PROVA DO PGMAC – 16/11/2018

Nome: ____

RG: ____________________

Questão 1: Seja $T\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja matriz, em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^5$ e $\mathbb{R}^3$, é

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Obtenha uma base do núcleo de T. Obtenha uma base da imagem de T.

PROVA DO PGMAC – 16/11/2018

Nome: ______________________________

Questão 2: Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e norma $\| \cdot \|$. Diz-se que dois vetores $u, v \in V$ são *ortogonais* em V, e denota-se por $u \perp v$, quando $\langle u, v \rangle = 0$.

(a) Mostre que o vetor nulo 0 é ortogonal a todo vetor v em V.

(b) Se $u \perp v$, então mostre que $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

(c) Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mostre que vale a recíproca do item (b).

Nome: ____________________

Questão 3: Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule A^{202}.

PROVA DO PGMAC – 16/11/2018

Nome: ____

Questão 4: Prove que a sequência $x_n = (1 - 3/n)^n$, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 4$, é crescente. É possível concluir que (x_n) é convergente? Justifique.

Nome: ____

Questão 5: Prove ou dê um contraexemplo para as seguintes afirmações:

(a) Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então a imagem direta $f(A) = \{f(x);\, x \in A\}$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$ para todo conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}$ dado.

(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então a imagem inversa $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R};\, f(x) \in B\}$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$ para todo conjunto aberto $B \subset \mathbb{R}$ dado.

Nome: ______________________________

Questão 6: Considere a função $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{e^{-x}}{2}$.

(a) Mostre que $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}, \quad \forall\, x \in [0,\infty)$.

(b) Mostre que $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|, \quad \forall\, x, y \in [0,\infty)$.

(c) Mostre que a equação $x = e^{-x}$ possui uma única raiz real positiva.