UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

STELA ANGELOZI LEITE

OTIMIZAÇÃO DO CRESCIMENTO SOCIAL

Londrina
2009

STELA ANGELOZI LEITE

OTIMIZAÇÃO DO CRESCIMENTO SOCIAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação, em Matemática Aplicada e Computacional da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtencao do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Prof. Dr. Naresh Kumar Sharma

Londrina
2009

Catalogação na publicação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

L533o Leite, Stela Angelozi.
Otimização do crescimento social / Stela Angelozi Leite. – Londrina, 2009.
x, 66 f. : il.

Orientador: Naresh Kumar Sharma.
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2009.
Inclui bibliografia.

1. Matemática aplicada – Teses. 2. Otimização matemática – Teses. 3. Funções (Matemática) – Teses. 4. Brasil – Condições econômicas – Teses. I. Sharma, Naresh Kumar. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

CDU 51-7

STELA ANGELOZI LEITE

OTIMIZAÇÃO DO CRESCIMENTO SOCIAL

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. Naresh Kumar Sharma – UEL
(Orientador)

____
Prof. Dr. Robinson Samuel Vieira Hoto – UEL

____
Profa. Dra. Santosh Shelly Sharma – UEL

Londrina, 30 de março de 2009.

Ao Eterno,

Dotador de sabedoria.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pois e Dele que vem a inteligência, *"Ele da sabedoria aos sábios e conhecimento aos entendidos"(Daniel 2:21).*

Agradeço ao Professor Dr. Naresh Kumar Sharma que com tanta paciencia, perseverança, inteligencia e sabedoria orientou este trabalho.

Ao professor Dr. Robinson Samuel Vieira Hoto que, a sua maneira, sempre me incentivou; ele foi essencial para esta conquista.

Aos meus pais, Joaquim e Silvia, meus alicerces, porto seguro, refugio, modelo.

Aos meus irmãos, Eliaquim e Debora, onde eu encontro confiança e repouso.

Aos meus "irmaos", Suellen Pardo e Vinicius Peralta que, alem de contribuir diretamente para este trabalho, me presentearam com apoio, exemplo e amizade sincera.

Ao meu avô Antonio Angelozi, a pessoa mais sabia que eu conheco.

Aos meus queridos Thiago, Rafael, Arthur, Marilei, Michelle, Alex, Evelin e Juliana pelo companheirismo.

Gratidao infinita ao Leandro Anizelli e a Pamela Ferreira, sem os quais nao teria ao menos me inscrito no PGMAC.

Esta dissertacao e destinada a voces.

LEITE, Stela A. **Otimização do crescimento social.** 2009. 75f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

RESUMO

Nesta dissertacççãao estuda-se um modelo de acumulaççcaão do capital baseado em dados iniciais como produççcãao, consumo, investimento e bens de consumo, em uma economia que tem objetivo de otimizar o bem estar social futuro. A partir de relacoes entre variáveis econômicas, obtem-se um modelo bidimensional constituído por um sistema de equações diferenciais lineares. Para isso utiliza-se os metodos de Calculo Variacional, em particular o sistema de equaccçãoes Hamiltonianas. Foram obtidas as condiççcoães necessíarias para existôencia de uma trajetoíria de crescimento oítimo a partir de condiccçoães existentes atualmente. Para verificar que as condicões necessárias sao tambem as condicães suficientes, foi usado o Teorema da Variedade Estável e a estabilidade de Lyapunov das soluççcãoes de sistemas de equaççcoães diferenciais lineares. Para que exista uma trajetáoria de crescimento áotimo áe necessaária a existôencia de um precçço imputado cuja taxa depende da taxa de produççcãao, da taxa de utilidade e do práoprio preçco por unidade de investimento. Este preçco imputado varia com tempo assim como o valor imputado do capital, enquanto o preçco imputado atual tende a zero quando $t \to \infty$. Alem disso, dada a funcao que descreve os bens de capital e o preco imputado, a distribuiççcãao atual maximiza, em longo prazo, o valor imputado do produto interno bruto per capita. Estas consideraççcoães foram sintetizadas no resultado principal do texto que diz que para qualquer capital inicial, o preçco inicial imputado de bens de investimento pode ser escolhido de tal modo que a trajetáoria, que inicia nestes valores e satisfaz as condiççcoães de otimalidade, se aproxima assintoticamente da solucççaão quase estacionaria. Esta curva e a uánica trajetáoria áotima e nela o consumo e os bens de capital sao estritamente crescentes (decrescente) se os valores inicias dos bens de consumo estiverem abaixo (acima) dos valores da trajetária quase-estacionaria.

Palavras-chave: Matemática aplicada. Otimização matemática. Funções (Matemática). Brasil - condições econômicas.

LEITE, Stela A. **Otimização do crescimento social.** 2009. 75f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

ABSTRACT

This dissertation is a study of a model of capital accumulation based on initial data such as production, consumption, investment, and consumer goods, in an economy which aims at optimizing the future social welfare. Starting with the relations between economical variables a system of diferencial equations, constituting a bidimensional model, is obtained. For this purpose, variacional calculus more specifically a system of Hamiltonian equations is used. Conditions necessary for the existence of an optimal trajectory have been obtained. To establish that the necessary conditions are also sufficient, stable manifold theorem and Lyapunov stability of the solutions of system of differencial equations have been used. For the existence of a trajectory of optimal growth it is necessary to have an imputed price such that its rate of change depends on production rate, utility rate and the price per unit investment. The imputed price as well as the imputed value of the capital change, while the current imputed price tends to zero as $t \to \infty$. Moreover, given the function that describes the capital goods and the imputed price, the current distribution maximizes, over a long period of time, the imputed value of gross inner product per capita. These considerations are summarized in the main result of the text which says that for a given initial capital, the initial imputed price for capital goods can be chosen such that the trajectory that starts with these initial conditions and satisfies the conditions of optimality, asymptotically approaches a quasi-stationary solution. The curve of optimal path is unique and on it the consumption and capital goods are strictly increasing (decreasing) if the initial values of consumer goods are below (above) the quasi-stationary trajectory.

Keywords: Mathematical optimization. Applied mathematics. Analysis (Mathematics). Brazil - Economic conditions.

LISTA DE NOTAÇÕES

$C[a,b]$	Conjunto das funções diferenciáveis no intervalo $[a,b]$.
$C^1[a,b]$	Conjunto das funções cuja primeira derivada é contínua no intervalo $[a,b]$.
$C^n[a,b]$	Conjunto das funções que tem até a n-ésima derivada contínuas.
L_k	Derivada parcial da função L em relação à variável k.
A^t	Transposta de uma matriz A.
$f : D \to \mathbb{R}^n$	$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))^t$
$\blacksquare$	Fim da demonstração.
$\forall$	Para todo.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{K}$	Conjunto dos números complexos.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A matemática, em particular o cálculo diferencial e integral, tem sido um dos maiores colaboradores para o desenvolvimento da ciência. Esta poderosa ferramenta é usada nas mais diversas áreas do conhecimento, e sempre comprovou a sua importância.

Nas últimas décadas, a matemática tem sido usada para prever o futuro. E isso não é brincadeira!!! Inúmeros problemas da vida real podem ser "transformados"em modelos, isto é equações ou sistemas de equações que descrevem matematicamente a situação. Este tipo de modelo é conhecido como modelo determinístico e, por meio dele, o estado de um sistema e definido por causas que se podem determinar, além disso, pode-se tambem identificar resultados, a partir de condições iniciais.

Uma ciência em particular tem adquirido avancos admiráveis fazendo uso deste tipo de estudo, a Economia. Pode-se definir a palavra economia, como as necessidades individuais ou sociais, utilizando para isso recursos naturais limitados. Desde que surgiu o ser humano no planeta, iniciou-se a atividade economica. Durante os 50 anos posteriores a II Guerra Mundial, a economia sofreu grandes mudanças. Atualmente, utiliza-se da análise matemática em quase todas as especialidades. Tanto a teoria neoclássica dos preços ([13]) como a teoria keynesiana da receita ([9]) tem sido desenvolvida de forma analática por matemáticos, utilizando técnicas de cálculo, álgebra linear e outras técnicas da análise quantitativa.

Esta tendência é tão forte que bilhões são investidos baseados nas previsões de analistas de mercado. Tudo graças aos profissionais que se especializa em criar técnicas para prever o comportamento financeiro futuro. Para entender essas "técnicas", imagine que, em um determinado momento, fosse possível conhecer as posições e velocidades exatas de cada partícula do Universo. As Leis da Física deveriam ser capazes de fornecer o estado do Universo em qualquer momento, a partir destas condições iniciais. Analogamente, se dispusermos de dados sobre investimento, consumo, produção, preços etc, as leis da economia devem fornecer o estado da economia em qualquer momento posterior. Entretanto, para os economistas, nao e suficiente saber o que vai acontecer, e preciso saber, qual e a melhor forma de tal evento acontecer; saber quais decisães devem ser tomadas para obter os melhores resultados no futuro. Além disso, mesmo com todas as informações sobre o estado inicial da economia em mãos, verifica-se que pequenas variações nas condições iniciais podem causar grandes perturbações no estado final da economia.

Neste trabalho e feito o estudo de um modelo que descreve o bem estar social de acordo com a acumulação do capital de cada indivíduo ([3]), baseado no fator subjetivo conhecido como índice de utilidade. Fazendo uso de dados como consumo, produção, investimento, bens de capital, preço por unidade de investimento, entre outros, é possível encontrar trajetórias que maximizem este índice de utlidade, fazendo com que a economia em questão seja próspera. Verifica-se também que mesmo não sendo possível obter uma solução maximizada (ótima), fazendo uso do Teorema da Variedade Estavel ([2]), e possível encontrar um subconjunto de soluções que convergirá para a solução ótima. No texto procurou-se sintetizar os passos para obter a solução de um modelo determinístico e a caracterização de tal solução como ótima.

Inicia-se o capítulo 1 com fatos básicos sobre equações diferenciais, sistemas de equações diferenciais lineares, em particular, sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, visando dar embasamento teórico para os assuntos posteriores. Contudo, quando for necessário, outras considerações básicas, como álgebra linear, serão associadas à leitura.

No capítulo 2 serãao apresentados alguns tipos de estabilidade para soluções de sistemas de equações diferenciais e estabelecidos vários critérios para esta. Os critérios são aplicados no estudo sobre a estabilidade de sistemas de equações lineares com coeficientes constantes inclusive com uma pequena perturbação. É dada uma maior atenção aos casos particulares de sistemas bidimensionais, inclusive representações geométricas de alguns deles que serão interessantes posteriormente neste trabalho.

No capítulo 3 o interesse maior está nas propriedades da solução e não na solução propriamente dita. Os métodos discutidos no capítulo anterior são muito restritos já que não abrangem os caso dos sistemas não lineares e/ou não autônomos. Por outro lado, o segundo método de Lyapunov é mais abrangente e eficiente. Esta teoria depende muito da existencia de funções especiais. O capítulo consiste em conceitos essencias para elaborar o metodo de Lyapunov, critérios de estabilidade local para soluções de equilíbrio de sistemas autônomos com exemplos interessantes, critérios de estabilidade para sistemas nao autônomos também com exemplos; e nao menos importante, os conceitos e critérios de estabilidade assintótica global, que permitirao o estudo de perturbações nas condições iniciais. O capítulo é concluído com o teorema da variedade estável.

Na utilização dos métodos para determinar solucães ótimas e suas propriedades de estabilidade, depara-se com o fato de que em muitos casos é possível substituir o problema de resolver a equação diferencial por um problema equivalente a encontrar a função que faz com que um funcional determinado por esta função tenha o máínimo (máaximo) valor possível. Problemas como estes são chamados Problemas Variacionais. Alguns métodos que permitem reduzir o problema de integrar uma equação diferencial em um problema variacional equivalente estão agrupados no capítulo 4 sobre Cálculo Variacional. O capítulo é iniciado com os conceitos que o fundamentam, também é feita a comparação entre um problema de cálculo de variações com um problema de controle otimo. Além disso, são obtidas as condições necessárias para a otimalidade da solução: as equacães de Euler-Lagrange, que serão reformuladas para as equações de Hamilton, as quais serão usadas no capítulo a seguir.

No capítulo cinco é apresentado o modelo de acumulação do capital, o qual e o foco do trabalho. E um modelo simplificado que descreve uma economia que visa maximizar o bem estar social dos indivíduos. Nesse capítulo, faz-se uso dos dados inciais já citados anteriormente (consumo, investimento, bens de consumo, etc) para construir um modelo constituído de duas equações diferenciais. A primeira dessas diz que a taxa de producao *y(t)* requerida per capita e uma função que depende da taxa de consumo c(t) e da taxa de investimento z(t), ambos per capita, ao longo do tempo na economia em questão, e a segunda diz que a taxa de variação dos bens de capital per capita relativa ao trabalho e determinado por z(t) e pelos bens de capital per capita denotado por k(t) sujeita à um fator de desconto que depende do crescimento da populacao e da taxa de depreciacçãao dos bens de capital. O objetivo é maximizar o funcional que representa o bem estar social total futuro. Este funcional depende do crescimento da populaçcãao *L(t)* e de um fator subjetivo U(c(t)) conhecido como índice de utilidade. Este índice e definido como a capacidade da economia de gerar bens de consumo sob o tempo, logo depende do consumo de cada indivíduo. Outra variavel importante neste modelo e *q(t)* que denota o preçco imputado de cada unidade de investimento. Otimizar o funcional que representa esse bem estar social futuro significa encontrar uma curva, que e unica, adequada em variíveis *(c, z,k)* e q que maximize o funcional em questão. Para esse objetivo foram usados os métodos de Cálculo de Variações, em particular o sistema de equações Hamiltonianas e Teorema da Variedade Estavel.

CAPÍTULO 1

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Este capítulo começca com fatos básicos sobre equações diferenciais. Depois disso, são tratados os sistemas de equações diferenciais lineares, para concluir com soluções de sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes ([1],[2], [7]).

1.1 Propriedades Básicas de Equações Diferenciais

Definição 1 *Seja t um número real em um intervalo aberto* $I \subset R$ *e denote por D um conjunto aberto e conexo em* $\mathbb{R}^{n+1}$*. Um conjunto arbitrário D, aberto e conexo arbitrário sera chamado de domínio. Um elemento de D sem escrito como* $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^n$*. Suponha que* $f : D \to \mathbb{R}^n$ e *uma função contínua . Considere a equação da forma*

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) \tag{1.1}$$

que e uma equação diferencial ordinária. Um sistema e dito ser autônomo se $f(t, x)$ e *independente de t. Caso contrário, e dito ser não-autônomo.*

Se existe uma função continuamente diferenciavel $\phi(t)$, definida em algum intervalo real *I* tal que para $t \in I$ tem-se que $(t, \phi(t)) \in D$ e também

$$\dot{\phi}(t) = f(t, \phi(t)), \tag{1.2}$$

então diz-se que ϕ e a solução da equacão diferencial (1.1) em *I*. Pode ser feita uma interpretação geométrica da equacçãao (1.1) . Essa equação descreve a inclinação de $f(t, x(t))$ em cada ponto $(t, x) \in D$.

A equação diferencial da forma

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.3}$$

na qual o lado direito nao inclui a variável independente t e chamada *autônoma.*

Seja $(t_0, x_0) \in D$. Um problema de valor inicial para a equação diferencial (1.1) consiste em encontrar um intervalo *I* contendo t_0 e a solução $\phi(t)$ de (1.1) tal que $\phi(t_0) = x_0$. Ou seja

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in I. \tag{1.4}$$

onde t_0 e chamado de *ponto inicial* e x_0 de valor *inicial.* O ponto (t_0, x_0) e chamado de *condição inicial.*

Em muitas aplicações, principalmente em economia, a função $f(t, x)$ não e estabelecida explicitamente. Mesmo quando $f(t, x)$ for conhecida, existe a possibilidade de que não seja possível resolvê-la explicitamente. São nestas situações que o conhecimento das condições necessárias para a existência e unicidade da solução é importante. Há muitos exemplos de equações diferenciais que possuem infinitas soluções e outras equações sem solução alguma. Com o respaldo das condições de existência e unicidade das soluções, não é preciso se preocupar com soluções desconhecidas.

O teorema a seguir estabelece as exigências que uma equação diferencial deve satisfazer para que exista uma solução e esta seja única.

Teorema 1 (Teorema da Existência de Cauchy-Peano) *Se* $f(t, x)$ *e uma funcao continua no retangulo* R*, onde*

$$R = \{(t, x) : |t - t_0|\} \leq a \;\; e \;\; |x - x_0| \leq b\},$$

existe uma solução continuamente diferenciavel $\phi(t)$ *no intervalo* $|t - t_0| \leq$ *a que soluciona o problema de valor inicial*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \tag{1.5}$$

Teorema 2 Unicidade *Seja* f *e* $\partial f/\partial x$ *continua no retângulo* R *dado em (1.5) com a e b positivos e seja*

$$M = \max_{(t,x)\in R} |f(t, x)| \;\; e \;\; \alpha = min(a, b/M).$$

Então o problema de valor inicial (1.4) possui uma única solução para $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$

1.2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

A grande maioria dos problemas de valor inicial não podem ser descritos apenas por uma equação diferencial e sim por um sistema de equações diferenciais. Esta seção mostra como encontrar as soluções de tais sistemas.

Seja uma matriz de ordem $n \times n$ descrita como $A(t) = [a_{ij}(t)]$; $x(t) = [x_i(t)]$ uma matriz de ordem $n \times 1$ e $\dot{x}(t) = [\dot{x}_i(t)]$ denota a derivada de x(t), e em todas as notações $i, j = 1, 2, \ldots, n.$ Considere que exista um sistema de equações diferenciais lineares homogêneo da forma

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{1.6}$$

Definicão 2 *Uma matriz* $\Phi(t) = [\phi_{ij}(t)]$ *de ordem* $n \times n$ *e dita ser uma matriz solução de (1.6) se cada coluna de* $\Phi(t)$ *satisfaz (1.6). Se a matriz solução* $\Phi(t)$ e *também não-singular para cada t, ela e chamada de matriz de solução fundamental .*

Se $\Phi(t)$ e uma matriz solução fundamental de ordem $n \times n$, então $\dot{\Phi}(t) = [\dot{\phi}_{ij}(t)]$. As matrizes solução possuem algumas propriedades importantes. Os resultados estabelecidos a seguir sãao necessários para o desenvolvimento de assuntos estudados posteriormente neste trabalho, porém as demonstrações serão omitidas por não partilharem do objetivo.

Teorema 3 *Considere a equação diferencial matricial*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \in [a, b]. \tag{1.7}$$

Se Φ *e a matriz solução fundamental de (1.6), entao* Φ *satisfaz (1.7) para* t E [a,b].

Teorema 4 *Seja* Φ *a matriz fundamental do sistema linear homogêneo em (1.6) e seja C a matriz constante não-singular* n x n. *Então* ΦC *e também uma matriz fundamental de (1.6).*

Teorema 5 *Suponha que* $\Phi(t)$ *e* $\Psi(t)$ *são duas matrizes de solução fundamentais diferentes para* $t \in [a, b]$ *do sistema (1.6). Então existe uma matriz constante não singular de ordem n times n denotada por C tal que*

$$\Psi = \Phi C. \tag{1.8}$$

1.3 Sistemas Lineares com Coeficientes Constantes

E natural dizer que a solução de uma equação diferencial da forma $\dot{x} = ax$ e uma exponencial na qual a constante *a* e o coeficiente do expoente de tal função. Vendo desta forma, fica natural dizer que a solucão de um sistema de equacoes diferenciais com coeficientes constantes e dada em termos de exponencial de uma matriz. Seja *A* um operador em $\mathbb{R}^n$. O objetivo neste momento e expressar as soluções da equação $\dot{x} = Ax$ em termos de operadores exponenciais.

Teorema 6 *Seja A uma matriz constante de ordem nx n, e assuma o sistema associado*

$$\dot{x} = Ax. \tag{1.9}$$

A matriz solução fundamental Φ *associada a (1.9) é dada por*

$$\Phi(t) = e^{At} \tag{1.10}$$

e tendo em vista o problema de valor inicial

$$\dot{x} = Ax, \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.11}$$

a sua solução é dada por

$$\phi(t) = e^{A(t-t_0)}x_0. \tag{1.12}$$

Observe que a solução do sistema de equações diferenciais dado por (1.11) e dada em termos de exponencial de matrizes. A exponencial de uma matriz real *A* de ordem *n*, pode ser obtida por vários modos distintos. Será dada atenção especial a dois deles: obtenção da exponencial de uma matriz por séries e utilizando as formas de Jordan.

Define-se

$$exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{n} \frac{(A)^k}{k!}$$

onde *A* e uma matriz constante de ordem $n \times n$.

Como trata-se de equações diferenciais ordinarias e preferível utilizar o Teorema de Cayley-Hamilton que simplifica as operações na procura de tal resultado. Usando o Teorema de Cayley-Hamilton

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{n-1} \alpha_k t^k A^k \tag{1.13}$$

onde os escalares a_k são obtidos de tal forma que para cada autovalor λ de *A*

$$e^{t\lambda} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (t\lambda)^k \quad (1.14)$$

Exemplo. Determinar e^{tA} onde *A* e definida por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$

Primeiro, deve-se encontrar o polinomio característico de *tA*, que e

$$p(t\lambda) = \lambda^2 + 5t\lambda - 6t^2$$

Os autovalores de *tA* são

$$\lambda_1 = t \qquad \lambda_2 = -6t$$

Como

$$e^{tA} = \alpha_0 I + \alpha_1 (tA)$$

segue que

$$e^t = \alpha_0 + \alpha_1 t$$

$$e^{-6t} = \alpha_0 + \alpha_1(-6t)$$

A solução deste sistema é

$$\alpha_0 = \frac{6e^t + e^{-6t}}{7} \qquad \alpha_1 = \frac{e^t - e^{-6t}}{7t}$$

Logo

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \frac{6e^t+e^{-6t}}{7} & 0 \\ 0 & \frac{6e^t+e^{-6t}}{7} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t(\frac{e^t-e^{-6t}}{7t}) \\ 6t(\frac{e^t-e^{-6t}}{7t}) & -5t(\frac{e^t-e^{-6t}}{7t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6e^t+e^{-6t}}{7} & \frac{e^t-e^{-6t}}{7} \\ \frac{6(e^t-e^{-6t})}{7} & \frac{e^t+6e^{-6t}}{7} \end{pmatrix}$$

Não é difícil perceber que o grande problema desse método está ligado a dificuldade de se calcular potencias de matrizes. O problema do cálculo de potências de uma matriz quadrada qualquer de ordem *n* através de multiplicação uma a uma é da ordem de n^3, portanto seria interessante encontrar uma ferramenta que tornasse esse cálculo mais simples, as formas de Jordan.

Definição 3 *Uma matriz* A *de ordem* n e *dita ser diagonalizavel se for possível escreve-la na forma* $M^{-1} \cdot D \cdot M$, *onde* M *e uma matriz inversível e D uma matriz diagonal, ambas de ordem* n.

Então, se houver uma base que diagonaliza *A*, pode-se escrever $A = M^{-1} \cdot D \cdot M$, logo:

$$\begin{aligned} e^A &= e^{M^{-1} \cdot D \cdot M} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(M^{-1} \cdot D \cdot M)^n}{n!} \\ &= I + M^{-1} \cdot D \cdot M + \frac{M^{-1} \cdot D \cdot M \cdot M^{-1} \cdot D \cdot M}{2} + \dots \\ &= I + M^{-1} \cdot D \cdot M + \frac{M^{-1} \cdot D^2 \cdot M +}{2} + \dots \\ &= M^{-1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D^n}{n!} \right) .M \\ &= M^{-1} e^D M. \end{aligned}$$

Portanto, se houver uma base que diagonaliza *A*, pode-se calcular sua exponencial facilmente, ja que *D* e diagonal. Por outro lado, nem todas as matrizes sao diagonalizaveis ([4], [8]). Por exemplo

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dizer que uma matriz dada e de Jordan e o mesmo que dizer que esta matriz e uma *forma de Jordan.* Antes de definir o que e uma forma de Jordan, e preciso definir o que e um *bloco de Jordan.*

Definição 4 *Um bloco de Jordan* $r \times r$ *em* λ *é uma matriz* $J_r(\lambda)$ *em* $\mathbb{M}_r(\mathbb{K})$, *com* $r \geq 1$, *que tem* λ *na diagonal principal e* 1 *na diagonal abaixo da principal, isto e,*

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_r(\mathbb{K}).$$

com $J_1(\lambda) = [\lambda]$.

Uma forma de Jordan de λ *e a matriz formada por blocos*

$$J_M(\lambda) = J_{m_1,\ldots,m_t}(\lambda) = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_2}(\lambda) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{m_t}(\lambda) \end{pmatrix}$$

onde os zeros sao matrizes nulas do ordem apropriada.

A maneira generalizada de escrever uma matriz na forma de Jordan e a seguinte:

$$\begin{pmatrix} J_{M_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{M_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{M_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

com $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ distintos.

Teorema 7 *Toda matriz A em $\mathbb{K}$ pode ser escrita na forma $M^{-1} \cdot J \cdot M$, onde J e uma matriz de Jordan.*

É obvio que uma matriz de Jordan pode ser escrita como uma soma de uma matriz diagonal *D* e uma nilpotente *N* que comutam entre si.

Seja J uma matriz de Jordan. O cálculo de e^A quando $A = M^{-1} \cdot J$ e análogo ao que acabou de ser feito. Isto é

$$e^{M^{-1} \cdot J \cdot M} = M^{-1} \cdot e^J \cdot M$$

Sabe-se que J = *N* + D, onde *N* e uma matriz nilpotente, *D* uma matriz diagonal e ND = DN. Assim o resultado fica

$$e^A = e^{M^{-1} \cdot J \cdot M} = M^{-1} \cdot e^{N+D} \cdot M = M^{-1} \cdot e^N \cdot e^D \cdot M$$

A facilidade em calcular e^N e e^D por este método permite calcular a exponencial de qualquer matriz sem tanto trabalho.

Exemplo. Seja $A = M^{-1} \cdot e^J \cdot M$ com

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

A matriz J com $J = N + D$, onde

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e uma matriz nilpotente, e

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

e uma matriz diagonal.

De fato, $N^k = 0$ para todo k maior que 1. Logo,

$$e^N = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!} = I + N + 0 + 0 + 0 + \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por outro lado, como *D* e diagonal

$$e^D = \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^5 \end{pmatrix}$$

$$e^J = e^D.e^N = \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^5 \end{pmatrix}$$

e $e^A = M^{-1}JM$.

Para determinar *M* de acordo com *A*, veja ([8]) e ([11]).

Estes resultados serão usados posteriormente quando forem estabelecidas as propriedades de estabilidade de soluções conhecidas.

CAPÍTULO 2

ESTABILIDADE DE SOLUÇÕES

Neste momento serão introduzidas alguns tipos de estabilidade para soluções de sistemas de equações diferenciais. Além disso, varios criterios de estabilidade são estabelecidos.

Baseado nesses critérios e discutido a estabilidade de sistemas de equações lineares com coeficientes constantes ate mesmo com uma pequena perturbação. O capítulo e concluído com casos particulares de sistemas bidimensionais, inclusive representações geométricas de alguns casos que serão interessantes posteriormente neste trabalho.

2.1 ESTABILIDADE LOCAL PARA SISTEMAS AUTÔNOMOS

Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{2.1}$$

com $f(t,x) : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $f(t,x)$ satisfaz as condições de existência, unicidade e dependência contínua nas condicoes iniciais. Sera denotado por $\phi(t, t_0, x_0)$ a solução de (2.1) que, no tempo t_0, passa pelo ponto inicial x_0, isto e

$$\phi(t_0, t_0, x_0) = x_0.$$

Observe que (2.1) possui infinitas soluções. Portanto, para encontrar uma determinada solução, e preciso especificar as condições iniciais. Sejam então $(0, c_1)$ e $(0, c_2)$ duas condições inicias de (2.1), ambas em $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n$.

Considere

$$y = \phi(t, 0, c_1) - \phi(t, 0, c_2), \tag{2.2}$$

Derivando (2.2) em relação à *t* e rearranjando os termos segue que,

$$\dot{\phi}(t, 0, c_1) = \dot{y} + \dot{\phi}(t, 0, c_2) \tag{2.3}$$

Visto que $\phi(t,0,c_1)$ e a solução de (2.1), então

$$\dot{\phi}(t,0,c_1) = f(t,\phi(t,0,c_1)). \tag{2.4}$$

Combinando (2.3) e (2.4) tem-se

$$\dot{y} = f(t,\phi(t,0,c_1)) - \dot{\phi}(t,0,c_2) = f(t,y+\phi(t,0,c_2)) - f(t,\phi(t,0,c_2)) \equiv g(t,y) \tag{2.5}$$

Observe que o último passo em (2.5) e uma definição e que se $y = 0$ então $g(t,0) = 0$. Escrevendo desta forma o entendimento torna-se mais simples pois o estudo das propriedade de estabilidade de $\phi(t,0,c_1)$ em relação a $\phi(t,0,c_2)$ e equivalente a estudar a estabilidade de y em relação à 0-solução.

Nosso interesse esta no quanto a solução fica próxima da solução de equilíbrio quando $t \to \infty$. A solucao de equilíbrio e a solução denotada por x que satisfaz a equação

$$f(t,\overline{x}) = 0, \quad \forall t \in [0,\infty). \tag{2.6}$$

Pode-se repetir a análise feitas em (2.2)-(2.5) para concluir que não há perda de generalidade em transladar a solução de equilíbrio $\overline{x}$ para a 0-solução.

Por isso, as definições de estabilidade ([2]) que se seguem farão referência a 0-solucão. Especificamente, seja

$$\dot{x} = f(t,x) \text{ com } f(t,0) = 0 \quad \forall t \in [0,\infty) \tag{2.7}$$

e suponha que $f(t,x) : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições de existência, unicidade e dependência contínua nas condições iniciais.

Definiçõo 5 *A 0-solução e dita ser estável no sentido de Lyapunov ou* **Lyapunov- estável** *se para todo* $\epsilon > 0$ *e* $t_0 \geq 0$, *existe um* $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal que $|x_0| < \delta$ *implica*

$$|\phi(t,t_0,x_0)| < \epsilon \quad \forall t \in [0,\infty).$$

A 0-solução e **uniformemente estavel** *se e estável e se δ puder ser escolhido independentemente de* $t_0 \geq 0$.

Definição 6 *A 0-solução e dita ser* **Lyapunov-estavel assintoticamente** *se esta é estável e se* $\phi(t, t_0, x_0) \to 0$ *quando* $t \to \infty$.

Ou seja, a 0-solução é assintóticamente estável se for estável e se para todo $t_0 \geq 0$ existe um $\delta_0(t_0) > 0$ tal que $|x_0| < \delta_0$ implica $\phi(t, t_0, x_0) \to 0$ quando $t \to \infty$.

A 0-soluçao e dita ser **uniformemente assintóticamente estável** se e uniformemente estável, e $\delta_0(t_0)$ puder ser escolhido independente de $t_0 \geq 0$ e também se para todo $\eta > 0$ existe $T(\eta) > 0$ tal que $|x_0| < \delta_0$ implica $|\phi(t, t_0, x_0)| < \eta$ se $t \geq t_0 + T(\eta)$. E finalmente, a solução e **instável** se ela não for **estável.**

Teorema 8 *Seja* $\Phi(t)$ *a matriz solução fundamental de (2.1). O sistema (2.1) e estável para qualquer* $t_0 \in R$ *se, e somente se existe uma constante positiva* $K = K(t_0)$ *tal que*

$$|\Phi(t)| \leq K \quad \textit{para todo } t \geq t_0 \tag{2.8}$$

Prova. Seja $t_0 \in R$ e suponha que $|\Phi(t)| \leq K$ para $t \geq t_0$. Sabe-se que qualquer solução $\phi(t)$ do problema de valor inicial linear homogêneo $\dot{x} = A(t)x, x(t_0) = x_0$ pode ser escrito da forma $\phi(t) = \Phi(t)c$, onde $\Phi(t)$ e a matriz solução fundamental e c é um vetor constante arbitrário.

Escolhe-se $c = \Phi(t_0)^{-1}x(t_0)$ e escreve-se a solução como

$$\phi(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x(t_0) \tag{2.9}$$

Dado $\epsilon > 0$, escolha $\delta = \delta(\epsilon, t_0) \leq \epsilon / K|\Phi(t)^{-1}(t_0)|$. Se $|x_0| < \delta$ então

$$\begin{aligned} |\phi(t)| &= |\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x(t_0)| \leq |\Phi(t)||\Phi(t_0)^{-1}||x(t_0)| < |\Phi(t)||\Phi(t_0)^{-1}|\delta \\ &\leq K|\Phi(t_0)^{-1}|\frac{\epsilon}{K|\Phi(t_0)^{-1}|} = \epsilon. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Reciprocamente, suponha que vale a estabilidade, isto é, para todo $\epsilon > 0$ e t_0, existe $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal que, se $|x_0| < \delta$ então $|\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x(t_0)| < \epsilon$. Isto significa que

$$|\phi(t)|\delta^{-1} = |\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x(t_0)\delta^{-1}| < \epsilon\delta^{-1}. \tag{2.11}$$

Usando (2.11), seja $K = \epsilon\delta^{-1}|\Phi(t_0)|$, segue que

$$|\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}| = \sup_{|x_0|<\delta} |\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x(t_0)\delta^{-1}| < \epsilon\delta^{-1}.$$

Deste último passo obtém-se

$$|\Phi(t)| = |\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}\Phi(t_0)| \leq |\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}||\Phi(t_0)| < \epsilon\delta^{-1}|\Phi(t_0)| = K. \blacksquare$$

Teorema 9 *Seja* $\Phi(t)$ *a matriz solução fundamental de (2.1) e seja* $\beta \in R$. *O sistema (2.1) e uniformemente estável para* $t_0 \geq \beta$ *se, e somente se existe uma constante positiva* $K = K(\beta)$ *tal que*

$$|\Phi(t)\Phi(s)^{-1}| \leq K \ \textit{para}\ t_0 \leq s \leq t < \infty. \tag{2.12}$$

Demonstração. Assuma que (2.12) e seja $\epsilon > 0$ dado e escolha $\delta = \delta(\epsilon) \leq \epsilon/K$. então para qualquer $t_0 \geq \beta$ se $|x_0| < \delta$ segue que

$$|\phi(t) = |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| \leq K|x_0| < \epsilon \tag{2.13}$$

e a estabilidade uniforme vale. A recíproca segue analoga a recíproca do teorema anterior observando que a estabilidade uniforme significa que para cada $\epsilon > 0$, δ independe de t_0. ■

Teorema 10 *Seja* $\Phi(t)$ *a matriz solução fundamental de (2.1). O sistema (2.1) e assintáticamente estável para* $t_0 \geq \beta$ *se, e somente se*

$$|\Phi(t)| \to 0 \ \textit{quando}\ t \to \infty. \tag{2.14}$$

Prova. Suponha que $|\Phi(t)| \to 0$ quando $t \to \infty$. Então, para qualquer $t_0 \in R$ existe uma constante positiva $K = K(t_0)$ tal que $|\Phi(t)| \leq K$ para $t \geq t_0$ e, pelo teorema (8), deduzimos a estabilidade. Além disso, visto que $\phi(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0$ com $|\Phi(t)| \to 0$ e $|\Phi(t_0)^{-1}x_0|$ constante, segue que $|\phi(t)| \to 0$ e a estabilidade assintotica vale. A recíproca vale por $|\phi(t)| = |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| \to 0$., implica (2.14). ■

2.2 ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

Admita que *A* e uma matriz constante de ordem $n \times n$ e considere o sistema linear autônomo homogêneo

$$\dot{x} = Ax, \qquad (2.15)$$

Usando os teoremas sobre estabilidade apresentados anteriormente e devido ao caráter especial de A, novos resultados podem ser obtidos. Novamente, observe que $x = 0$ e a solucao de equilíbrio de (2.15) e conhecendo os autovalores associados a *A*, pode-se tambem dizer sobre sua estabilidade. O teorema a seguir impoe condições para tal feito.

Teorema 11 *i) A 0-solução de (2.15) e estável se todos os autovalores de A possuem parte real náo-positiva e todos os autovalores de* A *que possuem parte real nula são zeros simples do polinômio característico de A.*

ii) A 0-soluçao e assintotiçamente estável se todos os autovalores de A possuem parte real negativa.

iii) A 0-solução e instável se pelo menos um autovalor de A possui parte real positiva.

Demonstração: Assuma que a matriz *A* de (2.15) está na forma canônica de Jordan. Então, a solução de (2.15) pode ser escrita como

$$\phi(t) = Pe^{J(t-t_0)}P^{-1}x_0, \qquad (2.16)$$

onde $A = PJP^{-1}$ e J e a matriz de Jordan já descrita anteriormente. Para instituir a estabilidade, e preciso mostrar que as soluções de (2.15) são limitadas, logo pode-se usar o teorema (8) da secao anterior. Considere os blocos de Jordan J_0 diagonal e J_i, $i = 1, \ldots s$. Por construcao, se um autovalor de *A* e simples, ele aparecerá no bloco J_0. Seja $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ os elementos da diagonal de J_0. Por hipótese, $Re(\lambda_i) \leq 0$ para $i = 1, \ldots k$. Portanto $|e^{J_0 t}|$ e limitada. Para os outro blocos, isto e, J_i, com $i = 1, \ldots s$, observe que $Re(\lambda_{k+i}) < 0$ e $|e^{J_i(t)}|$ limitado para $i = 1, \ldots s$. Conclui-se que $|e^{J(t-t_0)}| \leq K$ para $t \geq t_0 \geq 0$ e pelo teorema (8), a 0-solução de (2.15) e estável.

A segunda parte do teorema e imediata, visto que, por hipótese, todos os autovalores de A possuem parte real negativa. Finalmente, se pelo menos um autovalor de *A* possuir parte real positiva, $\phi(t)$ em (2.16) e uma solução crescente que torna-se ilimitada e a estabilidade não vale. ■

Analisando geometricamente a solução $\phi(t)$ de (2.15), pode-se representar as curvas no espaço x com t sendo um parâmetro. Explicitamente, se $\phi(t)$ e a solução de (2.15) no intervalo *I*, definimos a *trajetória* associada à solucao como um conjunto em $\mathbb{R}^{n+1}$ dada por $\{(t, \phi(t)) : t \in I\}$. A *curva* ou *órbita* da trajetória é a projeção da trajetória em $\mathbb{R}^n$. O espaco x da variáveis dependentes e chamado de *retrato de fases.*

Pode-se aplicar o estudo anterior sobre as propriedades de estabilidade no caso especial do sistema (2.15) quando A e uma matriz do tipo 2 x 2. Sem resolver o sistema (como ja foi feito) pode-se ter informações qualitativas baseadas nas informações sobre os autovalores.

Por simplicidade, suponha que *A* e de forma de Jordan e que λ_1 e λ_2 sao dois autovalores nao nulos de *A* e a origem e o unico ponto de equilíbrio. Nessa situacao, *A* pode ser um dos seguintes casos:

$$a)\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}, \quad b)\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} \quad c)\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}, \quad d)\begin{bmatrix}\alpha & \omega\\ -\omega & \alpha\end{bmatrix}. \qquad (2.17)$$

O que realmente importa neste momento é analisar os retrato de fase de um sistema linear bidimensional pois, o problema tratado no último capítulo deste trabalho se baseará fortemente nesta análise. A análise de fases é uma ferramenta adicional, porem muito útil, no estudo da estabilidade de sistemas de equacoes diferenciais. Muitos sistemas nao podem ser resolvidos explicitamente, como no caso dos modelos econômicos. E neste momento que a análise de fases mostra a sua importância, ja que por meio dela, pode-se avaliar de modo qualitativo as propriedades do modelo em questão.

Apenas o caso *a)* diz respeito ao problema tratado neste trabalho. Para mais detalhes dos outros casos, veja ([2]).

Para facilitar a analise, o caso *a)* será dividido em dois subcasos com a solucao dada da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Suponha que $0 < \lambda_2 < \lambda_1$. A origem e um no instavel.

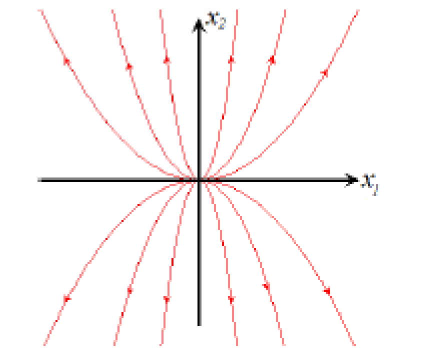

Figura 2.1 – Nó Instável.

Suponha $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. A origem é um nó estável. O retrato de fases é similar ao do caso anterior, porem com as flechas invertidas.

Suponha $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. A origem é um ponto de sela (figura 2.2).

Similarmente, se $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, as setas são reversas.

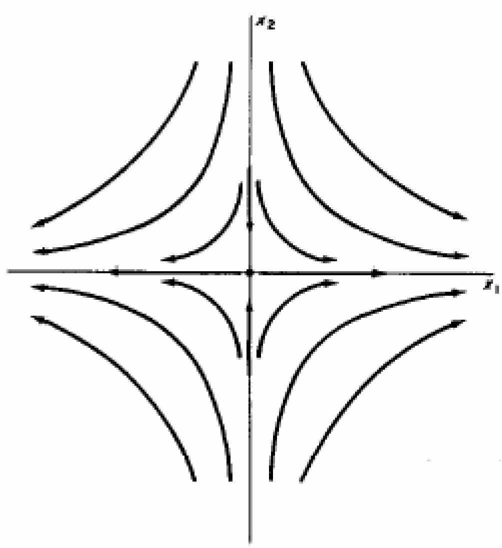

Figura 2.2 – Ponto de Sela

2.3 ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARIZADOS

Antes de prosseguir com o estudo do retrato de fases de um sistema linear bidimensional, é fundamental lembrar que sistemas não-lineares da forma

$$\dot{x} = Ax + h(x) \tag{2.18}$$

podem ser linearizados para a equação (2.15), logo é possível deduzir a estabilidade e a instabilidade da 0-solução de (2.18) e o seguinte teorema diz como fazê-lo [2].

Teorema 12 *Considere* $h(x)$ *de (2.18) e suponha que* $h(x)/|x|$ ó *uma função contínua de* x *que tende a* 0 *quando* $x \to 0$*. Então*

i) Se a solução do sistema linearizado $\dot{x} = Ax$ é *assintoticamente estável, então a 0-solucao de equilíbrio de (2.18) e também assintoticamente estavel;*

ii) Se a 0-solução de $\dot{x} = Ax$ e *instável, então a 0-solucao de equilíbrio de (2.18) e instóavel.*

Ou seja, sem perda de generalidade, pode-se tratar o sistema linear e o não linear da mesma forma já que numa vizinhançca da soluçcaão de equilíbrio, o retrato de fases do sistema linear é muito similar ao retrato de fases do sistema não linear.

CAPÍTULO 3

METODO DIRETO DE LYAPUNOV

Em muitos problemas, o que realmente interessa são as propriedades da solução e não a solução propriamente dita. Porém, os métodos discutidos até agora são muito restritos, já que não abrangem os caso dos sistemas não lineares e/ou nao autônomos. E necessario do método de Lyapunov ([10]), o qual permite estudar as propriedades da solução sem te-las explicitamente. Esta teoria depende muito da existencia de funções certas funções que medem a distancia entre as soluções.

O capítulo inicia com os conceitos essenciais para elaborar o método de Lya-punov [2], [12]. Depois serao estabelecidos critérios de estabilidade local para soluções de equilíbrio de sistemas autônomos, os quais serao ilustrados com alguns exemplos interessantes.

Também, é feita uma comparação desta teoria através dos exemplos tratados no capátulo interior. Em seguida, são discutidos critérios de estabilidade para sistemas não autonomos, incluindo exemplos.

Posteriormente serão introduzidos conceitos e critérios de estabilidade assintáotica global, que permitirá o estudo de perturbações nas condições iniciais. O capítulo é concluido com o teorema da variedade estável, no qual a figura (2.2) sera útil.

3.1 ESTABILIDADE LOCAL PARA SISTEMAS AUTÔNOMOS

Para referencias posteriores considere a equação diferencial autônoma $\dot{x} = f(x)$ $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, na qual f é continuamente diferenciável no conjunto aberto *D*.

Além disso assuma que o conjunto aberto *D* contem a origem e que $f(0) = 0$. Em resumo

$$\dot{x} = f(x); \quad f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; \quad f(0) = 0; \quad 0 \in D \subset \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

e lembrando que um sistema nao-autônomo possui derivadas que dependem explicitamente do tempo.

Definição 7 *Seja* D *um um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$ *contendo a origem. Uma função escalar* $V(x) : D \to \mathbb{R}$ e **semidefinida positiva** *em* $D \subset \mathbb{R}^n$ *se ela e contínua em D e se* $V(x) \geq 0$ para $x \in D$. *A função escalar* $V(x)$ e **semidefinida negativa** *em D* se $-V(x)$ *é semidefinida positiva. A função escalar* $V(x)$ e **definida positiva** *em* D se é *contínua em* D, $V(x) > 0$ *para* $x \neq 0$ *e* $V(0) = 0$. *Em outras palavras,* $V(x)$ é *definida positiva se ela é semidefinida positiva com* $V(0) = 0$ *e* $V(x) > 0$ *para* $x \neq 0$. *Finalmente, a função escalar* $V(x)$ e **definida negativa** *se* $-V(x)$ e *definida positiva. A funcao escalar continua* $V(x)$ e **indefinida** se $V(0) = 0$ *e se em qualquer vizinhança da origem tem-se ambos valores positivos e negativos.*

Esta definicao será muito útil quando os teoremas de estabilidade forem instituídos.

Seja que $V(x)$ e definida positiva em $D \subset \mathbb{R}^n$ e que $V(x)$ e continuamente diferenciavel. Isto que dizer que nao será assumido apenas que $V(x)$ e contínua em D, mas tambúem que existem as derivadas parciais de todos os argumentos e cada uma delas úe contínua em D. Como $V(x)$ possui parciais contínuas segue que possui gradiente que serú denotado por $\nabla V(x)$ é definido por

$$\nabla V(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) \tag{3.2}$$

A derivada de $V(x)$ em relação ao tempo ao longo de soluções de equações diferenciais autônomas e um conceito básico no método de Lyapunov.

Define-se

$$\dot{V}(x) \equiv \nabla V(x) \cdot \dot{x} = \nabla V(x) \cdot f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_k} \cdot f_k(x). \tag{3.3}$$

Se $\phi(t, t_0, x_0) \equiv \phi(t) \equiv x(t)$ e a solução de $\dot{x} = f(x)$ em (3.1), entao, usando a regra da cadeia

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = V_x(x(t)) \cdot \dot{x}(t) = \nabla V(x(t)) \cdot f(x(t)) = \dot{V}(x(t)). \tag{3.4}$$

A função $\dot{V}(x(t))$ é chamada trajetória derivada ao longo da solução $x(t)$. Tanto $V(x)$ quanto $\dot{V}(x)$ desempenham um importante papel na teoria de Lyapunov. Na realidade, a função definida positiva $V(x),\ x \in D$ D com a função semidefinida negativa $\dot{V}(x)$ são chamadas de função Lyapunov.

Neste momento existem condiçcãoes para estabelecer teoremas e resultados sobre a estabilidade de um sistema usando as definicões e informacoes sobre a funcao de Lyapunov.

Teorema 13 (Estabilidade de Lyapunov para Sistemas Autônomos) *Suponha que exita uma função definida positiva continuamente diferenciavel, definida em um conjunto aberto D contendo a origem,* $V(x) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *e* $\dot{V}(x)$ *é semidefinida negativa para* $x \in D.$. *Então a 0-soluçao de* $\dot{x} = f(x)$ *em (3.1) e estável.*

Prova. Para provar a estabilidade, sera usada a definicao (5) que diz que dado um $\epsilon > 0$ e $t_0 \geq 0$, existe um $\delta > 0$ tal que para $|x_0| < \delta$ a solução $x(t, t_0, x_0)$ de $\dot{x} = f(x)$ satisfaz $|x(t, t_0, x_0)| < \epsilon$ para todo $t \geq 0.$. Seja $\epsilon > 0$ de tal forma que a bola fechada de raio ϵ esta contida em *D*; isto é, seja $\{x : |x| \leq \epsilon\} \subset D \subset \mathbb{R}^n.$. Defina

$$V_0 = \min_{|x|=\epsilon} V(x). \tag{3.5}$$

Escolha $\delta > 0$ tal que se $|x| \leq \delta$ então $V(x) < V_0.$ Este δ com $0 < \delta \leq \epsilon$ existe pois $V(0) = 0$ e $V(x)$ e contínua em *D*. Então se $|x_0| < \delta$, a hipotese de que $\dot{V}(x) \leq 0$ implica que a função $V(x(t))$ é decrescente em *t*. Logo

$$V(x(t, t_0, x_0)) \leq V(x(t_0, t_0, x_0)) = V(x_0) < V_0. \tag{3.6}$$

De (3.6) conclui-se que $|x(t, t_0, x_0)| < \epsilon$ para $t \geq 0$ e portanto a 0-solução e estável. ■

Teorema 14 (Estabilidade assintotica de Lyapunov para sistemas autônomos) *Suponha que exista uma funcão definida positiva continuamente diferenciável* $V(x) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *onde D* e *um conjunto aberto contendo a origem e* $\dot{V}(x)$ *é definida negativa para* $x \in D$. *Entao a 0-solução de* $\dot{x} = f(x)$ *em (3.1) é assintóticamente estável.*

Prova. Como $\dot{V}$ e negativa definida em *D*, pelo teorema anterior segue que a 0-solução e estavel, de modo que para $|x_0| < \delta$ implica que $|x(t, t_0, x_0)| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$. O condição para que a estabilidade seja assintotica e que $|x(t, t_0, x_0)| \to 0$ quando $t \to \infty$ ou, equivalentemente $V(x(t, t_0, x_0)) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Suponha que $V(x(t, t_0, x_0)) \to V_0 > 0$ quando $t \to \infty$ o que significa que $V(x(t, t_0, x_0))$ não se aproxima de zero quando $t \to \infty$. Se for verdade que $V(x(t))) \to V_0 > 0$ quando $t \to \infty$, então existe algum $\alpha > 0$ tal que para $|x| < \alpha$ segue que $V(x) < V_0$. Considere β definido por

$$\beta = \max_{\alpha \leq |x| \leq \epsilon} [\dot{V}(x(t))] < 0 \tag{3.7}$$

Para $x \in \{x : \alpha \leq |x| \leq \epsilon\}$ note que

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \dot{V}(x(t)) \leq \beta \tag{3.8}$$

que, sob integracçãao em relacçãao a *t*, torna-se

$$V(x(t, t_0, x_0)) \leq V(x(t_0, t_0, x_0)) + \beta t,$$

ou seja

$$V(x(t)) \leq V(x_0) + \beta t \tag{3.9}$$

para todo $t \geq 0$., o que e a contradição da hipótese que *V* e positiva definida ja que *t* se torna grande e e multiplicado por $\beta < 0$ o que obriga $V(x(t)) < 0$. Portanto $V_0 = 0$ e $|x(t, t_0, x_0)| \to 0$ quando $t \to \infty$.■

Pelos teoremas (13) e(14) comprova-se utilidade das funções de Lyapunov ao determinar a estabilidade de sistemas autônomos. Como foi dito, a existencia da função de Lyapunov e suficiente para instituir a estabilidade da 0-solução de , sem resolver tal sistema.

Teorema 15 (Instabilidade de Lyapunov para sistemas autônomos) *Seja* $D \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto e conexo que contém a origem. Seja U um conjunto aberto tal que* $\bar{U}$ *contem e a 0-solucão de equilíbrio. Suponha que V e continuamente diferenciável em D, que* V *e* $\dot{V}$ *são definidas positivas em* $D \cap U$*, e também que* $V = 0$ *em* $\partial U \cap D$ *que e a parte da fronteira de U que esta contida em D. Entao a O-soluçao de* $\dot{x} = f(x)$ *em (3.1) e instavel.*

Prova. Escolha um conjunto aberto limitado D_0 contendo a origem de forma que $\bar{D}_0 \subset D$. Dado $\delta > 0$, escolha $x_0 \in D_0 \cap U$ com $0 < |x_0| < \delta$. Da hipótese de $\dot{V}$ ser positiva definida, deduz-se que $V(x_0) > 0$. Define-se

$$S = \{x : x \in \overline{D_0 \cap U} \quad \text{com } V(x) \geq V(x_0)\}.$$

Note que *S* e fechado e limitado, logo compacto. Seja

$$\alpha = \min_{x \in S} \dot{V}(x)$$

Observe que $\alpha > 0$ visto que $\partial U \cap D$ e vazio. Seja $x(t) \equiv x(t, t_0, x_0)$ a solucão, o que implica que $\dot{V}(x) \geq \alpha$ para $x(t) \in S$. Por integração, segue que

$$V(x(t)) = V(x_0) + \int_0^t \dot{V}(x(s))ds \geq V(x_0) + \alpha t \quad \text{para } x(t) \in S. \tag{3.10}$$

Esta última equação quer dizer que quando *t* aumenta, $V(x(t))$ eventualmente torna-se ilimitada. Contudo, visto que *V* e contínua e *S* e compacto, *V* nao pode tornar-se ilimitada para $x \in S$.. Portanto, $x(t)$ deve, eventualmente, sair de $\overline{D_0 \cap U}$. Visto que $\overline{D_0 \cap U}$ é compacto e *V* e contínua , existe um t_1 tal que $x(t)$ deixa $\overline{D_0 \cap U}$ no tempo t_1. Seja $x(t_1) \in \partial\overline{(D_0 \cap U)}$. Porem $x(t_1)$ não pode pertencer à fronteira de *U* contida em *D* pela hipótese de que $V = 0$. Assim $x(t_1)$ está na fronteira de D_0 contida em *U*. Como x_0 e escolhido arbitrariamente perto da origem, segue que a 0-solução e instável pois nao importa quão perto da origem ela esteja, em um tempo finito a solução foge do conjunto limitado D_0. ■

Exemplo. Sejam a, b, c e d constantes e considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = ax^3 + by, \\ \dot{y} = -cx + dy^3 \end{cases} \tag{3.11}$$

A funcão de Lyapunov $V(x) = cx^2 + by^2$ sera usada para estudar as propriedades de estabilidade da 0-solucçaão em cada um dos casos a seguir:

1. *Quando* a, b, c e d *são constantes reais e positivas.*

E evidente que $V(x)$ e continuamente diferenciavel. Além disso, note que

$$V(x,y) = cx^2 + by^2$$

é definida positiva pois $V(x,y) > 0$ para $x \neq 0$ e $V(0,0) = c0^2 + b0^2 = 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= \nabla V(x) \cdot f(x,y) = \frac{\partial V(x,y)}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} \cdot \dot{y} \\
&= 2cx(ax^3 + by) + 2by(-cx + dy^3) \\
&= 2acx^4 + 2bdy^4. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Isto mostra que $\dot{V}(x)$ também é positiva definida. Usando o teorema (15), afirma-se que nestas condições, a 0-solução de (3.11) e instável.

2. *Quando* a, b, c e d *são constantes reais e negativas.*
   Pode-se afirmar imediatamente que, sob tais condições, $-V(x,y)$ e positiva definida. Note ainda que $-\dot{V}(x)$ e positva definida pois $ac > 0$, assim com $bd > 0$. Logo a 0-solução e instável.

3. *Quando* $a < 0,\ b > 0,\ c > 0\ e\ d < 0$. Neste caso, $V(x,y)$ é positiva definida e $\dot{V}(x,y)$ é negativa definida. Portanto usando o teorema (14), afirma-se que nestas condições, a 0-solução de (3.11) e assintoticamente estável.

4. *Quando* $a = 0,\ b > 0,\ c > 0\ e\ d < 0$.. Aqui ainda $V(x,y)$ e positiva definida, porém note que como $a = 0$, segue

   $$\dot{V}(x) = 2bdy^4$$

   ou seja, tem-se $\mathrm{V(x,0)=0}$ para qualquer x, portanto *V* é semidefinida negativa e pelo teorema (13), a 0-solução e estável.

Exemplo. Considere a função produção

$$Y(t) = F(K(t), L(t)), \qquad (3.13)$$

onde $Y(t)$ denota unidades de produção, $K(t)$ denota unidades de capital e $L(t)$ denota unidades de força de trabalho, todas no tempo *t*. Admite-se que (3.13) satisfaz a seguinte propriedade: se cada uma das variáaveis independentes em (3.13) são multiplicadas por uma constante positiva λ, então a variável dependente e também multiplicada pela mesma constante. Se esta propriedade é satisfeita, (3.13) é chamada de equação homogênea de grau 1. Por esta hipótese segue que

$$F\left(\frac{K}{L},1\right) = f\left(\frac{K}{L}\right) = f(k), \tag{3.14}$$

onde $k = \dfrac{K}{L}$ é a razão entre o capital e o trabalho. L

Assuma que $f(0) = 0, f'(k) > 0, f''(k) < 0, \lim_{k \to 0+} f'(k) = 0$. Define-se investimento como a derivada de $K(t)$ em relação ao tempo, denotada por $\dot{K}$ e a economia é definida ser $sF(K, L)$, com $0 < s < 1$. Para haver equilíbrio e necessário que o investimento seja igual a economia, isto é

$$\dot{K} = sF(K, L). \tag{3.15}$$

Assuma também que o trabalho cresce exponencialmente e é dado por

$$L(t) = L(0)e^{nt}, \quad L(0) > 0, \quad 0 < n < 1. \tag{3.16}$$

No caso que $Y(t)$ ser uma funçao estritamente côncava ([16]):

$$\dot{k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{\dot{L}}{L}\frac{K}{L} = sf(k) - nk. \tag{3.17}$$

Assuma que

$$0 < n/s < f'(0)$$

e seja $\dot{k} = 0$ em (3.17) para obter uma unica solucão de equilíbrio. Denote esta solucao de equilibrio por k^* e usando a funcao de Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2, \tag{3.18}$$

onde $x = k - k^*$. Calcule:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= x\dot{x} = x\dot{k} = x[sf(x+k^*) - n(x+k^*)] \\
&\leq x[sf(k^*) + xsf'(k^*) - n(x+k^*)] \\
&= x^2[sf'(k^*) - n] = x^2\left[\frac{nk^*f'(k^*)}{f(k^*)} - n\right] \\
&= \frac{x^2 n}{f(k^*)}[k^*f'(k^*) - f(k^*)] < 0. \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Em (3.19) note que a desigualdade segue da propriedade da concavidade estrita de $f(k)$. Além disso, $\dot{V}(x)$ é definida negativa pois $k^*f'(k^*) < f(k^*)$. Pelo teorema (14) a k^*-solução de equilíbrio é assintóticamente estável para k numa vizinhança de k^*. Na realidade, k^* e assintóticamente estável para $k > 0$. Este exemplo é uma prévia do que será tratado de forma aprofundada em um momento posterior.

Neste momento seró estudado o metodo de Lyapunov na análise de um sistema linear autônomo com coeficientes constantes, ou seja, constuir uma função de Lyapunov para tal sistema tratado nos § 2.2 e 2.3. Em seguida, para ilustrar esta situacao, um exemplo seróa dado.

Considere novamente o sistema

$$\dot{x} = Ax, \qquad (3.20)$$

com *A* sendo a matriz quadrada de ordem *n* constante. O lema seguinte dá uma condição necessária e suficiente para que uma funçao $V(x) = x^T Bx$ seja de Lyapunov, com $\dot{V}(x) = x^T(A^TB + BA)x$ [2].

Lema 1 *Suponha A como em (3.20) tal que* $detA \neq 0$. *A equação matricial*

$$A^TB + BA = -C \qquad (3.21)$$

possui uma solução definida positiva B para toda matriz definida positiva C se, e somente se, todos os autovalores da matriz A possuem parte real negativa.

Exemplo. Se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

em (3.20), entao A tem autovalores repetidos $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Com $C = I_2$, B e determinada de acordo com a equaçcãao (3.21),

$$B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Logo, pela discussão anterior, a 0-solução possui estabilidade assintótica.

A vantagem do método de Lyapunov é mais evidente quando o método do lema (1) é aplicado ao sistema

$$\dot{x} = Ax + h(x) \tag{3.22}$$

Os lema e teorema a seguir sao necessarios [2].

Lema 2 *Seja* $V_p(x)$ *uma função polinomial definida positiva de grau p, e também seja* $W(x) = o(|x|^p)$ *com* $|x| \to 0$ *e continua. Então*

$$V(x) = V_p(x) + W(x) \tag{3.23}$$

é definida positiva em uma vizinhança da origem.

Note que $W(x) = o(|x|^p)$ significa que $(W(x)/|x|^p) \to 0$ quando $|x| \to 0.$

Teorema 16 *Considere o sistema autônomo* $\dot{x} = f(x)$ *e suponha que* $f(x)$ e *continuamente diferenciável num conjunto* D *que contém a origem e também que* $f(0) = 0$*. Entãao*

(i) Se todos os autovalores do Jacobiano $f_x(0)$ *possuem parte real negativa, então a* 0-*solução é assintóticamente estável.*

(ii) Se algum autovalor do Jacobiano $f_x(0)$ *possui parte real positiva, a* 0-*solução é instável.*

Exemplo:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2(1 + x_1), \\ \dot{x_2} = -x_1(1 + x_2) \end{cases} \tag{3.24}$$

a função de Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ neste caso não ajuda a encontrar as propriedades de estabilidade da 0-solução já que quando calcula-se a $\dot{V}$ obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= 2x_1x_2(1 + x_1) + 2x_2[-x_2(1 + x_1)] && (3.25) \\ &= 2x_1x_2 + 2x_1^2x_2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_2^2 && (3.26) \\ &= 2x_1x_2(x_1 - x_2) && (3.27) \end{aligned}$$

Isto é, não se pode caracterizar $\dot{V}$ como definida positiva ou negativa pois depende de x_1 e x_2. Além disso, note que ao calcular o jacobiano de (3.24), o teorema (16) não pode ser usado. De fato

$$f_x = \begin{pmatrix} x_2 & 1 \\ -1 & -x_2 \end{pmatrix}$$

Calculando no ponto (0, 0), obtem-se os seguintes autovalores

$$|f_x(0,0) - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

o que resulta em dois autovalores: $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$. Assim o teorema (16) não pode ser aplicado.

Uma maneira de encontrar as propriedades de estabilidade do sistema em questao e construir a função de Lyapunov pela razão entre $\dot{x}_1$ e $\dot{x}_2$ como segue

$$\frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2} = -[x_2(1+x_1)/x_1(1+x_2)]$$

o que equivale a

$$\frac{x_1 dx_1}{(1+x_1)} = \frac{-x_2 dx_2}{(1+x_2)}.$$

Integrando ambos os lados da igualdade, tem-se

$$[x_2 - \ln(1+x_2)] + [x_1 - \ln(1+x_1)] = constante$$

Então, define-se

$$V(x_1, x_2) = [x_2 - \ln(1+x_2)] + [x_1 - \ln(1+x_1)]$$

para $x_1, x_2 > -1$. Tal *V* é contínuo para x_1 e x_2. Como $e^{x_1} \geq 1 + x_1$, $e^{x_2} \geq 1 + x_2$, V é positiva definida pois, $x_1 - \ln(1+x_1) \geq 0$ e $x_2 - \ln(1+x_2) \geq 0$. Finalmente, $V(0) = 0$ e

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 \\ &= (1 - \frac{1}{1+x_1}) \cdot x_2(1+x_1) + (1 - \frac{1}{1+x_2}) \cdot (-x_1(1+x_2)) = 0. \end{aligned}$$

Portanto a 0-soluçcãao é estável.

3.2 ESTABILIDADE LOCAL PARA SISTEMAS NÃO AUTÔNOMOS

Os resultados obtidos sobre estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade, podem ser extendidos para sistemas lineares não autônomos. Para isso, considere o sistema não-autônomo

$$\dot{x} = f(t,x), f(t,0) = 0 \quad \text{para } t \geq 0, \tag{3.28}$$

onde $f : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é continuamente diferencióvel para que a solucao exista, seja única e também dependa continuamente dos valores iniciais.

Definição 8 *Seja* D *um subconjunto aberto do* $\mathbb{R}^n$ *que contem a origem. A função* $V(t,x) : [0,\infty) \times D \to \mathbb{R}$ *e positiva definida se* $V(t,x)$ *é contínua em* (t,x), $V(t,0) = 0$ *para todo* $t \geq 0$ *e existe uma função definida positiva* $W(x) : D \to \mathbb{R}$ $tal\ que$ $V(t,x) \geq W(x) \forall (t,x) \in [0 \times \infty) \times D$. A *função continua* $V(t,x) : [0,\infty) \times D \to \mathbb{R}$ é *semidefinida positiva se* $V(t,0) = 0$ *para todo* $t \geq 0$ e $V(t,x) \geq 0$ *para* $(t,x) \in [0,\infty) \times D$. A *função* $V(t,x) : [0,\infty) \times D \to R$ é *decrescente se é contínua em* (t,x) *e existe uma função positiva definida* $U(x) : D \to \mathbb{R}$ *tal que* $|V(t,x)| \leq U(x)$ *para todo* $(t,x) \in [0,\infty) \times D$. *Assumindo que* $V(t,x)$ *é continuamente diferenciável e que possui derivadas parciais contínuas em relação a* (t,x), *define-se a derivada ao longo das trajetórias de (3.28) como*

$$\dot{V}(t,x) = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} f(t,x) = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \nabla V(t,x) f(t,x). \tag{3.29}$$

Alguns criterios de estabilidade sãao ([2]):

Teorema 17 Estabilidade de Lyapunov para Sistemas nao Autonomos *Suponha que exista uma função positiva definida continuamente diferenciável* $V(t,x) : [0,\infty) \times D \to \mathbb{R}$ $tal\ que$ $\dot{V} \leq 0$. *Então a 0-solução de* $\dot{x} = f(t,x)$ *em (3.28) é estável.*

Teorema 18 Estabilidade Uniforme *Suponha que exista uma função definida positiva, decrescente e continuamente diferenciável* $V(t,x) : [0,\infty) \times D \to \mathbb{R}$ *de forma que* $\dot{V}(t,x) \leq 0$. *Então a 0-solução de* $\dot{x} = f(t,x)$ *em (3.28) é uniformemente estável.*

Teorema 19 Estabilidade Uniforme Assintótica *Suponha que existe uma função definida positiva, decrescente e continuamente diferenciavel* $V(t,x):[0,\infty)\times D\to\mathbb{R}$ *positiva definida. Então a 0-solução de* $\dot{x}=f(t,x)$ em *(3.28) é uniformemente assintoticamente estável.*

Teorema 20 Instabilidade para Sistemas nao Autônomos *Admita a existência de uma função definida positiva, decrescente e continuamente diferenciável* $V(t,x):[0,\infty)\times D\to\mathbb{R}$ *tal que em toda vizinhança da origem, existe um ponto* x *tal que* $V(t,x)>0$ *com* $\dot{V}(t,x)>0$*. Então a solução e instável.*

Exemplo: Para o sistema nao autônomo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2,\\ \dot{x}_2 &= -x_2-e^{-t}x_1,\end{aligned}\tag{3.30}$$

considere a função de Lyapunov

$$V(t,x_1,x_2)=x_1^2+e^tx_2^2\tag{3.31}$$

Derivando esta função *V* em relação ao tempo

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,x_1,x_2) &= 2x_1\dot{x}_1+e^tx_2^2+2x_2\dot{x}_2e^t\\ &= 2x_1x_2+e^tx_2^2+2x_2e^t(-x_2-e^{-t}x_1)=-x_2^2e^t\end{aligned}$$

Visto que $V(t,x_1,x_2)$ em (3.31) é positiva definida com $\dot{V}(t,x_1,x_2)\le 0$, conclui-se pelo teorema (17) que a 0-solução de (3.30) e estavel. Além disso, embora $V>0$ e $\dot{V}\le 0$, não pode-se usar o teorema (18) para concluir a estabilidade uniforme da 0-solução pois *V* em (3.30) não é decrescente.

Exemplo: Considere o sistema

$$\dot{x} = a(t)y+b(t)x[x^2+y^2],\tag{3.32}$$

$$\dot{y} = -a(t)x+b(t)y[x^2+y^2],\tag{3.33}$$

Usando

$$V(t,x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\tag{3.34}$$

e calculando

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,x,y) &= x\dot{x}+y\dot{y} = x\{a(t)y+b(t)x[x^2+y^2]\}+y\{-a(t)x+b(t)y[x^2+y^2]\}\\ &= b(t)(x^2+y^2)^2.\end{aligned}$$

Se $b(t) \leq 0$ entao a 0-solução de equilíbrio é uniformemente estável. Se $b(t) > 0$ então a 0-solução de equilíbrio e instável. Se $b(t) < 0$ então a 0-solução de equilíbrio é uniformemente assintíoticamente estável.

3.3 ESTABILIDADE ASSINTÓTICA GLOBAL

O objetivo desta seção e extrapolar o interesse particular da matemática na estabilidade e relacionar este conceito com os problemas econômicos, os quais são muito beneficiados pela idéia de estabilidade. De fato, a análise de existência, unicidade e das propriedades de estabilidade da solução de equilíbrio servem, além das finalidades matemáticas, para tomar decisões no ambito econômico.

Em geral, estabilidade assintótica e mais importante que a estabilidade, porém, este conceito é muito limitado nas aplicações econômicas. De fato, pode não ser possível ajustar as condições iniciais bem próximas da solução de equilíbrio. Para esse assunto é preciso o conceito de estabilidade assintótica global. O termo mais usado para designar este tipo de estabilidade é a estabilidade assintótica extendida ou estabilidade completa.

Definição 9 *Considere*

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0 \quad para\ t \geq 0, \tag{3.35}$$

Onde $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e *continuamente diferenciável, com única solução de equilíbrio na origem. Diz-se que a 0-solução de (3.35) e globalmente assintoticamente estável se para qualquer* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *a solução* $\phi(t, t_0, x_0)$ *existe para* $t \geq 0$ *e* $\phi(t, t_0, x_0) \to 0$ *quando* $t \to \infty$, *ou seja qualquer solução convergirá para a 0-solução independente do* x_0 *onde ela começca.*

Por simplicidade, a solução $\phi(t, t_0, x_0)$ será também denotada como $\phi(t)$ ou $x(t)$, suprimindo as condicães iniciais. Em geral, escolhe-se $t_0 = 0$ e a estabilidade assintótica global diz que qualquer solução converge para a 0-solução independente do ponto de partida x_0 .

Exemplo: Considere a equação

$$\dot{x} = \lambda x, \tag{3.36}$$

a qual possui solução obtida por integração

$$\phi(t, 0, x_0) \equiv x(t) = x_0 e^{\lambda t},\ x(0) = x_0,\ t \geq 0. \tag{3.37}$$

Se λ é um número real negativo, por (3.37) segue que a 0-solução é globalmente assintóticamente estável pois para qualquer $x_0 \in \mathbb{R},\ x(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Se $\lambda = 0$ entao (3.37) diz que $x(t) = x_0,\ t \geq 0$ e a 0-solução é apenas estável para um x_0 pequeno mas nao tem estabilidade assintótica global. Se $\lambda > 0$ entao a 0-solução e instável.

Exemplo: Considere

$$\dot{x} = -x + x^2 \tag{3.38}$$

a qual, sob integração, torna-se

$$\int \frac{1}{-x + x^2} dx = \int dt \tag{3.39}$$

Usando o metodo das fracães parciais pode-se escrever a equacao (3.39) da seguinte forma

$$\int \frac{1}{-x + x^2} dx = \int \left[\frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} \right] dx = \int dt. \tag{3.40}$$

Integrando a última equação de 0 a *t*, obtém-se

$$-\ln x(t) + \ln x(0) + \ln[x(t) - 1] - \ln[x(0) - 1] = t \tag{3.41}$$

e para $t = 0$ e $x(0) = x_0$ segue que

$$x(t) = \frac{1}{1 + [(1/x_0) - 1]e^t} \tag{3.42}$$

Da equação (3.38) conclui-se que $x = 0$ e $x = 1$ são duas soluções de equilíbrio daquela equação. Por outro lado, de (3.42) quando x_0 e escolhido próximo da 0-solução, entao $x(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, e disso conclui-se que a solução tem estabilidade assintótica. No entanto, a 0-solução não é globalmente assintóticamente estável. De fato, se a escolha for $x_0 = 1$ então não é verdade que $x(t)$ em (3.42) se aproxima de zero quando $t \to \infty$. Para $x_0 = 1$ obtém-se de (3.42) que $x(t) = 1$ quando $t \to \infty$. Portanto, estabilidade local não implica em estabilidade global.

Por outro lado também, a estabilidade global nãao implica a estabilidade local.

Teorema 21 (Estabilidade Global Assintótica) *Considere o sistema diferencial autônomo*

$$\dot{x} = f(x), \tag{3.43}$$

onde $f(x) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é contínua e D é um conjunto aberto do* $\mathbb{R}^n$. *Seja* $f(x)$ *continuamente diferenciavel em todo espaço* $\mathbb{R}^n$ *e seja* $V(x)$ *uma função real continuamente diferenciavel em* $\mathbb{R}^n$ *tal que* $V(x) \geq 0, \dot{V}(x) \leq 0$ *para* $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $V(x) \to \infty$ *quando* $|x| \to \infty$. *Então todas as soluções de* $\dot{x} = f(x)$ *existem em* $[0, \infty)$ *e são limitadas, e se existe um unico ponto* x_0 *tal que* $\dot{V}(x) = 0$ *então* x_0 e *globalmente assintoticamente estavel.*

Para demonstraçao, veja ([2]).

De fato, sem perda de generalidade, assuma $x_0 = 0$, e fortaleça a hipótese de que $V(x)$ e uma função de Lyapunov, isto é, requerindo que *V* seja definida positiva ao invés de semidefinida positiva. Pode-se concluir a 0-solução não possui apenas estabilidade assintótica global, mas também estabilidade local pelo teorema (17). Além disso, a 0-solução tem estabilidade assintótica local, a qual segue do último teorema.

Exemplo: Considere a equaçcaão

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \tag{3.44}$$

a qual pode ser equivalentemente escrita como um sistema da forma

$$\dot{x} = y, \tag{3.45}$$

$$\dot{y} = -g(x) - f(x)y. \tag{3.46}$$

e a sua função de Lyapunov $V(x, y)$ [10] é

$$V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x g(s)ds, \tag{3.47}$$

com derivada

$$\dot{V}(x,y)=y\dot{y}+g(x)\dot{x}=y[-g(x)-f(x)y]+g(x)y=-f(x)y^2. \tag{3.48}$$

Assuma que

(1) $xg(x)>0\,\forall x\neq 0$;

(2) $f(x)>0\,\forall x\neq 0$;

(3) $\int_0^x g(s)ds\rightarrow\infty$ quando $|x|\rightarrow\infty$.

Estas hipóteses implicam que

(1) $V(x,y)\rightarrow\infty$ quando $|x|\rightarrow\infty$;

(2) $V(x,y)>0\,\forall(x,y)\neq(0,0)$ com $V(0,0)=0$;

(3) $\dot{V}(x,y)\leq 0$, e deseparecendo apenas nos eixos $x=0$ e $y=0$.

Portanto, do teorema (17), conclui-se que a 0-solução $(x,y)=(0,0)$ e localmente estável, e do teorema (21) segue que a 0-solução e globalmente assintóticamente estável. Pela discussão anterior, a solução tem também estabilidade assintótica local.

Existem muitos critérios que caracterizam a estabilidade assintótica global com suas respectivas aplicações ([2]). Está do objetivo do trabalho os expor aqui.

3.4 VARIEDADE ESTÁVEL

Nosso interesse e usar o conceito de estabilidade local para conseguir uma noção de *stable manifold.* Para ter uma motivacão geometrica do teorema a seguir assuma o retrato de fases (2.2) . Note que que a figura é uma sela e a origem é um ponto de sela com movimento ao longo do eixo y_1 em direção a origem enquanto o movimento ao longo do eixo y_2 foge da origem. Portanto, pode-se dizer que soluções iniciando no subespaço linear unidimensional determinado pelo eixo y_1 , tende a 0-solução quando *t* tende a infinito, e o eixo y_1 e chamado de variedade estável desta sela. Por outro lado, como qualquer solução que começa no subespaço linear unidimensional determinado pelo eixo y_2 se afasta da solução quando *t* tende a infinito, diz-se que y_2 e uma variedade instável.

Com esta motivação geométrica, pode-se entender que se a estabilidade local não pode ser estabelecida para um dado sistema, entao a propriedade da variedade estável deva ser investigada. Ou seja, para um sistema dado, mesmo que não se tenha estabilidade local na solucao de equilíbrio, pode ser verdade que em um certo subconjunto de soluções, iniciando em um subespaço dado, vai convergir para esta solução de equilíbrio.

Para que isso fique mais claro [18], primeiro deve-se estudar a noção de variedade, depois escrever o sistema de equações diferenciais e terceiro, estabelecer o teorema da variedade estável ([18]).

Definição 10 *Sejam* U *e* V *sao conjuntos abertos do* $\mathbb{R}^n$*. A função diferenciável* $h : U \to V$ *com inversa diferenciável* $h^{-1} : V \to U$ *é chamada difeomorfismo.*

Definição 11 *O subconjunto, com topologia,* $S \subset R^n$ *é chamado variedade k-dimensional em* $\mathbb{R}^n$ *se para todo ponto* $x \in S$ *, existe um conjunto aberto U contendo* x*, e um conjunto aberto* $V \subset R^n$*, e um difeomorfismo* $h : U \to V$ *tal que*

$$h(U \cap S) = V \cap (R^k \times \{0\}) = \{y \in V : y_{k+1} = \cdots = y_n = 0\}$$

Em outras palavras, a variedade k-dimensional e o espaço que e localmente difeomorfo ao k-espaço euclideano.

Considera-se agora o sistema de equações diferenciais dado por

$$\dot{x} = Ax + h(t, x)$$

e foi assumido que *A* e não crítica, ou seja, *A* possui qualquer um dos autovalores com parte real negativa ou o último autovalor com parte real positiva.

Admite-se a função $h(t, x) : [0, \infty) \times D \to \mathbb{R}^n$ contínua em $(t, x) \in [0, \infty) \times D$ onde *D* é um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ contendo a origem; também, $h(t, 0) = 0$ para $t \geq 0$ e finalmente, dado qualquer $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ e $T > 0$ tal que

$$|h(t, x) - h(t, y)| \leq \epsilon|x - y|$$

para $t \geq T$, $|x| \leq \delta$ e $|y| \leq \delta$.

Embora o sistema $\dot{x} = Ax + h(t,x)$, com apenas as suposições estabelecidas, parece mais geral que o retrato de fases bidimensional, a intuição é similar. O que se quer mostrar é a existência de variedades estíaveis e instáveis quando tais variedades tornam-se um pouco distorcidas devido a influência de $h(t,x)$. Esta análise é local, ao redor de uma pequena vizinhançca da 0-solucçãao.

Assumindo A a matriz real não crítica de ordem $n \times n$, serão identificado k autovalores com parte real negativa e $n-k$ autovalores com parte real positiva, exite uma variedade estável de dimensão $(k+1)$ e uma variedade instável de dimensão $(n-k+1)$ no espaco (t,x), em uma vizinhança suficientemente pequena da 0-solução. Note que os casos especiais $k = n$ ou $k = 0$ referem a estabilidade assintótica e instabilidade. Especificamente, segue:

Teorema 22 *(Variedade Estavel) Suponha que a matriz A e a função* $h(t,x)$ *satisfação as condiçcãoes estabelecidas acima e sejam* k *autovalores de* A *com parte real negativa e* $n-k$ *autovalores com parte real positiva. Então, exite uma variedade* k*-dimensional* S *contendo a origem e que possui as seguintes propriedades:*

(i) Qualquer solucao $\phi(t) = x(t)$ *de* $\dot{x} = Ax + h(t,x)$ *comecando em* S *com* $t = t_0$ *para* t_0 *suficientemente grande, satisfaz* $x(t) \to 0$ *quando* $t \to \infty$;

(ii) Existe um $\eta > 0$*, suficientemente pequeno tal que qualquer soluçao* $x(t)$ *perto da origem mas nao em* S *com* $t = t_0$ *nao satisfaz* $|x(t)| \leq \eta$ n *para* $t \geq t_0$..

CAPÍTULO 4

CÁLCULO VARIACIONAL

O capítulo começa com os conceitos que fundamentam o Cálculo Variacional e o formalismo de seu problema mais simples, alem do exemplo clássico de um problema otimizado: a Braquistocrona. Em seguida, foi feita a comparacão entre um problema de calculo de variações com um problema de controle ótimo. Depois foram obtidas as equacoes de Euler-Lagrange, as quais sao condições necessarias para a otimalidade da soluçao. Por meio de mudança de variaveis, as equações de Lagrange serão reformuladas para obter as equações de Hamilton, as quais serão aplicadas no capítulo seguinte.

4.1 O FUNCIONAL LINEAR

Considere o funcional linear $I : S \to R$ onde

$$I(y) = \int_a^b L(t, y(t), y'(t))dt, \tag{4.1}$$

onde $L : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e uma função, e $S = C^1[a,b]$, o conjunto das funções continuamente diferenciaveis no intervalo $[a,b]$.

Este problema pode ser limitado por algumas restrições. Algumas delas são

- **Condições de Contorno:** Impor a y condições nas extremidades do intervalo tais como $y(a) = y_a$ e $y(b) = y_b$;
- **Restriçao Lagrangeana:** Exigir que $g(t, y(t), y'(t)) \equiv 0$ para $t \in [a,b]$, onde $g : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
- **Restrição Isoperimetrica** Exigir que $\int_a^b g(t, y(t), y'(t))dt = c$ onde, $g : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$.

O problema abordado neste trabalho está sujeito a condições de contorno, a seguir serão enunciados definições e resultados utilizados na resolução de tais problemas. Considere a seguinte família de problemas variacionais

$$\begin{cases} \text{Minimizar } I(y) = \int_a^b L(t, y(t), y'(t))dt \\ \text{sujeito a} \\ y \in Y_{ad} = \{y \in C^1[a,b] \text{ com } y(a) = y_a \text{ e } y(b) = y_b\}. \end{cases} \tag{4.2}$$

O conjunto Y_{ad} e denominado conjunto das funções admissíveis, e $C^1[a,b]$ o conjunto das funções que tem a derivadas de primeira ordem contínuas.

Definição 12 *$\bar{y} \in Y_{ad}$ é denominado um* **mínimo global** *de $I : Y_{ad} \to \mathbb{R}$ quando a desigualdade*

$$I(y) \geq I(\bar{y}), \tag{4.3}$$

é satisfeita para todo $y \in Y_{ad}$.

Este conceito permite formular um resultado que fornece condições suficientes de otimalidade para o problema (4.2), ([12]).

Teorema 23 *Seja* $Y = C^1[a,b], Y_{ad} = \{y \in Y; y(a) = y_a \text{ e } y(b) = y_b\}$, $I : Y_{ad} \ni y \to \int_a^b L(t, y, y')dt \in \mathbb{R}$, *onde* $L \in C^1([a,b] \times \mathbb{R}^2; R)$ *satisfaz*

$$L(t, y+v, z+w) - L(t, y, z) \geq L_y(t, y, z)v + L_z(t, y, z)w, \tag{4.4}$$

para todo (t, y, z), $(t, y+v, z+w) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2$. *As seguintes afirmações sao verdadeiras:*

a) I e convexo em Y_{ad};

b) Se L e tal que a igualdade (4.4) ocorre se, e somente se, $vw = 0$, entao I e estritamente convexo em Y_{ad};

ç) Cada $\bar{y} \in Y_{ad}$ que satisfaz a equação diferencial,

$$\frac{d}{dt} L_{y'}(t, \bar{y}, \bar{y}') = L_y(t, \bar{y}, \bar{y}'), \quad t \in [a,b] \tag{4.5}$$

é um mínimo global de I em Y_{ad}. Esta equacão e conhecida como equacão de Euler-Lagrange.

d) Se a hipótese do item (b) *e verificada o elemento $\bar{y} \in Y_{ad}$ que satisfaz a equação diferencial do item* (c) *e o Único mínimo global de I em Y_{ad}.*

Exemplo. Sejam P_0 e P_1 dois pontos dados sobre um plano vertical. Deve ser encontrada uma curva unindo esses dois pontos de sorte que um ponto de massa partindo de P_0 que percorra sob a influencia somente de seu próprio peso, alcance P_1 no menor tempo possível. Considere ainda a velocidade inicial v_0 dada.

J. Bernoulli batizou este problema como **Braquistocrona,** que significa tempo mínimo, e usou o princípio da refracão de Fermat ([19]) e obteve a seguinte formulacao variacional

$$\begin{cases} \text{Minimizar } J(y) := \int_{x_0}^{x_1} \left(\dfrac{1+(y')^2}{2gy+c} \right)^{1/2} dx \\ \text{sujeito a} \\ y \in C^1[x_0, x_1] : y(x_0) = y_0 \text{ e } y(x_1) = y_1. \end{cases} \tag{4.6}$$

onde g é a constante gravitacional e $c = c_{g,v_0,y_0}$ *é* a energia total do corpo (cinética + potencial) no instante inicial. Note que o integrando e autônomo, ou seja

$$L = L(y, y') = \left(\frac{(1+(y')^2)}{(2gy+c)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por integração de (4.5) segue que

$$L_{y'}(t, y, y') = \int_a^t L_y(s, y(s), y'(s))\, ds + \text{ const };\tag{4.7}$$

Se $y \in C^2[a, b]$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L_y(t, y, y') &= L_t(t, y, y') + L_y(t, y, y')y' + L_{y'}(t, y, y')y'' \\ &= L_t(t, y, y') + \frac{d}{dt}[L_{y'}(t, y, y')y']. \end{aligned}\tag{4.8}$$

$$L(t, y, y') - y' L_{y'}(t, y, y') = \int_a^t L_t(s, y(s), y'(s)) ds + const.$$

No caso em que $L = L(y, y') = \left(\frac{(1+(y')^2)}{(2gy+c)} \right)^{\frac{1}{2}}$,

$$const. = L(y, y') - y' L_{y'}(y, y') = \frac{(1+(y')^2)^{1/2}}{(2gy+c)^{1/2}} - y' \frac{(1+(y')^2)^{-1/2}}{(2gy+c)^{1/2}}$$

O que resulta na equação diferencial

$$(2gy + c)(1 + (y')^2) = const.\tag{4.9}$$

Admitindo por simplicidade que $c = 0$, a equação (4.9) torna-se

$$y(1+(y')^2) = A, \text{ uma constante} \tag{4.10}$$

Para resolver esta equação diferencial suponha $y(x) = A\sin^2(\frac{1}{2}\theta(x))$. Substituindo essa expressão em (4.10), obtém-se $y' = \sqrt{(A-y)/y}$, o que implica

$$A\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{d\theta}{dx} = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \tag{4.11}$$

Logo, $dx = A\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta$, ou ainda,

$$x = B + \frac{1}{2}A(\theta - \sin\theta). \tag{4.12}$$

Sendo assim, obtém-se para y a seguinte parametrização

$$\gamma : [\theta_0, \theta_1] \ni \theta \longmapsto (b + a(\theta + \sin\theta), a(1+\cos\theta)) \in \mathbb{R}^2, \tag{4.13}$$

onde os parâmetros a, e *b* sao determinados pelas condições de contorno $\gamma(\theta_0) = (x_0, y_0)$ $\gamma(\theta_1) = (x_1, y_1)$

Por outro lado, em um problema de controle, uma variaível do estado $z = z(t) \in \mathbb{R}^n$ que depende do tempo e evolui de acordo com uma dinâmica

$$z'(t) = f(t, z(t), u(t)), \quad t > t_0 \tag{4.14}$$

a partir de um estado inicial $z(t_0) = z_0$. Aqui $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ corresponde ao modelo estudado, $z_0 \in \mathbb{R}^n$ e o estado inicial do sistema e $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ é um parâmetro livre influenciando a dinâmica, denominado **controle** do sistema da equação (4.14).

Ao introduzir este conceito, definimos seu objetivo: minimizar funcionais do tipo

$$J(u, z) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, z(t), u(t))dt$$

com $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, z e u estão relacionados pela dinamica $z' = f(t, z, u)$ $t \in (t_0, t_1)$ e ainda $z(0) = z_0$, $z(t_1) = z_1$, $u \in \mathcal{U}_{ad}$. O conjunto $\mathcal{U}_{ad}$ é dito ser o conjunto de controles admissíveis. Pode-se formular o problema de controle ótimo descrito acima na forma resumida

$$\begin{cases} \text{Minimizar } J(u,z) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} L(t, z(t), u(t))dt \\ \text{sujeito a } u \in \mathcal{U}_{ad}, \\ z' = f(y,z,u), \quad t \in (t_0, t_1), \quad z(t_0) = z_0 \text{ e } z(t_0) = z_0. \end{cases} \tag{4.15}$$

Note a analogia entre problemas do calculo de variações e problemas de controle ótimo. O objetivo principal neste momento e comparar as condições de otimalidade para ambas as famílias de problemas. Esta semelhança fica clara no caso particular $\mathrm{f(t,\, z,\, u) = u}$ já que problema acima toma a forma do problema variacional (4.2). E exatamente esta semelhança que permite a comparacao entre as condições de otimalidade para ambas as classes de problemas. Assim como os problemas variacionais, os problemas de controle ótimo podem ser formulados com condições de contorno, restrições lagrangeanas ou restrições isoperimóetricas. O objetivo aqui é mostrar que, sob certas hipóteses de convexidade, a equação de Euler-Lagrange e uma condicao suficiente de otimalidade para problemas que não possuem restriçõs nas variáveis de controle.

4.2 A EQUACAO DE EULER-LAGRANGE

Para provar a necessidade da equação de Euler-Lagrange para soluções ótimas, alguns resultados sao necessários ([16]):

Teorema 24 *Seja X um espaço normado, e seja $I : X \to \mathbb{R}$ uma função que e diferenciável em $x_0 \in X$. Se* I *possui um extremos local em x_o, então* $(DI)(x_0) = 0$.

Lema 3 *Se* $k \in C[a,b]$ *e*

$$\int_a^b k(t)h'(t)\,dt = 0, \quad \forall h \in C^1[a,b],$$

com $h(a) = h(b) = 0$*,, então existe uma constante* c *tal que* $k(t) = c$*,, para todo* $t \in [a,b]$

Com estes resultados em maos pode-se enunciar:

Teorema 25 *Seja* $S = \{x \in C^1[a,b] \ : x(a) = y_a \text{ e } x(b) = y_b\}$, $L(t,\alpha,\beta)$ *uma função com derivadas paricais de ordem 1 continuas em relação* $a\ (t,\alpha,\beta)$ *e* $I\ :\ S \to \mathbb{R}$ *uma funcao da forma*

$$I(x) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t))dt$$

Se I possui um extremo em $x_0 \in S$, *entao* x_0 *satisfaz a equação* **Euler-Lagrange:**

$$\frac{d}{dt}L_{y'}(t,\bar{y},\bar{y}') = L_y(t,\bar{y},\bar{y}'), \quad t \in [a,b] \tag{4.16}$$

Prova: A prova e longa e sera dividida em varios passos.

Passo 1: Note que o conjunto *S* não e um espaco vetorial (a não ser que $y_a = 0 = y_b$). Então o teorema (24) nao e diretamente aplicavel. Por isso, sera introduzido um novo espaço *X*, e considera-se uma nova função $\widetilde{I} : X \to \mathbb{R}$ a qual e definida em termos da função *I*. Introduzimos o espaco linear

$$X = \{x \in C^1[a,b] : x(a) = x(b) = 0\}$$

com a norma induzida de $C^1[a,b]$.

Então para todo $h \in X$, $x_0 + h$ satisfaz $(x_0 + h)(a) = y_a$ e $(x_0 + h)(b) = y_b$. Definindo $\widetilde{I} = I(x_0 + h)$, para $h \in X$, nota-se que $\widetilde{I} : X \to \mathbb{R}$ possui um extremo local em 0. Segue-se do teorema (24) que $D\widetilde{I}(0) = 0.$.

Passo 2: Agora calculando $D\widetilde{I}(0)$, tem-se

$$\begin{aligned} \widetilde{I}(h) - \widetilde{I}(0) &= \int_a^b L(t,(x_0+h)(t),(x_0+h)'(t))dt - \int_a^b L(t,(x_0)(t),(x_0)'(t))dt \\ &= \int_a^b [L(t,(x_0+h)(t),(x_0+h)'(t)) - L(t,(x_0)(t),(x_0)'(t))]dt \end{aligned}$$

usando o teorema de Taylor segue que se F possui derivada parcial de ordem 2 dentro da bola B de raio r e centro (t_0,α_0,β_0) em $\mathbb{R}^3$, então para todo ponto (t,α,β), existe um $\theta \in [0,1]$ tal que

$$\begin{aligned} L(t,\alpha,\beta) &= L(t_0,\alpha_0,\beta_0) + \left((t-t_0)\tfrac{\partial}{\partial t} + (\alpha-\alpha_0)\tfrac{\partial}{\partial \alpha} + (\beta-\beta_0)\tfrac{\partial}{\partial \beta}\right) L\Big|_{(t_0,\alpha_0,\beta_0)} + \\ &\tfrac{1}{2!}\left((t-t_0)\tfrac{\partial}{\partial t} + (\alpha-\alpha_0)\tfrac{\partial}{\partial \alpha} + (\beta-\beta_0)\tfrac{\partial}{\partial \beta}\right)^2 L\Big|_{(t_0,\alpha_0,\beta_0)+\theta((t,\alpha,\beta)-(t_0,\alpha_0,\beta_0))} \end{aligned}$$

Por isso, para $h \in X$ tal que $\|h\|$ e suficientemente pequeno,

$$\widetilde{I}(h) - \widetilde{I}(0) = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial \alpha}(t, x_0(t), x_0'(t))h(t) + \frac{\partial L}{\partial \beta}(t, x_0(t), x_0'(t))h'(t)\right] dt + \frac{1}{2!}\int_a^b \left(h(t)\frac{\partial}{\partial \alpha} + (h'(t)\frac{\partial}{\partial \beta}\right)^2 L\Big|_{(t, x_0(t)+\theta(t)h(t), x_0'(t)+\theta(t)h'(t))} dt.$$

Pode ser verificado que existe um $M > 0$ tal que

$$\left|\frac{1}{2!}\int_a^b \left(h(t)\frac{\partial}{\partial \alpha} + (h'(t)\frac{\partial}{\partial \beta}\right)^2 L\Big|_{(t, x_0(t)+\theta(t)h(t), x_0'(t)+\theta(t)h'(t))} dt\right| \leq M\,\|h\|^2,$$

e por isso $D\widetilde{I}(0)$e a aplicacao

$$h \to \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial \alpha}(x_0(t), x_0'(t), t)h(t) + \frac{\partial L}{\partial \beta}(x_0(t), x_0'(t), t)h'(t)\right] dt. \qquad (4.17)$$

Passo 3: Agora será mostrado que se a aplicação em (4.17) e a aplicação nula , então isto implica que (4.16) vale. Definimos

$$A(t) = \int_a^t \frac{\partial L}{\partial \alpha}(\tau, x_0(\tau), x_0'(\tau))d\tau.$$

Integrando por partes, encontra-se

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial \alpha}(t, x_0(t), x_0'(t))h(t)dt = -\int_a^b A(t)h'(t)dt.$$

Por (4.17) e $D\widetilde{I}(0) = 0$, segue que

$$\int_a^b \left[-A(t) + \frac{\partial L}{\partial \beta}(t, x_0(t), x_0'(t))\right] h'(t)dt = 0 \quad \forall h \in X.$$

Passo 4: Finalmente usando o lema (3) obtem-se

$$-A(t) + \frac{\partial L}{\partial \beta}(t, x_0(t), x_0'(t)) = k \quad \forall t \in [a, b]$$

Derivando em relação a *t* obtém-se (4.16), o que completa a prova do Teorema 25 .■

Note que a equação de *Euler-Lagrange* e apenas uma condição necessária para a existência de um extremo. Contudo, em muitos casos, a equação de *Euler-Lagrange* por si so e suficiente para dar a solução completa do problema, como no caso da seção anteior. De fato, a existencia de um extremo, às vezes, e evidente a partir do contexto do problema. Em tais situações, existe uma unica solução para a equação de *Euler-Lagrange,* entao esta solução deve ser, por consequência, o ponto para no qual o extremo e alcançado.

Exemplo. Seja $S = \{x \in C^1[0,1] : x(0) = 0 \text{ e } x(1) = 1$. Considere a função $I : S \to \mathbb{R}$ dada por

$$I(x) = \int_0^1 \left(\frac{d}{dt}x(t) - 1\right)^2 dt$$

O desejo encontrar $x_0 \in S$ que minimiza 1. O procedimento e como segue:

Passo 1. Tem-se $F(t, \alpha, \beta) = (\beta - 1)^2$, e também $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0 \text{ e } \frac{\partial F}{\partial \beta} = 2(\beta - 1)$.

Passo 2. A equaçao de *Euler-Lagrange* (4.16) e agora dada por

$$0 - \frac{d}{dt}(2(x_0'(t) - 1)) = 0 \quad \forall t \in [0, 1].$$

Passo 3. Por integracao, obtem-se $2(x_0'(t) - 1) = C$, para alguma constante *C*, e então $x_0' = \frac{C}{2} + 1 = A$, onde *A* e uma constante. Integrando novamente, tem-se $x_0(t) = At + B$, onde *A* e *B* sao constantes adequadas.

Passo 4. As constantes A e B podem ser determinadas usando o fato de $x_0 \in S$, e também $x_0(0) = 0 \text{ e } x_0(a) = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 \cdot A + B &= 0 \\ 1 \cdot A + B &= 1, \end{aligned}$$

o que implica em $A = 1 \text{ e } B = 0.$. Entãao, a unica solucçãao x0 da equaçcaão de *Euler-Lagrange* em S e $x_0(t) = t, t \in [0, 1]$.

Agora deve-se provar que a solucao x_0 realmente minimiza 1.

Visto que $(x'(t) - 1)^2 \geq 0 \quad \forall t \in [0, 1]$, segue que 1 $I(x) \geq 0 = I(x_0) \quad \forall x \in S.$,

ou seja, x_0 minimiza 1.

Definição 13 *As solucaes da equação de Euler-Lagrange (4.17) sao chamadas* **curvas críticas.**

A equação de *Euler-Lagrange* e, em geral, uma equação diferencial de segunda ordem, mas em alguns casos especiais, esta pode ser reduzida a uma equação diferencial de primeira ordem, situação tratada na proxima seção.

4.3 EQUAÇÕES HAMILTONIANAS

O uso das equações de Lagrange nos problemas de Física resultou numa reformulação da mecânica classica, que ficou conhecida como formulação Lagrangeana. Uma outra formulação alternativa e a Hamiltoniana, que inclusive originou-se da formulação Lagrangeana ([5]). A principal diferença entre os dois métodos consiste em que, no Lagrangeano as equações são expressas em termos de equações diferenciais de segunda ordem sobre um espaco *n*-dimensional, enquanto no metodo Hamiltoniano surgem apenas termos com derivada de primeira ordem sobre um espaço 2*n*-dimensional. Como acontece com a mecânica Lagrangiana, as equações de Hamilton fornecem uma maneira nova e equivalente de ver mecanismos clássicos. Geralmente, essas equaçoes nao fornecem uma maneira mais conveniente de resolver um problema particular. Entretanto, fornecem introspecções mais profundas na estrutura geral de mecanismos clássicos e permitem que problemas quânticos sejam entendidos com maior facilidade, sem falar em suas conexãoes a outras areas da ciência, inclusive a Economia.

Na formulação Lagrangeana, um sistema com *n* variáveis independentes $q_1, \ldots, q_n;$ possui n equações de movimento na forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{4.18}$$

Pelo fato das equações serem de segunda ordem, a solução do sistema só pode ser determinada se 2n valores iniciais forem especificados, isto é, um sistema com *n* graus de liberdade transforma-se num problema com *n* variáveis independentes $q_i(t)$ com derivada $\dot{q}_i$. Note que na secao anterior foi estudado apenas o caso em que n =1.

Ja na formulação Hamiltoniana não há restrição de equações entre coordenadas. Para entender esse conceito, a solução sera esboçada em termos de equações de primeira ordem. Como o número de condições iniciais necessárias para a determinação da solução e 2*n*, deve exisitr 2*n* equações de primeira ordem expressas em termos de 2n variaveis independentes. Com essa duplicação de quantidades, e natural que a metade delas sejam escolhidas para serem as coordenadas generalizadas q_i, ja que existe simetria com a outra metade do conjunto de variaveis independentes. Os elementos desta outra metade restante serão chamados de conjugados e denotados por p_i. Assim

$$p_i = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i} \tag{4.19}$$

Nas equações de Lagrange, q e q sao encaradas como duas variáveis distintas, isto é, tomando como exemplo a equação (4.18) note que ao calcular a derivada de L em relação a q_i, e preciso admitir que todos os outros q_k com $i \neq k$ são constantes, assim como os $\dot{q}_i$'s. . O mesmo ocorre quando toma-se a derivada em relação a algum

A transformação da formulação Lagrangeana para a Hamiltoniana consiste em mudar as variáveis no sistema estudade de $(q, \dot{q}, t)$ para (q, p, t) onde p esta relacionado a q e a $\dot{q}$. Perceba que esta transformação e mesma que ocorre entre um problema de cálculo variacional e um problema de controle ótimo, como já foi citado anteriormente. O precedimento relacionado a essa mudanca e chamado de *Transformacoes de Legendre.*

Agora considere uma função de duas variáveis $f(x, y)$ a qual possui diferencial da forma

$$df = udx + vdy, \tag{4.20}$$

onde

$$u = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{4.21}$$

O objetivo agora e escolher uma base da descrição em x, y para se mudada par uma base de u, y e além disso, os diferenciais terão que ser expressos em termos de du e dy. Para tanto, assuma que g e uma função de *u* e *y*.

$$g = f - ux, \tag{4.22}$$

O diferncial de g e dado por

$$dg = df - udx - xdu, \tag{4.23}$$

ou pela equação (4.20) como

$$dg = vdy - xdu, \tag{4.24}$$

a qual é exatamente a forma desejada.

Os valores de x e v serão agora dados em termos de u e y respectivamente pelas relações

$$x = -\frac{\partial g}{\partial u}, \quad v = \frac{\partial g}{\partial y}. \tag{4.25}$$

Para encontrar as equações que determinam um sistema hamiltoniano, é preciso escrever o diferencial de $L(t; q_1, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$ como

$$dL = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{4.26}$$

Como escrito em (4.19), $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i;$ substituindo este resultado em (4.18), obtém-se

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{4.27}$$

Logo, (4.26) pode ser escrito da seguinte forma

$$dL = \sum_i \left(\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{4.28}$$

A *função Hamiltoniana* $H(q, p, t)$ e gerada pela transformação de Legendre

$$H(q, p, t) = -\sum_i \dot{q}_i p_i + L(q, \dot{q}, t), \tag{4.29}$$

a qual possui diferencial

$$dH = -\sum_i \left(\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i \right) + dL. \tag{4.30}$$

Usando as equações (4.28) e (4.30) segue que,

$$dH = \sum_i \left(-\dot{q}_i dp_i + \dot{p}_i dq_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{4.31}$$

Visto que dH pode ser escrito como

$$dH = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \tag{4.32}$$

obtém-se as $2n + 1$ relações

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = -\dot{q}_i \tag{4.33}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i \tag{4.34}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t} \tag{4.35}$$

As equações (4.33),(4.34) e (4.35) são chamadas de *Equações Canónicas de Hamilton* e este conjunto formado por $2n + 1$ equações de primeira ordem pode substituir o conjunto de n equações de segunda ordem dado inicialmente.

CAPÍTULO 5

OTIMIZAÇÃO DO CRESCIMENTO SOCIAL E ACUMULAÇÃO DO CAPITAL

O crescimento econômico (aumento do Produto Nacional Bruto per capita) acompanhado pela melhoria do padrão de vida da população e por alterações fundamentais na estrutura de sua economia tem sido o objetivo de estudo ([17]) de muitos cientistas. Muitos modelos tem sido elaborados visando aumentar o padrao de vida da população e acabar com problemas como a desigualdade que assombram economias pelo mundo a fora. Assim como o Calculo Variacional, a Teoria de Variedades Estaveis tem uma aplicação interessante à economia pois, como foi dito anteriormente, mesmo que não se tenha estabilidade local na solução de equilíbrio de um determinado sistema, pode ser verdade que soluções partindo de um certo subconjunto de soluções convergirão para uma solução de equilíbrio. O modelo estudado e simplificado, porém muito eficiente e útil para as economias atuais ([3],[6] e [15]).

No capítulo é estudado um modelo de acumulação do capital em uma economia que tem objetivo de maximizar o bem estar social futuro, baseado em dados inciais já citados anteriormente (consumo, investimento, bens de consumo, etc). O modelo é constituído por um sistema de equações diferenciais lineares. Para isso é usado os metodos de Cálculo de Variações ([5] e[14]), em particular o sistema de equações Hamil-tonianas e Teorema da Variedade Estaível, estudados nos capítulos anteriores.

Representa-se as variáveis envolvidas no problema como segue:

- $Y(t)$ denota a produçao, que depende de dois fatores:
  — $L(t)$ representa a força de trabalho;
  — $K(t)$ representa os bens de capital

Esta relação exibe algumas propriedades econômicas que devem ser esclarecidas:

- **Retornos Constantes de Escala:** Propriedade técnica da produção que analisa mudancas na saída posterior para uma mudança proporcional em todas as entradas (quando todas as entradas aumentam por um fator constante). Se a mudança aumenta pela mesma variação proporcional então há retornos constantes de escala.

- **Produtividade Marginal:** e o aumento no valor da produção que pode ser produzido por adição de mais uma unidade de entrada especial, mantendo constante outros insumos. Assim, quanto maior a produtividade de um fator de produção, maior será o rendimento que se pode esperar a acumular a sua provedores, e tudo o que coloca os níveis globais de produtividade dentro de uma sociedade pode ser esperado que o aumento medio global de prosperidade da sociedade como um inteiro.A produtividade marginal e igual ao declive da função produção, sendo normalmente positiva e decrescente.

- **Taxa Marginal de Substituicao:** indica a taxa a que um consumidor esta disposto a trocar um determinado bem por outro de forma a manter o mesmo nível de utilidade.

Além disso, e sabido que a rotunda na produção e extremamente produtiva quando o capital é muito escasso, enquanto a saturaçcaão do capital só ocorre quando o capital é relativamente abundante.

Se estas propriedades forem medidas em termo do trabalho, as hipóteses sobre a produção podem ser representadas por

$$y(t) = f(k(t)) \tag{5.1}$$

na qual $y(t)$ representa a taxa de produção e $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$

$$f(k) > 0, \quad f'(k) > 0, \quad f''(k) < 0 \text{ para } k > 0; \tag{5.2}$$

e

$$\lim_{k \to 0} f'(k) = \infty, \quad \lim_{k \to \infty} f'(k) = 0. \tag{5.3}$$

A força de trabalho e a população crescem, devido a fatores externos, a uma taxa *n*. Por isso, as quantidades medidas em termos da força de trabalho são equivalentes, por um fator γ,por quantidades per capita. Neste caso, e exigido que todas as pessoas trabalhem, isto é toda a força de trabalho sería sempre empregada produtivamente.

Os bens de consumo são instantâneamente consumidos ou adicionados ao capital estocado, o qual deprecia a uma taxa μ. Denotando por $c(t)$ a taxa atual de consumo per capita e por $z(t)$ a taxa atual de investimento bruto per capita, as atibuições disponíveis no tempo *t* são

$$c(t) + z(t) = y(t), \quad c(t) \geq 0, \quad z(t) \geq 0, \tag{5.4}$$

e

$$\dot{k}(t) = z(t) - \lambda k(t), \text{ com } \lambda = n + \mu \tag{5.5}$$

A função k neste modelo, e limitada superiormente. De fato, ainda no caso em que toda produção e investida, a função k decresce quando $\bar{k} < k$, onde $\bar{k}$ e unicamente definido por $\dot{k} = 0$ com $z = f(k)$ e

$$f(\bar{k}) = \lambda \bar{k}. \tag{5.6}$$

Por isso, para qualquer curva de crescimento viavel, deve-se ter

$$k \leq max(k(0), \bar{k}) < \infty$$

No tempo presente $t = 0$ pode-se escolher alguma curva de crescimento viavel $(c(t), z(t), k(t) : t \geq 0)$ que satisfaz (5.1), (5.4), (5.5) e $0 < k(0) < \infty$. O objetivo e encontrar a curva viável de crescimento ótimo que respeita o criterio de maximização do bem estar social. O conceito de bem estar social e relatado como a capacidade da economia de proporcionar consumo de mercadorias sob o tempo. O valor desses bens e definido a partir de um fator subjetivo - a utilidade, isto é, sua capacidade de satisfazer necessidades humanas. Como a necessidade e uma característica subjetiva, tambem a utilidade de um bem tera uma avaliação subjetiva. Um mesmo bem ou serviço tera diferentes utilidades e, portanto, valores diferentes, de acordo com o indivíduo. Para explicar esse aspecto, considera-se que a satisfação de cada necessidade requer certa quantidade de um bem ou serviço. À medida que a quantidade consumida pelo indivíduo aumenta, reduz-se a satisfação obtida. O valor de cada bem é dado pela utilidade proporcionada pela última unidade disponível desse bem. Denota-se este índice de utilidade per capita por $U(c(t))$. Em particular, este índice nos fornece o bem estar social em qualquer ponto *t* e e ponderado pela população atual $\frac{1}{\gamma}L(t)$

Além disso,

$$U'(c) > 0, \quad U''(c) < 0 \quad \forall c > 0, \tag{5.7}$$

Este índice é positivo mas exibe diminuição da utilidade marginal, bem como

$$\lim_{c\to 0} U'(c) = \infty, \tag{5.8}$$

Note que a equacao (5.8) diz que a curva ótima nunca especifica um nível nulo de consumo per capita.

O índice de utilidade e invariante sob o tempo. Porem como a população cresce, adimite-se que o consumo hoje não será o mesmo de amanhã. Por essa razão é feita uma política mais forte para o presente e o futuro próximo do que para gerações futuras. Esta visão é implementada na prática pelo desconto futuro no bem estar a uma taxa positiva maior do que o crescimento da população, $\rho > n$.

Enfim, o bem estar social associado a uma determinada curva de crescimento e dada pelo funcional que representa o bem estar total

$$\begin{aligned} \int_0^\infty U(c(t))\frac{L(t)}{\gamma}e^{-\rho t}dt &= \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty U(c(t))L(0)e^{nt}\cdot e^{-\rho t}dt \\ &= \frac{L(0)}{\gamma}\int_0^\infty U(c(t))e^{-\delta t}\cdot dt, \text{ com } \delta = \rho - n > 0. \end{aligned} \tag{5.9}$$

O objetivo encontrar a curva viável que maximiza (5.9). De forma a caracterizar tal curva, sera usado uma formulação geral do cálculo clássico de variações estudado no capítulo anterior ([5]). Pela introdução do preço imputado a uma unidade de investimento bruto per capita $q = q(t)$, e possível escrever o valor do produto interno bruto per capita :

$$\Psi = U(c) + qz, \tag{5.10}$$

Teorema 26 *Além de (5.1), (5.4) e (5.5), as condições necessárias para uma trajetória de crescimento Ótimo sao as seguintes: existe um preço imputado continuo tal que*

$$\dot{q} = \frac{d\left(\int_t^\infty \frac{\partial \Psi}{\partial k}e^{-(\delta+\lambda)(\tau-t)d\tau}\right)}{dt} = (\delta+\lambda)q - U'(c)f'(k), \tag{5.11}$$

e

$$\lim_{t\to\infty} qe^{-\delta t} = 0, \tag{5.12}$$

o preço imputado muda assim como o valor imputado do capital, enquanto o preço imputado atual tende a zero quando a data de avaliação aumenta indefinidamente, e

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) = U'(c) + q \leq 0 \ \textit{com igualdade para} \ z > 0, \tag{5.13}$$

$$c = f(k) - z. \tag{5.14}$$

dada a função k *e o preco imputado, a distribuição atual maximiza o valor imputado do produto interno bruto em cada ponto do tempo.*

Demonstração: Considere a equação (5.5). Segue que

$$\begin{aligned} z(t) &= \dot{k}(t) + \lambda k(t) \\ &= e^{-\lambda t}.\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}.k(t)) \end{aligned}$$

Com $K = e^{\lambda t}.k(t)$, esta equação torna-se

$$z(t) = e^{-\lambda t}.\frac{dK}{dt} \tag{5.15}$$

Agora considere

$$L = U(c).e^{-\delta t}; \tag{5.16}$$

$$\Psi = U(c) + qz; \tag{5.17}$$

$$H = e^{-\delta t}\Psi. \tag{5.18}$$

Substituindo (5.17) em (5.18), obtém-se

$$e^{-\delta t}\Psi = U(c)e^{-\delta t} + qe^{-\delta t}z. \tag{5.19}$$

Agora, substituindo (5.15), (5.16) e titulando $qe^{-(\delta+\lambda)t} = Q$, pode-se escrever *H* da seguinte forma

$$H = L + Q\dot{K} \tag{5.20}$$

Para otimizar $I = \int Ldt$, deve-se ter (Q, K sendo *p* e *q* nas notações do capítulo anterior), pelas equações (4.29), (4.33),(4.34) e (4.35) tem-se

$$\frac{\partial H}{\partial Q} = \dot{K} \tag{5.21}$$

$$\frac{\partial H}{\partial K} = -\dot{Q} \tag{5.22}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t} \tag{5.23}$$

Porém

$$\begin{aligned} -\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial K} &= \frac{\partial}{\partial K}(U(c)e^{-\delta t} + qe^{-\delta t}z) \\ &= \frac{\partial}{\partial k}(U(c).e^{-\delta t}).e^{-\lambda t} \\ &= e^{-(\lambda+\delta)t}\frac{\partial U}{\partial c}.\frac{\partial c}{\partial k} \\ &= e^{-(\lambda+\delta)t}\frac{\partial U}{\partial c}.\frac{\partial f}{\partial k} \end{aligned}$$

Isto é,

$$-\dot{Q} = e^{-(\lambda+\delta)t}.U'(c).f'(k) \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}(qe^{-(\lambda+\delta)t}) &= -\dot{q}e^{-(\lambda+\delta)t} + (\lambda+\delta)qe^{-(\lambda+\delta)t} \\ &= [e^{-(\lambda+\delta)t}.U'(c).f'(k)] \end{aligned} \tag{5.25}$$

Donde se conclui que

$$\dot{q} = (\lambda+\delta)q - U'f' \tag{5.26}$$

Por outro lado

$$\frac{\partial H}{\partial K} = -\dot{Q} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial K}(e^{-\delta t}\Psi) \\ &= e^{-\delta t}\frac{\partial \Psi}{\partial K} \\ &= e^{-\delta t}\frac{\partial \Psi}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial K} \\ &= e^{-\delta t}.e^{-\lambda t}\frac{\partial \Psi}{\partial k} \\ &= e^{-(\delta+\lambda)t}\frac{\partial \Psi}{\partial k} \end{aligned} \tag{5.28}$$

Além disso

$$\begin{aligned} Q(t) - Q(\infty) &= q.e^{-(\delta+\lambda)t} \\ &= -\int_t^{\infty} \dot{Q}(\tau)d\tau \\ &= \int_t^{\infty} \frac{\partial \Psi}{\partial k} e^{-(\delta+\lambda)\tau} d\tau \end{aligned}$$

implica que

$$\begin{aligned} q(t) &= e^{(\delta+\lambda)t} \int_t^{\infty} \frac{\partial \Psi}{\partial k} e^{-(\delta+\lambda)\tau} d\tau \\ &= \int_t^{\infty} \frac{\partial \Psi}{\partial k} e^{-(\delta+\lambda)(\tau-t)} d\tau \end{aligned}$$

Portanto

$$\dot{q}(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_t^{\infty} \frac{\partial \Psi}{\partial k} e^{-(\delta+\lambda)(\tau-t)} d\tau\right] \tag{5.29}$$

E finalmente fazendo a derivada parcial de Ψ em relacao a z, tem-se

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial (qz)}{\partial z} \tag{5.30}$$

$$= U'(c) + q. \blacksquare \tag{5.31}$$

Devido às hipóteses sobre diminuiçao da taxa marginal (5.2) de substituição e diminuição da utilidade marginal (5.7), as condições enumeradas resultam na única curva de crescimento útimo, se tal curva existe. De fato, se foi encontrada a curva útima viável (c^0, z^0, k^0) e o preço imputado q^0 que satisfaz (5.11), (5.12) e (5.13). Entao, para qualquer outra curva de crescimento viavel (c^1, z^1, k^1), segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \{U(c^0) - U(c^1)\}e^{-\delta t}dt &= \int_0^\infty \{[U(c^0) - U(c^1)] \\
&+ U'(c^0).[(f(k^0) - c^0 - z^0) - (f(k^1) - c^1 - z^1)] \\
&+ q^0[(z^0 - \lambda k^0 - \dot{k}^0) - (z^1 - \lambda k^1 - \dot{k}^1)]\}e^{-\delta t}dt \\
&= \int_0^\infty \{[U(c^0) - U(c^1) - U'(c^0)(c^0 - c^1)] \\
&+ [(q^0 - U'(c^0))(z^0 - z^1)] \\
&+ [(\dot{q}^0 - q^0(\delta + \lambda) + U'(c^0)f'(k^0))(k^0 - k^1)] \\
&+ U'(c^0).[f(k^0) - f(k^1) - f'(k^0)(k^0 - k^1)]\}e^{-\delta t}dt \\
&- [q^0 e^{-\delta t}(k^0 - k^1)]_0^\infty \geq 0,
\end{aligned}$$

com desigualdade estrita se $k^1(\tau) \neq k^0(\tau)$ em algum ponto $\tau > 0$.

As mesmas condições sao também suficientes, e caracterizam a única trajetória de crescimento otimo (se tal curva existe). Em virtude do da discussão anterior, pode-se agora descrever a uínica trajetória de crescimento oítimo. Desconsiderando os dados iniciais por um instante, a primeira pergunta que surge é: existe alguma trajetória que satisfaz todas as outras condições de otimalidade? E evidente que uma das curvas e a solução singular não-trivial do par de equações diferenciais (5.5) e (5.11) junto com a condição de contorno (5.4) e (5.13). Esta trajetória seró denotada por (c^*, z^*, k^*) e q^*, e sera unicamente definida por

$$\begin{aligned}
\dot{q}^* &= 0 \text{ ou } f'(k^*) = \delta + \lambda, && (5.32)\\
\dot{k}^* &= 0 \text{ ou } z^* = \lambda k^*, && (5.33)\\
c^* &= f(k^*) - z^*, \text{ e} && (5.34)\\
q^* &= U'(c^*), && (5.35)
\end{aligned}$$

das hipóteses (5.2), (5.3), e (5.7). Assim, (c^*, z^*, k^*) representam a trajetória ótima *quase estacionária,* isto é, a trajetória de equilíbrio correspondente a um valor inicial de $k,\ k(0) = k^*$ a qual seria espontaneamente mantida otima indefinidamente.

Note que a trajetória *quase estacionária é* independente da forma do índice de utilidade, mas depende apenas do desconto social efetivo δ. No caso em que $\delta \to 0$, as equações (5.32)-(5.35) tornam-se

$$f'(\tilde{k}) = \lambda, \tag{5.36}$$

$$\tilde{z} = \lambda\tilde{k}, \tag{5.37}$$

$$\tilde{c} = f(\tilde{k}) - \tilde{z}, \text{ e} \tag{5.38}$$

$$\tilde{q} = U'(\tilde{c}), \tag{5.39}$$

o que simplesmente estabelece que a trajetória quase estacionária limitante é nada mais do que a *tratória de ouro* , denotada por $(\tilde{c}, \tilde{z}, \tilde{k})$. Este caso particular é importante para discutir a curva ótima do caso geral limitante.

Mas a trajetória quase estacionaria e mais do que apenas uma curiosidade do planejamento central, com intenção de se mover ao longo da curva ótima partindo das condições iniciais históricas. Observe que, expandindo as equações (5.5) e (5.11) em torno do ponto (k^*, q^*), obtem-se um novo sistema de equações lineares ao qual estão associados os seguintes autovalores

$$\frac{1}{2}\left(\delta \pm \sqrt{\delta^2 + 4\frac{f''(k^*)q^*}{U''(c^*)}}\right).$$

Sabe-se que os autovalores tem sinais opostos devido as considerações (5.2) e (5.7) e isto caracteriza a trajetória em questão como um ponto de sela. Unindo à este fato a condicao de transversalidade (5.12), que denota um no estavel (ver discussao no § 2.2 e § 3.4), pode-se suspeitar que esta trajetória e uma candidata lógica para a única curva de crescimento ótimo. Para verificar esta conjectura, serão analizadas as equações (5.5) e (5.11) no quadrante positivo do (k, q)-plano.

O primeiro passo e avaliar o comportamento de k. Como $\dot{k} = 0$ se, e somente se, $z = \lambda k > 0$., e pelas equações (5.4) e (5.13) segue que

$$q = U'(f(k) - \lambda k) \tag{5.40}$$

para a curva acima (abaixo) da qual $\dot{k} > 0 (< 0)$. Observe ainda que, nessa curva (isto e, $\dot{k} = 0$);

$$\left(\frac{dq}{dk}\right) = U''(f(k) - \lambda k)(f'(k) - \lambda) \geq 0 (\leq 0) \text{ para } k \geq \tilde{k} (\leq \tilde{k}), \tag{5.41}$$

e, com $\dot{k} = 0$ tem-se

$$\lim_{k\to 0} q = \lim_{k\to \tilde{k}} q = \infty \tag{5.42}$$

O proximo passo e ponderar sobre o precço imputado q. Pelas equaçcãoes (5.4), (5.11) e (5.13) obtem-se

$$\begin{aligned} \dot{q} &= (\delta + \lambda - f'(k))q, \text{ para } z > 0 \\ &= (\delta + \lambda)q - U'(f(k))f'(k), \text{ para } z = 0, \end{aligned}$$

e decorre disto que $\dot{q} > 0 (< 0)$ a direita (esquerda)da curva definida por

$$\begin{aligned} k &= k^*, \text{ para } q > U'(f(k^*)) \\ q &= \frac{U'(f(k))f'(k)}{\delta + \lambda}, \text{ para } q \leq U'(f(k^*)) \end{aligned} \tag{5.43}$$

Além disso, de (5.43) quando $\dot{q} = 0,$,

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dk} &= \frac{U''(f'(k))f'(k)^2 + U'(f'(k))f''(k)}{\lambda + \delta} < 0 \\ \text{para } q &\leq U'(f(k^*)) \end{aligned}$$

E finalmente, a curva acima (abaixo) da qual $z > 0 (= 0)$ e descrita da seguinte forma

$$q = U'(f(k)) \tag{5.44}$$

com

$$\frac{dq}{dk} = U''(f'(k))f'(k) < 0$$

a curva (5.44) esta situada abaixo de (5.40) sempre, intersecta (5.43) em um unico ponto.

Alguns fatos devem ser evidenciados. Primeiro, $k(q)$ e estritamente crescente (decrescente) para $k(0) < k^*$, mas estritamente decrescente (crescente) para $k(0) > k^*$, e segundo, existe alguma funçao $k^* < \tilde{k} < \infty$ tal que a especializacao no consumo ocorre em $\tilde{k} \leq k$. E analisando (5.4) e (5.13) tambem nota-se que c tem o mesmo comportamento de k.

Com tudo que foi exibido, pode-se resumir em um teorema o resultado central:

Teorema 27 *Para qualquer capital inicial* $k(0)$*, o preço inicial imputado de bens de investimento* $q(0)$ *pode ser escolhido de tal modo que a trajetória, que inicia nestes valores e satisfaz as condições de otimalidade, se aproxima assintoticamente da trajetória quase-estacionaria* (c^*, z^*, k^*)*. Esta curva e única trajetória ótima. Além disso, nesta unica trajetória ótima, onde* k *e* c *são ambos estritamente crescentes se* $k(0) < k^*$ *ou ambos são estritamente decrescentes se* $k(0) > k^*$*.*

REFERÊNCIAS

[1] Boyce, W.E.; DiPrima, R.C.; *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* , John Wiley & Sons, 7ª ed, 2001.

[2] Brock, W. A.; Mallaris, A.G.; *Differential Equations, Stability and Chaos in Dynamic Economics,* North-Holland, Amisterda, 1996.

[3] Cass, D.; *Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation,* The Review of Economic Studies Ltd, 1965.

[4] Coelho F.U.; Lourenco, M. L.; *Um Curso de Linear Algebra,* São Paulo,: Editora da Universidade de São Paulo, 2001.

[5] Goldstein H. ; Poole, C. P. e Safko J. L; *Classical Mechanics,* Addison Wesley, 3ª edicao, 2000.

[6] Highfill, J.; McAsey, M.; *An Optimal Control Problem in Economics,* Departament of Mathematics, Bradley University, 1990.

[7] Hirsch, M.W.; Smale, S.; *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra* , Academic Press, Londres, 1974.

[8] Hoffman K.M.; Kunze, *R.;Linear Algebra,* Prentice Hall, 2ª ed, 1971.

[9] Keynes J. M.; *The General Theory of Employment, Interest and Money,* Macmillan Cambridge University Press, 1936.

[10] La Salle, J.; Lefschetz, S.; *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications,* Academic Press, New York and London, 1961.

[11] Lang, S.*;Linear Algebra,* Addison-Wesley, Amisterdaã, 1983.

[12] Leitao, A.C.G.;*Calcula Variational e Contrôle Otimo,* 23º CBM, IMPA, Rio de Janeiro, 2001.

[13] Levenson, A.M.; *Outline of price theory,* Rinehart and Winston (New York), 1964.

[14] Pontryagin, L.S.; et al. *The Mathematical Theory of Optimal Processes,* Interscience Publishers, Nova Iorque e Londres, 1962.

[15] Ramsey,F.P.; *A Mathematical Theory of Saving,* The Economic Jornal, 1928.

[16] Sasane, A. J.; *Optimisation in Function Spaces,* London School of Economics , 2005.

[17] Solow, R. M.; *A Contribution to the Theory of Economic Growth,* Quarterly Journal of Economics, 70:65-94, 1956.

[18] Spivak, M. ; *Calculus on Manifolds,* Perseus Books Publishing, Estados Unidos,1965.

[19] Weinstock, R.; *Calculus of Variations,* Dover, New York, 1974.

APÊNDICE

APÊNDICE –

Espaços topológicos são estruturas que permitem a formalização de conceitos tais como convergência, conexidade e continuidade. Em topologia, um conjunto diz-se aberto se uma pequena variação de um ponto desse conjunto mantém-no no conjunto.

Definição 14 *Uma topologia τ num conjunto X é uma coleção de partes de X, chamados os abertos da topologia, com as seguintes propriedades:*

- $\varnothing, X \in \tau$;
- *Se* A_1, $A_2 \in \tau$, *então* $A_1 \cap A_2 \in \tau$;
- *Dada uma família arbitrária* $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$, *com* $A_\lambda \in \tau$, $\forall \lambda \in L$, *tem-se* $(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda) \in \tau$.

Um espaço topológico é um par (X, τ) onde X é um conjunto e τ é uma topologia em X, ou simplesmente, pode-se dizer que X é um espaço topológico.

Exemplos:

- Se X é um conjunto, a topologia $\tau = P(X)$, onde $P(X)$ é o conjunto de todos os subconjuntos X, é denominada a topologia discreta sobre X.
- Se X é um conjunto, tem-se a topologia trivial $\tau = \{\varnothing, X\}$ sobre X .

Definição 15 *Uma métrica num conjunto P é uma função $d : P \times P \to \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in P$ um número real $d(x, y)$, de maneira que as seguintes condições sejam satisfeitas para quaisquer $x, y, z \in P$:*

i) $d(x, x) = 0$;

ii) *se* $x \neq y$ *então* $d(x, y) > 0$;

iii) $d(x, y) = d(y, x)$;

iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

É chamado de *espaço métrico* o par ordenado (P, d) onde P é um conjunto e d é uma métrica em P. Um espaço métrico (X, d) tem uma estrutura natural de espaço topológico para τ definido como o conjunto das reuniões de bolas abertas $B(x, \delta) = \{y \in (X : d(x, y) < \delta\}$. Um exemplo é o conjunto $\mathbb{R}^n$ com a métrica natural.

Definição 16 *Um subconjunto de um espaço topológico diz-se fechado se o seu complemento for aberto.*

Definição 17 *A aplicação $f : X \to Y$ é contínua se $f^{-1}(V) = \{x : f(x) \in V\}$ é aberto em X para qualquer V aberto em Y. A mesma aplicação f é um homeomorfismo se f é bijetora; f e f^{-1} são contínuas.*

Uma propriedade topológica é aquela que é preservada por homeomorfismos . Por homeomorfismo, uma superfície plana ao ser deformada preserva todas as suas características topológicas, alterando apenas suas características geométricas. O homeomorfismo é uma relação de equivalência.

Definição 18 *Um funcional em S é uma aplicação $F : S \to \mathbb{R}$.*

Definição 19 *Um subconjunto D do espaço vetorial X é dito ser convexo se para todo $x, y \in D$ e para todo $\alpha \in [0, 1]$ tem-se $\alpha x + (1 - \alpha)y \in D$. Se C não é convexo, C é dito ser côncavo.*

Definição 20 *Dado um espaço vetorial Y e um funcional $I : D \to \mathbb{R}$, onde $D \subset Y$ com D convexo, é dito que I é convexo em D quando para todo par de elementos $y,\ v \in Y$,*

$$I(\alpha y + (1 - \alpha)v) \leq \alpha I(y) + (1 - \alpha)I(v), \quad se\ \ \alpha \in [0, 1]. \tag{1}$$

I é denominado estritamente convexo em D quando a desigualdade na equação (1) for estrita. O funcional I é dito ser (estritamente) côncavo se $-I$ é (estritamente)convexo.

Espaços Normados

Definição 21 *Seja X o espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Uma norma em X é a função $\| \quad \| : X \to [0, \infty)$ tal que:*

i) Para todo $x \in X$, $\|x\| \geq 0$. Se $x \in X$, então $\|x\| = 0$ se, e somente se $x = 0$.

ii) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ (respectivamente em $\mathbb{C}$) e para todo $x \in X$, $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$.

iii) Para todo $x, y \in X$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Um *espaço normado* X é um espaço vetorial com uma norma.

Um espaço normado X é um espaço métrico (X, d) onde $d(x, y) = \|x - y\|$.

Um exemplo é $C[a, b]$, o espaço de todas as funções contínuas no intervalo $[a, b]$ que é completo com a norma do supremo

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|, \quad f \in C[a, b].$$

Além disso, $C[a, b]$ tem subespaços $C^n[a, b]$, o conjunto das funções diferenciáveis de ordem n, para um n fixo.

Teorema 28 *Sejam X e Y espaços normados sobre R. Seja $T : X \to Y$ uma transformação linear. Então as seguintes propriedades de T são equivalentes:*

1) T é contínua;

2) T é contínua em 0;

3) Existe um número M tal que para todo $x \in X$, $\|Tx\| \leq M \|x\|$

Definição 22 *Seja $L : X \to Y$, uma transformação linear entre espaços normados X e Y. Então L é um operador linear limitado se existe um número $M > 0$ tal que para todo $x \in X$, $\|Tx\| \leq M \|x\|$*

Definição 23 *Sejam X e Y espaços normados. Se $F : X \to Y$ é uma função e $x_0 \in X$, então F é dita ser diferenciável em x_0 se existe um operador linear limitado $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$*

$$0 < ||x - x_0\| < \delta \Rightarrow \frac{\|F(x) - F(x_0) - L(x - x_0)\|}{\|x - x_0||} < \epsilon. \tag{2}$$

O operador L é chamado de derivada de F em relação a x_0.

Definição 24 *Seja $X = C^1[a,b]$ e $Y = C[a,b]$. Defina $D : X \to Y$ como segue: Se $f \in C^1[a,b]$, então*

$$[D(f)](x) = \frac{df(x)}{dx},\ x \in [a,b] \tag{3}$$