Universidade Estadual de Londrina
Departamento de Matemática
Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada e Computacional
Processo de Seleção – 2º Semestre de 2023

BANCO DE QUESTÕES - ÁLGEBRA LINEAR

1. Assinale **V** para Verdadeiro e **F** para falso as afirmações a seguir. Justifique sua resposta provando com argumentos matemáticos para **V**, ou exibindo um contraexemplo quando a resposta for **F**.

   (a) Sejam A e B matrizes de ordem $n \times n$, se A é semelhante a B, então A^n é semelhante a B^n.

   (b) Dadas A e B matrizes de ordem $n \times n$, se A^n é semelhante a B^n, então A é semelhante a B.

   (c) A é semelhante a B e C é semelhante a D, então $A + C$ é semelhante a $B + D$.

   (d) Dadas A e B matrizes de ordem $n \times n$, se A é semelhante a B, então o traço de A é igual ao traço de B.

   (e) $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ é semelhante a $B = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, em que $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$.

   (f) $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ é semelhante a $B = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

2. Um produtor que utiliza 40 hectares de sua propriedade para a produção de trigo e 60 hectares para a produção de aveia decidiu adotar a rotação de culturas. O ciclo de ambas as culturas é de 3 meses. Assim, a cada trimestre 30% das terras utilizadas para a produção de aveia serão utilizadas para a produção de trigo e 40% das terras utilizadas para a produção de trigo serão utilizadas para a produção de aveia.

   (a) Mostre que o problema pode ser modelado como um sistema dinâmico linear $\mathbf{x}_n = A\mathbf{x}_{n-1}$ e que $\mathbf{x}_n = A^n\mathbf{x}_0$.

   (b) Utilizando diagonalização de matrizes, determine quantos hectares serão utilizados para a plantação de trigo e quantos hectares serão utilizados para a plantação de aveia após 8 trimestres.

3. Seja $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ o conjunto de polinômios de graus arbitrários. Mostre que p e $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, polinômios quaisquer de graus diferentes, são linearmente independentes.

4. Considere o espaço vetorial $M_n(\mathbb{R})$ das matrizes de ordem n. Uma matriz $A = [a_{ij}]$ é dita simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i e j, e antissimétrica se $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo i e j.

   (a) Mostre que o conjunto das matrizes simétricas (S_n) e antissimétricas (A_n) de ordem n são subespaços vetoriais de $M_n(\mathbb{R})$.

   (b) Mostre que $S_n \oplus A_n = M_n(\mathbb{R})$.

5. Assinale **V** para Verdadeiro e **F** para falso as afirmações a seguir. Justifique sua resposta provando com argumentos matemáticos para **V**, ou exibindo um contraexemplo quando a resposta for **F**.

   (a) Dadas A e B matrizes de ordem $n \times n$, então $A \cdot B = B \cdot A$

   (b) Dadas A e B matrizes de ordem $n \times n$, se $A \cdot B = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$.

   (c) Se $A = B \cdot C$, onde A, B, C são matrizes $n \times n$, então $\det A = (\det B)(\det C)$.
   (Lembrando que $\det A$ representa o determinante de A)

   (d) Se A é uma matriz $n \times n$ inversível, com inversa A^{-1}, então $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

6. Considere o espaço vetorial da funções reais $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e os seguintes subconjuntos $U = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}); f \text{ é par}\}$ e $W = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}); f \text{ é impar}\}$.

   (a) Verifique que U e W são subespaços vetoriais de V.

(b) Verifique que $V = U \oplus W$, ou seja, $V = U + W$ e $U \cap W = \{0\}$.

7. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$T(x, y) = (3x + y, y)$$

   (a) Determine os autovalores de T e os autovetores correspondentes.

   (b) Determine uma base do $\mathbb{R}^2$ tal que a matriz de T em relação a essa base seja diagonal.

8. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ transformações lineares definidas por

$$T(x, y) = (x - 2y, y, x + y) \quad \text{e} \quad S(x, y, z) = (z, x + y - 2z).$$

   (a) Exiba a composta $S \circ T$ e verifique se a mesma é um isomorfismo.

   (b) Caso seja possível, determine $(S \circ T)^{-1}$. Caso não seja, por quê?

9. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{K}$. Se U e V são isomorfos, então mostre que $\dim(U) = \dim(V)$ (Lembrando que $\dim(U)$ representa a dimensão do espaço U).

10. Mostre que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}^k$ é diagonalizável para todo $k \in \mathbb{N} - \{0\}$.