PROVA DE SELEÇÃO

06 de Fevereiro de 2012

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

	Pontos
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
Questão 5	
Questão 6	
Questão 7	
Questão 8	
Total	

Nome: ____

Todas as questões têm a mesma pontuação.
As questões serão consideradas somente se forem devidamente justificadas.
Use o verso das folhas como rascunho.

BOA PROVA!!!

Questão 1. Prove ou dê um contra-exemplo para as seguintes afirmações.

a) Toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável é contínua.

b) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(c) = 0$. Então c é um ponto de máximo local ou de mínimo local da função f.

Questão 2. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência decrescente que possui uma subsequência limitada. Prove que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Questão 3. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Prove que o conjunto

$$F = \{x \in [a, b] : f(x) = g(x)\}$$

é fechado.

Questão 4. Prove que toda função polinomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grau ímpar possui uma raiz, isto é, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = 0$.

Dado $T : V \to V$, denotamos por $N(T)$ o núcleo do operador T e $R(T)$ a imagem de T.

Questão 5. Sejam $S, T : V \to V$ operadores lineares tais que $T^2 = T$, $S^2 = S$ e $T \circ S = S \circ T$. Mostre que

a) $(T \circ S)^2 = T \circ S$.

b) $N(T \circ S) = N(T) + N(S)$.

Sugestão: $\forall v \in V,\ v = Tv + (1 - T)v$.

Questão 6. Seja V um espaço com produto interno $\langle , \rangle$. Dados $u, v \in V$, seja $w = \frac{\langle u,v \rangle}{\|v\|^2} v$.

a) Mostre que $u - w$ é ortogonal a v e a w.

b) Mostre que $\|u\| \geq \|w\|$.

Questão 7. Seja $T : V \to V$ um operador, $Tx_i = a_i x_i$, $i = 1,2$, $a_1 \neq a_2$. Prove ou dê contra-exemplo:

1. $\{x_1, x_2\}$ é um conjunto linearmente independente.
2. Seja y autovetor de T com autovalor a_1, então $\{y, x_1, x_2\}$ é linearmente dependente.

Questão 8. Duas matrizes A e B são *semelhantes* se existe uma matriz invertível C tal que $A = C^{-1}BC$. Prove que as matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ são semelhantes.

–FOLHA EXTRA–

–FOLHA EXTRA–