PROVA DE SELEÇÃO

15 Novembro de 2013

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

Questões	Pontos
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
Total	

Nome: ____

Todas as questões têm a mesma pontuação.
As questões serão consideradas somente se forem devidamente justificadas.
Use o verso das folhas como rascunho.

BOA PROVA!

Questão 1. Prove que a sequência $x_n = \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^n$ é crescente para $n \in \mathbb{N}$. Pode-se afirmar que esta sequência é convergente? Justifique!

Questão 2. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in \mathbb{R}$. Mostre que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, para toda sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}$ com $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, tem-se que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$.

Questão 3. Suponhamos que $f : I \to \mathbb{R}$ seja uma função derivável em $I = (a, b)$ e que exista uma constante $M > 0$ tal que $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in I$. Mostre que f é uma função uniformemente contínua em I.

Questão 4. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável com derivada $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável em $[a,b]$ e considere os números $M = \frac{a+b}{2}$ e $N = \frac{f(a)+f(b)}{2}$. Mostre que existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{2(b-a)} \int_a^b \left\{ f(x) + (M-x)f'(x) + N \right\} dx.$$

Questão 5. Seja $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear cuja matriz em relação as bases canônicas de $\mathbb{R}^5$ e $\mathbb{R}^3$ é dada por

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Determine uma base para núcleo $\mathrm{Ker}(T)$ e uma base para imagem $\mathrm{Im}(T)$.

Questão 6. Sejam U e V $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e $T : U \to V$ um isomorfismo. Se $U = U_1 \oplus U_2$, então prove que $V = T(U_1) \oplus T(U_2)$.

Questão 7. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $f : V \to \mathbb{K}$ um funcional linear não nulo.

(a) Prove que existe $v_0 \in V$ tal que $f(v_0) = 1$.

(b) Considerando $W = [v_0]$, prove que $V = W \oplus \operatorname{Ker}(f)$.

Questão 8. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sejam U e W subespaços de V. O subespaço ortogonal a um conjunto $S \subset V$ é definido por

$$S^{\perp} = \{v \in V;\ \langle v, u \rangle = 0,\ \forall\ u \in S\}.$$

(a) Prove que $(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$.

(b) Se $U \subset W^{\perp}$ e $V = W + U$, mostre que $U = W^{\perp}$.

–FOLHA EXTRA–

–FOLHA EXTRA–