



**UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA**

THIAGO DE SOUZA PINTO

**UMA PROPOSTA PARA RESOLVER O PROBLEMA DE
CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL COM
REAPROVEITAMENTO DE SOBRES POR MEIO DE
DOIS OBJETIVOS**

Londrina
2008

THIAGO DE SOUZA PINTO

**UMA PROPOSTA PARA RESOLVER O PROBLEMA DE
CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL COM
REAPROVEITAMENTO DE SOBRAS POR MEIO DE
DOIS OBJETIVOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação, em Matemática Aplicada e Computacional – PGMAC da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Professor Doutor Robinson Samuel Vieira Hoto

Londrina
2008

Catálogo na publicação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

P659u Pinto, Thiago de Souza.

Uma proposta para resolver o problema de corte de estoque unidimensional com reaproveitamento de sobras por meio de dois objetivos / Thiago de Souza Pinto. – Londrina, 2008.
69 f. : il.

Orientador: Robinson Samuel Vieira Hoto.

Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2008.

Inclui bibliografia.

1. Matemática aplicada – Teses. 2. Otimização matemática – Teses.
3. Processo decisório – Modelos matemáticos – Teses. I. Hoto, Robinson Samuel Vieira. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

CDU 519.87-7

THIAGO DE SOUZA PINTO

**UMA PROPOSTA PARA RESOLVER O PROBLEMA DE
CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL COM
REAPROVEITAMENTO DE SOBRAS POR MEIO DE
DOIS OBJETIVOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação, em Matemática Aplicada e Computacional da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Robinson Hoto
Laboratório de Simulação e Otimização de Sistemas
Departamento de Matemática UEL

Prof. Dr. Marcos Nereu Arenales
Laboratório de Otimização Instituto de Ciências
Matemáticas e de Computação USP

Prof. Dr. Marcos Eduardo Ribeiro do Valle
Mesquita
Laboratório de Simulação e Otimização de Sistemas
Departamento de Matemática UEL

Londrina, 22 de dezembro de 2008.

À memória do meu grande amigo Carlos Henrique Spera (Charlie).

PINTO, Thiago de Souza. **Uma proposta para resolver o problema de corte de estoque unidimensional com reaproveitamento de sobras por meio de dois objetivos.** 73f. 2008. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

RESUMO

Problemas de corte de estoque unidimensional consistem em cortar um conjunto de peças disponíveis em estoque para produzir um conjunto de itens em quantidades pré-determinadas, onde apenas o comprimento das peças é relevante. Neste trabalho apresentamos uma definição para o problema de corte de estoque unidimensional em que as perdas geradas pelo processo de cortagem dos itens demandados, que apresentam comprimentos em condições de reuso, são aproveitadas para atender futuras demandas, denominado na literatura por Problema de Corte de Estoque Unidimensional com Reaproveitamento de Sobras. Na prática encontramos tal problema em indústrias que, buscando uma melhor utilização da matéria-prima, procuram reutilizar as perdas ocorridas no processo de cortagem, ao invés de descartá-las, desde que apresentem condições para isto. Visando resolver o problema apresentado, propomos três abordagens de resolução em duas etapas e outras duas em uma única etapa. Como a finalidade de verificarmos a eficiência das abordagens propostas, efetuamos simulações com exemplos extraídos de dois trabalhos da literatura.

Palavras-chave: Matemática aplicada. Otimização matemática. Processo decisório. Modelos matemáticos.

PINTO, Thiago de Souza. **Uma proposta para resolver o problema de corte de estoque unidimensional com reaproveitamento de sobras por meio de dois objetivos.** 73f. 2008. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

ABSTRACT

One-Dimensional Cutting Stock Problems consists of cutting a set of parts available in stock to produce a set of items in pre-determined quantities, where only the length of the parts is relevant. In this work we present a definition for the one-dimensional cutting stock problems in which the losses generated by the process of the items cutting defendants, which have lengths in terms of reuse, are used to meet future demands, called for in the literature of one-dimensional cutting stock problem with usable leftovers. In practice we found this problem in industries that, seeking a better use of raw materials, reuse seek the losses occurred in the cutting process rather than discard them, provided that conditions for this exhibit. Aiming to solve the problem presented, we propose three approaches for resolution in two steps and two others in a single step. As the purpose of verifying the effectiveness of proposed approaches, we made simulations with examples taken from two works of literature.

Keywords: Applied mathematics. Mathematical optimization. Decision process. Mathematical models.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Problema de corte de estoque unidimensional: (a) objetos em estoque, (b) itens demandados.....	11
Figura 2 –(a) Bobinas de aço. (b) Processo de cortagem de bobinas de aço	12
Figura 3 –Exemplos de padrões de corte unidimensionais	12
Figura 4 –Exemplo de padrões de corte homogêneos maximais.....	13
Figura 5 –(a) objeto a ser cortado; (b) objeto cortado produzindo 3 itens e uma perda	20
Figura 6 –Objeto (placa), itens demandados e um exemplo de padrão de corte.....	21
Figura 7 –Objeto (contêiner) , itens (três caixas) e um exemplo de padrão de empacotamento.....	21
Figura 8 –Tipos de problema básicos proposto por Wäscher <i>et al.</i> (2007)	26
Figura 9 –(a) são os dados do problema, (b), (c) e (d) são soluções.....	30

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Nomenclatura da tipologia de Dyckhoff (1990).....	23
Tabela 2	– Alguns problemas encontrados na literatura com as respectivas tipologias dadas por Dyckoff(1990).....	23
Tabela 3	– Dados do Exemplo 1 – Estoque.....	54
Tabela 4	– Dados do Exemplo 1 – Itens.....	54
Tabela 5	– Solução do Exemplo 1.....	55
Tabela 6	– Dados do Exemplo 2 – Estoque.....	56
Tabela 7	– Dados do Exemplo 2 – Itens.....	56
Tabela 8	– Solução do Exemplo 2.....	57
Tabela 9	– Dados do Exemplo 3 – Estoque.....	57
Tabela 10	– Dados do Exemplo 3 – Itens.....	58
Tabela 11	– Solução do Exemplo 3.....	58
Tabela 12	– Dados do Exemplo 4 – Estoque.....	59
Tabela 13	– Dados do Exemplo 4 – Itens.....	59
Tabela 14	– Solução do Exemplo 4.....	60
Tabela 15	– Dados do Exemplo 5 – Estoque.....	60
Tabela 16	– Dados do Exemplo 5 – Itens.....	60
Tabela 17	– Solução do Exemplo 5.....	61
Tabela 18	– Dados do Exemplo 6 – Estoque.....	61
Tabela 19	– Dados do Exemplo 6 – Itens.....	62
Tabela 20	– Solução do Exemplo 6.....	63
Tabela 21	– Dados do Exemplo 7 – Estoque.....	63
Tabela 22	– Dados do Exemplo 7 – Itens.....	64
Tabela 23	– Solução do Exemplo 7.....	64
Tabela 24	– Dados do Exemplo 8 – Estoque.....	65
Tabela 25	– Dados do Exemplo 8 – Itens.....	65
Tabela 26	– Solução do Exemplo 8.....	65
Tabela 27	– Número de objetos para demandas diferente.....	68

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	9
CAPÍTULO 1 – O PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL	11
1.1 DEFINIÇÃO E FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	11
1.2 UMA BREVE REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	16
1.3 PROBLEMAS DE CORTE EMPACOTAMENTO: VISÃO GERAL.....	19
CAPÍTULO 2 – O PROBLEMA DE CORTE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL COM REAPROVEITAMENTO DE SOBRAS	27
2.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA.....	27
2.2 HISTÓRICO CRONOLÓGICO	31
CAPÍTULO 3 – PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL COM REAPROVEITAMENTO DE SOBRAS	46
3.1 ESTRATÉGIAS EM DUAS ETAPAS.....	46
3.1.1 Estratégia 1	47
3.1.2 Estratégia 2	49
3.1.3 Estratégia 3	50
3.2 ESTRATÉGIAS EM MONO-OBJETIVO	51
3.2.1 Estratégia 4	51
3.2.2 Estratégia 5	52
CAPÍTULO 4 – SIMULAÇÕES	53
4.1 RESULTADOS COMPUTACIONAIS	53
CAPÍTULO 5 – CONCLUSÕES	67
REFERÊNCIAS	70

INTRODUÇÃO

Problemas de Corte são de grande importância para o planejamento da produção de alguns segmentos industriais, tais como: indústrias de móveis, indústrias de papel, indústrias do segmento têxtil, indústrias que confeccionam lâminas de vidro, de filmes plásticos, de colchões, indústrias do segmento de metalurgia, entre outras inúmeras.

Pequenas melhorias no processo de cortagem podem representar uma enorme vantagem econômica. Surge assim a necessidade de se planejar os cortes para atenuar os efeitos negativos associados à perda de material.

Nesta dissertação apresentamos uma definição para o problema de corte de estoque unidimensional em que as perdas geradas pelo processo de cortagem dos itens demandados, que apresentam comprimentos em condições de reuso, são aproveitadas para atender futuras demandas.

O problema foco de nosso estudo é denominado Corte de Estoque Unidimensional com Reaproveitamento de Sobras, o qual surge em indústrias que, buscando uma melhor utilização da matéria-prima, procuram reutilizar as perdas ocorridas no processo de cortagem, ao invés de descartá-las, desde que apresentem condições para isto.

A fim de bem compreender os casos que tratam do assunto, fizemos um razoável histórico cronológico de artigos que abordam o reaproveitamento de sobras.

Como contribuições deste trabalho destacamos a apresentação de um modelo matemático para o reaproveitamento de sobras. Destacamos também, três abordagens de resolução que foram propostas para o problema, fundamentadas em duas etapas, sendo que a primeira etapa, comum às três estratégias, consiste em minimizar o comprimento total a ser cortado. Já a segunda etapa visa, de maneira distinta em cada estratégia, a geração de sobras para reaproveitamento futuro. Nós também sugerimos duas outras estratégias que tentam combinar os objetivos da primeira e da segunda etapa no intuito de gerar sobras, ao invés de perdas.

Ainda, efetuamos simulações com exemplos extraídos de dois dos trabalhos que encontramos, um deles aplicado a uma indústria aeronáutica e o outro a uma pequena metalúrgica. Nós analisamos os resultados das estratégias que desenvolvemos confrontando-as com as de outros autores.

Por fim, o presente texto está organizado na seguinte estrutura:

Capítulo 1: Revisamos três modelos matemáticos para o problema de corte

de estoque unidimensional. Apresentamos uma breve revisão bibliográfica dos problemas de corte de estoque unidimensional e introduzimos uma visão geral dos problemas de corte e empacotamento.

Capítulo 2: Apresentamos o Problema de Corte de Estoque Unidimensional com Reaproveitamento de Sobras. Também apresentamos uma revisão bibliográfica do problema.

Capítulo 3: Apresentamos nossas propostas de resolução para o problema de corte de estoque unidimensional com reaproveitamento de sobras.

Capítulo 4: Neste capítulo apresentamos os resultados computacionais obtidos com a implementação das propostas apresentadas no capítulo 3 e comparamos estes resultados com outras abordagens propostas na literatura.

Capítulo 5: Conclusões e considerações para investigações futuras são apresentadas neste capítulo.

CAPÍTULO 1

O PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL

Neste capítulo, descrevemos três modelos matemáticos para o problema de corte de estoque unidimensional. O primeiro é formulado para problemas com estoque homogêneo, já o segundo é composto por um estoque heterogêneo, em ambos os casos, os modelos visam atender uma demanda conhecida e prevêm que os cortes sejam pré-definidos. Por fim, o terceiro modelo integra o atendimento da demanda e o processo de cortagem. Em seguida, apresentamos uma breve revisão bibliográfica dos problemas de corte de estoque unidimensional e introduzimos uma visão geral dos problemas de corte e empacotamento.

1.1 DEFINIÇÃO E FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

O problema de corte de estoque unidimensional pode ser definido da seguinte forma: Suponha que tenhamos em estoque uma quantidade suficiente de objetos (barras, tubos, perfis, bobinas, etc) de comprimento L para cortar itens (peças menores) de comprimentos $l_i \leq L, i = 1, \dots, I$, de modo a atender demandas $d_i, i = 1, \dots, I$. O problema consiste em efetuar este processo de cortagem, minimizando o número de objetos a serem usados. As figuras 1a e 1b ilustram, respectivamente, conjuntos de objetos e de itens a serem cortados.

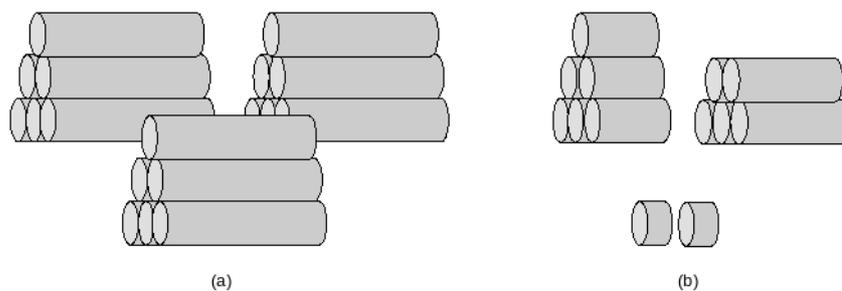


Figura 1 – Problema de corte de estoque unidimensional: (a) objetos em estoque, (b) itens demandados.

Problemas desta natureza têm aplicações na indústria de papel (GILMORY; GOMORY, 1961, 1963), onde grandes bobinas (jumbos) têm de ser cortadas em tamanhos encomendados, na indústria de alumínio (STADTLER, 1990), onde um produtor de perfis de alumínio visa obter o número mínimo de peças necessárias para atender aos pedidos, na indústria de aço (MARQUES, 2004), (HOTO, 2001), onde bobinas de aço são cortadas em bobinas menores denominadas fitas (figura 2), etc.

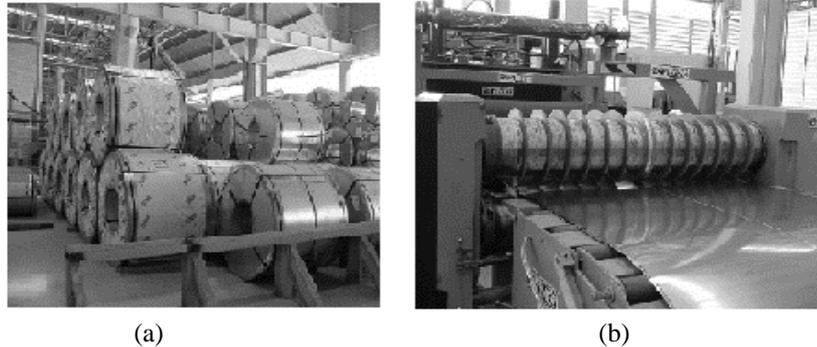


Figura 2 – (a) Bobinas de aço. (b) Processo de cortagem de bobinas de aço.

Como já observamos, no problema de corte de estoque unidimensional os objetos deverão ser cortados para a produção de diferentes tipos de itens, o que sugere a definição a seguir:

Definição 1: Padrão de corte é a maneira que cortamos um objeto para a produção de itens demandados. A um padrão de corte é associado um vetor que contabiliza os itens a serem cortados: $\mathbf{a}_p = (a_{1p}, a_{2p}, \dots, a_{lp})^T$, onde a_{ip} é a quantidade de vezes que o item de comprimento l_i , $i=1, \dots, l$, aparece no padrão de corte representado por \mathbf{a}_p .

A figura 3 ilustra exemplos de padrões de corte unidimensionais.

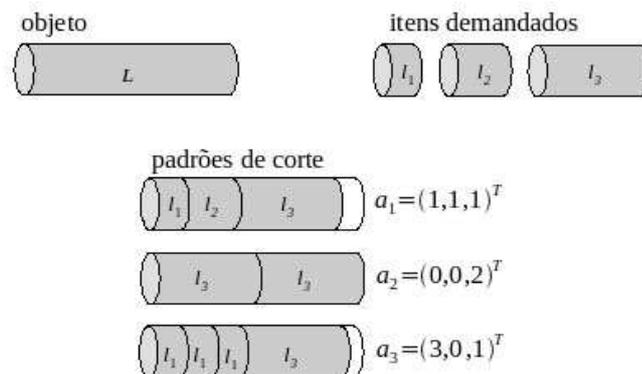


Figura 3 – Exemplos de padrões de corte unidimensionais

Observe que um vetor $\mathbf{a}_p = (a_{1p}, a_{2p}, \dots, a_{ip})^T$ corresponde a um padrão de corte unidimensional se, e somente se, satisfaz a restrição física $l_1 a_{1p} + l_2 a_{2p} + \dots + l_i a_{ip} \leq L$, onde $a_{ip} \geq 0$, $i = 1, \dots, I$.

Note ainda que, o número de padrões de corte é finito, mas, na prática este número pode ser muito grande.

Definição 2: Chamamos de padrão de corte homogêneo aquele que produz apenas um tipo de item.

Em outras palavras, um padrão de corte é homogêneo se o vetor associado a ele tem apenas uma coordenada não-nula $(0, \dots, a_{ip}, \dots, 0)^T$, $a_{ip} \neq 0$. Ainda, quando a_{ip} assumir seu valor máximo, o padrão homogêneo é denominado maximal (figura 4).

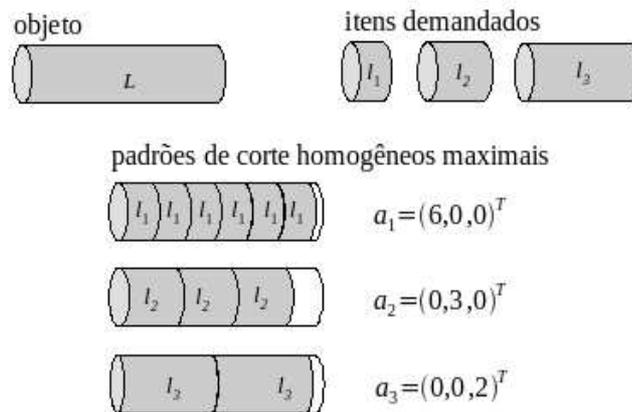


Figura 4 – Exemplo de padrões de corte homogêneos maximais.

Em problemas de corte de estoque unidimensional com I tipos de itens demandados sempre existem I padrões de corte homogêneos maximais, representados por

$$(0, \dots, a_{ip}, \dots, 0)^T, \text{ onde } a_{ip} = \left\lfloor \frac{L}{l_i} \right\rfloor, \quad i = 1, \dots, I.$$

A formulação do modelo matemático do problema de corte de estoque unidimensional pode ser idealizada em duas etapas. Na primeira, definimos todos os possíveis padrões de corte, digamos que sejam P :

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{I1} \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{I2} \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{a}_P = \begin{bmatrix} a_{1P} \\ a_{2P} \\ \vdots \\ a_{IP} \end{bmatrix}$$

Na segunda, definimos $x_p, p=1, \dots, P$, que representará o número de vezes que o padrão de corte de índice p é usado para cortar objetos. Note que, $\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \dots + \mathbf{a}_P x_P = \mathbf{d} = (d_1, \dots, d_I)^T$. O modelo matemático para o problema de corte de estoque unidimensional, considerando o objetivo de minimizar o número de objetos a serem usados, pode ser formulado como o seguinte problema:

$$\min \sum_{p=1}^P x_p \quad (1.1)$$

sujeito a:

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \dots + \mathbf{a}_P x_P = \mathbf{d} \quad (1.2)$$

$$x_p \geq 0 \text{ e inteiro, } p=1, \dots, P \quad (1.3)$$

Neste texto, nós denominaremos o modelo 1 de Problema de Corte de Estoque Unidimensional Clássico (PCEC). Observe que nele a função objetivo (1.1) minimiza o total de objetos em estoque a serem cortados. A restrição (1.2) garante que a quantidade de itens produzidos seja exatamente igual à demanda e, a restrição (1.3) garante que a repetição de cada padrão de corte de índice j seja um número inteiro não-negativo.

Nas inúmeras situações práticas podem ocorrer variações do problema de corte de estoque unidimensional, onde outros objetivos, inclusive conflitantes, são eventualmente pleiteados. Além disto, restrições adicionais, ou até mesmo modificações nas restrições, também podem ser necessárias. Dentro deste espírito, levando em conta o foco de nosso trabalho, consideraremos que o estoque é composto por objetos de vários comprimentos, cuja disponibilidade é limitada, entretanto, suficiente para o atendimento dos itens demandados.

Assim, considere e_j a quantidade disponível do objeto de comprimento L_j e, x_p o total destes objetos que foram cortados, segundo o padrão de corte de índice p . Seja

ainda, $T_p = L_j - \sum_{i=1}^I l_i a_{ip}$ a perda produzida pelo padrão de índice p no objeto de comprimento L_j , onde a_{ip} é a quantidade de vezes que o item de comprimento l_i aparece no padrão de índice

p , no objeto de comprimento L_j , onde $i=1, \dots, I, p=1, \dots, P$ e $j=1, \dots, J$.

Introduzindo os vetores $\mathbf{a}_{pj} = (a_{1pj}, a_{2pj}, \dots, a_{Ipj})^T$, o modelo para o problema de

corte de estoque unidimensional com vários tipos de barras em estoque, em quantidades limitadas, pode ser escrito como:

$$\min \sum_{p=1}^{P_1} T_{p1} x_{p1} + \sum_{p=1}^{P_2} T_{p2} x_{p2} + \dots + \sum_{p=1}^{P_j} T_{pj} x_{pj} \quad (2.1)$$

sujeito a:

$$\sum_{p=1}^{P_1} a_{p1} x_{p1} + \sum_{p=1}^{P_2} a_{p2} x_{p2} + \dots + \sum_{p=1}^{P_j} a_{pj} x_{pj} = d \quad (2.2)$$

$$\sum_{p=1}^{P_1} x_{p1} \leq e_1 \quad (2.3)$$

$$\sum_{p=1}^{P_2} x_{p2} \leq e_2 \quad (2.4)$$

...

$$\sum_{p=1}^{P_j} x_{pj} \leq e_j \quad (2.5)$$

$$x_{pj} \geq 0 \text{ e inteiro, } p=1, \dots, P_j, \quad j=1, \dots, J \quad (2.6)$$

Neste texto, o modelo 2 será denominado Problema de Corte de Estoque Unidimensional Restrito (PCER), no qual minimizar perdas é equivalente a minimizar o comprimento total de objetos usados para o atendimento da demanda, no sentido de que os mesmos padrões de corte serão obtidos num ou noutro caso. Vejamos:

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{P_1} T_{p1} x_{p1} + \sum_{p=1}^{P_2} T_{p2} x_{p2} + \dots + \sum_{p=1}^{P_j} T_{pj} x_{pj} &= \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} (L_j - \sum_{i=1}^I l_i a_{ij}) x_{pj} = \sum_{p=1}^{P_1} \sum_{j=1}^J (L_j - \sum_{i=1}^I l_i a_{ij}) x_{pj} \\ &= \sum_{p=1}^{P_1} \sum_{j=1}^J L_j x_{pj} - \sum_{p=1}^{P_1} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I l_i a_{ij} x_{pj} = \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} L_j x_{pj} - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} l_i a_{ij} x_{pj} \\ &= \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} L_j x_{pj} - \sum_{i=1}^I l_i \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} a_{ij} x_{pj} = \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} L_j x_{pj} - \sum_{i=1}^I l_i d_i \end{aligned}$$

Observação: Note que $\sum_{i=1}^I l_i d_i$ é constante e que $\sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} L_j x_{pj}$ representa o comprimento total que foi cortado para o cumprimento da demanda, podendo ser colocado no lugar de (2.1). Num raciocínio semelhante pode-se constatar este mesmo fato para o PCEC, onde há apenas um tipo de objeto em estoque, de modo que, a soma das perdas será equivalente a

$\sum_{p=1}^P Lx_p - \sum_{i=1}^I l_i d_i$ ou ainda, $L \sum_{p=1}^P x_p - \sum_{i=1}^I l_i d_i$ e como L também é constante, basta minimizar o número de objetos a serem cortados, conforme foi apresentado no modelo 1. Além disto, uma solução ótima do PCER também será do PCEC.

Agora, digamos que K é um limitante superior conhecido para o número de objetos necessários para produção de todos os itens demandados, que a_{ik} é o número de vezes que o item de índice i é cortado do objeto de índice k e, por fim, que $y_k=1$ se o k -ésimo objeto é utilizado e, $y_k=0$ no caso contrário. Nestas condições, podemos escrever um novo modelo para o Corte de Estoque Unidimensional:

$$\min \sum_{k=1}^K y_k \quad (3.1)$$

sujeito a:

$$\sum_{k=1}^K a_{ik} \geq d_i, \quad i=1, \dots, I \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^I l_{ik} a_{ik} = L y_k, \quad k=1, \dots, K \quad (3.3)$$

$$a_{ik} \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad i=1, \dots, I, \quad k=1, \dots, K \quad (3.4)$$

$$y_k \in \{0,1\}, \quad k=1, \dots, K \quad (3.5)$$

A função objetivo (3.1) minimiza o número de objetos utilizados. A restrição (3.2) garante o atendimento à demanda dos itens, a restrição (3.3) garante que se o padrão de corte de índice k for utilizado, então ele satisfaz a restrição física. Por fim, as restrições (3.4) e (3.5) definem os tipos de variáveis do problema.

Na próxima seção é feita a descrição de alguns trabalhos tradicionais sobre o corte de estoque unidimensional.

1.2 UMA BREVE REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O problema de corte de estoque unidimensional é um problema de otimização combinatória, que pode, sem grandes dificuldades, ser formulado e muito bem compreendido, mas, esconde atrás desta simplicidade uma grande complexidade. Possivelmente, a primeira documentação que trata do problema é devida ao economista russo Kantorovich (1960).

Observe que os modelos 1, 2 e 3, cada um com suas particularidades, são árduos por representarem um problema de grande porte, cuja dificuldade de resolução computacional cresce à medida que a dimensão do problema aumenta e esta, por sua vez, não depende apenas do número de itens e objetos, mas, também da dificuldade de se combinar

itens em objetos. De fato, o corte de estoque unidimensional trata-se de um problema NP-difícil.

Neste texto nós não iremos entrar nos detalhes de Classes Algorítmicas, não obstante, vale ressaltar que a dificuldade de resolução de problemas da classe NP pôde ser melhor compreendida após os trabalhos de Cook (1971) e Karp (1972), que sistematizaram a base da teoria da NP-completude.

A resolução do PCEC tornou-se possível e ganhou avanços significativos no final da década de 50 e início da década de 60. Dantzig e Wolfe (1959) e Gilmore e Gomory (1961) estudaram, independentemente, os mecanismos do procedimento de Geração de Colunas capaz de resolver o problema eficientemente. Os dois primeiros autores descrevem as propriedades matemáticas de um princípio de decomposição que pode ser aplicado em modelos com uma específica característica, como é o caso do modelo 3, decompondo-o em dois modelos, um principal e um secundário. Já os outros dois autores, descrevem o problema por meio do modelo 1, onde um subproblema será responsável pela geração dos padrões.

Em 1963, os métodos descritos por Gilmore e Gomory (1961) são estendidos e adaptados para um problema específico do corte de estoque unidimensional num estudo de caso no corte do papel, acrescentando restrições como, por exemplo, limites de facas na máquina (GILMORE; GOMORY, 1963).

Haessler (1975) apresentou um método heurístico computacionalmente eficiente para resolver o problema de corte de estoque unidimensional, visando a redução do número de padrões de corte distintos por meio de uma penalização do objetivo e, ainda considerou tolerâncias no atendimento à demanda dos itens.

Hinxman (1980) apresenta uma revisão dos problemas de corte em suas várias dimensões e discute sobre a estreita ligação entre o problema da mochila e o problema de corte de estoque. O autor também classificou os métodos para solução do problema de corte em categorias: *branch-and-bound*, programação dinâmica e repetição exaustiva (heurísticas construtivas).

Stadtler (1990) realizou um estudo de caso em uma indústria de alumínio, com o objetivo de minimizar o número de objetos em estoque necessários para atender a demanda dos clientes. Em seu problema, as demandas dos itens são baixas e o autor emprega a heurística *First Fit Decreasing* (FFD), ele relata que os resultados fornecidos não foram satisfatórios. Assim, ele sugere um método baseado na técnica de Geração de Colunas, acrescentado um processo de arredondamento para obtenção de uma solução.

Vance *et al.* (1994), sugerem o emprego de um *branch-and-bound* que

envolve a resolução do método de Geração de Colunas em cada nó da árvore. Posteriormente Vance (1996) sugere um *branch- and-price* que desconsidera conjuntos de colunas que tem suas respectivas variáveis com valor nulo na solução ótima. Em seguida, a otimalidade do problema é checada por meio de um subproblema que tenta identificar colunas a entrar na corrente base que, uma vez encontradas, são adicionadas ao problema original que é então reotimizado. A ramificação ocorre quando nenhuma coluna é encontrada e a integralidade do problema ainda não está satisfeita.

Marcotte (1985) provou que uma série de exemplos de problemas de corte de estoque unidimensionais possuem a propriedade de arredondamento para cima (*IRUP - Integer Round-Up Property*), que foi definida por Baum e Trotter (1982) e consiste no fato de que a diferença entre o piso do valor ótimo da relaxação contínua e o valor ótimo do problema (com variáveis inteiras) é estritamente menor que 1 (um).

Por outro lado, em Marcotte (1986), a autora apresentou um exemplo artificial para o qual a propriedade *IRUP* não se verifica, de fato em seu exemplo ela mostrou que o *gap* é exatamente 1.

Scheithauer e Terno (1995) realizaram um extenso estudo sobre o *gap* de integralidade e apresentaram um exemplo com *gap* igual a 1,0378.... No entanto, os autores observaram que, para todas os exemplos testados este valor não era superior a 2. Com isto, conjecturaram a propriedade *MIRUP - Modified Integer Round-Up Property*, sugerindo que *gap* de integralidade é estritamente menor do que 2 (dois).

Wäscher e Gau (1996) realizaram um estudo computacional sobre heurísticas para obtenção da solução inteira a partir de uma solução fracionária aproximada para o problema. Na realização deste estudo, os autores resolveram exemplos gerados aleatoriamente, utilizando um gerador de problemas desenvolvido por eles.

Cintra (1998) apresentou testes comparativos entre as heurísticas *First Fit Decreasing* (FFD), *First Fit Decreasing especializada* (FFDe), *First Fit Decreasing With Backtracking* (FFDWB) e um algoritmo Híbrido, repetindo os testes realizados por Wäscher e Gau (1996) com 4.000 instâncias geradas aleatoriamente. O autor também avalia o *gap* de integralidade dos exemplos.

Krichagina *et al* (1998) utilizaram análise estocástica num problema de corte de estoque unidimensional sob incertezas, que consiste em produzir itens, onde o objetivo é o de determinar uma política dinâmica de agendamento (*scheduling*) de tarefas, minimizando as interrupções esperadas das máquinas de corte de papel, o desperdício, os estoques, a demanda não atendida e os custos de preparação. As autoras apresentaram os

resultados de um procedimento heurístico baseado em programação linear e controle Browniano.

Poldi e Arenales (2002) e Poldi (2003) propõem em seus trabalhos heurísticas para obter uma solução inteira a partir de uma solução viável, que é baseada no trabalho de Stadtler (1990). Numa de suas heurísticas, a autora resolve o problema original e ordena as frequências obtidas, de forma decrescente, para dar prioridade aos padrões mais utilizados. Em seguida, arredonda para o inteiro superior a frequência do primeiro padrão e verifica se ocorreu excesso de produção. Caso ocorra, a frequência deste padrão é reduzida de uma unidade, até o excesso ser eliminado. Este procedimento é repetido para todos os padrões e, no final, atualiza-se a demanda. Ao realizar este passo, têm-se um problema residual, que é resolvido da mesma forma.

Na mesma linha do trabalho de Krichagina *et al.* (1998), Alem (2006) desenvolveu uma extensão do problema de corte de estoque unidimensional no caso em que a demanda dos itens é aleatória. A proposta do autor é estender o modelo matemático do problema de corte de estoque unidimensional, cuja demanda é determinística, para o caso no qual ela possa assumir várias possibilidades de ocorrências. Ele sugere abordar o problema por meio de cenários que possuem probabilidades de ocorrência pré-determinadas e apresenta uma série de simulações.

Com igual importância, existem muitos outros trabalhos que não foram citados aqui, porém, esperamos ter apresentado uma razoável idéia das inúmeras aplicações e variações em que o corte de estoque unidimensional se insere.

1.3 PROBLEMAS DE CORTE E EMPACOTAMENTO: VISÃO GERAL

O problema de corte de estoque deve ser visto por meio de uma noção mais ampla, pois, análogos aos problemas de corte e de igual importância no planejamento da produção existem os problemas de empacotamento que consistem em alocar uma determinada quantidade de unidades menores (itens) em unidades maiores (objetos), cumprindo uma demanda predeterminada e minimizando espaços ociosos. Por exemplo, o armazenamento de produtos em caixas de papelão, em paletes, num contêiner, etc.

Note que o problema de empacotamento pode ser pensado como um problema de corte (e vice-versa), pois, a parte do objeto que será cortado para produção de

um item, pode ser identificada como o espaço ocupado por este. Por esta razão, tais problemas são referidos na literatura como Problemas de Corte e Empacotamento e são abordados, matematicamente, com as mesmas formulações e estratégias de resolução.

Ainda existem problemas sem relação aparente com o contexto dos problemas de corte e empacotamento que podem ser modelados como problemas dessa natureza, onde os objetos e itens são entidades abstratas. Por exemplo, a programação de veículos ou determinação de rotas, o balanceamento de uma linha de produção, a alocação de tarefas, etc.

Devido à variedade dos tipos de problemas de corte e empacotamento que ocorrem no mundo real, bem como o crescente interesse de pesquisadores pelo assunto, Dyckhoff (1990) sugeriu uma forma de classificá-los conforme as suas características. Mais tarde Dyckhoff e Finke (1992) apresentaram um livro que reúne uma extensa bibliografia de diversos problemas de corte e empacotamento, além de relacionar critérios associados à estrutura lógica e real dos problemas de corte.

As quatro principais características propostas no trabalho de Dyckhoff (1990) para classificar problemas de corte são: dimensão, tipo de alocação, sortimento de objetos e sortimento de itens.

■ Dimensão

Característica relacionada ao número de dimensões relevantes no processo de corte. Em resumo, um problema de corte em relação à sua dimensão pode ser:

- Unidimensional, representado com o algarismo (1).

O problema é unidimensional quando apenas uma das dimensões é relevante no processo de corte. Ocorre por exemplo no processo de corte de bobinas de aço (HOTO, 2001). A Figura 5a e 5b ilustram um exemplo de problema de corte de estoque unidimensional.

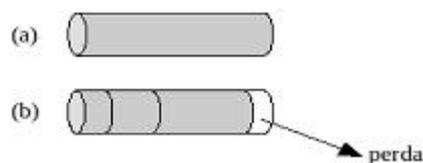


Figura 5 – (a) objeto a ser cortado; (b) objeto cortado produzindo 3 itens e uma perda

- Bidimensional, representado com o algarismo (2).

O problema é bidimensional quando duas dimensões são relevantes no

processo de corte. Este problema ocorre em indústrias de placas de vidro, madeira, etc. A figura 6 ilustra este tipo de problema.

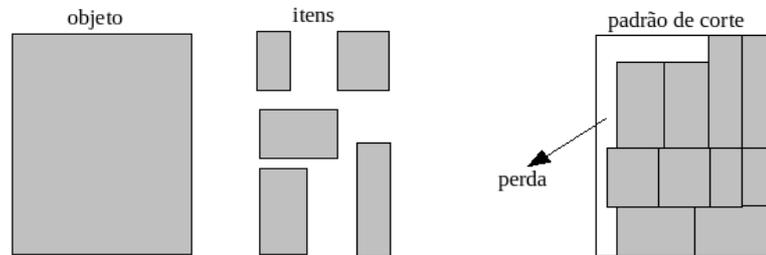


Figura 6 – Objeto (placa), itens demandados e um exemplo de padrão de corte.

- Tridimensional, representado com o algarismo (3).

O problema é tridimensional quando três dimensões são relevantes no processo de corte, por exemplo, o problema do carregamento de um contêiner (Figura 7).

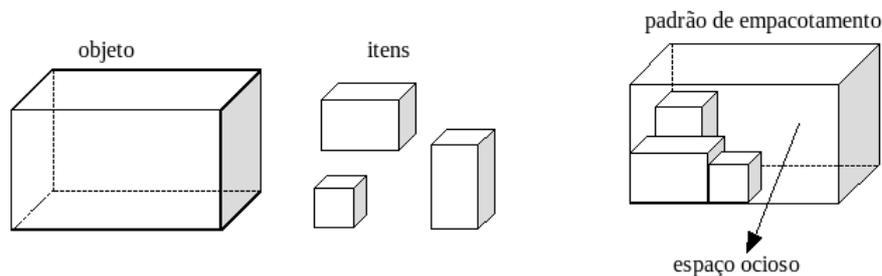


Figura 7 – Objeto (contêiner), itens (três caixas) e um exemplo de padrão de empacotamento.

- N-dimensional ($N > 3$), representado por (N).

O problema é N-dimensional quando são relevantes mais de três dimensões. Por exemplo, o investimento no mercado financeiro em vários períodos.

■ Tipo de alocação – seleção dos objetos e itens

Os itens a serem produzidos são combinados respeitando-se restrições associadas aos objetos. Itens e objetos podem ser selecionados de acordo com as seguintes possibilidades de combinação:

- Todos os objetos e uma seleção de itens, representado pela letra (B).

Neste caso, a quantidade de objetos existentes em estoque não é suficiente

para atender todos os itens demandados e, com isto, alguns itens não são selecionados. Exemplos: problema da mochila (MARTELLO; TOTH, 1990).

- Uma seleção de objetos e todos os itens, representado pela letra (V).

Neste caso a quantidade de objetos existentes em estoque é suficiente para atender todos os itens demandados e, assim alguns objetos não são selecionados. Exemplo: problema do corte de estoque unidimensional.

■ Sortimento dos objetos

Característica que relaciona o aspecto dos objetos:

- Um objeto, representado pela letra (O). Exemplo: problema da mochila (clássico)(MARTELLO; TOTH, 1990).
- Objetos com tamanhos idênticos, representado pela letra (I). Exemplo: problema do *bin- packing* (clássico);
- Objetos com tamanhos diferentes, representado pela letra (D). Exemplo: problema do *bin- packing* bidimensional.

■ Sortimento dos itens

Característica que relaciona o aspecto dos itens. Os itens podem ser classificados, quanto à característica, como:

- Poucos itens com tamanhos diferentes, representado pela letra (F). Exemplo: problema do carregamento de veículos;
- Muitos itens com muitos tamanhos diferentes, representado pela letra (M). Exemplo: problema de empacotamento (clássico);
- Muitos itens com poucos tamanhos diferentes, representado pela letra (R). Exemplo: problema de corte de estoque bidimensional;
- Tamanhos iguais, representado pela letra (C). Exemplo: problema do carregamento de palete.

Tabela 1 – Nomenclatura da tipologia de Dyckhoff (1990)

Dimensão (1) Unidimensional; (2) Bidimensional; (3) Tridimensional; (N) N-dimensional (N>3).	Sortimento dos Objetos (O) Apenas um objeto; (I) Objetos de mesmo tamanho; (D) Objetos de vários tamanhos.
Tipo de Alocação (B) Alguns itens são atribuídos a todos os objetos; (V) Todos os itens são atribuídos a alguns objetos.	Sortimento dos Itens (F) Poucos itens com diferentes tamanhos; (M) Muitos itens com muitos tamanhos diferentes; (R) Muitos itens com poucos tamanhos diferentes; . (C) Itens de tamanhos iguais.

Tabela 2 – Alguns problemas encontrados na literatura com as respectivas tipologias dadas por Dyckhoff (1990).

Problema	Tipo
Problema da mochila clássico	1/B/O/
Carregamento de paléte	2/B/O/C
Problema da mochila multidimensional	/B/O/C
Problema do <i>bin-packing</i> dual	1/B/O/M
Carregamento de veículos	1/V/I/F ou 1/V/I/M
Carregamento de contêiner	3/V/I/ ou 3/B/O/
Problema do <i>bin-packing</i> clássico	1/V/I/M
Problema de corte de estoque clássico	1/V/I/R
Problema do <i>bin-packing</i> bidimensional	2/V/D/M
Problema de corte de estoque bidimensional	2/V/I/R
Problema de corte de estoque geral	1/// ou 2/// ou 3///
Problema do balanceamento de uma linha de montagem	1/V/I/M
Problema de alocação de tarefas	1/V/I/M
Problema de alocação de memória	1/V/I/M
Problema da troca de moeda	1/B/O/R
Problema do investimento financeiro em vários períodos	N/B/O/

Com os critérios apresentados anteriormente, Dyckhoff (1990) classificou os diversos tipos de problemas de corte e empacotamento agrupando-os em classes, definidas por meio de uma quádrupla (**dimensionalidade/ tipo de alocação/ sortimento de objetos/ sortimento de itens**). Na tabela 1 apresentamos um resumo da nomenclatura sugerida por Dyckhoff (1990) e na tabela 2 são listados alguns problemas clássicos da literatura com as respectivas tipologias dadas por Dyckhoff (1990).

Mais recentemente, Wäscher *et al.* (2007) apresentaram modificações na

tipologia de Dyckhoff (1990), além disto, introduziram uma nova categoria que define problemas diferentes dos apresentados anteriormente. A nova tipologia é baseada nas idéias originais de Dyckhoff (1990), porém, é bem mais abrangente e precisa, permitindo que cada problema tenha uma única representação. A tipologia de Wäscher *et al.* (2007) baseia-se em cinco critérios para classificar os problemas de corte e empacotamento, vejamos os detalhes:

■ Dimensão

Tal como na tipologia de Dyckhoff (1990), Wäscher *et al.* (2007) consideram uma, duas e três dimensões relevantes e eventualmente mais de 3 dimensões.

■ Tipo de designação (ou de alocação)

Wäscher *et al.* (2007) referem aos problemas como, de maximização de saída (*output maximisation*) correspondente ao tipo "B" de Dyckhoff (1990) ou de minimização de entrada (*input minimisation*) correspondente ao tipo "V" de Dyckhoff (1990).

■ Sortimento dos itens

Com respeito ao sortimento de itens, há uma distinção em três casos:

- Itens idênticos. Esta categoria corresponde ao tipo "C" da classificação de sortimento dos itens de Dyckhoff.
- Sortimento fracamente heterogêneo. Neste caso os itens podem ser agrupados em classes de itens idênticos. A demanda de cada item é relativamente grande podendo ser limitada. Esta categoria corresponde ao tipo "R" de Dyckhoff.
- Sortimento fortemente heterogêneo. Este conjunto de itens se caracteriza pelo fato de que poucos itens são idênticos. Se isto ocorre, os itens são tratados como elementos individuais. Conseqüentemente, a demanda de cada item é igual a um. Esta categoria corresponde ao tipo "M" e "F" de Dyckhoff.

■ Sortimento dos objetos

Com respeito ao sortimento de objetos, temos:

- Um objeto. Neste caso o conjunto de objetos consiste de apenas um elemento, onde as dimensões do objeto podem ser fixas ou, uma ou mais dimensões serem variáveis. O primeiro caso é idêntico ao tipo "O" na

classificação de Dyckhoff enquanto que o segundo representa uma extensão do conjunto de tipos elementares de Dyckhoff.

- Vários objetos. São considerados apenas objetos de dimensões fixas. De modo análogo ao sortimento de itens, os objetos serão classificados como idênticos, fracamente e fortemente heterogêneos. Diferenciando-se da tipologia de Dyckhoff, que apenas classifica os problemas considerando objetos com tamanhos idênticos e com tamanhos diferentes.

■ Forma dos itens

No caso de problemas bidimensionais e tridimensionais, para a definição de problemas do tipo refinado (definido a seguir) precisaremos distinguir se os itens são regulares (itens convexos) ou irregulares.

Na tipologia proposta por Wäscher *et al.* (2007) os problemas de corte e empacotamento foram classificados em três tipos: básico, intermediário e refinado, descritos a seguir.

■ Problemas do tipo básico

São obtidos pela combinação dos critérios de sortimento de itens e tipo de designação. Em mais detalhes são caracterizados por:

- Maximização de saída - Estes problemas tem em comum o fato de que o estoque dos objetos é limitado, assim nem sempre é possível produzir todos os itens fornecidos. Devemos buscar a maximização dos itens produzidos. Os problemas de empacotamento de itens idênticos (*identical item packing problem*), de alocação (*placement problem*) e da mochila (*knapsack problem*) são considerados do tipo básico de maximização de saída.
- Minimização de entrada - estes problemas se caracterizam pelo fato de ter uma grande quantidade de objetos em estoque, sendo suficiente para produzir todos os itens. Assim, devemos buscar a minimização do número de objetos utilizados. Os problemas de dimensão aberta (*open dimension problem*), de corte de estoque (*cutting stock*) e *bin packing* são considerados do tipo básico de minimização de entrada.

■ Problemas do tipo intermediário

A fim de definir problemas mais homogêneos Wäscher *et al.* (2007) adicionam o critério de sortimento dos itens na classificação de problemas do tipo básico.

■ Problemas do tipo refinado

Considera além dos critérios da classificação dos problemas do tipo intermediário os critérios de dimensionalidade e da forma dos itens.

Na figura 8 são apresentados os tipos básicos de problemas de corte e empacotamento. Por fim, como o objetivo dessa dissertação é estudar uma variação do problema de corte de estoque denominada por Problema de Corte de Estoque Unidimensional com Reaproveitamento de Sobras, apresentamos, neste capítulo, as informações que julgamos necessárias para que no capítulo seguinte seja possível introduzirmos o problema e apresentarmos parte dos resultados de nossos estudos.

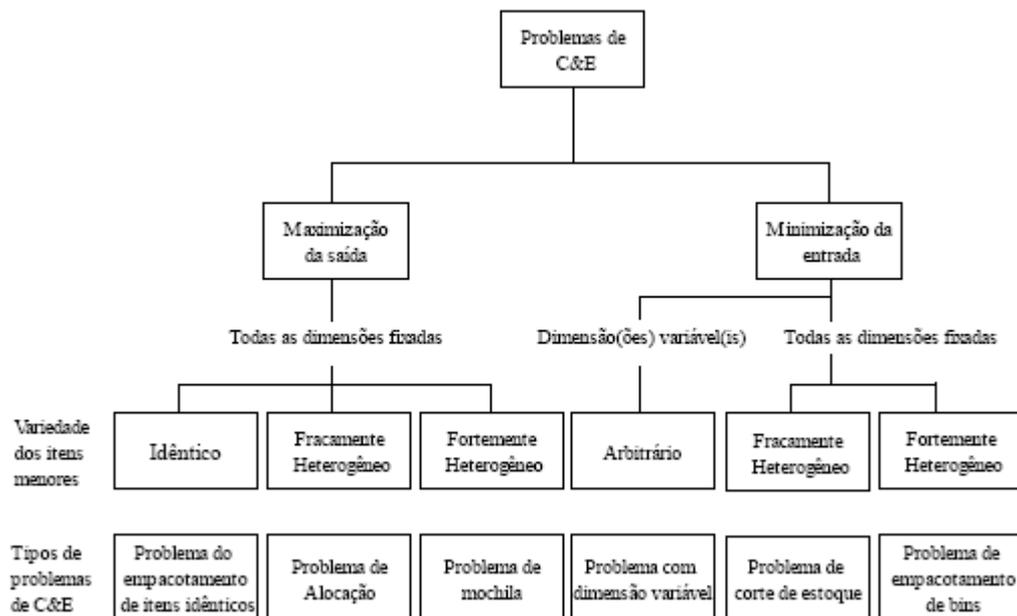


Figura 8 – Tipos de problema básicos proposto por Wäscher *et al.* (2007).

CAPÍTULO 2

O PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL COM REAPROVEITAMENTO DE SOBRAS

Neste capítulo descrevemos o problema de corte de estoque unidimensional em que as perdas geradas pelo processo de corte dos itens demandados, que apresentam comprimentos em condições de reuso, são aproveitadas para atender futuras demandas. Também apresentamos um histórico cronológico do problema.

2.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Já não é de hoje que as indústrias enfrentam o desafio de melhorar sua competitividade e, para isto, buscam produzir mais, com melhor qualidade e menor custo. Um dos fatores predominantes para a redução do custo de produção é o melhor aproveitamento da matéria-prima. Pequenas melhorias nos processos que envolvem o corte de matéria-prima podem levar a ganhos substanciais, dependendo da escala de produção e do custo da matéria-prima, e representar uma vantagem decisiva na competição com outras indústrias do setor.

Buscando uma melhor utilização da matéria-prima, muitas indústrias, ao invés de descartar as perdas ocorridas no processo de corte de objetos procuram reutilizá-las, desde que elas apresentem condições para isto. Neste contexto, perdas que podem ser reutilizadas serão denominadas “sobras” e as demais serão simplesmente denominadas de “perdas não-aproveitáveis”.

Desta forma, durante o processo de cortagem com reaproveitamento de sobras, deseja-se diminuir as perdas ao nível mínimo, gerando o mínimo de perdas não-aproveitáveis e o máximo de sobras e ainda, que estas sobras estejam distribuídas no menor número de objetos para que as mesmas não fiquem pulverizadas, pois, as indústrias preferem dispor de poucas sobras de dimensões grandes, ao invés de muitas sobras de dimensões pequenas.

Note que colocar as perdas não-aproveitáveis no seu patamar mínimo é

equivalente a elevar as sobras ao seu nível máximo, desde que, o compromisso de manter as perdas (sobras e perdas não- aproveitáveis) seja mantido no seu patamar mínimo, como é o caso do problema de corte de estoque unidimensional.

Definição 3: O Problema de Corte de Estoque Unidimensional com Reaproveitamento de Sobras (PCES) consiste em, dado um estoque composto por objetos de vários comprimentos, cuja disponibilidade é limitada, mas, suficiente para o atendimento de uma demanda de itens, encontre um conjunto de objetos que cortados para atender a demanda proporcione o menor nível de perdas, e ainda, que sobras sejam geradas no menor número possível dos objetos selecionados.

A definição de sobra varia de caso à caso e, em geral, depende de critérios adotados pela indústria onde se insere o problema. Alguns exemplos destes critérios são: o comprimento do menor item demandado, o comprimento do maior item demandado, a média dos comprimentos dos itens demandados, entre outros. Seja qual for o critério adotado, considere S_0 o comprimento mínimo que representa uma sobra.

Durante nossos estudos, um dos objetivos consistiu em descrever um modelo matemático para o PCES. Assim, seguindo os mesmos passos descritos para o PCER, idealizamos duas etapas.

A primeira, consiste na definição de todos os possíveis padrões de corte, com perdas não- aproveitáveis (nulas ou positivas) e com sobras, porém, destacando um conjunto do outro. Assim, para cada objeto de comprimento L_j ($j=1, \dots, J$), digamos que existam P_j^α padrões com perdas não- aproveitáveis e P_j^β padrões com sobras, de maneira que $\alpha_{ij} = (\alpha_{1ij}, \alpha_{2ij}, \dots, \alpha_{lij})^T$ representará um padrão com perda não-aproveitável se $T_{ij} = L_j - \sum_{i=1}^I l_i \alpha_{ij} < S_0$, α_{ij} é a quantidade de vezes que o item de comprimento l_i ($i=1, \dots, I$) aparece no padrão de índice $p=1, \dots, P_j^\alpha$, no objeto de comprimento L_j .

Analogamente, $\beta_{iq} = (\beta_{1iq}, \beta_{2iq}, \dots, \beta_{liq})^T$ representará um padrão com sobra se $S_{iq} = L_j - \sum_{i=1}^I l_i \beta_{iq} \geq S_0 > 0$, onde β_{iq} é a quantidade de vezes que o item de comprimento l_i ($i=1, \dots, I$) aparece no padrão de índice $q=1, \dots, P_j^\beta$, no objeto de comprimento L_j .

Na segunda etapa, introduzimos x_w^α que define o total de objetos de comprimento L_j que foram cortados, segundo o padrão de corte de índice $p=1, \dots, P_j^\alpha$,

produzindo perdas não-aproveitáveis. Também, consideramos x_{qj}^β que define o total de objetos de comprimento L_j que foram cortados, segundo o padrão de corte de índice $q=1, \dots, P_j^\beta$, produzindo sobras.

Por fim, seja e_j a quantidade disponível do objeto de comprimento L_j ($j=1, \dots, J$) e $\mathbf{d}=(d_1, \dots, d_J)^T$ o vetor de demandas dos itens, nestas condições o modelo para o PCES que conseguimos escrever consiste em:

$$\min \sum_{p=1}^{P_1^\alpha} T_{p1} x_{p1}^\alpha + \dots + \sum_{p=1}^{P_J^\alpha} T_{pJ} x_{pJ}^\alpha + \sum_{q=1}^{P_1^\beta} S_{q1} x_{q1}^\beta + \dots + \sum_{q=1}^{P_J^\beta} S_{qJ} x_{qJ}^\beta \quad (4.1)$$

$$\max \sum_{q=1}^{P_1^\beta} S_{q1} x_{q1}^\beta + \dots + \sum_{q=1}^{P_J^\beta} S_{qJ} x_{qJ}^\beta \quad (4.2)$$

$$\min \sum_{q=1}^{P_1^\beta} x_{q1}^\beta + \dots + \sum_{q=1}^{P_J^\beta} x_{qJ}^\beta \quad (4.3)$$

sujeito a:

$$\sum_{p=1}^{P_1^\alpha} \alpha_{p1} x_{p1}^\alpha + \dots + \sum_{p=1}^{P_J^\alpha} \alpha_{pJ} x_{pJ}^\alpha + \sum_{q=1}^{P_1^\beta} \beta_{q1} x_{q1}^\beta + \dots + \sum_{q=1}^{P_J^\beta} \beta_{qJ} x_{qJ}^\beta = \mathbf{d} \quad (4.4)$$

$$\sum_{p=1}^{P_1^\alpha} x_{p1}^\alpha + \sum_{q=1}^{P_1^\beta} x_{q1}^\beta \leq e_1 \quad (4.5)$$

$$\sum_{p=1}^{P_2^\alpha} x_{p2}^\alpha + \sum_{q=1}^{P_2^\beta} x_{q2}^\beta \leq e_2 \quad (4.6)$$

$$\dots$$

$$\sum_{p=1}^{P_J^\alpha} x_{pJ}^\alpha + \sum_{q=1}^{P_J^\beta} x_{qJ}^\beta \leq e_J \quad (4.7)$$

$$x_{pj}^\alpha, x_{qj}^\beta \geq 0 \text{ e inteiros, } p=1, \dots, P_j^\alpha, q=1, \dots, P_j^\beta, j=1, \dots, J \quad (4.8)$$

As diferenças entre os modelos do PCER e PCES é que neste último fomos forçados a distinguir dentre os padrões viáveis, aqueles que geram sobras, entretanto, quando iniciamos nossas primeiras simulações, decompondo o modelo 4 devido ao multicritério, percebemos que:

Propriedade 1: Uma solução ótima do PCES referente ao critério (4.1) também é solução ótima do PCER.

Prova: Com efeito, seja Ω^β o conjunto dos padrões que geram sobras para o PCES e, Ω^α o conjunto com os demais padrões viáveis. Obviamente $\Omega = \Omega^\alpha \cup \Omega^\beta$ é o conjunto de todos os padrões viáveis do PCES, bem como do PCER, além disto $\Omega^\alpha \cap \Omega^\beta = \emptyset$. Agora, considere uma solução ótima do PCES referente ao critério (4.1) $x^* = (x^{*\alpha}, x^{*\beta})$, onde $x^{*\alpha}$ está associado a padrões de Ω^α e, $x^{*\beta}$ está associado a padrões de Ω^β . Observe que x^* atende todas as restrições do PCER e minimiza seu objetivo, pois, do contrário o objetivo (4.1) do PCES não seria

mínimo.

Em virtude da observação feita no final da seção 1.1, temos por imediata consequência da propriedade 1 que uma solução ótima do PCES referente ao critério (4.1) também será ótima para o PCEC. Além do mais, a equivalência da propriedade 1 não pode ser efetivada, pois, nem todas as soluções do PCER geram sobras como ilustra a figura 9, onde *u.c.* significa unidade de comprimento.

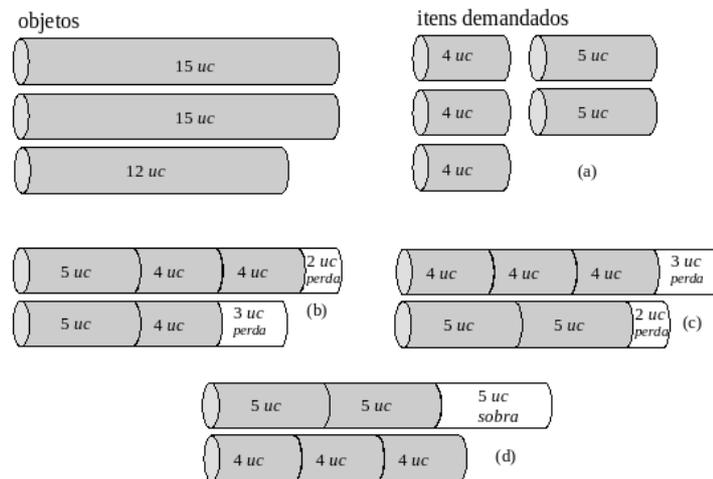


Figura 9 – (a) são os dados do problema, (b), (c) e (d) são soluções.

Quando iniciamos um protocolo com testes de vários exemplos, percebemos que em alguns deles não conseguimos efetuar reaproveitamento em decorrência do seguinte fato:

Propriedade 2: Se a soma das perdas da solução do PCER é inferior ao comprimento mínimo $S > 0$, que representa uma sobra, então, esta solução é ótima para o PCES.

Prova: De fato, a constatação é imediata, pois, se a soma das perdas de uma solução do PCER é inferior a S , então, não existe possibilidade de gerar sobras, mesmo que todas as perdas estejam concentradas num único padrão de corte.

A propriedade anterior é óbvia, porém, ela nos inspira a pensar que se for possível enunciar e demonstrar alguma propriedade que nos dê informações das perdas do PCER *a priori*, será bastante útil. Por exemplo, se for possível obtermos um bom limite superior para estas perdas, teremos informações sobre a perspectiva de sucesso na resolução do PCES. Também, se for possível sabermos que o PCER não admite solução antes de

resolvê-lo, saberemos que não vale a pena resolver o PCES, porém, informações desta natureza não são simples de serem obtidas. Ainda, se tivermos informações sobre as soluções alternativas do PCER, então, teremos boas informações iniciais para resolver o PCES.

Seja como for, as propriedades 1 e 2 tendem a indicar que consiste de uma boa tática modelar heurísticas baseadas na estratégia de obter o conjunto das soluções ótimas ou quase-ótimas do PCER e, em seguida, buscar neste conjunto soluções que maximizem as sobras, distribuindo-as no menor número de objetos.

2.2 HISTÓRICO CRONOLÓGICO

Até onde conseguimos averiguar, problemas de corte de estoque unidimensionais que permitem a reutilização de sobras foram discutidos por Scheithauer (1991), Sinuany-Stern e Weiner (1994), Gradisar *et al* (1997, 1999a, 1999b), Gradisar e Trkman (2005), Cherri (2006), Abuabara (2006), Abuabara e Morabito (2008), Cherri *et al.* (2008) e Koch *et al.* (2008). A seguir, apresentamos um breve histórico seguindo a ordem cronológica.

Com o objetivo de mostrar que se deve dar atenção à reutilização de matéria-prima, Scheithauer (1991), utilizando o modelo do corte de estoque unidimensional clássico, propôs investigar o manejo de sobras. No problema, itens de comprimentos l_i e demandas d_i , $i=1, \dots, I$ deveriam ser cortados de objetos com comprimento L_j , $j=1, \dots, J$, onde o número de objetos em estoque era suficiente para atender a demanda.

Para fazer o reaproveitamento de sobras, foi utilizada a estratégia de associar um custo c_j a cada objeto L_j , $j=1, \dots, J$ e criar sobras de comprimento s_q , $q=1, \dots, Q$, com um custo de produção w_q , $q=1, \dots, Q$, que poderiam ser produzidas no processo de corte quando fosse necessário. O objetivo do problema consiste em atender a demanda, minimizando o custo dos objetos utilizados menos o custo da produção de sobras.

Com a finalidade de descrever o modelo proposto por Scheithauer (1991), considere que o vetor $\mathbf{a}_{jP} = (a_{1jP}, \dots, a_{ijP}, a_{(j+1)jP}, \dots, a_{(j+Q)jP})^T$ representa o p -ésimo padrão de corte

no objeto de comprimento L_j , $j=1, \dots, J$, se $\sum_{i=1}^I l_i a_{ijP} + \sum_{q=1}^Q s_q a_{(j+q)jP} \leq L_j$.

Agora, suponha que para cada objeto L_j esteja definido P_j padrões de corte e considere a variável x_{pj} que determina o número de vezes que o padrão de corte a_{pj} é utilizado. Desta forma, a formulação matemática feita por Scheithauer (1991) é dada por:

$$\min \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} (c_j - \sum_{q=1}^Q w_q a_{(j+q)p}) x_{pj} \quad (5.1)$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} a_{pj} x_{pj} \geq d_i, \quad i=1, \dots, I \quad (5.2)$$

$$x_{pj} \geq 0 \text{ e inteiro, } p=1, \dots, P_j, \quad j=1, \dots, J \quad (5.3)$$

A função objetivo (5.1) minimiza o custo de utilizar os objetos em estoque menos o custo de produzir sobras durante o processo de corte. A restrição (5.2) garante que a quantidade de itens produzidos seja maior ou igual à demanda. Por fim, a restrição (5.3) garante que as repetições x_{pj} de cada padrão de corte seja um número inteiro e não-negativo.

O modelo 5 tem a mesma estrutura que o modelo tradicional de corte de estoque unidimensional, de forma que, podemos empregar Geração de Colunas. Assim, considere $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_I)$ o vetor multiplicador Simplex (DANTZIG, 1963), então, o sub-problema gerador de colunas, para cada objeto de comprimento $L_j (j=1, \dots, J)$, é dado por:

$$\min z_j = (c_j - \sum_{q=1}^Q w_q a_{(j+q)p}) - \sum_{i=1}^I \pi_i a_{ij} \quad (6.1)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^I l_i a_{ij} + \sum_{q=1}^Q s_q a_{(j+q)p} \leq L_j \quad (6.2)$$

$$a_{ij} \geq 0, \text{ e inteiro, } i=1, \dots, I+Q \quad (6.3)$$

Para concluir a idéia de Scheithauer (1991), deve-se escolher a coluna, ou o padrão de corte, no qual $z_j = \min [z_j | j=1, \dots, J]$. Feito isto, se $z_j \geq 0$, a corrente base fornece uma solução ótima do problema relaxado, caso contrário, a base é atualizada com a coluna gerada e o processo é reiniciado.

Sinuany-Stern e Weiner (1994) apresentaram um modelo matemático para um problema de corte de perfis metálicos em uma indústria metalúrgica, onde o responsável pelo processo de corte tem por objetivo o reaproveitamento de sobras. Os autores propõem uma heurística baseada em duas etapas, onde a primeira consiste na minimização da perda

total e a segunda na organização do corte, de modo que, a quantidade máxima de perdas fique acumulada num número mínimo de barras.

Para apresentarmos o modelo matemático proposto por Sinuany-Stern e Weiner (1994), considere L o comprimento das barras do estoque e sejam sobras de comprimentos L_k ($k=1, \dots, K$). Considere itens de comprimentos l_i e demandas d_i ($i=1, \dots, I$). As variáveis do problema serão o número de barras N e o número a_j de itens de comprimento l_i cortados de barras e sobras, onde $j=1, \dots, N, N+1, \dots, N+K$. Nestas condições, o modelo matemático que Sinuany-Stern e Weiner (1994) propõe é dado por:

$$\min NL - \sum_{i=1}^I l_i d_i \quad (7.1)$$

$$\max L - \sum_{i=1}^I l_i a_{iN} \quad (7.2)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^I l_i a_{ij} \leq L, \quad j=1, \dots, N \quad (7.3)$$

$$\sum_{i=1}^I l_i a_{i(N+k)} \leq L_k, \quad k=1, \dots, K \quad (7.4)$$

$$\sum_{j=1}^{N+K} a_j = d_i, \quad i=1, \dots, I \quad (7.5)$$

$$N > 0, a_j \geq 0 \text{ e inteiros} \quad (7.6)$$

O problema não pode ser resolvido diretamente nesta formulação, uma vez que o número de restrições do tipo (7.3) está em função de N , que é uma variável.

A primeira função objetivo (7.1) minimiza a perda total. Em seguida, dado o número mínimo de barras, a função objetivo (7.2), maximiza as perdas na última barra. As restrições (7.3) e (7.4) são restrições de mochila. A restrição (7.5) garante que a quantidade de itens produzidos seja exatamente igual à demanda. A restrição (7.6) garante que o número de barras utilizadas e o número de itens cortados sejam inteiros.

Segundo os autores, a otimalidade para o problema com os dois objetivos (7.1) e (7.2) é garantida, assumindo que o objetivo (7.1) é o principal. Iniciando com um limitante inferior para N , busca-se assegurar a otimalidade para o objetivo (7.1) e só então o objetivo (7.2) é almejado. Com este raciocínio, Sinuany-Stern e Weiner (1994) apresentaram um algoritmo iterativo para resolução do modelo 7 com os seguintes passos:

Passo 1: Determine o limitante inferior $N_0 = \left\lceil \frac{\sum_{i=1}^I l_i d_i - \sum_{k=1}^K L_k}{L} \right\rceil + 1$ para o número de barras e fixe

$$N = N_0.$$

Passo 2: Dado N , teste se existe uma solução para o objetivo (7.1) sujeito a (7.3)-(7.6).

Passo 3: Se a solução viável não existe, faça $N := N + 1$ e retorne ao Passo 2.

Passo 4: Se a solução viável existe, resolva o problema formado pelo objetivo objetivo (7.2) sujeito a (7.3)-(7.6).

Após maximizar as perdas na última barra, se as perdas nas demais barras ainda forem grandes (por exemplo, maior que o menor item demandado), então, os autores adotam o procedimento de utilizar a solução da última barra como uma restrição, substituem a barra de índice N , no objetivo (7.2), pela de índice $N - 1$ e repetem o Passo 4, tentando acumular perdas novamente. Os autores efetuaram simulações com alguns dados da indústria metalúrgica e, terminam relatando que a abordagem foi bem sucedida.

Gradisar *et al.* (1997) apresentaram um modelo matemático para um problema de corte de rolos de tecido. No problema, itens que se diferenciam uns dos outros em uma dimensão, a longitudinal, devem ser cortados unidimensionalmente dos rolos para, em pedaços menores, serem repassados para as costureiras responsáveis pela confecções das peças de roupa.

O objetivo consiste em minimizar as perdas resultantes do corte de rolos de tecido, cujos comprimentos são variados, de modo que, a geração de sobras durante o processo de cortagem é aceitável.

Neste estudo foi desenvolvido um procedimento heurístico, resultando no algoritmo aproximado denominado COLA. Durante a resolução, os autores consideram o problema da mochila com bicritério, um limitante para a perda (perdas com comprimentos superiores ao limitante estipulado são consideradas sobras e retornam ao estoque) e permitem que no máximo quatro tipos diferentes de itens sejam cortados de um mesmo rolo. Desta forma, o modelo apresentado em Gradisar *et al.* (1997) baseia-se na estratégia de acumular as perdas ao longo dos padrões de corte para gerar sobras.

A fim de compreendermos o modelo de Gradisar *et al.* (1997), considere:

Dados

L_j : comprimento da rolo de índice $j = 1, \dots, J$.

l_i : comprimento do item de índice $i = 1, \dots, I$.

d_i : demanda do item de índice $i = 1, \dots, I$.

S : comprimento mínimo aceito para sobra.

H : número máximo de tipos diferentes de itens cortados de um mesmo rolo.

Variáveis

a_y : número de itens de índice $i=1, \dots, I$ cortados do rolo de índice $j=1, \dots, J$.

T_j : perda no rolo de índice $j=1, \dots, J$.

δ_j : sobra ou perda do processo de corte no rolo de índice $j=1, \dots, J$.

Δ_i : quantidade de itens de índice $i=1, \dots, I$ não produzidos.

$h_y = \begin{cases} 1, & \text{e um item de índice } i=1, \dots, I \text{ é cortado de um rolo de índice } j=1, \dots, j \text{ e,} \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases}$

$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se o rolo de índice } j=1, \dots, J \text{ é usado e,} \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases}$

$u_j = \begin{cases} 1, & \text{se o rolo de índice } j=1, \dots, J \text{ produz uma sobra e,} \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases}$

Com respeito as perdas e as sobras, note que $T_j = \delta_j$ quando $y_j = 1$ e $\delta_j < S$, do contrário, isto é, quando $y_j = 0$ ou $\delta_j \geq S$, segue que $T_j = 0$. Além disto, se $y_j = 1$ e $\delta_j \geq S$, segue que $u_j = 1$ e, quando $y_j = 0$ ou $\delta_j < S$, então, $u_j = 0$. Nesta condições, a formulação matemática do problema é dada por:

$$\min \sum_{i=1}^I \Delta_i \quad (8.1)$$

$$\min \sum_{j=1}^J T_j \quad (8.2)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^I l_i a_y + \delta_j = L_j, \quad j=1, \dots, J \quad (8.3)$$

$$\sum_{j=1}^J a_y = d_i - \Delta_i, \quad i=1, \dots, I \quad (8.4)$$

$$\sum_{i=1}^I h_y \leq H, \quad j=1, \dots, J \quad (8.5)$$

$$\sum_{j=1}^J u_j \leq 1 \quad (8.6)$$

$$a_y \geq 0 \text{ e inteiro, } i=1, \dots, I, \quad j=1, \dots, J \quad (8.7)$$

$$\delta_j \geq 0, \quad j=1, \dots, J \quad (8.8)$$

$$\Delta_i \geq 0, \quad i=1, \dots, I \quad (8.9)$$

$$T_j \geq 0, \quad j=1, \dots, J \quad (8.10)$$

$$h_y \in \{0,1\}, \quad i=1, \dots, I, \quad j=1, \dots, J \quad (8.11)$$

$$u_j \in \{0,1\}, \quad j=1, \dots, J \quad (8.12)$$

$$y_j \in \{0,1\}, \quad j=1, \dots, J \quad (8.13)$$

A função objetivo (8.1) minimiza os itens não fabricados, em seguida, a função objetivo (8.2) minimiza a perda total. Essa perda apenas se refere aos comprimentos menores do que S , já que os maiores são sobras.

A restrição (8.3) é uma restrição física de mochila. A restrição (8.4) evita que a produção de um item seja maior que a sua demanda. A restrição (8.5) limita em H o número de tipos de itens diferentes cortados de um objeto, que é exigida no estudo de caso em questão.

Cabe destacar que existe um limite de sobras possíveis para serem geradas em cada execução do modelo (este controle é feito pela variável u_j na restrição 8.6), caso contrário, o modelo cortaria objetos novos, a fim de, gerar sobras novas e manter o processo de cortagem sem perda. Por fim, as restrições (8.7)-(8.13) definem as variáveis do problema.

Buscando aperfeiçoar o modelo 8, Gradisar *et al.* (1999a) apresentam uma modelagem matemática do problema que é baseada na disponibilidade de objetos em estoque, bem como na distribuição e relevância dos itens demandados. O algoritmo COLA é melhorado e desenvolvido em outra linguagem de programação, gerando o algoritmo denominado CUT que pôde ser aplicado em outras indústrias.

Gradisar *et al.* (1999b) com o objetivo de minimizar a perda de material, desenvolveram uma aproximação híbrida para o problema de corte de estoque unidimensional. A aproximação proposta, combina dois métodos: um baseado em programação linear orientado ao padrão, que é apoiado no texto de Gilmore e Gomory (1963), e um procedimento heurístico orientado ao item. A finalidade desta combinação consiste em explorar a habilidade de se cortar os itens exatamente na quantidade demandada e acumular a perda em um único objeto, assim esta sobra poderá ser utilizada futuramente.

O problema proposto para o desenvolvimento deste híbrido, considera a maior parte dos objetos com o mesmo comprimento, ou poucos objetos com tamanhos diferentes, que são as sobras dos pedidos anteriores.

Gradisar *et al.* (2005), analisando os métodos existentes para a solução de problemas de corte de estoque geral, propuseram a combinação de um método exato e um procedimento heurístico para o reaproveitamento de sobras. O método proposto pode ser utilizado em situações com excesso e falta de matéria prima, além de ser útil para problemas gerais de corte de estoque unidimensional, em que a principal característica é um estoque de objetos com comprimentos diferentes. Assim, a partir do algoritmo CUT foi proposto o C-CUT (*Combined Cutting*) que combina *branch-and-bound* e um procedimento heurístico. A idéia do C-CUT é encontrar uma solução temporária com o algoritmo CUT e, se ela não for

ótima (a solução é considerada ótima se for composta por padrões que não apresentam perdas nem sobras), tentar melhorá-la com por um *branch-and-bound*, resolvendo um sub-problema resultante, que é formado por padrões gerados pelo algoritmo CUT que não são desejáveis pela indústria por terem grandes perdas não-aproveitáveis ou muitas sobras. Por fim, os padrões não aceitos do algoritmo CUT são comparados com os padrões gerados pelo subproblema e, se estes forem melhores, são substituídos.

Abuabara (2006) buscou otimizar o planejamento do processo de corte unidimensional de tubos estruturais metálicos utilizados na fabricação de aeronaves leves por uma indústria aeronáutica. Após a revisão da literatura existente, o autor identificou que, devido as semelhanças existentes no processo industrial, o modelo proposto por Gradisar *et al.* (1997) poderia ser estendido para o problema descrito na indústria aeronáutica.

Assim, baseando-se no modelo apresentado por Gradisar *et al.* (1997), o autor desenvolveu dois modelos matemáticos para o problema, visando apoiar parte das principais decisões no processo do corte de tubos metálicos. Os modelos foram desenvolvidos com o objetivo de minimizar as perdas resultantes do processo de cortagem, onde a indústria aeronáutica aceitava a geração de sobras.

O primeiro modelo apresentado em Abuabara (2006) corresponde basicamente ao modelo de Gradisar *et al.* (1997) descrito como um modelo de programação linear inteira mista. A função objetivo apresentada nesse modelo é uma modificação na função objetivo do modelo de Gradisar *et al.* (1997).

O autor agrupou as duas funções objetivos do modelo de Gradisar *et al.* (1997) em uma única função objetivo, utilizando fatores de ponderação em cada termo que compõem a função. A restrição considerada no modelo de Gradisar *et al.* (1997) que limita o número de tipos de itens diferentes cortados de um mesmo objeto é descartada no modelo de Abuabara (2006), pois, na prática a indústria aeronáutica não apresenta tal restrição.

A fim de apresentarmos o primeiro modelo de Abuabara (2006), sejam:

Dados

L_j : comprimento da barra de índice $j=1, \dots, J$.

l_i : comprimento do item de índice $i=1, \dots, I$.

d_i : demanda do item de índice $i=1, \dots, I$.

S : comprimento mínimo aceito para sobra.

M : número maior ou igual ao $\max\{L_j | j=1, \dots, J\}$.

F_1 : fator de ponderação do primeiro termo da função objetivo.

F_2 : fator de ponderação do segundo termo da função objetivo.

$\xi=1$.

Variáveis

a_{ij} : número de itens de índice $i=1, \dots, I$ cortados do objeto de índice $j=1, \dots, J$.

T_j : perda no objeto de índice $j=1, \dots, J$.

δ_j : sobra ou perda do processo de corte no objeto de índice $j=1, \dots, J$.

$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se o objeto de índice } j=1, \dots, J \text{ é usado e,} \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases}$

$u_j = \begin{cases} 1, & \text{se o objeto de índice } j=1, \dots, J \text{ produz uma sobra e,} \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases}$

$z_j = \begin{cases} 1, & \text{se a perda no objeto de índice } j=1, \dots, J \text{ é maior ou igual a } S \text{ e,} \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases}$

$w_j = \begin{cases} 1, & \text{se a perda no objeto de índice } j=1, \dots, J \text{ é menor que } S \text{ e,} \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases}$

A formulação matemática para o problema é dada por:

$$\min F_1 \sum_{i=1}^I l_i \Delta_i + F_2 \sum_{j=1}^J T_j \quad (9.1)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^I l_i a_{ij} + \delta_j = L_j, \quad j=1, \dots, J \quad (9.2)$$

$$\sum_{j=1}^J a_{ij} = d_i - \Delta_i, \quad i=1, \dots, I \quad (9.3)$$

$$y_j \leq \sum_{i=1}^I a_{ij}, \quad j=1, \dots, J \quad (9.4)$$

$$\sum_{i=1}^I a_{ij} \leq M y_j, \quad j=1, \dots, J \quad (9.5)$$

$$(\delta_j - S) + \xi \leq M z_j, \quad j=1, \dots, J \quad (9.6)$$

$$(\delta_j - S) + \xi \geq M(z_j - 1), \quad j=1, \dots, J \quad (9.7)$$

$$-y_j + u_j \leq 0, \quad j=1, \dots, J \quad (9.8)$$

$$-z_j + u_j \leq 0, \quad j=1, \dots, J \quad (9.9)$$

$$y_j + z_j - u_j \leq 1, \quad j=1, \dots, J \quad (9.10)$$

$$\sum_{j=1}^J u_j \leq 1 \quad (9.11)$$

$$(\delta_j - S) \geq -M w_j, \quad j=1, \dots, J \quad (9.12)$$

$$(\delta_j - S) + \xi \leq M(1 - w_j), \quad j=1, \dots, J \quad (9.13)$$

$$T_j - M w_j \leq 0, \quad j=1, \dots, J \quad (9.14)$$

$$T_j - M y_j \leq 0, \quad j=1, \dots, J \quad (9.15)$$

$$-\delta_j + T_j \leq 0, \quad j=1, \dots, J \quad (9.16)$$

$$\delta_j - T_j + M w_j + M y_j \leq 2M, \quad j=1, \dots, J \quad (9.17)$$

$$a_{ij} \geq 0 \text{ e inteiro, } i=1, \dots, I, \quad j=1, \dots, J \quad (9.18)$$

$$T_j \geq 0, \quad j=1, \dots, J \quad (9.19)$$

$$\Delta_i \geq 0, \quad i=1, \dots, I \quad (9.20)$$

$$T_j \geq 0, \quad j=1, \dots, J \quad (9.21)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j=1, \dots, J \quad (9.22)$$

$$u_j \in \{0, 1\}, \quad j=1, \dots, J \quad (9.23)$$

$$z_j \in \{0, 1\}, \quad j=1, \dots, J \quad (9.24)$$

$$w_j \in \{0, 1\}, \quad j=1, \dots, J \quad (9.25)$$

O segundo modelo apresentado por Abuabara (2006) pode ser visto como uma simplificação do primeiro modelo, onde o autor procurou reescrever as restrições de maneira mais simples, com menos variáveis, equações e inequações. A justificativa do autor para tais simplificações é que elas poderiam oferecer ganhos no desempenho de execução do modelo.

Considerando o pressuposto que a indústria aeronáutica apresenta em estoque quantidades suficientes de matéria-prima (objetos) para a produção de todos os itens demandados, o autor reescreveu a função objetivo apresentada no modelo anterior, eliminado o primeiro termo, pois, toda a demanda pode ser cumprida.

A fim de apresentarmos o segundo modelo proposto por Abuabara (2006), sejam:

Dados

L_j : comprimento da objeto de índice $j=1, \dots, J$.

l_i : comprimento do item de índice $i=1, \dots, I$.

d_i : demanda do item de índice $i=1, \dots, I$.

S : comprimento mínimo aceito para sobra.

G : número maior ou igual a $(\max\{L_j; j=1, \dots, J\} - \min\{l_i; i=1, \dots, I\})$.

F_1 : fator de ponderação do primeiro termo da função objetivo.

F_2 : fator de ponderação do segundo termo da função objetivo.

Variáveis

a_{ij} : número de itens de índice $i=1, \dots, I$ cortados do objeto de índice $j=1, \dots, J$.

T_j : perda no objeto de índice $j=1, \dots, J$.

$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se o objeto de índice } j=1, \dots, J \text{ é usada e,} \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases}$

$u_j = \begin{cases} 1, & \text{se o objeto de índice } j=1, \dots, J \text{ produz uma sobra e,} \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases}$

A segunda formulação matemática feita por Abuabara (2006) para o problema é dada por:

$$\min F_1 \sum_{j=1}^J T_j + F_2 \left(\frac{\sum_{j=1}^J L_j y_j}{\sum_{j=1}^J L_j} \right) \quad (10.1)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^I a_y = d_i, \quad i=1, \dots, I \quad (10.2)$$

$$S u_j \leq L_j y_j - \sum_{i=1}^I l_i a_{iy}, \quad i=1, \dots, I \quad (10.3)$$

$$L_j y_j - \sum_{i=1}^I l_i a_{iy} \leq T_j + M u_j, \quad j=1, \dots, J \quad (10.4)$$

$$\sum_{j=1}^J u_j \leq 1 \quad (10.5)$$

$$a_{iy} \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad i=1, \dots, I, \quad j=1, \dots, J \quad (10.6)$$

$$T_j \geq 0, \quad j=1, \dots, J \quad (10.7)$$

$$u_j \in \{0,1\}, \quad j=1, \dots, J \quad (10.8)$$

$$y_j \in \{0,1\}, \quad j=1, \dots, J \quad (10.9)$$

Abuabara (2006) utilizou para resolução de seus modelos o *solver* CPLEX 7.0 com o ambiente de modelagem algébrica GAMS.

Cherri (2006) sugere encontrar a solução do problema de corte de estoque com reaproveitamento de sobras, utilizando combinações de heurísticas gulosas e residuais. Com as heurísticas propostas são utilizados objetivos como minimizar a perda total e minimizar o estoque de sobras. As análises das soluções heurísticas são realizadas com base na resolução de um conjunto de classes de exemplos geradas aleatoriamente, cujos resultados foram considerados satisfatórios. As heurísticas propostas por Cherri (2006) podem ser resumidas como:

- Heurística FFD Modificada: ela é baseada na desmontagem gradativa de um padrão, técnica semelhante tem sido usada em outras situações como a compartimentação de padrões (HOTO, 1996, 2001). Para o reaproveitamento de sobras, a técnica consiste em aplicar a heurística FFD para obter padrões de corte e após gerado cada padrão, a relação perda/sobra é analisada. Se a perda/sobra estiver dentro de limitantes aceitáveis (definidos previamente), o próximo padrão de corte é considerado, caso contrário, um item do padrão (o maior) é retirado. Assim, para a sobra gerada com a retirada do item é aplicado o problema da mochila, cuja capacidade é a perda no padrão adicionada ao tamanho do item retirado. Depois de resolvida a mochila, a perda/sobra gerada é

analisada e, se ainda não estiver dentro de limitantes aceitáveis, outro item do padrão (segundo maior) é retirado. Novamente para a sobra gerada é resolvido o problema da mochila. Este procedimento é repetido até que a perda/sobra esteja dentro dos limitantes definido como aceitáveis ou a demanda seja totalmente atendida.

- Heurística Gulosa Modificada: consiste em aplicar a heurística Gulosa para obter padrões de corte e após gerado cada padrão, a relação perda/sobra é analisada. Se a perda/sobra estiver dentro de limitantes aceitáveis (definidos previamente), o próximo padrão de corte é considerado, caso contrário, um item do padrão (o maior) é retirado e a perda/sobra novamente é analisada. Este processo é repetido até que se obtenha uma sobra dentro dos limitantes definido como aceitáveis.
- Heurística Residual FFD Modificada: consiste em aplicar a heurística residual de Poldi (2005) e no final, se ainda restar demanda residual, aplica-se a heurística FFD Modificada.
- Heurística Residual Gulosa Modificada: consiste em aplicar a heurística residual de Poldi (2005) e no final, se ainda restar demanda residual, aplica-se a heurística Gulosa Modificada.
- Heurística Nova Modificada: consiste em aplicar a heurística Nova de Poldi (2005) e após gerado todos os padrões de corte a relação perda/sobra em cada padrão é analisada. Se a perda/sobra estiver em limitantes aceitáveis (definidos previamente) o padrão de corte analisado é aceito, caso contrário, é rejeitado e em seguida desfeito. Após analisados todos os padrões, aplica-se a heurística FFD Modificada na demanda residual formada pelos padrões rejeitados.

Abuabara e Morabito (2008) apresentaram os resultados obtidos pelo o uso de dois modelos de programação linear inteira mista, buscando otimizar o planejamento do processo de corte unidimensional de tubos estruturais metálicos utilizados na fabricação de aeronaves leves agrícolas. As soluções dos modelos são comparadas com as soluções de uma heurística residual de arredondamento guloso encontrada em Cherri *et al.* (2008) e, também com as soluções utilizadas pela empresa. Segundo os autores, os resultados obtidos mostram que os modelos são úteis para apoiar as decisões envolvidas no planejamento deste processo de corte.

Em Cherri *et al.* (2008), são descritos os bons resultados obtidos por suas heurísticas, onde testes comparativos com exemplos de Abuabara (2006) também são apresentados.

Por fim, Koch *et al.* (2008) apresentam um estudo de caso de uma indústria de processamento da madeira, que produz vigas de madeira laminada para uso na construção civil. Em razão das inúmeras aplicações, a empresa produz diversos tipos de vigas, cuja qualidade varia segundo resistência, espessura, etc.

Uma vez fabricadas, estas vigas são armazenadas para serem posteriormente cortadas em comprimentos, segundo uma demanda determinada, de modo que a estratégia de geração de sobras para reutilização futura é desejável. Uma característica do processo de corte da indústria é que as demandas de um determinado comprimento normalmente são reduzidas (perto de uma unidade).

Devido à grande variabilidade de objetos e a demanda reduzida de itens, o estoque não é organizado segundo as diferenças dos objetos, que são estocados em compartimentos móveis. Estes compartimentos móveis tem que ser conduzidos do armazém para a área de corte, onde os itens demandados são obtidos pelo processo de cortagem. Posteriormente, eles são devolvidos ao armazém. Normalmente, o atendimento de uma demanda é feito a partir de vários compartimentos móveis.

Analisando os custos apresentados durante o processo de corte - custo dos materiais, custo de manejo dos e compartimentos móveis e custo de de estoque - como consequência do desenvolvimento do sistema de apoio à decisão, os autores concluíram que a entrada de material padrão e a criação de novas sobras deve ser controlável.

Assim, além do reaproveitamento de sobras, o problema requer uma análise de custo associado ao manejo de compartimentos móveis, então, no intuito de reduzir o custo do processo de cortagem e do manejo dos compartimentos móveis, os autores apresentam uma abordagem de solução baseada num modelo de programação linear.

Esta abordagem inclui dois componentes que devem ser fornecidos pelo planejador. Primeiramente, ele tem que especificar o comprimento máximo aceitável de perda para cada objeto, que dependerá do que ele espera ser o menor comprimento demandado num futuro próximo. Em seguida, ele deve determinar um limitante inferior e superior admissível sobre o comprimento de uma sobra.

A partir destas informações, um modelo de programação linear é resolvido várias vezes, tendo em vista a estratégia de que cada tipo de objeto, usado no atendimento da demanda, deve variar desde um máximo até um mínimo. Assim, para escrevermos o modelo

de Koch *et al.* (2008) considere $ONMAX_j$ o número máximo de objetos de índice $j=1, \dots, J$ que podem ser utilizados na solução e, sejam:

Dados

a_{ij} : é a quantidade de vezes que o item de comprimento l_i , $i=1, \dots, I$, aparece no padrão de índice $p=1, \dots, P_j$, no objeto de comprimento L_j , $j=1, \dots, J$.

c^{comp} : custo de manejo de um compartimento móvel.

c^{perda} : custo de perda por unidade de comprimento.

c^{sobra} : custo de sobra por unidade comprimento.

$c_{pj}^{retalho}$: custo dos retalhos gerados pelo padrão de corte de índice $p=1, \dots, P_j$, para o objeto de índice $j=1, \dots, J$, onde

$$c_{pj}^{retalho} = \begin{cases} c^{perda} (L_j - \sum_{i=1}^I a_{ij}), & \text{se o padrão de corte de índice } p \text{ gera uma perda,} \\ c^{sobra} (L_j - \sum_{i=1}^I a_{ij}), & \text{se o padrão de corte de índice } p \text{ gera uma sobra,} \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases}$$

d_i : demanda do item de índice $i=1, \dots, I$.

l_i : comprimento do item de índice $i=1, \dots, I$.

e_{jk} : quantidade disponível do objeto de comprimento L_j no compartimento móvel k , $k=1, \dots, K$.

Variáveis

x_{pj} : é o número de vezes que o padrão de corte de índice $p=1, \dots, P_j$ é aplicado no objeto de índice $j=1, \dots, J$.

$y_k = \begin{cases} 1, & \text{se pelo menos um objeto do compartimento móvel de índice } k=1, \dots, K \text{ foi usado,} \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases}$

Assim, o modelo apresentado em Koch *et al.* (2008) é dado por:

$$\min \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} c_{pj}^{retalho} x_{pj} + \sum_{k=1}^K c^{comp} y_k \quad (11.1)$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{P_j} a_{ij} x_{pj} = d_i, \quad i=1, \dots, I \quad (11.2)$$

$$\sum_{p=1}^{P_j} x_{pj} \leq \sum_{k \in K} e_{jk} y_k, \quad j=1, \dots, J \quad (11.3)$$

$$\sum_{p=1}^{P_j} x_{pj} \leq ONMAX_j, \quad j=1, \dots, J \quad (11.4)$$

$$x_{pj} \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad j=1, \dots, J, \quad p=1, \dots, P_j \quad (11.5)$$

$$y_k \in \{0, 1\}, \quad k=1, \dots, K \quad (11.6)$$

A função objetivo (11.1) apresenta os custos do problema. O primeiro termo inclui o custo da perda (comprimentos que não apresentam a possibilidade de reaproveitamento) ou sobra (comprimentos em condições de reuso). A restrição (11.2) garante que a quantidade de itens produzidos seja exatamente igual à demanda. Cada restrição de (11.3) pode ser caracterizada como uma restrição de fornecimento. Ela assegura que, para cada tipo de material somente o número disponível de peças é usado. Desta forma, se pelo menos um objeto tem de ser tomado a partir de um compartimento móvel de índice $k=1, \dots, K$ a variável correspondente y_k será igual a 1, logo, o respectivo custo de manejo será considerado no cálculo do valor da função objetivo. A restrição (11.4) limita o número de peças a serem utilizadas de cada tipo de material. De particular interesse é a restrição (11.4) para $j=1$, ou seja, para o objeto padrão em estoque. Sua finalidade é controlar a entrada de material padrão. Assim, $ONMAX_1$ tem de ser encarado como um parâmetro, que é inicializado por $ONMAX_1 = \sum_{k=1}^K s_{1k}$ em seguida, sucessivamente reduzido para zero. As restrições (11.5) e (11.6) definem as variáveis do problema.

Segundo o objeto de comprimento $L_j, j=1, \dots, J$, um padrão de corte representado por $\mathbf{a}_{ij} = (a_{1pj}, a_{2pj}, \dots, a_{ipj})^T, p=1, \dots, P_j$, é viável se satisfaz uma das seguintes condições:

- O objeto é completamente usado, isto é, $\sum_{i=1}^I l_i a_{ij} = L_j$
- O padrão de corte gera uma perda, isto é, $0 < L_j - \sum_{i=1}^I l_i a_{ij} \leq W_{max}$, onde W_{max} é o comprimento máximo aceito para uma perda.
- O padrão de corte gera uma sobra, isto é, $S_{min} \leq L_j - \sum_{i=1}^I l_i a_{ij} \leq S_{max}$, onde S_{min} é o comprimento mínimo aceito como sobra e, S_{max} o comprimento máximo.

Por fim, os autores confeccionaram um *software* em plataforma *Windows*, que ao iniciar um planejamento, as informações do problema são importadas de uma base de dados da indústria. Entre esses dados estão os comprimentos e as respectivas demandas exigidas pelos clientes, bem como o estoque necessário, juntamente com a identificação dos compartimentos móveis nos quais os objetos estão armazenados.

Os resultados da otimização são posteriormente apresentados ao planejador

e cabe a este selecionar um para ser executado. No intuito de apoiá-lo na sua decisão, as informações adicionais sobre os fatores de custos (soma de perdas, soma de novas sobras, número de compartimentos móveis que serão deslocados), e os correspondentes padrões de corte são apresentados pelo *software*.

Segundo os autores, do ponto de vista econômico, a experiência com o sistema de apoio à decisão foi muito satisfatória. Devido a um conjunto de dados que apareceu durante a fase de teste para o qual o modelo de otimização não pode ser gerado, visto que, ele continha muitos padrões de corte. Os autores pretendem desenvolver e implementar uma abordagem por geração de colunas.

Neste capítulo, nós definimos o Problema de Corte de Estoque Unidimensional, onde o a geração de sobras durante o processo de cortagem é desejada para reaproveitamento futuro. Nós confirmamos, ao revisar uma série de trabalhos da literatura, que o objetivo do problema consiste em diminuir as perdas ao seu nível mínimo, gerando sobras distribuídas no menor número de objetos. Neste sentido, provamos que uma solução ótima do Corte de Estoque Unidimensional com Reaproveitamento referente ao critério (4.1) também é solução ótima do Corte de Estoque Unidimensional Clássico.

Vimos ainda que, se a soma das perdas da solução do Corte de Estoque Unidimensional Clássico é inferior ao comprimento mínimo que representa uma sobra, então, não é possível efetuar reaproveitamento, a menos que mais objetos sejam cortados.

No próximo capítulo, nós iremos apresentar alguns modelos que desenvolvemos para efetuar reaproveitamento de sobras.

CAPÍTULO 3

PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL COM REAPROVEITAMENTO DE SOBRAS

No capítulo anterior, as propriedades 1 e 2 sugerem estratégias de obter o conjunto das soluções ótimas do PCER e, em seguida, buscar neste conjunto soluções que maximizem as sobras, distribuindo-as no menor número de objetos. Seguindo este princípio, proporemos neste capítulo três estratégias de resolução para o PCES que, numa primeira etapa encontra o menor comprimento que deve ser cortado de objetos para o atendimento de itens demandados e, numa segunda etapa, busca concentrar as perdas no menor número de objetos. Ainda, proporemos dois outros modelos, visando resolver o problema numa única etapa.

3.1 ESTRATÉGIAS EM DUAS ETAPAS

Estas estratégias desenvolvidas para resolver o PCES possuem objetivos diferentes que consistem basicamente do seguinte:

1º Etapa: Selecione os objetos que deverão ser cortados para atender os itens demandados, minimizando o comprimento total a ser cortado;

2º Etapa: Corte os objetos selecionados de maneira a gerar sobras, maximizando as perdas não- aproveitáveis num número reduzido de objetos.

Nas três estratégias que desenvolvemos, a primeira etapa é sempre a mesma e, ela é definida pelo seguinte modelo matemático:

$$\min \sum_{j=1}^J y_j L_j \quad (12.1)$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^J a_{ij} = d_i, \quad i=1, \dots, I \quad (12.2)$$

$$\sum_{i=1}^I l_i a_{ij} \leq L_j y_j, \quad j=1, \dots, J \quad (12.3)$$

$$a_{ij} \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad i=1, \dots, I, \quad j=1, \dots, J \quad (12.4)$$

$$y_j \in \{0,1\}, \quad j=1, \dots, J \quad (12.5)$$

Onde temos,

Dados

L_j : comprimento do objeto de índice $j=1, \dots, J$.

d_i : demanda do item de índice $i=1, \dots, I$.

l_i : comprimento do item de índice $i=1, \dots, I$.

Variáveis

a_{ij} : número de itens de índice $i=1, \dots, I$ cortados do objeto de índice $j=1, \dots, J$.

$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se o objeto de índice } j=1, \dots, J \text{ é usado e,} \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases}$

A função objetivo (12.1) minimiza o comprimento total utilizado para atender a demanda. A restrição (12.2) garante que a quantidade de itens produzidos seja igual à demanda. A restrição (12.3) funciona da seguinte forma: se o objeto de índice $j=1, \dots, J$ está sendo usado ($y_j=1$) a mesma equivale a uma restrição de mochila, por outro lado, se o objeto de índice $j=1, \dots, J$ não está sendo usado ($y_j=0$) a restrição obriga que $a_{ij}=0, i=1, \dots, I$. Por fim, as restrições (12.4)-(12.5) definem as variáveis do problema.

Nas seções seguintes definiremos os detalhes das estratégias propostas.

3.1.1 Estratégia 1

A fim de apresentarmos nossa primeira estratégia, basta definirmos qual será o modelo matemático utilizado na sua segunda etapa, para isso considere:

Dados

N : número de objetos escolhidos na primeira etapa.

L_j : comprimento do objeto de índice $j=1, \dots, N$ selecionados na primeira etapa.

d_i : demanda do item de índice $i=1, \dots, I$.

l_i : comprimento do item de índice $i=1, \dots, I$.

S : comprimento mínimo aceito para sobra.

Variáveis

a_j : número de itens de índice $i=1, \dots, I$ cortados do objeto de índice $j=1, \dots, N$.

$w_j = \begin{cases} 1, & \text{se o objeto de índice } j=1, \dots, N \text{ é escolhido para ter sobras,} \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases}$

Nestas condições, nosso modelo é dado por:

$$\min \sum_{j=1}^N (L_j - \sum_{i=1}^I l_i a_{ij}) \quad (13.1)$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^N w_j = R \quad (13.2)$$

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} = d_i, \quad i=1, \dots, I \quad (13.3)$$

$$L_j - \sum_{i=1}^I l_i a_{ij} \leq w_j L_j + (1-w_j)(S-1), \quad j=1, \dots, N \quad (13.4)$$

$$L_j - \sum_{i=1}^I l_i a_{ij} \geq w_j S, \quad j=1, \dots, N \quad (13.5)$$

$$a_{ij} \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad i=1, \dots, I, \quad j=1, \dots, N \quad (13.6)$$

$$w_j \in \{0, 1\}, \quad j=1, \dots, N \quad (13.7)$$

A função objetivo (13.1) minimiza as perdas e sobras do processo. A restrição (13.2) garante que o número de objetos utilizados para concentrar as perdas seja igual ao número R previamente fixado. As restrições (13.3) correspondem ao atendimento exato das demandas dos itens. As restrições (13.4) e (13.5) juntas, indicam para cada objeto, que o comprimento remanescente do corte dos itens, deve estar no intervalo $[S, L_j]$ quando $w_j=1$ (o objeto deve concentrar perdas), ou deve estar no intervalo $[0, S)$ quando $w_j=0$ (o objeto não deve concentrar perdas). Como as variáveis do problema são inteiras, na restrição (13.4) multiplicamos $(1-w_j)$ por $(S-1)$ para que o comprimento remanescente do corte dos itens esteja no intervalo $[0, S)$ quando $w_j=0$. Por fim, as restrições (13.6) e (13.7) definem as variáveis do problema.

3.1.2 Estratégia 2

Em virtude de não termos tido bons resultados com a estratégia 1, pelo fato do modelo 13 não distinguir com precisão perdas e sobras, apresentamos a estratégia 2, onde introduzimos $M \geq \max\{L_j | j=1, \dots, N\}$ e ainda consideramos:

Dado

R : número de objetos usados para concentrar perdas não-aproveitáveis.

Variáveis

T_j : perda não-aproveitável no objeto de índice $j=1, \dots, N$.

$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se o objeto de índice } j=1, \dots, N \text{ é usado e,} \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases}$

$w_j = \begin{cases} 1, & \text{se o objeto de índice } j=1, \dots, N \text{ é escolhido para ter sobras,} \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases}$

Assim, o novo modelo da segunda etapa nesta nova estratégia é dado por:

$$\min \sum_{j=1}^N T_j \quad (14.1)$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^N w_j = R \quad (14.2)$$

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} = d_i, \quad i=1, \dots, I \quad (14.3)$$

$$L_j - \sum_{i=1}^I l_i a_{ij} \leq L_j + (1-w_j)M, \quad j=1, \dots, N \quad (14.4)$$

$$L_j - \sum_{i=1}^I l_i a_{ij} \geq S - (1-w_j)M, \quad j=1, \dots, N \quad (14.5)$$

$$L_j - \sum_{i=1}^I l_i a_{ij} \leq T_j + w_j M, \quad j=1, \dots, N \quad (14.6)$$

$$L_j - \sum_{i=1}^I l_i a_{ij} \geq T_j - w_j M, \quad j=1, \dots, N \quad (14.7)$$

$$a_{ij} \geq 0 \text{ e inteiro, } i=1, \dots, I, \quad j=1, \dots, N \quad (14.8)$$

$$T_j \geq 0 \text{ e inteiro, } j=1, \dots, N \quad (14.9)$$

$$w_j \in [0,1], \quad j=1, \dots, N \quad (14.10)$$

A função objetivo (14.1) minimiza as perdas do processo. As restrições (14.2) e (14.3) são semelhantes às (13.2) e (13.3), respectivamente. As restrições (14.4) em

conjunto com as restrições (14.5), visam gerar sobras quando $w_j=1$ e ficam inativas quando $w_j=0$. As restrições (14.6) e (14.7) juntas, definem perdas quando $w_j=0$ e ficam inativas quando $w_j=1$. Por fim, as restrições (14.8)- (14.10) definem as variáveis do problema.

3.1.3 Estratégia 3

Nossa última estratégia de duas etapas, explora a idéia de concentrar as perdas, onde as restrições do modelo da segunda etapa é muito parecido com o da primeira, porém, a função objetivo é drasticamente alterada como apresentamos a seguir:

$$\max \sum_{j=N-(R-1)}^N (L_j - \sum_{i=1}^I l_i a_{ij}) \quad (15.1)$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} = d_i, \quad i=1, \dots, I \quad (15.2)$$

$$\sum_{i=1}^I l_i a_{ij} \leq L_j, \quad j=1, \dots, N \quad (15.3)$$

$$a_{ij} \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad i=1, \dots, I, \quad j=1, \dots, N \quad (15.4)$$

Note que o objetivo (15.1) maximiza as perda não-aproveitáveis nos objetos de índices $j=N-(R-1), \dots, N$. A restrição (15.2) garante que a quantidade de itens produzidos seja igual à demanda. A restrição (15.3) é uma restrição física de mochila e, restrição (15.4) define a variável do problema. Observe que ao fazermos $R=1$, optamos por concentrar as perdas no último objeto e, neste caso, efetuamos uma ordenação decrescente dos comprimentos dos objetos, isto é, $L_1 \leq \dots \leq L_N$. Nós optamos em ordenar os objetos em ordem decrescente para que o modelo priorize cortar os objetos de comprimentos menores que são possivelmente sobras de outros processos de corte realizados anteriormente.

3.2 ESTRATÉGIAS MONO-OBJETIVO

Nós propomos duas estratégias mono-objetivo para o PCES, cujas características são similares as de Abuabara (2006), porém, nós procuramos explorar as idéias contidas nos modelos 13 e 14.

3.2.1 Estratégia 4

Para definirmos o modelo matemático, nós utilizamos as mesmas nomenclaturas das estratégias 1, 2 e 3. Assim, o modelo da estratégia 4 consiste em:

$$\min \sum_{j=1}^J y_j L_j \quad (16.1)$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^J w_j = R \quad (16.2)$$

$$\sum_{j=1}^J a_{ij} = d_i, \quad i=1, \dots, I \quad (16.3)$$

$$y_j L_j - \sum_{i=1}^I l_i a_{ij} \leq w_j L_j + (1-w_j)(S-1), \quad j=1, \dots, J \quad (16.4)$$

$$y_j L_j - \sum_{i=1}^I l_i a_{ij} \geq w_j S, \quad j=1, \dots, J \quad (16.5)$$

$$a_{ij} \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad i=1, \dots, I, \quad j=1, \dots, J \quad (16.6)$$

$$y_j \in [0,1], \quad j=1, \dots, J \quad (16.7)$$

$$w_j \in [0,1], \quad j=1, \dots, J \quad (16.8)$$

A função objetivo (16.1) minimiza o comprimento total cortado para atender a demanda. A restrição (16.2) garante que o número de objetos que o modelo usa para acumular perdas não- aproveitáveis seja igual a R . A restrição (16.3) garante que a quantidade de itens produzidos seja igual à demanda. As restrições (16.4) e (16.5) são equivalentes às (13.4) e (13.5) e, juntas indicam para cada objeto selecionado ($y_j=1$), que o comprimento remanescente do corte dos itens, deve estar no intervalo $[S, L_j]$ quando $w_j=1$ (o objeto deve concentrar perdas), ou deve estar no intervalo $[0, S)$ quando $w_j=0$ (o objeto não deve concentrar perdas). Por fim, as restrições (16.6)-(16.8) definem as variáveis do problema.

3.2.2 Estratégia 5

A próxima estratégia consiste em explorar as condições do modelo 14. Assim, o modelo da estratégia 5 consiste em:

$$\min \sum_{j=1}^J (T_j + y_j L_j) \quad (17.1)$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^J w_j = R \quad (17.2)$$

$$\sum_{j=1}^J a_{ij} = d_i, \quad i=1, \dots, I \quad (17.3)$$

$$y_j L_j - \sum_{i=1}^I l_i a_{ij} \leq L_j + (1 - w_j) M, \quad j=1, \dots, J \quad (17.4)$$

$$y_j L_j - \sum_{i=1}^I l_i a_{ij} \geq S - (1 - w_j) M, \quad j=1, \dots, J \quad (17.5)$$

$$y_j L_j - \sum_{i=1}^I l_i a_{ij} \leq T_j + w_j M, \quad j=1, \dots, J \quad (17.6)$$

$$y_j L_j - \sum_{i=1}^I l_i a_{ij} \geq T_j - w_j M, \quad j=1, \dots, J \quad (17.7)$$

$$a_{ij} \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad i=1, \dots, I, \quad j=1, \dots, J \quad (17.8)$$

$$T_j \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad j=1, \dots, J \quad (17.9)$$

$$y_j \in [0, 1], \quad j=1, \dots, J \quad (17.10)$$

$$w_j \in [0, 1], \quad j=1, \dots, J \quad (17.11)$$

A função objetivo (17.1) minimiza a perda não-aveitável e o comprimento total cortado para atender a demanda. A restrição (17.2) define o número de barras onde serão acumuladas as perdas não-aveitáveis e a restrição (17.3) garante que a quantidade de itens produzidos seja igual à demanda. Para cada objeto selecionado ($y_j=1$), as restrições (17.4) em conjunto com as restrições (17.5), visam gerar sobras quando $w_j=1$ e ficam inativas quando $w_j=0$, agindo de forma similar às restrições (14.4) e (14.5). Do mesmo modo que as restrições (14.6) e (14.7), as restrições (17.6) e (17.7) juntas, definem perdas quando $w_j=0$ e ficam inativas quando $w_j=1$. Por fim, as restrições (17.8)-(17.11) definem as variáveis do problema.

No próximo capítulo apresentamos as simulações que efetuamos com as propostas que apresentamos neste capítulo, comparando os resultados com as propostas de Sinuany-Stern e Weiner (1994), Abuabara (2006) e Cherri (2006).

CAPÍTULO 4

SIMULAÇÕES

Neste capítulo apresentamos os resultados computacionais obtidos com a implementação das estratégias propostas no capítulo 3 e comparamos estes resultados com outras abordagens propostas na literatura.

4.1 RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Para comparar os resultados obtidos pelas estratégias propostas no capítulo 3, optamos por selecionar sete exemplos obtidos de uma carteira da indústria de aeronaves que gerou o trabalho de Abuabara (2006). Por fim, analisamos um exemplo extraído de Sinuany-Stern e Weiner (1994).

Além de implementarmos as cinco estratégias apresentadas no capítulo 3, também implementamos o algoritmo iterativo proposto por Sinuany-Stern e Weiner (1994) e o modelo simplificado de Abuabara (2006), ambos descritos no capítulo 2. Quanto às heurísticas de Cherri (2006), os exemplos que selecionamos foram gentilmente executados por ela, a quem registramos nossos sinceros agradecimentos. As heurísticas propostas por Cherri (2006) que utilizamos para comparar os resultados são: Heurística FFD Modificada, Heurística Gulosa Modificada, Heurística Residual *FFD* Modificada, Heurística Residual Gulosa Modificada e Heurística Nova Modificada (versões 1, 2 e 3). Ressaltamos que, devido a um erro nos códigos implementados por Cherri (2006), as heurísticas da autora falharam ao obter as soluções de alguns de nossos exemplos. Desta forma, o termo “O código falhou” é utilizado nas tabelas quando não temos a solução do exemplo devido ao erro apresentado no código.

Todas as implementações foram realizadas no *software* Xpress-MP (versão 2008a1), no qual trabalhamos com a linguagem de modelagem Mosel (XPRESS-MOSEL USER GUIDE, 2008). Os testes foram realizados em um computador *Intel Core 2 duo de 3 GHz e 4 GB de Ram*.

Nas tabelas deste capítulo, quando nos referirmos às perdas não-aproveitáveis apenas escreveremos perdas. Ainda, vamos nos referir ao algoritmo iterativo de Sinuany-Stern e Weiner (1994) apenas por Sinuany-Weiner e ao modelo simplificado de Abuabara (2006), o modelo 10 apresentado no capítulo 2, apenas por Abuabara. O termo “solução inviável” é utilizado nas tabelas para indicar que uma solução foi obtida na simulação, mas, a mesma não satisfaz alguma das restrições exigidas pelo modelo matemático.

Primeiramente, definimos cada exemplo para, em seguida, apresentarmos suas soluções, utilizando todas as abordagens citadas acima. Vejamos:

Exemplo 1: Temos um estoque formado por 3 tipos de objetos, cujos dados estão na Tabela 3. O comprimento de cada item e sua respectiva demanda estão na Tabela 4.

Tabela 3 – Dados da do Exemplo 1 – Estoque

Tipo de Objeto	Comprimento (u.c.)	Estoque
1	3000	3
2	3500	3
3	6000	3

Tabela 4 – Dados do Exemplo 1 – Itens.

Tipo de Item	Comprimento (u.c.)	Demanda
1	80	20
2	30	10
3	50	10
4	70	5
5	10	20
6	12	20
7	14	20
8	15	40
9	20	10
10	28	10
11	30	35
12	31	20
13	32	10
14	33	20
15	35	15
16	36	5
17	39	10
18	40	5
19	43	20
20	65	5
21	75	5
22	90	25
23	100	5

Neste exemplo, o limite inferior para sobra é 10 u.c., assim, qualquer comprimento remanescente do objeto que não corresponda a um item demandado e que possua comprimento superior a 10 u.c.. é considerado sobra.

As soluções do exemplo 1 obtidas pelas estratégias propostas no capítulo 3 e as abordagens da literatura selecionadas por nós estão na tabela 5.

Tabela 5 – Solução do Exemplo 1.

	Nº de objetos com perdas	Nº de objetos com sobras	Nº de objetos com aproveitamento total	Nº de objetos cortados	Comprimento total cortado (u.c.)	Perda total (u.c.)	Sobra total (u.c.)
Estratégia 1	2	2	0	4	13000	6	189
Estratégia 2	0	1	3	4	13000	0	195
Estratégia 3	0	1	3	4	13000	0	195
Estratégia 4	1	2	0	3	13000	2	193
Estratégia 5	0	1	2	3	13000	0	195
Sinuany-Weiner	0	1	4	5	16000	0	3195
Abuabara	0	1	3	4	13000	0	195
FFD Mod	2	1	2	5	16000	5	3190
Gulosa Mod	0	1	4	5	16000	0	3195
FFD Res Mod	O código falhou						
Gulosa Res Mod	O código falhou						
Nova Mod 1	O código falhou						
Nova Mod 2	O código falhou						
Nova Mod 3	O código falhou						

Pela tabela 5, podemos observar que as soluções obtidas pelas estratégias 5 é a que menos corta objetos, além disso essa solução não produz perda não-aproveitável. Os resultados obtidos pelas estratégias 2 e 3 são iguais aos obtidos pelo modelo simplificado de Abuabara (2006). Quanto as soluções das heurísticas propostas por Cherri (2006) temos apenas duas e observamos que apesar de não gerarem perdas não-aproveitáveis o comprimento total cortado (16.000 u.c..) é superior ao que nossas estratégias utilizam. Neste exemplo o algoritmo iterativo proposto por Sinuany-Stern e Weiner (1994) não gera perda, mas, assim como as heurísticas de Cherri (2006) o comprimento total cortado (16.000 u.c..), portanto, superior ao apresentado pelas estratégias 2 e 3. A utilização da estratégia 1 não obteve grandes resultados, sendo ele o pior entre as abordagens que forneceram solução.

Tendo em vista que, na prática as indústrias privilegiam manter as perdas não-aproveitáveis no seu patamar mínimo (que é equivalente a minimizar o comprimento total

cortado, conforme a observação do final da seção 1.1), gerando o máximo de sobras que estejam distribuídas no menor número de objetos, podemos afirmar que no exemplo 1 as estratégias 2, 3 e 5, bem como Abuabara, conseguiram êxito.

Por outro lado, merecem destaques os resultados da heurística Gulosa Mod e Sinuany-Weiner, que apesar de cortarem 3.000 u.c. a mais, aglutinam a perda de 195 u.c. com 3.000 u.c. de um objeto, gerando uma sobra de 3.195 u.c. em contra-ponto à sobra de 195 u.c. gerada pelas estratégias 2, 3 e 5, bem como Abuabara.

Exemplo 2: Temos um estoque formado por 3 tipos de objetos cujos dados estão na Tabela 6. O comprimento de cada item e sua respectiva demanda estão na Tabela 7.

Tabela 6 – Dados da do Exemplo 2 – Estoque

Tipo de Objeto	Comprimento (u.c.)	Estoque
1	3000	3
2	3500	3
3	6000	3

Tabela 7 – Dados do Exemplo 2 – Itens.

Tipo de Item	Comprimento (u.c.)	Demanda
1	250	8
2	273	2
3	285	8
4	120	2
5	148	2
6	210	4
7	110	4
8	115	4
9	120	6
10	140	2
11	150	8
12	160	14
13	170	2
14	180	4
15	190	4
16	205	2
17	230	2
18	235	4
19	260	2

Neste exemplo, o limite inferior para sobra é 110 u.c., assim, qualquer comprimento remanescente do objeto que não corresponda a um item demandado e que possua comprimento superior a 110 u.c. é considerado sobra.

As soluções do exemplo 2 obtidas pelas estratégias propostas no capítulo 3 e as abordagens da literatura selecionadas por nós estão na tabela 8.

Tabela 8 – Solução do Exemplo 2.

	Nº de objetos com perdas	Nº de objetos com sobras	Nº de objetos com aproveitamento total	Nº de objetos cortados	Comprimento total cortado (u.c.)	Perda total (u.c.)	Sobra total (u.c.)
Estratégia 1	2	1	1	4	16000	108	200
Estratégia 2	0	1	3	4	16000	0	308
Estratégia 3	0	1	3	4	16000	0	308
Estratégia 4	4	1	0	5	16000	134	174
Estratégia 5	0	1	3	4	16000	0	308
Sinuany-Weiner	0	1	4	5	16000	0	308
Abuabara	0	1	3	4	16000	0	308
FFD Mod	1	1	3	5	16000	4	304
Gulosa Mod	O código falhou						
FFD Res Mod	O código falhou						
Gulosa Res Mod	O código falhou						
Nova Mod 1	O código falhou						
Nova Mod 2	O código falhou						
Nova Mod 3	O código falhou						

Pela tabela 8, podemos observar que todas abordagens cortam o mesmo comprimento total. Nossas estratégias 2, 3 e 5 forneceram a mesma solução dada por Abuabara, já Sinuany-Weiner corta objetos diferentes, porém, produz o mesmo tipo de sobra. Quanto as soluções das heurísticas propostas por Cherri (2006) temos apenas uma, cujo resultado não supera os obtidos pelas demais abordagens, pois, uma pequena perda é produzida.

Exemplo 3: Temos um estoque formado por 3 tipos de objetos cujos dados estão na tabela 9. O comprimento de cada item e sua respectiva demanda estão na tabela 10.

Tabela 9 – Dados da do Exemplo 3 - Estoque.

Tipo de Objeto	Comprimento (u.c.)	Estoque
1	3000	3
2	3500	4
3	6000	3

Tabela 10 – Dados do Exemplo 3 – Itens.

Tipo de Item	Comprimento (u.c.)	Demanda
1	315	2
2	320	2
3	350	6
4	310	2
5	360	4
6	370	1
7	380	1
8	400	2

Neste exemplo, o limite inferior para sobra é 310 u.c., assim, qualquer comprimento remanescente do objeto que não corresponda a um item demandado e que possua comprimento superior a 310 u.c. é considerado sobra.

As soluções do exemplo 3 obtidas pelas estratégias propostas no capítulo 3 e as abordagens da literatura selecionadas por nós estão na tabela 11.

Tabela 11 – Solução do Exemplo 3.

	Nº de objetos com perdas	Nº de objetos com sobras	Nº de objetos com aproveitamento total	Nº de objetos cortados	Comprimento total cortado (u.c.)	Perda total (u.c.)	Sobra total (u.c.)
Estratégia 1	Solução inviável						
Estratégia 2	Solução inviável						
Estratégia 3	1	0	1	2	7000	20	0
Estratégia 4	1	1	0	2	9000	200	1820
Estratégia 5	0	1	1	2	9000	0	2020
Sinuany-Weiner	1	1	1	3	9000	10	2010
Abuabara	0	1	1	2	9000	0	2020
FFD Mod	0	2	1	3	10000	0	3020
Gulosa Mod	0	2	1	3	9500	0	2520
FFD Res Mod	0	2	1	3	10000	0	3020
Gulosa Res Mod	0	2	1	3	9500	0	2520
Nova Mod 1	0	1	1	2	9000	0	2020
Nova Mod 2	0	1	1	2	9000	0	2020
Nova Mod 3	0	1	1	2	9000	0	2020

Pela tabela 11, observamos que nossa estratégia 3 foi a abordagem que cortou o menor comprimento total, mas, forneceu uma perda de 20 u.c. e não forneceu sobra. A estratégia 5, Abuabara e Novas Mod 1, 2 e 3 cortaram um comprimento total de 9.000 u.c.,

gerando uma sobra de 2.020 u.c. e, cortando 2 objetos. Neste mesmo patamar está Sinuany-Weiner, porém, ela gera perda. Já as heurísticas Gulosa Mod e Gulosa Res Mod, cortaram um comprimento total de 9.500 u.c., gerando uma sobra de 2.520 u.c. e, cortando 3 objetos. Por fim, as heurísticas FFD Mod e FFD Res Mod cortaram um comprimento total de 10.000 u.c., gerando uma sobra de 3.020 u.c. e, cortando 3 objetos.

Talvez, do ponto de vista prático, os bons resultados sejam os da estratégia 5, Abuabara e Novas Mod 1, 2 e 3, pois, estas estratégias aglutinam a perda de 20 u.c. para gerar uma sobra de 2.020 u.c. e manipula apenas 2 objetos em contra-ponto às heurísticas FFD Mod e FFD Res Mod.

Exemplo 4: Temos um estoque formado por 3 tipos de objetos cujos dados estão na tabela 12. O comprimento de cada item e sua respectiva demanda estão na tabela 13.

Tabela 12 – Dados da do Exemplo 4 – Estoque

Tipo de Objeto	Comprimento (u.c.)	Estoque
1	3000	2
2	3500	2
3	6000	1

Tabela 13 – Dados do Exemplo 4 – Itens.

Tipo de Item	Comprimento (u.c.)	Demanda
1	485	2
2	490	4
3	495	3
4	500	4
5	402	2
6	415	1
7	420	1
8	460	2
9	470	4

Neste exemplo, o limite inferior para sobra é 402 u.c., assim, qualquer comprimento remanescente do objeto que não corresponda a um item demandado e que possua comprimento superior a 402 u.c. é considerado sobra.

As soluções do exemplo 4 obtidas pelas estratégias propostas no capítulo 3 e as abordagens da literatura selecionadas por nós estão na tabela 14.

Tabela 14 – Solução do Exemplo 4.

	Nº de objetos com perdas	Nº de objetos com sobras	Nº de objetos com aproveitamento total	Nº de objetos cortados	Comprimento total cortado (u.c.)	Perda total (u.c.)	Sobra total (u.c.)
Estratégia 1	2	1	0	3	12000	461	685
Estratégia 2	2	1	0	3	12000	11	1135
Estratégia 3	2	1	0	3	12000	70	1076
Estratégia 4	2	1	0	3	12000	526	620
Estratégia 5	2	1	0	3	12000	11	1135
Sinuany-Weiner	3	1	0	4	13000	71	2075
Abuabara	2	1	0	3	12000	11	1135
FFD Mod	1	2	0	3	12000	6	1140
Gulosa Mod	2	2	0	4	13000	11	2135
FFD Res Mod	1	2	0	3	12000	6	1140
Gulosa Res Mod	2	2	0	4	13000	11	2135
Nova Mod 1	2	2	0	4	13000	16	2130
Nova Mod 2	2	1	0	3	12000	18	1128
Nova Mod 3	2	2	0	4	13000	16	2130

Pela tabela 14, observamos que o menor comprimento total cortado é igual a 12000 u.c., segundo as estratégias 2 e 5, bem como Abuabara, gerando 11 u.c. de perda 1.135 u.c. de sobra. As demais heurísticas não apresentaram um bom comportamento, pois, elas geram perdas superiores ou distribuem a sobra em mais de um objeto.

Exemplo 5: Temos um estoque formado por 3 tipos de objetos cujos dados estão na tabela 15. O comprimento de cada item e sua respectiva demanda estão na tabela 16.

Tabela 15 – Dados do Exemplo 5 - Estoque.

Tipo de Objeto	Comprimento (u.c.)	Estoque
1	3000	2
2	3500	2
3	6000	3

Tabela 16 – Dados do Exemplo 5 – Itens.

Tipo de Item	Comprimento (u.c.)	Demanda
1	525	4
2	505	2
3	530	4
4	535	2
5	550	4
6	556	4
7	570	8

Neste exemplo, o limite inferior para sobra é 505 u.c., assim, qualquer comprimento remanescente do objeto que não corresponda a um item demandado e que possua comprimento superior a 505 u.c. é considerado sobra.

As soluções do exemplo 5 obtidas pelas estratégias propostas no capítulo 3 e as abordagens da literatura selecionadas por nós estão na tabela 17.

Tabela 17 – Solução do Exemplo 5.

	Nº de objetos com perdas	Nº de objetos com sobras	Nº de objetos com aproveitamento total	Nº de objetos cortados	Comprimento total cortado (u.c.)	Perda total (u.c.)	Sobra total (u.c.)
Estratégia 1	Solução inviável						
Estratégia 2	Solução inviável						
Estratégia 3	2	0	1	3	15500	216	0
Estratégia 4	2	1	0	3	18000	511	2205
Estratégia 5	0	1	2	3	18000	0	2716
Sinuany-Weiner	3	2	0	5	19000	845	2871
Abuabara	0	1	2	3	18000	0	2716
FFD Mod	1	2	1	4	18500	1	3215
Gulosa Mod	0	2	2	4	18500	0	3216
FFD Res Mod	1	2	1	4	18500	1	3215
Gulosa Res Mod	0	2	2	4	18500	0	3216
Nova Mod 1	1	2	1	4	18500	1	3215
Nova Mod 2	1	2	1	4	18500	1	3215
Nova Mod 3	1	2	1	4	18500	1	3215

Pela tabela 17, observamos que a estratégia 3 foi a abordagem que cortou o menor comprimento total, mas, forneceu uma perda de 216 u.c. e nenhuma sobra. Para este exemplo, Abuabara e a estratégia 5 forneceram uma solução em que a demanda é atendida com o corte de 18.000 u.c., gerando uma sobra de 2.716 u.c. e nenhuma perda. Já as demais estratégias geram perdas ou sobras distribuídas em mais de um objeto.

Exemplo 6: Temos um estoque formado por 3 tipos de objetos cujos dados estão na tabela 18. O comprimento de cada item e sua respectiva demanda estão na tabela 19.

Tabela 18 – Dados do Exemplo 6 - Estoque.

Tipo de Objeto	Comprimento (u.c.)	Estoque
1	3000	1
2	3500	4
3	6000	1

Tabela 19 – Dados do Exemplo 6 – Itens.

Tipo de Objeto	Comprimento (u.c.)	Demanda
1	100	1
2	110	2
3	115	2
4	140	1
5	150	4
6	160	9
7	170	1
8	180	2
9	190	2
10	205	1
11	230	1
12	235	2
13	250	3
14	260	1
15	285	4
16	310	2
17	350	4
18	360	4
19	370	1
20	380	1
21	400	2
22	402	2
23	415	1
24	420	1
25	460	2
26	470	4
27	475	1
28	480	1
29	485	2
30	120	1
31	148	1
32	210	2
33	315	2
34	320	2
35	490	2
36	495	1
37	500	2
38	273	1

Neste exemplo, o limite inferior para sobra é 100 u.c., assim, qualquer comprimento remanescente do objeto que não corresponda a um item demandado e que possua comprimento superior a 100 u.c. é considerado sobra.

As soluções do exemplo 6 obtidas pelas estratégias propostas no capítulo 3 e

as abordagens da literatura selecionadas por nós estão na tabela 20. Nela, podemos observar que todas as abordagens cortam o mesmo comprimento total e que não obtivemos soluções para cinco heurísticas propostas por Cherri (2006).

Para este exemplo a melhor solução é aquela em que a demanda é atendida com o corte de 23.000 u.c., gerando uma sobra de 225 u.c. e nenhuma perda. As abordagens que forneceram esta solução foram as estratégias 2, 3 e 5, Sinuany-Weiner, Abuabara e a heurística Gulosa Mod. Todas as demais abordagens geraram perdas superiores e sobras inferiores.

Tabela 20 – Solução do Exemplo 6.

	Nº de objetos com perdas	Nº de objetos com sobras	Nº de objetos com aproveitamento total	Nº de objetos cortados	Comprimento total cortado (u.c.)	Perda total (u.c.)	Sobra total (u.c.)
Estratégia 1	4	1	1	6	23000	88	137
Estratégia 2	0	1	5	6	23000	0	225
Estratégia 3	0	1	5	6	23000	0	225
Estratégia 4	5	1	0	6	23000	86	139
Estratégia 5	0	1	5	6	23000	0	225
Sinuany-Weiner	0	1	5	6	23000	0	225
Abuabara	0	1	5	6	23000	0	225
FFD Mod	1	1	4	6	23000	5	220
Gulosa Mod	0	1	5	6	23000	0	225
FFD Res Mod	O código falhou						
Gulosa Res Mod	O código falhou						
Nova Mod 1	O código falhou						
Nova Mod 2	O código falhou						
Nova Mod 3	O código falhou						

Exemplo 7: Temos um estoque formado por 3 tipos de objetos cujos dados estão na tabela 21. O comprimento de cada item e sua respectiva demanda estão na tabela 22.

Tabela 21 – Dados do Exemplo 7 - Estoque.

Tipo de Objeto	Comprimento (u.c.)	Estoque
1	1125	3
2	5423	3
3	7562	3

Tabela 22 – Dados do Exemplo 7 – Itens.

Tipo de Item	Comprimento (u.c.)	Demanda
1	254	39
2	186	15
3	123	21
4	97	18

Neste exemplo, o limite inferior para sobra é 150 u.c., assim, qualquer comprimento remanescente do objeto que não corresponda a um item demandado e que possua comprimento superior a 150 u.c. é considerado sobra.

As soluções do exemplo 7 obtidas pelas estratégias propostas no capítulo 3 e as abordagens da literatura selecionadas por nós estão na tabela 23.

Tabela 23 – Solução do Exemplo 7.

	Nº de objetos com perdas	Nº de objetos com sobras	Nº de objetos com aproveitamento total	Nº de objetos cortados	Comprimento total cortado (u.c.)	Perda total (u.c.)	Sobra total (u.c.)
Estratégia 1	3	1	0	4	17374	145	204
Estratégia 2	2	1	1	4	17374	2	347
Estratégia 3	2	1	1	4	17374	2	347
Estratégia 4	3	1	0	4	17374	148	201
Estratégia 5	2	1	1	4	17374	2	347
Sinuany-Weiner	3	1	2	6	19644	3	2616
Abuabara	0	1	2	3	18408	0	1383
FFD Mod	4	1	1	6	21783	14	4744
Gulosa Mod	3	1	2	6	19644	4	2615
FFD Res Mod	4	1	1	6	21783	14	4744
Gulosa Res Mod	3	1	2	6	19644	4	2615
Nova Mod 1	1	3	1	5	18499	1	1473
Nova Mod 2	0	3	2	5	18499	0	1474
Nova Mod 3	1	3	1	5	18499	1	1473

Pela tabela 23, podemos observar que as estratégias 1 e 4 forneceram perdas altas em suas soluções. As estratégias 2, 4 e 5 apresentam perda de 2 u.c. e sobra de 347 u.c. concentrada em um único objeto, cortando o comprimento total igual a 17.374 u.c. para o atendimento da demanda. Abuabara apresenta uma solução, cortando 18.408 u.c. sem perda alguma e com sobra de 1.383 u.c. concentrada num único objeto. As demais heurísticas produzem perdas superiores ou pulverizam suas sobras em mais de um objeto.

Exemplo 8: Este exemplo foi extraído de Sinuany-Stern e Weiner (1994). Temos um estoque formado por 2 tipos de objetos cujos dados estão na tabela 24. O comprimento de cada item e sua respectiva demanda estão na tabela 25.

Tabela 24 – Dados do Exemplo 8 - Estoque.

Tipo de Objeto	Comprimento (u.c.)	Estoque
1	234	9
2	600	2

Tabela 25 – Dados do Exemplo 8 – Itens.

Tipo de Item	Comprimento (u.c.)	Demanda
1	123	15
2	103	6
3	30	6
4	17	6

Neste exemplo, o limite inferior para sobra é 17 u.c., assim, qualquer comprimento remanescente do objeto que não corresponda a um item demandado e que possua comprimento superior a 17 u.c. é considerado sobra. As soluções do exemplo 8 obtidas pelas estratégias propostas no capítulo 3 e as abordagens da literatura selecionadas por nós estão na tabela 26.

Tabela 26 – Solução do Exemplo 8.

	Nº de objetos com perdas	Nº de objetos com sobras	Nº de objetos com aproveitamento total	Nº de objetos cortados	Comprimento total cortado (u.c.)	Perda total (u.c.)	Sobra total (u.c.)
Estratégia 1	8	1	0	9	2838	59	34
Estratégia 2	6	1	2	9	2838	42	51
Estratégia 3	6	1	2	9	2838	45	48
Estratégia 4	8	1	0	9	2838	72	21
Estratégia 5	7	1	1	9	2838	42	51
Sinuany-Weiner	7	4	0	11	3306	57	504
Abuabara	6	1	2	9	2838	42	51
FFD Mod	Solução inviável						
Gulosa Mod	Solução inviável						
FFD Res Mod	8	1	0	9	2838	53	40
Gulosa Res Mod	8	1	0	9	2838	53	40
Nova Mod 1	Solução inviável						
Nova Mod 2	Solução inviável						
Nova Mod 3	Solução inviável						

Pela tabela 26, podemos observar que o algoritmo de Sinuany-Weiner gera a maior sobra total dada por 504 u.c., mas, distribuída em 4 objetos, cortando 3.306 u.c. para atender a demanda. As heurísticas FFD Mod, Gulosa Mod, Novas Mod 1, 2, 3 não apresentaram solução viável para o exemplo. Considerando o corte do menor comprimento e a obtenção de perda mínima, combinada com sobra máxima distribuída em poucos objetos, vemos que as demais abordagens apresentam soluções razoáveis para o exemplo 7, com destaque para Abuabara e as estratégias 2 e 5.

Neste capítulo apresentamos os resultados de simulações que efetuamos com as cinco estratégias apresentadas no capítulo 3, com o algoritmo iterativo de Sinuany-Stern e Weiner (1994), com o modelo simplificado de Abuabara (2006) e com as heurísticas de Cherri (2006): Heurística FFD Modificada, Heurística Gulosa Modificada, Heurística Residual *FFD* Modificada, Heurística Residual Gulosa Modificada e Heurística Nova Modificada (versões 1, 2 e 3).

Os resultados obtidos, embora para apenas 8 exemplos, confirmam que é frutífera a estratégia de selecionar objetos para o atendimento de itens demandados e, posteriormente, concentrar as perdas no menor número destes objetos, segundo indicam as propriedades 1 e 2.

Há, entretanto, um componente a ser pensado, que surge quando aceitamos cortar mais do que o PCER permite, buscando aglutinar a perda e o comprimento excedente num número reduzido de objetos. De fato, com uma simples adaptação na estratégia 3 para permitir o corte de um comprimento total acima do indicado pelo PCER, obtivemos um corte total de 9.000 u.c. com 2.020 u.c. de sobra para o exemplo 3 e, um corte total de 18.000 u.c. com sobra de 2.716 u.c. para o exemplo 5, em ambos as perdas foram nulas.

Esta conduta torna-se óbvia quando a perda do PCER é inferior ao comprimento mínimo que define uma sobra. Desta forma, o modelo 4 que apresentamos para do PCES, no capítulo 2, precisa ser reformulado para permitir, se for necessário, o corte de objetos excedentes. Por outro lado, esta conduta deve ter o compromisso de combinar o comprimento extra com as perdas para a produção de sobras, que não estejam pulverizadas dentre os objetos selecionados.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

Nesta dissertação efetuamos um estudo do Problema de Corte de Estoque Unidimensional com Reaproveitamento de Sobras (PCES), tratando-se de um problema não muito recente, porém, pouco explorado na literatura. Ele pode ser visto como derivado do clássico Problema de Corte de Estoque Unidimensional, onde o estoque é restrito, porém, suficiente para o atendimento da demanda.

Também, fizemos um breve relato dos aspectos gerais de um problema de corte e empacotamento, culminando na descrição da tipologia atualmente empregada para classificar os inúmeros casos em categorias.

Na seqüência, efetuamos uma revisão que julgamos ser razoavelmente completa para o momento, tendo em vista a escassez de trabalhos que tratam do assunto. Ao ler estes trabalhos, percebemos que, em geral, parte significativa das decisões é deixada para o planejador, o que pode ser benéfico, mas, também danoso para a empresa. Com base nisto, sugerimos uma definição para o PCES que acreditamos ser abrangente, buscando não ferir as peculiaridades de cada estudo-de-caso e, ao mesmo tempo, precisar como é o problema.

Neste sentido, identificamos que é razoável criar heurísticas que explorem, numa primeira etapa, a seleção de objetos que devem ser cortados para atender os itens demandados e, numa segunda etapa, ela deve cortar estes objetos de maneira que sobras sejam geradas e distribuídas no menor número de objetos. Com base nisto, sugerimos três estratégias que são centradas em minimizar o comprimento total a ser cortado e, em seguida:

1. a primeira minimiza as perdas, visando a geração de sobras;
2. a segunda minimiza as perdas, na forma de uma variável, visando novamente a geração de sobras;
3. a terceira maximiza as perdas não-aproveitáveis num número reduzido de objetos.

Nós também sugerimos duas outras estratégias que tentam combinar objetivos da primeira e da segunda etapa no intuito de gerar sobras.

Durante as simulações que efetuamos nos deparamos com uma situação peculiar que, em síntese, consiste em permitir um corte excedente para o atendimento da

demanda, desta forma, minimizar o comprimento total a ser cortado não é a melhor tática para selecionar os objetos na primeira etapa. De fato, ao selecionar os objetos já é necessário visar a geração de sobras, ficando para a segunda etapa a obtenção dos padrões de corte que melhor correspondem a isto.

Assim, um desdobramento imediato deste trabalho trata-se de explorar uma reformulação do modelo 4, onde os objetos selecionados permitam aglutinar um eventual comprimento excedente com as perdas, gerando sobras distribuídas no menor número destes objetos.

Esta reformulação é importante e pretendemos iniciá-la o mais rápido possível, pois, a partir dela propriedades matemáticas do problema podem ser realçadas mais facilmente.

Uma abordagem por geração de colunas talvez seja algo a ser dedicado tempo, neste contexto, uma idéia que surgiu consiste em considerar um novo problema em que as demandas são variáveis a serem determinadas. Este problema apareceu em nossos estudos quando percebemos que, modificando a demanda dos itens o número de objetos pode diminuir, naturalmente o número de objetos cresce proporcionalmente ao aumento, em igual escala, de todas as demandas.

Numa rápida brincadeira, considere o exemplo em que objetos de largura 13 serão usados para cortar itens de comprimentos 3, 4 e 5. Na tabela 27 são apresentados os totais de objetos necessários para cortar as respectivas demandas.

Tabela 27 – Número de objetos para demandas diferentes.

<i>l</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>
3	100	100	210	210	400	400
4	210	400	400	100	100	210
5	400	210	100	400	210	100
objetos	253	227	214	234	204	196

Num simples exemplo podemos observar que o objetivo (minimizar objetos) depende da demanda. Por outro lado, se a primeira coluna representar a realidade de um problema na prática, o reflexo poderia ser o de recomendar novas condutas aos clientes ou, armazenar itens cortados para encomendas futuras, conduta muito comum em algumas empresas.

Desta forma, o Problema com Demandas a Determinar que acabamos de ilustrar poderia ser usado para cortar itens a serem estocados (as sobras produzidas pelo

PCES).

Por fim, o emprego de métodos multi-critérios também consiste de matéria a ser dada atenção, uma vez que, é cristalino tratar-se o PCES de um problema multi-objetivo.

REFERÊNCIAS

ALEM, D. J. J. **O problema de corte de estoque com demanda estocástica.** Dissertação de mestrado em Ciências da Computação e Matemática Aplicada, Instituto de Ciências e Matemática Computacional, EESC/USP, (2006).

ABUABARA, A., **Otimização no corte de tubos estruturais: aplicação na indústria aeronáutica agrícola.** Dissertação de mestrado em Engenharia de Produção, Departamento de Engenharia de Produção, UFSCAR, (2006).

ABUABARA, A., MORABITO, R., **Modelos de programação inteira mista para o planejamento do corte unidimensional de tubos metálicos na indústria aeronáutica agrícola.** Gest. Prod., São Carlos, v.15, n. 3, p. 605-617, (2008)

BAUM, S., TROTTER, L.E. Jr., **Finite checkability for integer rounding properties in combinatorial programming problems.** *Mathematical Programming*, 22, 141-147, (1982).

CHERRI A.C., **O problema de corte de estoque com reaproveitamento das sobras de material.** Dissertação de mestrado em Ciências da Computação e Matemática Aplicada, Instituto de Ciências e Matemática Computacional, EESC/USP, (2006).

CHERRI, A.C., ARENALES, M.N., **Heurísticas para o problema de corte de estoque unidimensional com reaproveitamento das sobras de material.** In: XXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2005, São Paulo. Anais do Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, (2005).

CHERRI, A.C., ARENALES, M.N., YANASSE, H.H., **The one-dimensional cutting stock problem with usable leftover - A heuristic approach.** *European Journal of Operational Research*, (2008) – *to appear*.

CINTRA, G.F. **Algoritmos híbridos para problemas de corte unidimensional.** Dissertação de Mestrado, USP, São Paulo, (1998).

COOK, S. A., **The complexity of theorem-proving procedures.** In STOC '71: Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing, New York, NY, USA, ACM Press, pp. 151-158, (1971).

DANTZIG, G.B., WOLFE, P., **Decomposition principle for linear programs.** *Operations Research*, 101-111, (1959).

DANTZIG G.B., **Linear Programming and Extensions**. Princeton University Press, N.J., USA, (1963).

DASH OPTIMIZATION, **Xpress-Mosel User Guide**. (2008).

DYCKHOFF, H., **A typology of cutting and packing problems**. European Journal Operational Research, 44: 145-159, (1990).

DYCKHOFF, H., FINKE, U. **Cutting and Packing in Production and Distribution: Typology and Bibliography**. Springer-Verlag Co, Heidelberg, (1992).

GILMORE, P.C., GOMORY, R.E., **A linear programming approach to the cutting stock problem**. Operations Research, 9: 848-859, (1961).

GILMORE, P.C., GOMORY, R.E., **A linear programming approach to the cutting stock problem - Part II**. Operations Research, 11: 863-888, (1963).

GRADISAR, M., JESENKO, J., RESINOVIC, C., **Optimization of roll cutting in clothing industry**. Computers & Operational Research, 10: 945-953, (1997).

GRADISAR, M., KLJAJIC, M., RESINOVIC, C., JESENKO, J., **A sequential heuristic procedure for one-dimensional cutting**. European Journal of Operational Research, 114: 557-568, (1999a).

GRADISAR, M., RESINOVIC, C., KLJAJIC, M., **A hybrid approach for optimization of one-dimensional cutting**. European Journal of Operational Research, 119: 719-728, (1999b).

GRADISAR, M., TRKMAN, P., **A combined approach to the solution to the general one-dimensional cutting stock problem**. Computers & Operations Research, 32: 1793- 1807, (2005).

KANTORIVICH, L.V., **Mathematical methods of organizing and planning production (traduzido de um trabalho em russo datado de 1939)**. Management Science 6, 366-422, (1960).

KARP, R., **Reducibility among combinatorial problems**. In Complexity of Computer Computations, R. Miller and J. Thatcher, Eds. Plenum Press, New York, (1972).

KOCH S., KÖNIG S., WÄSCHER G., **Linear programming for a cutting Problem in the wood processing industry – a case study**. FEMM Working Paper N° 14, julho (2008).

KRICHAGINA, E. V., RUBIO, R., TAKSAR, M. L, WEIN, L. M., **A dynamic stochastic stock cutting problem**. Operations Research. 46(5): 690-701 (1998).

HAESSLER, R. W., **Controlling cutting pattern changes in one-dimensional trim loss problems**. Operations Research, 23: 483-493, (1975).

HINXMAN, A., **The trim-loss and assortment problems: a survey**. European Journal of Operational Research, 5: 8-18, (1980).

HOTO, R. S. V., **Otimização no corte de peças unidimensionais com restrições de agrupamento**. Dissertação de Mestrado, ICMSC-USP, São Carlos, S.P., Brasil, (1996).

HOTO, R. S. V., **O problema da mochila compartimentada aplicado no corte de bobinas de aço**. Tese de Doutorado, COPPE - UFRJ, Rio de Janeiro, R.J., Brasil, (2001).

MARQUES, F.P. **O problema da mochila compartimentada e aplicações**. Tese de doutoramento, ICMC, Universidade de São Paulo, São Carlos.(2004).

MARCOTTE, O., **The cutting-stock problem and integer rounding**. Mathematical Programming. 33, 82-92,(1985).

MARCOTTE, O., **An instance of the cutting-stock problem for which the rounding property does not hold**. Operations Research Letters, 4(5), 239-243, (1986).

MARTELLO, S., TOTH, P., **Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations**. John Wiley & Sons, (1990).

POLDI, K. C, ARENALES, M. N., **Sobre uma heurística de redução de padrões de corte para o problema de corte de estoque**. Artigo submetido à revista Tema e apresentado no XXV CNMAC - Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Nova Friburgo - RJ, (2002).

POLDI, K. C., **Algumas Extensões do Problema de Corte de Estoque**. Dissertação de mestrado em Ciências da Computação e Matemática Aplicada, Instituto de Ciências e Matemática Computacional, EESC/USP, (2003).

POLDI, K. C., ARENALES, M. N., **Dealing with small demand in integer cutting stock problems with limited different stock lengths.** Notas do ICMC - Série Computação, número 85, ICMC - USP, (2005).

SCHEITHAUER, G., **A note on handling residual lengths.** Optimization, 22:3,461 - 466, (1991).

SCHEITHAUER, G., TERNO, J., **The modified Integer Round-up Property of the One-dimensional Cutting Stock Problem.** European Journal of Operational Research, 84: 562-571 (1995).

SINUANY-STERN Z., WEINER I., **The one dimensional cutting stock problem using two objectives.** J. Oper. Res. Soc. (UK), 45,2, 231 - 6 (1994).

STADTLER, H., **A one-dimensional cutting stock problem in the Aluminium Industry and its solution.** European Journal of Operational Research, 44: 209-223, (1990).

VANCE, P. H., **Branch and price algorithms for the one-dimensional cutting stock problem.** Computational Optimization and Applications, (1998).

VANCE, P. H., BARNHART, C., JOHNSON, E. L., NEMHAUSER, G. L., **Solving binary cutting stock problems by column generation and branch and bound.** Comput. Optim. Appl. 3, 2 , 111-130. (1994),

WÄSCHER, G., GAU, T., **Heuristics for the integer one-dimensional cutting stock problem: a computational study.** OR Spektrum, 18: 131-144, (1996).

WÄSCHER, G., HAUSSNER H., SCHUMANN H., **An improved typology of cutting and packing problems.** European Journal of Operational Research, (2007).