PROVA DE SELEÇÃO

Mestrado 2017

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

INSTRUÇÕES

1. Utilize apenas caneta azul ou preta.
2. Escreva seu nome no espaço indicado.
3. A duração desta prova é de 4 horas.
4. As questões serão consideradas somente se estiverem **devidamente justificadas**.
5. Todas as questões têm o mesmo valor.
6. Utilize o verso das folhas como rascunho.
7. A interpretação das questões faz parte do exame, sendo proibido fazer perguntas a quem quer que seja.
8. É proibido utilizar calculadoras ou consultar quaisquer materiais escritos.

Para uso exclusivo da Comissão de Seleção	
Questão	Pontuação
1	
2	
3	
4	
5	
6	
TOTAL	

Nome:

Boa Prova.

Questão 1. Leia a afirmação abaixo.

Afirmação. *Se* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função Riemann integrável em intervalos compactos, então*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(t)\, dt = f(0).$$

Determine se a afirmação anterior é verdadeira ou falsa. Caso seja verdadeira, apresente uma demonstração. Caso seja falsa, apresente um contra-exemplo.

Questão 2. Sejam $k > 0$, I um intervalo aberto não vazio de $\mathbb{R}$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Demonstre que as seguintes afirmações são equivalentes.

i. $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ para quaisquer $x, y \in I$.

ii. $|f'(x)| \leq k$ para qualquer $x \in I$.

Questão 3. Seja $a > 0$ e considere uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$x_1 > 0 \ \text{ e } \ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \text{ se } n \geq 1.$$

Demonstre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e que $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

Questão 4. Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \longrightarrow V$ uma transformação linear. Demonstre que as seguintes afirmações são equivalentes.

i. $\ker(T) \cap T(V) = \{0\}$.

ii. Se $(T \circ T)(v) = 0$ para $v \in V$, então $T(v) = 0$.

Questão 5. Seja V o espaço vetorial real das funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ equipado com as operações usuais. Considere os subconjuntos:

$$W_1 = \{f \in V : \ f(-x) = f(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{f \in V : \ f(-x) = -f(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}\}.$$

Faça o que se pede abaixo.

a) Demonstre que W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de V.

b) Demonstre que $V = W_1 \oplus W_2$.

Questão 6. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2^{\frac{1}{3}} \\ -2^{\frac{2}{3}} & 0 \end{bmatrix}$. Calcule A^{435}.