Universidade Estadual de Londrina
Departamento de Matemática
Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada e Computacional
Processo de Seleção – 2º Semestre de 2022

BANCO DE QUESTÕES - ÁLGEBRA LINEAR

---

1. Assinale **V** para Verdadeiro e **F** para falso as afirmações a seguir. Justifique sua resposta provando com argumentos matemáticos para **V**, ou exibindo um contraexemplo quando a resposta for **F**.

   (a) Sejam A e B matrizes de ordem $n \times n$, se A é semelhante a B, então A^n é semelhante a B^n.

   (b) Dadas A e B matrizes de ordem $n \times n$, se A^n é semelhante a B^n, então A é semelhante a B.

   (c) A é semelhante a B e C é semelhante a D, então $A + C$ é semelhante a $B + D$.

   (d) Dadas A e B matrizes de ordem $n \times n$, se A é semelhante a B, então o traço de A é igual ao traço de B.

   (e) $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ é semelhante a $B = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, em que $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$.

   (f) $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ é semelhante a $B = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

2. A empresa "Plastisul" produz três tipos de tubos A, B e C, que rendem lucros anuais x_A, x_B e x_C, respectivamente. Em três anos de produção o fabricante percebeu que:
   (i) No 1° ano, o lucro do produto A mais o dobro do lucro do produto B foi igual ao dobro do lucro do produto C mais 3 unidades de lucro.
   (ii) No 2° ano, o dobro do lucro do produto A mais cinco vezes o lucro do produto B menos quatro vezes o lucro do produto C rendeu 2 unidades de lucro.
   (iii) No 3° ano, o triplo do lucro do produto A mais sete vezes o lucro do produto B foi igual a cinco vezes o lucro do produto C mais 5 unidades de lucro.

   (a) Monte um sistema S que modela os lucros dos produtos A, B e C.

   (b) É possível resolver o sistema S? Se sim, justifique! Caso contrário, por quê?

   (c) É possível dizer qual é o tubo que rendeu maior lucro nos três anos de produção? Existe algum tipo de tubo que deu prejuízo ao invés lucro nestes três anos de produção?

3. Um produtor que utiliza 40 hectares de sua propriedade para a produção de trigo e 60 hectares para a produção de aveia decidiu adotar a rotação de culturas. O ciclo de ambas as culturas é de 3 meses. Assim, a cada trimestre 30% das terras utilizadas para a produção de aveia serão utilizadas para a produção de trigo e 40% das terras utilizadas para a produção de trigo serão utilizadas para a produção de aveia.

   (a) Mostre que o problema pode ser modelado como um sistema dinâmico linear $\mathbf{x}_n = A\mathbf{x}_{n-1}$ e que $\mathbf{x}_n = A^n\mathbf{x}_0$.

   (b) Utilizando diagonalização de matrizes, determine quantos hectares serão utilizados para a plantação de trigo e quantos hectares serão utilizados para a plantação de aveia após 8 trimestres.

4. Seja $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ o conjunto de polinômios de graus arbitrários. Mostre que p e $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, polinômios quaisquer de graus diferentes, são linearmente independentes.

5. Considere o espaço vetorial $M_n(\mathbb{R})$ das matrizes de ordem n. Uma matriz $A = [a_{ij}]$ é dita simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i e j, e antissimétrica se $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo i e j.

   (a) Mostre que o conjunto das matrizes simétricas (S_n) e antissimétricas (A_n) de ordem n são subespaços vetoriais de $M_n(\mathbb{R})$.

   (b) Mostre que $S_n \oplus A_n = M_n(\mathbb{R})$.

6. Assinale **V** para <u>Verdadeiro</u> e **F** para <u>falso</u> as afirmações a seguir. Justifique sua resposta provando com argumentos matemáticos para **V**, ou exibindo um contraexemplo quando a resposta for **F**.

   (a) Dadas A e B matrizes de ordem $n \times n$, então $A \cdot B = B \cdot A$

   (b) Dadas A e B matrizes de ordem $n \times n$, se $A \cdot B = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$.

   (c) Se $A = B \cdot C$, onde A, B, C são matrizes $n \times n$, então $\det A = (\det B)(\det C)$. (Lembrando que $\det A$ representa o determinante de A)

   (d) Se A é uma matriz $n \times n$ inversível, com inversa A^{-1}, então $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

7. Considere o espaço vetorial da funções reais $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e os seguintes subconjuntos $U = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}); f \text{ é par}\}$ e $W = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}); f \text{ é impar}\}$.

   (a) Verifique que U e W são subespaços vetoriais de V.

   (b) Verifique que $V = U \oplus W$, ou seja, $V = U + W$ e $U \cap W = \{0\}$.

8. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$T(x, y) = (3x + y, y)$$

   (a) Determine os autovalores de T e os autovetores correspondentes.

   (b) Determine uma base do $\mathbb{R}^2$ tal que a matriz de T em relação a essa base seja diagonal.

9. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (x - 2y, z, x + y).$$

   (a) Determine os subespaços: Núcleo de T ($Nuc(T)$) e a Imagem de T ($Im(T)$).

   (b) Exiba uma base para $Nuc(T)$ e $Im(T)$.

   (c) T é um isomorfismo? Justifique!

10. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ transformações lineares definidas por

$$T(x, y) = (x - 2y, y, x + y) \quad \text{e} \quad S(x, y, z) = (z, x + y - 2z).$$

   (a) Exiba a composta $S \circ T$ e verifique se a mesma é um isomorfismo.

   (b) Caso seja possível, determine $(S \circ T)^{-1}$. Caso não seja, por quê?

11. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{K}$. Se U e V são isomorfos, então $\dim(U) = \dim(V)$ (Lembrando que $\dim(U)$ representa a dimensão do espaço U).

12. Sejam U, V espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $T : U \to V$ uma transformação linear.

   (a) Se T é injetora e $\{u_1, \cdots, u_n\} \subset U$ é um conjunto linearmente independente então o conjunto $\{T(u_1), \cdots, T(u_n)\} \subset V$ é linearmente independente;

   (b) Se o conjunto $\{T(u_1), \cdots, T(u_n)\} \subset V$ é linearmente independente então $\{u_1, \cdots, u_n\} \subset U$ é um conjunto linearmente independente.

13. Sejam U, V espaços vetoriais de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $T : U \to V$ uma transformação linear.

   (a) Se T é sobrejetora, $\dim(U) = 2$ e $\dim(V) = 1$. Determine a dimensão do núcleo de T ($Nuc(T)$);

   (b) Se $U = V$ e T é injetora então T é bijetora;

   (c) Se $\dim(U) > \dim(V)$ então T não é injetora.

14. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Use o Teorema de Cayley-Hamilton para calcular A^2 e A^{-1}.

15. Mostre que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}^k$ é diagonalizável para todo $k \in \mathbb{N} - \{0\}$.