}^{l}|W_xS|\,dx.\end{aligned}\tag{2.58}$$

Por outro lado, temos que

$$\int_{l_2}^{l} |W_x S|\,dx \leq \int_{l_2}^{l} 2\gamma|W_t W_x| + (b-\gamma)\gamma|W W_x|\,dx,$$

e assim, pela desigualdade de Young

$$\begin{aligned}\int_{l_2}^{l} |W_x S|\,dx \ &\leq \ \frac{2\gamma}{2}\int_{l_2}^{l} |W_t|^2\,dx + \frac{2\gamma}{2}\int_{l_2}^{l} |W_x|^2\,dx + \frac{(b-\gamma)\gamma}{2}\int_{l_2}^{l} |W|^2\,dx \\ &\quad + \frac{(b-\gamma)\gamma}{2}\int_{l_2}^{l} |W_x|^2\,dx.\end{aligned}$$

Logo, aplicando a desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned}\int_{l_2}^{l} |W_x S|\,dx \ &\leq \ \gamma\int_{l_2}^{l} |W_t|^2\,dx + \gamma\int_{l_2}^{l} |W_x|^2\,dx + \frac{(b-\gamma)\gamma c_p}{2}\int_{l_2}^{l} |W_x|^2\,dx \\ &\quad + \frac{(b-\gamma)\gamma}{2}\int_{l_2}^{l} |W_x|^2\,dx \leq C\gamma E_3(t;W),\end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva. Portanto, usando a desigualdade acima em (2.58), concluímos que existe uma constante $C>0$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_3(t) \ &\leq \ \left(\frac{l_2}{2(l-l_2)} + \frac{bl_2}{2\eta}\right)\int_{l_2}^{l} |W_t|^2\,dx + \left(\frac{k_3 l_2}{2(l-l_2)} + \frac{bl_2\eta}{2}\right)\int_{l_2}^{l} |W_x|^2\,dx \\ &\quad -\frac{l_2}{2}|W_t(l_2,t)|^2 - \frac{k_3 l_2}{2}|W_x(l_2,t)|^2 + C\gamma E_3(t;W).\end{aligned}$$

■

Lema 2.8. *O funcional $H_1(t)$ definido por*

$$H_1(t) = F_1(t) + J_1(t)$$

satisfaz

$$\frac{d}{dt}H_1(t) \leq C\gamma E_1(t;U) + A\int_0^{l_1} |U_t|^2\,dx - B\int_0^{l_1} |U_x|^2\,dx + \frac{k_1}{2\epsilon_2}|U(l_1,t)|^2,$$

onde $A = \frac{3}{2} + \frac{a}{2\epsilon_1} + \frac{al_1}{2\eta}$, $B = \frac{k_1}{2} - \left(\frac{a\epsilon_1 c_p}{2} + \frac{al_1\eta}{2}\right)$ *e C são constantes positivas. Além disso, a constante positiva ϵ_2 é tal que $\epsilon_2 < l_1$.*

Demonstração: Pelos Lemas 2.3 e 2.5, temos que existe $C>0$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H_1(t) \ &\leq \ \left(1 + \frac{a}{2\epsilon_1}\right)\int_0^{l_1} |U_t|^2\,dx - \left(k_1 - \frac{a\epsilon_1 c_p}{2}\right)\int_0^{l_1} |U_x|^2\,dx + k_1 U_x(l_1,t)U(l_1,t) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} + \frac{al_1}{2\eta}\right)\int_0^{l_1} |U_t|^2\,dx + \left(\frac{k_1}{2} + \frac{al_1\eta}{2}\right)\int_0^{l_1} |U_x|^2\,dx - \frac{l_1}{2}|U_t(l_1,t)|^2 \\ &\quad -\frac{k_1 l_1}{2}|U_x(l_1,t)|^2 + C\gamma E_1(t;U).\end{aligned}$$

Logo, aplicando a desigualdade de Young, obtemos

$$\frac{d}{dt}H_1(t) \leq \left(\frac{3}{2}+\frac{a}{2\epsilon_1}+\frac{al_1}{2\eta}\right)\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + \left(-\frac{k_1}{2}+\frac{a\epsilon_1 c_p}{2}+\frac{al_1\eta}{2}\right)\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx$$
$$+\frac{k_1\epsilon_2}{2}|U_x(l_1,t)|^2+\frac{k_1}{2\epsilon_2}|U(l_1,t)|^2-\frac{l_1}{2}|U_t(l_1,t)|^2-\frac{k_1 l_1}{2}|U_x(l_1,t)|^2+C\gamma E_1(t;U),$$

onde ϵ_2 é uma constante positiva satisfazendo $\epsilon_2 < l_1$. Como $\epsilon_1 < \dfrac{k_1}{2ac_p}$ e $\eta < \dfrac{k_1}{2al_1}$, resulta que

$$\frac{d}{dt}H_1(t) \leq C\gamma E_1(t;U) + A\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx - B\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx + \frac{k_1}{2\epsilon_2}|U(l_1,t)|^2,$$

onde $A = \dfrac{3}{2}+\dfrac{a}{2\epsilon_1}+\dfrac{al_1}{2\eta}$ e $B = \dfrac{k_1}{2}-\left(\dfrac{a\epsilon_1 c_p}{2}+\dfrac{al_1\eta}{2}\right)$ são constantes positivas. ■

Lema 2.9. *Seja $H_2(t)$ o funcional definido por*

$$H_2(t) = J_2(t) + C_0 J_1(t) + K_0 J_3(t),$$

sendo $C_0 = \max\left\{1, \dfrac{k_1}{k_2}\right\}$ e $K_0 = \max\left\{1, \dfrac{k_3}{k_2}\right\}$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H_2(t) &\leq C\gamma E(t) + C_0\left(\frac{1}{2}+\frac{al_1}{2\eta}\right)\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + C_0\left(\frac{k_1}{2}+\frac{al_1\eta}{2}\right)\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx\\ &+ K_0\left(\frac{l_2}{2(l-l_2)}+\frac{bl_2}{2\eta}\right)\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx + K_0\left(\frac{k_3 l_2}{2(l-l_2)}+\frac{bl_2\eta}{2}\right)\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx\\ &- \frac{l_2+l_1}{l_2-l_1}E_2(t;V),\end{aligned}$$

onde $\eta < \min\left\{\dfrac{k_1}{2al_1}, \dfrac{k_3}{2b(l-l_2)}\right\}$ é uma constante positiva.

Demonstração: Usando os Lemas 2.5, 2.6 e 2.7, temos que existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H_2(t) &\leq C\gamma E(t) + C_0\left(\frac{1}{2}+\frac{al_1}{2\eta}\right)\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + C_0\left(\frac{k_1}{2}+\frac{al_1\eta}{2}\right)\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx\\ &-\frac{l_1 C_0}{2}|U_t(l_1,t)|^2 - \frac{k_1 l_1 C_0}{2}|U_x(l_1,t)|^2 - \frac{(l_2+l_1)}{l_2-l_1}E_2(t;V) + \frac{l_2}{2}|V_t(l_2,t)|^2\\ &+\frac{l_1}{2}|V_t(l_1,t)|^2 + \frac{k_2 l_2}{2}|V_x(l_2,t)|^2 + \frac{k_2 l_1}{2}|V_x(l_1,t)|^2 - \frac{l_2 K_0}{2}|W_t(l_2,t)|^2\\ &+K_0\left(\frac{l_2}{2(l-l_2)}+\frac{bl_2}{2\eta}\right)\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx - \frac{k_3 l_2 K_0}{2}|W_x(l_2,t)|^2\\ &+K_0\left(\frac{k_3 l_2}{2(l-l_2)}+\frac{bl_2\eta}{2}\right)\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx,\end{aligned}$$

onde η é uma constante positiva satisfazendo $\eta < \min\left\{\frac{k_1}{2al_1}, \frac{k_3}{2b(l-l_2)}\right\}$. Assim, pelas condições de transmissão,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H_2(t) \;\leq\;& C\gamma E(t) + C_0\left(\frac{1}{2}+\frac{al_1}{2\eta}\right)\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + C_0\left(\frac{k_1}{2}+\frac{al_1\eta}{2}\right)\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx\\
&+K_0\left(\frac{l_2}{2(l-l_2)}+\frac{bl_2}{2\eta}\right)\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx + K_0\left(\frac{k_3l_2}{2(l-l_2)}+\frac{bl_2\eta}{2}\right)\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx\\
&-\frac{(l_2+l_1)}{l_2-l_1}E_2(t;V) + \left(\frac{l_2}{2}-\frac{K_0l_2}{2}\right)|V_t(l_2,t)|^2 + \left(\frac{l_1}{2}-\frac{C_0l_1}{2}\right)|V_t(l_1,t)|^2\\
&+\left(\frac{k_2l_2}{2}-\frac{K_0k_2^2l_2}{2k_3}\right)|V_x(l_2,t)|^2 + \left(\frac{k_2l_1}{2}-\frac{C_0k_2^2l_1}{2k_1}\right)|V_x(l_1,t)|^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H_2(t) \;\leq\;& C\gamma E(t) + C_0\left(\frac{1}{2}+\frac{al_1}{2\eta}\right)\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + C_0\left(\frac{k_1}{2}+\frac{al_1\eta}{2}\right)\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx\\
&+ K_0\left(\frac{l_2}{2(l-l_2)}+\frac{bl_2}{2\eta}\right)\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx + K_0\left(\frac{k_3l_2}{2(l-l_2)}+\frac{bl_2\eta}{2}\right)\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx\\
&- \frac{l_2+l_1}{l_2-l_1}E_2(t,V),
\end{aligned}$$

desde que $C_0 = \max\left\{1, \frac{k_1}{k_2}\right\}$ e $K_0 = \max\left\{1, \frac{k_3}{k_2}\right\}$. ■

Lema 2.10. *O funcional $H_3(t)$ definido por*

$$H_3(t) = \frac{l_2}{l-l_2}\,F_3(t) + J_3(t)$$

satisfaz

$$\frac{d}{dt}H_3(t) \leq K\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx - D\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx + \frac{k_3}{2\epsilon_4}|W(l_2,t)|^2 + C\gamma E_3(t;W),$$

onde $K = \frac{3l_2}{2(l-l_2)}+\frac{b}{2\epsilon_3}+\frac{bl_2}{2\eta}$, $D = \frac{k_3l_2}{2(l-l_2)} - \frac{b\epsilon_3c_pl_2}{2(l-l_2)} - \frac{bl_2\eta}{2}$ *e* C *são constantes positivas. Além disso, a constante positiva* ϵ_4 *é tal que* $\epsilon_4 < l_2$.

Demonstração: Pelos Lemas 2.4 e 2.7, temos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H_3(t) \;\leq\;& \frac{l_2}{l-l_2}\left(1+\frac{b}{2\epsilon_3}\right)\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx - \frac{l_2}{l-l_2}\left(k_3-\frac{b\epsilon_3c_p}{2}\right)\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx\\
&-\frac{k_3l_2}{l-l_2}W_x(l_2,t)W(l_2,t) + \left(\frac{l_2}{2(l-l_2)}+\frac{bl_2}{2\eta}\right)\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx - \frac{l_2}{2}|W_t(l_2,t)|^2\\
&+\left(\frac{k_3l_2}{2(l-l_2)}+\frac{bl_2\eta}{2}\right)\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx - \frac{k_3l_2}{2}|W_x(l_2,t)|^2 + C\gamma E_3(t;W).
\end{aligned}$$

Logo, aplicando a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H_3(t) \;\leq\;& \left(\frac{3l_2}{2(l-l_2)}+\frac{bl_2}{2\epsilon_3(l-l_2)}+\frac{bl_2}{2\eta}\right)\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx+\frac{k_3\epsilon_4}{2}|W_x(l_2,t)|^2\\&+\frac{k_3}{2\epsilon_4}|W(l_2,t)|^2+\left(-\frac{k_3l_2}{2(l-l_2)}+\frac{b\epsilon_3c_pl_2}{2(l-l_2)}+\frac{bl_2\eta}{2}\right)\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx\\&-\frac{l_2}{2}|W_t(l_2,t)|^2-\frac{k_3l_2}{2}|W_x(l_2,t)|^2+C\gamma E_3(t;W),\end{aligned}$$

onde ϵ_4 é uma constante positiva satisfazendo $\epsilon_4 < l_2$. Como $\epsilon_3 < \dfrac{k_3}{2bc_p}$ e $\eta < \dfrac{k_3}{2b(l-l_2)}$, resulta que existem constantes K, D e C positivas tais que

$$\frac{d}{dt}H_3(t)\leq K\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx-D\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx+\frac{k_3}{2\epsilon_4}|W(l_2,t)|^2+C\gamma E_3(t;W),$$

onde $K=\dfrac{3l_2}{2(l-l_2)}+\dfrac{b}{2\epsilon_3}+\dfrac{bl_2}{2\eta}$ e $D=\dfrac{k_3l_2}{2(l-l_2)}-\dfrac{b\epsilon_3c_pl_2}{2(l-l_2)}-\dfrac{bl_2\eta}{2}$. ■

Lema 2.11. *Para todo $\delta > 0$, existe uma constante $C_\delta > 0$ independente dos dados iniciais, tal que*

$$\begin{aligned}\int_0^T|U(l_1,t)|^2\,dt+\int_0^T|W(l_2,t)|^2\,dt\leq \delta\int_0^T E(t)\,dt+&\\+C_\delta\left\{\int_0^T\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dxdt+\int_0^T\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dxdt\right\}&,\end{aligned}$$

para toda solução forte (U,V,W) do sistema $(2.39)-(2.50)$, e T suficientemente grande.

Demonstração: Provaremos por contradição. Suponha que existe uma sequência de valores iniciais $(U^{0,\nu},V^{0,\nu},W^{0,\nu})\in\mathcal{H}^2(\Omega)\cap\mathcal{V}$ e $(U^{1,\nu},V^{1,\nu},W^{1,\nu})\in\mathcal{V}$, e uma constante positiva δ_0 tal que a solução correspondente (U^ν,V^ν,W^ν) do sistema $(2.39)-(2.50)$ satisfaça

$$\int_0^T|U^\nu(l_1,t)|^2\,dt+\int_0^T|W^\nu(l_2,t)|^2\,dt=1 \tag{2.59}$$

e verifique a desigualdade

$$1>\delta_0\int_0^T E^\nu(t)\,dt+\nu\left\{\int_0^T\int_0^{l_1}|U_t^\nu|^2\,dxdt+\int_0^T\int_{l_2}^{l}|W_t^\nu|^2\,dxdt\right\}$$

para cada ν, onde $E^\nu(t)=E(t;U^\nu,V^\nu,W^\nu)$. Assim, da desigualdade anterior temos que

$$\int_0^T E^\nu(t)\,dt \quad \text{é limitada para cada} \quad \nu, \tag{2.60}$$

e também

$$\int_0^T \int_0^{l_1} |U_t^\nu|^2\, dxdt \to 0 \quad \text{e} \quad \int_0^T \int_{l_2}^{l} |W_t^\nu|^2\, dxdt \to 0 \quad \text{quando} \quad \nu \to \infty. \tag{2.61}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(U^\nu,\, V^\nu,\, W^\nu) &\quad \text{é limitado em} \quad L^\infty(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega)),\\
(U_t^\nu,\, V_t^\nu,\, W_t^\nu) &\quad \text{é limitado em} \quad L^\infty(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega)).
\end{aligned}$$

Portanto, existe uma subsequência de (U^ν, V^ν, W^ν), que será denotada da mesma forma, tal que

$$\begin{aligned}
(U^\nu, V^\nu, W^\nu) \overset{*}{\rightharpoonup} (U, V, W) &\quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega)),\\
(U_t^\nu, V_t^\nu, W_t^\nu) \rightharpoonup (U_t, V_t, W_t) &\quad \text{em} \quad L^2(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega)).
\end{aligned}$$

Então, aplicando o Lema de Kim, com $a = 0$ e $b = 1$, temos que

$$(U^\nu, V^\nu, W^\nu) \to (U, V, W) \quad \text{em} \quad C(0,T;H^r(\Omega)),$$

onde $r < 1$. Assim, usando (2.59), temos

$$\int_0^T |U(l_1,t)|^2\, dt + \int_0^T |W(l_2,t)|^2\, dt = 1. \tag{2.62}$$

Por outro lado, a convergência em (2.61) implica que

$$U_t = 0 \quad \text{q.s. em} \quad (0,l_1) \times (0,T), \tag{2.63}$$

$$W_t = 0 \quad \text{q.s. em} \quad (l_2,l) \times (0,T). \tag{2.64}$$

Logo, temos que (U, V, W) satisfaz

$$-k_1 U_{xx} = (a-\gamma)\gamma U, \tag{2.65}$$

$$V_{tt} - k_2 V_{xx} = 2\gamma V_t - \gamma^2 V, \tag{2.66}$$

$$-k_3 W_{xx} = (b-\gamma)\gamma W. \tag{2.67}$$

Assim, multiplicando (2.65) por U, integrando de 0 a l_1, aplicando integração por partes e usando a desigualdade de Poincaré, temos que

$$\begin{aligned}
-k_1\int_0^{l_1} U_{xx}U\,dx &= -k_1\left[U_xU\Big|_0^{l_1} - \int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx\right]\\
&= -k_1U_x(l_1,t)U(l_1,t) + k_1\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx\\
&= (a-\gamma)\gamma\int_0^{l_1}|U|^2dx\\
&\leq (a-\gamma)\gamma c_p\int_0^{l_1}|U_x|^2dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$-k_1U_x(l_1,t)U(l_1,t) + k_1\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx \leq (a-\gamma)\gamma c_p\int_0^{l_1}|U_x|^2dx. \tag{2.68}$$

Agora, multiplicando (2.67) por W, integrando de l_2 a l, aplicando integração por partes e usando a desigualdade de Poincaré, temos que

$$\begin{aligned}
-k_3\int_{l_2}^{l} W_{xx}W\,dx &= -k_3\left[W_xW\Big|_{l_2}^{l} - \int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx\right]\\
&= k_3W_x(l_2,t)W(l_2,t) + k_3\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx\\
&= (b-\gamma)\gamma\int_{l_2}^{l}|W|^2dx\\
&\leq (b-\gamma)\gamma c_p\int_{l_2}^{l}|W_x|^2dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$k_3W_x(l_2,t)W(l_2,t) + k_3\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx \leq (b-\gamma)\gamma c_p\int_{l_2}^{l}|W_x|^2dx. \tag{2.69}$$

Por outro lado, derivando a equação (2.66) em t, e considerando $\varphi = V_t$, temos que φ satisfaz

$$\begin{cases}
\varphi_{tt} - k_2\varphi_{xx} = 2\gamma\varphi_t - \gamma^2\varphi,\\
\varphi(l_1,t) = \varphi(l_2,t) = 0,\\
\varphi_x(l_1,t) = \varphi_x(l_2,t) = 0,\\
\varphi(x,0) = \varphi^0,\\
\varphi_t(x,0) = \varphi^1,
\end{cases}$$

com $\varphi^0 \in \mathcal{V}$ e $\varphi^1 \in L^2(l_1, l_2)$. Agora, considerando $\widetilde{v} = e^{-\gamma t}\varphi$, temos que $\widetilde{v}$ satisfaz

$$\begin{cases} \widetilde{v}_{tt} - k_2 \widetilde{v}_{xx} = 0, \\ \widetilde{v}(l_1, t) = \widetilde{v}(l_2, t) = 0, \\ \widetilde{v}_x(l_1, t) = \widetilde{v}_x(l_2, t) = 0, \\ \widetilde{v}(x, 0) = \widetilde{v}^0, \\ \widetilde{v}_t(x, 0) = \widetilde{v}^1, \end{cases}$$

com $\widetilde{v}^0 \in \mathcal{V}$ e $\widetilde{v}^1 \in L^2(l_1, l_2)$. Logo, pelos lemas 1.20 e 1.21, segue que $\widetilde{v} \equiv 0$, e, assim, $\varphi \equiv 0$. Portanto, $V_t \equiv 0$, e assim, da equação (2.66), segue que $-k_2 V_{xx} = -\gamma^2 V$ em $(l_1, l_2) \times (0, T)$. Assim, usando as condições de transmissão, temos que

$$\begin{aligned} -k_2 \int_{l_1}^{l_2} V_{xx} V \, dx &= -k_2 \left[V_x V \Big|_{l_1}^{l_2} - \int_{l_1}^{l_2} |V_x|^2 \, dx \right] \\ &= -k_2 V_x(l_2, t) V(l_2, t) + k_2 V_x(l_1, t) V(l_1, t) + k_2 \int_{l_1}^{l_2} |V_x|^2 \, dx \\ &= -k_3 W_x(l_2, t) W(l_2, t) + k_1 U_x(l_1, t) U(l_1, t) + k_2 \int_{l_1}^{l_2} |V_x|^2 \, dx \\ &= -\gamma^2 \int_{l_1}^{l_2} |V|^2 dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$-k_3 W_x(l_2, t) W(l_2, t) + k_1 U_x(l_1, t) U(l_1, t) + k_2 \int_{l_1}^{l_2} |V_x|^2 \, dx = -\gamma^2 \int_{l_1}^{l_2} |V|^2 dx. \quad (2.70)$$

Logo, somando (2.68), (2.69) e (2.70), obtemos

$$c_1 \int_0^{l_1} |U_x|^2 \, dx + k_2 \int_{l_1}^{l_2} |V_x|^2 \, dx + c_3 \int_{l_2}^{l} |W_x|^2 \, dx \leq -\gamma^2 \int_{l_1}^{l_2} |V|^2 dx \leq 0,$$

onde c_1 e c_3 são constantes positivas (desde que γ seja suficientemente pequeno), de onde segue que

$$\int_0^{l_1} |U_x|^2 \, dx + \int_{l_2}^{l} |W_x|^2 \, dx \leq 0.$$

Por outro lado, usando as desigualdades de Gagliardo-Nirenberg, Young e Poincaré, temos que

$$\begin{aligned} |U(l_1, t)| &\leq ||U(t)||_{L^\infty(0, l_1)} \leq ||U(t)||_{L^2(0, l_1)}^{\frac{1}{2}} ||U(t)||_{H^1(0, l_1)}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2} ||U(t)||_{L^2(0, l_1)} + \frac{1}{2} ||U(t)||_{H^1(0, l_1)} \\ &\leq C ||U_x(t)||_{L^2(0, l_1)}, \end{aligned}$$

$C > 0$ uma constante. Assim, obtemos que

$$|U(l_1,t)|^2 \leq C \int_0^{l_1} |U_x|^2\,dx,$$

e da mesma forma,

$$|W(l_2,t)|^2 \leq C \int_{l_2}^{l} |W_x|^2\,dx,$$

Logo,

$$\int_0^T |U(l_1,t)|^2\,dt + \int_0^T |W(l_2,t)|^2\,dt \leq C \int_0^T \int_0^{l_1} |U_x|^2\,dxdt + C\int_0^T \int_{l_2}^{l} |W_x|^2\,dxdt \leq 0,$$

o que contradiz (2.62). Portanto, para qualquer $\delta > 0$, existe $C_\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\int_0^T |U(l_1,t)|^2\,dt + \int_0^T |W(l_2,t)|^2\,dt \leq \delta \int_0^T E(t)\,dt +&\\ + C_\delta\left\{\int_0^T \int_0^{l_1} |U_t|^2\,dxdt + \int_0^T \int_{l_2}^{l} |W_t|^2\,dxdt\right\}&.\end{aligned}$$

■

No próximo teorema, definimos $\mathcal{E}(t) := E(t;u,v,w)$, onde $E(t;u,v,w)$ é dado por (2.10).

Teorema 2.12. *Seja (u,v,w) uma solução forte do problema de transmissão* (2.1)−(2.9). *Então existe uma constante positiva C_0 tal que*

$$\mathcal{E}(t) \leq C_0 E(0) e^{-2\gamma t}.$$

Demonstração: Considere o seguinte funcional

$$\mathcal{L}(t) = NE(t) + M_0(H_1(t) + H_3(t)) + H_2(t).$$

Pelos Lemas 2.2, 2.8, 2.9 e 2.10, temos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \;\leq\; & -\left(aN - AM_0 - C_0\left(\frac{1}{2} + \frac{al_1}{2\eta}\right)\right)\int_0^{l_1} |U_t|^2\,dx + \frac{k_1 M_0}{2\epsilon_2}|U(l_1,t)|^2\\ & -\left(bN - KM_0 - K_0\left(\frac{l_2}{2(l-l_2)} + \frac{bl_2}{2\eta}\right)\right)\int_{l_2}^{l} |W_t|^2\,dx + \frac{k_3 M_0}{2\epsilon_4}|W(l_2,t)|^2\\ & -\left(BM_0 - C_0\left(\frac{k_1}{2} + \frac{al_1\eta}{2}\right)\right)\int_0^{l_1} |U_x|^2\,dx - \frac{l_2 + l_1}{l_2 - l_1}\,E_2(t;V) + C\gamma E(t)\\ & -\left(DM_0 - K_0\left(\frac{k_3 l_2}{2(l-l_2)} + \frac{bl_2\eta}{2}\right)\right)\int_{l_2}^{l} |W_x|^2\,dx.\end{aligned}$$

Integrando a igualdade acima de 0 a t, e aplicando o Lema 2.11, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t)-\mathcal{L}(0) \;\leq\;& -\left(aN - AM_0 - C_0\left(\frac{1}{2}+\frac{al_1}{2\eta}\right)\right)\int_0^t\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dxds\\
&-\left(BM_0 - C_0\left(\frac{k_1}{2}+\frac{al_1\eta}{2}\right)\right)\int_0^t\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dxds\\
&-\left(bN - KM_0 - K_0\left(\frac{l_2}{2(l-l_2)}+\frac{bl_2}{2\eta}\right)\right)\int_0^t\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dxds\\
&-\left(DM_0 - K_0\left(\frac{k_3l_2}{2(l-l_2)}+\frac{bl_2\eta}{2}\right)\right)\int_0^t\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dxds\\
&+k\delta\int_0^t E(s)\,ds + kC_\delta\int_0^t\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dxds + kC_\delta\int_0^t\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dxds\\
&-\frac{l_2+l_1}{l_2-l_1}\int_0^t E_2(s;V)\,ds + C\gamma\int_0^t E(s)\,ds,
\end{aligned}$$

onde $k=\max\left\{\dfrac{k_1M_0}{2\epsilon_2},\dfrac{k_3M_0}{2\epsilon_4}\right\}$. Tomando δ e γ suficientemente pequenos e N e M_0 suficientemente grandes, com $N >> M_0$, concluímos que existe uma constante positiva N_0 tal que

$$\mathcal{L}(t)-\mathcal{L}(0)\leq -N_0\int_0^t E(s)\,ds,$$

ou seja,

$$\mathcal{L}(t)\leq\mathcal{L}(0). \tag{2.71}$$

Agora, observe que existem constantes positivas N_1 e N_2 tais que

$$N_1E(t)\leq\mathcal{L}(t)\leq N_2E(t). \tag{2.72}$$

De fato, utilizando as desigualdades de Young e Poincaré, obtemos que

$$\begin{aligned}
H_1(t) &= \int_0^{l_1}UU_t\,dx - \int_0^{l_1}xU_xU_t\,dx\\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^{l_1}|U|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + \frac{l_1}{2}\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx + \frac{l_1}{2}\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx\\
&\leq \frac{c_p}{2}\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx + \frac{1+l_1}{2}\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + \frac{l_1}{2}\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx\\
&\leq C_1E(t),
\end{aligned}$$

onde C_1 uma constante positiva,

$$
\begin{aligned}
H_2(t) &= \int_{l_1}^{l_2} \frac{(l_2-l_1)x - 2l_1l_2}{(l_2-l_1)} V_xV_t\,dx - C_0\int_0^{l_1} xU_xU_t\,dx + K_0\int_{l_2}^{l} \frac{l_2(l-x)}{l-l_2} W_xW_t\,dx \\
&\leq l_2\int_{l_1}^{l_2} V_xV_t\,dx + C_0l_1\int_0^{l_1} U_xU_t\,dx + K_0l_2\int_{l_2}^{l} W_xW_t\,dx \\
&\leq \frac{l_2}{2}\int_{l_1}^{l_2} |V_x|^2\,dx + \frac{l_2}{2}\int_{l_1}^{l_2} |V_t|^2\,dx \frac{C_0l_1}{2}\int_0^{l_1} |U_x|^2\,dx + \frac{C_0l_1}{2}\int_0^{l_1} |U_t|^2\,dx \\
&\quad + \frac{K_0l_2}{2}\int_{l_2}^{l} |W_x|^2 + \frac{K_0l_2}{2}\int_{l_2}^{l} |W_t|^2\,dx \\
&\leq C_2E(t),
\end{aligned}
$$

onde C_2 uma constante positiva, e

$$
\begin{aligned}
H_3(t) &= \frac{l_2}{(l-l_2)}\int_{l_2}^{l} WW_t\,dx + \int_{l_2}^{l} \frac{l_2(l-x)}{(l-l_2)} W_xW_t\,dx \\
&\leq \frac{l_2}{2(l-l_2)}\int_{l_2}^{l} |W|^2\,dx + \frac{l_2}{2(l-l_2)}\int_{l_2}^{l} |W_t|^2\,dx + \frac{l_2}{2}\int_{l_2}^{l} |W_x|^2\,dx + \frac{l_2}{2}\int_{l_2}^{l} |W_t|^2\,dx \\
&\leq \frac{l_2c_p}{2(l-l_2)}\int_{l_2}^{l} |W_x|^2\,dx + \frac{l_2(1+l-l_2)}{2(l-l_2)}\int_{l_2}^{l} |W_t|^2\,dx + \frac{l_2}{2}\int_{l_2}^{l} |W_x|^2\,dx \\
&\leq C_3E(t),
\end{aligned}
$$

onde C_3 é uma constante positiva. Assim, segue que existe uma constante N_2 tal que

$$\mathcal{L}(t) \leq N_2E(t).$$

Por outro lado, temos também que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) &\geq NE(t) - M_0C_1E(t) - M_0C_3E(t) - C_2E(t) \\
&\geq N_1E(t),
\end{aligned}
$$

onde N_1 é uma constante positiva. Logo,existem constantes positivas N_1 e N_2 tais que

$$N_1E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq N_2E(t).$$

Logo, de (2.71) e (2.72), segue que

$$N_1E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0) \leq N_2E(0),$$

o que implica

$$E(t) \leq N_3E(0), \tag{2.73}$$

onde $N_3 = N_2/N_1$. Assim, para completarmos a demonstração basta provarmos que

$$\mathcal{E}(t)e^{2\gamma t} \leq N_4 E(t),$$

onde $N_4 > 0$ é constante, para obtermos o decaimento exponencial. De fato, temos que

$$\int_0^{l_1} |u_x|^2 e^{2\gamma t}\, dx = \int_0^{l_1} |U_x|^2\, dx,$$

e

$$\begin{aligned}\int_0^{l_1} |u_t|^2 e^{2\gamma t}\, dx &\leq \int_0^{l_1} (|U_t| + \gamma|U|)^2\, dx \leq 2\int_0^{l_1} |U_t|^2\, dx + 2\gamma \int_0^{l_1} |U|^2\, dx \\ &\leq 2\int_0^{l_1} |U_t|^2\, dx + 2\gamma c_p \int_0^{l_1} |U_x|^2\, dx,\end{aligned}$$

de onde segue que existe uma constante positiva c_1 tal que

$$E_1(t;u)e^{2\gamma t} \leq c_1 E_1(t;U), \tag{2.74}$$

e, da mesma forma, obtemos a existência de constantes positiva c_2 e c_3 tais que

$$E_2(t;v)e^{2\gamma t} \leq c_2 E_2(t;V), \tag{2.75}$$

$$E_3(t;w)e^{2\gamma t} \leq c_3 E_3(t;W). \tag{2.76}$$

Portanto, de (2.74), (2.75) e (2.76), segue que existe uma constante $N_4 > 0$ tal que

$$\mathcal{E}(t)e^{2\gamma t} \leq N_4 E(t).$$

Logo, pela desigualdade acima e de (2.73) concluímos que

$$\mathcal{E}(t)e^{2\gamma t} \leq C_0 E(0),$$

onde $C_0 = N_4 N_3$. Portanto

$$\mathcal{E}(t) \leq C_0 E(0) e^{-2\gamma t},$$

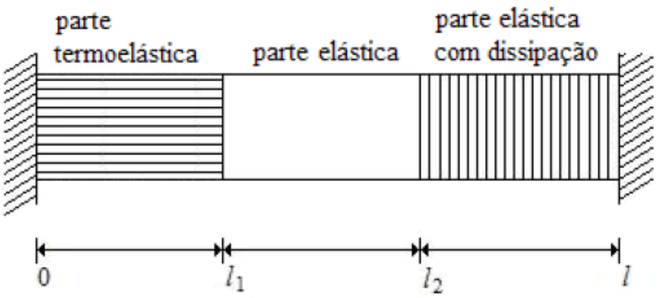
concluindo nossa demonstração.

■

CAPÍTULO 3
PROBLEMA DE TRANSMISSÃO PARA O SISTEMA TERMOELÁSTICO

Neste capítulo mostraremos que ao substituirmos uma das dissipações do problema (2.1)-(2.9) por uma dissipação térmica, mantemos a estabilidade exponencial do sistema.

Mais precisamente, considere um material unidimensional definido no intervalo $[0,l] \subset \mathbb{R}$, e seja $l_1,\ l_2 \in (0,l)$, com $l_1 < l_2$. Assumimos que o material é termoelástico sobre $(0,l_1)$, elástico sobre (l_1,l_2) e elástico dissipativo sobre (l_2,l).



O sistema que modela a situação acima é dado por

$$u_{tt} - k_1 u_{xx} + a u_t + m\theta_x = 0, \quad x \in (0,l_1),\ t > 0, \tag{3.1}$$

$$\theta_t - \alpha\theta_{xx} + m u_{xt} = 0, \quad x \in (0,l_1),\ t > 0, \tag{3.2}$$

$$v_{tt} - k_2 v_{xx} = 0, \quad x \in (l_1,l_2),\ t > 0, \tag{3.3}$$

$$w_{tt} - k_3 w_{xx} + b w_t = 0, \quad x \in (l_2,l),\ t > 0, \tag{3.4}$$

onde k_1, k_2, k_3, m, a, α e b são constantes positivas. As funções $u = u(x,t)$, $\theta = \theta(x,t)$, $v = v(x,t)$ e $w = w(x,t)$, satisfazem as condições de fronteira

$$u(0,t) = w(l,t) = \theta(0,t) = 0, \quad t > 0 \tag{3.5}$$

as condições de transmissão

$$u(l_1,t) = v(l_1,t), \quad k_1 u_x(l_1,t) - m\theta(l_1,t) = k_2 v_x(l_1,t), \quad t > 0, \tag{3.6}$$

$$v(l_2,t) = w(l_2,t), \quad k_2 v_x(l_2,t) = k_3 w_x(l_2,t), \quad t > 0, \tag{3.7}$$

$$\theta_x(l_1,t) = 0, \quad t > 0, \tag{3.8}$$

e as condições iniciais

$$u(x,0)=u^0(x),\quad u_t(x,0)=u^1(x),\quad \theta(x,0)=\theta^0(x),\quad x\in(0,l_1), \tag{3.9}$$

$$v(x,0)=v^0(x),\quad v_t(x,0)=v^1(x),\quad x\in(l_1,l_2), \tag{3.10}$$

$$w(x,0)=w^0(x),\quad w_t(x,0)=w^1(x),\quad x\in(l_2,l). \tag{3.11}$$

Consideramos o conjunto Ω e os espaços $\mathcal{L}^2(\Omega)$, $\mathcal{H}^1(\Omega)$, $\mathcal{H}^2(\Omega)$ e $\mathcal{V}$ como definidos no Capítulo 1. Denotaremos por H^1_* o espaço

$$H^1_*=\{\theta\in H^1(0,l_1):\theta(0)=0\},$$

que juntamente com a norma

$$||\theta||^2_{H^1_*}:=\int_0^{l_1}|\theta_x|^2\,dx,$$

é um espaço de Hilbert.

Denotaremos por E_1, E_2 e E_3 as energias associadas a cada equação:

$$E_1(t;u,\theta)=\frac{1}{2}\int_0^{l_1}|u_t|^2+k_1|u_x|^2+|\theta|^2\,dx,$$
$$E_2(t;v)=\frac{1}{2}\int_{l_1}^{l_2}|v_t|^2+k_2|v_x|^2\,dx,$$
$$E_3(t;w)=\frac{1}{2}\int_{l_2}^{l}|w_t|^2+k_3|w_x|^2\,dx,$$

e finalmente por

$$\widetilde{E}(t;u,\theta,v,w)=E_1(t;u,\theta)+E_2(t;v)+E_3(t;w). \tag{3.12}$$

3.1 Existência de Solução

Inicialmente definiremos o que se entende por solução fraca do problema (3.1)-(3.11). Para isso, sejam $\vartheta\in\mathcal{D}(0,T)$, $(\phi,\psi,\varphi)\in\mathcal{V}$ e $\xi\in H^1_*$. Assim, multiplicando a equação (3.1) por $\phi\vartheta$, a equação (3.2) por $\xi\vartheta$, a equação (3.3) por $\psi\vartheta$ e a equação (3.4) por $\varphi\vartheta$, e integrando sobre $(0,l_1)\times(0,T)$, $(0,l_1)\times(0,T)$, $(l_1,l_2)\times(0,T)$ e $(l_2,l)\times(0,T)$, respectivamente, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_0^{l_1} (u_{tt} - k_1 u_{xx} + a u_t + m\theta_x)\phi\vartheta \, dxdt + \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} (v_{tt} - k_2 v_{xx})\psi\vartheta \, dxdt \\
&+ \int_0^T \int_{l_2}^{l} (w_{tt} - k_3 w_{xx} + b w_t)\varphi\vartheta \, dxdt = 0, \\
&\int_0^T \int_0^{l_1} (\theta_t - \alpha\theta_{xx} + m u_{xt})\xi\vartheta \, dxdt = 0.
\end{aligned}
$$

Logo, integrando por partes, temos

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^{l_1} \int_0^T u_t \phi\vartheta' \, dtdx + k_1 \int_0^T \int_0^{l_1} u_x \phi_x \vartheta \, dxdt + a \int_0^T \int_0^{l_1} u_t \phi\vartheta \, dxdt \\
&-m \int_0^T \int_0^{l_1} \theta\phi_x \vartheta \, dxdt - \int_{l_1}^{l_2} \int_0^T v_t \psi\vartheta' \, dtdx + k_2 \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} v_x \psi_x \vartheta \, dxdt \\
&-\int_{l_2}^{l} \int_0^T w_t \varphi\vartheta' \, dtdx + k_3 \int_0^T \int_{l_2}^{l} w_x \varphi_x \vartheta \, dxdt + b \int_0^T \int_{l_2}^{l} w_t \varphi\vartheta \, dxdt = 0, \\
&-\int_0^T \int_0^{l_1} \theta\xi\vartheta' \, dxdt + \alpha \int_0^T \int_0^{l_1} \theta_x \xi_x \vartheta \, dxdt - m \int_0^{l_1} \int_0^T u_x \xi\vartheta' \, dtdx = 0.
\end{aligned}
$$

Assim, pela definição de derivada fraca,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \frac{d}{dt} \int_0^{l_1} u_t \phi\vartheta \, dxdt + k_1 \int_0^T \int_0^{l_1} u_x \phi_x \vartheta \, dxdt + a \int_0^T \int_0^{l_1} u_t \phi\vartheta \, dxdt \\
&-m \int_0^T \int_0^{l_1} \theta\phi_x \vartheta \, dxdt + \int_0^T \frac{d}{dt} \int_{l_1}^{l_2} v_t \psi\vartheta \, dxdt + k_2 \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} v_x \psi_x \vartheta \, dxdt \\
&+ \int_0^T \frac{d}{dt} \int_{l_2}^{l} w_t \varphi\vartheta \, dxdt + k_3 \int_0^T \int_{l_2}^{l} w_x \varphi_x \vartheta \, dxdt + b \int_0^T \int_{l_2}^{l} w_t \varphi\vartheta \, dxdt = 0, \\
&\int_0^T \frac{d}{dt} \int_0^{l_1} \theta\xi\vartheta \, dxdt + \alpha \int_0^T \int_0^{l_1} \theta_x \xi_x \vartheta \, dxdt + m \int_0^T \frac{d}{dt} \int_0^{l_1} u_x \xi\vartheta \, dxdt = 0,
\end{aligned}
$$

para toda $\vartheta \in \mathcal{D}(0,T)$. Portanto, pelo lema de Du Bois Raymond, concluímos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \int_0^{l_1} u_t \phi \, dx + k_1 \int_0^{l_1} u_x \phi_x \, dx + a \int_0^{l_1} u_t \phi \, dx - m \int_0^{l_1} \theta\phi_x \, dx + \frac{d}{dt} \int_{l_1}^{l_2} v_t \psi \, dx \\
&+k_2 \int_{l_1}^{l_2} v_x \psi_x \, dx + \frac{d}{dt} \int_{l_2}^{l} w_t \varphi \, dx + k_3 \int_{l_2}^{l} w_x \varphi_x \, dx + b \int_{l_2}^{l} w_t \varphi \, dx = 0, \\
&\frac{d}{dt} \int_0^{l_1} \theta\xi \, dx + \alpha \int_0^{l_1} \theta_x \xi_x \, dx + m \frac{d}{dt} \int_0^{l_1} u_x \xi \, dx = 0,
\end{aligned}
$$

igualdade no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$, para toda $(\phi, \psi, \varphi) \in \mathcal{V}$, e toda $\xi \in H^1_*$.

A quadra (u, θ, v, w) que satisfaz a equação acima é dita solução do sistema (3.1)-(3.11).

Teorema 3.1. *Considere* $(u^0, v^0, w^0) \in \mathcal{V}$, $(u^1, v^1, w^1) \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ *e* $\theta^0 \in L^2(0, l_1)$, *satisfazendo as condições de transmissão. Então, existe uma única solução* (u, θ, v, w) *do sistema* $(3.1) - (3.11)$ *satisfazendo*

$$
\begin{aligned}
&(u, v, w) \in L^\infty(0, T; \mathcal{V}),\\
&(u_t, v_t, w_t) \in L^\infty(0, T; \mathcal{L}^2(\Omega)),\\
&\theta \in L^\infty(0, T; L^2(0, l_1)) \cap L^2(0, T, H^1_*).
\end{aligned}
$$

Além disso, se $(u^0, v^0, w^0) \in \mathcal{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$, $(u^1, v^1, w^1) \in \mathcal{V}$ *e* $\theta^0 \in H^2(0, l_1) \cap H^1_*$, *então a solução satisfaz*

$$
\begin{aligned}
&(u, v, w) \in L^\infty(0, T; \mathcal{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{V}),\\
&(u_t, v_t, w_t) \in L^\infty(0, T; \mathcal{V}),\\
&(u_{tt}, v_{tt}, w_{tt}) \in L^\infty(0, T; \mathcal{L}^2(\Omega)),\\
&\theta \in L^\infty(0, T; H^2(0, l_1) \cap H^1_*),\\
&\theta \in L^\infty(0, T; L^2(0, l_1)) \cap L^2(0, T; H^1_*).
\end{aligned}
$$

Neste caso, dizemos que (u, θ, v, w) *é uma solução forte.*

Demonstração: Provaremos o teorema acima através do método de Galerkin.

Considere $\{(\phi^i, \psi^i, \varphi^i), i \in \mathbb{N}\}$ uma base de $\mathcal{V}$ e por $\{(\xi^i), i \in \mathbb{N}\}$ uma base de H^1_*. Denotaremos

$$V_m = span\{(\phi^1, \psi^1, \varphi^1), ..., (\phi^m, \psi^m, \varphi^m)\}, \quad \text{e} \quad U_m = span\{(\xi^1, ..., \xi^m)\}.$$

Mostraremos que existe uma única solução

$$(u^m(t), v^m(t), w^m(t)) = \sum_{j=1}^{m} h_{j,m}(t)(\phi^j, \psi^j, \varphi^j)$$

e

$$\theta^m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{j,m}(t)\xi^j,$$

do problema aproximado

$$\int_0^{l_1} u_{tt}^m \phi^j\,dx + k_1\int_0^{l_1} u_x^m \phi_x^j\,dx + a\int_0^{l_1} u_t^m\phi^j\,dx - m\int_0^{l_1}\theta^m\phi_x^j\,dx + \int_{l_1}^{l_2} v_{tt}^m\psi^j\,dx$$
$$+k_2\int_{l_1}^{l_2} v_x^m\psi_x^j\,dx + \int_{l_2}^{l} w_{tt}^m\varphi^j\,dx + k_3\int_{l_2}^{l} w_x^m\varphi_x^j\,dx + b\int_{l_2}^{l} w_t^m\varphi^j\,dx = 0, \tag{3.13}$$
$$\int_0^{l_1}\theta_t^m\xi^j\,dx + \alpha\int_0^{l_1}\theta_x^m\xi_x^j\,dx + m\int_0^{l_1} u_{tx}^m\xi^j\,dx = 0. \tag{3.14}$$

$j = 1, ..., m$, com os dados iniciais

$$\begin{aligned}(u^m(0), v^m(0), w^m(0)) &= (u_m^0, v_m^0, w_m^0),\\ (u_t^m(0), v_t^m(0), w_t^m(0)) &= (u_m^1, v_m^1, w_m^1),\\ \theta^m(0) &= \theta_m^0,\end{aligned}$$

tais que

$$(u_m^0, v_m^0, w_m^0) \rightarrow (u^0, v^0, w^0) \quad em \quad \mathcal{V},$$
$$(u_m^1, v_m^1, w_m^1) \rightarrow (u^1, v^1, w^1) \quad em \quad \mathcal{L}^2(\Omega),$$
$$\theta_m^0 \rightarrow \theta^0 \quad em \quad L^2(0, l_1).$$

Substituindo $u^m(t), v^m(t), w^m(t)$ e θ^m nas equações (3.13) e (3.14), obtemos

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^m h''_{i,m}(t)(\phi^i,\phi^j) + k_1\sum_{i=1}^m h_{i,m}(t)(\phi_x^i,\phi_x^j) + a\sum_{i=1}^m h'_{i,m}(t)(\phi^i,\phi^j)\\ &-m\sum_{i=1}^m g_{i,m}(t)(\xi^i,\phi_x^j) + \sum_{i=1}^m h''_{i,m}(t)(\psi^i,\psi^j) + k_2\sum_{i=1}^m h_{i,m}(t)(\psi_x^i,\psi_x^j)\\ &+\sum_{i=1}^m h''_{i,m}(t)(\varphi^i,\varphi^j) + k_3\sum_{i=1}^m h_{i,m}(t)(\varphi_x^i,\varphi_x^j) + b\sum_{i=1}^m h'_{i,m}(t)(\varphi^i,\varphi^j) = 0,\\ &\sum_{i=1}^m g'_{i,m}(t)(\xi^i,\xi^j) + \alpha\sum_{i=1}^m g_{i,m}(t)(\xi_x^i,\xi_x^j) + m\sum_{i=1}^m h'_{i,m}(t)(\phi_x^i,\xi^j) = 0\end{aligned}$$

onde $(\cdot,\cdot)$ denota o produto interno em L^2 onde as funções estão definidas. Colocando o sistema acima em notação matricial

$$A = (a_{ij});\ a_{ij} = (\phi^i,\phi^j), \quad B = (b_{ij});\ b_{ij} = (\psi^i,\psi^j), \quad C = (c_{ij});\ c_{ij} = (\varphi^i,\varphi^j),$$
$$D = (d_{ij});\ d_{ij} = (\phi_x^i,\phi_x^j), \quad E = (e_{ij});\ e_{ij} = (\psi_x^i,\psi_x^j), \quad F = (f_{ij});\ f_{ij} = (\varphi_x^i,\varphi_x^j),$$
$$K = (k_{ij});\ k_{ij} = (\xi^i,\xi^j), \quad L = (l_{ij});\ l_{ij} = (\xi_x^i,\xi_x^j), \quad M = (m_{ij});\ m_{ij} = (\phi_x^i,\xi^j),$$
$$N = (n_{ij});\ n_{ij} = (\xi^i,\phi_x^j),$$

$$\mathrm{H}(t) = \begin{pmatrix} h_{1,m}(t) \\ \vdots \\ h_{m,m}(t) \end{pmatrix}, \quad G(t) = \begin{pmatrix} g_{1,m}(t) \\ \vdots \\ g_{m,m}(t) \end{pmatrix},$$

obtemos

$$\begin{aligned} &(A+B+C)\mathrm{H}''(t) + (k_1D + k_2E + k_3F)\mathrm{H}(t) + (aA + bC)\mathrm{H}'(t) - mNG(t) = 0, \\ &KG'(t) + \alpha LG(t) + mN\mathrm{H}'(t) = 0, \end{aligned}$$

com $\mathrm{H}(0) = \mathrm{H}^0$, $\mathrm{H}'(0) = \mathrm{H}^1$ e $G(0) = G^0$. Assim, como A, B, C e K são matrizes definida positiva, temos

$$\begin{cases} \mathrm{H}''(t) + \bar{A}\mathrm{H}'(t) + \bar{B}\mathrm{H}(t) + \bar{C}G(t) = 0, \\ G'(t) + \bar{D}G(t) + \bar{E}\mathrm{H}'(t) = 0, \\ \mathrm{H}(0) = \mathrm{H}^0, \quad \mathrm{H}'(0) = \mathrm{H}^1, \quad G(0) = G^0, \end{cases}$$

onde $\bar{A} = (A+B+C)^{-1}(aA+bC)$, $\bar{B} = (A+B+C)^{-1}(k_1D + k_2E + k_3F)$, $\bar{C} = -m(A+B+C)^{-1}N$, $\bar{D} = \alpha K^{-1}L$, e $\bar{E} = mK^{-1}N$. Considerando $Y_1(t) = \mathrm{H}(t)$ e $Y_2(t) = \mathrm{H}'(t)$, obtemos o seguinte sistema equivalente

$$\begin{cases} Y_1'(t) - Y_2(t) = 0, \\ Y_2'(t) + \bar{A}Y_2(t) + \bar{B}Y_1(t) - \bar{C}G(t) = 0, \\ G'(t) + \bar{D}G(t) + \bar{E}Y_2(t) = 0, \\ Y_1(0) = \mathrm{H}^0, \quad Y_2(0) = \mathrm{H}^1, \quad G(0) = G^0. \end{cases}$$

Colocando em notação matricial

$$Y(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ G(t) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \bar{B} & \bar{A} & -\bar{C} \\ 0 & \bar{E} & \bar{D} \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad Y^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{H}^0 \\ \mathrm{H}^1 \\ G^0 \end{pmatrix},$$

obtemos

$$\begin{cases} Y'(t) + \mathcal{A}Y(t) = 0, \\ \quad Y(0) = Y^0. \end{cases}$$

Logo, $Y(t) = Y(0)e^{-\mathcal{A}t}$, e, portanto, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe uma única solução $(u^m, \theta^m, v^m, w^m)$ do problema aproximado.

Mostraremos agora que essa solução permanece limitada quando fazemos $m \to \infty$.

Estimativa a priori

Multiplicando a equação (3.13) por $h'_{j,m}(t)$, a equação (3.14) por $g_{j,m}(t)$, e somando em j, temos que

$$\int_0^{l_1} u_{tt}^m u_t^m\,dx + k_1\int_0^{l_1} u_x^m u_{xt}^m\,dx + a\int_0^{l_1}|u_t^m|^2\,dx - m\int_0^{l_1}\theta^m u_{xt}^m\,dx + \int_{l_1}^{l_2} v_{tt}^m v_t^m\,dx$$
$$+k_2\int_{l_1}^{l_2} v_x^m v_{xt}^m\,dx + \int_{l_2}^{l} w_{tt}^m w_t^m\,dx + \int_{l_2}^{l} k_3 w_x^m w_{xt}^m\,dx + b\int_{l_2}^{l}|w_t^m|^2\,dx + \int_0^{l_1}\theta_t^m\theta^m\,dx$$
$$+\alpha\int_0^{l_1}|\theta_x^m|^2\,dx + m\int_0^{l_1} u_{xt}^m\theta^m\,dx = 0.$$

Logo, definindo $\widetilde{E}^m(t) := \widetilde{E}(t; u^m, \theta^m, v^m, w^m)$, segue que

$$\frac{d}{dt}\widetilde{E}^m(t) + \alpha\int_0^{l_1}|\theta_x^m|^2\,dx = -a\int_0^{l_1}|u_t^m|^2\,dx - b\int_{l_2}^{l}|w_t^m|^2\,dx.$$

Assim, integrando sobre $(0,t)$, $t \in (0,T)$, obtemos que

$$\widetilde{E}^m(t) + \alpha\int_0^t\int_0^{l_1}|\theta_x^m|^2\,dxdt \le \widetilde{E}^m(0).$$

Portanto, concluímos que

$$(u^m, v^m, w^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;\mathcal{V}), \tag{3.15}$$
$$(u_t^m, v_t^m, w_t^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega)), \tag{3.16}$$
$$\theta^m \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(0,l_1)), \tag{3.17}$$
$$\theta^m \text{ é limitada em } L^2(0,T;H_*^1), \tag{3.18}$$

Passagem ao limite

Observe que $L^\infty(0,T;\mathcal{V}) = [L^1(0,T;\mathcal{V}')]'$, $L^\infty(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega)) = [L^1(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega))]'$, $L^\infty(0,T;L^2(0,l_1)) = [L^1(0,T;L^2(0,l_1))]'$, e $L^2(0,T;H_*^1) = [L^2(0,T;[H_*^1]')]'$, e como os espaços $L^1(0,T;\mathcal{V}')$, $L^1(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega))$ e $L^1(0,T;L^2(0,l_1))$ são separáveis, e $L^2(0,T;[H_*^1]')$ é reflexivo, obtemos de (3.15), (3.16), (3.17) e (3.18), a existência de uma subsequência de $(u^m, \theta^m, v^m, w^m)$, que será denotada da mesma forma, tal que

$$(u^m, v^m, w^m) \overset{*}{\rightharpoonup} (u, v, w) \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}), \tag{3.19}$$
$$(u_t^m, v_t^m, w_t^m) \overset{*}{\rightharpoonup} (\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) \in L^\infty(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega)), \tag{3.20}$$

$$\theta^m \overset{*}{\rightharpoonup} \theta \in L^\infty(0,T;L^2(0,l_1)), \tag{3.21}$$

$$\theta^m \rightharpoonup \theta \in L^2(0,T;H^1_*). \tag{3.22}$$

Como $L^\infty(0,T;\mathcal{V}) \hookrightarrow L^2(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega))$, segue que, fazendo a identificação $L^2(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega)) \equiv L^2(Q)$, e usando sua reflexividade, de (3.19) obtemos a existência de uma subsequência de (u^m, v^m, w^m), que denotaremos da mesma forma, tal que

$$(u^m, v^m, w^m) \rightharpoonup (u, v, w) \in L^2(Q), \quad \text{onde} \quad Q = \Omega \times [0,T].$$

Assim, como a convergência fraca em $L^2(Q)$ implica na convergência no sentido das distribuições, segue que

$$(u^m, v^m, w^m) \to (u, v, w) \in \mathcal{D}'(Q).$$

Sendo a derivação uma operação contínua em $\mathcal{D}'(Q)$, temos que

$$(u^m_t, v^m_t, w^m_t) \to (u_t, v_t, w_t) \in \mathcal{D}'(Q).$$

Por outro lado, procedendo da mesma forma para (3.20), obtemos

$$(u^m_t, v^m_t, w^m_t) \to (\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) \in \mathcal{D}'(Q).$$

Logo, da unicidade do limite em $\mathcal{D}'(Q)$, resulta que

$$(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) = (u_t, v_t, w_t).$$

Portanto,

$$(u^m_t, v^m_t, w^m_t) \overset{*}{\rightharpoonup} (u_t, v_t, w_t) \in L^\infty(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega)). \tag{3.23}$$

Multiplicando as equações (3.13) e (3.14) por $\vartheta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando sobre $[0,T]$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_0^{l_1} u^m_{tt}\phi\vartheta\, dxdt + k_1 \int_0^T \int_0^{l_1} u^m_x \phi_x \vartheta\, dxdt + a \int_0^T \int_0^{l_1} u^m_t \phi\vartheta\, dxdt \\
&-m \int_0^T \int_0^{l_1} \theta^m \phi_x \vartheta\, dxdt + \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} v^m_{tt}\psi\vartheta\, dxdt + k_2 \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} v^m_x \psi_x \vartheta\, dxdt \\
&+ \int_0^T \int_{l_2}^{l} w^m_{tt}\varphi\vartheta\, dxdt + k_3 \int_0^T \int_{l_2}^{l} w^m_x \varphi_x \vartheta\, dxdt + b \int_0^T \int_{l_2}^{l} w^m_t \varphi\vartheta\, dxdt = 0, \\
&\int_0^T \int_0^{l_1} \theta^m_t \xi\vartheta\, dxdt + \alpha \int_0^T \int_0^{l_1} \theta^m_x \xi_x \vartheta\, dxdt + m \int_0^T \int_0^{l_1} u^m_{tx} \xi\vartheta\, dxdt = 0,
\end{aligned}$$

para toda $(\phi,\psi,\varphi)\in\mathcal{V}$ e $\xi\in H^1_*$, uma vez que $\{(\phi^j,\psi^j,\varphi^j)\}$ é uma base de $\mathcal{V}$, $\{\xi^j\}$ é base de H^1_*. Assim, integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_0^{l_1} u_t^m\phi\vartheta'\,dxdt+k_1\int_0^T\int_0^{l_1} u_x^m\phi_x\vartheta\,dxdt+a\int_0^T\int_0^{l_1} u_t^m\phi\vartheta\,dxdt\\
&-m\int_0^T\int_0^{l_1}\theta^m\phi_x\vartheta\,dxdt-\int_0^T\int_{l_1}^{l_2} v_t^m\psi\vartheta'\,dxdt+k_2\int_0^T\int_{l_1}^{l_2} v_x^m\psi_x\vartheta\,dxdt\\
&-\int_0^T\int_{l_2}^{l} w_t^m\varphi\vartheta'\,dxdt+k_3\int_0^T\int_{l_2}^{l} w_x^m\varphi_x\vartheta\,dxdt+b\int_0^T\int_{l_2}^{l} w_t^m\varphi\vartheta\,dxdt=0,\\
&-\int_0^T\int_0^{l_1}\theta^m\xi\vartheta'\,dxdt+\alpha\int_0^T\int_0^{l_1}\theta_x^m\xi_x\vartheta\,dxdt-m\int_0^T\int_0^{l_1} u_x^m\xi\vartheta'\,dxdt=0.
\end{aligned}$$

Logo, das convergências (3.19)-(3.23), resulta que

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_0^{l_1} u_t\phi\vartheta'\,dxdt+k_1\int_0^T\int_0^{l_1} u_x\phi_x\vartheta\,dxdt+a\int_0^T\int_0^{l_1} u_t\phi\vartheta\,dxdt\\
&-m\int_0^T\int_0^{l_1}\theta\phi_x\vartheta\,dxdt-\int_0^T\int_{l_1}^{l_2} v_t\psi\vartheta'\,dxdt+k_2\int_0^T\int_{l_1}^{l_2} v_x\psi_x\vartheta\,dxdt\\
&-\int_0^T\int_{l_2}^{l} w_t\varphi\vartheta'\,dxdt+k_3\int_0^T\int_{l_2}^{l} w_x\varphi_x\vartheta\,dxdt+b\int_0^T\int_{l_2}^{l} w_t\varphi\vartheta\,dxdt=0,\\
&-\int_0^T\int_0^{l_1}\theta\xi\vartheta'\,dxdt+\alpha\int_0^T\int_0^{l_1}\theta_x\xi_x\vartheta\,dxdt-m\int_0^T\int_0^{l_1} u_x\xi\vartheta'\,dxdt=0.
\end{aligned}$$

Assim, pela definição de derivada fraca,

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\frac{d}{dt}\int_0^{l_1} u_t\phi\vartheta\,dxdt+k_1\int_0^T\int_0^{l_1} u_x\phi_x\vartheta\,dxdt+a\int_0^T\int_0^{l_1} u_t\phi\vartheta\,dxdt\\
&-m\int_0^T\int_0^{l_1}\theta\phi_x\vartheta\,dxdt+\int_0^T\frac{d}{dt}\int_{l_1}^{l_2} v_t\psi\vartheta\,dxdt+k_2\int_0^T\int_{l_1}^{l_2} v_x\psi_x\vartheta\,dxdt\\
&+\int_0^T\frac{d}{dt}\int_{l_2}^{l} w_t\varphi\vartheta\,dxdt+k_3\int_0^T\int_{l_2}^{l} w_x\varphi_x\vartheta\,dxdt+b\int_0^T\int_{l_2}^{l} w_t\varphi\vartheta\,dxdt=0,\\
&\int_0^T\frac{d}{dt}\int_0^{l_1}\theta\xi\vartheta\,dxdt+\alpha\int_0^T\int_0^{l_1}\theta_x\xi_x\vartheta\,dxdt+m\int_0^T\frac{d}{dt}\int_0^{l_1} u_x\xi\vartheta\,dxdt=0.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo lema de Du Bois Raymond, concluímos que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_0^{l_1} u_t\phi\,dx+k_1\int_0^{l_1} u_x\phi_x\,dx+a\int_0^{l_1} u_t\phi\,dx-m\int_0^{l_1}\theta\phi_x\,dx+\frac{d}{dt}\int_{l_1}^{l_2} v_t\psi\,dx\\
&+k_2\int_{l_1}^{l_2} v_x\psi_x\,dx+\frac{d}{dt}\int_{l_2}^{l} w_t\varphi\,dx+k_3\int_{l_2}^{l} w_x\varphi_x\,dx+b\int_{l_2}^{l} w_t\varphi\,dx=0,\\
&\frac{d}{dt}\int_0^{l_1}\theta\xi\,dx+\alpha\int_0^{l_1}\theta_x\xi_x\,dx+m\frac{d}{dt}\int_0^{l_1} u_x\xi\,dx=0,
\end{aligned}$$

para toda $(\phi,\psi,\varphi)\in\mathcal{V}$, $\xi\in H^1_*$.

Regularidade

Agora, diferenciando as equações (3.13) e (3.14) com respeito a t, multiplicando por $h''_{j,m}(t)$ e por $g'_{j,m}(t)$, respectivamente, e somando em j, temos que

$$\int_0^{l_1} u^m_{ttt}u^m_{tt}\,dx + k_1\int_0^{l_1} u^m_{xt}u^m_{xtt}\,dx + a\int_0^{l_1}|u^m_{tt}|^2\,dx - m\int_0^{l_1}\theta^m_t u^m_{xtt}\,dx + \int_{l_1}^{l_2} v^m_{ttt}v^m_{tt}\,dx$$
$$+k_2\int_{l_1}^{l_2} v^m_{xt}v^m_{xtt}\,dx + \int_{l_2}^{l} w^m_{ttt}w^m_{tt}\,dx + \int_{l_2}^{l} k_3 w^m_{xt}w^m_{xtt}\,dx + b\int_{l_2}^{l}|w^m_{tt}|^2\,dx = 0$$
$$\int_0^{l_1}\theta^m_{tt}\theta^m_t\,dx + \alpha\int_0^{l_1}|\theta^m_{xt}|^2\,dx + m\int_0^{l_1} u^m_{xtt}\theta^m_t\,dx = 0.$$

Logo, somando as equações acima e definindo $\widetilde{\mathcal{E}}^m(t) := \widetilde{E}(t, u^m_t, \theta^m_t, v^m_t, w^m_t)$, resulta que

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\mathcal{E}}^m(t) = -a\int_0^{l_1}|u^m_{tt}|^2\,dx - b\int_{l_2}^{l}|w^m_{tt}|^2\,dx - \alpha\int_0^{l_1}|\theta_{xt}|^2\,dx.$$

Assim, integrando a igualdade acima sobre $(0,t)$, $t\in(0,T)$, temos

$$\widetilde{\mathcal{E}}^m(t) - \widetilde{\mathcal{E}}^m(0) + \alpha\int_0^t\int_0^{l_1}|\theta_{xt}|^2\,dxdt = -a\int_0^t\int_0^{l_1}|u^m_{tt}|^2\,dxdt - b\int_0^t\int_{l_2}^{l}|w^m_{tt}|^2\,dxdt,$$

o que implica

$$\widetilde{\mathcal{E}}^m(t) + \alpha\int_0^t\int_0^{l_1}|\theta_{xt}|^2\,dxdt \le \widetilde{\mathcal{E}}^m(0). \tag{3.24}$$

Precisamos estimar $\widetilde{\mathcal{E}}^m(0)$, e para isso, multiplicamos a equação (3.13) por $h''_{j,m}(t)$, a equação (3.14) por $g'_{j,m}(t)$, somamos em j e fazemos $t\to 0^+$, para obter

$$\int_0^{l_1}|u^m_{tt}(0)|^2\,dx + k_1\int_0^{l_1} u^m_x(0)u^m_{xtt}(0)\,dx + a\int_0^{l_1} u^m_t(0)u^m_{tt}(0))\,dx$$
$$-m\int_0^{l_1}\theta^m(0)u^m_{xtt}(0)\,dx + \int_{l_1}^{l_2}|v^m_{tt}(0)|^2\,dx + k_2\int_{l_1}^{l_2} v^m_x(0)v^m_{xtt}(0))\,dx$$
$$+\int_{l_2}^{l}|w^m_{tt}(0)|^2\,dx + k_3\int_{l_2}^{l} w^m_x(0)w^m_{xtt}(0)\,dx + b\int_{l_2}^{l} w^m_t(0)w^m_{tt}(0)\,dx$$
$$+\int_0^{l_1}|\theta^m_t(0)|^2\,dx + \alpha\int_0^{l_1}\theta^m_x(0)\theta^m_{xt}(0)\,dx + m\int_0^{l_1} u^m_{xt}(0)\theta^m_t(0)\,dx = 0.$$

Assim, integrando por partes e usando as condições de transmissão, temos que

$$\int_0^{l_1}|u^m_{tt}(0)|^2\,dx - k_1\int_0^{l_1} u^m_{xx}(0)u^m_{tt}(0)\,dx + a\int_0^{l_1} u^m_t(0)u^m_{tt}(0))\,dx$$
$$+m\int_0^{l_1}\theta^m_x(0)u^m_{tt}(0)\,dx + \int_{l_1}^{l_2}|v^m_{tt}(0)|^2\,dx - k_2\int_{l_1}^{l_2} v^m_{xx}(0)v^m_{tt}(0))\,dx$$
$$+\int_{l_2}^{l}|w^m_{tt}(0)|^2\,dx - k_3\int_{l_2}^{l} w^m_{xx}(0)w^m_{tt}(0)\,dx + b\int_{l_2}^{l} w^m_t(0)w^m_{tt}(0)\,dx$$
$$+\int_0^{l_1}|\theta^m_t(0)|^2\,dx - \alpha\int_0^{l_1}\theta^m_{xx}(0)\theta^m_t(0)\,dx + m\int_0^{l_1} u^m_{xt}(0)\theta^m_t(0)\,dx = 0.$$

Logo, usando a desigualdade de Young, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{l_1} |u_{tt}^m(0)|^2\,dx + \int_{l_1}^{l_2} |v_{tt}^m(0)|^2\,dx + \int_{l_2}^{l} |w_{tt}^m(0)|^2\,dx + \int_0^{l_1} |\theta_t^m(0)|^2\,dx \\
&\quad \leq \frac{k_1}{2\epsilon}\int_0^{l_1} |u_{xx}^m(0)|^2\,dx + \frac{k_1\epsilon}{2}\int_0^{l_1} |u_{tt}^m(0)|^2\,dx + \frac{a}{2\epsilon}\int_0^{l_1} |u_t^m(0)|^2\,dx \\
&\quad + \frac{a\epsilon}{2}\int_0^{l_1} |u_{tt}^m(0)|^2\,dx + \frac{m}{2\epsilon}\int_0^{l_1} |\theta_x^m(0)|^2\,dx + \frac{m\epsilon}{2}\int_0^{l_1} |u_{tt}^m(0)|^2\,dx \\
&\quad + \frac{k_2}{2\epsilon}\int_{l_1}^{l_2} |v_{xx}^m(0)|^2\,dx + \frac{k_2\epsilon}{2}\int_{l_1}^{l_2} |v_{tt}^m(0)|^2\,dx + \frac{k_3}{2\epsilon}\int_{l_2}^{l} |w_{xx}^m(0)|^2\,dx \\
&\quad + \frac{k_3\epsilon}{2}\int_{l_2}^{l} |w_{tt}^m(0)|^2\,dx + \frac{b}{2\epsilon}\int_{l_2}^{l} |w_t^m(0)|^2\,dx + \frac{b\epsilon}{2}\int_{l_2}^{l} |w_{tt}^m(0)|^2\,dx \\
&\quad + \frac{\alpha}{2\epsilon}\int_0^{l_1} |\theta_{xx}^m(0)|^2\,dx + \frac{\alpha\epsilon}{2}\int_0^{l_1} |\theta_t^m(0)|^2\,dx + \frac{m}{2\epsilon}\int_0^{l_1} |u_{xt}^m(0)|^2\,dx \\
&\quad + \frac{m\epsilon}{2}\int_0^{l_1} |\theta_t^m(0)|^2\,dx,
\end{aligned}
$$

onde ϵ é uma constante positiva satisfazendo

$$
\epsilon < \min\left\{\frac{2}{k_1+a+m}, \frac{2}{k_2}, \frac{2}{k_3+b}, \frac{2}{m+\alpha}\right\}.
$$

Portanto, temos que

$$
\begin{aligned}
&C_1\int_0^{l_1} |u_{tt}^m(0)|^2\,dx + C_2\int_{l_1}^{l_2} |v_{tt}^m(0)|^2\,dx + C_3\int_{l_2}^{l} |w_{tt}^m(0)|^2\,dx + C_4\int_0^{l_1} |\theta_t^m(0)|^2\,dx \\
&\leq \frac{k_1}{2\epsilon}\int_0^{l_1} |u_{xx}^m(0)|^2\,dx + \frac{a}{2\epsilon}\int_0^{l_1} |u_t^m(0)|^2\,dx + \frac{m}{2\epsilon}\int_0^{l_1} |\theta_x^m(0)|^2\,dx + \frac{k_2}{2\epsilon}\int_{l_1}^{l_2} |v_{xx}^m(0)|^2\,dx \\
&+ \frac{k_3}{2\epsilon}\int_{l_2}^{l} |w_{xx}^m(0)|^2\,dx + \frac{b}{2\epsilon}\int_{l_2}^{l} |w_t^m(0)|^2\,dx + \frac{\alpha}{2\epsilon}\int_0^{l_1} |\theta_{xx}^m(0)|^2\,dx + \frac{m}{2\epsilon}\int_0^{l_1} |u_{xt}^m(0)|^2\,dx,
\end{aligned}
$$

onde

$$
C_1 = 1 - \Big(\frac{k_1+a+m}{2}\Big)\epsilon, \quad C_2 = 1 - \frac{k_2}{2}\,\epsilon, \quad C_3 = 1 - \Big(\frac{k_3+b}{2}\Big)\epsilon, \quad C_4 = 1 - \Big(\frac{\alpha+m}{2}\Big)\epsilon
$$

são constantes positivas.

Assim, concluímos que o valor inicial $(u_{tt}^m(0), v_{tt}^m(0), w_{tt}^m(0))$ é limitado em $\mathcal{L}^2(\Omega)$, e $\theta^m(0)$ é limitado em $L^2(0,l_1)$. Portanto, $\widetilde{\mathcal{E}}^m(0)$ é limitada. Logo, concluímos de (3.24) que

$$
(u_t^m, v_t^m, w_t^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;\mathcal{V}), \tag{3.25}
$$

$$
(u_{tt}^m, v_{tt}^m, w_{tt}^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega)), \tag{3.26}
$$

$$
\theta_t^m \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(0,l_1)), \tag{3.27}
$$

$$
\theta_t^m \text{ é limitada em } L^2(0,T;H_*^1). \tag{3.28}
$$

Observe que $L^\infty(0,T;\mathcal{V}) = [L^1(0,T;\mathcal{V}')]'$, $L^\infty(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega)) = [L^1(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega))]'$, $L^\infty(0,T;L^2(0,l_1)) = [L^1(0,T;L^2(0,l_1))]'$, e $L^2(0,T;H^1_*) = [L^2(0,T;[H^1_*]')]'$, e como os espaços $L^1(0,T;\mathcal{V}')$, $L^1(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega))$ e $L^1(0,T;[H^1_*]')$ são separáveis, e $L^2(0,T;[H^1_*]')$ é reflexivo, obtemos de (3.19), (3.21), (3.22), (3.23), (3.25), (3.26), (3.27) e (3.28) a existência de uma subsequência de (u^m,θ^m,v^m,w^m), que será denotada da mesma forma, tal que

$$(u^m,v^m,w^m) \overset{*}{\rightharpoonup} (u,v,w) \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}), \tag{3.29}$$

$$(u^m_t,v^m_t,w^m_t) \overset{*}{\rightharpoonup} (u_t,v_t,w_t) \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}), \tag{3.30}$$

$$(u^m_{tt},v^m_{tt},w^m_{tt}) \overset{*}{\rightharpoonup} (\widetilde{u},\widetilde{v},\widetilde{w}) \in L^\infty(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega)), \tag{3.31}$$

$$\theta^m \overset{*}{\rightharpoonup} \theta \in L^\infty(0,T;L^2(0,l_1)), \tag{3.32}$$

$$\theta^m_t \overset{*}{\rightharpoonup} \widetilde{\theta} \in L^\infty(0,T;L^2(0,l_1)), \tag{3.33}$$

$$\theta^m \rightharpoonup \theta \in L^2(0,T;H^1_*), \tag{3.34}$$

$$\theta^m_t \rightharpoonup \widehat{\theta} \in L^2(0,T;H^1_*). \tag{3.35}$$

Como $L^\infty(0,T;\mathcal{V}) \hookrightarrow L^2(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega))$, segue que, fazendo a identificação $L^2(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega)) \equiv L^2(Q)$, e usando sua reflexividade, de (3.30) obtemos a existência de uma subsequência de (u^m,v^m,w^m), que denotaremos da mesma forma, tal que

$$(u^m_t,v^m_t,w^m_t) \rightharpoonup (u_t,v_t,w_t) \in L^2(Q), \quad \text{onde} \quad Q=\Omega\times[0,T].$$

Assim, como a convergência fraca em $L^2(Q)$ implica na convergência no sentido das distribuições, segue que

$$(u^m_t,v^m_t,w^m_t) \to (u_t,v_t,w_t) \in \mathcal{D}'(Q).$$

Sendo a derivação uma operação contínua em $\mathcal{D}'(Q)$, temos que

$$(u^m_{tt},v^m_{tt},w^m_{tt}) \to (u_{tt},v_{tt},w_{tt}) \in \mathcal{D}'(Q).$$

Por outro lado, procedendo da mesma forma para (3.31), obtemos

$$(u^m_{tt},v^m_{tt},w^m_{tt}) \to (\overline{u},\overline{v},\overline{w}) \in \mathcal{D}'(Q).$$

Logo, da unicidade do limite em $\mathcal{D}'(Q)$, resulta que

$$(\overline{u},\overline{v},\overline{w}) = (u_{tt},v_{tt},w_{tt}).$$

Usando o mesmo argumento, obtemos também que

$$\widetilde{\theta} = \widehat{\theta} = \theta_t.$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
(u_{tt}^m, v_{tt}^m, w_{tt}^m) &\overset{*}{\rightharpoonup} (u_{tt}, v_{tt}, w_{tt}) \in L^\infty(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega)), &(3.36)\\
\theta_t^m &\overset{*}{\rightharpoonup} \theta_t \in L^\infty(0,T;L^2(0,l_1)), &(3.37)\\
\theta_t^m &\rightharpoonup \theta_t \in L^2(0,T;H_*^1), &(3.38)
\end{aligned}
$$

Multiplicando as equações (3.13) e (3.14) por $\vartheta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando sobre $[0,T]$, temos que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_0^{l_1} u_{tt}^m \phi\vartheta\, dxdt + k_1\int_0^T\int_0^{l_1} u_x^m\phi_x\vartheta\, dxdt + a\int_0^T\int_0^{l_1} u_t^m\phi\vartheta\, dxdt\\
&-m\int_0^T\int_0^{l_1}\theta^m\phi_x\vartheta\, dxdt + \int_0^T\int_{l_1}^{l_2} v_{tt}^m\psi\vartheta\, dxdt + k_2\int_0^T\int_{l_1}^{l_2} v_x^m\psi_x\vartheta\, dxdt\\
&+\int_0^T\int_{l_2}^{l} w_{tt}^m\varphi\vartheta\, dxdt + k_3\int_0^T\int_{l_2}^{l} w_x^m\varphi_x\vartheta\, dxdt + b\int_0^T\int_{l_2}^{l} w_t^m\varphi\vartheta\, dxdt = 0,\\
&\int_0^T\int_0^{l_1}\theta_t^m\xi\vartheta\, dxdt + \alpha\int_0^T\int_0^{l_1}\theta_x^m\xi_x\vartheta\, dxdt + m\int_0^T\int_0^{l_1} u_{tx}^m\xi\vartheta\, dxdt = 0,
\end{aligned}
$$

para toda $(\phi,\psi,\varphi)\in\mathcal{V}$ e $\xi \in H_*^1$. Assim, das convergências em (3.29)-(3.37), resulta que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_0^{l_1} u_{tt}\phi\vartheta\, dxdt + k_1\int_0^T\int_0^{l_1} u_x\phi_x\vartheta\, dxdt + a\int_0^T\int_0^{l_1} u_t\phi\vartheta\, dxdt\\
&-m\int_0^T\int_0^{l_1}\theta\phi_x\vartheta\, dxdt + \int_0^T\int_{l_1}^{l_2} v_{tt}\psi\vartheta\, dxdt + k_2\int_0^T\int_{l_1}^{l_2} v_x\psi_x\vartheta\, dxdt\\
&+\int_0^T\int_{l_2}^{l} w_{tt}\varphi\vartheta\, dxdt + k_3\int_0^T\int_{l_2}^{l} w_x\varphi_x\vartheta\, dxdt + b\int_0^T\int_{l_2}^{l} w_t\varphi\vartheta\, dxdt = 0,\\
&\int_0^T\int_0^{l_1}\theta_t\xi\vartheta\, dxdt + \alpha\int_0^T\int_0^{l_1}\theta_x\xi_x\vartheta\, dxdt + m\int_0^T\int_0^{l_1} u_{tx}\xi\vartheta\, dxdt = 0.
\end{aligned}
$$

Em particular, a igualdade acima vale para toda $(\phi,\psi,\varphi)\in\mathcal{D}(\Omega)$, $\xi\in\mathcal{D}(0,l_1)$, e para toda $\theta\in\mathcal{D}(0,T)$.

Agora, por densidade de somas finitas dos produtos $\phi\vartheta$, $\psi\vartheta$, $\varphi\vartheta$, $\xi\vartheta$, $(\phi,\psi,\varphi)\in\mathcal{D}(\Omega)$, $\xi\in\mathcal{D}(0,l_1)$ e $\vartheta\in\mathcal{D}(0,T)$ em $\mathcal{D}(Q)$, com $Q=\Omega\times(0,T)$, e em $\mathcal{D}(0,T;\mathcal{D}(0,l_1))$, respectivamente, obtemos

$$\int_0^T\int_0^{l_1} u_{tt}\vartheta_1\,dxdt + k_1\int_0^T\int_0^{l_1} u_x\vartheta_{1,x}\,dxdt + a\int_0^T\int_0^{l_1} u_t\vartheta_1\,dxdt$$
$$-m\int_0^T\int_0^{l_1}\theta\vartheta_{1,x}\,dxdt + \int_0^T\int_{l_1}^{l_2} v_{tt}\vartheta_2\,dxdt + k_2\int_0^T\int_{l_1}^{l_2} v_x\vartheta_{2,x}\,dxdt$$
$$+\int_0^T\int_{l_2}^{l} w_{tt}\vartheta_3\,dxdt + k_3\int_0^T\int_{l_2}^{l} w_x\vartheta_{3,x}\,dxdt + b\int_0^T\int_{l_2}^{l} w_t\vartheta_3\,dxdt = 0,$$
$$\int_0^T\int_0^{l_1}\theta_t\vartheta_4\,dxdt + \alpha\int_0^T\int_0^{l_1}\theta_x\vartheta_{4,x}\,dxdt + m\int_0^T\int_0^{l_1} u_{tx}\vartheta_4\,dxdt = 0,$$

para toda $(\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3)\in\mathcal{D}(Q)$ e toda $\vartheta_4\in\mathcal{D}(0,T;\mathcal{D}(0,l_1))$. Então,

$$\langle k_1u_{xx}-m\theta_x,\vartheta_1\rangle_1 + k_2\langle v_{xx},\vartheta_2\rangle_2 + k_3\langle w_{xx},\vartheta_3\rangle_3 = \int_0^T\int_0^{l_1}(u_{tt}+au_t)\vartheta_1\,dxdt$$
$$+\int_0^T\int_{l_1}^{l_2} v_{tt}\vartheta_2\,dxdt + \int_0^T\int_{l_2}^{l}(w_{tt}+bw_t)\vartheta_3\,dxdt,$$
$$\alpha\langle\theta_{xx},\vartheta_4\rangle_4 = \int_0^T\int_0^{l_1}(\theta_t+mu_{tx})\vartheta_4\,dxdt.$$

onde $\langle.,.\rangle_1$, $\langle.,.\rangle_2$, $\langle.,.\rangle_3$ e $\langle.,.\rangle_4$ denotam os produtos de dualidade entre

$$\mathcal{D}'((0,l_1)\times(0,T)) \text{ e } \mathcal{D}((0,l_1)\times(0,T)),$$
$$\mathcal{D}'((l_1,l_2)\times(0,T)) \text{ e } \mathcal{D}((l_1,l_2)\times(0,T)),$$
$$\mathcal{D}'((l_2,l)\times(0,T)) \text{ e } \mathcal{D}((l_2,l)\times(0,T)),$$
$$\mathcal{D}'((0,l_1)\times(0,T)) \text{ e } \mathcal{D}((0,l_1)\times(0,T)),$$

respectivamente. Assim, segue que as distribuições $\alpha\theta_{xx}$ é definida em $(0,l_1)\times(0,T)$ por $\theta_t+mu_{tx}\in L^\infty(0,T;L^2(0,l_1))$, k_1u_{xx} é definida em $(0,l_1)\times(0,T)$ por $u_{tt}+au_t+m\theta_x\in L^\infty(0,T;L^2(0,l_1))$, k_2v_{xx} é definida em $(l_1,l_2)\times(0,T)$ por $v_{tt}\in L^\infty(0,T;L^2(l_1,l_2))$, e k_3w_{xx} é definida em $(l_2,l)\times(0,T)$ por $w_{tt}+bw_t\in L^\infty(0,T;L^2(l_2,l))$. Então, identificamos k_1u_{xx} com uma função de $L^\infty(0,T;L^2(0,l_1))$, k_2v_{xx} com uma função de $L^\infty(0,T;L^2(l_1,l_2))$, k_3w_{xx} com uma função de $L^\infty(0,T;L^2(l_2,l))$, $\alpha\theta_{xx}$ com uma função de $L^\infty(0,T;L^2(0,l_1))$, e ainda representamos essas funções da mesma forma. Portanto, concluímos que

$$(u,v,w)\in L^\infty(0,T;\mathcal{H}^2(\Omega)\cap\mathcal{V}),$$
$$(u_t,v_t,w_t)\in L^\infty(0,T;\mathcal{V}),$$
$$(u_{tt},v_{tt},w_{tt})\in L^\infty(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega)),$$
$$\theta\in L^\infty(0,T;\mathcal{H}^2(\Omega)\cap H^1_*),$$
$$\theta\in L^\infty(0,T;L^2(0,l_1))\cap L^2(0,T;H^1_*).$$

Dados Iniciais

Provaremos inicialmente que $\theta(0)=\theta^0$. De fato, seja $\vartheta \in C^1([0,T])$, tal que $\vartheta(0)=1$ e $\vartheta(T)=0$. De (3.37) segue que

$$\int_0^T\int_0^{l_1} \theta_t^m \phi\vartheta\, dxdt \to \int_0^T\int_0^{l_1} \theta_t \phi\vartheta\, dxdt.$$

Integrando por partes, temos que

$$-\int_0^{l_1} \theta^m(0)\phi\, dx - \int_0^T\int_0^{l_1} \theta^m \phi\vartheta'\, dxdt \to -\int_0^{l_1} \theta(0)\phi\, dx - \int_0^T\int_0^{l_1} \theta \phi\vartheta'\, dxdt.$$

Agora, de (3.32) resulta

$$\int_0^T\int_0^{l_1} \theta^m \phi\vartheta'\, dxdt \to \int_0^T\int_0^{l_1} \theta \phi\vartheta'\, dxdt,$$

o que implica

$$\int_0^{l_1} \theta^m(0)\phi\, dx \to \int_0^{l_1} \theta(0)\phi\, dx, \quad \forall \phi \in L^2(0,l_1).$$

Logo,

$$\theta^m(0) \rightharpoonup \theta(0) \quad \text{em} \quad L^2(0,l_1).$$

Por outro lado, como $\theta^m(0)=\theta_m^0 \to \theta^0$, segue que

$$\theta^m(0) \rightharpoonup \theta^0 \quad \text{em} \quad L^2(0,l_1).$$

Portanto, pela unicidade do limite fraco, concluímos que $\theta(0)=\theta^0$. Procedendo da mesma forma, concluímos também que $(u(0),v(0),w(0))=(u^0,v^0,w^0)$.

Temos também que $(u_t(0),v_t(0),w_t(0))=(u^1,v^1,w^1)$. De fato, seja $\vartheta \in C^1([0,T])$, tal que $\vartheta(0)=1$ e $\vartheta(T)=0$. De (3.36) segue que

$$\int_0^T\int_0^{l_1} u_{tt}^m \phi\vartheta\, dxdt \to \int_0^T\int_0^{l_1} u_{tt} \phi\vartheta\, dxdt.$$

Integrando por partes, temos que

$$-\int_0^{l_1} u_t^m(0)\phi dx - \int_0^T\int_0^{l_1} u_t^m \phi\vartheta'\, dxdt \to -\int_0^{l_1} u_t(0)\phi dx - \int_0^T\int_0^{l_1} u_t \phi\vartheta'\, dxdt.$$

Agora, de (3.30) resulta

$$\int_0^T\int_0^{l_1} u_t^m \phi\vartheta'\, dxdt \to \int_0^T\int_0^{l_1} u_t \phi\vartheta'\, dxdt,$$

o que implica

$$\int_0^{l_1} u_t^m(0)\phi\, dx \to \int_0^{l_1} u_t(0)\phi\, dx, \quad \forall \phi \in L^2(0,l_1).$$

Logo,

$$u_t^m(0) \rightharpoonup u_t(0) \quad \text{em} \quad L^2(0,l_1).$$

Por outro lado, como $u_t^m(0) = u_m^1 \to u^1$, segue que

$$u_t^m(0) \rightharpoonup u^1 \quad \text{em} \quad L^2(0,l_1).$$

Portanto, pela unicidade do limite fraco, concluímos que $u_t(0) = u^1$, e procedendo da mesma forma, concluímos também que $v(0) = v^1$ e $w(0) = w^1$. ■

3.2 Unicidade

Mostraremos agora que as soluções dadas pelo Teorema 3.1 são únicas.

3.2.1 Unicidade da Solução Fraca

Sejam $(\hat{u}, \hat{\theta}, \hat{v}, \hat{w})$ e $(\tilde{u}, \tilde{\theta}, \tilde{v}, \tilde{w})$ soluções fracas do problema (3.1) − (3.11). Então $(u, \theta, v, w) = (\hat{u} - \tilde{u}, \hat{\theta} - \tilde{\theta}, \hat{v} - \tilde{v}, \hat{w} - \tilde{w})$ é solução fraca de

$$u_{tt} - k_1 u_{xx} + a u_t + m\theta_x = 0, \quad x \in (0,l_1), \quad t > 0 \tag{3.39}$$

$$\theta_t - \alpha\theta_{xx} + m u_{xt} = 0, \quad x \in (0,l_1), \quad t > 0 \tag{3.40}$$

$$v_{tt} - k_2 v_{xx} = 0, \quad x \in (l_1,l_2), \quad t > 0 \tag{3.41}$$

$$w_{tt} - k_3 w_{xx} + b w_t = 0, \quad x \in (l_2,l), \quad t > 0 \tag{3.42}$$

satisfazendo as condições de fronteira

$$u(0,t) = w(l,t) = \theta(0,t) = 0, \tag{3.43}$$

as condições de transmissão

$$u(l_1,t) = v(l_1,t), \quad k_1 u_x(l_1,t) - m\theta(l_1,t) = k_2 v_x(l_1,t), \quad t > 0, \tag{3.44}$$

$$v(l_2,t) = w(l_2,t), \quad k_2 v_x(l_2,t) = k_3 w_x(l_2,t), \quad t > 0, \tag{3.45}$$

$$\theta_x(l_1,t) = 0, \quad t > 0, \tag{3.46}$$

e as condições iniciais

$$u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0, \quad \theta(x,0)=0 \quad x\in(0,l_1), \tag{3.47}$$

$$v(x,0)=0, \quad v_t(x,0)=0, \quad x\in(l_1,l_2), \tag{3.48}$$

$$w(x,0)=0, \quad w_t(x,0)=0, \quad x\in(l_2,l). \tag{3.49}$$

Mostraremos que a solução correspondente (u,θ,v,w) é nula.

De fato, integrando as equações (3.39)-(3.42) de 0 a t, $t\in(0,T)$, e usando as condições de transmissão, obtemos

$$\begin{aligned}
&u_t - k_1\int_0^t u_{xx}\,ds + au + m\int_0^t \theta_x\,ds = 0, \ \text{ em } \ L^2(0,T;H^{-1}(0,l_1)),\\
&\theta - \alpha\int_0^t \theta_{xx}\,ds + mu_x = 0, \ \text{ em } \ L^2(0,T;H^{-1}(0,l_1)),\\
&v_t - k_2\int_0^t v_{xx}\,ds = 0, \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;H^{-1}(l_1,l_2)),\\
&w_t - k_3\int_0^t w_{xx}\,ds + bw = 0, \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;H^{-1}(l_2,l)).
\end{aligned}$$

Assim, faz sentido

$$\begin{aligned}
&\left\langle u_t - k_1\int_0^t u_{xx}\,ds + au + m\int_0^t \theta_x\,ds\ ,u\right\rangle = 0,\\
&\left\langle \theta - \alpha\int_0^t \theta_{xx}\,ds + mu_x\ , \int_0^{l_1}\theta\,dx\right\rangle = 0,\\
&\left\langle v_t - k_2\int_0^t v_{xx}\,ds\ ,v\right\rangle = 0,\\
&\left\langle w_t - k_3\int_0^t w_{xx}\,ds + bw\ ,w\right\rangle = 0,
\end{aligned}$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ representa o produto de dualidade entre H^{-1} e H^1 onde as funções estão definidas. Assim, fazendo integração por partes, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{l_1}|u|^2\,dx - k_1\left(\int_0^t u_x\,ds\right)u\Bigg|_0^{l_1} + k_1\int_0^{l_1}\left(\int_0^t u_x\,ds\right)u_x\,dx + a\int_0^{l_1}|u|^2\,dx$$
$$+m\int_0^{l_1}\left(\int_0^t \theta_x\,ds\right)u\,dx + \int_0^{l_1}\left(\frac{d}{dt}\int_0^t \theta\,ds\right)\left(\int_0^t \theta\,ds\right)dx - \alpha\left(\int_0^t \theta_x\,ds\right)\left(\int_0^t \theta\,ds\right)\Bigg|_0^{l_1}$$
$$+\alpha\int_0^{l_1}\left(\int_0^t \theta_x\,ds\right)\left(\int_0^t \theta_x\,ds\right)dx + mu\left(\int_0^t \theta\,ds\right)\Bigg|_0^{l_1} - m\int_0^{l_1} u\left(\int_0^t \theta_x\,ds\right)dx$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{l_1}^{l_2}|v|^2\,dx - k_2\left(\int_0^t v_x\,ds\right)v\Bigg|_{l_1}^{l_2} + k_2\int_{l_1}^{l_2}\left(\int_0^t v_x\,ds\right)v_x\,dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{l_2}^{l}|w|^2\,dx$$
$$-k_3\left(\int_0^t w_x\,ds\right)w\Bigg|_{l_2}^{l} + k_3\int_{l_2}^{l}\left(\int_0^t w_x\,ds\right)w_x\,dx + b\int_{l_2}^{l}|w|^2\,dx = 0.$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^{l_1}|u|^2\,dx + \int_{l_1}^{l_2}|v|^2\,dx + \int_{l_2}^{l}|w|^2\,dx\right\} - k_1\left(\int_0^t u_x(l_1,s)\,ds\right)u(l_1,t)$$
$$+k_1\int_0^{l_1}\left(\int_0^t u_x\,ds\right)\left(\frac{d}{dt}\int_0^t u_x\,ds\right)dx + a\int_0^{l_1}|u|^2\,dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{l_1}\left(\int_0^t \theta\,ds\right)^2 dx$$
$$+\alpha\int_0^{l_1}\left(\int_0^t \theta_x\,ds\right)^2 dx + mu(l_1,t)\left(\int_0^t \theta(l_1,t)\,ds\right) - k_2\left(\int_0^t v_x(l_2,s)\,ds\right)v(l_2,t)$$
$$+k_2\left(\int_0^t v_x(l_1,s)\,ds\right)v(l_1,t) + k_2\int_{l_1}^{l_2}\left(\int_0^t v_x\,ds\right)\left(\frac{d}{dt}\int_0^t v_x\,ds\right)dx$$
$$+k_3\left(\int_0^t w_x(l_2,s)\,ds\right)w(l_2,t) + k_3\int_{l_2}^{l}\left(\int_0^t w_x\,ds\right)\left(\int_0^t w_x\,ds\right)dx + b\int_{l_2}^{l}|w|^2\,dx = 0.$$

Assim, usando as condições de transmissão, temos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^{l_1}|u|^2\,dx + \int_{l_1}^{l_2}|v|^2\,dx + \int_{l_2}^{l}|w|^2\,dx + \int_0^{l_1}\left(\int_0^t \theta\,ds\right)^2 dx\right\}$$
$$+\frac{k_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{l_1}\left(\int_0^t u_x\,ds\right)^2 dx + a\int_0^{l_1}|u|^2\,dx + \alpha\int_0^{l_1}\left(\int_0^t \theta_x\,ds\right)^2 dx$$
$$+\frac{k_2}{2}\frac{d}{dt}\int_{l_1}^{l_2}\left(\int_0^t v_x\,ds\right)^2 dx + \frac{k_3}{2}\frac{d}{dt}\int_{l_2}^{l}\left(\int_0^t w_x\,ds\right)^2 dx + b\int_{l_2}^{l}|w|^2\,dx = 0,$$

ou ainda,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^{l_1}|u|^2\,dx+\int_{l_1}^{l_2}|v|^2\,dx+\int_{l_2}^{l}|w|^2\,dx+\int_0^{l_1}\left(\int_0^t\theta\,ds\right)^2dx\right\}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{k_1\int_0^{l_1}\left(\int_0^t u_x\,ds\right)^2dx+k_2\int_{l_1}^{l_2}\left(\int_0^t v_x\,ds\right)^2dx+k_3\int_{l_2}^{l}\left(\int_0^t w_x\,ds\right)^2dx\right\}$$
$$=-a\int_0^{l_1}|u|^2\,dx-\alpha\int_0^{l_1}\left(\int_0^t\theta_x\,ds\right)^2dx-b\int_{l_2}^{l}|w|^2\,dx.$$

Integrando a igualdade acima de 0 a t, $t\in(0,T)$, e usando as condições iniciais, resulta que

$$\int_0^{l_1}|u|^2\,dx+\int_{l_1}^{l_2}|v|^2\,dx+\int_{l_2}^{l}|w|^2\,dx+\int_0^{l_1}\left(\int_0^t\theta\,ds\right)^2dx+k_1\int_0^{l_1}\left(\int_0^t u_x\,ds\right)^2dx$$
$$+k_2\int_{l_1}^{l_2}\left(\int_0^t v_x\,ds\right)^2dx+k_3\int_{l_2}^{l}\left(\int_0^t w_x\,ds\right)^2dx\le 0.$$

Logo, concluímos que $u(x,t)=0$ q.s. em $(0,l_1)$, $v(x,t)=0$ q.s. em (l_1,l_2), $w(x,t)=0$ q.s. em (l_2,l) e $\left(\int_0^t\theta\,ds\right)^2=0$ q.s. em $(0,l_1)$, para todo $t\in[0,T]$. Assim, de (3.47)-(3.49) temos que $u=v=w=0$ e $\left(\int_0^t\theta\,ds\right)=0$, e portanto, $\theta(x,t)=0$, para todo $t\in[0,T]$.

3.2.2 Unicidade da Solução Forte

A unicidade da solução forte segue do resultado de unicidade para solução fraca, uma vez que toda solução forte é uma solução fraca do problema. No entanto, para salientar que a unicidade da solução fraca é muito mais complexa, mostraremos que a unicidade da solução forte pode ser obtida através de simples técnica multiplicativa devido a sua regularidade.

Sejam $(\hat{u},\hat{\theta},\hat{v},\hat{w})$ e $(\tilde{u},\tilde{\theta},\tilde{v},\tilde{w})$ soluções fortes do problema $(3.1)-(3.11)$. Então $(u,\theta,v,w)=(\hat{u}-\tilde{u},\hat{\theta}-\tilde{\theta},\hat{v}-\tilde{v},\hat{w}-\tilde{w})$ é solução forte de $(3.39)-(3.49)$. Assim, multiplicando a equação (3.39) por u_t, a equação (3.40) por θ, a equação (3.41) por v_t, a equação (3.42) por w_t e integrando em seus respectivos intervalos, temos que

$$\int_0^{l_1} (u_{tt}u_t - k_1 u_{xx}u_t + a|u_t|^2 + m\theta_x u_t)\, dx + \int_0^{l_1} (\theta_t\theta - \alpha\theta_{xx}\theta + mu_{xt}\theta)\, dx$$
$$+ \int_{l_1}^{l_2} (v_{tt}v_t - k_2 v_{xx}v_t)dx + \int_{l_2}^{l} (w_{tt}w_t - k_3 w_{xx}w_t + b|w_t|^2)dx = 0$$

Logo, integrando por partes e usando as condições de transmissão, resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^{l_1} |u_t|^2 + k_1|u_x|^2 + |\theta|^2\, dx + \int_{l_1}^{l_2} |v_t|^2 + k_2|v_x|^2 dx + \int_{l_2}^{l} |w_t|^2 + k_3|w_x|^2 dx\right\}$$
$$= -a\int_0^{l_1} |u_t|^2 dx - \alpha\int_0^{l_1} |\theta_x|^2\, dx - b\int_{l_2}^{l} |w_t|^2 dx.$$

Então, pela desigualdade de Poincaré, temos que

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_0^{l_1} |u_t|^2 + c_1|u|^2 + |\theta|^2\, dx + \int_{l_1}^{l_2} |v_t|^2 + k_2|v_x|^2\, dx + \int_{l_2}^{l} |w_t|^2 + c_3|w|^2 dx\right\} \leq 0,$$

onde $c_1 = k_1/c_p$ e $c_3 = k_3/c_p$. Integrando de 0 a t, e usando as condições iniciais, temos

$$\int_0^{l_1} |u_t|^2 + c_1|u|^2 + |\theta|^2\, dx + \int_{l_1}^{l_2} |v_t|^2 + k_2|v_x|^2\, dx + \int_{l_2}^{l} |w_t|^2 + c_3|w|^2\, dx \leq 0$$

O que implica que $u = \theta = 0$ q.s. em $(0, l_1)$, $w = 0$ q.s. em (l_2, l) e v constante q.s. em (l_1, l_2). Como $v(x,0) = 0$, segue que $v = 0$. Logo, $(u, v, w) = 0$, e, portanto, $(\hat{u}, \hat{\theta}, \hat{v}, \hat{w}) = (\tilde{u}, \tilde{\theta}, \tilde{v}, \tilde{w})$.

3.3 Decaimento Exponencial

Nesta seção mostraremos que a solução do problema (3.1)−(3.11) decai exponencialmente para zero quando o tempo vai para o infinito.

Denotemos por $U(x,t) = u(x,t)e^{\gamma t}$, $\Theta(x,t) = \theta(x,t)e^{\gamma t}$, $V(x,t) = v(x,t)e^{\gamma t}$ e $W(x,t) = w(x,t)e^{\gamma t}$, sendo $\gamma > 0$. Então,

$$U_t = u_t e^{\gamma t} + \gamma U, \quad U_{tt} = u_{tt}e^{\gamma t} + 2\gamma U_t - \gamma^2 U,$$
$$\Theta_t = \theta_t e^{\gamma t} + \gamma\Theta$$
$$V_t = v_t e^{\gamma t} + \gamma V, \quad V_{tt} = v_{tt}e^{\gamma t} + 2\gamma V_t - \gamma^2 V,$$
$$W_t = w_t e^{\gamma t} + \gamma W, \quad W_{tt} = w_{tt}e^{\gamma t} + 2\gamma W_t - \gamma^2 W.$$

Assim, multiplicando as equações (3.1)-(3.3) por $e^{\gamma t}$ e usando as igualdades acima, temos que

$$(U_{tt} - 2\gamma U_t + \gamma^2 U) - k_1 U_{xx} + a(U_t - \gamma U) + m\Theta_x = 0, \quad x \in (0, l_1),\ t > 0,$$
$$(\Theta_t - \gamma\Theta) - \alpha\Theta_{xx} + m(U_{xt} - \gamma U_x) = 0, \quad x \in (0, l_1),\ t > 0,$$
$$(V_{tt} - 2\gamma V_t + \gamma^2 V) - k_2 V_{xx} = 0, \qquad x \in (l_1, l_2),\ t > 0,$$
$$(W_{tt} - 2\gamma W_t + \gamma^2 W) - k_3 W_{xx} + b(W_t - \gamma W) = 0, \quad x \in (l_2, l),\ t > 0.$$

Logo, vemos que (U, Θ, V, W) satisfaz

$$U_{tt} - k_1 U_{xx} + aU_t + m\Theta_x = P, \quad x \in (0, l_1),\ t > 0, \tag{3.50}$$
$$\Theta_t - \alpha\Theta_{xx} + mU_{xt} = Q, \quad x \in (0, l_1),\ t > 0, \tag{3.51}$$
$$V_{tt} - k_2 V_{xx} = R, \qquad x \in (l_1, l_2),\ t > 0, \tag{3.52}$$
$$W_{tt} - k_3 W_{xx} + bW_t = S, \quad x \in (l_2, l),\ t > 0, \tag{3.53}$$

onde

$$P := 2\gamma U_t + (a - \gamma)\gamma U, \tag{3.54}$$
$$Q := \gamma\Theta - m\gamma U_x, \tag{3.55}$$
$$R := 2\gamma V_t - \gamma^2 V, \tag{3.56}$$
$$S := 2\gamma W_t + (b - \gamma)\gamma W, \tag{3.57}$$

com U, Θ, V e W satisfazendo a condição de fronteira

$$U(0, t) = W(l, t) = \Theta(0, t) = 0, \quad t > 0 \tag{3.58}$$

as condições de transmissão

$$U(l_1, t) = V(l_1, t), \quad k_1 U_x(l_1, t) - m\Theta(l_1, t) = k_2 V_x(l_1, t), \quad t > 0, \tag{3.59}$$
$$V(l_2, t) = W(l_2, t), \quad k_2 V_x(l_2, t) = k_3 W_x(l_2, t), \quad t > 0, \tag{3.60}$$
$$\Theta_x(l_1, t) = 0, \quad t > 0, \tag{3.61}$$

e as condições iniciais

$$U(x, 0) = u^0(x), \quad U_t(x, 0) = u^1(x) + \gamma u^0(x), \quad x \in (0, l_1), \tag{3.62}$$
$$\Theta(x, 0) = \theta^0(x), \quad x \in (0, l_1), \tag{3.63}$$
$$V(x, 0) = v^0(x), \quad V_t(x, 0) = v^1(x) + \gamma v^0(x), \quad x \in (l_1, l_2), \tag{3.64}$$
$$W(x, 0) = w^0(x), \quad W_t(x, 0) = w^1(x) + \gamma w^0(x), \quad x \in (l_2, l). \tag{3.65}$$

Definimos $\widetilde{E}(t) := \widetilde{E}(t; U, \Theta, V, W)$, onde $\widetilde{E}(t; U, \Theta, V, W)$ é dado por (3.12). Então, para mostrar o decaimento exponencial de (u, θ, v, w) basta mostrar que $\widetilde{E}(t)$ é limitada. Para isso, provaremos uma série de resultados, onde consideraremos (u, θ, v, w) solução forte de (3.1)-(3.11).

Lema 3.2. *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\frac{d}{dt}\widetilde{E}(t) \;\; \leq \;\; -a\int_0^{l_1} |U_t|^2 dx - \alpha\int_0^{l_1} |\Theta_x|^2 dx - b\int_{l_2}^{l} |W_t|^2 dx + C\gamma\widetilde{E}(t).$$

Demonstração: Multiplicando a equação (3.50) por U_t e integrando de 0 a l_1, temos que

$$\int_0^{l_1} (U_{tt}U_t - k_1 U_{xx}U_t + a|U_t|^2 + m\Theta_x U_t)\, dx = \int_0^{l_1} PU_t\, dx.$$

Logo, aplicando integração por partes,

$$\int_0^{l_1} U_{tt}U_t\, dx - k_1\left[U_xU_t\Big|_0^{l_1} - \int_0^{l_1} U_xU_{xt}\, dx\right] + a\int_0^{l_1} |U_t|^2\, dx + m\int_0^{l_1} \Theta_x U_t\, dx = \int_0^{l_1} PU_t\, dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left\{\int_0^{l_1} |U_t|^2 + k_1|U_x|^2\, dx\right\} + m\int_0^{l_1} \Theta_x U_t\, dx &= k_1 U_x(l_1,t)U_t(l_1,t) \\ &\quad -a\int_0^{l_1} |U_t|^2\, dx + \int_0^{l_1} PU_t\, dx. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Por outro lado, multiplicando a equação (3.51) por Θ e integrando de 0 a l_1, temos que

$$\int_0^{l_1} (\Theta_t\Theta - \alpha\Theta_{xx}\Theta + mU_{xt}\Theta) dx = \int_0^{l_1} Q\Theta\, dx.$$

Integrando por partes, obtemos

$$\int_0^{l_1} \Theta_t\Theta\, dx - \alpha\left[\Theta_x\Theta\Big|_0^{l_1} - \int_0^{l_1} |\Theta_x|^2 dx\right] + m\left[U_t\Theta\Big|_0^{l_1} - \int_0^{l_1} U_t\Theta_x\, dx\right] = \int_0^{l_1} Q\Theta\, dx,$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_0^{l_1} |\Theta|^2\, dx\right\} - \int_0^{l_1} U_t\Theta_x\, dx &= -\alpha\int_0^{l_1} |\Theta_x|^2 dx \\ &\quad -mU_t(l_1,t)\Theta(l_1,t) + \int_0^{l_1} Q\Theta\, dx. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Portanto, de (3.66) e (3.67), temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_1(t;U,\Theta) &= (k_1U_x(l_1,t)-m\Theta(l_1,t))U_t(l_1,t) - a\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx\\ &\quad -\alpha\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2\,dx + \int_0^{l_1}PU_t\,dx + \int_0^{l_1}Q\Theta\,dx.\end{aligned}$$

Agora, usando (3.54), temos que

$$\int_0^{l_1}PU_t\,dx = 2\gamma\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + (a-\gamma)\gamma\int_0^{l_1}UU_t\,dx.$$

Assim, pelas desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^{l_1}PU_t\,dx &\le 2\gamma\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + [(a-\gamma)^2\gamma^2]^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{l_1}|U|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\le 2\gamma\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + \frac{(a-\gamma)^2\gamma}{2}\int_0^{l_1}|U|^2\,dx + \frac{\gamma}{2}\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx\\ &= \frac{5\gamma}{2}\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + \frac{(a-\gamma)^2\gamma}{2}\int_0^{l_1}|U|^2\,dx.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Poincaré, resulta que

$$\begin{aligned}\int_0^{l_1}PU_t\,dx &\le \frac{5\gamma}{2}\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + \frac{(\alpha-\gamma)^2\gamma c_p}{2}\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx\\ &\le C_1\gamma E_1(t;U,\Theta),\end{aligned}$$

onde C_1 é uma constante positiva. Usando o mesmo argumento, obtemos também que

$$\int_0^{l_1}Q\Theta\,dx \le C_2\gamma E_1(t;U,\Theta).$$

Portanto, existe $C>0$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_1(t;U,\Theta) &\le C\gamma E_1(t;U,\Theta) - a\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx - \alpha\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2dx\\ &\quad +(k_1U_x(l_1,t)-m\Theta(l_1,t))U_t(l_1,t). \qquad (3.68)\end{aligned}$$

Multiplicando a equação (3.52) por V_t e integrando de l_1 a l_2, temos que

$$\int_{l_1}^{l_2}(V_{tt}V_t - k_2V_{xx}V_t)\,dx = \int_{l_1}^{l_2}RV_t\,dx.$$

Logo, aplicando integração por partes,

$$\int_{l_1}^{l_2}V_{tt}V_t\,dx - k_2\left[V_xV_t\Big|_{l_1}^{l_2} - \int_{l_1}^{l_2}V_xV_{xt}\,dx\right] = \int_{l_1}^{l_2}RV_t\,dx,$$

e, assim,

$$\frac{d}{dt}E_2(t;V) = \int_{l_1}^{l_2} RV_t\,dx + k_2V_x(l_2,t)V_t(l_2,t) - k_2V_x(l_1,t)V_t(l_1,t).$$

Usando (3.56), temos que

$$\int_{l_1}^{l_2} RV_t\,dx = 2\gamma\int_{l_1}^{l_2}|V_t|^2\,dx - \gamma^2\int_{l_1}^{l_2} VV_t\,dx,$$

e, portanto, pelas desigualdades de Young e Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{l_1}^{l_2} RV_t\,dx &= 2\gamma\int_{l_1}^{l_2}|V_t|^2\,dx + \frac{\gamma^2 c_p}{2}\int_{l_1}^{l_2}|V_x|^2\,dx + \frac{\gamma^2}{2}\int_{l_1}^{l_2}|V_t|^2\,dx\\ &\leq C\gamma E_2(t;V),\end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva. Logo,

$$\frac{d}{dt}E_2(t;V) \leq C\gamma E_2(t;V) + k_2V_x(l_2,t)V_t(l_2,t) - k_2V_x(l_1,t)V_t(l_1,t). \qquad (3.69)$$

Multiplicando a equação (3.53) por W_t e integrando de l_2 a l, temos que

$$\int_{l_2}^{l}(W_{tt}W_t - k_3W_{xx}W_t + b|W_t|^2)dx = \int_{l_2}^{l} SW_t\,dx.$$

Logo, aplicando integração por partes,

$$\int_{l_2}^{l} W_{tt}W_t\,dx - k_3\left[W_xW_t\Big|_{l_2}^{l} - \int_{l_2}^{l} W_xW_{xt}\,dx\right] + b\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx = \int_{l_2}^{l} SW_t\,dx,$$

e, assim,

$$\frac{d}{dt}E_3(t;W) = \int_{l_2}^{l} QW_t\,dx - b\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx - k_3W_x(l_2,t)W_t(l_2,t).$$

Usando (3.57), temos que

$$\int_{l_2}^{l} SW_t\,dx = 2\gamma\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx + (b-\gamma)\gamma\int_{l_2}^{l} WW_t\,dx.$$

Assim, pelas desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{l_2}^{l} SW_t\,dx &\leq 2\gamma\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx + [(b-\gamma)^2\gamma^2]^{\frac{1}{2}}\left(\int_{l_2}^{l}|W|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{l_2}^{l}|U_t|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}},\\ &\leq 2\gamma\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx + \frac{(b-\gamma)^2\gamma}{2}\int_{l_2}^{l}|W|^2\,dx + \frac{\gamma}{2}\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx\\ &= \frac{5\gamma}{2}\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx + \frac{(b-\gamma)^2\gamma}{2}\int_{l_2}^{l}|W|^2\,dx.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré, resulta que

$$\begin{aligned}\int_{l_2}^{l} SW_t\,dx &\leq \frac{5\gamma}{2}\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx + \frac{(b-\gamma)^2\gamma c_p}{2}\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx\\ &\leq C\gamma E_3(t;W),\end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva. Portanto,

$$\frac{d}{dt}E_3(t;W) \leq C\gamma E_3(t;W) - b\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx - k_3W_x(l_2,t)W_t(l_2,t). \tag{3.70}$$

Logo, de (3.68), (3.69) e (3.70), concluímos que existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\widetilde{E}(t) &\leq C\gamma\widetilde{E}(t) - a\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx - \alpha\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2dx - b\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx\\ &\quad +(k_1U_x(l_1,t) - m\Theta(l_1,t))U_t(l_1,t) + k_2V_x(l_2,t)V_t(l_2,t)\\ &\quad -k_2V_x(l_1,t)V_t(l_1,t) - k_3W_x(l_2,t)W_t(l_2,t).\end{aligned}$$

Assim, usando as condições de transmissão, concluímos que

$$\frac{d}{dt}\widetilde{E}(t) \leq -a\int_0^{l_1}|U_t|^2dx - \alpha\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2dx - b\int_{l_2}^{l}|W_t|^2dx + C\gamma\widetilde{E}(t).$$

■

Lema 3.3. *Seja $\mathcal{F}_1(t)$ o funcional definido por*

$$\mathcal{F}_1(t) = \int_0^{l_1} UU_t\,dx.$$

Então, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{F}_1(t) &\leq \left(1+\frac{a}{2\epsilon_1}\right)\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx - \left(k_1 - \frac{a\epsilon_1c_p}{2} - \frac{m\epsilon_2}{2}\right)\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx\\ &+ \frac{mc_p}{2\epsilon_2}\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2\,dx + (k_1U_x(l_1,t) - m\Theta(l_1,t))U(l_1,t) + C\gamma E_1(t;U,\Theta),\end{aligned}$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 são constantes positivas satisfazendo $\epsilon_1 < \dfrac{k_1}{8ac_p}$ e $\epsilon_2 < \dfrac{k_1}{m}$.

Demonstração: Note que

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_0^{l_1} UU_t\,dx\right\} = \int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + \int_0^{l_1} UU_{tt}\,dx.$$

Assim, usando a equação (3.50), temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{F}_1(t) &= \int_0^{l_1} |U_t|^2\,dx + k_1\int_0^{l_1} U_{xx}U\,dx - a\int_0^{l_1} U_tU\,dx\\ &\quad -m\int_0^{l_1}\Theta_x U\,dx + \int_0^{l_1} PU\,dx.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young e integrando por partes, segue que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{F}_1(t) &\leq \int_0^{l_1} |U_t|^2\,dx + k_1\left[U_xU\Big|_0^{l_1} - \int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx\right] + \frac{a}{2\epsilon_1}\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx\\ &\quad +\frac{a\epsilon_1}{2}\int_0^{l_1}|U|^2\,dx - m\left[U\Theta\Big|_0^{l_1} - \int_0^{l_1}U_x\Theta\,dx\right] + \int_0^{l_1} PU\,dx,\end{aligned}$$

onde ϵ_1 é uma constante positiva que satisfaz $\epsilon_1 < \dfrac{k_1}{8ac_p}$. Agora, aplicando as desigualdades de Young e Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{F}_1(t) &\leq \left(1+\frac{a}{2\epsilon_1}\right)\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + (k_1U_x(l_1,t) - m\Theta(l_1,t))U(l_1,t)\\ &\quad -k_1\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx + \frac{a\epsilon_1c_p}{2}\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx + \frac{m\epsilon_2}{2}\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx \qquad (3.71)\\ &\quad +\frac{mc_p}{2\epsilon_2}\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2\,dx + \int_0^{l_1}PU\,dx,\end{aligned}$$

onde ϵ_2 é uma constante positiva satisfazendo $\epsilon_2 < \dfrac{k_1}{m}$. Por outro lado, temos que

$$\int_0^{l_1} PU\,dx = 2\gamma\int_0^{l_1}U_tU\,dx + (a-\gamma)\gamma\int_0^{l_1}|U|^2\,dx,$$

e assim, pela desigualdade de Young

$$\int_0^{l_1} PU\,dx \leq \frac{2\gamma}{2}\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + \frac{2\gamma}{2}\int_0^{l_1}|U|^2\,dx + (a-\gamma)\gamma\int_0^{l_1}|U|^2\,dx.$$

Logo, aplicando a desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned}\int_0^{l_1} PU\,dx &\leq \gamma\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + \gamma c_p\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx + (a-\gamma)\gamma c_p\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx\\ &\leq C\gamma E_1(t;U,\Theta),\end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva. Portanto, usando a desigualdade acima em (3.71), concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{F}_1(t) &\leq \left(1+\frac{a}{2\epsilon_1}\right)\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx - \left(k_1 - \frac{a\epsilon_1c_p}{2} - \frac{m\epsilon_2}{2}\right)\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx\\ &\quad + \frac{mc_p}{2\epsilon_2}\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2\,dx + (k_1U_x(l_1,t) - m\Theta(l_1,t))U(l_1,t) + C\gamma E_1(t;U,\Theta).\end{aligned}$$

■

Lema 3.4. *Seja $\mathcal{J}_1(t)$ o funcional definido por*

$$\mathcal{J}_1(t) = -\int_0^{l_1} xU_xU_t\,dx.$$

Então, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{J}_1(t) &\leq \left(\frac{1}{2}+\frac{al_1}{2\eta_1}\right)\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + \left(\frac{k_1}{2}+\frac{al_1\eta_1}{2}+\frac{ml_1\eta_2}{2}\right)\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx\\ &+ \frac{ml_1}{2\eta_2}\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2\,dx - \frac{l_1}{2}|U_t(l_1,t)|^2 - \frac{k_1l_1}{2}|U_x(l_1,t)|^2 + C\gamma E_1(t;U,\Theta),\end{aligned}$$

onde η_1 e η_2 são constantes positivas satisfazendo $\eta_1 < \dfrac{k_1}{8al_1}$ e $\eta_2 < \dfrac{k_1}{8ml_1}$.

Demonstração: Multiplicando a equação (3.50) por $\sigma_1(x)U_x$, $\sigma_1 \in C^1(0,l_1)$, e integrando de 0 a l_1, temos que

$$\int_0^{l_1}(\sigma_1(x)U_xU_{tt} - k_1\sigma_1(x)U_xU_{xx} + a\sigma_1(x)U_xU_t + m\sigma_1(x)U_x\Theta_x)\,dx = \int_0^{l_1}\sigma_1(x)U_xP\,dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{\int_0^{l_1}\sigma_1(x)U_xU_t\,dx\right\} - \int_0^{l_1}\sigma_1(x)U_{xt}U_t\,dx - k_1\int_0^{l_1}\sigma_1(x)U_xU_{xx}\,dx\\ &+a\int_0^{l_1}\sigma_1(x)U_xU_t\,dx + m\int_0^{l_1}\sigma_1(x)\Theta_xU_x\,dx = \int_0^{l_1}\sigma_1(x)U_xP\,dx,\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{\int_0^{l_1}\sigma_1(x)U_xU_t\,dx\right\} = \frac{1}{2}\int_0^{l_1}\sigma_1(x)\frac{d}{dx}|U_t|^2\,dx + \frac{k_1}{2}\int_0^{l_1}\sigma_1(x)\frac{d}{dx}|U_x|^2\,dx\\ &-a\int_0^{l_1}\sigma_1(x)U_xU_t\,dx - m\int_0^{l_1}\sigma_1(x)\Theta_xU_x\,dx + \int_0^{l_1}\sigma_1(x)U_xP\,dx.\end{aligned}$$

Logo, integrando por partes, temos que

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{\int_0^{l_1}\sigma_1(x)U_xU_t\,dx\right\} = \frac{1}{2}\left[\sigma_1(x)|U_t|^2\Big|_0^{l_1} - \int_0^{l_1}\sigma_1'(x)|U_t|^2\,dx\right] + \frac{k_1}{2}\sigma_1(x)|U_x|^2\Big|_0^{l_1}\\ &-\frac{k_1}{2}\int_0^{l_1}\sigma_1'(x)|U_x|^2\,dx - a\int_0^{l_1}\sigma_1(x)U_xU_t\,dx - m\int_0^{l_1}\sigma_1(x)\Theta_xU_x\,dx + \int_0^{l_1}\sigma_1(x)U_xP\,dx.\end{aligned}$$

Considerando $\sigma_1(x) = -x$, segue que

$$\frac{d}{dt}\left\{-\int_0^{l_1} xU_xU_t\,dx\right\} = \frac{-l_1}{2}|U_t(l_1,t)|^2 + \frac{1}{2}\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + \frac{-k_1l_1}{2}|U_x(l_1,t)|^2$$
$$+\frac{k_1}{2}\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx + a\int_0^{l_1}xU_xU_t\,dx + m\int_0^{l_1}x\Theta_xU_x\,dx - \int_0^{l_1}xU_xP\,dx.$$

Aplicando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{J}_1(t) \;\le\; & -\frac{l_1}{2}|U_t(l_1,t)|^2 + \frac{1}{2}\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx - \frac{k_1l_1}{2}|U_x(l_1,t)|^2 + \frac{k_1}{2}\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx\\ & +\frac{al_1\eta_1}{2}\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx + \frac{al_1}{2\eta_1}\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + \frac{ml_1\eta_2}{2}\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2\,dx\\ & +\frac{ml_1}{2\eta_2}\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx + l_1\int_0^{l_1}|U_xP|\,dx,\end{aligned}$$

onde η_1 e η_2 são constantes positivas que satisfazem $\eta_1 < \dfrac{k_1}{8al_1}$ e $\eta_2 < \dfrac{k_1}{8ml_1}$. Portanto,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{J}_1(t) \le \left(\frac{1}{2} + \frac{al_1}{2\eta_1}\right)\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + \left(\frac{k_1}{2} + \frac{al_1\eta_1}{2}\right)\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx - \frac{l_1}{2}|U_t(l_1,t)|^2$$
$$-\frac{k_1l_1}{2}|U_x(l_1,t)|^2 + \frac{ml_1}{2\eta_2}\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2\,dx + \frac{ml_1\eta_2}{2}\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx + l_1\int_0^{l_1}|U_xP|\,dx. \tag{3.72}$$

Por outro lado, temos que

$$\int_0^{l_1}|PU_x|\,dx = \int_0^{l_1}|2\gamma U_tU_x + (a-\gamma)\gamma UU_x|\,dx,$$

e assim, pela desigualdade de Young

$$\begin{aligned}\int_0^{l_1}|PU_x|\,dx \;\le\; & \frac{2\gamma}{2}\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + \frac{2\gamma}{2}\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx + \frac{(a-\gamma)\gamma}{2}\int_0^{l_1}|U|^2\,dx\\ & +\frac{(a-\gamma)\gamma}{2}\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx.\end{aligned}$$

Logo, aplicando a desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned}\int_0^{l_1}|PU_x|\,dx \;\le\; & \gamma\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + \gamma\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx + \frac{(a-\gamma)\gamma c_p}{2}\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx\\ & +\frac{(a-\gamma)\gamma}{2}\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx \le C\gamma E_1(t;U,\Theta),\end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva. Portanto, usando a desigualdade acima em (3.72), concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{J}_1(t) \;\le\; & \left(\frac{1}{2} + \frac{al_1}{2\eta_1}\right)\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + \left(\frac{k_1}{2} + \frac{al_1\eta_1}{2} + \frac{ml_1\eta_2}{2}\right)\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx\\ & + \;\frac{ml_1}{2\eta_2}\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2\,dx - \frac{l_1}{2}|U_t(l_1,t)|^2 - \frac{k_1l_1}{2}|U_x(l_1,t)|^2 + C\gamma E_1(t;U,\Theta).\end{aligned}$$

■

Lema 3.5. *Seja $\mathcal{J}_2(t)$ o funcional definido por*

$$\mathcal{J}_2(t) = \frac{1}{2}\int_0^{l_1} (-x^2 + l_1 x - l_1^2)|\Theta|^2\,dx.$$

Então, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{J}_2(t) \;&\leq\; C\gamma E_1(t;U,\Theta) - \left(\alpha - \frac{ml_1\epsilon_3}{2}\right)\int_0^{l_1}|\Theta|^2\,dx + \left(\frac{3l_1^2\alpha}{4} + \frac{3l_1^2 m}{8}\right)\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2\,dx \\
&+\; \left(\frac{ml_1}{2\epsilon_3} + \frac{3l_1^2 m}{8}\right)\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + \left(\frac{\alpha l_1}{2} + \frac{ml_1^2}{2\epsilon_4}\right)|\Theta(l_1,t)|^2 + \frac{ml_1^2\epsilon_4}{2}|U_t(l_1,t)|^2
\end{aligned}$$

onde ϵ_3 e ϵ_4 são constante positivas satisfazendo $\epsilon_3 < \dfrac{2\alpha}{ml_1}$ e $\epsilon_4 < \dfrac{1}{ml_1}$.

Demonstração: Considere $\sigma_2 \in C^2(0,l_1)$ e observe que

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_0^{l_1}\sigma_2(x)|\Theta|^2\,dx\right\} = \int_0^{l_1}\sigma_2(x)\Theta_t\Theta\,dx.$$

Logo, pela equação (3.51), temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_0^{l_1}\sigma_2(x)|\Theta|^2\,dx\right\} \;&=\; \alpha\int_0^{l_1}\sigma_2(x)\Theta\Theta_{xx}\,dx - m\int_0^{l_1}\sigma_2(x)\Theta U_{xt}\,dx \\
&\quad + \int_0^{l_1}\sigma_2(x)\Theta Q\,dx.
\end{aligned}$$

Assim, integrando por partes, segue que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_0^{l_1}\sigma_2(x)|\Theta|^2\,dx\right\} \leq \alpha\sigma_2(x)\Theta\Theta_x\Big|_0^{l_1} - \alpha\int_0^{l_1}\sigma_2'(x)\Theta\Theta_x\,dx - \alpha\int_0^{l_1}\sigma_2(x)|\Theta_x|^2\,dx \\
&-m\left[\sigma_2(x)\Theta U_t\Big|_0^{l_1} - \int_0^{l_1}\sigma_2'(x)\Theta U_t\,dx - \int_0^{l_1}\sigma_2(x)\Theta_x U_t\,dx\right] + \int_0^{l_1}\sigma_2(x)\Theta Q\,dx,
\end{aligned}$$

ou ainda, de (3.58) e (3.61) temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_0^{l_1}\sigma_2(x)|\Theta|^2\,dx\right\} \;&\leq\; -\frac{\alpha}{2}\int_0^{l_1}\sigma_2'(x)\frac{d}{dx}|\Theta|^2\,dx - \alpha\int_0^{l_1}\sigma_2(x)|\Theta_x|^2\,dx \\
&\quad -m\sigma_2(l_1)\Theta(l_1,t)U_t(l_1,t) + m\int_0^{l_1}\sigma_2'(x)\Theta U_t\,dx \\
&\quad +m\int_0^{l_1}\sigma_2(x)\Theta_x U_t\,dx + \int_0^{l_1}\sigma_2(x)\Theta Q\,dx.
\end{aligned}$$

Logo, integrando por partes novamente, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_0^{l_1}\sigma_2(x)|\Theta|^2\,dx\right\} \leq -\frac{\alpha}{2}\left[\sigma_2'(x)|\Theta|^2\Big|_0^{l_1} - \int_0^{l_1}\sigma_2''(x)|\Theta|^2\,dx\right]\\
&-\alpha\int_0^{l_1}\sigma_2(x)|\Theta_x|^2\,dx - m\sigma_2(l_1)\Theta(l_1,t)U_t(l_1,t) + m\int_0^{l_1}\sigma_2'(x)\Theta U_t\,dx\\
&+m\int_0^{l_1}\sigma_2(x)\Theta_x U_t\,dx + \int_0^{l_1}\sigma_2(x)\Theta Q\,dx. \qquad (3.73)
\end{aligned}
$$

Considerando $\sigma_2(x) = -x^2 + l_1 x - l_1^2$, resulta que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{J}_2(t) \;\leq\;& \frac{\alpha l_1}{2}|\Theta(l_1,t)|^2 - \alpha\int_0^{l_1}|\Theta|^2\,dx + \frac{3l_1^2\alpha}{4}\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2\,dx + ml_1^2\Theta(l_1,t)U_t(l_1,t)\\
&+ml_1\int_0^{l_1}|\Theta U_t|\,dx + \frac{3l_1^2 m}{4}\int_0^{l_1}|\Theta_x U_t|\,dx + \frac{3l_1^2}{4}\int_0^{l_1}|\Theta Q|\,dx.
\end{aligned}
$$

Agora, aplicando a desigualdade de Young, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{J}_2(t) \;\leq\;& \frac{\alpha l_1}{2}|\Theta(l_1,t)|^2 - \alpha\int_0^{l_1}|\Theta|^2\,dx + \frac{3l_1^2\alpha}{4}\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2\,dx + \frac{ml_1^2}{2\epsilon_4}|\Theta(l_1,t)|^2\\
&+\frac{ml_1^2\epsilon_4}{2}|U_t(l_1,t)|^2 + \frac{ml_1\epsilon_3}{2}\int_0^{l_1}|\Theta|^2\,dx + \frac{ml_1}{2\epsilon_3}\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx\\
&+\frac{3l_1^2 m}{8}\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2\,dx + \frac{3l_1^2 m}{8}\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + \frac{3l_1^2}{4}\int_0^{l_1}|\Theta Q|\,dx,
\end{aligned}
$$

onde ϵ_3 e ϵ_4 são constante positivas que satisfazem $\epsilon_3 < \dfrac{2\alpha}{ml_1}$ e $\epsilon_4 < \dfrac{1}{ml_1}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{J}_2(t) \;\leq\;& -\left(\alpha - \frac{ml_1\epsilon_3}{2}\right)\int_0^{l_1}|\Theta|^2\,dx + \left(\frac{3l_1^2\alpha}{4} + \frac{3l_1^2 m}{8}\right)\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2\,dx\\
&+\left(\frac{ml_1^2}{2\epsilon_4} + \frac{\alpha l_1}{2}\right)|\Theta(l_1,t)|^2 + \frac{ml_1^2\epsilon_4}{2}|U_t(l_1,t)|^2 \qquad (3.74)\\
&+\left(\frac{ml_1}{2\epsilon_3} + \frac{3l_1^2 m}{8}\right)\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + \frac{3l_1^2}{4}\int_0^{l_1}|\Theta Q|\,dx,
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\int_0^{l_1}|\Theta Q|\,dx \leq \gamma\int_0^{l_1}|\Theta|^2\,dx + m\gamma\int_0^{l_1}|U_x\Theta|\,dx,
$$

e assim, pela desigualdade de Young

$$
\begin{aligned}
\int_0^{l_1}|\Theta Q|\,dx \;\leq\;& \gamma\int_0^{l_1}|\Theta|^2\,dx + \frac{m\gamma}{2}\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx + \frac{m\gamma}{2}\int_0^{l_1}|\Theta|^2\,dx\\
\leq\;& \frac{(2+m\gamma)\gamma}{2}\int_0^{l_1}|\Theta|^2\,dx + \frac{m\gamma}{2}\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx\\
\leq\;& C\gamma E_1(t;U,\Theta),
\end{aligned}
$$

onde C é uma constante positiva. Portanto, usando a desigualdade acima em (3.74), concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{J}_2(t) &\leq C\gamma E_1(t;U,\Theta) - \left(\alpha - \frac{ml_1\epsilon_3}{2}\right)\int_0^{l_1}|\Theta|^2\,dx + \left(\frac{3l_1^2\alpha}{4} + \frac{3l_1^2 m}{8}\right)\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2\,dx\\ &+ \left(\frac{ml_1}{2\epsilon_3} + \frac{3l_1^2 m}{8}\right)\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + \left(\frac{\alpha l_1}{2} + \frac{ml_1^2}{2\epsilon_4}\right)|\Theta(l_1,t)|^2 + \frac{ml_1^2\epsilon_4}{2}|U_t(l_1,t)|^2.\end{aligned}$$

■

Lema 3.6. *O funcional $\mathcal{G}(t)$ definido por*

$$\mathcal{G}(t) = \frac{1}{2}\int_0^{l_1}(x-l_1)|\Theta|^2\,dx$$

satisfaz

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{G}(t) &\leq -\frac{\alpha}{2}|\Theta(l_1,t)|^2 + \left(\alpha l_1 + \frac{m(c_p+l_1)}{2}\right)\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2\,dx\\ &+\frac{m(l_1+1)}{2}\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + C\gamma E_1(t;U,\Theta),\end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva.

Demonstração: Considerando $\sigma_2(x) = x - l_1$ em (3.73), então obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{G}(t) &\leq -\frac{\alpha}{2}|\Theta(l_1,t)|^2 - \alpha\int_0^{l_1}(x-l_1)|\Theta_x|^2\,dx + m\int_0^{l_1}\Theta U_t\,dx\\ &+m\int_0^{l_1}(x-l_1)\Theta_x U_t\,dx + \int_0^{l_1}(x-l_1)\Theta Q\,dx.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{G}(t) &\leq -\frac{\alpha}{2}|\Theta(l_1,t)|^2 + \alpha l_1\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2\,dx + +m\int_0^{l_1}\Theta U_t\,dx\\ &+ml_1\int_0^{l_1}|\Theta_x U_t|\,dx + l_1\int_0^{l_1}|\Theta Q|\,dx,\end{aligned}$$

e pela desigualdade de Young, resulta que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{G}(t) &\leq -\frac{\alpha}{2}|\Theta(l_1,t)|^2 + \alpha l_1\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2\,dx + \frac{m}{2}\int_0^{l_1}|\Theta|^2\,dx + \frac{m}{2}\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx\\ &+\frac{ml_1}{2}\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2\,dx + \frac{ml_1}{2}\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + l_1\int_0^{l_1}|\Theta Q|\,dx.\end{aligned}$$

Assim, usando a desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{G}(t) &\leq -\frac{\alpha}{2}|\Theta(l_1,t)|^2 + \left(\alpha l_1 + \frac{ml_1}{2}\right)\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2\,dx + \frac{mc_p}{2}\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2\,dx \\ &\quad + \left(\frac{m}{2} + \frac{ml_1}{2}\right)\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + l_1\int_0^{l_1}|\Theta Q|\,dx.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{G}(t) &\leq -\frac{\alpha}{2}|\Theta(l_1,t)|^2 + \left(\alpha l_1 + \frac{m(l_1+c_p)}{2}\right)\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2\,dx \\ &\quad + \left(\frac{m(1+l_1)}{2}\right)\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + C\gamma E_1(t;U,\Theta),\end{aligned}$$

uma vez que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_0^{l_1}|\Theta Q|\,dx \leq C\gamma E_1(t;U,\Theta),$$

como provado no lema anterior. ■

Lema 3.7. *O funcional $\mathcal{H}_1(t)$ definido por*

$$\mathcal{H}_1(t) = \mathcal{F}_1(t) + \mathcal{J}_1(t) + \mathcal{J}_2(t)$$

satisfaz

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\mathcal{H}_1(t) \leq C\gamma E_1(t;U,\Theta) + A\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + B\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2\,dx - C_0\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx \\ &+\left(\frac{k_1}{2\epsilon_5} + \frac{m}{2}\right)|U(l_1,t)|^2 + \left(\frac{m}{2} + \frac{\alpha l_1}{2} + \frac{ml_1}{2\epsilon_4}\right)|\Theta(l_1,t)|^2 - \left(\alpha - \frac{ml_1\epsilon_3}{2}\right)\int_0^{l_1}|\Theta|^2\,dx,\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}A &= \frac{3}{2} + \frac{a}{2\epsilon_1} + \frac{al_1}{2\eta_1} + \frac{ml_1}{2\epsilon_3} + \frac{3l_1^2 m}{8}, \\ B &= \frac{mc_p}{2\epsilon_2} + \frac{ml_1}{2\eta_2} + \frac{3l_1^2}{4}\left(\alpha + \frac{m}{2}\right), \\ C_0 &= \frac{k_1}{2} - \frac{a\epsilon_1 c_p}{2} - \frac{m\epsilon_2}{2} - \frac{al_1\eta_1}{2} - \frac{ml_1\eta_2}{2}\end{aligned}$$

e C são constantes positivas. Além disso, a constante positiva ϵ_5 é tal que $\epsilon_5 < l_1$.

Demonstração: Pelos Lemas 3.3, 3.4 e 3.5, temos que existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{H}_1(t) \ \leq \ & C\gamma E_1(t;U,\Theta) + \left(\frac{3}{2} + \frac{a}{2\epsilon_1} + \frac{al_1}{2\eta_1} + \frac{ml_1}{2\epsilon_3} + \frac{3l_1^2 m}{8}\right)\int_0^{l_1} |U_t|^2\,dx \\
& -\left(\frac{k_1}{2} - \frac{a\epsilon_1 c_p}{2} - \frac{m\epsilon_2}{2} - \frac{al_1\eta_1}{2} - \frac{ml_1\eta_2}{2}\right)\int_0^{l_1} |U_x|^2\,dx \\
& +\left(\frac{mc_p}{2\epsilon_2} + \frac{ml_1}{2\eta_2} + \frac{3l_1^2}{4}\left(\alpha + \frac{m}{2}\right)\right)\int_0^{l_1} |\Theta_x|^2\,dx + \left(\frac{\alpha l_1}{2} + \frac{ml_1^2}{2\epsilon_4}\right)|\Theta(l_1,t)|^2 \\
& -\left(\alpha - \frac{ml_1\epsilon_3}{2}\right)\int_0^{l_1} |\Theta|^2\,dx + \frac{ml_1^2\epsilon_4}{2}|U_t(l_1,t)|^2 - \frac{l_1}{2}|U_t(l_1,t)|^2 \\
& -\frac{k_1 l_1}{2}|U_x(l_1,t)|^2 + (k_1U_x(l_1,t) - m\Theta(l_1,t))U(l_1,t).
\end{aligned}$$

Logo, aplicando a desigualdade de Young, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{H}_1(t) \ \leq \ & C\gamma E_1(t;U,\Theta) + A\int_0^{l_1} |U_t|^2\,dx - C_0\int_0^{l_1} |U_x|^2\,dx + B\int_0^{l_1} |\Theta_x|^2\,dx \\
& -\left(\alpha - \frac{ml_1\epsilon_3}{2}\right)\int_0^{l_1} |\Theta|^2\,dx + \left(\frac{\alpha l_1}{2} + \frac{ml_1^2}{2\epsilon_4}\right)|\Theta(l_1,t)|^2 + \frac{ml_1^2\epsilon_4}{2}|U_t(l_1,t)|^2 \\
& -\frac{l_1}{2}|U_t(l_1,t)|^2 - \frac{k_1 l_1}{2}|U_x(l_1,t)|^2 + \frac{k_1\epsilon_5}{2}|U_x(l_1,t)|^2 + \frac{k_1}{2\epsilon_5}|U(l_1,t)|^2 \\
& +\frac{m}{2}|\Theta(l_1,t)|^2 + \frac{m}{2}|U(l_1,t)|^2,
\end{aligned}$$

onde $\epsilon_5 > 0$ é tal que $\epsilon_5 < l_1$, e

$$\begin{aligned}
A &= \frac{3}{2} + \frac{a}{2\epsilon_1} + \frac{al_1}{2\eta_1} + \frac{ml_1}{2\epsilon_3} + \frac{3l_1^2 m}{8}, \\
B &= \frac{mc_p}{2\epsilon_2} + \frac{ml_1}{2\eta_2} + \frac{3l_1^2}{4}\left(\alpha + \frac{m}{2}\right), \\
C_0 &= \frac{k_1}{2} - \frac{a\epsilon_1 c_p}{2} - \frac{m\epsilon_2}{2} - \frac{al_1\eta_1}{2} - \frac{ml_1\eta_2}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto, de $\epsilon_4 < 1/ml_1$ e $\epsilon_5 < l_1$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mathcal{H}_1(t) \leq C\gamma E_1(t;U,\Theta) + A\int_0^{l_1} |U_t|^2\,dx + B\int_0^{l_1} |\Theta_x|^2\,dx - C_0\int_0^{l_1} |U_x|^2\,dx \\
&+\left(\frac{k_1}{2\epsilon_5} + \frac{m}{2}\right)|U(l_1,t)|^2 + \left(\frac{m}{2} + \frac{\alpha l_1}{2} + \frac{ml_1}{2\epsilon_4}\right)|\Theta(l_1,t)|^2 - \left(\alpha - \frac{ml_1\epsilon_3}{2}\right)\int_0^{l_1} |\Theta|^2\,dx.
\end{aligned}$$

■

Lema 3.8. *O funcional $\mathcal{H}_2(t)$ definido por*

$$\mathcal{H}_2(t) = C_1\mathcal{J}_1(t) + J_2(t) + C_2J_3(t) + C_3\mathcal{G}(t),$$

onde $J_2(t)$ e $J_3(t)$ são como nos Lemas 2.6 e 2.7 do capítulo anterior, satisfaz

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{H}_2(t) &\leq C\gamma\widetilde{E}(t)+C_1\left(\frac{1}{2}+\frac{al_1}{2\eta_1}+\frac{C_3m(l_1+1)}{2}\right)\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx\\
&+ C_1\left(\frac{k_1}{2}+\frac{al_1\eta_1}{2}+\frac{ml_1\eta_2}{2}\right)\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx-\frac{(l_2+l_1)}{l_2-l_1}E_2(t,V)\\
&+ \left(\frac{ml_1C_1}{2\eta_2}+\alpha l_1C_3+\frac{C_3m(c_p+l_1)}{2}\right)\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2\,dx\\
&+ C_2\left(\frac{l_2}{2(l-l_2)}+\frac{bl_2}{2\eta}\right)\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx+C_2\left(\frac{k_3l_2}{2(l-l_2)}+\frac{bl_2\eta}{2}\right)\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx,
\end{aligned}$$

onde $C_1\geq\max\left\{1,\dfrac{4k_1}{l_1k_2}\right\}$, $C_2\geq\max\left\{1,\dfrac{k_3}{k_2}\right\}$ *e* $C_3\geq\dfrac{4m^2}{\alpha k_2}$.

Demonstração: Pelos Lemas 2.6 e 2.7 do capítulo anterior, e pelos Lemas 3.4 e 3.6, temos que existe uma constante $C>0$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{H}_2(t) &\leq C\gamma\widetilde{E}(t)+C_1\left(\frac{1}{2}+\frac{al_1}{2\eta_1}+\frac{C_3m(l_1+1)}{2}\right)\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx\\
&+C_1\left(\frac{k_1}{2}+\frac{al_1\eta_1}{2}+\frac{ml_1\eta_2}{2}\right)\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx-\frac{(l_2+l_1)}{l_2-l_1}E_2(t;V)\\
&+\left(\frac{ml_1C_1}{2\eta_2}+\alpha l_1C_3+\frac{C_3m(c_p+l_1)}{2}\right)\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2\,dx-\frac{l_1C_1}{2}|U_t(l_1,t)|^2\\
&-\frac{k_1l_1C_1}{2}|U_x(l_1,t)|^2+\frac{l_2}{2}|V_t(l_2,t)|^2+\frac{l_1}{2}|V_t(l_1,t)|^2+\frac{k_2l_2}{2}|V_x(l_2,t)|^2\\
&+\frac{k_2l_1}{2}|V_x(l_1,t)|^2-\frac{l_2C_2}{2}|W_t(l_2,t)|^2-\frac{k_3l_2C_2}{2}|W_x(l_2,t)|^2-\frac{\alpha C_3}{2}|\Theta(l_1,t)|^2\\
&+C_2\left(\frac{l_2}{2(l-l_2)}+\frac{bl_2}{2\eta}\right)\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx+C_2\left(\frac{k_3l_2}{2(l-l_2)}+\frac{bl_2\eta}{2}\right)\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Agora, observe que usando as condições de transmissão (3.59) e (3.60), temos que

$$\frac{k_2l_1}{2}|V_x(l_1,t)|^2\leq\frac{(k_1U_x(l_1,t)-m\Theta(l_1,t))^2}{k_2}\leq\frac{2k_1^2|U_x(l_1,t)|^2+2m^2|\Theta(l_1,t)|^2}{k_2},$$

e

$$\frac{k_2l_2}{2}|V_x(l_2,t)|^2\leq\frac{k_3^2l_2}{2k_2}|W_x(l_2,t)|^2.$$

Assim, obtemos que

$$
\begin{gathered}
-\frac{k_1 l_1 C_1}{2}|U_x(l_1,t)|^2 - \frac{\alpha C_3}{2}|\Theta(l_1,t)|^2 + \frac{k_2 l_1}{2}|V_x(l_1,t)|^2 \leq \\
\left(-\frac{k_1 C_1 l_1}{2} + \frac{2k_1^2}{k_2}\right)|U_x(l_1,t)|^2 + \left(-\frac{\alpha C_3}{2} + \frac{2m^2}{k_2}\right)|\Theta(l_1,t)|^2 \leq 0,
\end{gathered}
$$

e

$$
\left(-\frac{k_3 l_2 C_2}{2} + \frac{k_3^2 l_2}{2k_2}\right)|W_x(l_2,l)|^2 \leq 0,
$$

desde que $C_1 \geq \dfrac{4k_1}{l_1 k_2}$, $C_2 \geq \dfrac{k_3}{k_2}$ e $C_3 \geq \dfrac{4m^2}{\alpha k_2}$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{H}_2(t) \;&\leq\; C\gamma\widetilde{E}(t) + C_1\left(\frac{1}{2} + \frac{al_1}{2\eta_1} + \frac{C_3 m(l_1+1)}{2}\right)\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx \\
&+\; C_1\left(\frac{k_1}{2} + \frac{al_1\eta_1}{2} + \frac{ml_1\eta_2}{2}\right)\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx - \frac{(l_2+l_1)}{l_2-l_1}E_2(t;V) \\
&+\; \left(\frac{ml_1C_1}{2\eta_2} + \alpha l_1 C_3 + \frac{C_3 m(c_p+l_1)}{2}\right)\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2\,dx \\
&+\; C_2\left(\frac{l_2}{2(l-l_2)} + \frac{bl_2}{2\eta}\right)\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx + C_2\left(\frac{k_3 l_2}{2(l-l_2)} + \frac{bl_2\eta}{2}\right)\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx,
\end{aligned}
$$

desde que $C_1 \geq \max\left\{1, \dfrac{4k_1}{l_1k_2}\right\}$, $C_2 \geq \max\left\{1, \dfrac{k_3}{k_2}\right\}$ e $C_3 \geq \dfrac{4m^2}{\alpha k_2}$. ∎

Lema 3.9. *Para todo $\delta > 0$, existe uma constante $C_\delta > 0$ independente dos dados iniciais, tal que*

$$
\begin{gathered}
\int_0^T |U(l_1,t)|^2\,dt + \int_0^T |W(l_2,t)|^2\,dt \leq \delta\int_0^T \widetilde{E}(t)\,dt + \\
+C_\delta\left\{\int_0^T\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dxdt + \int_0^T\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2\,dxdt + \int_0^T\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dxdt\right\},
\end{gathered}
$$

para toda solução forte (U,Θ,V,W) do sistema $(3.50)-(3.65)$, *e T suficientemente grande.*

Demonstração: Provaremos por contradição. Suponha que existe uma sequência de valores iniciais $(U^{0,\nu},V^{0,\nu},W^{0,\nu}) \in \mathcal{H}^2(\Omega)\cap\mathcal{V}$, $\Theta^{0,\nu} \in H^2(0,l_1)\cap H^1_*$, e $(U^{1,\nu},V^{1,\nu},W^{1,\nu}) \in \mathcal{V}$, e uma constante positiva δ_0 tal que a solução correspondente $(U^\nu,\Theta^\nu,V^\nu,W^\nu)$ do sistema $(3.50)-(3.65)$ satisfaça

$$
\int_0^T |U^\nu(l_1,t)|^2\,dt + \int_0^T |W^\nu(l_2,t)|^2\,dt = 1, \quad \forall\nu\in\mathbb{N}, \tag{3.75}
$$

e verifique a desigualdade

$$1 > \delta_0 \int_0^T \widetilde{E}^\nu(t)\,dt + \nu\left\{\int_0^T\int_0^{l_1} |U_t^\nu|^2\,dxdt + \int_0^T\int_0^{l_1} |\Theta_x|^2\,dxdt + \int_0^T\int_{l_2}^{l} |W_t^\nu|^2\,dxdt\right\}$$

para cada ν, onde $\widetilde{E}^\nu(t) = E(t; U^\nu, \Theta^\nu, V^\nu, W^\nu)$. Assim, temos que

$$\int_0^T \widetilde{E}^\nu(t)\,dt \quad \text{é limitada para cada} \quad \nu, \tag{3.76}$$

e também

$$\int_0^T\int_0^{l_1} |U_t^\nu|^2\,dxdt \to 0, \quad \int_0^T\int_0^{l_1} |\Theta_x^\nu|^2\,dxdt \to 0, \quad \text{e} \quad \int_0^T\int_{l_2}^{l} |W_t^\nu|^2\,dxdt \to 0, \tag{3.77}$$

quando $\nu \to \infty$. Logo,

$$\begin{aligned}
&(U^\nu,\, V^\nu,\, W^\nu) \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega)),\\
&(U_t^\nu,\, V_t^\nu,\, W_t^\nu) \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega)),\\
&\Theta^\nu \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;L^2(0,l_1)),\\
&\Theta^\nu \quad \text{é limitada em} \quad L^2(0,T;H^1(0,l_1)).
\end{aligned}$$

Portanto, existe uma subsequência de $(U^\nu, \Theta^\nu, V^\nu, W^\nu)$, que será denotada da mesma forma, tal que

$$\begin{aligned}
&(U^\nu, V^\nu, W^\nu) \overset{*}{\rightharpoonup} (U, V, W) \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega)),\\
&(U_t^\nu, V_t^\nu, W_t^\nu) \rightharpoonup (U_t, V_t, W_t) \quad \text{em} \quad L^2(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega)),\\
&\Theta^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \Theta \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(0,l_1)),\\
&\Theta^\nu \rightharpoonup \Theta \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H^1(0,l_1)).
\end{aligned}$$

Então, aplicando o Lema de Kim, com $a = 0$ e $b = 1$, temos que

$$(U^\nu, V^\nu, W^\nu) \to (U, V, W) \quad \text{em} \quad C(0,T;H^r(\Omega)),$$

onde $r < 1$. Assim, usando (3.75), temos

$$\int_0^T |U(l_1,t)|^2\,dt + \int_0^T |W(l_2,t)|^2\,dt = 1. \tag{3.78}$$

Por outro lado, a convergência em (3.77) implica que

$$U_t = 0 \quad \text{q.s. em} \quad (0,l_1)\times(0,T), \tag{3.79}$$

$$\Theta_x = 0 \quad \text{q.s. em} \quad (0,l_1)\times(0,T), \tag{3.80}$$

$$W_t = 0 \quad \text{q.s. em} \quad (l_2,l)\times(0,T). \tag{3.81}$$

Assim, de (3.80) e (3.58) temos que $\Theta(x,t)=0$. Logo, temos que (U,Θ,V,W) satisfaz

$$-k_1U_{xx}=(a-\gamma)\gamma U, \tag{3.82}$$

$$0=-m\gamma U_x, \tag{3.83}$$

$$V_{tt}-k_2V_{xx}=2\gamma V_t-\gamma^2V, \tag{3.84}$$

$$-k_3W_{xx}=(b-\gamma)\gamma W, \tag{3.85}$$

de (3.83) segue que $U_{xx}(x,t)=0$, e assim, de (3.82), segue que $U(x,t)=0$. Agora, derivando a equação (3.84) em t, e considerando $\varphi=V_t$, temos que φ satisfaz

$$\begin{cases}\varphi_{tt}-k_2\varphi_{xx}=2\gamma\varphi_t-\gamma^2\varphi,\\ \varphi(l_1,t)=\varphi(l_2,t)=0,\\ \varphi_x(l_1,t)=\varphi_x(l_2,t)=0,\\ \varphi(x,0)=\varphi^0,\\ \varphi_t(x,0)=\varphi^1,\end{cases}$$

com $\varphi^0\in\mathcal{V}$ e $\varphi^1\in L^2(l_1,l_2)$. Agora, considerando $\widetilde{v}=e^{-\gamma t}\varphi$, temos que $\widetilde{v}$ satisfaz

$$\begin{cases}\widetilde{v}_{tt}-k_2\widetilde{v}_{xx}=0,\\ \widetilde{v}(l_1,t)=\widetilde{v}(l_2,t)=0,\\ \widetilde{v}_x(l_1,t)=\widetilde{v}_x(l_2,t)=0,\\ \widetilde{v}(x,0)=\widetilde{v}^0,\\ \widetilde{v}_t(x,0)=\widetilde{v}^1,\end{cases}$$

com $\widetilde{v}^0\in\mathcal{V}$ e $\widetilde{v}^1\in L^2(l_1,l_2)$. Logo, pelos Lemas 1.20 e 1.21, segue que $\widetilde{v}\equiv 0$, e, assim, $\varphi\equiv 0$. Portanto, $V_t\equiv 0$, e assim, da equação (3.84), segue que

$$-k_2V_{xx}=-\gamma^2V \quad \text{em} \quad (l_1,l_2)\times(0,T). \tag{3.86}$$

Assim, multiplicando (3.85) por W, integrando de l_2 a l e aplicando integração por partes, temos que

$$-k_3\int_0^{l_1}W_{xx}W\,dx=(b-\gamma)\gamma\int_0^{l_1}|W|^2dx,$$

$$-k_3\left[W_xW\Big|_{l_2}^{l}-\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx\right]=(b-\gamma)\gamma\int_{l_2}^{l}|W|^2\,dx,$$

$$k_3W_x(l_2,t)W(l_2,t)+k_3\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx\leq(b-\gamma)\gamma c_p\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx. \tag{3.87}$$

Por outro lado, de (3.86), segue que

$$-k_2 \int_{l_1}^{l_2} V_{xx} V \, dx = -\gamma^2 \int_{l_1}^{l_2} |V|^2 \, dx.$$

Agora, integrando por partes, obtemos

$$-k_2 \left[V_x V \Big|_{l_1}^{l_2} - \int_{l_1}^{l_2} |V_x|^2 \, dx \right] = -\gamma^2 \int_{l_1}^{l_2} |V|^2 \, dx,$$

e assim, usando a condição de transmissão e o fato de $U(x,t) = 0$, temos que

$$\begin{aligned} k_2 \int_{l_1}^{l_2} |V_x|^2 \, dx + \gamma^2 \int_{l_1}^{l_2} |V|^2 \, dx &= k_2 V_x(l_2,t) V(l_2,t) - k_2 V_x(l_1,t) V(l_1,t) \\ &= k_3 W_x(l_2,t) W(l_2,t) - [k_1 U_x(l_1,t) - m\Theta(l_1,t)] U(l_1,t) \\ &= k_3 W_x(l_2,t) W(l_2,t). \end{aligned} \tag{3.88}$$

Substituindo (3.88) em (3.87), segue que

$$k_2 \int_{l_1}^{l_2} |V_x|^2 \, dx + \gamma^2 \int_{l_1}^{l_2} |V|^2 \, dx + k_3 \int_{l_2}^{l} |W_x|^2 \, dx \leq (b - \gamma)\gamma c_p \int_{l_2}^{l} |W_x|^2 \, dx,$$

o que implica

$$k \int_{l_2}^{l} |W_x|^2 \, dx \leq -k_2 \int_{l_1}^{l_2} |V_x|^2 \, dx - \gamma^2 \int_{l_1}^{l_2} |V|^2 \, dx \leq 0,$$

onde k é uma constante positiva para γ suficientemente pequeno, ou seja,

$$k \int_{l_2}^{l} |W_x|^2 \, dx \leq 0.$$

Por outro lado, usando as desigualdades de Gagliardo-Nirenberg, Young e Poincaré, temos que

$$\begin{aligned} |W(l_2,t)| &\leq ||W(t)||_{L^\infty(l_2,l)} \leq ||W(t)||_{L^2(l_2,l)}^{\frac{1}{2}} ||W(t)||_{H^1(l_2,l)}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2} ||W(t)||_{L^2(l_2,l)} + \frac{1}{2} ||W(t)||_{H^1(l_2,l)} \leq C ||W_x(t)||_{L^2(l_2,l)}, \end{aligned}$$

$C > 0$ uma constante. Assim, obtemos que

$$|W(l_2,t)|^2 \leq C \int_{l_2}^{l} |W_x|^2 \, dx.$$

Logo,

$$\int_0^T |U(l_1,t)|^2 \, dt + \int_0^T |W(l_2,t)|^2 \, dt \leq C \int_0^T \int_{l_2}^{l} |W_x|^2 \, dx dt \leq 0,$$

o que contradiz (3.78). Portanto, para qualquer $\delta > 0$, existe $C_\delta > 0$ tal que

$$\int_0^T |U(l_1,t)|^2\,dt + \int_0^T |W(l_2,t)|^2\,dt \le \delta \int_0^T \widetilde{E}(t)\,dt +$$
$$+C_\delta \left\{ \int_0^T \int_0^{l_1} |U_t|^2\,dxdt + \int_0^T \int_0^{l_1} |\Theta_x|^2\,dxdt + \int_0^T \int_{l_2}^{l} |W_t|^2\,dxdt \right\},$$

■

No próximo teorema, definimos $\widetilde{\mathcal{E}}(t) := E(t;u,\theta,v,w)$, onde $E(t;u,\theta,v,w)$ é dado por (3.12).

Teorema 3.10. *Seja* (u,θ,v,w) *uma solução forte do problema de transmissão* $(3.1)-(3.11)$. *Então existe uma constante positiva* C_0 *tal que*

$$\widetilde{\mathcal{E}}(t) \le C_0 \widetilde{E}(0) e^{-2\gamma t}.$$

Demonstração: Considere o seguinte funcional

$$\mathcal{L}(t) = N\widetilde{E}(t) + M_0(\mathcal{H}_1(t) + H_3(t)) + \mathcal{H}_2(t) + N_0\mathcal{G}(t),$$

onde $H_3(t)$ é dado no Lema 2.10 do capítulo anterior. Pelos Lemas 2.10, 3.2, 3.6, 3.7 e 3.8, temos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \;\le\; & -(aN - K_1)\int_0^{l_1} |U_t|^2 dx - (\alpha N - K_2)\int_0^{l_1} |\Theta_x|^2 dx - \frac{(l_2 + l_1)}{l_2 - l_1} E_2(t,V) \\
& -(bN - K_3)\int_{l_2}^{l} |W_t|^2 dx - (DM_0 - K_4)\int_{l_2}^{l} |W_x|^2\,dx + \frac{k_3 M_0}{2\epsilon_4}|W(l_2,t)|^2 \\
& -(C_0 M_0 - K_5)\int_0^{l_1} |U_x|^2\,dx + M_0\left(\frac{k_1}{2\epsilon_5} + \frac{m}{2}\right)|U(l_1,t)|^2 \\
& -\left(\frac{\alpha N_0}{2} - M_0 K_6\right)|\Theta(l_1,t)|^2 + C\gamma \widetilde{E}(t),
\end{aligned}$$

onde

$$
\begin{aligned}
K_1 &= C_1\left(\frac{1}{2}+\frac{al_1}{2\eta_1}+\frac{C_3m(l_1+1)}{2}\right)+AM_0+\frac{N_0m(l_1+1)}{2},\\
K_2 &= \frac{ml_1C_1}{2\eta_2}+\alpha l_1C_3+\frac{C_3m(c_p+l_1)}{2}+\frac{ml_1C_1}{2\eta_2}+BM_0+N_0\left(\alpha l_1+\frac{m(c_p+l_1)}{2}\right),\\
K_3 &= KM_0+C_2\left(\frac{l_2}{2(l-l_2)}+\frac{bl_2}{2\eta}\right),\\
K_4 &= C_2\left(\frac{k_3l_2}{2(l-l_2)}+\frac{bl_2\eta}{2}\right),\\
K_5 &= C_1\left(\frac{k_1}{2}+\frac{al_1\eta_1}{2}+\frac{ml_1\eta_2}{2}\right),\\
K_6 &= \frac{m}{2}+\frac{\alpha l_1}{2}+\frac{ml_1}{2\epsilon_4}.
\end{aligned}
$$

Logo, integrando de 0 a t, e aplicando o Lema 3.9, obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(t)-\mathcal{L}(0) \leq\ & -(aN-K_1-C_\delta)\int_0^t\int_0^{l_1}|U_t|^2dxds-(\alpha N-K_2-C_\delta)\int_0^t\int_0^{l_1}|\Theta_x|^2dxds\\
&-\frac{(l_2+l_1)}{l_2-l_1}\int_0^t E_2(s,V)\,ds-(bN-K_3-C_\delta)\int_0^t\int_{l_2}^{l}|W_t|^2dxds\\
&-(DM_0-K_4)\int_0^t\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dxds-(C_0M_0-K_5)\int_0^t\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dxds\\
&+\delta\int_0^t\widetilde{E}(s)\,ds-\left(\frac{\alpha N_0}{2}-M_0K_6\right)\int_0^t|\Theta(l_1,s)|^2ds+C\gamma\int_0^t\widetilde{E}(s)\,ds.
\end{aligned}
$$

Assim, tomando δ e γ suficientemente pequenos e N, M_0 e N_0 suficientemente grandes, com

$$
\begin{aligned}
&N>\max\left\{\frac{K_1+C_\delta}{a},\frac{K_2+C_\delta}{\alpha},\frac{K_32+C_\delta}{b}\right\},\\
&M_0>\max\left\{\frac{K_4}{D},\frac{K_5}{C_0}\right\},\\
&N_0>\frac{2M_0K_6}{\alpha},
\end{aligned}
$$

concluímos que existe uma constante positiva K_0 tal que

$$\mathcal{L}(t)-\mathcal{L}(0)\leq -K_0\int_0^t\widetilde{E}(s)\,ds,$$

ou seja,

$$\mathcal{L}(t)\leq\mathcal{L}(0). \tag{3.89}$$

Agora, observe que existem constantes positivas N_1 e N_2 tais que

$$N_1\widetilde{E}(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq N_2\widetilde{E}(t), \tag{3.90}$$

ou seja, o funcional $\mathcal{L}(t)$ é equivalente à $\widetilde{E}(t)$. De fato, utilizando as desigualdades de Young e Poincaré,

$$\mathcal{G}(t) = \frac{1}{2}\int_0^{l_1}(x-l_1)|\Theta|^2\,dx \leq \frac{l_1}{2}\int_0^{l_1}|\Theta|^2\,dx \leq a_1\widetilde{E}(t),$$

onde a_1 é uma constante positiva,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_1(t) &= \int_0^{l_1} UU_t\,dx - \int_0^{l_1} xU_xU_t\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{l_1}(-x^2+l_1x-l_1^2)|\Theta|^2\,dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^{l_1}|U|^2\,dx + \frac{1+l_1}{2}\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + \frac{l_1}{2}\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx + \frac{l_1}{4}\int_0^{l_1}|\Theta|^2\,dx \\
&\leq \frac{c_p}{2}\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx + \frac{1+l_1}{2}\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + \frac{l_1}{2}\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx + \frac{l_1}{4}\int_0^{l_1}|\Theta|^2\,dx \\
&\leq a_2\widetilde{E}(t),
\end{aligned}$$

onde a_2 uma constante positiva,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_2(t) &= -C_1\int_0^{l_1} xU_xU_t\,dx + \int_{l_1}^{l_2}\left(\frac{(l_2+l_1)x-2l_1l_2}{(l_2-l_1)}V_xV_t\right)dx \\
&\quad + C_3\int_{l_2}^{l}\frac{l_2(l-x)}{l-l_2}W_xW_t\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{l_1}(x-l_1)|\Theta|^2\,dx \\
&\leq \frac{C_1l_1}{2}\int_0^{l_1}|U_x|^2\,dx + \frac{C_1l_1}{2}\int_0^{l_1}|U_t|^2\,dx + \frac{l_2}{2}\int_{l_1}^{l_2}|V_x|^2\,dx + \frac{l_2}{2}\int_{l_1}^{l_2}|V_t|^2\,dx \\
&\quad + \frac{C_3l_2}{2}\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx + \frac{C_3l_2}{2}\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx + \frac{l_1}{2}\int_0^{l_1}|\Theta|^2\,dx \\
&\leq a_3\widetilde{E}(t),
\end{aligned}$$

onde a_3 uma constante positiva, e

$$\begin{aligned}
H_3(t) &= \frac{l_2}{(l-l_2)}\int_{l_2}^{l} WW_t\,dx + \int_{l_2}^{l}\frac{l_2(l-x)}{(l-l_2)}W_xW_t\,dx \\
&\leq \frac{l_2}{2(l-l_2)}\int_{l_2}^{l}|W|^2\,dx + \frac{l_2}{2(l-l_2)}\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx + \frac{l_2}{2}\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx + \frac{l_2}{2}\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx \\
&\leq \frac{l_2c_p}{2(l-l_2)}\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx + \frac{l_2(1+l-l_2)}{2(l-l_2)}\int_{l_2}^{l}|W_t|^2\,dx + \frac{l_2}{2}\int_{l_2}^{l}|W_x|^2\,dx \\
&\leq a_4\widetilde{E}(t),
\end{aligned}$$

onde a_4 é uma constante positiva.

Assim, segue que existe uma constante N_2 tal que

$$\mathcal{L}(t) \leq N_2 \widetilde{E}(t).$$

Por outro lado, temos também que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) &\geq N\widetilde{E}(t) - M_0(a_2 E_1(t;U,\Theta) + a_4 E_3(t;W)) \\
&\quad -a_3\widetilde{E}(t) - N_0 a_1 E_1(t;U,\Theta) \\
&\geq N_1\widetilde{E}(t),
\end{aligned}$$

onde N_1 é uma constante positiva. Logo,existem constantes positivas N_1 e N_2 tais que

$$N_1\widetilde{E}(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq N_2\widetilde{E}(t).$$

Logo, de (3.89) e (3.90), segue que

$$N_1\widetilde{E}(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0) \leq N_2\widetilde{E}(0),$$

o que implica

$$\widetilde{E}(t) \leq N_3\widetilde{E}(0), \tag{3.91}$$

onde $N_3 = N_2/N_1$. Assim, para completarmos a demonstração basta provarmos que

$$\widetilde{\mathcal{E}}(t)e^{2\gamma t} \leq N_4\widetilde{E}(t),$$

onde $N_4 > 0$ constante. De fato, temos que

$$\int_0^{l_1} |\theta_x|^2 e^{2\gamma t}\,dx = \int_0^{l_1} |\Theta_x|^2\,dx,$$

$$\int_0^{l_1} |u_x|^2 e^{2\gamma t}\,dx = \int_0^{l_1} |U_x|^2\,dx,$$

e

$$\begin{aligned}
\int_0^{l_1} |u_t|^2 e^{2\gamma t}\,dx &\leq \int_0^{l_1} (|U_t| + \gamma|U|)^2\,dx \leq 2\int_0^{l_1} |U_t|^2\,dx + 2\gamma\int_0^{l_1} |U|^2\,dx \\
&\leq 2\int_0^{l_1} |U_t|^2\,dx + 2\gamma c_p\int_0^{l_1} |U_x|^2\,dx,
\end{aligned}$$

de onde segue que existe uma constante positiva c_1 tal que

$$E_1(t;u,\theta)e^{2\gamma t} \leq c_1 E_1(t;U,\Theta), \tag{3.92}$$

e, da mesma forma, obtemos a existência de constantes positivas c_2 e c_3 tais que

$$E_2(t;v)e^{2\gamma t} \leq c_2 E_2(t;V), \tag{3.93}$$

$$E_3(t;w)e^{2\gamma t} \leq c_3 E_3(t;W). \tag{3.94}$$

Portanto, de (3.92), (3.93) e (3.94), segue que existe uma constante $N_4 > 0$ tal que

$$\widetilde{\mathcal{E}}(t)e^{2\gamma t} \leq N_4 \widetilde{E}(t).$$

Logo, pela desigualdade acima e de (3.91) concluímos que

$$\widetilde{\mathcal{E}}(t)e^{2\gamma t} \leq C_0 \widetilde{E}(0),$$

onde $C_0 = N_4 N_3$. Portanto

$$\widetilde{\mathcal{E}}(t) \leq C_0 \widetilde{E}(0) e^{-2\gamma t},$$

concluindo nossa demonstração.

$\blacksquare$

CONCLUSÃO

Neste trabalho foi estudado a propagação da onda sobre materiais elásticos formados por três componentes. Inicialmente foi considerado duas componentes dissipativas, com duas dissipações do tipo friccional e posteriormente foi substituído uma das dissipações por uma dissipação térmica.

Em ambos os casos, foi considerado um sistema homogêneo com condição de Dirichlet na fronteira. A existência foi obtida através do método de Galerkin. A principal contribuição foi estabelecer uma taxa de decaimento do tipo exponencial através de técnicas multiplicativas. Desta forma, concluímos que as dissipações térmica ou friccional foram suficientes para determinar o decaimento e que esta estabilidade é dada independente do tamanho das partes dissipativas.

Para trabalhos futuros, poderíamos investigar se podemos estender esses resultados para materiais com mais de três componentes, e além disso, estabelecer o mesmo resultado quando as dissipações não atuam somente nas extremidades, por exemplo, em um material formado por três componentes com dissipação somente na parte mediana.

REFERÊNCIAS

[1] Adams, R.A. *Sobolev Spaces*. New York, Academic Press, 1975.

[2] Andrade, D., Fatori, L.H., Rivera, J.E.M., *Nonlinear transmission problem with a dissipative boundary condition of memory type*. Electronic Journal of Differential Equations, v.2006, n.53, p.1-16, 2006.

[3] Brézis, H., *Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones*. Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1984.

[4] Evans, L.C. *Partial Differential Equations*. University of California, Berkeley, 1998.

[5] Fatori, L.H., Lueders, E., Rivera, J.E.M., *Transmission problem for hyperbolic thermoelastic systems*. Journal of Thermal Stresses, v.27, n.7, p.739-763, 2003.

[6] Kim, J.U., *A boundary thin obstacle problem for a wave equation*. Comm. Partial Differential Equations, v.14, p.1011-1026, 1989.

[7] Kim, J.U., *On the energy decay of a linear thermoviscoelastic bar and plate*. SIAM J. Math. Anal., 23(4), 889-899, 1992.

[8] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York, John Wiley, 1989.

[9] Liu, Z., Zheng, S., *On the exponential stability of linear viscoelasticity and thermoviscoelasticity* . Quarterly of Applied Mathematics, 54:21–31, 1996.

[10] Marzocchi, A., Rivera, J.E.M., Naso, M.G., *Asymptotic behaviour and exponential stability for a transmission problem in thermoelasticity*. Math. Meth. Appl. Sci., 25:955–980, 2002.

[11] Medeiros, L.A., Andrade, N.G. *Iniciação às Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro, LTC, 1978.

[12] Medeiros, L.A., Miranda, M.M. *Espaços de Sobolev*. Rio de Janeiro, IM-UFRJ, 2008.

[13] Medeiros, L.A., Miranda, M.M. *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*. Textos de Métodos Matemáticos 25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.

[14] Medeiros, L.A., Rivera, P.H. *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais*. Textos de Métodos Matemáticos 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1975.

[15] Rivera, J.E.M., *Energy Decay Rates un Linear Thermoelasticity*. Funkcialaj Etvacioj, 35(1), 19-30, 1992.

[16] Rivera, J.E.M., *Introdução às Distribuições e Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro, LNCC, 2004.

[17] Rivera, J.E.M., Oquendo, H.P. *The transmission problem of viscoelastic waves*. Acta Applicandae Mathematicae, v.62, n.1, p.1-21, 2000.

[18] Zuazua, E., *Stability and Decay for a class of Nonlinear Hiperbolic Problems*. Asymptotic Analysis 1:161-185, 1988.