PROVA DE SELEÇÃO

16 Novembro de 2012

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

	Pontos
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
Questão 5	
Questão 6	
Questão 7	
Questão 8	
Total	

Nome: ____

Todas as questões têm a mesma pontuação.
As questões serão consideradas somente se forem devidamente justificadas.
Use o verso das folhas como rascunho.

BOA PROVA!!!

Questão 1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2\text{sen}(1/x)$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Verifique que f é derivável em $\mathbb{R}$ e calcule $f'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Questão 2. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $I = (a, b)$ tal que existe uma constante $K > 0$ de modo que $|f'(x)| \leq K$ para todo $x \in I$. Mostre que f é uniformemente contínua em I.

Questão 3. Demonstre ou dê um contra-exemplo para a seguinte afirmação:

$$\int_0^x |t| dt = \frac{1}{2}x|x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Questão 4. Considere uma sequência (x_n) de números reais. Prove as seguintes afirmações:

a) Se (x_n) é uma sequência de Cauchy, então (x_n) é uma sequência limitada.

b) A sequência (x_n) é convergente se, e somente se, (x_n) for um sequência de Cauchy.

Questão 5. Sejam U e V subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ dados por

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x - y = 0 \ \text{ e } \ 3x - z = 0\} \ \text{ e } \ V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = y\}.$$

a) Determine uma base e a dimensão para para $U,\ V,\ U \cap V$ e $U + V$.

b) Pode-se afirmar que $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$? Justifique!

Relembre que $U \oplus V$ denota a soma direta de U e V.

Questão 6. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e norma $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Mostre que um operador linear $T : V \to V$ preserva produto interno se, e somente se, preserva norma, ou seja,

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle; \ \ \forall\, u, v \in V \qquad \Longleftrightarrow \qquad ||T(v)|| = ||v||; \ \ \forall\, v \in V.$$

Questão 7. Dado um vetor unitário $u \in \mathbb{R}^n$, prove que o operador $H_u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definido por $H_u(v) = v - 2\langle v, u\rangle u$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$, é ortogonal, ou seja, H_u preserva produto interno.

Questão 8. Sejam U e V espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $T : U \longrightarrow V$ uma transformação linear. Prove que

a) T é injetora se, e somente se, $\operatorname{Ker}(T) = \{0\}$, em que $\operatorname{Ker}(T)$ denota o núcleo de T.

b) T é injetora se, e somente se, T leva cada subconjunto linearmente independente de U em um subconjunto linearmente independente de V.

–FOLHA EXTRA–

–FOLHA EXTRA–