PROVA DE SELEÇÃO

21 Novembro de 2015

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

Questões	Pontos
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Nome: ____

Todas as questões têm a mesma pontuação.
As questões serão consideradas somente se forem devidamente justificadas.
Use o verso das folhas como rascunho.

BOA PROVA!

Questão 1. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 1 - x^2 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Verifique em quais pontos f é diferenciável e calcule a derivada de f nestes pontos.

Questão 2. Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Mostre que se f é contínua, com $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ e

$$\int_a^b f(x)dx = 0,$$

então $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Questão 3. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequências positivas tais que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = c \in \mathbb{R}^*.$$

Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge se, e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge.

Questão 4. Considere o subespaço vetorial W de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores

$$v_1 = (1, 1, 0), \quad v_2 = (0, -1, 1) \quad \text{e} \quad v_3 = (1, 1, 1).$$

Desta forma, é possível afirmar que $W = \mathbb{R}^3$? Justifique sua resposta.

Questão 5. Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : U \longrightarrow V$ uma transformação linear. Prove que são equivalentes os seguintes itens:

1. T é injetora.

2. Se $\{u_1, \cdots, u_n\}$ é um subconjunto linearmente independente de U, então $\{T(u_1), \cdots, T(u_n)\}$ é um subconjunto linearmente independente de V.

Questão 6. Considere $a \in \mathbb{R}$ e o sistema de equações lineares $Ax = b$, em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

que pode ser resolvido utilizando o esquema iterativo dado por $x^{k+1} = Rx^k + c$ com $k = 1, \cdots, n$, sendo

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ wa & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-w & wa \\ 0 & 1-w \end{bmatrix} \text{ e } c = wb.$$

A condição necessária e suficiente para a convergência do esquema iterativo é que

$$\rho(R) = \max_{i=1,2} (|\lambda_i|) < 1,$$

sendo λ_1 e λ_2 autovalores de R. Assim considerando $w = 1$, estabeleça a condição necessária e suficiente sobre os <u>valores de a</u> para o qual o esquema iterativo seja convergente.